T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM İKİNCİ KADEME ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE SERGİLEDİKLERİ TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Hazırlayan
Venhar NAVRUZ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2012
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM İKİNCİ KADEME ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE SERGİLEDİKLERİ TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Hazırlayan
Venhar NAVRUZ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT

Yüksek Lisans Tezi

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Araştırma Kurumu tarafından BİDEB 2210 kodlu Yurt içi burs programı ile desteklenmiştir.

Ağustos 2012
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

İmza

Venhar NAVRUZ

"İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerin Çözümünde Sergiledikleri Tümevarımsal Düşünce Süreçlerinin İncelenmesi" adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan

İmza

Venhar NAVRUZ

Danışman

İmza

Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT

İlköğretim ABD Başkanı

İmza

Prof. Dr. Sibel SARAÇOĞLU

Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT danışmanlığında Venhar NAVRUZ tarafından hazırlanan "İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerin Çözümünde Sergiledikleri Tümevarımsal Düşünce Süreçlerinin İncelenmesi" adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

28.08.2012

(Tez Savunma Sınav Tarihi)

JÜRİ

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT ....

Üye : Yrd.Doç.Dr.F. Berna BENLİ

Üye : Yrd.Doç.Dr. Alpaslan GÖZLER

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 06/09/2012 tarih ve 24 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28 / 08 / 2012

Prof. Dr. Ahmet ŞAHİN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

Araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar öğretmenliğe adımımı atarken ve yuvamı kurarken yaşadığım geçiş sürecinde, tez araştırmalarıma yılmadan odaklanmamı, bilimsel anlamda ve matematik eğitimi alanında ilerleme kaydetmemi sağlayan, danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT'e, yaşamımın her döneminde bana duydukları güven ve tezim konusunda gösterdikleri her türlü fedakârlıkları için hayata geliş sebebim biricik anneme ve canım babama, çalışmalarım süresince birçok fedakârlıklar ve insanüstü çabalar gösterip beni destekleyerek her an yanımda olan sevgili eşim Matematik Öğretmeni Mustafa Zeki NAVRUZ' a, tezin yazım aşamasında fedakârlıklarını benden esirgemeyen ve beni bir yazar gibi yürekten destekleyen NAVRUZ ailesine, yüksek lisansa başlama noktasında ilham kaynağım olan ve maddi anlamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli ablam Uzman Dr. Kimyager Semiha AYDIN KÖPRÜ'ye, çalışmalarım esnasında çözdüğü test sorularını benimle paylaşarak tümevarımsal anlamda soru tiplerini görmeme ve soru yazmama vesile olan kardeşim Ersel AYDIN'a, çalışmalarımın hızlanması ve verimli hale gelmesi için gerek okuldaki ders programımın tez görüşmelerime paralel düzenlenmesi gerekse izin konularında yardımını ve emeğini esirgemeyen değerli ve başarılı Sayın Okul Müdürüm Halil DURMAZ'a en derin duygularla teşekkür ederim. Ayrıca tezim için sağlamış olduğu destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkürlerimi sunarım.

Venhar NAVRUZ

Kayseri, Ağustos 2012

İLKÖĞRETİM İKİNCİ KADEME ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE SERGİLEDİKLERİ TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Venhar NAVRUZ

Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2012

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT

KISA ÖZET

Araştırmada ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde sergiledikleri tümevarımsal düşünce sürecinin aşamaları incelenmiş ve bu aşamaların aritmetik-geometri öğrenme alanlarında, alanlar arası geçişte nasıl işletildiği ve birbiri ile olan ilişkisi tespit edilmiştir. Tümevarımsal düşünce, özel durumlarla başlayan ve bu özel durumların genellenmesine dayanan sonuç çıkarma ve problem çözme sürecidir. Aynı zamanda matematik eğitiminde tümevarımsal düşünce, sayılar ve şekiller arasındaki ilişkinin bulunması, örüntülerin keşfedilmesi ile bağlantılı bir süreçtir. Araştırmaya katılan 210 ilköğretim 8. sınıf öğrencisine alan yazını taraması sonucu tümevarımsal düşünce gerektiren, örüntü bulma ve ilişkileri genelleme konusunda geliştirilen 10 soruluk yazılı sınav uygulanmış, daha sonra seçilen 9 öğrenci ile yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Toplanılan veriler nitel yöntemler kullanılarak analiz edilmiştir. Bu çalışmada, tümevarımsal düşünce aşamaları Cañadas'ın (2007) oluşturduğu, 7 aşamalı model temel alınarak gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi şeklinde altı kategoride toplanmıştır. Aşamaların hangi öğrenme alanında nasıl sergilendiği ve aşamalar arası ilişkiler, elde edilen nitel veriler yardımıyla yorumlanmıştır. Bulgular, aritmetik öğrenme alanında sergilenen tümevarımsal düşünce aşamalarının gösterilme sıklığının en çoktan en aza genelleme, yordama, genellemenin testi, gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordamanın testi olduğunu; geometri öğrenme alanında ise genelleme, yordama, genellemenin testi, gözlemleme, yordamanın testi, gözlemlerin organizesi olduğunu göstermektedir. Ayrıca elde edilen bulgular, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişlerinin geometriden cebire geçişlerinden daha kolay olduğunu ancak aritmetiksel soruların geometrik versiyonlarında geometriden cebire geçişlerin daha başarılı bir şekilde yürütüldüğünü göstermektedir. Bunun yanı sıra tümevarımsal düşünce süreci aşamaları arasında güçlü bir ilişki olduğu ve öğrenciler tarafından herhangi bir aşamada gösterilen başarının bir sonraki aşamadaki başarı durumunu etkilediği tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İlköğretim ikinci kademe öğrencileri, matematiksel problemler, tümevarımsal düşünce aşamaları, genelleme, örüntüler.

AN INVESTIGATION OF INDUCTIVE REASONING PROCESS DISPLAYED BY THE ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS WHEN SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS

Venhar NAVRUZ
Erciyes University, Institute of Education

Master Thesis, August 2012
Supervisor: Assist. Prof. Dr. İbrahim BAYAZİT

ABSTRACT

This study examines elementary school students' inductive reasoning process for solving mathematical problems. It explores how students used inductive reasoning when resolving arithmetical and geometry problems, and it makes a particular attempt to identify the interrelations between the successive stages of the inductive reasoning and the difficulties students might encounter when shifting from one stage to the next one. Inductive reasoning is a problem solving process that begins with particular cases and gets the generalization from these cases. It is an essential mental skill required for finding patterns and relations among numbers and figures. This study employed a qualitative case study. Data were collected through written exam and semi-structured interviews, and they were analysed using qualitative methods that included content and discourse analysis. The research sample included 210 8th grade students. Adopted form Cañadas (2007) stages of inductive reasoning were examined in six categories and these included observation of particular cases, organization of particular cases, conjecture formulation, conjecture validation, conjecture generalization, general conjecture justification. The results indicated that frequencies of steps performed by the students on arithmetical problems included, from highest to lowest, conjecture generalization, conjecture formulation, general conjecture justification, observation of particular cases, organization of particular cases, conjecture validation. Frequencies of steps performed by students on geometric problems included, from highest to lowest, conjecture generalization, conjecture formulation, general conjecture justification, observation of particular cases, conjecture validation, organization of particular cases. The research findings show that transition from arithmetic to algebra is easier than transition from geometry to algebra for students. However, for geometry version of arithmetic problems, transition from geometry to algebra is much easier. The results also show that there is a strong relationship between the successive stages of the inductive reasoning and the students' success at one stage of this process influences their performances in the next one.

Key words: Mathematical problems, elemantary school students, inductive reasoning process, generalisation, patterns.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. GİRİŞ

Matematiksel gözlemler, nesnelerin özelliklerine matematiksel bir yorumla bakmayı sağlar. Gözlemlerle keşfedilen özellikler ise genellenerek (Carraher v.d., 2008) belli matematiksel ifadeler yoluyla zihinden yaşama aktarılır. Bu bakış açısıyla matematiksel tümevarım, belli nesnelerin matematiksel manada gözlemlenmesi ve bulunan ilişkilerin genellenmesidir. Bu genellemeler, bir matematikçinin yorumuyla matematik bilimindeki evrensel formüllere dönüşebilirken; sıradan bir bireyin yorumuyla keşfedilen düzenin matematiksel manaya yakın, ancak tam olarak matematikselleştirilmemiş bir şeklini de alabilir (Lesh, 2000).

Tümevarımsal akıl yürütme, genel manada bilinenden hareketle bilinmeyen durum hakkında tahminde bulunmak, sonuç çıkarmak iken; matematiksel tümevarım; şekil, grafik, sayı veya görsel-geometrik yapılarla temsil edilen bir örüntüyü matematiksel bir dile dönüştürmek demektir (Cathcart v.d., 2003). Bu bakış açısıyla matematiksel tümevarım, herhangi bir temsille verilen örüntüdeki ahengi keşfetmek ve bu ahengi matematiksel bir dile yansıtmak şeklinde sistematik olarak ilerleyen bir akıl yürütme işidir. Örüntüleri tanıma, devam ettirme ve oluşturma gibi özellikler matematiksel ilişkileri görmede, genelleme yapmada, matematiğin düzenini kavramada çok önemli yeteneklerdir (Burns, 2000). Örneğin; 0, 2, 4, 6, … şeklindeki sayı örüntüsünü ‘$2n$’ gibi cebirsel bir formüle dönüştürmek tümevarımsal düşünce gerektiren bir süreçtir. Eğer bu matematiksel dönüşümler olmasaydı matematik biliminde alanlar arası geçişler yapmak ve matematiği soyutlamak mümkün olmayabilirdi. Bu açıdan tümevarımsal düşünce gerektiren örüntüler, matematiksel bilgi ve kavramların anlaşılması açısından oldukça önemlidir (Tanışlı ve Özdaş, 2009). Örüntülerin matematik eğitimi açısından bu derece önemli olmasının sebeplerinden biri yaşamda tümevarımsal düşünce şekline duyulan ihtiyaçtır. Çünkü örüntü kullanımı yaşamın pek çok yönünü tanımlar. Örneğin, çizimlerde, resimlerde ya da bir müzik parçasında örüntü keşfi, bireye deneyimlerinden ders çıkarma becerisi sağlar (Vogel, 2005). Yaşamda olduğu gibi matematikte de düzeni, ihtişamı keşfetmenin temel yolu, parçadan bütüne doğru ilerlemek yani tümevarmaktır. Örneğin doğal sayılar kümesinin sonsuz sayıda elemana sahip olduğunu bilmek, matematiğin güzel olduğunu anlamak için yeterli değildir. Ancak tümevarımsal akıl yürütme ile onun çift doğal sayılar kümesi ile denk olduğunu görebilmek matematiğin güzel olduğunu ortaya koyuverir (Baki, 2008). Matematik, farklı açılardan bakabildikçe veya kavramları birbirine dönüştürüp farklı şekillerde ifade edebildikçe güzelleşir, farklılaşır, uygulanabilir ve anlamlı bir hale gelir.

Ulusal ve uluslar arası kaynaklarda tümevarımsal düşüncenin önemi vurgulanmaktadır. Bu bağlamda NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)'nin (1989) öğrenci değerlendirme standartlarında matematiksel muhakemenin değerlendirilmesinde öğrencilerden beklenen becerilerden ilki, tümevarıma dayalı muhakemeyi kullanma becerisi olarak belirtilmektedir. MEB Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın (2005) hazırlamış olduğu ilköğretim matematik dersi programında da akıl yürütme becerisinin kazanılabilmesi için 'matematiksel durumların analizinde örüntü ve ilişkileri kullanabilme' ve 'matematikteki örüntü ve ilişkileri analiz edebilme' şeklinde oluşturulan kazanımlar, tümevarımsal düşüncenin matematik eğitimindeki önemini bir kez daha ortaya koymaktadır. Bu programda geometri ve cebir öğrenme alanlarında yer verilen örüntüler alt öğrenme alanı ile tümevarımsal düşüncenin ve dolayısıyla akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Bu bağlamda ilköğretim 1-5 düzeyinde eksik bırakılan bir örüntünün tamamlanması, devam ettirilmesi ve yeni bir örüntü oluşturulması, bir örüntünün farklı biçimlerde temsil edilmesi, örüntüdeki ilişkilerin keşfedilmesi ve örüntüdeki kuralın bulunması ile ilgili etkinlikler önerilmektedir. İlköğretim 6-8. sınıflarında ise örüntüdeki kuralın genellenmesi ve harfle ifade edilmesi gibi etkinlikler önerilmektedir. Bu genellemeler, daha sonra 2 bilinmeyenli denklemlerle ilişkilendirilmekte ve kavramların daha anlamlı öğrenilmesine yardımcı olmaktadır. Ayrıca daha ileriki düzeylerde işlenecek olan fonksiyon kavramının alt yapısını hazırlayacak becerilerin gelişmesi sağlanmaktadır (MEB, 2005). Dolayısıyla erken basamaklarda örüntü kavramı ile kazandırılan ilişki bilgisi, değişken kavramının da kazanımından sonra fonksiyon konusu ile soyut bir kimlik bulmaktadır (Kabael ve Tanışlı, 2010).

Örüntülerden cebire giden yolda bilişsel bir süreci temsil eden tümevarımsal düşünce konusunda yapılan araştırmalar, bireylerin örüntü algıları ve bu algıların hangi süreçten geçerek nasıl matematikselleştirildiği konusuna bilişsel anlamda açıklık getirecek niteliktedir. Tümevarımsal düşünce sürecinde hangi aşamaların yer aldığı konusunda yapılan araştırmalar, sürecin keşfiyle özel durumlardan genel durumlara doğru nasıl bir yol izlendiğinin tespitini içermektedir (Pólya, 1967; Reid, 2002; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008, Cañadas v.d., 2009). Yapılan bu araştırmalar, matematik eğitiminin tümevarımsal düşünce konusunda geldiği noktayı ortaya koymakta ve bu düşünme türünün doğasını, işleyişini ve bilişsel anlamda nasıl bir süreç içerdiğini açığa çıkarmanın onu betimlemekten daha önemli olduğunu göstermektedir. Bu bakımdan eldeki araştırmada, tümevarımsal düşünce süreçleri incelenmekte, tümevarımsal düşüncenin doğası ve işleyişi derinlemesine analiz edilerek matematiksel kavramlar açısından tümevarımsal düşünce sürecinin öğrenci boyutunda nasıl gerçekleştiği konusuna açıklık getirilmesi amaçlanmaktadır.

1.1. ARAŞTIRMA PROBLEMİ

Bu araştırma kapsamında ilköğretim 2. kademe öğrencilerinin aritmetik ve geometri öğrenme alanlarında sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamalarının keşfedilmesi ve keşfedilen aşamaların hangi öğrenme alanında nasıl ve ne derece kullanıldığı konusuna açıklık getirilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca tümevarımsal düşünce aşamalarının alanlar arası geçişlerde nasıl kullanıldığını tespit etmek ve aşamaların birbiri ile ilişkisini incelemek araştırmada amaçlanan diğer hususları oluşturmaktadır. Bu bağlamda araştırma kapsamında aşağıdaki problemlere cevap aranacaktır:

a) Aritmetik öğrenme alanıyla alakalı problemlerin çözümünde ilköğretim 2. kademe öğrencilerinin sergiledikleri tümevarımsal düşünce sürecinin aşamaları nelerdir? Bu aşamalar öğrenciler tarafından nasıl ve ne derece kullanılmaktadır?

b) Geometri öğrenme alanıyla alakalı problemlerin çözümünde ilköğretim 2. kademe öğrencilerinin sergiledikleri tümevarımsal düşünce sürecinin aşamaları nelerdir? Bu aşamalar öğrenciler tarafından nasıl ve ne derece kullanılmaktadır?

c)Aritmetikten cebire ve geometriden cebire geçişlerde ilköğretim 2. kademe öğrencilerinin sergiledikleri tümevarımsal düşünce sürecinin aşamaları nelerdir? Bu aşamalar öğrenciler tarafından nasıl ve ne derece kullanılmaktadır?

d)İlgili alanlarla alakalı problemlerin çözümünde ilköğretim 2. kademe öğrencileri tarafından sergilenen tümevarımsal düşünce sürecinin aşamaları birbirini nasıl etkilemektedir?

1.2. ARAŞTIRMANIN AMACI VE ÖNEMİ

Tümevarımsal düşünce süreci, matematiksel problemler açısından aritmetik, geometri ve cebir öğrenme alanlarını birbirine dönüştüren bilişsel ve sistematik bir aktivite olarak değerlendirilebilir (Orton ve Orton, 1999; Gallardo, 2002; Zazkis ve Liljedahl, 2002; Kabael ve Tanışlı, 2010). Bu aktivitenin ilköğretim 2. kademe öğrencileri tarafından nasıl gerçekleştirildiğini tespit etmek ve aktivite gerçekleşirken hangi aşamaların nasıl kullanıldığını belirleyerek bu aşamaların birbiri ile ilişkisini çözmek araştırmanın genel amaçlarını oluşturmaktadır. Çünkü örüntüleri genelleme, çocukların erken yaşlarda cebirsel düşünme becerisini kazanmaları ve dolayısıyla fonksiyonel düşüncenin gelişimini desteklemesi açısından oldukça önemlidir (Lesley ve Freiman, 2004; Tanışlı ve Olkun, 2009). Nitekim cebire girişte tümevarımsal düşünce gerektiren örüntü temelli aktivitelerin cebirsel kavramlara temel oluşturmada büyük bir etkisinin olduğu açıktır (DES, 1998; Akt. Orton ve Orton, 1999; Hargreaves v.d., 1998; Reys v.d., 1998; Burns, 2000; NTCM, 2000; Smith, 2003; Akt. Steele, 2005; MEB, 2009a; Palabıyık ve Akkuş-İspir, 2011). Örüntüler genellemenin,genelleme ise cebirin yapı taşlarından birisi olarak görülebilir (Tanışlı ve Özdaş, 2009).

Matematik eğitiminde bilişsel kabiliyetlerin incelenmesine yönelik yapılan ulusal araştırmaların genellikle ilköğretim ve ortaöğretim kademelerinde kullanılan ispat yöntemlerinin tespit edilmesine, ispat, muhakeme ve bilgi oluşturma gücündeki gelişimin incelenmesine yönelik olduğu görülmektedir (Altıparmak ve Öziş, 2005; Moralı v.d., 2006; Arslan, 2007; Sarı v.d., 2007; Pilten, 2008; Yeşildere ve Türnüklü, 2008; Albayrak, 2010). Bu araştırma kapsamında işlenen tümevarımsal düşünce süreci, bir muhakeme türü olup önceden keşfedilmiş genel matematiksel formüllerin nasıl ispat edildiğinden çok problem çözücüler tarafından gözlemler sonucunda formüllerin nasıl üretildiğinin irdelenmesi ile ilişkilidir. Bahsedilen süreç, alan yazınında dört, beş ve yedi aşamalı modeller (Pólya, 1967; Reid 2002; Cañadas, 2007; Akt. Cañadas ve Castro, 2007) şeklinde görülmekte olup bu modellerin genellenebilir bir boyutta olup olmadığının tartışılması bu araştırmanın ulusal ve uluslar arası alan yazınına yaptığı en önemli katkı olarak belirtilebilir. Bu açıdan araştırma kapsamında elde edilecek bulguların tümevarımsal düşünce aşamalarının tespiti yoluyla matematik öğretiminin gelişimine ciddi katkılar sağlayacağı düşünülmektedir ayrıca araştırmanın, matematik eğitimi alan yazınında tümevarımsal düşünce sürecinin derinlemesine analiz edilmesi ve tümevarımsal düşünce süreci modellerinin sınırlılığı bakımından da önemli bir eksikliği kapatacağı umulmaktadır.

1.3. SINIRLILIKLAR

Bu araştırma, uygulamaların sağlıklı bir şekilde yürütülmesini sağlayan bazı sınırlılıklar içermektedir. Bu açıdan ilköğretim matematik düzeyinde yapılan araştırma, Kayseri ilinin Kocasinan, Melikgazi ve Talas gibi merkez ilçelerinde yer alan 4 ilköğretim okuluyla sınırlı tutulmuştur. Araştırmanın süresi 2010-2011 Eğitim-Öğretim Yılı (2. Yarıyıl) ile sınırlı iken; araştırmanın yapıldığı grup 210 ilköğretim 8. sınıf öğrencisi, araştırmada kullanılan veri toplama aracı ise 10 soru ile sınırlıdır.

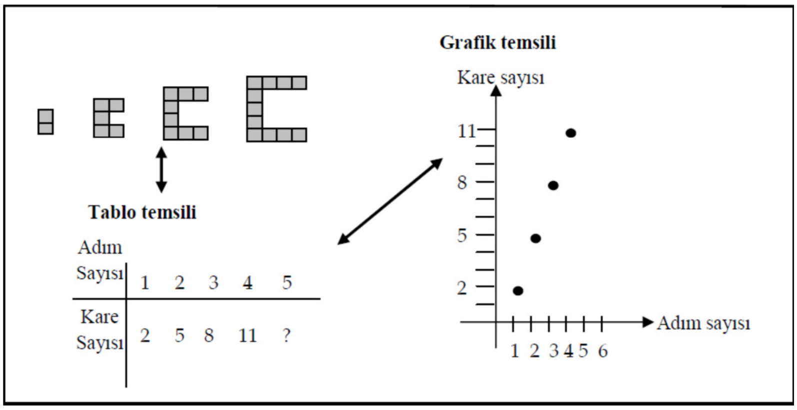
2. ALAN YAZINI TARAMASI

2. 1. TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCENİN DOĞASI

Tümevarımsal düşünce, zihnin herhangi bir konu hakkında bilgi ortaya koyarken özelden genele, bilinenden bilinmeyene doğru takip ettiği bir yoldur (Sarı, 2007). Diğer bir deyişle tümevarımsal düşünce, özelliklerin keşfedilerek özellikler arasındaki ilişkilerin mantıksal bir yolla ortaya konulmasıdır (Pólya, 1967). Bu keşif, bilimin doğasında var olan bilinmeyeni keşfetme ve keşfi genelleyerek bilinmeyen durum hakkında oluşan merakı gidermeyi kapsamaktadır. Bilimsel manada tümevarımsal düşünce, olguları açıklayabilen genel bir sonuca ulaşmak için belirli olayları ve gözlemleri kullanarak muhakeme geliştirme sürecidir (Pilten, 2008). Bu açıdan tümevarımsal düşünce, doğa olaylarından doğa kanunlarını üretmeyi sağlayan bir işlem, bilimsel bilginin elde edilmesine imkân veren doğal bir muhakeme türü olarak değerlendirilebilir (Mill, 1862; Akt. Topdemir, 2011; Pólya, 1988). Örneğin her gün güneşin doğduğunu gören bir bireyin "*Yarın da güneş doğacaktır*" şeklindeki tahmini doğal bir muhakemedir (DiLivio, 2009, s. 10). Yarın güneşin doğacağına dair bir garanti olmamasına rağmen (Heit, 2007) güneşin her gün doğmasından yola çıkan birey, bu noktada geçmişe bağlı geleceğe dönük bir tahmin yürütmektedir. Bu durum başka bir örnek üzerinden incelenirse *"Gelgit ayın çekimine bağlı olarak ortaya çıkar"* sonucuna varabilmek için öncelikle belli gözlemlerin ve deneysel araştırmaların yapılması gerekir (Topdemir, 2011, s. 75) Bu durumda ay ile gelgit olayı arasında nasıl bir ilişki olduğu ispatlanmalıdır ki ay ile gelgitin ilişkisi çözülebilsin ve bahsedilen sonuca ulaşılabilsin (Topdemir, 2011). Yukarıdaki örneklerden yola çıkarak tahmin etmek, eldeki bulgulara dayanarak ileriye dönük yapılan bir yorumdur. Bu tahminler belli bulgulara ve gözlemlere bağlı olduğu için önyargılardan uzak, gerçekçi bir nitelik kazanmaktadır. Örneğin, bir adam, ciddi bir hastalıktan acı çekiyor olabilir; doktor bize şöyle der: 'Ameliyatın adamı iyileştirip iyileştiremeyeceğini bilmiyorum; fakat bir çare varsa, o da, ameliyattır'. Elbette ameliyatın adamı iyileştireceğini bilmek daha iyi olurdu. Fakat bunu bilmiyorsak, doktorun ifadesinde belirtilen bilgi, tümevarımsal düşünce açısından yeterli bir deneyimdir (Reichenbach, 1978; Akt. Sarı, 2007). Çünkü doktor, benzer durumdaki hastalar için belki aynı çözümü sunmaktadır veya bu durumdaki hastaların genellikle son kurtuluş yolu bu ameliyat olabilir. Doktor, genel durumlardan hareket ederek böyle bir tedaviyi uygun bulmaktadır. Doktorun sunduğu tedavi gerçekçidir. Ancak planlama yaparken 'yarın şunu yapacağım' şeklinde bir ifade kullanan kişi, sadece zihninde oluşturduğu plan doğrultusunda geleceği konuşmaktadır. Oluşturulan plan, yapılması gerekenler için sadece zaman ayırmak gerektiğini göstermektedir ve planın gerçekleşip gerçekleşmeyeceği konusu kesin olarak belli değildir. Parçalardan bütüne gitmede, bir yargıya varmada günlük hayatta yaygın kullanılan yöntemlerden biri olan tümevarımsal düşünce, gözlemlenen belli durumlardan yola çıkarak, planlar yapmayı sağladığı gibi deneyimlere bağlı önyargılar taşımaya da neden olabilir. Örneğin *"Bir akşam tiyatroda olduğunuzu ve evinizin soyularak pek çok eşyanızın çalındığını düşünün. Bu ani durum sizin geleceğe yönelik tahminlerinizde ve inanışlarınızda bir değişikliğe yol açıp evinizin güvenli olup olmadığı konusunda şüpheye düşerek, evinizin tekrar soyulabileceği fikrine sahip olmanıza neden olabilir"* (Heit, 2000, s. 569). Verilen örnekte, evin güvenliği hakkında bilinen bir durumdan hareketle geleceğe yönelik doğru ya da yanlış olabilecek bir tahminde bulunulduğu görülmektedir. Örneğin çocukken bir köpek tarafından ısırılan kişinin bütün köpeklerin aynı şeyi yapacağına karar vermesi gibi bir yanılgı da hırsız örneğine benzemektedir (Moralı v.d., 2006). Ancak yürürken önünde kocaman bir çukur gören kişinin 'Daha fazla ilerlersem düşeceğim' şeklindeki tahmini bulgulara dayandığı için yapılan planlara veya oluşturulan önyargılara göre daha gerçekçidir. Örneğin havada yağmur bulutları varsa ona göre yapılan yağmur tahminleri doğruya yakın, önyargıdan uzak bir nitelik taşır. Bu açıdan günlük hayatta tümevarımsal düşünce, belli bulgulara dayandırıldığında gerçeğe yaklaşmaktadır. Bu nedenle tümevarımlı işleyiş, belirli öncülleri aşan bir yargıyı açığa çıkarmaktadır ve bu açığa çıkan yargı, bir yönüyle olmamış olana ilişkindir beklentiyi ve bir yüklemeyi içermekte, bir yönüyle de bilimsel tümevarım olarak ele alınan her yerde işler, genel-geçer olmayı kapsamaktadır (Sarı, 2007). Görüldüğü gibi tümevarımsal düşünce, bilimsel manada bir nedensellik fikri oluşturduğu gibi yaşamda ileriye dönük doğru tahminler veya planlar oluşturmanın yanı sıra deneyimler doğrultusunda belli yargılar taşımaya sebep olabilir. Ancak tümevarımsal düşünce, geleceğe ilişkin en iyi varsayımı sağlayacak bir işlemdir. Gelecek hakkında doğru bilinmese de bu konuda en iyi varsayım önceden bilinen durumlarla ortaya çıkmaktadır (Reichenbach, 1978; Akt. Sarı, 2007).

