T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHWARZ LEMMASI VE SINIRDAKİ SABİT NOKTA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURCU GÖK

TEMMUZ

SCHWARZ LEMMASI VE SINIRDAKİ SABİT NOKTA

BURCU GÖK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Doç. Dr. BÜLENT NAFİ ÖRNEK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2018

Yüksek Lisans Tezi kabul ve onay sayfası

Burcu GÖK tarafından hazırlanan "Schwarz Lemması ve Sınırdaki Sabit Nokta " Öğrenme Alanı" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ...N. Örnek...

Başkan : Prof. Dr. Yaşar BOLAT

Matematik Anabilim Dalı, Kastamonu Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tevfik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Tez Savunma Tarihi: 10.07.2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Burcu GÖK

10.07.2018

SCHWRAZ LEMMASI VE SINIRDAKİ SABİT NOKTA
(Yüksek Lisans Tezi)

BURCU GÖK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz-2018

ÖZET

Bu çalışmada, kompleks analizin önemli konularından olan Schwarz lemmasının farklı bir sınır versiyonu incelenmiştir.

Bizim çalışmamızda farklı analitik fonksiyon sınıfları dikkate alınarak, fonksiyonun sınır noktasında açısal limitin varlığı kabul edilerek bu noktadaki ikinci mertebeden açısal türevin modülünün aşağıdan değerlendirilmeleri elde edilmiştir. İncelenen fonksiyonların tek katlı ve çok katlı olması halleri ayrı ayrı ele alınmış olup, elde edilen kesin eşitsizliklerde fonksiyonun bir iç noktadaki değeri ve farklı mertebeden türevleri kullanılmıştır.

Sayafa Adedi : 26
Anahtar Kelimeler : Schwarz lemma, Açısal Türev, Holomorfik fonksiyon, Kritik noktalar.
Danışman : Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

SCHWARZ LEMMA AND FIXED POINT AT THE BOUNDARY

(M. Sc. Thesis)

BURCU GÖK

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE

July-2018

ABSTRACT

In this study, as one of the important topics in complex analysis, a different boundary version of Schwarz lemma has been considered.

In our study, considering different classes of analytical functions, boundary behaviour for the modulus of the second order angular derivative of the function has been carried out from below assuming that the function has angular limit at the boundary point. Being univalent and multivalent of examined functions has been investigated separately and the value of the function in an inner point and its derivatives from different order have been used in obtained sharp inequalities.

Page Number : 26

Key Words : Schwarz lemma, Angular Derivative, Holomorphic function, Critical Points

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Amasya Üniversitesinde Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bilgisi, tecrübesi, akademik kişiliği ve güler yüzüyle bana yön veren saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e ve ders aşamasında bilgilerinden ve fikirlerinden istifade ettiğim Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR ve Dr. Öğ. Üyesi Süleyman DİRİK'e teşekkürlerimi sunarım.

Sonsuz sabırlarını, güvenlerini, maddi ve manevi desteklerini her daim hissettiğim beni her zaman, her konuda destekleyen değerli eşim Doç. Dr. Arif GÖK'e sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlem, U sıfır merkezli birim daire ve $\mathbf{T} = \partial U = \{z : |z| = 1\}$ olsun. Kompleks analizin temel konularından biri Schwarz Lemması'dır. Günümüzdeki ifadesi Constantin Carathéodory tarafından yazılmıştır. Schwarz Lemması, kompleks düzlemdeki birim daire üzerinde tanımlı ve değer kümesi yine birim daire olan analitik fonksiyonların aldığı değerlerin üzerine kestirimler veren önemli bir sonuçtur. Geometrik fonksiyonlar teorisinin, analitik tasvirlerin sabit nokta teorisinin, hiperbolik geometrinin ve analizin birçok diğer alanlarının gelişmesinde önemli rol oynamaktadır [Ahlfors, 1979, Ahlfors, 1938, Dineen, 1989, Goluzin, 1969, Markushevich, 1965, Dubinin, 2007, Dubinin, 2000, Dubinin, 2002, Dubinin, 2005, Dubinin ve Olesov, 2004, Mercer, 1997]. Maksimum modül prensibinin direk uygulaması olan Schwarz Lemması basit ve yaygın olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Schwarz Lemması. $f : U \to U$ analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $z \in U$ noktaları için

$$|f(z)| \le |z| \tag{1.1}$$

ve

$$|f'(0)| \le 1 \tag{1.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (1.1) eşitsizliğinde herhangi bir $z\left(0 < |z| < 1\right)$ noktasında veya (1.2) eşitsizliğinde eşitlik durumu yalnızca θ reel bir sabit olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ olduğunda mümkündür [Goluzin, 1969].

Bir çok önemli teoremlerin ispatlarında Schwarz Lemması'nın önemini görmek mümkündür. Sınırlı bir tam fonksiyonunun sabit olmasını hükmeden Liouville Teoremi buna örnek olarak gösterilebilir. Ayrıca, pozitif reel fonksiyonlar için devre uygulamalarını içermektedir. Şöyleki pozitif reel fonksiyonları için elde edilen empedans fonksiyonları bir devreye karşılık gelmektedir. Bu devreleri L ve LC şeklinde gösterebiliriz [Reza, 1962, Örnek ve Düzenli, 2018, Reza, 1961, Reza, 1984, Richards, 1947).
Birim diskin kendisine

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

şeklinde konform dönüşümüne Möbius dönüşümü denir, burada θ reel sayı ve $|z_0| < 1$.

Schwarz Lemması'nın ilk genellemesi Pick tarafından verilen Schwarz-Pick Lemması'dır ve aşağıdaki şekilde ifade olunur:

Schwarz-Pick Lemması. $f:U\to U$ analitik ve $z,z_0\in U$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-f(z)\overline{f(z_0)}}\right|\leq\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|$$

ve

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leq\frac{1}{1-|z|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik halleri yalnızca $f(z)$ fonksiyonunun birim dairenin kendi kendine konform tasvir olması durumunda mümkündür [Goluzin, 1969].

Schwarz-Pick Lemması, Schwarz Lemması'ndaki $f(0)=0$ kısıtlamasının kaldırılabileceğini göstermektedir [Beardon ve Minda, 2004, Beardon ve Carne, 1992, Osserman, 1999, Mercer, 2006].

Kompleks analizin temel taşlarından olan Schwarz Lemması'nın uygulanabilirlik alanı çok geniş olduğundan araştırmacıların popüler bulduğu konular arasına girmiştir. Son yıllarda Schwarz Lemması ile ilgili çok önemli sonuçlar elde edilmiştir. Kompleks analizin merkezi bir kullanım aracı haline gelen Schwarz Lemması'nın sınır versiyonu hakkında da önemli çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmaların bir kısmı birim dairenin sınırında $|f(b)|=1$ koşulunu sağlayan noktalarında fonksiyonun türevinin modülünün aşağıdan değerlendirilmesi hakkındadır [Azeroğlu ve Örnek, 2013, Boas, 2010, Burns ve Krantz, 1994, Dubinin, 2004, Krantz, 2011, Osserman, 2000, Mateljević, 2015, Mateljević, 2016, Mateljević, 2016, Örnek, 2012] .