2.2. MATEMATİKSEL MANADA TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE

Matematiksel manada tümevarımsal düşünce, özel durumlarla başlayan ve bu özel durumları tek başına değil, desenler, yapılar ve bunlar arasındaki bağlantılara odaklanacak bir şekilde düşünerek ardından genelleme üretmeye dayanan sonuç çıkarma veya problem çözme sürecidir (Neubert ve Binko, 1992; Kaput, 1999; Cañadas ve Castro, 2007; Bayazit ve Aksoy, 2009). Bu süreçte bahsedilen özel durum (sayı veya şekil örüntüsü), matematiksel bir yorumla matematiksel bir temsil halini almaktadır. Örneğin aşağıda verilen şekil örüntüsü, tablo ve sayı ile ifade edildikten sonra grafiğe dökülmekte böylece adım adım cebirsel bir formüle dönüştürülmektedir.



Şekil 1. Şekil örüntüsünün genellenme süreci (Kabael ve Tanışlı, 2010).

Şekilde görüldüğü gibi 2, 5, 8, 11,…şeklinde ilerleyen bir sayı örüntüsüne dönüştürülen şekil örüntüsü, analitik düzleme aktarılmaktadır. Analitik düzlemde x ve y eksenleri ile ilişkilendirmeler yapıldığında oluşan sözel ifade, ‘adım sayısının 3 katının bir eksiği kare sayısını verir’ iken; cebirsel ifade $y=3x-1$ şeklindedir. Görüldüğü gibi verilen şekil örüntüsünü genellemek için farklı organizasyonların yapılması ve şeklin farklı matematiksel konularla bağdaştırılması gerekmektedir. Bu durumda matematiksel manada tümevarımsal düşünce, verilen durumlar üzerinde deneme-yanılmalarla araştırmalar yapmayı ve ardından kesin matematiksel bilgilere ulaşmayı sağlamaktadır. Ayrıca matematiğin farklı konuları arasında yapılan ilişkilendirmeler, soyutlama yoluyla matematiksel bilgiyi zenginleştirmektedir. Görüldüğü gibi matematiksel anlamıyla ele alınan tümevarımsal düşünce, günlük yaşam bağlamında ele alınan tümevarımsal düşünceden belli noktalarda ayrılmaktadır. Bu ayrımlardan ilki, matematiksel bağlamda incelenen tümevarımsal düşünce türünde matematiksel gözlemler yapmak ve bu gözlemleri matematiksel bir dille genellemeye dökmek önemlidir. Matematik gözüyle bakabilmek, temel manada matematiksel bir alt yapıyı veya düşünce tarzını gerektirmektedir. Çünkü etrafına matematiksel bir gözle bakan kişi şekilleri sayılara, sayıları harflere ve matematiğin evrensel diline dökebilme kabiliyetine sahiptir. Bir dikdörtgenin alanını veren cebirsel ifade (*uzun kenar*×*kısa kenar*=$a\times b$) oluşturulurken kullanılan bilişsel süreç bu manada önem kazanmaktadır. Alan formülünün oluşturulması için dikdörtgenin içindeki birim kareler sayılarak ardından bu karelerin toplam sayısının 2 kenarın çarpımına her durumda eşit olacağı sonucuna varılmış olabilir. Aynı durumu Pisagor Bağıntısı'nda da görmek mümkündür. Çünkü 3 adet karenin birleşmesi ile karelerin alanları arasındaki ilişki fark edilerek kısa kenar ve uzun kenarın kareleri toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğu genellemesine ulaşılır ve bu durum ($a^2+b^2=c^2$) şeklinde cebirsel bir ifade ile gösterilir. Görüldüğü gibi varılan sonuçlar her seferinde anlamlı gözlemler yapılarak ilişkilerin kurulmasını ve ardından tüm durumlar için geçerli olan ifadenin üretilmesini gerektirmektedir.

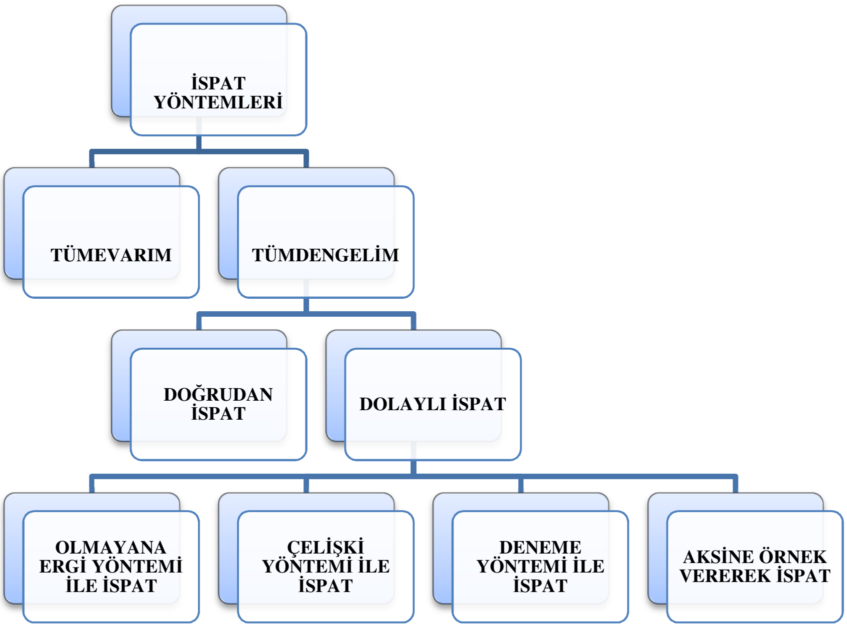
Matematiksel manada ele alınan tümevarımsal düşünceyi günlük yaşam bağlamında ele alınan tümevarımsal düşünceden ayıran ikinci nokta ise bu düşüncenin deneme-yanılmalar yoluyla defalarca kontrol edilebilen kesin sonuçlara ulaşmayı sağlamasıdır. Günlük gözlemlerimizle vardığımız tümevarım, deneme ve yanılmalara pek açık değildir. Çünkü güneşin yarın doğacağına dair kesin bir bilgimiz olmasa bile '*yarın doğabilir*' demekteyiz (DiLivio, 2009). Çünkü önceki deneyimlerimize göre güneşin doğmadığı hiçbir gün yoktur; ancak güneşin yarın doğacağı konusunda bir kesinlik değil, bir beklenti söz konusudur. Ancak matematiksel manada verilen durumların bütününü göz önünde bulundurmak mümkündür. Bu yüzden ulaşılan genellemenin tüm durumları sağladığı rahatlıkla görülebilir ve bahsedilen durumların kontrol edilebilmesi bilişsel anlamda mümkündür. Örneğin dikdörtgenin alan bağıntısı tüm dikdörtgenler için tartışmasız doğru kabul edilebilir ve bu bağıntı hangi dikdörtgende uygulanırsa uygulansın doğru sonucu verir. Ancak güneşin doğması, hırsızın evimize girmesi kontroller dışında gerçekleşir ve kesin olup olmayacağı konusunda hiçbir zaman kesin bir fikre sahip olunamayabilir. Ancak verilen matematiksel bir örüntünün nasıl devam edeceği veya genel teriminin ne olacağı konusunda kesin bir fikre matematiksel genellemeler sayesinde sahip olunabilir. Görüldüğü gibi günlük hayatta her zaman gerçeği yansıtmayan tahminler, matematiksel anlamda gerçeği yansıtabilmektedir. Örneğin 2, 5, 8, … şeklindeki bir sayı örüntüsünün 4. terimini tahmin etmek için önce belirtiler yakalanmalı ve sayılar arasındaki ilişki organize edilerek bulgular ortaya çıkarılmalıdır. Bu sayılar 3'er 3'er artmaktadır bu yüzden diğer sayı da 8'in 3 fazlası olmalıdır ki bu örüntüde bir sonraki terime ulaşılsın. Ancak bir sonraki terimin bulunması örüntünün ilerletilmesini sağlarken; genel terimin veya tüm adımlar için geçerli bir kuralın bulunması konusunda yeterli değildir. Bu yüzden 2, 5, 8, … şeklindeki sayı dizisinin genel teriminin bulunması için tümevarımsal düşünce süreci işe koşulur. Bu dizideki genel terimi bulmak, örüntünün *n.* adımındaki terimi bulmak demektir. *n.* adım ise örüntünün herhangi bir adımıdır. *n.* adımdaki genel terim, örüntüdeki hangi adım denenirse denensin o adıma ait terimi vermelidir. Genelleme bu manasıyla matematiksel manada kuralların veya özelliklerin üretilmesi demektir (English ve Warren, 1995; Lee, 1996; Carpenter ve Franke, 2001). Esasında genelleme, birinci anlamının yanı sıra ikinci anlamı olarak durumu veya durumların ötesinde bulunan bir dizi sonucun genişletilmesi (Piaget ve Henriques, 1978; Akt. Ellis, 2007; Dubinsky 1991; Harel ve Tall, 1991) iken üçüncü anlamı olarak durumlar arasındaki benzerliklerin tanımlanması (Dreyfus, 1991; Kaput, 1999) şeklinde üç boyutlu bir yapı olarak değerlendirilebilir (Ellis, 2007).

Genellemenin üç şeklinden ilki olan matematiksel manada kuralların üretilmesi, görüldüğü gibi matematiksel formüllerin üretilmesi, örüntülerin genel teriminin bulunması gibi bir manaya gelmektedir. Genellemenin bu türü ilerleyen paragraflarda 'bir süreç olarak tümevarımsal düşünce' başlığı altında ayrıntılı olarak işlenecektir. Bu yapının ikinci boyutunda durumların ötesinde yer alan sonuçların genişletilmesi ifadesi ile bireyin zihnindeki şemaların genişletilmesi ve hiç değiştirilmeden var olan şemaların içeriği konusunda değişiklikler yapılması vurgulanmaktadır. Bu yapının üçüncü boyutunda ise bireyin zihninde yeni şemalar üretilmesi, yani soyutlama mantığı bulunmaktadır. Genellemenin bu boyutu ise 'tümevarımsal düşünce ve soyutlama arasındaki ilişki' başlığı altında işlenecektir.

2.2.1. Bir Süreç Olarak Tümevarımsal Düşünce

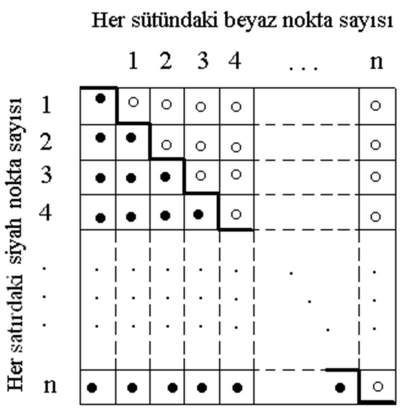
Bu araştırma kapsamında, bir önceki kısımda izah edilen genelleme türlerinin ilki yani özel durumların genellenmesi ele alınmıştır. Özel durumlardan genel durumlara ulaşılırken açık olarak veya olmayarak bir süreç sergilenmektedir (Henderson, 2002; Akt. Yeşildere ve Türnüklü 2007). Bu bakış açısıyla tümevarımsal düşünceyi bir süreç olarak değerlendirmek mümkündür. Nitekim matematikçiler tarafından teoremlerin nasıl ispatlandığını anlamanın ötesinde, bu ispatın yapılabilmesi için tahminlerin nasıl yapıldığını (Pólya, 1945; Akt. Yeşildere ve Türnüklü, 2007) ve dolayısıyla tümevarımsal düşünce sürecinin nasıl sergilendiğini anlamak gerekmektedir. Matematiksel ispat, bütüncül manada bir süreç olarak düşünülen tümevarımsal düşünceden bu noktada ayrılmaktadır. Çünkü matematiksel manada tümevarımsal düşünce, tümevarımsal ispattan daha kapsamlı bir nitelik taşımaktadır (Cañadas ve Castro, 2007). Tümevarımsal düşünce, genelleme formülünü ispatlamaktan ziyade bir matematikçi gibi düşünüp önce genelleme yapmayı, ardından da yapılan genellemenin ispatını içeren bütüncül ve karmaşık bir süreçtir; tümevarımsal ispat ise tümevarımsal düşünce sürecinin son aşamasında yer alan ve ulaşılan genellemenin ispatını sağlayan bir yoldur.

Matematikte tümevarımsal ispat, genelleme oluştuktan sonra üretilen formülün tüm durumlar için geçerli olup olmadığının belirlenmesini sağlamaktadır. Diğer bir deyişle matematiksel tümevarım, ispatı ve sonuç çıkarmayı birlikte içeren bir kavramdır. Matematikte yer alan formal ispatların pek çoğu tümdengelim düşüncesinden daha çok tümevarımsal düşünceye dayanmaktadır (Cañadas ve Castro, 2007). Matematikte formal ispatın türü olan tümevarımsal ispat, matematikçiler tarafından verilen bir genellemenin veya önermenin doğal sayılar cümlesindeki doğruluğunu test etmek amacıyla kullanılmaktadır. Aşağıdaki şekil, matematikte kullanılan formal ispat metotlarını özetlemektedir:



Şekil 2. Matematikte kullanılan ispat metotları (Akkaş v.d.'den (2010) uyarlanmıştır).

Şekilde görüldüğü gibi ispat yöntemlerinin bir kolu olan tümevarım, matematiksel manada formal bir ispat türü olarak değerlendirilmektedir. Tümevarımsal ispatta genel amaç, var olan bir kuralın doğruluğunu araştırmak ve belirlenen cümlede geçerli olup olmadığına karar vermektir. Bu noktada tümevarımsal ispat ve tümevarımsal düşünce süreci arasındaki farkı 1'den *n*'e kadar sayıların toplam formülünü yazmayı gerektiren bir örnek üzerinde açıklamak mümkündür. Aşağıdaki şekilde toplam nokta sayısının hesaplanması ve ardından beyaz noktaların veya siyah noktaların ayrı ayrı hesaplanması için izlenen süreç, tümevarımsal ispattan daha kapsamlı ve karmaşıktır. Aşağıdaki şekil, tümevarımsal düşünce sürecini gerektiren görsel bir problemi göstermektedir:



Şekil 3. Beyaz ve siyah noktalardan oluşan dikdörtgen (MEB, 2005).

Şekilde görülen dikdörtgenin içindeki toplam nokta sayısı bulunmak istenirse; $2(1+2+3+...+n\ ) = n(n+1)$ şeklinde bir ifade yazılır. Bu ifadede eşitliğin sol kısmı, her satırda bulunan siyah ve her sütunda bulunan beyaz noktaların toplam sayısını verirken; eşitliğin sağ kısmı kısa kenarı '*n*', uzun kenarı '*n+1*' olan dikdörtgenin alanını vermektedir. Dikdörtgenin alanının bulunmasındaki temel sebep, birim karelerin her birinde bir noktanın bulunmasıdır. Esasında dikdörtgenin alanını veren ifade birim kare sayısını, dolayısıyla şekildeki toplam nokta sayısını vermektedir. Eşitliğin her iki tarafının ikiye bölünmesi ile $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ şeklindeki ifade oluşacaktır. Bu ifade ise dikdörtgen içinde bulunan siyah veya beyaz noktaların toplam sayısını ayrı ayrı ifade etmektedir. Görüldüğü gibi sonuç ifadesindeki formül, tümevarımsal düşünce sürecini gerektirmektedir. Elde edilen formülün tüm doğal sayılar cümlesi için geçerli olup olmadığının anlaşılması açısından bu formül ile tümevarımsal bir ispat yapılmalıdır. Bu anlamda bulunan formül bir önerme olarak düşünülür ve önermenin doğruluğu ispat yöntemleri yoluyla test edilir.

Tümevarımsal ispat ile '$n=1$ için doğru olan önerme $n=k$ için doğru ise $n=k+1$ için de doğru mudur' sorusunun cevabı aranmaktadır (Balcı ve Aral, 2003). Bu yöntem,sonsuz sayıda domino taşının devrilmesine benzetilebilir. *n.* taşın devrilmesi bir sonraki yani *(n+1).* taşın da devrilmesi anlamına geleceğinden taşların tamamı devrilecektir. Önerme doğal sayılar cümlesindeki bütün elemanları sağlıyorsa önermenin $n=1$ için doğruluğunu göstermek yani ilk taşı devirmek tüm taşların devrilmesi için yeterlidir (Albayrak, 2010). Aşağıda 1'den *n*'e kadar olan doğal sayıların toplam formülünü veren ifadenin tümevarımsal bir yöntemle ispatına yer verilmektedir:

Teorem:

$\forall n \geq 1$ için,

$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ dir.

İspat:

Adım 1: $n=1$ için $\frac{1(1+1)}{2} = 1$' dir.

Adım 2: $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ifadesinin '*n*' için doğru olduğu kabul edilerek teoremdeki ifadenin '*n+1*' için de doğru olduğu gösterilir.

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)= \frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

$$\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Böylece $\forall n \geq 1$ için verilen formülün doğru olduğu sonucuna varılır ve ispat tamamlanır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Görüldüğü gibi verilen toplam formülünün doğal sayılar cümlesi için doğruluğu tespit edilmiş ve tümevarımsal ispat sonlandırılmıştır. Matematiksel ispat türlerinden tümevarımsal ispat, bu bakış açısıyla bahsedilen tümevarımsal düşünce sürecinin son aşaması; yani genellemenin testi için kullanılan formal bir ispat metodudur. Diğer bir deyişle formülün oluşturulması için geçen süreç, araştırma kapsamında ele alınan tümevarımsal düşünce süreci ile eş değer iken; formül oluşturulduktan sonra örüntünün terimleri için formülün kontrolü, bahsedilen formal ispat türleri ile eş değerdir.

2.2.2. Tümevarımsal Düşünce ve Soyutlama Arasındaki İlişki

Genelleme türlerinden üçüncüsü, benzerliklerin tanımlanması şeklinde ifade edilen yapı, yeni zihinsel şemaların oluşturulması veya bilginin soyutlanması şeklinde düşünülebilir (Ellis, 2007). Soyutlama ve tümevarımsal düşünce arasındaki ilişki, soyutlamanın yorumlanma şekline bağlı olarak değişmektedir. Çünkü soyutlama, deneysel durumlardan yola çıkılarak ortak özelliklerden yararlanılması ile kavram oluşturma iken (Skemp 1986; Akt. Mitchelmore ve White, 2007; Yeşildere ve Türnüklü, 2008), zıt durumların, oluşturulan sınıflama dışında bırakılması gibi bir anlamı da içermektedir (Dienes, 1961; Akt. Yeşildere ve Türnüklü 2008; Sierpinska, 1994). Ayrıca Piaget, soyutlamanın üç türünü tanımlamıştır (Dubinsky, 1991). Bunlardan 1. olan deneysel soyutlama, kavramlar arasındaki yüzeysel benzerliklere dayanan, günlük yaşamdaki kavramları oluşturmaya yönelik bir soyutlama türüdür (Dubinsky, 1991; Mitchelmore, 2002). Bu sayede bireyin zihninde büyük bir yer kaplaması beklenen özel durumlar, ortak özelliklerin belirlenmesi ile tek bir şema altında toplanmakta ve bireyin 'özümseme' işini gerçekleştirmesine olanak sağlamaktadır. Örneğin 1, 3, 5, 7, … şeklinde ilerleyen bir sayı örüntüsü 2 ile bölünemeyen sayılardan oluşan bir cümle olarak düşünüldüğünde 'tek sayılar' şeklinde bir şema oluşturulabilir. Soyutlama türlerinin ikincisi yarı-deneysel soyutlama, eylemlerin nesnelerle birlikte değerlendirildiği veya kavramların ortak özelliklerinin yanı sıra eylemler arasındaki çok yönlü ilişkilerin de temele alındığı soyutlama türüdür (Dubinsky, 1991; Yeşildere ve Türnüklü, 2008). Örneğin 1, 3, 5, 7, … şeklindeki sayı örüntüsünün 'tek sayılar cümlesi' olarak düşünülüp ardından 1, 2, 3, 4, … şeklindeki sayı örüntüsünün oluşturduğu 'sayma sayıları cümlesi' ile eşleştirilmesi yarı-deneysel soyutlama ile gerçekleştirilmektedir. Bu durumda 1. adımda 1, 2. adımda 3, 3. adımda 5, 4. adımda 7 şeklinde örüntü adımları ve terimleri arasındaki bağlantı kurulmaktadır. Soyutlama türlerinden 3. olan yansıtıcı soyutlama ise eylemler arasında kurulan genel bağlantılardır (Piaget, 1980; Akt. Paschos ve Farmaki, 2006). Diğer bir deyişle genellemenin pek çok türüne kaynaklık eden ve kurallara yeni anlamların yüklenebildiği bir soyutlama türüdür (Piaget ve Garcia, 1989; Akt. Dubinsky, 1991). Özellikle matematiksel kavramlara farklı açılardan bakabilmek ve matematiğin birkaç alanında genelleme yapmak gibi bir anlama gelmektedir. Aşağıda bu soyutlama türünün örneğine yer verilmektedir:

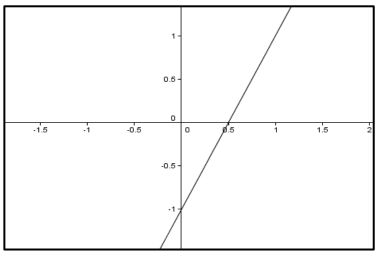
1. Adım	2. Adım	3. Adım	4. Adım
1	3	5	7

Adım sayısının 2 katının 1 eksiği terim sayısıdır.

Örüntünün genel terimi cebirsel bir ifade olarak *2n-1*'dir.

Bir doğru denklemi olarak *y=2x-1* şeklinde ifade edilebilir.

Bu doğru denkleminin grafiği aşağıdaki şekilde çizilebilir.

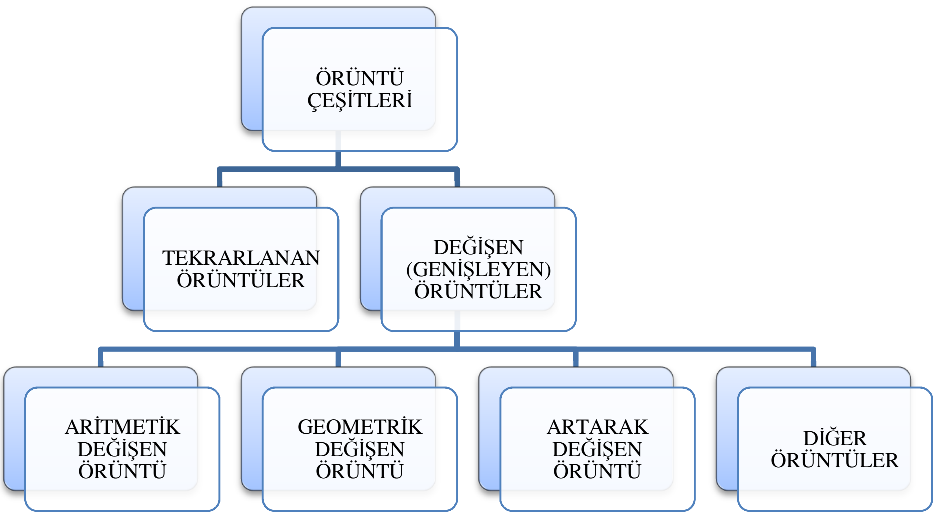


Şekil 4. 1, 3, 5, 7 , … sayı dizisi için yansıtıcı soyutlama örneği.

Şekil 4'te de görüldüğü gibi tek sayılardan oluşan örüntü için daha genel ifadelerin oluşturulması ve konunun cebirsel ifadeler, fonksiyon, doğru denklemleri ile yorumlanması ve bu konulara soyutlanması mümkün olmaktadır. Bu durumda örüntüler konusu, matematiğin farklı konularına soyutlanarak genellenebilmektedir. Tümevarımsal düşünce açısından da örüntülerden genellemeye doğru izlenen süreç esasında bir soyutlama işidir. Nitekim soyutlamanın bahsedilen bütün türlerini tümevarımsal düşünce sürecinde görebilmek mümkündür.

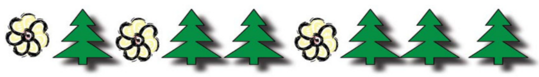
2.2.3. Örüntülerden Genellemelere Bir Süreç Olarak Tümevarımsal Düşünce

Örüntü, terimlerin belli bir düzen içinde sıralandığı sonsuza giden bir tür dizidir. Diğer bir deyişle, 'desen' olarak düşünülen örüntü, düzenli dizilmiş, tekrar eden nesne veya şekillerin oluşturduğu manzume olarak açıklanabilir (Tanışlı ve Olkun, 2009). Aşağıdaki şekil, örüntü çeşitlerini göstermektedir:



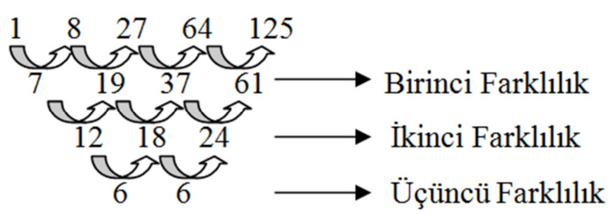
Şekil 5. Örüntü çeşitleri (Tanışlı ve Olkun, 2009).

Örüntü çeşitlerine kısaca değinilecek olursa, tekrarlanan örüntü, tekrar birimi olarak ifade edilen belirli birtakım öğelerin döngüsel olarak devam ettiği örüntülerdir (Threlfall, 1999; Liljedahl, 2004). Örneğin 5, 9, 5, 9, ….şeklinde ilerleyen bir sayı örüntüsü terimleri açısından tekrarlayan bir nitelik taşımaktadır. Benzer bir şekilde matematiksel yapılar içinde ortaya çıkan 4/11=0,3636363636… şeklindeki devirli ondalık sayısı tekrarlayan örüntülere örnek teşkil etmektedir (Zaskis ve Liljedahl, 2006). Değişen örüntüler, terimler arası ilişkilerin genişleyen veya daralan bir seyir izlemesi ile oluşan örüntülerdir (Olkun ve Yeşildere, 2007). Değişen örüntüler, matematik biliminde 'dizi' olarak bilinmektedir (Tanışlı ve Olkun, 2009). Değişen örüntülerde örüntüyü devam ettirmek ve sonunda cebirsel bir ilişki veya genelleme bulmak, fonksiyon kavramına girişte veya matematiksel düşünmenin oluşmasında önemli bir etkendir (Cathcart v.d., 2003; Van de Walle, 2004). Ayrıca değişen örüntülerin kuralı ya da ilişkisi doğrusal bir denklemle açıklanabilmektedir (Yaman, 2010). Değişen örüntüler dört farklı şekilde ele alınmaktadır. Bunlardan ilki, aritmetik değişen örüntüdür. Aritmetik değişen örüntü, terimler arasındaki sabit sayıların artışı veya azalışı ile oluşturulmaktadır. Örneğin 1. terimi a_1 ve terimler arası sabit farkı d olmak üzere terimleri sırasıyla a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, … şeklinde olan örüntünün n. terimi '$\boldsymbol{a_n=a_1+(n-1)\cdot d}$' dir. Örneğin 2, 5, 8, 11, … örüntüsü veya aşağıda görsel gösterim de bu örüntüye örnek teşkil etmektedir.



Şekil 6. Aritmetik değişen görsel örüntü örneği.

Değişen örüntülerin ikincisi ise terimlerin bir oran dâhilinde değiştiği, geometrik örüntülerdir. Bu tür örüntülerdeki ilişkiler, üslü nicelikli denklemlerle açıklanabilmektedir. Örneğin; 1. terimi a_1, terimler arası ortak çarpan r olmak üzere, terimleri a_1, $a_1\cdot r$, $a_1\cdot r^2$, $a_1\cdot r^3$, … olan bir örüntünün n. terimi için '$a_n=a_1\cdot r^{(n-1)}$' kuralı kullanılabilir. 1, 2, 4, 8, 16, … şeklinde ilerleyen örüntü ise geometrik örüntü çeşidine bir örnektir. Artarak değişen örüntü, terimler arası farkların giderek arttığı veya azaldığı değişen bir örüntü çeşididir. Artarak değişen örüntülerin ilişkisi 2. veya 3. dereceden denklemlerle açıklanabilir. Örneğin 1, 8, 27, 64, … şeklinde ilerleyen bir örüntü artarak değişmektedir. Aşağıda bu örüntünün hangi artışlarla ilerlediği gösterilmektedir:



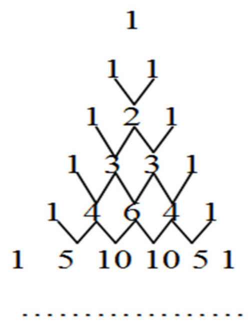
Şekil 7. Artarak değişen sayı örüntüsü örneği.

Görüldüğü gibi verilen artışlar 3. adımda sabit bir hale gelmektedir. Örüntünün genel terimi bu yüzden 'n^3' olan 3. dereceden bir ifade meydana getirmektedir. Bu örüntü türüne görsel bir örnek de aşağıda verilmektedir:

Şekil 8. Artarak değişen görsel örüntü örneği (noktasal örüntü).

Şekil 8'den de anlaşılacağı gibi artarak değişen görsel örüntü örneğinde ilk terim 1 artışla, 2. terim 2 artışla 3, 3. terim 3 artışla 6, 4. terim 4 artışla 10 nokta şeklinde inşa edilmiştir. Adım sayısı her adımdaki artışın ne kadar olduğunu göstermektedir. Bu durumda 1'den adım sayısına kadar toplandığı zaman bulunulan adımdaki nokta sayısına ulaşılabilmektedir.

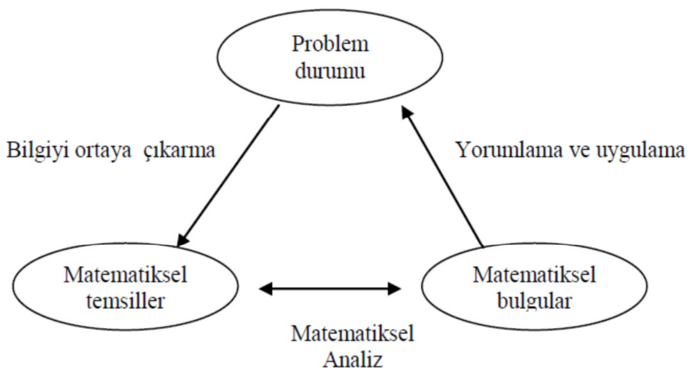
Son örüntü çeşidi, geometrik veya aritmetiksel olmayan veya artarak ilerlemeyen diğer örüntülerdir. Bu tür örüntüler 'özel örüntüler' şeklinde de isimlendirilmektedir. Çok ünlü bir sayı dizisi olan Fibonacci sayıları, Pascal üçgeni bu örüntü tipine örnek olarak gösterilebilir (Yaman, 2010). Örneğin 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … şeklinde önceki 2 terimin toplamı ile oluşturulan örüntü, Fibonacci sayılarını verirken; aşağıdaki dizi, Pascal üçgenini göstermektedir. Bu üçgenin özelliği ise ortalarda bulunan sayıların üstteki 2 sayının toplamını vermesidir. Pascal üçgenindeki bu dizilişle herhangi elemanlı bir kümenin 0, 1, 2,…elemanlı alt küme sayılarının tespiti de mümkün olmaktadır.



Şekil 9. Pascal üçgeni dizisi.

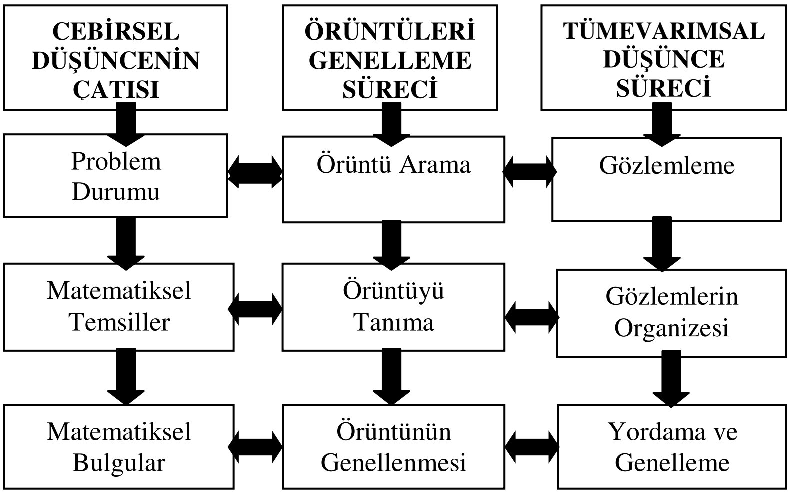
Örüntüler açısından tümevarımsal düşünce, örüntüleri cebire taşıyan bir yol olarak görülebilir. Çünkü örüntülerde yer alan şekiller veya sayılar arasındaki ilişkinin tanımlanması ve genellenmesi cebir ve fonksiyon kavramının gelişiminin sağlanması açısından önemlidir (Tanışlı ve Olkun, 2009). Çünkü örüntüler; tablolar, grafikler, şekiller, sayılar gibi farklı temsil sunumlarıyla deneylere ve gözlemlere açık bir hale gelerek gözlemlerden cebire giden süreci başlatmaktadır. Bu açıdan örüntüler, matematiksel bir verinin sunularak, matematiksel bilgi oluşturma, matematik yapma ve dolayısıyla tümevarımsal düşünce sürecinin incelenmesi açısından büyük bir öneme sahiptir (NTCM, 1989).

Örüntü çeşitlerinde de görüldüğü gibi örüntüleri incelemek ve onların gidişatı hakkında bilgi sahibi olmak esasında başlı başına bir gözlemi gerektirmektedir. Bu gözlem, sadece örüntüye bakıp ahengi görmeyi değil, bu ahengin yapısı hakkında bilgi sahibi olmayı ve ahengin nasıl oluşturulduğunu anlamayı bir nevi analiz etmeyi gerektirmektedir. Verilen örüntünün yapısını anlamanın ilk yolu, örüntüdeki tekrar biriminin algılanmasıdır (Threlfall, 1999). Böylece örüntülerin nasıl genişlediği, değiştiği analiz edilmekte ve bu analiz sonuçları örüntü çeşiti ne olursa olsun, örüntülerdeki matematiksel ilişkilerle ilgili genellemeler yapmaya yardımcı olmaktadır. Örüntülerden genellemeye giden süreçte örüntüyü arama, örüntüyü tanıma-tanımlama ve örüntüyü genelleme şeklinde üç aşama tanımlanmaktadır (Herbert ve Brown, 1997). Bu aşamalar, cebirsel düşüncenin üç aşamalı süreci (Herbert ve Brown, 1997) ile paralellik göstermektedir (Tanışlı, 2008). Aşağıda cebirsel düşünme sürecini gösteren şekle yer verilmektedir:



Şekil 10. Cebirsel düşüncenin çatısı (Aktaran: Tanışlı, 2008).

Şekilde görüldüğü gibi örüntüyü arama, problem durumundan bilgi ortaya çıkarmaktır. Örüntüyü tanıma ve tanımlama, bilgiyi matematiksel olarak kelime, diyagram, tablo, grafik ve denklemlerle temsil etmektir. Örüntüyü genelleme ise bilinmeyeni bulma, varsayımları test etme ve fonksiyonel ilişkileri tanımlama gibi matematiksel bulguların yorumlanması ve uygulanmasıdır (Tanışlı ve Olkun, 2009). Nitekim örüntülerden genellemeye giden yolda cebirsel düşünce sürecini ve esasında tümevarımsal düşünce sürecini görmek mümkündür. İlerleyen paragraflarda değinilecek olan tümevarımsal düşünce aşamaları ile bu aşamaların birbirine benzediği, görülmektedir. Bu benzerlikler aşağıdaki şekilde özetlenmektedir:



Şekil 11. Cebirsel düşünce, örüntüleri genelleme ve tümevarımsal düşünce süreçlerinin karşılaştırılması (Herbert ve Brown (1997), Cañadas ve Castro (2007) ve Tanışlı ve Olkun (2009) kaynaklarından uyarlanmıştır).

Görüldüğü gibi örüntülerin genellenmesi için belli bir süreç gerekmektedir. Bu süreç, tümevarımsal düşünce süreci ile örtüşmektedir. Aşağıda, artarak değişen bir görsel örüntünün (bakınız, Şekil 8) nasıl genellendiğini gösteren aşamalara yer verilmektedir:

1. AŞAMA (Örüntüyü Arama-Gözlemleme)

Örüntü gözlemlenir ve örüntüdeki adımların nasıl değiştiği tespit edilir. Adımlardaki benzerlikler ve farklılıklar irdelenir.

2. AŞAMA (Matematiksel Temsil-Organizasyon)

Örüntü, matematiksel bir temsille gösterilir. Örneğin bir tablo veya grafik kullanılabilir. Aşağıdaki tablo, Şekil 8'deki örüntü için düzenlenmiştir.

Adım	**1**	**2**	**3**	**4**
Nokta	**1**	**3**	**6**	**10**

3. AŞAMA (Örüntünün Genellenmesi)

Matematiksel temsiller matematiksel bulgular haline dönüştürülür. Örüntünün matematiksel bir dile dönüşümü sağlanır. Örneğin Şekil 8 için cebirsel anlamda $n \times (n+1) \div 2$ ifadesi, aritmetiksel anlamda $1+2+3+\ldots+n$ ifadesi oluşturulabilir.

Şekil 12. Artarak değişen görsel örüntünün genellenmesi.

Şekil 12'de görüldüğü gibi görsel örüntünün genellenmesi için yukarıda genel anlamda ele alınan süreç işletilmektedir. Ancak bu sürecin daha derinlemesine incelenmesi için alan yazınında tümevarımsal düşünce sürecinin nasıl yorumlandığına değinmek yerinde olacaktır. Bu nedenle bir sonraki kısımda tümevarımsal düşünce süreçleri detaylı bir şekilde incelenecektir.

2.3. TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE SÜRECİNE GENEL BİR BAKIŞ

Tümevarımsal düşünce ile ilgili araştırmaları birbirinden ayıran nokta, bu düşüncenin nasıl sergilendiği ve nasıl ölçüldüğü konusuna getirilen yorumlardır. Araştırmaların odak noktası, geçerli ve güvenilir ölçümler yapılarak tümevarımsal düşünce yapısının testler üzerinde ölçülmesi olabileceği gibi bilişsel bir yaklaşımla düşüncelerin analiz edilmesi şeklinde de olabilir. Bilişsel yaklaşımın amacı, özellikle tümevarımsal düşünce gibi temel bilişsel kabiliyetlerin altında yatan işlemleri ve gösterimleri tanımlamaktır (DiLivio, 2009). Bu araştırmada da tümevarımsal düşünce, bir süreç olarak, yani bilişsel anlamıyla irdelenmektedir. Bu kapsamda tümevarımsal düşünce sürecinin aşamaları açıklanırken araştırmalarda bilişsel manada ele alınan modeller üzerinde düşünmek ve bu modelleri yorumlamak, süreçte hangi aşamaların olduğu sorusuna cevap verebilmek önemlidir.

Tümevarımsal düşünce süreci, matematiksel açıdan belli problemlerin çözümü esnasında ortaya çıkmaktadır. Bahsedilen süreç, örneğin belli gözlemleri gerektiren ve ardından birkaç düzenleme ile tahminler yürütmeye sebep olan ve tahminlerin en genel halini alması şeklinde ilerleyen bir problem çözme süreci ile paralellik arz etmektedir. Tümevarımsal düşünce süreci, bu bakış açısıyla Pólya'nın (1967) ortaya koyduğu tümevarım (induction) süreci ile temellenmekte ve süreç hakkında yapılan diğer araştırmalar da bu temel üzerine oturtulmaktadır. Pólya (1967), tümevarımsal düşünce sürecini;

a) Özel durumları gözlemlemek,

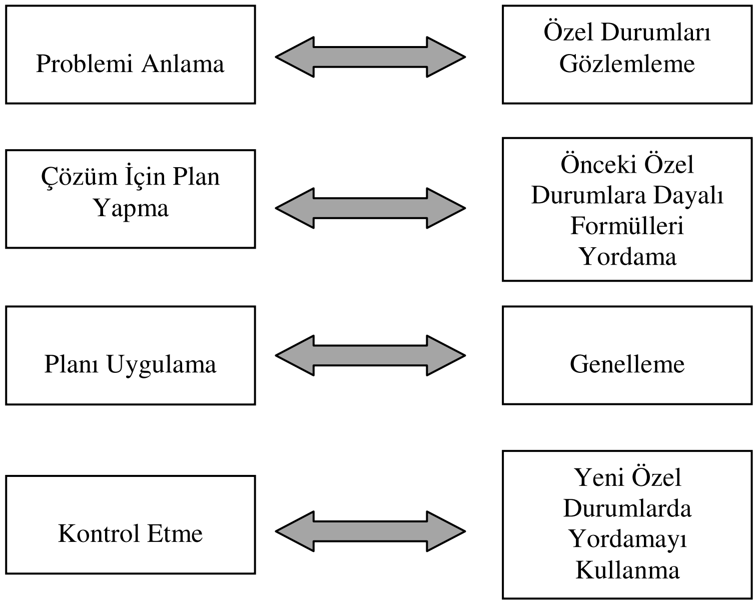
b) Önceki özel durumlara dayalı olarak formülleri yordamak,

c) Genellemek

d)Yordamayı yeni özel durumlarda kullanmak şeklinde yorumladığı dört aşamayı ilk defa tümevarımsal düşünce süreci modeli olarak ele almıştır.

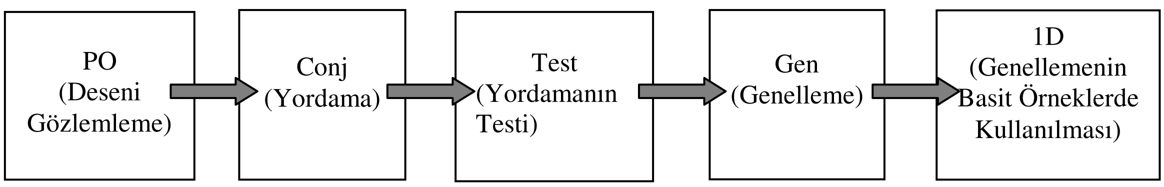
Tümevarımsal düşünce konusunda oluşturulan bu süreç, Pólya'nın (1988) dört aşamalı problem çözme sürecini hatırlatan bir nitelik taşımaktadır. Aşağıdaki şekil üzerinde tümevarımsal düşünce süreci ile problem çözme süreçleri karşılaştırılmaktadır:

PROBLEM ÇÖZME SÜRECİ MODELİ **TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE SÜRECİ MODELİ**



Şekil 13. Problem çözme ve tümevarımsal düşünce süreçlerinin karşılaştırılması (Pólya (1967) ve Pólya (1988) kaynaklarından uyarlanmıştır).

Tümevarımsal düşünce sürecinin dört aşaması, matematiksel problem çözme sürecinin dört aşamasına benzetilerek incelendiğinde tümevarımsal yaklaşım gerektiren sorulara özgü bir süreç tanımlanabilmektedir. Bahsedilen süreçler esnek bir yapıda ele alındığında daha ayrıntılı süreçlerin yorumlanması mümkün olabilir. Diğer bir ifade ile tümevarımsal düşünce süreçleri, bilişsel süreçlerin gözlemlenmesine bağlı olarak çeşitlilik göstermektedir. Alan yazınında tümevarımsal düşünce süreçlerinin çeşitli şekillerde yorumlanmasının nedeni, araştırmalar kapsamında yapılan mülakatlar esnasında keşfedilen farklı süreçlerdir. Bu durumun bir örneği Reid (2002) tarafından ele alınan beş aşamalı süreç modelidir. Aşağıdaki şekil Reid'in (2002) beş aşamalı süreç modelini temsil etmektedir:



Şekil 14. Beş aşamalı tümevarımsal düşünce modeli (Reid, 2002).

Görüldüğü gibi Reid'in (2002) beş aşamalı modelini Pólya'nın (1967) dört aşamalı modelinden ayıran en temel nokta, hipotez kurulduktan sonra hipotezin doğruluk testinin yapılmasıdır. Çünkü dört aşamalı modelde genellemenin kontrolü varken; beş aşamalı modelde hem yordamanın hem de genellemenin kontrolü söz konusudur. Diğer bir ifade ile dört aşamalı modelde sonuç kontrolü, beş aşamalı modelde hem sonuç hem de tahmin kontrolü yapılmaktadır. Bahsedilen farkı oluşturan nokta, dört aşamalı süreçte 'matematiksel problem çözme' sürecine benzeyen mantık, beş aşamalı süreçte 'bilimsel bir problemin çözümü' sürecine benzetilebilir. Çünkü bilimsel problemlerin çözümünde, beş aşamalı modele benzer olarak hipotez oluşturulduktan sonra bu hipotez test edilerek genellemeler yapılmaktadır.

Bahsedilen dört ve beş aşamalı tümevarımsal düşünce süreci modelleri temele alınarak yedi aşamalı tümevarımsal düşünce modeli oluşturulmuştur (Cañadas ve Castro, 2007). Esasında dört ve beş aşamalı tümevarımsal düşünce süreçleri temele alınarak oluşturulan yedi aşamalı model, Cañadas, v.d.'nin (2008) araştırmalarında değindikleri 5 yordama türünden biri olan 'deneysel tümevarım' yordamasına dayandırılmaktadır. Bu yordama türü, rakamları içeren problem türlerinde sıklıkla yer almaktadır (Cañadas v.d., 2008). Örneğin herhangi asal 2 tek sayıyı toplayan bir birey (bakınız, Şekil 15), toplamın her seferinde 4'ten büyük çift sayılar olduğunu görerek bu durumun sonsuzdaki sayılar için de geçerli olabileceğini düşünebilir (Smith ve Henderson, 1959). Aşağıda bireyin yaptığı toplama işlemlerine yer verilmektedir:

6 = 3 + 3

8 = 3 + 5

10 =3 + 7 = 5 + 5

12 = 5 + 7

14 = 3 + 11 = 7 + 7

16 = 3 + 13 = 5 + 11

18 = 5 + 13 = 7 + 11

20 = 3 + 17 = 7 + 13

…

30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17

Şekil 15. Çift sayıların 2 tek sayının toplamı şeklinde yazımı (Smith ve Henderson, 1959).