Schwarz Lemma'sının sınır versiyonu basit halde şu şekilde verilir:

f, U dairesinde analitik, $f(0)=0$ ve $|z|<1$ için $|f(z)|<1$ olsun. Ayrıca varsayalım ki, f fonksiyonu bir $b\in T$ noktasına sürekli devam ediliyor, $f(0)=0$, $|f(b)|=1$ ve $f'(b)$ mevcuttur. Bu taktirde klasik Schwarz Lemması'ndan, sınırda Shwarz Lemması olarak bilinen

$$|f'(b)|\geq 1 \tag{1.3}$$

eşitsizliği elde edilir. (1.3)'da eşitlik hali sadece $f(z)=ze^{i\alpha},\alpha\in R$ olduğunda mümkündür. (1.3) eşitsizliği ve genellemeleri geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli uygulamalara sahiptir. Yukarıdaki koşullara ek olarak eğer f'nin birim dairede $z_k,\ k=1,....,n$ noktalarında sıfırları mevcut ise,

$$\left|f'(b)\right| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\left|z_k\right|^2}{\left|b-z_k\right|^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Caratheodory tarafından ispatlanan bu eşitsizlik (1.3)'dan daha kesin bir eşitsizliktir [Carathéodory, 1954].

Schwarz-Pick Lemması'nda $z_0=0$ halini yazarsak,

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right| \leq |z|$$

elde edilir. Buradan elementer işlemlerle

$$\left|f(z)\right| \leq \frac{|z|+|f(0)|}{1+|z||f(0)|} \tag{1.4}$$

ilişkisine varılır. Eğer burada f fonksiyonu $f(0)=0$ koşulunu da sağlıyorsa, bu taktirde $\dfrac{f(z)}{z}$ fonksiyonuna (1.4) uygulayarak

$$\left|f(z)\right| \leq |z|\frac{|z|+|f'(0)|}{1+|z||f'(0)|} \tag{1.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Bunlara ilave olarak $f(z)$ fonksiyonu $\left|f(b)\right|=1$ olmak üzere $b\in \mathrm{T}$ noktasına sürekli devam ettiriliyorsa ve $f'(b)$ mevcutsa (1.5)'te limite geçilerek

$$\left|f'(b)\right| \geq \frac{2}{1+|f'(0)|} \tag{1.6}$$

alınır.

(1.6) eşitsizliğinde eşitlik hali ($b=1$ olduğunda) $f(z)=z\dfrac{z+\tau}{1+\tau z}, 0\leq\tau\leq 1$ fonksiyonu için gerçeklenir [Osserman, 2000].

Eğer $f(z)=a_p z^p + a_{p+1}z^{p+1}+....$ şeklinde ise (1.5) eşitsizliğinden daha güçlü bir eşitsizlik olan

$$\left|f(z)\right| \leq \left|z^p\right|\frac{|z|+|a_p|}{1+|z||a_p|} \tag{1.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu $|f(b)|=1$ olmak üzere $b\in\mathbf{T}$ noktasına sürekli devam ettiriliyorsa ve $f'(b)$ mevcutsa, (1.7) eşitsizliğinden,

$$|f'(b)| \geq p + \frac{1-|a_p|}{1+|a_p|} \tag{1.8}$$

ve

$$|f'(b)| \geq p$$

eşitsizliği elde edilir [Osserman, 2000].

V. N. Dubinin tarafından f fonksiyonunun sıfırları ve sıfır noktasında Taylor açılımının ilk sıfırdan farklı katsayısı kullanılarak (1.6) ve (1.8) ilişkilerinden daha kuvvetli eşitsizlikler alınmıştır [Dubinin, 2004]. Aşağıdaki şekilde ifade olunur:

Teorem 1. $f(z)=a_p z^p+....,a_p\neq 0$ fonksiyonu U diskinde analitik ve $|z|<1$ için $|f(z)|<1$ olsun. Farzedelim ki f fonksiyonu $|z|=1$ çemberinin bir b noktasına sürekli devam olunabilir olup, bu noktada $f'(b)$ türevine sahiptir ve $|f(b)|=1$. $\{a_k\}_{k\in\alpha}$, U'de f fonksiyonunun $z=0$'dan farklı belirli sıfırlarının bir ailesi, p_k ise $a_k, k\in\alpha$ sıfırının katlılığı olsun. Bu takdirde

$$|f'(b)| \geq p + \sum_{k\in\alpha} n_k \frac{1-|a_k|^2}{|b-a_k|^2} + \frac{\prod_{k\in\alpha}|a_k|^{n_k} - |a_p|}{\prod_{k\in\alpha}|a_k|^{n_k} + |a_p|}, \tag{1.9}$$

burada n_k $n_k \leq p_k, k\in\alpha$ koşulunu sağlayan keyfi pozitif tamsayıdır ve $\sum_{\varnothing}:=0$, $\prod_{\varnothing}:=0$'dir. Eğer $\{a_k\}_{k\in\alpha}$, U'de f fonksiyonunun $z=0$'dan farklı tüm sıfırların bir ailesi ise o halde

$$|f'(b)| \geq p + \sum_{k\in\alpha} p_k \frac{1-|a_k|^2}{|c-a_k|^2} - \frac{1}{2}\log\left|\frac{a_p}{\prod_{k\in\alpha} a_k^{p_k}}\right|, \tag{1.10}$$

doğrudur. $n_k = p_k, k\in\alpha$ için (1.9)'de ve (1.10)'da eşitlik hali Blaschke fonksiyon, yani

$$B(z) = z^p \prod_{k\in\alpha}\left[\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1-\overline{a_k}z}\right]^{p_k} \tag{1.11}$$

olduğunda sağlanır. Burada $\{a_k\}_{k\in\alpha}$, U 'de (1.11) çarpımını yakınsak yapan noktalar ailesidir.

Bundan sonraki çalışmalarda f fonksiyonunun b sınır noktasına sürekli devamı koşulu yerine, daha genel olan, b noktasında açısal limitin mevcutluğu koşulu konularak, f fonksiyonun b noktasında açısal türevinin aşağıdan değerlendirilmesi ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Açısal limitin tanımı ve onun hakkındaki çalışmamız için gereken teoremler aşağıda verilmiştir.

Tanım 2. $b \in \mathrm{T}$ noktası için

$$\Delta = \left\{ z \in U : \left|\arg\left(1-\bar{b}z\right)\right| < \alpha, |z-b| < \rho \right\} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \rho < 2\cos\alpha \right)$$

kümesine Stolz Açısı denir. $f : \mathrm{U} \to \hat{\mathrm{C}}$ şeklinde bir fonksiyon olsun. $z \in \Delta$, b noktasındaki herhangi Stolz açısının içinde b noktasına yaklaştığında, $f(z)$ fonksiyonu da a sayısına yaklaşıyorsa, f fonksiyonu $b \in \mathrm{T}$ noktasında a açısal limitine sahiptir denir. Δ açısınınn genişliği olan 2α sayısı, π 'den küçük herhangi bir sayı olabilir.