Şekilde görüldüğü gibi 30'a kadar tüm çift sayıların, tek asal sayıların toplamı şeklinde yazılabildiğini gören birey, bu durumun göremediği sayılar için de geçerli olacağını savunmuştur. Çünkü yapılan deneylerin sonucunda sonsuzdaki sayılar hakkında bir düşünce oluşturmak mümkündür. Bu bakış açısıyla deneysel yordama, verilen örüntüyü araştırma, deneme-yanılmalar yoluyla yordamalar yapma ve ardından genellemeye varma gibi bir süreci içermektedir. Cañadas ve Castro (2007) tarafından ele alınan ve deneysel yordama türündeki (Cañadas v.d., 2008) bu yedi aşamalı model:

(a) Örüntüyü Gözlemlemek,

(b) Özel Durumların Düzenlenmesi,

(c) Örüntüyü Araştırmak ve Tahmin Etmek,

(d) Formülü Yordamak,

(e) Yordamayı İspatlama,

(f) Genellemek,

(g) Genellemeyi (Genel Yordamayı) İspatlama aşamalarından oluşmaktadır.

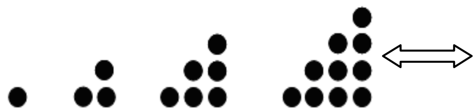
'Örüntüyü gözlemlemek', problem kurgusunda bulunan örüntülerle ilk defa karşılaşmak, verilen örüntünün akışını kontrol etmek demektir. Akıştaki düzenin fark edilmesi ise problem çözücünün, müzik notaları arasından nakaratı bulmaya çalışan bir müzisyen gibi tekrarları (ahengi) fark etmesi anlamına gelmektedir. 'Desenler arasında değişen şey nedir? Tekrarlanan şey nedir?' soruları bu aşamada devreye girer. Bu aşama, tümevarımsal düşünce gerektiren problemi öncelikle anlamayı gerektirmektedir. Gözlemler, verilen özel durumlar üzerinde değişimi fark etmek ve parçaları izlemek amaçlı yapılmaktadır. Verilenler arasında ilişkiler kurmak ve bir anlamda verilenleri birbirine bağlamak bu noktada önem kazanmaktadır. Bağlantılar, ilk aşamada sınırlı bir şekilde kuruluyor olabilir (Cañadas v.d., 2008). Bu aşama, Pólya (1967) tarafından özel durumların gözlemlenmesi, yine Pólya (1988) tarafından problemi anlama, Reid (2002) tarafından ise desenin gözlemlenmesi şeklinde yorumlanan aşamalarla eşdeğerdir.

Gözlemleme aşaması, bireyin zihninde gerçekleşen ve açığa çıkması bir o kadar güç olan bir nitelik taşımaktadır. Çünkü problem türüne göre gözlemlerin yansıması da farklılık arz etmektedir. Örneğin yukarıda örneği verilen 'çift bir sayı iki tek asal sayının toplamına eşittir' sonucuna varan birey öncelikle Şekil 15'teki gibi denemeler oluşturmakta bu şekilde gözlemini tamamlamaktadır. Gözlemler burada açık ve net görülmekte iken; görsel bir soruda bu derece net gözlemlerin yapılması mümkün olmamaktadır. Şekil 8'de artarak değişen görsel örüntü örneğinden hareket edilerek bu aşama açıklanabilir. Şekil 8'de bulunan örüntüyü gözlemleyen birey, ilk olarak noktaları sayıp bu noktaların her bir adımda nasıl değiştiği üzerine bazı düşünceler geliştirir. 1. adımdan 2. adıma geçilirken 2 nokta, 2. adımdan 3. adıma geçilirken 3 nokta eklenerek örüntü aynı formatta büyütülmüş ve ilerletilmiştir. Bu örüntüde gözlem yapmanın diğer bir yolu da nokta sayılarını 1, 3, 6, 10,…şeklinde adım adım şekillerin altına yazmaktır. Görüldüğü gibi gözlem yapmak, örüntünün verilen adımları üzerinde araştırmayı, adımlar arası ilişkilerin keşfini ve tanımlanmasını gerektirmektedir.

Tümevarımsal düşünce sürecinin aşamalarından ikincisini oluşturan *'özel durumların organize edilmesi'* aşamasında, problem çözümünün kolaylaştırılması ve verilenlerin sistematik bir halde göz önüne serilmesi gerçekleştirilmektedir. İşlemi kolaylaştıran noktalar: problem durumunda var olan verilerin modellenmesi ve karmaşıklıktan kurtarılarak düzenli bir hale getirilmesidir. Bu noktada kullanılan en yaygın strateji, veri listeleri ve tablolarıdır (Allen, 2001). Bu aşama, Pólya (1967), Pólya (1988) ve Reid'in (2002) değindiği aşamalar arasında görülmemektedir. Ancak bu aşama, Şekil 11'de görüldüğü gibi cebirsel düşünce sürecinde (Herbert ve Brown, 1997) matematiksel temsil, örüntülerin genellenmesi sürecinde (Tanışlı, 2008) örüntüyü tanıma ve tanımlama aşamaları ile paralellik göstermektedir. Cañadas ve Castro (2007), yaptıkları mülakatlarda kayıt altına aldıkları bu aşamayı bahsedilen dört ve beş aşamalı modellere eklemişlerdir. Esasında bu aşama, Polya (1967) ve Reid (2002) tarafından önerilen dört ve beş aşamalı modellerde yer alan gözlemleme aşamasının genişletilmesi ile oluşturulmaktadır.

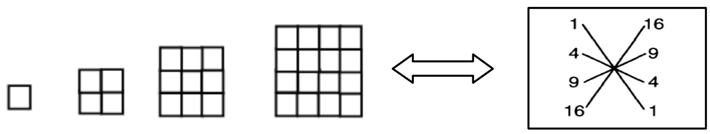
Bu aşamada her problem çözücü kendine özgü bir yol izleyerek örüntüleri düzenler ya da bu örüntüleri farklı şekillerde ifade eder. Organize etmek, gözlemlenen desenlerin yazıya dökülerek analizinin yapılması, desen hakkında oluşan düşüncelerin düzenlenmesi, örüntü akışının kavranarak örüntünün farklı temsillerle ifade edilmesini içermektedir. Problemin çözümünde organize etmenin sağladığı en önemli fayda, eldeki verilerin anlamlandırılmasıdır. Böylece zihinde oluştuktan sonra planlanarak düzenli hale getirilen veriler, problem için uygun yollar bulmayı kolaylaştırmaktadır. Verilen örüntünün organize edilmesi, bir sonraki aşama olan yordamanın da kolaylaştırılmasını sağlamaktadır (Cañadas ve Castro, 2007). Şekil 15'te görüldüğü gibi birkaç çift sayının tek asal sayıların toplamı şeklinde yazılabildiğini gösteren işlemler, esasında bir tür organizasyondur. Özellikle 6'dan 30'a kadar çift sayıların teker teker yazılarak oluşturulan düzenli toplama işlemleri bu aşamanın sergilendiğini göstermektedir.

Aritmetiksel manada verilen düzenlemenin yanı sıra görsel manada verilen örüntünün düzenlenmesi de belli farklılıklar içermektedir. Aşağıda, verilen noktasal ve karesel örüntülerin çeşitli düzenleme şekillerine yer verilmiştir. Bu şekiller verilen örüntülerin farklı matematiksel temsillerini göstermektedir.



1. Adım	1 Siyah Nokta
2. Adım	3 Siyah Nokta
3. Adım	6 Siyah Nokta
4. Adım	10 Siyah Nokta

Şekil 16. Artarak değişen örüntünün tablo şeklindeki temsili.



Şekil 17. Karesel örüntünün rakamlarla temsili.

Verilerin düzenlenmesi aşaması, örneklerde de görüldüğü gibi gözlem sonuçlarının çetele haline getirilmesi işi ile benzerlikler göstermektedir. Her gün güneşin saat kaçta doğduğunu gözlemleyen bireyin, bu gözlemleri kayıt altına aldığında daha anlamlı yorumlara ve genellemelere ulaşabildiği gibi her örüntüdeki benzerlikleri, farklılıkları kendi anlayabileceği bir şekilde sınıflandıran birey, gözlemini somutlaştırarak doğru sonuçlara ulaşma olasılığını artırabilmektedir. Başka bir ifadeyle, problem durumunu kendi anlayabileceği şekilde temsil edebilen gözlemci bir anlamda problemi kavrayabilmekte ve ardından doğru çözümler yaparak doğru genellemelerde bulunabilmektedir. Ayrıca örüntünün organizesi, verilen nesnelerin matematikselleştirilmesinin ilk aşaması olarak da yorumlanabilir. Çünkü organizasyon esnasında öğrenme alanları arasında geçişler söz konusu olmaktadır. Bu geçişler ise matematiksel manada genellemeyi kolaylaştırmaktadır.

Tümevarımsal düşünce aşamalarından üçüncüsü olan, '*örüntüyü araştırma ve tahmin Etme*' aşaması örüntüye bağlı olarak elde edilen tahminleri, bilinmeyen örüntü adımları için sınırlı yorumlar yapmayı sağlayan bir nitelik taşımaktadır. Bu aşama, bütün durumlar için uygun olan yordamadan biraz farklıdır. Bu aşamada sadece bir ilerideki desen ve bir sonraki durum düşünülür (Cañadas v.d., 2008). Tahmin aşaması, Cañadas v.d. (2008) tarafından Reid'in (2002) *'Deseni Gözlemleme'* aşamasına benzetilmektedir. Bu aşamada farklı olarak gözlemlenen örüntü basit bir şekilde ileriye taşınmaktadır. Bu aşamada önemli olan bir önceki aşamada organize edilerek sistematikleştirilmiş desenler arasındaki ilişkiyi kontrol etmek ve bir bağlantı kurmaktır. Aşağıda noktasal örüntü örneğine bağlı olarak oluşturulmuş bir tahmin tablosu yer almaktadır:

Tablo 1. Artarak değişen örüntü adımlarının ilerletilmesi.

1. Adım	1 Siyah Nokta	1
2. Adım	3 Siyah Nokta	1+2
3. Adım	6 Siyah Nokta	1+2+3
4. Adım	10 Siyah Nokta	1+2+3+4
5. Adım	**5 artış ile 15**	**5 artış ile 1+2+3+4+5**

Yukarıda verilen örüntü tablosunda desenler arasında sırasıyla 2, 3 ve 4 artış görülmektedir. Genellemenin bu aşamasında '1. adımdan 2. adıma 2 artış, 2. adımdan 3. adıma 3 artış, …' olduğu düşünülerek yapılan sıralama, artış miktarının her adımda 1 arttığı yorumunu da beraberinde getirir. Bu noktada genel terime ulaşılamamış sadece her adımda bir önceki adımdan 1 fazla artış olacaktır şeklinde bir yorum elde edilmiştir. Dikkat edilirse bu basit tahminde bir önceki desene bağlılık ve genel terimi tahmin edememe gibi bir sınırlılık söz konusudur. Aşamadaki bu sınırlılık, en son 30 sayısı için iki tek asal sayının toplamı şeklinde yazılacağını gösteren örnek için "*32 de asal 2 tek sayının toplamı olarak yazılabilir*" (Cañadas v.d., 2008, s. 63) şeklinde bir sonraki adımın tahmini sırasında açıkça görülmektedir. Bu durumda tüm terimlere hitap etmeyen bazı tahminler de ortaya konulmuş olabilir. Bu aşama, eldeki tez araştırmasında bir sonraki aşama olan yordama aşaması ile birlikte ele alınmaktadır. Çünkü bir sonraki terimin tahmini ve ardından tüm terimler için oluşturulan yorumlar birlikte incelenmekte ve birbirinden ayrılmayan bazı noktalar görülmektedir. Ancak bu aşamada kalan çözümler, genellikle tüm terimlerin birlikte düşünülmesi ile değil, terimlerin tek tek yazılıp ilerletilmesi ile doğru sonuca ulaşılacağını gösteren çözümlerdir.

Tümevarımsal düşünce sürecinin 4. aşaması olan *'yordama'*, kelime anlamı itibariyle güvenirliği sağlanmamış deneysel gerçeklere dayalı bir tahmin durumudur. Bu aşama Reid'in (2002) sonuç çıkarma modellerinde yer verdiği 'Şüpheli Yordama', 'Şüpheli Önermeler Oluşturma' gibi anlamları içermektedir. Sunulan önermede kesinlik değil, kuşku söz konusudur. Çünkü birkaç durumun gözlemlenmesi sonucu bir yorum elde edilmiştir. Bu aşama, örüntüyü araştırma ve tahmin etme aşaması ile büyük ölçüde örtüşmekte; hatta ayırt edilemeyen bazı noktalar içermektedir. Ancak bu basamağın önceki basamaktan farklı olduğu temel nokta verilen adımlara bağlı kalınmadan ilişkilerin kurulmasıdır. Daha açık bir ifade ile bir önceki aşamada örüntü adımları arasındaki ilişkilerden yola çıkılarak yapılan yorumlar söz konusu iken; bu aşamada hem bilinen hem de bilinmeyen adımları içeren ileriye dönük yorumlar söz konusudur. Ayrıca bu aşama Pólya'nın (1967) özel durumlar için bir formül yordama, Pólya'nın (1988) çözüm için plan yapma ve Reid'in (2002) yordama şeklinde görülen 2. aşamaları ile örtüşmektedir. Yordama aşamasında örüntünün bilinmeyen adımları merak edilmekte ve oluşturulan formülün bu adımlar için de doğru olup olmadığı konusunda düşünceler geliştirilmektedir. Kurulan hipotezler, yapılan yorumlar henüz ispatlanmamıştır; ancak sonraki adımlar için tutarlı ve gerçeğe dayalı olduğu düşünülen ilk çıkarımlar oluşturulmaktadır. Şekil 8'deki artarak değişen örüntü göz önüne alındığında '*Her adımda, adımın sırası kadar siyah nokta eklenerek örüntü devam ettirilebilir'* gibi yine sınırlı ancak ileriye dönük düşünceler oluşturulabilir. 4'ten büyük çift sayıların iki tek asal sayının toplamı olacağı yönündeki örnekte ise bu aşamaya gelen birey, örneğin 100 sayısının hangi 2 asal tek sayının toplamı olduğu konusunda bir fikre sahip olabilmektedir (Cañadas v.d., 2008). Bu aşama, örüntünün oldukça ileri adımlarını bulabilmekle eşdeğerdir. Çünkü bir önceki tümevarımsal düşünce aşamasında yakın bir adımın tahmini söz konusu iken; bu aşamada uzaktaki bir adımın tahmini önem kazanmaktadır. Uzaktaki bir adımı yordamanın, bir yolu da bütünsel olarak bakabilmek ve örüntünün birden çok adımını göz önüne alarak basit mantıksal çıkarımlarda bulunmaktır.

Tümevarımsal düşünce aşamalarından beşincisi ise *'yordamayı ispatlama' (güvenirliğini sağlamak)* aşamasıdır. Bu aşamada, gözlemciler yaptıkları şüpheli yordamaları kontrol etmektedirler. Bu kontroller ise yapılan yordamanın önceki adımları verip vermeyeceğinin testi yoluyla gerçekleştirilmektedir. Bu aşamada örüntünün bilinmeyen bir deseni için yordanan örüntü formülü denenir, test edilir. Bu aşama, Reid'in (2002) 'Test' aşamasında olduğu gibi ileriye doğru yapılan çıkarımların da ispatını içermektedir (Cañadas v.d., 2008). Örneğin Şekil 8'de 5. ve 6. sıradaki adımlar oluşturulduktan sonra tekrardan başa dönülerek yapılan kontroller bu aşamada gerçekleştirilmektedir. İki tek asal sayının toplamının 4'ten büyük çift sayıları oluşturma örneğinde ise bu aşamaya gelen birey, örneğin 5 ve 7 gibi 2 asal sayıyı toplayarak 12 gibi 4'ten büyük çift sayıyı oluşturarak kontrol edecek ve bu kontrolleri yine önceki adımlar için de devam ettirerek yaptığı yordamayı test edecektir.

Tümevarımsal düşünce aşamalarından altıncısı ise *'genelleme'* aşamasını içermektedir. Bu aşama, örüntünün sadece birkaç adımına bağlı kalınmadan genel bir formülün veya kuralın elde edilmesini gerektirmektedir. Bu ihtiyaçtan hareketle genel; yani tüm adımlara bütüncül manada hitap edebilen ortak bir terim bulunmaya çalışılmaktadır. Bu aşama *'olanaklı bir yordamadan onaylanmış, genel bir kurala geçmek' (epistemic value)* olarak adlandırılan bir değişimi içermektedir (Duval, 1990; Akt. Cañadas v.d., 2008). Bu açıdan genelleme aşaması, ifadelerin matematiksel sembollerle anlam bulduğu, örüntünün genellenebildiği, başka bir ifade ile genel terimin bulunduğu bir noktadır. Yordama aşamasında doğruluğu ispatlanan hipotez, bu aşamada tüm gözlemcilerce kabul edilmiş ve ispata açık bir formül veya kural haline getirilmiştir. Bu aşama, durum hakkında inanılan bir değişimi içermektedir (Cañadas v.d., 2008). Örneğin, Şekil 8'deki görsel örüntü, tek bir ifade ile '$n(n+1)/2$' formülüne karşılık gelmektedir. Bu örüntü esasında 1'den *n*'e kadar sayıların toplamını veren ifade ile eşdeğer bir nitelik taşımaktadır. Ayrıca bu aşama Pólya'nın (1967) genelleme, Pólya'nın (1988) planı uygulama ve Reid'in (2002) genelleme aşamaları ile eşdeğerdedir.

Tümevarımsal düşünce aşamalarından yedincisini oluşturan *'genellemeyi ispatlama'* aşamasında ise karşıdaki kişilerin ikna olması sağlanarak, genellemenin mantıklı bir sebebe dayandırılması gerekmektedir. Bu noktada problem çözücü tarafından formal ve informal ispatlar kullanılabilmektedir. Yordamanın ispatı aşaması ile bu aşamanın ayrıştığı temel nokta yordamanın ispatında tümevarım varken; genellemenin ispatında bir anlamda tümdengelimin de işe koşulmasıdır. Kişi bu aşamada, doğruluğu kuramlara dönüşmüş yordamalarda olduğu gibi formal matematiksel ispatlar yapabilir (Cañadas v.d., 2008). Cañadas ve Castro (2007) tümevarımsal düşünce süreci konusunda yaptıkları analizde hiçbir öğrencinin bu aşamayı sergilemediğini ifade etmektedirler. Ayrıca son aşama, Pólya'nın (1967) yordamanın yeni özel durumlarda kullanılması, yine Pólya'nın (1988) kontrollerin yapılması ve Reid'in (2002) genellemenin özel bir durumda kullanılması aşamaları ile örtüşmektedir.

Görüldüğü gibi tümevarımsal düşünce süreci konusunda üretilen modeller, matematiksel bir problemin çözümü olarak başlamış ve bilimsel bir problemin çözümüne 'Deneysel Tümevarım' mantığı ile benzetilerek ayrıntılı bir hale getirilmiştir. Aşamalar üzerinde yapılan yorumlara bağlı olarak daha ayrıntılı süreçler elde edilebileceği gibi bu süreçle alakalı var olan modellerin sadeleştirilmesi de mümkündür. Çünkü Cañadas ve Castro'nun (2007) bakış açısıyla, aşamalar lineer bir boyutta olmayıp problem çözümlerinde bir aşama atlanarak diğer bir aşamaya geçilebilecek kadar esnek bir nitelik taşımaktadır. Aşamalar arasındaki bu esneklik, belli aşamaların ayrıştırılamamasına neden olmakta veya sürece farklı aşamaların eklenmesine olanak tanımaktadır.

2.4. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Tümevarım konusunda alan yazınında yer alan araştırmalar, tümevarımsal düşüncenin bilişsel anlamda incelenmesi, genelleme stratejileri, ispat ve muhakeme, örüntülerin öğretimi ve genellenmesi, cebirsel genelleme başlıkları altında toplanmaktadır. Bahsedilen konularda ulusal ve uluslar arası anlamda pek çok araştırma yapılmış bulunmaktadır.

2.4.1. Uluslararası Araştırmalar

Tümevarımsal düşünce ile ilgili uluslar arası araştırmaları bilişsel anlamda tümevarımsal düşünce sürecinin incelenmesi ve örüntülerin genellenmesi şeklinde iki başlık altında toplamak mümkündür. Bilişsel anlamda tümevarımsal düşünce süreçlerinin incelenmesi konusunda yapılan araştırmalar farklı düşünce süreçlerini ortaya koymuştur. Bu bağlamda Reid (2002), yordama ve ispat konusunda yaptığı araştırmada araştırmacı öğretmen Vicki Zack'in sınıfında doğal ortamlarda kaydedilen öğrenci mülakatlarından yararlanmıştır. 25 kişiden oluşan sınıfta matematiksel becerisi bulunan 12-13 kişi tespit edilmiştir. Tüm sınıf 4-5 kişilik heterojen gruplar halinde verilen problemler üzerinde çalışmışlardır. Beş sene birlikte okuyan bu grubun tüm matematiksel aktiviteleri araştırmacı öğretmen tarafından kayıt altına alınmış olup, Reid (2002) yaptığı araştırmada bu kayıtların sadece 3'ünden yararlanmıştır. Öğrenciler arasında geçen üç etkileşim de üç ayrı matematiksel sonuç çıkarma örneğini meydana getirmiştir. Bunlardan ilki yordamanın doğru bir şekilde gerçekleştiği ve eldeki araştırma kapsamında değinilen beş aşamalı modeldir. Bu aşamalar, örüntünün gözlemlenmesi, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin basit örneklerde kullanılması şeklinde kodlanmıştır. Diğer sonuç çıkarma modelleri ise öğrenci mülakatlarına göre belli aşamalarda farklılaşmış ve daha kapsamlı olarak ifade edilmiştir.

Cañadas ve Castro (2007), tümevarımsal düşünce analizinde oluşturdukları kategori modellemesi isimli araştırmalarında 2 matematiksel problemi mülakatlar yoluyla 12 İspanyol öğrenciye yönelterek problem çözme süreçlerini incelemişlerdir. Öğrencilerden toplanan veriler, bilgisayar ortamında nitel bir yöntemle analiz edilmiştir. Kuramsal manada Pólya (1967) ve Reid'in (2002) aşamalarını temel alan araştırmacılar mülakatlar esnasında bu aşamalara yenilerini ekleyerek ve tümevarımsal düşünce sürecini yedi kategoride toplayarak analizlerini tamamlamışlardır. Sonuç olarak tümevarımsal düşüncenin uygulamanın yapıldığı ilköğretim düzeyinde doğal bir nitelik taşıdığı ve bunun göstergesinin ise genel terimin sorulduğu örüntülerde öğrencilerin verilen adımlara tekrar dönerek, incelemelerde bulunmaları olduğu görülmüştür. Ayrıca ilköğretim düzeyindeki bu öğrencilerin, oluşturdukları genellemeleri birkaç özel durum için deneyerek kontrol ettikleri veya az sayıda öğrencinin genel ifadenin kontrolünü sağlama ihtiyacı duyduğu görülmüştür. Öğrencilerin genellikle aritmetiksel örüntülerde bir sonraki adımı kolaylıkla bulabilmelerine rağmen, lineer olmayan artışlar içeren diğer örüntü türlerinde sonraki adımı bulma noktasında zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Ayrıca örüntünün genel terimi ifade edilirken sınıf düzeyi ne olursa olsun öğrencilerin cebirsel bir dil kullanabildikleri tespit edilmiştir.

Bilişsel anlamda tümevarımsal düşünce sürecinin incelendiği bir başka araştırma ise Cañadas v.d. (2009) tarafından yapılmıştır. Bu araştırmada tümevarımsal düşünce yöntemi ile çözülebilecek farklı türdeki 6 adet örüntü sorusu 359 ilköğretim öğrencisine yöneltilmiştir ve çözümlerin analizinde Cañadas (2007) tarafından üretilen yedi aşamalı tümevarımsal düşünce modelinden yararlanılmıştır. Sonuç olarak öğrenciler tarafından sergilenen aşamaların farklı yüzdelere sahip olduğu, problem türüne bağlı olarak aşamaların gösterilme sıklığının değiştiği, tümevarımsal düşünce modelinin aşamaları arasında bağımlı-bağımsız ilişkilerin olduğu saptanmıştır.

Tümevarımsal düşünce süreci ile ilgili yapılan araştırmaların diğer bir kısmını da örüntülerin genellenmesi başlığı altında incelemek mümkündür. Çünkü örüntülerin genellenmesi bir tür tümevarımsal düşünce süreci olup hem öğretmenler hem de öğrenciler tarafından işe koşulmaktadır. Zazkis ve Liljedahl (2002) cebirsel düşünce ve cebirsel gösterim arası geçişte örüntülerin genellenmesi konusunda yaptıkları araştırmada 36 sınıf öğretmeni adayına görsel bir sayı örüntüsü sorusu yöneltmişlerdir. Daha sonra katılımcıların dört tanesi ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin sözel cebirsel genellemeleri cebirsel gösterimlerle destekleyemediği ve araştırmaya katılan öğretmen adaylarının da cebirsel genellemeleri kullanmadan problem çözümlerini gerçekleştirme eğiliminde oldukları görülmüştür.

Lannin v.d. (2006) öğrencilerin cebirsel genellemeler yaparken strateji seçimlerini etkileyen faktörler konusunu incelemiştir. Bu araştırmada ilköğretim düzeyindeki 8 öğrenci, başarı düzeyleri birbirine yakın olacak şekilde ikişerli gruplandırılarak 10 öğretim sezonunda deneysel öğretim metoduyla sınava tabi tutulmuşlardır. Toplanan veriler, araştırmanın kuramsal yapısını oluşturan 4 genelleme stratejisi temel alınarak kodlanmıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin genelleme stratejilerini etkileyen karmaşık faktörler olduğu saptanmıştır. Bu etkenler ise hazırbulunuşluk, etkinliğin matematiksel yapısı, önceden kullanılan stratejiler, problem durumunun görselliği, öğretmen ve diğer öğrenciler arasındaki kişinin sosyal etkileşimi olarak belirlenmiştir. Sayılan etkenler arasındaki belli kombinasyonların da öğrencilerin kullandıkları stratejileri etkilediği belirtilmektedir. Örneğin görsellik etkeni açısından geometrik bağlantılar içeren etkinlikler, öğrencilere işlemlerin anlamı ile problem durumunu ilişkilendirme fırsatı vermiştir. Öğrenciler böylece işlem ve içerik arasında bağlantılar kurarken hatalarını daha rahat anlamışlar ve içerikle bağlantılı olmayan rakamsal genelleme stratejilerini daha seyrek kullanmaya başlamışlardır.

Genelleme konusunda yapılan bir diğer araştırma ise Figueiras ve Cañadas (2010) tarafından sayı problemlerinin çözümünde basit stratejilerden genelleme stratejilerine geçişte sonuç çıkarma konusu ile ilgili olarak yapılmıştır. Bu amaçla 3 şıktan oluşan bir kombinasyon problemi veri toplama aracı olarak kullanılmıştır ve bu soru, yaklaşık 12 yaşlarındaki 25 öğrenciye yöneltilerek aralarından seçilen 5 öğrenci ile mülakatlar yürütülmüştür. Sonuç olarak genelleme aşamasına geçişlerde öğrencilerin bazen ağaç diyagramlarını bazen de aritmetiksel düşünce stratejilerini kullandıkları görülmüştür.

2.4.2. Ulusal Araştırmalar

Ulusal anlamda tümevarımsal düşünce süreçleri konusunda doğrudan yapılmış bir araştırmaya rastlanmamakla birlikte son yıllarda ülkemizde örüntülerin genellenmesi, matematiksel ispat, akıl yürütme süreçleri konularında tümevarımsal düşünce ile dolaylı olarak alakalı araştırmaların yapıldığına şahit olmaktayız.

Ulusal anlamda tümevarımsal düşünce konusunda yapılan araştırmaların ise ilk boyutunu 'ispat' konusu oluşturmaktadır. Bu bağlamda Moralı v.d. (2006) tarafından matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri konusunda yapılan araştırma, 59'u ortaöğretim, 278'i ilköğretim bölümünden olmak üzere toplam 337 öğretmen adayına ispat ve ispat yapmaya yönelik görüşlere ait soruların olduğu beşli likert tipi ölçek ile uygulanmıştır. Öğretmen adaylarınca ölçeğe verilen yanıtlar soru bazında SPSS-Win programıyla puanlandırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin çok gelişmediğini veya yetersiz olduğunu göstermiştir.

Arslan (2007) ilköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimini incelemiştir. Araştırmada öğrencilerin ispat düzeylerini belirleyici nitelikte 6, 7, 8. sınıf düzeylerine uygun açık uçlu 5 sorudan oluşan veri toplama aracı Bursa ili merkez ilçesinin 7 okulundan rastgele seçilen 679 öğrenciye uygulanmıştır. Seçilen 36 öğrenci ile mülakatlar yapılmıştır. Sonuçlar 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin alan yazınında desteklenen ortalama verilere göre düşük olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte kullanılan ispat türlerinin sınıf seviyesi ile birlikte belli oranda değiştiği, özellikle 8. sınıf ile 6 ve 7. sınıflarda örnekle doğrulamadan cebirsel ispata yönelimlerde anlamlı farklılıklar olduğu tespit edilmiştir.

Ulusal manada tümevarımsal düşünce konusunda yapılan araştırmaların ikinci boyutunu ise akıl yürütme veya muhakeme süreçleri oluşturmaktadır. Bu kapsamda Yeşildere ve Türnüklü (2007) yaptıkları araştırmada öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini incelemişlerdir. 10 adet açık uçlu sorudan oluşan veri toplama aracı, İzmir'den seçilen 20 okuldan 8. sınıfı bitirmiş 262 öğrenciye uygulanmıştır. Anket yöntemi kullanılarak toplanan veriler, nitel ve nicel yöntemlerle analiz edilmiştir. Sonuç olarak ilköğretim 8. sınıftan yeni mezun öğrencilerin problem çözmede, matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada, mantıksal akıl yürütmede sorun yaşadıkları görülmüştür. Bu durumun nedenleri ise araştırmacılar tarafından öğrencilerin verilenlerden değil de öznel durumlardan hareket etmeleri, düşüncelerini kanıtlar sunarak veya açıklamalar yaparak ifade edememeleri, verilenler arasında ilişkilendirmeler yaparak problem çözememeleri şeklinde yorumlanmıştır.

Pilten (2008), üstbiliş stratejileri öğretiminin ilköğretim 5. sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakemelerine etkisi konusunda yaptığı araştırmada Ankara'nın merkez ilçesinde yer alan bir okulun 5. sınıfından oluşan toplam 66 öğrenci üzerinde deneysel bir araştırma yapmıştır. Deney grubunda yer alan öğrencilere Mevarech ve Kramarski (1997) tarafından geliştirilmiş, üstbiliş teorilerine dayalı bir öğrenme yaklaşımı olan IMPROVE (Giriş: **I**ntroduction, Üstbilişsel Sorgulama: **M**etacognitive Questioning, Uygulama: **P**ractising, Gözden geçirme: **R**eviewing, Uzmanlık: **O**btaining Mastery, Doğrulama: **V**erification, zenginleştirme: **E**nrichment) stratejisi, 25 ders saati boyunca uygulanmıştır. Bu süre içerisinde öğrencilerin 65 problemle belirtilen stratejiyi kullanarak araştırmaları sağlanmıştır. Araştırmada öğrencilere, matematiksel muhakeme ölçeği, ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Sonuç olarak, deney grubunda yer alan öğrencilerle gerçekleştirilen üstbilişe dayalı öğretimin, kontrol grubunda sürdürülen geleneksel öğretime göre uygun muhakemeyi belirleme ve kullanmada, matematiksel bilgileri ve örüntüleri tanıma ve kullanmada, tahmin etmede, çözüme ilişkin mantıklı tartışmalar geliştirmede, genelleme yapmada, rutin olmayan problemleri çözmede ve matematiksel muhakeme becerilerini geliştirmede daha etkili olduğu görülmüştür.

Ulusal anlamda tümevarımsal düşünce konusunda yapılan araştırmaların üçüncü boyutunu ise örüntüler ve örüntülerin genellenmesi konusu oluşturmaktadır. Bu bağlamda Tanışlı (2008) tarafından yapılan araştırmada ilköğretim 5. sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi konusu incelenmiştir. Araştırma, Eskişehir merkezinde bulunan bir okuldaki 12 öğrenciye uygulanmıştır. Verilerin toplanmasında 9 örüntü sorusu ve mülakat sorularının birlikte bulunduğu klinik görüşme soruları, kişisel bilgi formu, öğrenci günlükleri ve araştırma günlükleri kullanılmıştır. Verilerin analizinde nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Sonuç olarak örüntülerde tekrar biriminin belirlenmesinin örüntünün sonlu bir adıma kadar ilerletilmesinde ve tekrarlanan bir örüntü oluşturulmasında etkili olduğu görülmüştür. Ayrıca örüntüye ilişkindir terimin bir önceki terimle ilişkilendirildiği ya da örüntüdeki terimlerin doğasına odaklanıldığı ancak sayı örüntüsü fonksiyon tablosu biçiminde verilmişse, bunlara ilaveten terim ve terim sırası ilişkisinin kurulabildiği tespit edilmiştir. Şekil örüntülerinde ise, görsel ve cebirsel yaklaşımın benimsendiği ortaya çıkmıştır. Kullanılan örüntü çeşitlerinde tüm etkinliklerde, en çok 'sözel', 'sembol' ve 'matematiksel cümle' ifade biçimlerinin kullanıldığı görülmüştür. Örüntülerde gerçekleştirilen etkinlikler esnasında strateji seçimlerinde öğrenci başarı düzeylerinin etkili olmadığı, buna karşın örüntülerin sunuluş biçiminin (sayı dizisi, fonksiyon tablosu, şekil) etkili olduğu belirlenmiştir.

Örüntüler ve örüntülerin genellenmesi konusunda bahsedilebilecek bir diğer araştırma ise Yeşildere ve Arslan (2010) tarafından yapılan sayı örüntülerinde cebirsel genelleme yapmayı destekleyen etkinlik tasarımlarıdır. Etkinlik tasarımı için Stylianides ve Stylianides (2008), Liljedahl v.d. (2007) ve Swan (2007) tarafından geliştirilen çerçeveler kullanılmıştır. Sayı örüntülerini cebirsel genellemeye ilişkin olarak da Radford (2008) tarafından geliştirilen kuramsal çerçeve esas alınmıştır. Bu doğrultuda hazırlanan etkinliklere, farklı başarı seviyesinde üç tane 7. sınıf öğrencisiyle yapılan pilot araştırma sonrasında son şekli verilmiştir. Alan yazınında a) ilişkilere odaklanamama, b) uzak terimi bulamama, c)*n* genel terimini kavrayamama d) aritmetik genelleme yapabilme ancak cebirsel genelleme yapamama şeklinde yer alan örüntüleri genelleme bağlamında öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri, üretilen etkinliklere ışık tutmuştur ve bahsedilen öğrenme güçlüklerinin bu etkinliklerle aşılacağı iddia edilmektedir.

Yaman (2010) yaptığı araştırmada ilköğretim öğrencilerinin matematiksel örüntülerdeki ilişkileri algılayışlarını betimsel bir yöntemle incelenmiştir. Verilerin toplanması için 12 sorudan oluşan matematiksel örüntü başarı testi Ankara merkezinde yer alan iki okuldan 3., 4., 5., 6., 7. sınıf öğrencilerinden oluşan toplam 317 öğrenci üzerinde uygulanmıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin sınıf seviyelerine göre matematiksel örüntü performansları arasında anlamlı farklılıklar olduğu, sınıf seviyesi arttıkça öğrencilerin matematiksel örüntü performanslarının da arttığı saptanmıştır. Ayrıca öğrencilerin örüntü sunum biçimlerine göre matematiksel örüntülerle ilgili performansları arasında anlamlı bir ilişki olduğu, öğrencilerin en çok tablo biçimindeki örüntülerde kolaylık yaşadıkları, diğer sunum biçimlerinde de sıralamanın 'şekil', 'sözel problem' ve 'sayı dizisi' biçiminde devam ettiği görülmüştür. Araştırma sonucunda öğrencilerin tekrarlayan örüntülerle ilgili performanslarının çok iyi olduğu, özellikle karesel genişleyen tipteki örüntülerle ilgili sorun yaşadıkları, doğrusal genişleyen tipteki örüntülerde ise ortalama performans gösterdikleri saptanmıştır. Ayrıca öğrencilerin inceledikleri örüntülerin kuralını sözel olarak da ifade edebildikleri bulunmuştur. Fakat bulunan kuralı sembolik olarak ifade etme görevlerini içeren soru tiplerinde büyük zorluklar yaşadıkları ve az sayıda öğrencinin sembolik ifade sorularını cevaplayabildikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin örüntülerin sunum biçimi, örüntü tipi ve soru tiplerine göre matematiksel örüntü performansları arasında tek tek anlamlı ilişkiler bulunmuştur.

Örüntüler ve örüntülerin genellenmesi boyutunda Yeşildere ve Akkoç (2010) tarafından yapılan araştırmada ise sayı örüntülerinin cebirsel genellenmesinde aday ilköğretim matematik öğretmenlerinin kullandıkları stratejiler konusu incelenmiştir. Araştırmada sayı örüntülerinin genel terimini buldurmaya yönelik, açık uçlu aritmetik ve aritmetik olmayan örüntülerden oluşan 5 soru kullanılmıştır. Araştırmaya 147 matematik öğretmen adayı katılmıştır. Öğretmen adaylarının genellemelerde kullandıkları yöntemler ve matematiksel modeller şeklinde elde edilen veriler araştırmacılar tarafından nitel bir yöntemle analiz edilmiştir. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının sayı örüntülerindeki kuralları terimler arası farka bağlı olarak oluşturdukları ve görsel örüntüleri amacına uygun olmayan bir şekilde kullandıkları görülmüştür. Bahsedilen bu araştırmanın yanı sıra örüntüler ve örüntülerin genellenmesi konusunda Yeşildere ve Akkoç (2010) tarafından yapılan bir diğer araştırma, matematik öğretmen adaylarının sayı örüntülerine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin konuya özel stratejiler bağlamında incelenmesi konusu üzerinedir. Araştırmada 6 öğretmen adayının mikro-öğretim etkinlikleri gerçekleştirme sürecinde sayı örüntülerinin kuralını bulmayı öğretmede kullandıkları stratejiler araştırılmıştır. Shulman (1986) tarafından ortaya konan pedagojik alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisinin Magnusson v.d. (1999) tarafından tanımlanan konuya özel stratejiler bileşeni olguları kuramsal çerçeve olarak kullanılmıştır. Mikroöğretim esnasında kamera ile kaydedilen veriler, öğretmen adayları ile yapılan mülakatlar ile desteklenmiştir. Verilerin analizi ise öğretmen adaylarının kullandıkları stratejiler başlığı altında; 'ardışık sayılar arasındaki ilişkiyi inceleme', 'tablo yapma', 'modelleme yapma', 'deneme-yanılma yöntemini kullanma' olarak kategorilere ayrılmıştır. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının örüntülerle ilgili alan yazınında rapor edilen güçlüklere sahip oldukları görülmüştür.

Örüntüler ve örüntülerin genellenmesi konusunda bahsedilecek son araştırma ise Tanışlı ve Köse (2011) tarafından yapılmıştır. Tanışlı ve Köse (2011), lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri konusunda yaptıkları araştırmada verilen bir lineer şekil örüntüsünü 16 tane sınıf öğretmen adayı üzerinde uygulamışlardır. Klinik görüşme yöntemi ile toplanan veriler nitel yöntemle analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda, kimi öğretmen adayları lineer şekil örüntüsünü yakın/uzak bir adıma devam ettirmede ve örüntünün kuralını belirlemede sadece şeklin yapısına odaklanılan görsel ve şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürüldüğü sayısal yaklaşımı benimsemişler, bu yaklaşımlar altında da toplam 26 strateji kullanmışlardır. Örüntüleri genellerken adayların sayısal yaklaşım altında sadece terimler arası ilişkinin araştırıldığı yinelemeli, görsel yaklaşım altında ise hem yinelemeli hem de değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı fonksiyonel stratejileri kullandıkları görülmüştür.

Sonuç olarak ulusal ve uluslar arası alanda yapılan ilgili araştırmalar, matematiksel ispat, muhakeme, akıl yürütme ve sonuç çıkarma, örüntüler ve örüntülerin genellenmesi gibi tümevarımsal düşünce sürecini doğrudan veya dolaylı olarak etkileyen konulardan oluşmaktadır. Nitekim tümevarımsal düşünce sürecinin bir bütün olarak incelendiği birkaç araştırmanın yanı sıra genelleme üzerine yapılan araştırmalar, bu sürecin işleyişi hakkında bilgi verici bir nitelik taşımaktadır. Öğretme ve öğrenme sürecinde görülen şudur ki, ilköğretimden üniversite seviyesine kadar tümevarımsal düşünce sürecinin tüm aşamalarını incelemek, hem ispat hem de genellemenin nasıl yapıldığı konusuna açıklık getirecektir.

3. YÖNTEM

3.1. ARAŞTIRMA MODELİ

Hayatta karşılaşılan problemleri çözmek için çeşitli bilgi kaynaklarından yararlanılmaktadır (Van Dalen, 1966; Fox 1969; Armağan, 1974; Yıldırım, 1966; Kaptan, 1977; Karasar, 2009). Bu kaynaklar, önceki uygulamalar (gelenekler/emsal), otorite figürleri, kişinin kendi deneyimleri ve bilimdir (Karasar, 2009). Bahsedilen kaynaklar arasında bilimsel bilgi, insanlarca bilinen en geçerli bilgi olma niteliği taşımaktadır. Dünyanın neresinde olunursa olunsun bilimsel bilginin geçerliliği mümkündür.

Gözlem ve ölçmelerin tekrarlanabildiği ve objektif olarak yapıldığı nicel araştırmalar (Ergün, 2005) bilimsel bilgi kaynağının temellerini oluşturmaktadır. Özellikle fizik, kimya, biyoloji, matematik gibi doğa bilimlerinde araştırmacıların elde ettiği sonuçlar veya başvurdukları temel kaynaklar nicel bir nitelik taşımaktadır. Ancak sosyal veya beşeri alandaki araştırmaların nicel boyuttan nitel boyuta taşınması bilimsel bilgiye sağlanacak önemli katkılardan biri durumundadır. Çünkü psikoloji, sosyoloji, antropoloji, eğitim gibi bilim dallarında insan ve toplum davranışları incelenmektedir (Lodico v.d., 2006). Bu davranışlar kişiden kişiye, toplumdan topluma değiştiği gibi davranışların sayılarla açıklanması oldukça zor bir durumdur. Nicel araştırmalar, bize kaç kişinin nasıl davrandığını gösterir, ama 'niçin' sorusuna cevap veremez. Bu yüzden nitel araştırmalar, beşeri bilimler hakkında daha detaylı ve sağlıklı bilgilerin üretilmesi için farklı bir öneme sahiptir. Örneğin matematik eğitimi açısından dünyanın herhangi bir yerinde yapılan bir araştırma, farklı bir açıdan bakılarak matematiksel düşünce gelişiminde yeni ufuklar açmayı sağlayabilmektedir. Bu durum, matematik eğitiminin niteliğini geliştirerek, matematik alanında yapılacak nicel araştırmaların da dolaylı manada kalitesini artırabilecektir. Bu bakış açısıyla nitel araştırma, olay veya bilinmeyene yönelik 'ne, nerede, ne zaman, niçin ve nasıl' sorularına cevap vererek insan veya grup davranışları hakkında bilgi sahibi olmayı sağlamaktadır (McMillan, 2004; Ergün 2005).

Matematiksel manada sergilenen düşüncelerin nedenlerini sorgulamak, matematik eğitiminde birçok öğrenme güçlüğünün veya kavram yanılgısının çözüme kavuşturulması açısından önemlidir. Bu bakış açısıyla nitel araştırma mantığına uygun olan araştırma, araştırma problemleri odak noktası haline getirilerek metot seçimi, veri toplama teknikleri, verilerin analizi, çalışma grubunun belirlenmesi ve veri toplama aracının geliştirilmesi gibi işlemlerin bu nokta etrafında toplanmasından oluşmaktadır. Bu işlemler adeta bu odak soruları etrafında birbirinden etkilenen bir döngü şeklinde düşünülerek işlemler gerçekleşirken diğer işlemlerin gelişmesini ve değişmesini de içeren bir esneklikle, dinamiklikle yürütülen bütünsel bir nitelik taşımaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Tümevarımsal düşünce süreçlerinin gerçekleştirildiği ortamların araştırmacı tarafından oluşturularak veya oluşan ortamın araştırmacı tarafından dikkatle incelenip kaydedilerek bu alana odaklanabilmeyi ve gereksiz verilerden kaçınılarak yalnızca gerekli verilerin elde edilmesini sağlaması gibi sebeplerle eldeki çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (örnek olay yöntemi) tercih edilmiştir. (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Durum çalışmasının bu noktadaki en önemli özelliği tüm durumlar için geçerli olmayışı ve yalnızca belirlenen durum için genellemeler yapmaya uygun olmasıdır. Durum çalışmasının bu özelliği, problemlerin her biri için spesifik örnek olaylar elde edilip durumların birbirinden hangi açılardan farklılık gösterdiğinin anlaşılması ve analiz edilmesi bakımından bu araştırmanın doğası ve niteliği ile uyuşmaktadır. Çünkü tümevarımsal düşünce süreçleri öğrenciden öğrenciye, sorudan soruya çeşitlenebilmekte ve durum araştırması ile gözlemlenebilen bu çeşitlilik, araştırma problemlerinin yanıtlanabilmesine olanak sağlamaktadır.

3.2. ÇALIŞMA GRUBU

Bu araştırmanın çalışma grubunu 2010-2011 Eğitim-Öğretim Yılı'nın 2. yarıyılında Kayseri'nin Kocasinan, Talas ve Melikgazi ilçelerinde yer alan 4 ilköğretim okulunda öğrenim gören toplam 210 tane 8. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışma grubunu oluşturan öğrenciler, örüntüler konusunu ilk yarıyılda müfredatları gereği öğrenmiştir. Ayrıca bu grubun önceki yıllarda takip ettikleri müfredat gereği birinci kademenin 2. sınıfından itibaren örüntüler konusu üzerinde çalıştığı bilinmektedir. Bu sebeple çalışma grubunun hazır bulunuşluk düzeyinin yeterli olduğu düşünülmektedir. Aşağıda, çalışma grubu ile ilgili tabloya yer verilmiştir:

Tablo 2. Yazılı sınavın uygulandığı okullar ve sınıf mevcutları.

	BOYDAK İLKÖĞRETİM OKULU		MUSTAFA ÖZGÜR İLKÖĞRETİM OKULU		REFİKA KÜÇÜKÇALIK İLKÖĞRETİM OKULU		YAHYA KEMAL BEYATLI İLKÖĞRETİM OKULU		
KIZ	13	13	9	6	8	20	15	13	97
ERKEK	11	13	8	9	13	19	16	24	123
TOPLAM	24	26	17	15	21	39	31	37	210
GENEL TOPLAM	50		32		60		68		
	210								

Tabloda görüldüğü gibi belirlenen 4 okulda 4'ü düşük-orta, 4'ü yüksek seviyeli akademik başarı türünde 8 şube çalışma grubuna dâhil edilmiştir. Araştırmaya katılan bu gruba araştırma kapsamında belirlenen sorulardan oluşan yazılı sınav uygulanmıştır. Uygulama sırasında öğrencilerden çözümde sergiledikleri düşünceleri açık bir dille yazılı olarak ifade etmeleri istenmiştir. Uygulama sonrasında ise kâğıtların ön analizi sonuçlarına göre problemlerde kullanılan çözüm stratejileri ve çözüm yöntemlerindeki özgünlük, aritmetik, cebir, geometri ve bu alanlar arasındaki geçişin olduğu öğrenme alanlarında sergilenen tümevarımsal düşünce aşamalarının çeşitliliği gibi etkenler dikkate alınarak seçilen 9 öğrenci ile yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Araştırmada bilimsel etik gereği katılımcı öğrencilerin gerçek isimleri yerine kod adları kullanılmıştır.

3.3. VERİ TOPLAMA ARAÇLARININ GELİŞTİRİLMESİ VE VERİLERİN TOPLANMASI

Araştırma kapsamında veriler yazılı sınav ve yarı-yapılandırılmış mülakat teknikleriyle toplanmıştır. Yazılı sınavda aritmetik, cebir ve geometri alt öğrenme alanların yanı sıra bunlar arasındaki geçişlerle alakalı tümevarımsal düşünce gerektiren toplam 10 soru kullanılmıştır. Bu sorulardan 4'ü geometri, 6'sı aritmetik öğrenme alanlarına ait soruların tamamı örüntülerin genellenmesini gerektirmektedir. İki şıktan oluşan her sorunun **a** şıkkında örüntünün uzak bir adımındaki herhangi bir terimi, **b** şıkkında örüntünün herhangi bir adımındaki (*n.* adım) genel terimi sorulmuştur. Böylece **a** şıkkında gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama ve yordamanın testi gibi aşamaların, **b** şıkkında ise genelleme, genellemenin testi gibi aşamaların tespit edilebileceği düşünülmüştür. Araştırmada kullanılan paralel sorular sayı örüntüsü-küp örüntüsü, sayı makinesi-pasta ve bal peteği örüntüsü-çubuk üretme problemleridir. Böylece aritmetik ve geometri öğrenme alanlarında, örüntülerin sunum şekillerinin değişiminde ve örüntünün farklı boyutlarla gösteriminde tümevarımsal düşünce süreci aşamalarının nasıl değiştiği hususu aydınlatılmaya çalışılmıştır.