Limiti olan fonksiyonun açısal limiti mevcuttur. Ancak tersi doğru değildir. Örnek olarak

$$f_0(z) = \exp\left[-\frac{1+z}{1-z}\right], \quad z \in U$$

fonksiyonu gösterilebilir. **T** 'ye teğet olan bir çember üzerinde z noktası 1 noktasına yaklaşırsa, $\mathrm{Re}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$ ve dolayısıyla $|f_0(z)|$ fonksiyonu sabit olur. Bu taktirde bu fonksiyonun 1 noktasında açısal limiti sıfırdır ancak limiti yoktur.

$f : U \to U$ fonksiyonu b noktasında α açısal limitine sahip olsun. Eğer b noktasındaki her Δ Stolz açısı için

$$\lim_{\varsigma \to b, \varsigma \in \Delta} \frac{f(\varsigma)-\alpha}{\varsigma - b} \beta$$

olacak şekilde bir β sayısı mevcut ise, β 'ya f fonksiyonunun b noktasında açısal türevi denir ve $f'(b)$ ile işaretlenir [Pommerenke, 1992].

Teorem 3. $f:U\to U$, $f\not\equiv 1$ bir analitik fonksiyon, $\{z_n\}\subset U$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=1$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. Bu taktirde tüm böyle diziler için ya $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|}=\infty$ ya da öyle sonlu pozitif α reel sayıları vardır ki her z, $|z|<1$ için

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\le \alpha\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \tag{1.12}$$

ilişkisi sağlanır.

(1.12)'de eşitliği gerçekleyen α_0 sayısı ve z^*, $|z^*|<1$ noktası varsa, bu taktirde

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}=\alpha_0\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$$

ilişkisi her z, $|z|<1$ için sağlanır ve f fonksiyonu

$$f(z)=\frac{(1+z)-(\alpha_0+i\beta)(1-z)}{(1+z)+(\alpha_0-i\beta)(1-z)},\quad (\alpha_0>0,\ \beta\ reel)$$

şeklinde non-Euclidean dönüşümdür [Carathéodory, 1954].

Teorem 4. $f:U\to U$ analitik fonksiyonu ve $\{x_n\}$ reel dizisi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$ koşulunu sağlasın. Bu takdirde

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}}}\frac{1-|f(x)|}{1-x},\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}}}\frac{|1-f(x)|}{1-x},\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}}}\frac{1-f(x)}{1-x}$$

limitleri mevcuttur ve eşittirler [Carathéodory, 1954].

Bu çalışmamızda yukarda elde edilen eşitsizlikleri daha genel sınıflar için yapmış olup $f''(b)$ 'nin f'in iki farklı sıfırındaki sıfırdan farklı ilk Taylor katsayıları yardımıyla değerlendiriyoruz. Buna ilaveten sonuçlarımızda f fonksiyonunun b sınır noktasına sürekli devamı koşulu yerine, daha genel olan, b noktasında açısal limitin mevcutluğu koşulu konulmuştur. Buda açısal limitler hakkında Julia-Wolff teorisinin kullanılmasını zorunlu hale getirir.

Julia-Wolff Lemma. $f : U \to U$ analitik fonksiyonu $b \in \mathbf{T}$ noktasında $f(b) \in \mathbf{T}$ açısal limitine sahip ve $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde $f'(b)$ açısal türevi mevcuttur ve $1 \leq |f'(b)| \leq \infty$ 'dir [Pommerenke, 1992].

Sonuç. f analitik fonksiyonunun sonlu bir $f'(b)$ açısal türevinin olması için gerek ve yeter koşul $f(b) \in \mathbf{T}$ noktasında sonlu $f'(b)$ açısal limitinin olmasıdır [Pommerenke, 1992].

2. SINIRDA SCHWARZ LEMMA'SI HAKKINDA TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde sınırda Schwarz Lemması'nın yeni bir versiyonunu elde edeceğiz. Birim çemberin b noktasında $f''(b)$ açısal türevinin modülünü aşağıdan değerlendireceğiz. Bu değerlendirmede f fonksiyonunun biri orijin diğeri $z_1 \neq 0$ olmak üzere Taylor açılımlarının sıfırdan farklı ilk katsayıları kullanılacaktır. Elde edilen eşitsizlikler kesindir. Bundan dolayı değerlendirmeler tek bir sıfırdaki Taylor katsayısının kullanıldığı (1.9) eşitsizliğinden prensip olarak farklıdırlar. Sonuçlar orijinaldir [Gök ve Örnek, 2017].

$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ fonksiyonu birim disk U da analitik ve $\Re f'(z) > \frac{1-\alpha}{2}, (-1 < \alpha < 1)$ olsun. Aşağıdaki fonksiyonu düşünelim:

$$\Theta(z) = \frac{f'(z) - 1}{f'(z) + \alpha}.$$

Açıkça görülüyor ki, $\Theta(z)$ fonksiyonu birim disk U 'da analitik ve $\Theta(0) = 0$ 'dır. Böylece, Schwarz Lemması'ndan $|\Theta'(0)| \leq 1$ elde ederiz. $\Theta(z)$ fonksiyonunun türevini alırsak,

$$\Theta'(z) = \frac{(1+\alpha) f''(z)}{\left(f'(z) + \alpha\right)^2},$$

$$\Theta'(0) = \frac{(1+\alpha) f''(0)}{\left(f'(0) + \alpha\right)^2} = \frac{f''(0)}{1+\alpha}$$

ve

$$|f''(0)| \leq 1 + \alpha$$

elde ederiz. Elde edilen bu eşitsizlikte eşitlik hali

$$f(z) = -\alpha z - \frac{1+\alpha}{e^{i\theta}} \ln\left(1 - z e^{i\theta}\right)$$

fonksiyonu ile sağlanır. Burada θ bir reel sayıdır.

Böylece yukarıda belirtilen sınıf için elde ettiğimiz Schwarz Lemması aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Lemma 2.1. $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ fonksiyonu birim disk U da analitik ve $\Re f'(z) > \frac{1-\alpha}{2}, (-1 < \alpha < 1)$ olsun. Bu takdirde

$$|f''(0)| \leq 1 + \alpha \tag{2.1}$$

ilişkisi sağlanır. Elde edilen bu eşitsizlikte eşitlik hali $f(z) = -\alpha z - \frac{1+\alpha}{e^{i\theta}} \ln\left(1 - ze^{i\theta}\right)$ fonksiyonu ile sağlanır. Burada θ bir reel sayıdır.

2.1. Temel Sonuçlar

Birim disk U'nun analitik f fonksiyonlarını $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalizasyonu ile, merkezi sabitleyerek incelemekteyiz; öyle ki f', U'yu sağ yarı düzleme götürmektedir (reel α sabiti için $\Re f'(z) > \frac{1-\alpha}{2}$, $-1 < \alpha < 1$). Bir $b \in \partial U$ sınır noktasında, f' türev fonksiyonunun $\Re f'(b) = \frac{1-\alpha}{2}$ olmak üzere non-tangential bir $f'(b)$ limiti olduğu varsayılmıştır. Sonuç olarak f fonksiyonu, belli özel fonksiyonlar için elde edilen eşitlikle, $b \in \partial U$ noktasında non-tangential anlamda ikinci dereceden bir türeve sahiptir ve çalışmamızda (2.2)'de olduğu gibi $|f''(b)|$ için kesin olarak bir alt sınır vardır. Daha ileri sonuçlar, merkezin dışında $f' \neq 1$ varsayımı altında elde edilmiştir.

Teorem 2.2. $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ fonksiyonu birim disk U da analitik ve $\Re f'(z) > \frac{1-\alpha}{2}, (-1 < \alpha < 1)$ olsun. Varsayalım ki $b \in \partial U$ noktasında f' fonksiyonu $f'(b)$ non-tangential limitine sahiptir ve $\Re f'(b) = \frac{1-\alpha}{2}$. Bu takdirde

$$|f''(b)| \geq \frac{1+\alpha}{4} \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.2) ilişkisinde

$$f(z) = -\alpha z - (1+\alpha)\ln(1-z)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat.

$$\Theta(z) = \frac{f'(z) - 1}{f'(z) + \alpha}$$

olsun. $\Theta(z)$ fonksiyonun birim disk U'da analitik, $\Theta(0) = 0$, $|z| < 1$ için $|\Theta(z)| < 1$ ve $b \in \partial U$ için $|\Theta(b)| = 1$'dir. Açıkca $\Theta(z)$ fonksiyonu, $b \in \partial U$ için non-tangential türeve sahiptir. Böylece f 'nin $b \in \partial U$ 'de ikinci mertebeden non-tangential türevi vardır. $\Theta(z)$ fonksiyonu sınırda Schwarz Lemması'nın özelliklerini sağladığından dolayı, (1.3)'den

$$1 \leq \left|\Theta'(b)\right| = \left|\frac{(1+\alpha) f''(b)}{\left(f'(b)+\alpha\right)^2}\right|$$

elde ederiz.

$$\left|f'(b)+\alpha\right|^2 \geq \left(\Re\left(f'(b)+\alpha\right)\right)^2 = \left(\Re f'(b)+\alpha\right)^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$$

olduğundan,

$$1 \leq \frac{(1+\alpha)\left|f''(b)\right|}{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2} = \frac{4}{1+\alpha}\left|f''(b)\right|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buda (2.2) ifadesini verir. Şimdi (2.2) ifadesinin kesin olduğunu gösterelim.

$$f(z) = -\alpha z - (1+\alpha)\ln(1-z)$$

olsun. Bu takdirde

$$f'(z) = -\alpha + \frac{1+\alpha}{1-z} = \frac{1+\alpha z}{1-z},$$

$$f''(z) = \frac{1+\alpha}{(1-z)^2}$$

ve

$$\left|f''(-1)\right| = \frac{1+\alpha}{(1-(-1))^2} = \frac{1+\alpha}{4}$$

eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki teoremde $f(z)$ fonksiyonunun $z=0$ noktası civarındaki Taylor açılımındaki ikinci katsayı eklenerek, (2.2) eşitsizliği kuvvetlendirilmiştir.

Teorem 2.3. $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ fonksiyonu birim disk U da analitik ve $\Re f'(z) > \frac{1-\alpha}{2}, (-1 < \alpha < 1)$ olsun. Varsayalım ki $b \in \partial U$ noktasında f' fonksiyonu $f'(b)$ non-tangential limitine sahiptir ve $\Re f'(b) = \frac{1-\alpha}{2}$. Bu takdirde

$$\left|f''(b)\right| \geq \frac{(1+\alpha)^2}{2\left(1+\alpha+\left|f''(0)\right|\right)}. \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.3) ilişkisinde

$$f(z) = -\alpha z + \sqrt{1-c^2}\arctan\left(\frac{c+z}{\sqrt{1-c^2}}\right) + \frac{c}{2}\ln\left(1+2cz+z^2\right) + k$$

(burada $k = -\sqrt{1-c^2}\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right)$ bir sabit ve $c = \frac{\left|f''(0)\right|}{1+\alpha}$, $[0,1]$ aralığında keyfi bir sayıdır (Bakınız (2.1))) fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat. $\Theta(z)$ fonksiyonu Teorem 2.2'nin ispatındaki şekilde olsun. Sınırda Schwarz Lemması'nın koşullarını sağladığından, $\Theta(z)$ fonksiyonuna (1.6) eşitsizliğini uygularsak

$$\frac{2}{1+\left|\Theta'(0)\right|} \leq \left|\Theta'(b)\right| = \left|\frac{(1+\alpha)f''(b)}{\left(f'(b)+\alpha\right)^2}\right| \leq \frac{4}{1+\alpha}\left|f''(b)\right|$$

elde ederiz.

$$\Theta'(z) = (1+\alpha)\frac{f''(z)}{\left(f'(z)+\alpha\right)^2}$$

ve

$$\left|\Theta'(0)\right| = \frac{\left|f''(0)\right|}{1+\alpha}$$

olduğu için,

$$\frac{2}{1+\frac{\left|f''(0)\right|}{1+\alpha}} \leq \frac{4}{1+\alpha}\left|f''(b)\right|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece, (2.3) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi (2.3) ifadesinin kesin olduğunu gösterelim.

$$f(z) = -\alpha z + \sqrt{1-c^2}\arctan\left(\frac{c+z}{\sqrt{1-c^2}}\right) + \frac{c}{2}\ln\left(1+2cz+z^2\right) + k$$

olsun. Bu takdirde

$$f'(z) = \frac{1+cz-\alpha cz-\alpha z^2}{1+2cz+z^2},$$

$$f''(z)=\frac{(c-\alpha c-2\alpha z)\left(1+2cz+z^2\right)-(2c-2z)\left(1+cz-\alpha cz-\alpha z^2\right)}{\left(1+2cz+z^2\right)^2}$$

ve

$$|f''(1)|=\frac{1+\alpha}{2(1+c)}$$

elde edilir.

$c=\frac{|f''(0)|}{1+\alpha}$ olduğundan, (2.3)'de eşitlik hali sağlanır.

Eğer $f(z)=z+c_{p+1}z^{p+1}+c_{p+2}z^{p+2}+....,p\geq 1$ fonksiyonu birim disk U da analitik ve $\Re f'(z)>\frac{1-\alpha}{2},(-1<\alpha<1)$ ise, bu takdirde

$$|f'(z)|\leq\frac{1+\alpha|z|^p}{1-|z|^p}$$

ve

$$|c_{p+1}|\leq\frac{1+\alpha}{1+p} \tag{2.4}$$

ilişkileri sağlanır.

(2.3) eşitsizliği aşağıdaki gibi $f(z)=z+c_{p+1}z^{p+1}+......$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki ilk katsayı olan c_{p+1} hesaba katılarak kuvvetlendirilebilir.