Araştırmada kullanılan soruların geçerlik ve güvenirliğinin sağlanması için ana uygulamadan önce 2010-2011 Eğitim-Öğretim Yılı'nın 1. yarıyılının sonunda Kayseri'nin Melikgazi ilçesinde yer alan Burhan Dinçbal İlköğretim Okulu'ndaki bir 8. sınıf şubesindeki 31 öğrenci ile pilot uygulama gerçekleştirilmiş ve sorular hakkında uzman görüşleri alınmıştır. Pilot uygulamadan elde edilen sonuçlar ve uzman görüşleri gözetilerek sorular üzerinde içerik ve dil açısından gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

Ana uygulamada hazırlanan sorular katılımcı öğrencilere 2 ders saati (80 dakika) boyunca uygulanmıştır. Tüm yazılı sınavlar araştırmacının kendisi tarafından yapılmıştır. Araştırmacı, uygulama başlamadan önce öğrencilerin uygulama esnasında problemlere odaklanmaları ve verilen süreyi rahatlıkla kullanarak tümevarımsal düşünce sürecini aşama aşama kâğıda yansıtabilmeleri amacıyla bahsedilen 10 soruyu, 5'er soru şeklinde dağıtarak iki uygulama şekline getirmiştir. Ayrıca araştırmacı tarafından soruların dağıtımı esnasında paralel soruların farklı uygulamalarda olmasına dikkat edilmiştir. İlk ders saatinde ilk 5 sorunun bulunduğu yazılı kâğıdı dağıtılmış, verilen 10 dakikalık teneffüs arasından sonra ise kalan 5 sorunun bulunduğu yazılı uygulanmış ve böylece yazılı sınav tamamlanmıştır.

Araştırmanın amacı kapsamında tümevarımsal düşünce süreçlerinin nasıl gerçekleştiği konusu yazılı sınav sırasında problemlere getirilen çözümlerden bütünüyle anlaşılmamaktadır. Çünkü yazılı kâğıtlarında çözümlerin en son hangi aşamada kaldığı görülebilirken, atlanan aşamaların görülebilmesi mümkün olmamaktadır. Bu yüzden yazılı sınavın yanı sıra mülakatlar yoluyla toplanan veriler ile öğrencilerin zihinsel algılarına ve gerçek düşüncelerine ulaşılmaya çalışılmıştır (Patton 1990; Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu amaçla eldeki çalışmada belirlenen 9 gönüllü öğrenci ile 45-90 dakika süren yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Mülakatlar katılımcı öğrencilerin rızası alınarak ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Ses kayıtları sırasında öğrencilerin çözümlere doğal bir dille açıklık getirmelerine ve bu esnada kalem-kâğıt kullanmalarına izin verilmiştir. Araştırmacı, öğrenciler tarafından ulaşılan tümevarımsal düşünce aşaması, yapılan işlemler, üretilen formüller noktasında mülakattaki duruma göre farklılaşabilen bazı sorular sormuştur. Böylece tümevarımsal düşünce sürecinin öğrenciden öğrenciye nasıl değiştiğini gözlemlemiş ve öğrencilerin ürettikleri formüllerin, izledikleri çözüm yollarının çeşitlenmesini sağlamış ve öğrencilerin o an akıllarına gelmeyen noktaların hatırlanarak sürecin sağlıklı bir şekilde yürümesini desteklemiştir. Mülakat esnasında öğrencilere aşağıdaki türden sorular yöneltilerek elde durum hakkındaki düşünce süreçlerinin tüm boyutlarıyla açığa çıkarılmasına çalışılmıştır:

- Örüntünün bir sonraki adımını bulabilir misin?
- Bir sonraki adımı buldun peki (uzaktaki bir adım için) 50. adımdaki terim kaçtır? Bu adımı nasıl bulursun?
- Neden bu formülü yazdığını açıklar mısın?
- Kuralın … olduğuna nasıl karar verdin?
- Sorunun çözümünde üretebileceğin başka bir formül var mı?
- *n*. adım denince aklına gelen şey nedir?

Veri toplama araçlarının güvenilirlik ve geçerliliğini sağlamak adına çeşitli önlemler alınmıştır ki yazılı sınav ve mülakatta kullanılan soruların alan yazınından adapte edilerek alınmış olması, pilot çalışmanın yapılmış olması, uzman görüşünün alınması ve çeşitleme yönteminin kullanılması bunların başlıcalarıdır. Araştırma kapsamında birden fazla veri toplama tekniğinin birlikte kullanılmasına 'çeşitleme' (triangulation) denilmektedir (Altındağ, 2005). Çeşitlemenin nitel araştırmalarda geçerliliği sağlamada güçlü bir yol olduğu belirtilmektedir (Campbell ve Fiske, 1959; Akt. Cohen v.d., 2002; Yin, 1994; Altındağ, 2005; Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu bakış açısıyla araştırma kapsamında yazılı sınavla toplanan veriler, yarı-yapılandırılmış mülakatla toplanan verilerle desteklenmiştir. Ayrıca nitel olarak ele alınan bu araştırmada çeşitli sayısal veriler de bulunmaktadır.

3.3.1. Araştırma Kapsamında Kullanılan Problemler

Araştırma kapsamında kullanılan 10 problemden 4'ü görsel-geometrik, 6'sı aritmetikseldir. Bu sorularla öğrencilerin bu öğrenme alanlarında, tümevarımsal düşünce sürecinin hangi aşamalarını, hangi sıklıkla ve nasıl işlettiklerinin araştırılması amaçlanmıştır. Aşağıda önce aritmetik ve ardından geometrik problemlere, problemlerin temel özelliklerine ve kullanım amaçlarına yer verilmektedir.

3.3.1.1. Aritmetik Öğrenme Alanında Kullanılan Problemler

Araştırma kapsamında 6 aritmetiksel problem kullanılmıştır. Bu problemler sırasıyla *çarpma örüntüsü*, *sayı örüntüsü*, *kitap okuma*, *sayı makinesi*, *pasta* ve *sandalye kapmaca* problemleridir.

Araştırmada kullanılan *çarpma örüntüsü problemi* olarak adlandırılan 1. soru şu şekildedir:

$$\begin{array}{rcll}
1 \times 1 & = & 1 & \longrightarrow \text{1. Adım} \\
11 \times 11 & = & 121 & \longrightarrow \text{2. Adım} \\
111 \times 111 & = & 12321 & \longrightarrow \text{3. Adım} \\
1111 \times 1111 & = & 1234321 & \longrightarrow \text{4. Adım} \\
\vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Yukarıda ilk adımında 1 basamaklı (1), 2. adımında 2 basamaklı (11), 3. adımında 3 basamaklı (111), 4. adımında 4 basamaklı (1111) sayılarla oluşturulmuş bir çarpma işlemi örüntüsü verilmiştir. Buna göre;

a) Örüntünün 100. adımı için sonucu bulunuz? **<u>Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.</u>**

b) Örüntünün herhangi bir adımı (n. adım) sorulsaydı sonucu kolaylıkla bulabilmek için nasıl bir formül ya da kural oluştururdunuz? **<u>Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl elde ettiğinizi açıklayınız</u>** (MEB, 2010; 8. sınıf SBS A Kitapçığı 16. matematik sorusundan uyarlanmıştır).

Bu sorunun çözümü ilk etapta örüntünün gözlemlenmesini ve ardından 100. adımının tahmin edilmesini gerektirmektedir. Bu tahmin için öğrencilerin çarpma sonucundaki örüntüye dikkat ederek 1. adım için 1, 2. adım için 121, 3. adım için 12321 şeklinde adım sayısı kadar artan ve sonra simetrik olarak azalan aritmetiksel düzeni görmeleri beklenmektedir. Ancak her adımda eşitliğin sağ ve sol kısmının birlikte düşünülmesi gereken örüntü, sol kısımda adım sayısı kadar basamağı olan 2 sayı, sağ kısımda ise adım sayısına kadar yükselen ardından 1'e kadar inen sonuçları birlikte içermektedir. Bu açıdan öğrencilerin eşitliğin her iki kısmı için de çıkarımda bulunmaları gerekmektedir.

Sorunun aritmetiksel anlamda deneme-yanılmalara açık bir nitelik taşıyor olmasından dolayı bazı öğrenciler tarafından çözümde sayı deseninin fark edilememesi ile 100. adıma kadar çarpma işleminin yapılması veya 100. adıma kadar yazmanın zorluğundan soru çözümünün belli bir noktada bırakılması söz konusu olabilir. Bu durum, tümevarımsal süreçlerden genelleme aşamasına geçişin henüz yapılamadığının veya örüntüye bütünsel bakılamadığının bir göstergesi olarak düşünülebilir. Çünkü 100. adımın sorulmasındaki genel amaç, örüntünün 5. adımının (verilen adımlardan bir sonraki adım) tahmini kolay iken; örüntünün uzak adımlarının bulunmasının ileri düzeyde tahminleri, yordamaları ve genellemeye yakın düşünceleri gerektirmesidir. Sorunun 2. aşamasında kullanılan 'örüntünün herhangi bir basamağında' ifadesi, örüntünün genel ifadesinin bulunmasına yöneliktir. Bu noktada öğrencilerden beklenen *n*. adımın sol kısmında '*n'* basamaklı bir sayının olduğunu sağ kısmında ise 1'den *n*'e, *n*'den 1'e kadar yazılan bir sayının olduğunu ifade etmeleridir. Esasında herhangi bir işlemi gerektirmeyen bu şık, öğrencilerin *n*. adım hakkındaki görüşlerini de açıkça ortaya koyabilir.

Araştırmada kullanılan 'sayı örüntüsü problemi' olarak adlandırılan 2. soru şu şekildedir:

1, 8, 27, 64, …

Yukarıda bir sayı örüntüsünün ilk 4 terimine yer verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 25. terimini bulunuz? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Bu örüntünün herhangi bir terimi (*n.* terim) sorulsaydı bu terimi kolaylıkla bulmak için nasıl bir kural ya da formül oluştururdunuz? **Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.**

Sayı örüntüsü problemi, öğrencilerin doğrudan karşılaştıkları sayı örüntülerinde tümevarımsal anlamda nasıl bir çözüm yolu izlediklerini araştırmak amacıyla sorulmuştur. 1, 8, 27, 64, … şeklinde ilerleyen bu örüntüyü devam ettirmek için terimler arasındaki artışlara bakma, adım ile terim arasında ilişki kurma gibi yolların öğrenciler tarafından izlenmesi beklenmektedir. Ayrıca öğrenciler tarafından örüntünün 25. adıma kadar ilerletilmesi veya formülün bulunması esnasında oluşturulacak deneme-yanılmaların çözüm türlerini oluşturacağı düşünülmektedir. Artarak değişen örüntülerdeki genel mantık, artışın sabit olduğu adımın denklem derecesini göstermesidir. Örneğin şekil 8'de örüntünün 3. dereceye kadar açılması, formülün 'n^3' olmasını sağlamıştır. Çünkü artışların sabitleşmesi 3. derece itibariyle başlamıştır. Bahsedilen derece mantığının ilköğretim öğrencilerince çözülmesi gerek okulda gördükleri örüntü türleri gerekse düşünce gelişimleri açısından oldukça zordur. Bu yüzden öğrencilerin adım sayısı ile terim sayısı arasında ilişkiyi kendi çözümleri ile nasıl bulduklarının tespiti önemlidir. Çünkü terimler arası kurulan yatay ilişki, terime bağlı kalmaya sebep olmakta iken terim sayısı ve adım sayısı arasında kurulan dikey ilişki, genel formülün bulunmasına katkı sağlamaktadır. Aşağıda yatay ilişki ve dikey ilişki örneklerine yer verilmektedir:

$$1 \xrightarrow{+7} 8 \xrightarrow{+19} 27 \xrightarrow{+37} 64$$

Şekil 18. Örüntü terimleri arasında kurulan yatay ilişki.

1. Adım	**2. Adım**	**3. Adım**	**4. Adım**
⇩	⇩	⇩	⇩
1	8	27	64

Şekil 19. Örüntü adımları ve terimleri arasında kurulan dikey ilişki.

Şekillerde de görüldüğü gibi örüntüde dikey ilişkinin kurulması, genel terimin kolaylıkla bulunmasını sağlayan bir yöntemdir. 1-1, 2-8, 3-27 şeklindeki ilişkiyi bulma, deneme-yanılmalara açık bir yol olsa da genel terimin tahmin edilmesinde izlenebilecek en kısa yoldur. Çünkü kurulan yatay ilişki ile 25. adıma kadar tek tek yazma ve dolayısıyla genel terimi tahmin edememe gibi sonuçlar doğabilmektedir.

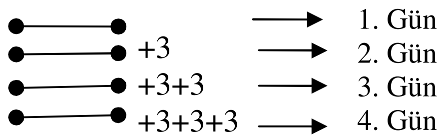
Araştırmada kullanılan 'kitap okuma problemi' olarak adlandırılan 3. soru şu şekildedir:

Tamer her gün bir önceki günden 3 sayfa daha fazla okuyarak bir romanı bitirmeye karar vermiştir. Tamer ilk gün romanın 20 sayfasını okuduğuna göre;

a) Tamer sadece 25. gün kaç sayfa kitap okur? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Tamer'in herhangi bir gün (*n.* gün) kaç sayfa kitap okuduğunu kolaylıkla hesaplayabilmesi için bir formül veya kural geliştiriniz? **Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

Sözel-aritmetiksel problem şeklinde verilen yukarıdaki soru, Tamer'in her gün okuduğu sayfa sayısının aritmetik değişen örüntüye dönüştürülerek ilerletilmesini gerektirmektedir. Özellikle lineer bir artış gösteren bu dizinin 25. adımının tahmini noktasında öğrenciler tarafından izlenen sürecin yanı sıra bu sürecin niteliği de araştırılacaktır. Çünkü soruda teker teker 25. adıma kadar açma ile 25. adımı bütünsel manada tahmin edebilme gibi çözümler genellemeye varabilme noktasında kalite bakımından bazı farklılıklar içermektedir. Ayrıca kitap okuma probleminde, sayı örüntüsü probleminden farklı olarak sözel ifade ile verilen bilginin öncelikle öğrenci tarafından düzenlenmesi gerekmektedir. Bu açıdan kitap okuma problemi, öğrencinin soruyu anlaması, verileri düzenlemesi, çözüm için yollar düşünüp çözüme ulaşması gibi süreçlerin rahatlıkla incelenebileceği bir nitelik taşımaktadır. Bu soru, esasında bir kat problemine benzetilebilir. Soru, kat problemi mantığı ile aşağıdaki şekilde modellenebilir:



Şekil 20. Kitap okuma probleminin katlarla gösterimi.

1. gün, 20 sayfa okuyan Tamer, 2. gün 20+3, 3. gün 20+3+3, 4. gün 20+3+3+3 sayfa kitap okuyacaktır. Görüldüğü gibi, her seferinde gün sayısının 1 eksiği kadar 3, 20'ye eklendiğinde Tamer'in okuduğu toplam sayfaya ulaşılmaktadır. Bu durumda 25. gün 20+(24×3)=92 sayfa okuduğu bulunmaktadır. Sonuç, bu yordama noktasından genellemeye dökülebilir. Çünkü gün sayısı ne olursa olsun gün sayısının 1 eksiğinin 3 ile çarpılıp 20 ile toplanması aritmetik değişen örüntünün genel terimini yani Tamer'in *n.* gün okuduğu sayfa sayısını verecektir. Bu noktada problemin cebirle çözümünü

öğrenmeden önce, 25. günü kolaylıkla bulabilen öğrencilerin soruyu cebirle nasıl bağdaştırdıkları konusuna açıklık getirilebileceği düşünülmektedir.

Araştırmada kullanılan ‘sayı makinesi problemi’ olarak adlandırılan 4. soru şu şekildedir:

Giren Sayı	**Çıkan Sayı**
1	2
2	5
3	8
4	11

Matematikçiler “Sayı Makinesi” isminde bir makine üretmişlerdir. Bu makine, içerisine giren sayıyı farklı bir sayıya çevirip çıkarmaktadır. Yukarıdaki tabloda makineye atılan ve makineden çıkan sayılardan bazılarına yer verilmiştir. Buna göre;

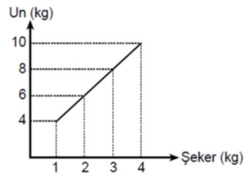
a) Sayı makinesine 50 atılsaydı hangi sayı çıkardı bulunuz ve **sonucu nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.**

b) Makineye herhangi bir sayı (*n* sayısı) atılsaydı hangi sayı çıkardı? **Bu sayıyı bulmak için bir formül veya kural üretiniz ve bu kuralın mantığını açıklayınız.**

Sayı makinesi problemi ile öğrencilerin giren ve çıkan sayılar arasındaki ilişkiyi bulmaları ve bu ilişkiyi genel bir formüle dökmeleri hedeflenmektedir. Sayı makinesi problemini, bu alanda sorulan sayı örüntüsü ve kitap okuma problemlerinden ayıran nokta, soruda adım ve terim sayısının birlikte verilmesi ve ilişkinin doğrudan görülebilmesidir. Tablo mantığındaki sorularda verilerin organize edilmiş bir şekilde sunumu, tümevarımsal sürecin daha hızlı yürümesini sağlayabilir. Çünkü adım ve terim sayısı bu soruda görsel bir şekilde sunulmaktadır. Örneğin yukarıda bahsedilen sayı örüntüsü sorusunda adım sayılarının tespiti gerekirken; sayı makinesi probleminde böyle bir durum söz konusu değildir. Bu durumda soruyu çözen öğrenciler tarafından her adımda giren ve çıkan sayılar arasındaki ilişkinin kolaylıkla görülebilmesi beklenmektedir. Bu ilişki ise 2 şekilde görülebilir: 1.’si giren ve çıkan arasında doğrudan görülen ‘3 katının 1 eksiği’ şeklindeki ilişki; 2.’si giren ve çıkan sayılar arasındaki farklara bakılarak ‘1, 3, 5, 7, … örüntüsünün terimlerinin sıra sıra adım sayıları ile toplamı’ şeklindeki ilişkidir. Beklenen diğer bir husus ise 50. adıma kadar teker teker yazma davranışıdır. Bu davranışın genel sebebi ise giren ve çıkan sayıların ayrı kategorilerde değerlendirilmesi ve ikisinin de ayrı ayrı artırılarak devam ettirilmesidir. Çünkü adım adım ilerlemesi gerekmekte ve *n.* adımdan bir önceki adımın ne olduğu bilinmemektedir. Bahsedilen 3 mantığın da tümevarımsal sürecin nasıl işlediği konusunda araştırmacıya yol göstereceği düşünülmektedir. İlk 2 mantık, tümevarımsal düşüncede genelleme aşamasına kadar ilerlemeye destek olan; 3. mantık ise belli bir adıma kadar getiren ancak genel terimin bulunmasını zorlaştıran bir niteliktedir.

Sayı makinesi sorusu, ilerleyen paragraflarda değinilecek olan pasta problemi ile paralel bir nitelik taşımaktadır. Paralel soruların birinin grafikle birinin tablo ile görselleştirilmesinin tümevarımsal süreci nasıl etkilediği araştırmacı tarafından irdelenecek olan bir noktadır.

Aşağıda 'pasta problemi' olarak isimlendirilen ve sayı makinesine paralel olarak kaleme alınan 5. soruya yer verilmektedir:



Tecrübeli bir aşçı bir pastanın kıvamında olması için un ve şekerin yukarıdaki doğrusal grafikte verildiği gibi olması gerektiğini söylemiştir. Bu grafiğe göre;

a) Aşçı 50 kg şekere kaç kg un kullanırsa kıvamında pastalar elde edebilir? **Sonucu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

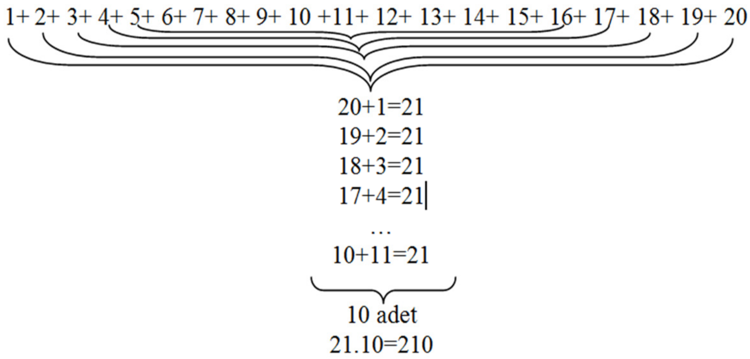
b) Aşçı herhangi miktardaki (*n* kg) şeker için gereken un miktarını içeren pratik bir tarif vermek istiyor. **Un ve şeker arasındaki ilişkiyi gösterecek olan pratik tarif için cebirsel bir kural veya formül bulunuz ve bulduğunuz kuralın mantığını açıklayınız** (YÖK, 2010-YGS' de çıkan 28. matematik sorusundan uyarlanmıştır).

Yukarıda verilen pasta problemi, şeker ve un bağıntısının somut anlamda ele alınarak grafiğe dökülmüş bir şeklini göstermektedir. Soruda verilen grafik, gözlemlerin analitik bir şekilde yapılmasını veya grafik üzerindeki sayılar yoluyla un-şeker ilişkisinin kurulmasını sağlamaktadır. Ayrıca organize edilmiş bir şekilde verilen pasta probleminin çözümünde öğrenciler tarafından farklı organizasyonların (tablo vs.) yapılması da beklenmektedir. Nitekim problemde sadece pozitif sayılar arasında ilişki kurulması gerekmektedir. Bununla birlikte 1-4, 2-6, 3-8, 4-10 şeklindeki un-şeker eşleştirmelerinin birinde sağlanan kural, tüm ikilileri de sağlamalıdır. Dolayısıyla soruda 50 kg şekere ne kadar un gerektiğinin bulunması için 1 kg şekere 4 kg, 2 kg şekere 6 kg, 3 kg şekere 8 kg ve 4 kg şekere 10 kg un gerektiği göz önünde bulundurulmalıdır. Eğer sadece ‘1 kg şekere 4 kg un gerekirse 50 kg şekere ne kadar un gerekir’ düşüncesinden hareket edilirse bulunan sonuç tüm adımlar için geçerli olmaz. Nitekim öğrenciler tarafından sergilenmesi beklenen bu oran-orantı mantığı, tüm adımlar için geçerli olmayan çözümlerin yapılmasına sebep olabilir. Ayrıca b şıkkında bulunması gereken ‘$2n+2$’ formülü, oran-orantı mantığında olduğu gibi sadece çarpımsal değil hem çarpımsal hem de toplamsal bir ilişkiyi içermektedir. Bu açıdan verilen adımların öğrenciler tarafından dikkatle gözlemlenmesi ve ardından ilişkilerin bulunması gerekmektedir.

Araştırmada kullanılan ‘sandalye kapmaca problemi’ olarak adlandırılan 6. soru şu şekildedir:

> Bir okul şenliğinde Sandalye Kapmaca Oyunu’na katılan öğrenciler müzikle birlikte sandalyeler etrafında dönmeye başlamaktadırlar. **Müzik bittiğinde sandalyesiz kalan öğrenci elenmekte ve sandalyeler değiştirilerek farklı sandalyelerle** diğer tura geçilmektedir. 2. tura kalan öğrenciler arasında oyun tekrarlanmakta yine sandalyesiz kalan öğrenci elenip farklı sandalyeler getirilerek kazanan öğrenci belli oluncaya kadar oyun bu şekilde devam etmektedir. Buna göre;
>
> **a)** 21 öğrencinin olduğu bir sandalye kapmaca oyununun her turunda farklı sandalyeler kullanıldığına göre oyun bitiminde **toplam** kaç sandalye kullanılmıştır? **Sonucunuzu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**
>
> **b)** Her turda farklı sandalyelerin kullanıldığı ve *n* tane öğrencinin katıldığı sandalye kapmaca oyununda **toplamda** kaç sandalyeye ihtiyaç vardır? **Bir kural veya formül geliştiriniz ve bu kuralı nasıl geliştirdiğinizi açıklayınız.**

Sözel bir şekilde kaleme alınan bu problem, öğrencilerin 20+19+18+17+16+…+1 gibi aritmetiksel bir formülün cebirsel bir forma nasıl dönüştürüleceği konusunda düşünmesini gerektirmektedir. Çünkü 21 öğrencinin katılacağı sandalye kapmaca oyunu için başlangıçta 20 sandalye gerekmektedir ve sandalye türü her adımda değişeceği için 20’den aşağı, son turda 1 sandalye kalacak şekilde yazılıp toplanması gerekmektedir. Yapılan toplama işleminde de öğrenciler tarafından bulunacak kolay yollar onların cebirsel genellemelere yaklaşmalarını sağlayabilir. Örneğin 1’den 20’ye kadar sayıların toplanması baştan ve sondan 2 sayının toplanarak aynı toplamların kaç defa tekrarlandığının bulunarak çarpılması şekline dönüştürülebilir. Bu durumda verilen sayılardan hareketle cebire bir geçiş yapılabilir. Aşağıda 1’den 20’ye kadar olan tamsayıların toplanması işleminde izlenebilecek kolay yolun gösterimine yer verilmiştir:



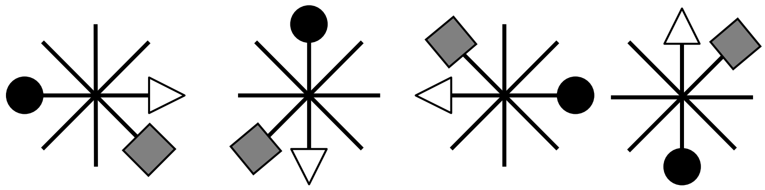
Şekil 21. 1’den 20’ye kadar olan tamsayıların toplamında izlenebilecek kolay yol.