Teorem 2.4. $f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+....,\ a_{p+1}\neq 0,\ p\geq 1$ fonksiyonu birim disk U da analitik ve $\Re f'(z)>\frac{1-\alpha}{2},(-1<\alpha<1)$ olsun. Varsayalım ki $b\in\partial U$ noktasında f' fonksiyonu $f'(b)$ non-tangential limitine sahiptir ve $\Re f'(b)=\frac{1-\alpha}{2}$. Bu takdirde

$$|f''(b)|\geq\frac{1+\alpha}{4}\left(p+\frac{1+\alpha-(1+p)|a_{p+1}|}{1+\alpha+(1+p)|a_{p+1}|}\right). \tag{2.4}$$

(2.4) ilişkisinde

$$f(z)=\int_0^z\frac{1+et-\alpha et^p-\alpha t^{p+1}}{1+et+et^p+t^{p+1}}dt,$$

(burada $e=\frac{1+p}{1+\alpha}\left|a_{p+1}\right|$, $[0,1]$ aralığında keyfi bir sayıdır (Bakınız (2.4))) fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat. $\Theta(z)$ fonksiyonu Teorem 2.2'nin ispatındaki şekilde olsun. Sınırda Schwarz Lemması'nın koşullarını sağladığından, $\Theta(z)$ fonksiyonuna (1.8) eşitsizliğini uygularsak

$$p+\frac{1-\left|k_p\right|}{1+\left|k_p\right|}\leq\left|\Theta'(b)\right|=(1+\alpha)\frac{\left|f''(b)\right|}{\left|f'(b)+\alpha\right|^2}$$

elde ederiz. Burada $\left|k_p\right|=\frac{\left|\Theta^{(p)}(0)\right|}{p!}=\frac{1+p}{1+\alpha}\left|c_{p+1}\right|$ şeklindedir. Böylece,

$$p+\frac{1-\frac{1+p}{1+\alpha}\left|c_{p+1}\right|}{1+\frac{1+p}{1+\alpha}\left|c_{p+1}\right|}\leq\frac{4}{(1+\alpha)}\left|f''(b)\right|$$

ve

$$\left|f''(b)\right|\geq\frac{1+\alpha}{4}\left(p+\frac{1+\alpha-(1+p)\left|a_{p+1}\right|}{1+\alpha+(1+p)\left|a_{p+1}\right|}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi bu eşitsizliğin kesin olduğunu, yani eşitlik halini gösterelim.

$$f(z)=\int_0^z\frac{1+et-\alpha et^p-\alpha t^{p+1}}{1+et+et^p+t^{p+1}}dt$$

olsun. Buradan türev alırsak

$$f'(z)=\frac{1+ez-\alpha ez^p-\alpha z^{p+1}}{1+ez+ez^p+z^{p+1}},$$

$$\begin{aligned}f''(z)=&\frac{\left(e-\alpha pez^{p-1}-\alpha(p+1)z^p\right)\left(1+ez+ez^p+z^{p+1}\right)}{\left(1+ez+ez^p+z^{p+1}\right)}\\&-\frac{\left(e+epz^{p-1}+(p+1)z^p\right)\left(1+ez-\alpha ez^p-\alpha z^{p+1}\right)}{\left(1+ez+ez^p+z^{p+1}\right)^2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}f''(1)=&\frac{(e-\alpha pe-\alpha(p+1))\left(1+e+e+1^{p+1}\right)}{(1+e+e+1)}\\&-\frac{(e+ep+(p+1))(1+e-\alpha e-\alpha)}{(1+e+e+1)^2}\\&=-\frac{1+\alpha}{4}\left(p+\frac{1-e}{1+e}\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $e=\frac{1+p}{1+\alpha}\left|c_{p+1}\right|$ olduğu için (2.4) eşitsizliğinde eşitlik durumu sağlanmış olur.

$z_1,z_2,...,z_n$, $f(z)-z$ fonksiyonunun $z=0$'dan farklı olan kritik noktaları olsun. Bu taktirde (2.4) eşitsizliği aşağıdaki şekilde kuvvetlendirilir.

Teorem 2.5. $f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+....,\ a_{p+1}\neq 0,\ p\geq 1$ fonksiyonu birim disk U da analitik ve $\Re f'(z)>\frac{1-\alpha}{2},(-1<\alpha<1)$ olsun. Varsayalım ki $b\in\partial U$ noktasında f' fonksiyonu $f'(b)$ non-tangential limitine sahiptir ve $\Re f'(b)=\frac{1-\alpha}{2}$. Ayrıca $z_1,z_2,...,z_n$, $f(z)-z$ fonksiyonunun sıfırdan farklı kritik noktaları olsun. Bu taktirde

$$\left|f''(b)\right|\geq\frac{1+\alpha}{4}\left(p+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left|z_k\right|^2}{\left|b-z_k\right|^2}+\frac{(1+\alpha)\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|-(1+p)\left|a_{p+1}\right|}{(1+\alpha)\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|+(1+p)\left|a_{p+1}\right|}\right). \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlanır.
(2.5) ilişkisinde

$$f(z)=\int_0^z\frac{1-\alpha t^p\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}{1+t^p\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}dt$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır. Burada $z_1,z_2,...,z_n$ pozitif reel sayılardır.

İspat. $\Theta(z)$ fonksiyonu Teorem 2.2'nin ispatındaki şekilde olsun. $z_1,z_2,...,z_n$, $f(z)-z$ fonksiyonunun $z=0$'dan farklı olan kritik noktaları olsun.

$$B(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$$

fonksiyonu birim disk U'da analitik ve $|z|<1$ için $|B(z)|<1$ olur. Maksimum prensibinden her $z\in U$ için $|\Theta(z)|\leq|B(z)|$ elde ederiz. Aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$\Upsilon(z)=\frac{\Theta(z)}{B(z)}=\frac{f'(z)-1}{f'(z)+\alpha}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}.$$

$\Upsilon(z)$ fonksiyonu U'da analitik, $|z|<1$ için $|\Upsilon(z)|<1$, $\Upsilon(0)=0$ ve $b\in\partial U$ için $|\Upsilon(b)|=1$'dır. Ek olarak, basit hesaplamalar ile

$$\frac{b\Theta'(b)}{\Theta(b)}=|\Theta'(b)|\geq|B'(b)|=\frac{bB'(b)}{B(b)}$$

ve

$$|B'(b)|=\frac{bB'(b)}{B(b)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|b-z_k|^2}$$

ifadeleri elde edilir. Böylece $\Upsilon(z)$ fonksiyonu sınırda Schwarz Lemması'nın koşullarını sağladığı için

$$p+\frac{1-|s_p|}{1+|s_p|}\leq|\Upsilon'(b)|=\left|\frac{b\Theta'(b)}{\Theta(b)}-\frac{bB'(b)}{B(b)}\right|=\left\{|\Theta'(b)|-|B'(b)|\right\}$$

elde ederiz. Burada, $|s_p|=\left|\frac{\Upsilon^{(p)}(0)}{p!}\right|=\frac{(p+1)|c_{p+1}|}{(1+\alpha)\prod_{k=1}^{n}|z_k|}$'dir. Böylece

$$p+\frac{1-\dfrac{(p+1)|c_{p+1}|}{(1+\alpha)\prod_{k=1}^{n}|z_k|}}{1+\dfrac{(p+1)|c_{p+1}|}{(1+\alpha)\prod_{k=1}^{n}|z_k|}}\leq\left\{(1+\alpha)\frac{|f''(b)|}{|f'(b)+\alpha|^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|b-z_k|^2}\right\}$$

ve

$$p+\frac{(1+\alpha)\prod_{k=1}^{n}|z_k|-(p+1)|c_{p+1}|}{(1+\alpha)\prod_{k=1}^{n}|z_k|+(p+1)|c_{p+1}|}\leq(1+\alpha)\frac{|f''(b)|}{|f'(b)+\alpha|^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|b-z_k|^2}$$

eşitsizlikleri elde ederiz. Buda (2.5) eşitsizliğini verir. Şimdi eşitlik halini gösterelim.

$$f(z)=\int_0^z\frac{1-\alpha t^p\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}{1+t^p\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}dt$$

fonksiyonunu inceleyelim. Bu fonksiyonun birinci ve ikinci türevini alırsak

$$f'(z)=\frac{1-\alpha z^p\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1+z^p\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}=-\alpha+\frac{1+\alpha}{1+z^p\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}},$$

$$f''(z)=-(1+\alpha)\frac{\left(pz^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{\left(1-\overline{z_k}z\right)^2}\prod_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}z^p\right)}{\left(1+z^p\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^2}$$

ve

$$f''(1)=-(1+\alpha)\frac{\left(p\prod_{k=1}^{n}\frac{1-z_k}{1-\overline{z_k}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{\left(1-\overline{z_k}\right)^2}\prod_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n}\frac{1-z_k}{1-\overline{z_k}}\right)}{\left(1+\prod_{k=1}^{n}\frac{1-z_k}{1-\overline{z_k}}\right)^2}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$z_1,z_2,...,z_n$ pozitif reel sayılar olduğundan,

$$|f''(1)|=\frac{(1+\alpha)}{4}\left(p+\sum_{k=1}^{n}\frac{1+z_k}{1-z_k}\right)$$

sonucu elde edilir. Ayrıca, $|c_{p+1}|=\frac{1+\alpha}{p+1}\prod_{k=1}^{n}|z_k|$ olduğundan eşitlik hali sağlanmış olur.

Aşağıdaki teoremde f fonksiyonunun biri orijin diğeri $z_1\neq 0$ olmak üzere Taylor açılımlarının sıfırdan farklı ilk katsayıları kullanılarak eşitsizlik daha da kuvvetlendirilmiştir.

Teorem 2.6. $f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+....,\ a_{p+1}\neq 0,\ p\geq 1$ fonksiyonu birim disk U da analitik ve $\Re f'(z)>\frac{1-\alpha}{2},(-1<\alpha<1)$ ve $0<|z_1|<1$ için $f'(z_1)=0$ olsun. Varsayalım ki $b\in\partial U$ noktasında f' fonksiyonu $f'(b)$ non-tangential limitine sahiptir ve $\Re f'(b)=\frac{1-\alpha}{2}$. Bu takdirde

$$|f''(b)|\geq\frac{1+\alpha}{4}\left(1+\frac{1-|z_1|^2}{|b-z_1|^2}+\frac{(1+\alpha)|z_1|-|f''(0)|}{(1+\alpha)|z_1|+|f''(0)|}\right.$$
$$\left.\times\left[1+\frac{(1+\alpha)^2|z_1|^2+|f''(0)|\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|-(1+\alpha)\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|-(1+\alpha)|f''(0)|}{(1+\alpha)^2|z_1|^2+|f''(0)|\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|+(1+\alpha)\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|+(1+\alpha)|f''(0)|}\frac{1-|z_1|^2}{|b-z_1|^2}\right]\right) \tag{2.6}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.6) eşitsizliğinin kesinliği, $|f''(0)|=(1+\alpha)c$ ve $|f''(z_1)|=(1+\alpha)d$ ifadelerinin mümkün her bir değeri için sağlanır.

İspat.

$$s(z)=\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}$$

ve $l:U\to U$ analitik fonksiyon olsun. Ayrıca $z_1\in U$ noktası için Schwarz -Pick lemma'dan

$$|l(z)|\le\frac{|l(z_1)|+|s(z)|}{1+|l(z_1)||s(z)|}$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer $k:U\to U$ analitik, $0<|z_1|<1$ ve

$$l(z)=\frac{k(z)-k(0)}{z\left(1-\overline{k(0)}k(z)\right)}$$

ise, bu taktirde

$$\left|\frac{k(z)-k(0)}{1-\overline{k(0)}k(z)}\right|\le|z|\frac{\left|\frac{k(z_1)-k(0)}{z_1\left(1-\overline{k(0)}k(z_1)\right)}\right|+|s(z_1)|}{1+\left|\frac{k(z_1)-k(0)}{z_1\left(1-\overline{k(0)}k(z_1)\right)}\right||s(z_1)|}$$

ve

$$|k(z)|\le\frac{|k(0)|+|z|\frac{|H|+|s(z)|}{1+|H||s(z)|}}{1+|k(0)||z|\frac{|H|+|s(z)|}{1+|H||s(z)|}}, \tag{2.7}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$H=\frac{k(z_1)-k(0)}{z_1\left(1-\overline{k(0)}k(z_1)\right)}$$

şeklindedir. Gnelliği bozmadan, $b=1$ alacağız. Eğer

$$k(z)=\frac{\Theta(z)}{z\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}$$

şeklinde alırsak, o zaman

$$k(0)=\frac{\Theta'(0)}{-z_1},\qquad k(z_1)=\frac{\Theta'(z_1)\left(1-|z_1|^2\right)}{z_1}$$

ve

$$H=\frac{\dfrac{\Theta'(z_1)\left(1-|z_1|^2\right)}{z_1}+\dfrac{\Theta'(0)}{z_1}}{z_1\left(1+\dfrac{\overline{\Theta'(0)}}{z_1}\dfrac{\Theta'(z_1)\left(1-|z_1|^2\right)}{z_1}\right)}$$

olur. Burada $|H|\leq 1$'dir. $|k(0)|=\kappa$ ve

$$M=\frac{\left|\dfrac{\Theta'(z_1)\left(1-|z_1|^2\right)}{z_1}\right|+\left|\dfrac{\Theta'(0)}{z_1}\right|}{|z_1|\left(1+\left|\dfrac{\Theta'(0)}{z_1}\right|\left|\dfrac{\Theta'(z_1)\left(1-|z_1|^2\right)}{z_1}\right|\right)}$$

olsun. (2.7) eşitsizliğinden,

$$|\Theta(z)|\leq |z||s(z)|\frac{\kappa+|z|\dfrac{M+|s(z)|}{1+M|s(z)|}}{1+\kappa|z|\dfrac{M+|s(z)|}{1+M|s(z)|}}$$

ve

$$\frac{1-|\Theta(z)|}{1-|z|}\geq\frac{1+\kappa|z|\dfrac{M+|s(z)|}{1+M|s(z)|}-\kappa|z||s(z)|-|z||s(z)|^2\dfrac{M+|s(z)|}{1+M|s(z)|}}{(1-|z|)\left(1+\kappa|z|\dfrac{M+|s(z)|}{1+M|s(z)|}\right)}=u(z) \qquad (2.8)$$

elde ederiz.