Görüldüğü gibi sandalye kapmaca probleminde izlenebilecek bu yol, sayıların tek tek toplanmasından daha anlamlı ve kolaydır. Esasında sayılar arasındaki ilişkilerin görülmesi cebire girişte önemli bir noktadır. Bu problemde de sayılar arasındaki toplamsal ilişkilerin görülmesi cebirsel manada yapılacak genellemeler için temel teşkil etmektedir. Yukarıdaki şekilde $21\times10=210$ aritmetiksel sonucu sözel veya cebirsel bir manada [Son terim·(İlk terim+ son terim)/2] veya ‘$n{\cdot}(n+1)/2$’ şeklindeki bir formüle dönüştürülebilir. Bu bakış açısıyla verilen sayı örüntüsü toplamının, öğrencilerin bulundukları tümevarımsal düşünce seviyelerine göre genellemeleri beklenmektedir. Çünkü genel anlamda aritmetikten cebire geçişte zorluk çeken bir öğrenci, formül bulmak yerine, sayılara ve sonuca odaklanabilecektir. Bu odaklanma sırasında öğrencinin sergilediği tümevarımsal düşünce sürecinin genelleme mantığına nasıl yaklaştığı araştırılacaktır. Bu soruda standart bir genelleme formülü mantığının bulunmaması genellemenin doğal bir manada öğrenciler tarafından nasıl yapıldığının görülmesini ve ‘*n*’ harfine öğrenciler tarafından yüklenen anlamın irdelenmesini sağlayabilir.

3.3.1.2. Geometri Öğrenme Alanında Kullanılan Problemler

Araştırma kapsamında 4 adet geometrik problem kullanılmıştır. Bu problemler sırasıyla *şekil döndürme*, *küp örüntüsü oluşturma*, *bal peteği* ve *çubuk üretme* problemleridir. Sorularda genel anlamda ilk olarak görsel öğeler yer almaktadır. Ayrıca her soruda örüntülerle ilişki kurulması için verilen şeklin altında adım sayısına yer verilmiştir.

Araştırmada kullanılan ‘şekil döndürme problemi’ olarak adlandırılan 7. soru şu şekildedir:



1. Adım **2. Adım** **3. Adım** **4. Adım**

Yukarıda siyah daire, beyaz üçgen ve gri karenin saat yönünde dönmesiyle oluşturulan örüntünün ilk 4 adımına yer verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 16. ve 22. adımını çiziniz. **Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

b) Bu örüntünün *n.* adımda alacağı şekil sorulsaydı bu şekli nasıl bulurdunuz? (Pilten’den (2008) uyarlanmıştır.)

Geometri öğrenme alanında ‘döndürme’ kavramından yola çıkılarak kaleme alınan 7. soru, öğrenciler tarafından döndürme kuralının bulunmasını gerektirmektedir. 4 adımda bir tekrar eden şekil örüntüsünde öğrencilerin pek çok yol izleyecekleri tahmin edilmektedir. Çünkü bu problem; açı, bir şekilden hareket, sayılarla bağlantı v.s gibi farklı çözümlere açıktır ve genelleme açısından modüler aritmetik konusu ile ilgilidir. Çünkü modüler aritmetikte kaç birimde bir tekrarın olduğu önemlidir ve sayıların birbirine çevrilerek basit birimlere dönüştürülmesi ile denklik kümelerinin oluşturulması söz konusudur. Örneğin bu problem için örüntü, 4 adımda bir tekrar etmektedir. 5. adımda 1. şekille, 6. adımda 2. şekille, 7. adımda 3. şekille, 8. adımda 4. şekille eş şekiller oluşturulmakta ve *n.* adımda da aynı mantık geçerli olmaktadır. Bu durumda şekiller aşağıdaki gibi eşleştirilebilmektedir:

1=5=9=13=17=…

2=6=10=14=18=…

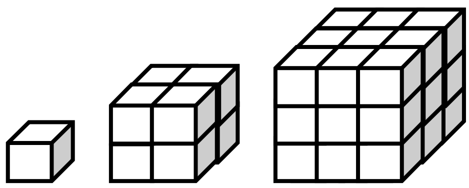
3=7=11=15=19=…

4=8=12=16=20=…

Şekil 22. Şekil döndürme problemi için eş şekillerin numaralandırılması.

Görüldüğü gibi ilk 4 adımı verilen şeklin ilerleyen adımları için de bu adımlar temel oluşturmaktadır. Şekillerin numaralandırılması dışında diğer bir yöntem de dönme açılarının hesaplanması olabilir. Örneğin 1. adımdan 2. adıma geçerken her şekil saat yönünde 90 derece dönmektedir. Bu şekilde adımlar ilerlemekte ve 360 derecelik dönme, 4. adımdan 5. adıma geçişte tamamlanmaktadır. Yani 1. adımla 5. adım aynıdır ve 4 adımda tüm şekiller tam dönüşü yakalamaktadır. Bu bakış açısıyla sorunun cebire yansıtılmasından ziyade, gözlemlerin nasıl devam ettirildiği, genellemenin herhangi bir kurala bağlı kalmaksızın doğal yollardan nasıl yapıldığı araştırma için önemlidir. Çünkü sorunun cebire yansıtılması, modüler aritmetik konusunda bir temele sahip olmayı gerektirmektedir ve modüler aritmetik konusu ilköğretim düzeyinde yer almamakta bu düzeyde sadece bölünebilme mantığına yer verilmektedir. Cebirsel manada *n*. adım için bulunabilecek genel ifade ‘$n=x$ (Mod 4)’ olmalıdır. Yani ‘*n*’ ifadesi 4’e bölündüğünde kalan *x* ifadesi, verilen 4 adımdan herhangi biridir. Öğrencilerden beklenen, bölünebilme mantığı ile çözümü açıklamalarıdır. Çünkü bu problemde *n.* adıma dair hiçbir bilgiye yer verilmemekte ve diğer sorulara nazaran *n*. adım, yoruma açık bir nitelik taşımaktadır. Genelleme noktasında da öğrencilerden gelen çözümlerin bu bakış açısıyla çeşitlenebileceği düşünülmektedir.

Araştırmada kullanılan ‘küp örüntüsü problemi’ olarak adlandırılan 8. soru şu şekildedir:



1. Adım **2. Adım** **3. Adım**

Ayşe elindeki birim küpleri şekildeki gibi bir araya getirerek bir örüntü oluşturmaktadır. Yukarıda bu örüntünün ilk 3 adımına yer verilmiştir. Buna göre;

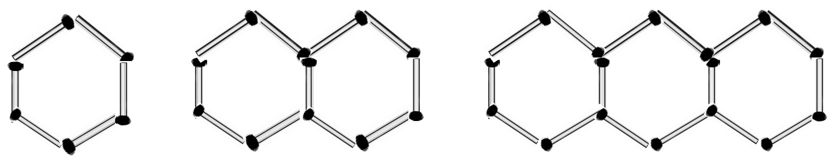
a) Ayşe bu örüntünün 15. adımındaki küpü elde etmek için kaç tane birim küpe gereksinim duyar? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Ayşe örüntünün herhangi bir adımındaki (*n*. adımdaki) küpü elde etmek için kaç tane birim küpe ihtiyaç duyar? **Bu hesaplamayı yapmak için bir kural veya formül üretiniz ve bu kuralı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız** (Yeşildere ve Türnüklü’den (2007) uyarlanmıştır).

1, 8, 27, … şeklinde ilerleyen ve sayı örüntüsü problemi ile paralel nitelikte kaleme alınan bu soru, sayı örüntüsünün görsel gösterimi şeklindedir. Soruların paralel sorulmasındaki gaye, görselliğin tümevarımsal süreci nasıl etkilediği konusuna ışık tutmaktır. Küp örüntüsü problemini sayı örüntüsü probleminden ayıran noktalardan ilki, küp örüntüsü probleminde örüntünün verilen ilk 3 adımı yeterli olurken; sayı örüntüsü probleminde ilişkileri görebilmek açısından verilen ilk 3 adımın yeterli olmamasıdır. Çünkü 1, 8, 27, … şeklindeki bir sayı örüntüsü için birden çok genelleme formülü üretilebilirken; küp örüntüsü problemi için tek genelleme formülü üretilmektedir. Küp örüntüsü, her adımda küp oluşturma şeklinde ilerlemektedir; ancak sayı örüntüsünün 4. adımının 64 olduğu bilgisi, örüntünün nasıl ilerlediği konusunu açıklığa kavuşturmaktadır.

Küp örüntüsü probleminde araştırmacının dikkat edeceği 2. nokta ise örüntünün nasıl ifade edildiğidir. Çünkü görsel anlamda kaleme alınan problemin ilk etapta aritmetik artan örüntüye mi çevrildiği yoksa şeklin inşasına mı odaklanıldığı konusu tümevarımsal sürecin nasıl işlediğini gösterebilir. Nitekim soruların görselleştirilmesindeki temel amaç, örüntü kuralının keşfini kolaylaştırmaktır. Bu bağlamda görsel soruların önce aritmetiksel olarak ifade edilmesi ve ardından formülüze edilmesi sorunun çözümünü uzatabilir. Örneğin küp örüntüsü sorusu için her adımda bulunan birim küplerin sayısını bulmak 1, 8, 27, … şeklindeki örüntüyü bulmakla eşdeğerdir. Ancak her adıma dikkatli bakıldığında bu adımların her birinde bir küp oluşturulduğu ve tüm adımlarda da küp oluşumuna devam edileceği düşünülebilir. Bu durumda adım sayısı ne ise küpün de bu sayıya göre inşa edileceği kolaylıkla keşfedilir. Bu açıdan öğrenciler tarafından birincisi aritmetiksel, ikincisi görsel olarak 2 yoldan küp örüntüsü probleminin çözümüne ulaşılabileceği düşünülmektedir.

Araştırmada kullanılan 'bal peteği problemi' olarak adlandırılan 9. soru şu şekildedir:



1. Adım **2. Adım** **3. Adım**

Yukarıda kibrit çöpleriyle oluşturulan bal peteği örüntüsünün ilk 3 adımına yer verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 12. adımının inşası için kaç tane kibrit çöpüne gereksinim duyulur? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Bu örüntünün *n*. adımındaki yapıyı oluşturmak için kaç tane kibrit çöpüne ihtiyaç vardır? **Bu hesaplamayı yapmak için cebirsel bir kural veya formül üreterek bu formülün mantığını açıklayınız.**

Yukarıda verilen görsel örüntü, altıgendeki çubuk sayılarının sayılarak a şıkkında 12. adım için toplam çubuk sayısına ulaşılmasını, b şıkkında cebirsel anlamda en genel ifadenin yazılmasını gerektirmektedir. Soruda kullanılan ortak çubuklar, soruya geometrik çözüm getiren öğrenciler tarafından dikkat edilmesi gereken temel noktadır. Çünkü birleşme noktasında 1 çubuk ortaktır. Bu tür çözümlerde şekillerin alt-üst-orta şeklinde inşası veya altıgenlerden yola çıkılarak çözümlerin çeşitlendirilmesi söz konusu olabilir. Aşağıda tablolarda bahsedilen görsel çözümlere yer verilmektedir:

Tablo 3. Bal peteği problemine alt-üst-orta şeklinde getirilen 1. çözüm yolu.

	1. Adım	**2. Adım**	**3. Adım**	***n*. Adım**
Alt ve Üst	$4\times1=4$	$4\times2=8$	$4\times3=12$	$4\times n=4n$
Orta	2	3	4	$n+1$
Toplam	6	11	16	$5n+1$

Tablo 3'te görüldüğü gibi bal peteğinin3 bölümden oluştuğu düşünülmüş ve bu bölümlerdeki çubuk sayıları ayrı ayrı hesaplanarak ve ardından toplanarak genelleme formülü oluşturulmuştur.

Tablo 4. Bal peteği problemine bütünsel bir bakışla getirilen 2. çözüm yolu.

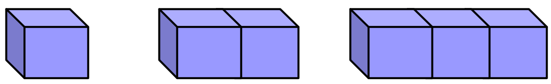
	1. Adım	**2. Adım**	**3. Adım**	***n*. Adım**
Toplam Çubuk	$6\times1=6$	$6\times2=12$	$6\times3=18$	$6\times n=6n$
Ortak Çubuk	0	1	2	$n-1$
Gereken Çubuk	6-0=6	12-1=11	18-2=16	$6n-(n-1)=5n+1$

Tablo 4'te görüldüğü gibi örüntünün her adımında toplam kaç altıgen olduğu tespit edildikten sonra her altıgeni oluşturan çubuk sayısının 6 olacağından hareketle toplam çubuk sayısına ulaşılmıştır. Ortak çubuklar hesaplandıktan sonra ise toplamdan çıkarılarak önce bilinen adımlar sonra bilinmeyen adımlar için çözüme ulaşılmıştır.

Nitekim görsellik, örüntü adımlarını tek tek gözlemleyerek her hamlede sonuç çıkarmayı ve ardından genelleme yapmayı sağlamaktadır. Ancak verilen adımları aritmetiğe dökmeye çalışan öğrenciler tarafından ilk etapta görsellik kullanılmasına rağmen ilerleyen tümevarımsal düşünce aşamalarında aritmetiksel çözümler devreye girmektedir. Örneğin bal peteği örüntüsünün adımları gözlemlendikten sonra her adımdaki çubuk sayılarak 6, 11, 16, … şeklinde aritmetik artan örüntü oluşturulduktan sonra görsele tekrar dönülmeksizin sadece verilen sayılardan hareketle genellemelere ulaşılmaktadır. Ayrıca bal peteği probleminde peteklerin tek tek çizildiği veya çubuk sayılarının tek tek yazıldığı çözümler de bulunabilir. Bahsedilen çözümlerin hepsi de tümevarımsal düşünce aşamaları açısından çözümün nerede kaldığı konusunda araştırmacıya yol gösterecektir.

Araştırmada kullanılan 'çubuk üretme problemi' olarak adlandırılan 10. soru şu şekildedir:

Bir şirket, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi küpleri bir sırada birleştirerek boya makinesi ile renkli çubuklar üretmektedir.



1 Birim Çubuk **2 Birim Çubuk** **3 birim Çubuk**

Bu makine, çubuktaki **her küpün bir yüzeyini bir kutu boya ile boyamaktadır.** Eğer bir küp diğer küple birleşiyorsa **yapışan yüzey boyanmamakta** küpün diğer tüm yüzeyleri ise boyanmaktadır. Buna göre;

a) 20 birim uzunluğundaki çubuğu boyamak için kaç kutu boyaya ihtiyaç vardır? **Sonucu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

b) Herhangi bir uzunluktaki (*n* birim) çubuğu boyamak için kaç kutu boyaya ihtiyaç vardır? **Bu hesaplamayı yapmak için bir kural veya formül geliştiriniz ve bu kuralın mantığını açıklayınız** (Lannin v.d.'den (2006) uyarlanmıştır).

Çubuk üretme problemi bal peteği probleminin 3 boyutlu şekli olarak ele alınmıştır. Sorudaki amaç, geometri öğrenme alanındaki tümevarımsal süreci takip etmek ve cebire geçişte nasıl bir yol izlendiğine açıklık getirmektir. Bu problemdeki çözümler ile bal peteğinin inşası problemindeki çözümler karşılaştırıldığında ise 2 boyutlu veya 3 boyutlu problemlerde hangi tümevarımsal düşünce aşamalarının sergilendiği konusuna karşılıklı açıklık getirilebileceği düşünülmektedir. Çubuk üretme probleminde küplerin yapışan kısımlarında 2 yüzeyin ortak olması ve üst-alt-yan şeklinde kâğıda yansımayan yüzeylerin de hesaplanması gerekmektedir. Bu durumda soruda görünmeyen yüzeylerin hayal edilmesi ve toplama katılması dolayısıyla görsel zekânın işe koşulması önemlidir. Örneğin 1 birim çubuk için 6, 2 birim çubuk için 10, 3 birim çubuk için 14 kutu boyaya ihtiyaç vardır. Yüzeyler sayılarak aritmetiğe döküldüğünde 6, 10, 14, … şeklinde aritmetik artan örüntü bulunabilir. Böylece 20 birim çubuk için tek tek adımların yazılması veya 6, $6+(4\times1)$, $6+(4\times2)$, $6+(4\times3)$, … organizesi ile $6+(4\times19)=82$ kutu boya gerektiği şeklinde bir sonuca ulaşılabilir. Ayrıca probleme görsel anlamda bir çözüm getirmek de mümkündür. Küpün alt, üst, ön ve arkasında her zaman eşit yüzeyler bulunmaktadır. Bu durumda tablo 5'te görüldüğü gibi adım sayısı 4 ile çarpılmalı ve yan kısımlardaki 2 yüzey de bu işleme dâhil edilmelidir. Bu durumda aşağıdaki çözümü oluşturmak mümkündür:

Tablo 5. Çubuk üretme problemi için oluşturulan çözüm yolu.

	1. Adım	**2. Adım**	**3. Adım**	***n*. Adım**
Alt-Üst	2	$2\times2=4$	$2\times3=6$	$2\times n=2n$
Ön-Arka	2	$2\times2=4$	$2\times3=6$	$2\times n=2n$
Yan	2	2	2	2
Toplam	6	10	14	$4n+2$

3.4. VERİLERİN ANALİZİ VE KURAMSAL ÇERÇEVE

Eldeki çalışmada, ilköğretim 2. kademe öğrencilerinin aritmetik ve geometri öğrenme alanları ve bu alanlar arası geçişlerde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamalarını keşfetmek, bu aşamaların nasıl kullanıldığını tespit etmek ve birbiri ile olan ilişkisini incelemek amaçlanmaktadır. Tümevarımsal düşünce, özel durumlardan yola çıkarak genel durumlara doğru bir akıl yürütme işidir (Neubert ve Binko, 1992). Bu araştırmada özel durumlar verilen örüntüleri, genel durumlar ise üretilen formülleri temsil etmektedir. Ayrıca araştırma kapsamında tümevarımsal düşünce, verilen şekil veya sayı örüntüleri için formüller üretme süreci şeklinde ele alınmıştır. Bu kapsamda örüntülerin gözleminden formüllerin üretilmesine kadar geçen süreç incelenmektedir.

Alan yazınında tümevarımsal düşünce sürecinin bilişsel anlamda incelendiği birkaç modele rastlamak mümkündür (Pólya, 1967; Reid, 2002; Cañadas ve Castro, 2007). Bu modeller, matematiksel bir problemin çözüm aşamalarından hareketle bilimsel bir problemin çözüm aşamalarına benzeyen bir yaklaşımla oluşturulmuştur. Çünkü Pólya (1967) ile başlayan ve Cañadas ve Castro (2007) ile devam eden süreç giderek ayrıntılı bir hale getirilmiştir. Araştırma kapsamında ilk etapta Cañadas (2007) tarafından üretilen ve Cañadas v.d. (2008) tarafından deneysel tümevarım başlığı altında ele alınan yedi aşamalı tümevarımsal süreç modelinden kuramsal çerçeve olarak yararlanılmıştır. Bu modelin gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi şeklinde 6 aşaması baz alınarak araştırma boyunca tümevarımsal düşünce sürecinin aşamaları incelenmiştir.

Bu araştırma kapsamında bahsedilen 6 aşamalı tümevarımsal düşünce sürecinin ilk aşaması gözlemlemedir. Gözlemleme aşaması, problem kurgusundaki özel durumlarla ilk deneyimlerin yaşandığı bir başlangıç noktasıdır (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Eldeki çalışma açısından öğrencilerin örüntülerle ilk defa karşılaştıkları ve örüntü adımlarını ilk defa görüp adımlar arasındaki ilişkileri ilk defa fark ettikleri bir aşama olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca bu aşama öğrenciler tarafından verilen örüntü hakkında gözlemlere dayalı birkaç yorum yazma, örüntü adımları arasındaki aritmetiksel farklara bakma, sözel problemde keşfedilen örüntüyü yazma şeklinde sergilenmiştir.

Sürecin ikinci aşaması gözlemlerin organizesidir. Gözlemlerin organizesi aşaması, gözlemlenen özel durumların düzenlenmesi ve sistematik bir hale getirilmesi için seçilen stratejileri içermektedir (Allen, 2001; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Araştırma kapsamında seçilen bu stratejiler tablo oluşturma, listeleme, grafik çizme, şekille gösterme, aritmetiksel olarak ifade etme, adım sayısı ve terim sayısını eşleştirme şeklinde ele alınmıştır. Kısacası gözlemlenen örüntünün öğrenciler tarafından farklı bir temsille ifade edilmesi bu aşamada gerçekleştirilmiştir.

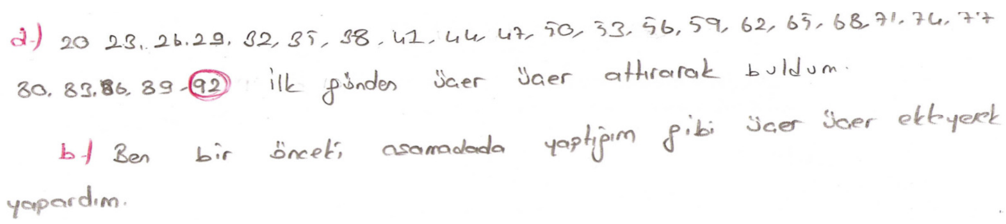
Sürecin üçüncü aşaması yordamadır. Bu aşama, Cañadas ve Castro'nun (2007) ve Cañadas v.d.'nin (2008) yorumladığı araştırma ve örüntüyü tahmin etme aşaması ile birleştirilmiştir. Çünkü araştırma ve örüntüyü tahmin etme, örüntünün bir sonraki veya yakın bir terimini tahmin etmek anlamına gelirken (Cañadas v.d., 2008) yordama, örüntünün uzaktaki herhangi bir terimi için çıkarımda bulunmak veya örüntünün bütün terimlerine uygulanabilen basit bir formül üretmek anlamına gelmektedir. Bu araştırma kapsamında bu 2 aşama birleştirilerek ‘yordama’ aşaması şeklinde ele alınmıştır. Çünkü örüntü problemlerinin a şıkkında doğrudan örüntünün uzakta bir terimi sorulmuştur ve soruların hitap ettiği aşama doğrudan yordama aşamasıdır. Bu aşama, araştırma kapsamında bir sonraki adımı yazma, adımları teker teker ileriye taşıma, doğrudan uzaktaki bir adımı bulma, a şıkkındaki adıma ulaşmak için 4 işlem yoluyla aritmetiksel sonuçlara ulaşma, tüm adımların gidişatı hakkında genel ancak şüpheli bir fikir söyleme şeklindeki göstergelerle tespit edilmiştir.

Sürecin dördüncü aşaması yordamanın testidir. Bu aşamada genel durumlar hariç sadece yeni özel durumlar için kontroller gerçekleştirilir (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Araştırmada bu aşama, yordama ile oluşan çıkarımın birkaç özel durumda denenmesi, bulunan ilişkinin verilen adımlara uygulanarak doğruluğunun test edilmesi, önce teker teker adımların ilerletilmesiyle ulaşılan adıma bir de kurulan ilişki yoluyla ulaşılarak karşılaştırmaların yapılması şeklinde ele alınmıştır.

Sürecin beşinci aşaması genellemedir. Bu aşama, uygun bir yordamadan özel durumlara bağlı olmayan, genel bir kurala ulaşmak anlamına gelmektedir (Duval, 1990; Akt. Cañadas v.d. 2008; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Araştırma kapsamında bu aşama; cebirsel veya sözel formüller yazma, örüntünün *n*. adımı hakkında fikir üretme ve örüntünün genel terimine ulaşmaya çalışma şeklinde incelenmiştir.