$q(z)=1+\kappa|z|\dfrac{M+|s(z)|}{1+M|s(z)|}$ ve $v(z)=1+M|s(z)|$ olarak işaretliyelim. Bu taktirde

$$u(z)=\frac{1-|z|^2|s(z)|^2}{(1-|z|)q(z)v(z)}+M|s(z)|\frac{1-|z|^2}{(1-|z|)q(z)v(z)}+M\kappa\frac{1-|s(z)|^2}{(1-|z|)q(z)v(z)}$$

eşitliği sağlanır.

$$\lim_{z\to 1}q(z)=1+\kappa\,,\ \lim_{z\to 1}v(z)=1+M$$

ve

$$1-|s(z)|^2=1-\left|\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}\right|^2=\frac{\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\overline{z_1}z\right|^2}$$

olduğundan ve ayrıca (2.8) eşitsizliğinde non-tangential limit alırsak

$$\left|\Theta'(1)\right| \geq \frac{2}{(1+\kappa)(1+M)}\left(1+\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}+M+\kappa M\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}\right)$$
$$=1+\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}+\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\left(1+\frac{1-M}{1+M}\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Ek olarak,

$$\frac{1-\kappa}{1+\kappa}=\frac{1-k(0)}{1+k(0)}=\frac{1-\left|\frac{\Theta'(0)}{z_1}\right|}{1+\left|\frac{\Theta'(0)}{z_1}\right|}=\frac{(1+\alpha)|z_1|-|f''(0)|}{(1+\alpha)|z_1|+|f''(0)|},$$

$$\frac{1-M}{1+M}=\frac{1-\dfrac{\left|\frac{\Theta'(z_1)(1-|z_1|^2)}{z_1}\right|+\left|\frac{\Theta'(0)}{z_1}\right|}{|z_1|\left(1+\left|\frac{\Theta'(0)}{z_1}\right|\left|\frac{\Theta'(z_1)(1-|z_1|^2)}{z_1}\right|\right)}}{1+\dfrac{\left|\frac{\Theta'(z_1)(1-|z_1|^2)}{z_1}\right|+\left|\frac{\Theta'(0)}{z_1}\right|}{|z_1|\left(1+\left|\frac{\Theta'(0)}{z_1}\right|\left|\frac{\Theta'(z_1)(1-|z_1|^2)}{z_1}\right|\right)}}$$

ve

$$\frac{1-M}{1+M}=\frac{(1+\alpha)^2|z_1|^2+|f''(0)|\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|-(1+\alpha)\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|-(1+\alpha)|f''(0)|}{(1+\alpha)^2|z_1|^2+|f''(0)|\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|+(1+\alpha)\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|+(1+\alpha)|f''(0)|}$$

olduğu için

$$\left|\Theta'(1)\right| \geq 1+\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}+\frac{(1+\alpha)|z_1|-|f''(0)|}{(1+\alpha)|z_1|+|f''(0)|}$$
$$\times\left[1+\frac{(1+\alpha)^2|z_1|^2+|f''(0)|\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|-(1+\alpha)\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|-(1+\alpha)|f''(0)|}{(1+\alpha)^2|z_1|^2+|f''(0)|\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|+(1+\alpha)\left(1-|z_1|^2\right)|f''(z_1)|+(1+\alpha)|f''(0)|}\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\Theta(z)$ 'in tanımından

$$\Theta'(z)=\frac{(1+\alpha)f''(z)}{\left(f'(z)+\alpha\right)^2}$$

ve

$$\left|\Theta'(1)\right|=\frac{(1+\alpha)|f''(1)|}{\left|f'(1)+\alpha\right|^2}<\frac{4}{1+\alpha}\left|f''(1)\right|$$

olduğunu biliyoruz.
Böylece, (2.6) eşitsizliğini elde ederiz.
Şimdi ise (2.6) eşitsizliğinin kesinliğini gösterelim.

$$k(z)=\frac{\Theta(z)}{z\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}$$

fonksiyonu birim diskte analitik bir fonksiyon ve $|z|<1$ için $|k(z)|\leq 1$ olduğundan,

$$|\Theta'(0)|\leq |z_1|$$

ve

$$|\Theta'(z_1)|\leq \frac{|z_1|}{1-|z_1|^2}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. $z_1\in(-1,0)$ ve c ile d keyfi sayılarını alalım, öyle ki, $0\leq c\leq (1+\alpha)|z_1|,\ 0\leq d\leq (1+\alpha)\dfrac{|z_1|}{1-|z_1|^2}$ olsun.

$$W=\frac{\dfrac{\left(1-|z_1|^2\right)d}{z_1}+\dfrac{c}{z_1}}{z_1\left(1+cd\,\dfrac{1-|z_1|^2}{z_1}\right)}=\frac{1}{z_1^{\,2}}\frac{d\left(1-|z_1|^2\right)+c}{1+cd\,\dfrac{1-|z_1|^2}{z_1}}$$

olsun.

$$\tau(z)=z\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}\,\frac{\dfrac{-c}{z_1}+z\dfrac{W+\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}{1+W\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}}{1-\dfrac{c}{z_1}z\dfrac{W+\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}{1+W\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}}$$

fonksiyonu D 'de analitik ve $|z|<1$ için $|\tau(z)|<1$'dir. $\tau(z)$ fonksiyonundan

$$\frac{f'(z)-1}{f'(z)+\alpha}=z\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}\,\frac{\dfrac{-c}{z_1}+z\dfrac{W+\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}{1+W\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}}{1-\dfrac{c}{z_1}z\dfrac{W+\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}{1+W\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}}$$

ve

$$f'(z)=\frac{1+\alpha z\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}\dfrac{\frac{-c}{z_1}+z\dfrac{W+\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}{1+W\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}}{1-\frac{c}{z_1}z\dfrac{W+\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}{1+W\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}}}{1-z\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}\dfrac{\frac{-c}{z_1}+z\dfrac{W+\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}{1+W\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}}{1-\frac{c}{z_1}z\dfrac{W+\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}{1+W\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}}}} \tag{2.9}$$

olur.
Böylece, $|f''(0)|=(1+\alpha)c$,

$$\frac{|f''(z_1)|}{1+\alpha}=\frac{z_1}{1-z_1^2}\frac{\frac{-c}{z_1}+Wz_1}{1-\frac{c}{z_1}z_1W}=\frac{z_1}{1-z_1^2}\frac{\frac{-c}{z_1}+\frac{1}{z_1^2}\dfrac{d\left(1-|z_1|^2\right)+c}{1+cd\frac{1-|z_1|^2}{z_1}}z_1}{1-\frac{c}{z_1}z_1\frac{1}{z_1^2}\dfrac{d\left(1-|z_1|^2\right)+c}{1+cd\frac{1-|z_1|^2}{z_1}}}$$

ve

$$|f''(z_1)|=(1+\alpha)d$$

alırız. (2.9)'dan, basit hesaplamalarla

$$|f''(1)|=\frac{1+\alpha}{4}\left(1+\frac{1-z_1^2}{(1-z_1)^2}+\frac{\left(1+\frac{1-z_1^2}{(1-z_1)^2}\frac{1-W^2}{(1+W)^2}\right)\left(1-\frac{c}{z_1}\right)+\frac{c}{z_1}\left(1+\frac{1-z_1^2}{(1-z_1)^2}\frac{1-W^2}{(1+W)^2}\right)\left(1-\frac{c}{z_1}\right)}{\left(1-\frac{c}{z_1}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1+\alpha}{4}\left[1+\frac{1-z_1^2}{(1-z_1)^2}+\frac{1+\frac{c}{z_1}}{1-\frac{c}{z_1}}\left(1+\frac{1-z_1^2}{(1-z_1)^2}\frac{1-W^2}{(1+W)^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1+\alpha}{4}\left[1+\frac{1-z_1^2}{(1-z_1)^2}+\frac{c+z_1}{-c+z_1}\left(1+\frac{1-z_1^2}{(1-z_1)^2}\frac{z_1^2+cd(1-z_1)^2-d(1-z_1)^2-c}{z_1^2+cd(1-z_1)^2+d(1-z_1)^2+c}\right)\right]$$

elde edilir.
$z_1\in(-1,0)$ olduğunda, son denklemden (2.6)'nın kesinliği gösterilmiş olur.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada farklı sınıflar için Schwarz Lemması'nın farklı bir versiyonu elde edilmiştir. Ayrıca bu sınıf için sınırda Schwarz lemması $|f''(b)|$ ifadesini aşağıdan değerlendirilmesi incelenmiştir. Şöyle ki, birim disk U'nun analitik f fonksiyonlarını $f(0)=0$, $f'(0)=1$ normalizasyonu ile, merkezi sabitleyerek incelemekteyiz; öyle ki f', U'yu sağ yarı düzleme götürmektedir (reel α sabiti için $\Re f'(z) > \frac{1-\alpha}{2}$, $-1<\alpha<1$). Bir $b \in \partial U$ sınır noktasında, f' türev fonksiyonunun $\Re f'(b) = \frac{1-\alpha}{2}$ olmak üzere non-tangential bir $f'(b)$ limiti olduğu varsayılmıştır. Bu koşullar altında $|f''(b)|$'nin aşağıdan farklı değerlendirilmeleri yapılmıştır.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. (1979). *Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill.

Ahlfors, L. V. (1938). An extension of Schwarz's Lemma. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43, 359-364.

Azeroğlu, A. T. and Örnek B. N. (2013). A refined Schwarz inequality on the Boundary. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 58(4), 571-577.

Beardon A. F. and Minda D. (2004). A multi-point Schwarz-Pick Lemma. *J. Anal. Math.*, 92, 81-104.

Beardon A. F. and Carne T. K. (1992). A Strengthening of the Schwarz-Pick Inequality. *The American Mathematicaly Monthly*, 99(3), 216-217.

Boas H. P. (2010). Julius and Julia: Mastering the art of the Schwarz Lemma.
American Mathematical Monthly, 117(9), 770-785.

Burns D.M. and Krantz S.G. (1994). Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz Lemma at the boundary. *J. Amer. Math. Soc.*, 7, 661-676.

Carathéodory, C. (1954). *Theory of Functions*. New York, Chelsea.

Çatal B. and Örnek B. N. (2018). Some results for classes of holomorphic functions. *Gulf Journal of Mathematics*, 6, 46-60.

Dineen S. (1989). *The Schwarz lemma.* Oxford University Press, New York.

Dubinin, V. N. (2004). The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disc. *Journal of Mathematical Sciences*, 122(6), 3623-3629.

Dubinin, V. N. (2007). Applications of the Schwarz lemma to inequalities for entire functions with constraints on zeros. *Journal of Mathematical Sciences*, 143(3), 3069-3076.

Dubinin V. N. (2000). Distortion theorems for polynomials on a circle. *Sbornik: Mathematics*, 191(12), 1797-1807.

Dubinin V. N. (2002). On an application of conformal maps to inequalities for rational functions. *Izvestiva: Mathematics*, 66(2), 285-297.

Dubinin V. N. (2005). Schwarz's lemma and estimates of coefficients for regular functions with free domain of definition. *Matem. Sbornik*, 196, 53-74.

Dubinin V. N. and Olesov A. V. (2004). Applitation of conformal mapping to inequalities for polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 122(6), 3630-3640.

Goluzin G. M. (1969). *Geometric Theory of functions of a Complex variable*. American Mathematical Society.

Gök, B. and Örnek, B. N. (2017). Estimates for second non-tangential derivatives at the boundary. *Commun. Korean Math. Soc.*, 32(3), 689-707.

Krantz, S. G. (2011). The Schwarz Lemma at the Boundary. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 56(5), 455-468.

Markushevich A. I., "Theory of functions of a complex variable", *Prentice-Hall, Inc.*, Vol. I-II-III, 1965.

Mateljević, M. (2015). Rigidity of holomorphic mappings, Schwarz and Jack lemma. *ResearchGate*, 1-25.

Mateljević, M. (2016). Schwarz lemma, the Carathéodory and Kobayashi Metrics and Applications in Complex Analysis", *XIX GEOMETRICAL SEMINAR, At Zlatibor*

Mateljević, M. (2016), Ahlfors-Schwarz lemma, Hyperbolic geometry, the Carathéodory and Kobayashi Metrics. *Symposium MATHEMATICS AND APPLICATIONS, Faculty of Mathematics, University of Belgrade,* VII(1).

Mercer Peter R. (1997). Sharpened Version of the Schwarz Lemma. *Journal of Math. Anal. And Applications*, 205, 508-511.

Mercer Peter R. (2006). Schwarz-Pick-Type Estimates for the Hyperbolic Derivative. *Journal of In equalities and Applications*, 1-6.

Osserman R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 128: 3513-3517.

Osserman R. (1999). A new variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors Lemma. *Manuscripta math.*, 100, 123-129.

Osserman R. (1999). From Schwarz to Pick to Ahlfors and beyond. *Amer. Math. Soc.*, 46, 868-873.

Örnek, B. N. (2013), Sharpened forms of the Schwarz lemma on the boundary. *Bull. Korean Math. Soc.*. 50, 2053-2059.

Örnek, B. N., Akyel T. (2016). Sharpened forms of the Generalized Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 126, 69-78.

Örnek, B. N. (2012). *Sınırda kesin Schwarz eşitsizliği.* DoktoraTezi, *Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Gebze.

Örnek, B. N. and Düzenli T. (2018). A Boundary Analysis for Derivative of Driving Point Impedance Functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*.

Pommerenke, C. (1992). *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. New York, Springer Verlag.

Reza, F. M. (1962), A bound for the derivative of positive real functions, *SIAM Review***.** 4(1), 40-42.

Reza, F. M. (1961). Schwarz's Lemma and linear passive systems. *Proc. IRE*, 49(2), 16-25.

Reza, F. M. (1984). Schwarz Lemma for n-Ports. *Journal of the Franklin Institute,* 317(2), 57-71.

Richards, P.I. (1947). A special class of functions with positive real part in a half-plane. *Duke Math. J.,* 14(3), 777-789.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	: Burcu GÖK
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 27.04.1979 - Kütahya
Medeni hali	: Evli
e-posta	: burcugok43@gmail.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Dumlupınar Üniversitesi	2002
Tezsiz Yüksek Lisans	Afyon Üniversitesi	2003

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
2004-2006	Eşme ÇPL	Matematik Öğretmeni
2006-2014	Kuzeykent ADL	Matematik Öğretmeni
2014-	Toruntay TL	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Gök, B. and Örnek B. N. (2018). Estimates for second non-tangential derivatives at the boundary, *Commun. Korean Math. Soc.*, 32(3), 689-707.