Sürecin altıncı ve son aşaması ise genellemenin testidir. Bu aşama, matematiksel ispatlarla genellemenin doğru olduğuna karşıdaki kişiyi inandırmaktır (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Bu araştırmada genellemenin testi aşaması, üretilen formülün önceki adımlarda denenerek test edilmesi veya aynı formülün başka yollarla üretilmesi şeklinde ele alınmıştır. Çünkü ilköğretim düzeyinde öğrenciler tarafından formal ispatlar yapılamamaktadır. Araştırmada bu aşamanın, üretilen formüllerin kontrolü şeklinde gerçekleştiği görülmektedir.

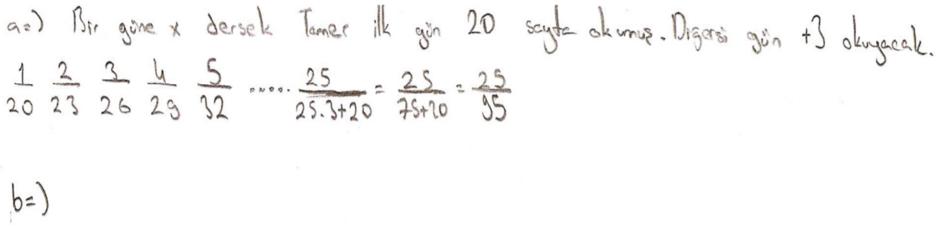
Eldeki tez çalışmasında 10 adet örüntü problemine öğrencilerin yazılı sınavda getirdikleri çözümler, seçilen 9 öğrencinin mülakatında sergilenen düşünceler ve yapılan yorumlar araştırmanın veri kaynaklarını oluşturmaktadır. Verilerin analizinde içerik ve söylem analizi yöntemleri kullanılmıştır (Miles ve Huberman, 1994; Philips ve Hardy, 2002; Yıldırım ve Şimşek, 2006). İçerik analiziyle toplanan veri, derin bir işleme tabi tutulmuştur. Bu amaçla, öncelikle yukarıda bahsedilen altı tümevarımsal düşünce aşamasının tanımlanarak kavramsallaştırılması daha sonra bu aşamalara göre verilerin düzenlenmesi ve veriyi açıklayan temaların saptanması gibi işlemler gerçekleştirilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Yazılı sınavdan elde edilen verilerde aşamaların tamamını görebilmek veya atlanan aşamaları tespit etmek mümkün olmadığı için sadece çözümlerin geldiği noktaya bakılmış ve bu noktanın tümevarımsal düşünce sürecinin hangi aşamasını yansıttığı belirlenmeye çalışılmıştır. Ardından belirlenen temalar doğrultusunda kâğıtlar teker teker incelenerek analiz sürdürülmüştür. Bu temalar ise eldeki tez çalışmasında 2 şekilde oluşturulmuştur. Yazılı sınavın analizinde oluşturulan ilk tema, çözümlerin başarı durumudur. Bu doğrultuda aşamaların herhangi birinde kalan doğru çözümler **'Başarılı'**, yanlış çözümler ise **'Başarısız'** kategorisinde değerlendirilmiştir. Oluşturulan diğer tema ise sergilenen düşünceler ve kullanılan işlemsel araçlar temasıdır. Bu tema kapsamında ise kâğıtlarda yer alan başarılı veya başarısız çözümlerin hangi yöntemlerle oluşturulduğu konusu irdelenmiştir. Bu temanın içeriği ise sorulan 10 sorunun karakteri gereği ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu kapsamda yazılı sınavın analizi, kâğıtların her birindeki çözüme verilen kodların numaralandırılması ile SPSS programına aktarılmış ve ardından oluşan yüzde-frekans değerleri kayıt altına alınmıştır. Araştırmacı tarafından bahsedilen analizin en az 2 defa yapılması ve frekansların sayımı esnasında bir bilgisayar programından yararlanılması yazılı sınav analizinin geçerliliğini ve güvenirliğini sağlayan noktalardır. Yazılı sınav analizin nasıl yapıldığı konusuna örnek olması açısından kitap okuma probleminde yordama aşamasına kadar gelen 2 çözüm analiz edilecektir. Şekil 23'te görüldüğü gibi Ö184[1], teker teker sayma yoluyla doğru yordamayı oluşturmuştur. Ancak genelleme aşamasına gelememiştir. Bu durumda Ö184'ün bulunduğu aşama 'yordama', başarı durumu 'başarılı' ve sergilediği düşünce ve kullandığı işlemsel araç, '25. güne kadar teker teker yazma' şeklinde belirlenebilir.


a-) 20 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74, 77
80, 83, 86, 89 - 92 ilk günden üçer üçer attırarak buldum.
b-) Ben bir önceki aşamada da yaptığım gibi üçer üçer ekleyerek
yapardım.

Şekil 23. Kitap okuma problemi için Ö184 tarafından oluşturulan doğru yordama.

[1] Ö184: Yazılı sınava katılan 184 numaralı öğrenciyi belirtmektedir. Bundan sonraki kısımlarda da yazılı sınav kâğıtlarından yapılan alıntılarda bu sunum şekli kullanılacaktır.

Aşağıda yordama aşamasına kadar gelen Ö125'in çözümüne yer verilmektedir.



Şekil 24. Kitap okuma problemi için Ö125 tarafından oluşturulan yanlış yordama.

Şekil 24'te görüldüğü gibi Ö125, artış miktarlarını yanlış hesaplayarak yanlış bir sonuca ulaşmıştır. İlk gün için de farkında olmadan hesaba kattığı 3 artıştan dolayı 25. günü 92 yerine 95 olarak bulmuştur. Bu durumda Ö125'in bulunduğu aşama 'yordama', başarı durumu 'başarısız', sergilediği düşünce ve kullandığı işlemsel araç 'ilk terimi 23 alarak veya yanlış artışlarla sonucu 95 bulma' şeklinde belirlenebilir. Aşağıdaki tablo, yordama aşaması için yapılan analizi bütünsel olarak göstermektedir:

Tablo 6. Yordama aşamasında kalan çözümler için örnek analiz kategori tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	KULLANILAN KOD
YORDAMA	**Başarılı**	**25. Güne kadar teker teker yazma**	**Yord-B-Tek tek yazma**
	Başarısız	İlk terimi veya artışları hatalı hesaplayarak 95 sonucuna ulaşma	Yord-BZ- 95 sonucunu bulma

Tablo 6'da görüldüğü gibi 10 soru için tüm aşamalar bu şekilde kodlanarak yazılı sınav analizi tamamlanmıştır. Yazılı sınav analizinin ardından mülakat analizleri yapılmıştır. Mülakat analizi, yazılı sınav analizine göre nitel anlamda bazı farklılıklar içermektedir. Bu farklılıklardan en önemlisi, öğrencilerin hangi aşamaları sergileyerek hangi aşamaya kadar geldiklerini izleyebilmektir. Çünkü ses kayıtları yoluyla aşamaların her biri rahatlıkla takip edilebilmiştir. Mülakat verilerinin analiz edilmesi için ise öncelikle ses kaydı halindeki 9 görüşme yazıya dökülmüştür. Yazıya dökülen ses kayıtları tekrar tekrar okunarak sergilenen tümevarımsal düşünce aşaması işaretlenmiştir. Her öğrenci için tümevarımsal düşünce aşamalarının çetelesi tutulmuştur. Mülakatların analizi sırasında araştırmacı tarafından ses kayıtlarının tekrar tekrar dinlenmesi ve yazıya dökülen ses kayıtlarından hangi öğrencinin hangi aşamayı sergilediğinin incelenmesi ile bu analizlerin geçerliği ve güvenirliği artırılmıştır.

Örneğin sayı makinesi problemi için oluşturulan mülakat analiz tablosuna aşağıda yer verilmektedir:

Tablo 7. Sayı makinesi problemi için mülakat analiz tablosu

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	HAKAN	KORAY	LEVENT	MAHİR	MELİS	MİNE	ÖZGE	RABİA	SİNEM
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordama	X	X	-	X	X	X	X	X	X
Yordamanın Testi	-	-	-	-	X	X	X	X	X
Genelleme	-	X	X	X	X	X	X	X	X
Genellemenin testi	-	X	X	X	X	-	X	X	X

Tablodan da görüldüğü gibi öğrencilerin başarı ile gerçekleştirdikleri aşamalar gölgelenmemiş bir hücrede ‘X’ işaretiyle, başarısız oldukları aşamalar gri ile gölgelenmiş hücrede yine ‘X’ işareti ile atladıkları aşamalar ise gölgelenmemiş bir hücrede kısa çizgi (-) ile temsil edilmiştir. Böylece mülakata katılan öğrencilerin her birinin sergiledikleri aşamalar ayrı ayrı incelenmiş ve tümevarımsal düşünce aşamalarının bütünü hakkında yorum yapma imkânı bulunmuştur.

4. BULGULAR VE YORUM

Araştırma bulguları ilköğretim 2. kademe öğrencilerinin aritmetik, geometri öğrenme alanlarında ve alanlar arası geçişte sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamalarının incelenmesi, aşamaların karşılaştırılması ve aşamalar arasındaki ilişkilerin saptanması noktalarında önemli sonuçlar ortaya koymuştur. Araştırma bulguları göstermektedir ki ilköğretim 2. kademe öğrencilerinin aritmetik öğrenme alanında sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları en çoktan en aza doğru genelleme, yordama, genellemenin testi, gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordamanın testidir. Geometri öğrenme alanında sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları 1. soru (şekil döndürme problemi) dışında en çoktan en aza doğru genelleme, yordama, genellemenin testi, gözlemleme, yordamanın testi, gözlemlerin organizesidir. Öğrenme alanlarında sergilenen aşamalar incelendiğinde geometrik problemlerin, aritmetiksel problemlere benzer bir şekilde çözüldüğü görülmektedir. Bu durumun sebebi, geometrik problemlerde yer alan şekil örüntülerinin sayı örüntülerine çevrilerek çözülmeye çalışılmasıdır. Örneğin sayı örüntüsünün şekil örüntüsüne çevrilemediği şekil döndürme probleminde en çok yordama aşamasının sergilendiği tespit edilmiştir.

Aritmetik ve geometri öğrenme alanında paralel sorulan sayı örüntüsü ve küp örüntüsü problemlerinde görülen şudur ki aritmetiksel bir problem geometrik bir problem şekline dönüştürülüp sorulduğunda tümevarımsal düşünce aşamaları daha başarılı bir şekilde sergilenmektedir. Ayrıca sadece aritmetik öğrenme alanında paralellik taşıyan ve biri tablo biri de grafikle verilmiş sayı makinesi ve pasta problemlerinde tablo ile verilen problemde tümevarımsal düşünce aşamalarının daha başarılı bir şekilde işletildiği görülmektedir. Bu durumda soruların veriliş tarzı açısından tablo kullanımının grafik kullanımına göre daha etkili ve başarılı sonuçlar verdiği saptanmıştır. Paralel sorulardan sonuncusu ise sadece geometri öğrenme alanında yer alan ilki 2 boyutlu ve ikincisi 3 boyutlu tarzda sorulan bal peteği örüntüsü ve çubuk oluşturma problemidir. Bu problemlerden çıkarılan sonuç ise öğrencilerin 2 boyutlu problemlerde sergiledikleri tümevarımsal düşünce süreçlerinin 3 boyutlu problemlere göre daha başarılı olmasıdır.

Araştırma kapsamında elde edilen son bulgu ise tümevarımsal düşünce aşamaları arasındaki ilişkidir. Tümevarımsal düşünce aşamalarından bir önceki aşama, bir sonraki aşamayı etkilemektedir. Özellikle bir önceki aşamada sergilenen başarılı-başarısız düşünceler bir sonraki aşamaya da aynen aktarılmaktadır. Ayrıca aşamaların tamamının sergilenmesi her zaman söz konusu değildir. Aşamalar sergilenirken önceki aşamaların atlanılarak bir sonraki aşamaya geçilmesi mümkündür ve sonuç olarak aşamalar arasında lineer bir bağlantı bulunmamaktadır. Aşamalarda meydana gelen atlamalara görsel içerikli problemlerde daha çok rastlanmaktadır. Bundan sonraki kısımda araştırmadan elde edilen bulgular her bir soru bazında incelenecektir. Bulguların anlaşılmasını kolaylaştırmak için yazılı sınav ve mülakattan elde edilen bulgular harmonik bir şekilde ve peşi peşine sunulacaktır.

4.1. ÇARPMA ÖRÜNTÜSÜ PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen çarpma örüntüsü problemine aşağıda yer verilmektedir:

$$\begin{array}{rcl} 1\times 1 = 1 & \longrightarrow & \text{1. Adım} \\ 11\times 11 = 121 & \longrightarrow & \text{2. Adım} \\ 111\times 111 = 12321 & \longrightarrow & \text{3. Adım} \\ 1111\times 1111 = 1234321 & \longrightarrow & \text{4. Adım} \\ \vdots \qquad \vdots & & \end{array}$$

Yukarıda ilk adımında 1 basamaklı (1), 2. adımında 2 basamaklı (11), 3. adımında 3 basamaklı (111), 4. adımında 4 basamaklı (1111) sayılarla oluşturulmuş çarpma işlemi örüntüsü verilmiştir. Buna göre;

a) Örüntünün 100. adımı için sonucu bulunuz? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Örüntünün herhangi bir adımı (*n*. adım) sorulsaydı sonucu kolaylıkla bulabilmek için nasıl bir formül ya da kural oluştururdunuz? **Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl elde ettiğinizi açıklayınız** (MEB, 2010; 8. sınıf SBS A Kitapçığı 16. matematik sorusundan uyarlanmıştır).

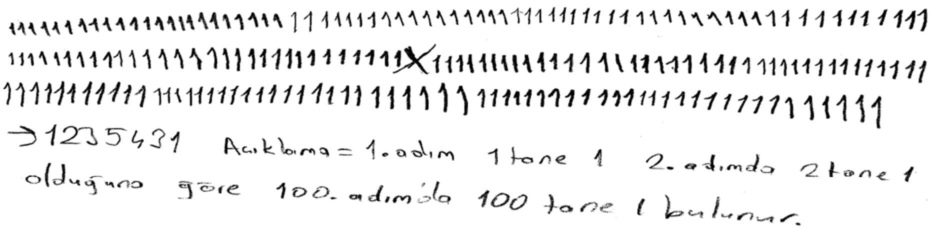
Öğrencilerin bu problemi çözerken öncelikle adımları teker teker gözlemlemeleri ve ardından 100. adımı tahmin etmeleri gerekmektedir. 100. adımın tahmini için 1. adımda 1, 2. adımda 121, 3. adımda 12321 şeklinde önce artan sonra azalan örüntüyü fark etmeleri ve 100. adım için 1'den 100'e kadar artırma, 100'den 1'e kadar azaltma yöntemini kullanmaları gerekmektedir. Ayrıca sadece eşitliğin sağ kısmına dair olan bu yöntem, çözümün tamamlanması için yeterli değildir. Bu yüzden eşitliğin sol kısmında kaç basamaklı sayıların çarpıldığına ve 100. adımda bu sayıların kaç basamaklı olacağına da dikkat edilmelidir. *n*. adım için örüntünün genellenmesi ise '*n*' harfine yüklenen anlamla doğru orantılıdır. Bu kapsamda çarpma örüntüsü problemine verilen cevaplar başarı durumu, sergilenen düşünce ve kullanılan işlemler açısından analiz edilerek yüzde-frekans şeklinde ifade edilmiştir (bakınız, Tablo 8).

Tablo 8.Çarpma örüntüsü problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	Başarılı	**Verilen örüntüyü tanımlama, açıklama veya tek tek çarpma yoluna gitme**	5	2.4
	Başarısız	Anlamsız aritmetiksel cevaplar ve eşitliğin sol kısmında toplam kaç tane 1 olduğunu ifade etme	12	5.7
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	Başarılı	**Verilen ilk 4 terime aritmetiksel bakış**	1	0.5
	Başarısız	Aritmetiksel	1	0.5
YORDAMA	Başarılı	**100. adım için sözel**	2	1
		100. adım için sözel+aritmetiksel	2	1
		Herhangi bir adım için aritmetiksel veya sözel tahmin	17	8.1
	Başarısız	Sadece eşitliğin sol kısmını düşünerek anlamsız aritmetiksel veya cebirsel tahminler	34	16.2
		Eşitliğin sağ kısmındaki sonucu 1…1 şeklinde ifade etmek veya Pascal üçgenine benzetilerek çözüleceğini düşünme	7	3.3
YORDAMANIN TESTİ	Başarılı	**Sözel**	1	0.5
		Aritmetiksel+sözel	2	1
	Başarısız		0	0
GENELLEME	Başarılı	**Cebirsel**	11	5.2
		Sözel	20	9.5
		Cebirsel+sözel	12	5.7
	Başarısız	Yanlış gözlemler ile sözel	1	0.5
		Eşitliğin sol kısmı için cebirsel veya sözel açıklama	23	11
		Basamak sayısı için formül üretme	2	1
		Doğru yordama yanlış formül	10	4.8
		Anlamsız formüller veya sözel açıklamalar	9	4.3
GENELLEMENİN TESTİ	Başarılı	**Sözel**	4	1.9
		Sözel+aritmetiksel	2	1
	Başarısız	Cebirsel	1	0.5
BOŞ	**Çözüm yok**		31	14.8

Tablodan görüldüğü üzere 210 katılımcı öğrenci arasından 17 tanesi (%8.1) gözlemleme aşamasında kalarak sonraki aşamaları sergileyememiştir. Katılımcı öğrencilerin sadece 2 tanesi (%1) gözlemlerin organizesi aşamasında kalmıştır. Bu durum çarpma örüntüsü probleminde gözlemlerin organizesi aşamasının çoğunlukla atlandığını göstermektedir. Ayrıca sorunun veriliş şeklinde bir organizasyon vardır ve soruyu tekrardan organize eden grup, genellikle verilen problem durumunu farklı bir temsil biçimine dönüştürmeyi amaçlamıştır.

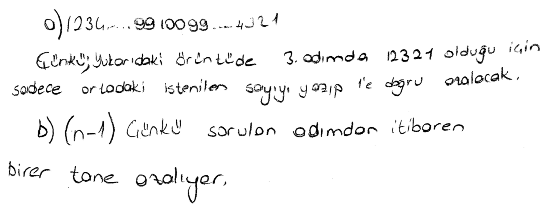
Katılımcı öğrencilerden 62 tanesi (%29.6) yordama aşamasında kalarak genel bir formül üretememiştir. Bu aşamada bulunan çözümlerin çoğu başarısız çözümleri oluşturmaktadır. Başarılı çözümlerin ilk sebebi 'ilerideki herhangi bir adımın doğru yordanması' iken; başarısız çözümler eşitliğin sadece sol kısmını esas alarak üretilmiş çözümlerden oluşmaktadır. Bununla ilgili örnek aşağıda verilmektedir:



Şekil 25. Çarpma örüntüsü problemine ait yordama aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö190).

Şekil 25'te görüldüğü gibi Ö190, 100 adet 1'i 2 defa yazarak oluşturduğu bu sayıları çarpmıştır. Eşitliğin sadece sol kısmı için yordama gerçekleştiren öğrenci, eşitliğin sonucu hakkında herhangi bir fikir sunmamıştır. Bu durum yapılan eksik gözlemlerden kaynaklanmaktadır.

Öğrencilerin 3 tanesi (%1.5) yordamanın testi aşamasında kalmıştır. Bu aşama, genellikle soruda örüntünün verilen adımlarına sözel veya aritmetiksel dönüşlerle gerçekleştirilmiştir. Katılımcı öğrencilerin büyük bir kısmı yani 88 tanesi (%42) ise genellemenin testi haricindeki aşamaların tamamını geçerek verilen örüntülerle ilgili genellemeler yapmıştır. Genellemeler neticesinde 43 öğrenci doğru formüller üretirken (bakınız, Şekil 27 ve Şekil 28), 45 öğrenci yanlış formüller üretmiştir. Yanlış formüle ait örnek bir yanıt Şekil 26'da verilmiştir. Bu yanıttan anlaşılacağı üzere doğru yordama yaparak 100. adıma ulaşan öğrenci, genelleme aşamasında hataya düşmüştür. Bu durumun sebebi öğrencinin terime bağlı kalmasıdır. *'Sorulan adımdan itibaren birer* *tane azalıyor'* cümlesinden de anlaşılacağı üzere öğrenci tarafından örüntünün genelini yansıtan bir formül oluşturulamamıştır.



Şekil 26. Çarpma örüntüsü problemine ait genelleme aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö107).

Öğrencilerden sadece 6 tanesi (%2.9) bütün aşamaları geçerek verilen örüntüyle alakalı doğru genellemeler yapmış ve yaptıkları genellemeleri test ederek çözüm sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır.

Yürütülen mülakatlar esnasında öğrenciler genel itibariyle çarpma örüntüsünü gözlemleyerek ve gözlemlerini kolaylıkla organize ederek 100. adımdaki çarpma işleminin sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca örüntünün 100. adımında ulaştıkları sonucu test etmeden genelleme aşamasına geçen öğrenciler, örüntünün *n*. adımında formül üretme noktasında zorlanarak genellikle yanlış formüller üretmişlerdir. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 9. Mülakata katılan öğrencilerin çarpma örüntüsü probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	HAKAN	KORAY	LEVENT	MAHİR	MELİS	MİNE	ÖZGE	RABİA	SİNEM
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin Organizesi	X	X	X	-	X	X	X	-	-
Yordama	X	X	X	-	X	X	X	X	X
Yordamanın Testi	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Genelleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Genellemenin testi	-	X	-	-	-	-	X	-	-

Tablo 9'da görüldüğü gibi mülakata katılan öğrencilerden hiçbiri aşamaların tamamını sergilememiştir. Levent, Melis ve Mine hem yordamayı hem de genellemeyi test etmeksizin aşamaları doğru bir şekilde sergilemişler ve örüntünün kuralını bulmuşlardır. Hakan, Koray, Mahir, Özge, Rabia ve Sinem ise verilen örüntüyü yanlış formüllerle genellemişlerdir. Katılımcı öğrencilerin en çok yordamanın testi ve genellemenin testi aşamalarını atladıkları görülmüştür. Ayrıca katılımcı öğrenciler en çok gözlemleme ve genelleme aşamasını sergilemişlerdir. Öğrenciler tarafından en az hata gözlemleme en çok hata ise genelleme aşamasında yapılmıştır. Gözlemleme aşaması mülakata katılan tüm öğrenciler tarafından sergilenmiştir. Mine'nin gözlemlerini anlatan diyalog şu şekildedir **(Diyalog 1)**:

…[Çarpma örüntüsü probleminin a ve b şıklarını okuyan Mine, soruyu çözmeye başlar].

Mine:[Verilen adımları gözlemler ve yazar]. Burada benim gördüğüm [eşitliğin sol kısmını göstererek] burada 6 rakam var burada da 6 rakam var. Burada 5 rakam var burada 4 rakam var burada 3 rakam var [eşitliğin sağ kısmını göstererek] buradaki rakam sayısının toplamının bir eksiği buradaki rakam sayısını veriyor.

…

Diyalog 1'de görüldüğü gibi Mine, çarpma örüntüsündeki eşitliklerin her 2 kısmını da gözlemleyerek basamak sayısını veren bir sonuç bulmuştur. Mülakata katılan öğrenciler, gözlemlerin organizesi aşamasında ileri adımların nasıl ifade edileceği noktasında düşünmüşlerdir. Örneğin organizasyon aşamasında nasıl bir yol izleyeceğine karar veren Özge, çözümünü bu şekilde devam ettirebilmiştir. Özge ile araştırmacı arasında organizasyon aşaması ile ilgili olarak geçen diyalog şu şekildedir **(Diyalog 2)**:

Özge: [Öğrenci çarpma örüntüsü probleminin a ve b şıklarını okur].

Araştırmacı: Nasıl çözerdin bu soruyu Özge?

Özge: Önce 1×1 diyor. İkincisinde $11\times11=121$ oluyor. Ondan da şöyle bir mantık yürüttüm 1, 2, 1. Geriye sarıyormuş gibi. 111×111 denince de 12321 oluyor yani o da 1, 2, 3, 2, 1. …. 1111×1111'de de 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 oluyor.

Araştırmacı: Bu örüntünün 100. adımına nasıl ulaşırsın?

Özge:[Düşünür]. 100. adım. Çarpmak çok uzun sürer. Aslında başta 100'e kadar yazayım sonra 100'den geriye doğru yazayım 100. adım olur mu diye düşündüm. Ancak bunun olmayacağına karar verdim.

Araştırmacı: Neden böyle bir karar aldın?

Özge: Cevap çok uzundu hem de mantıksız geldi.

Araştırmacı: Şimdi 1'den 100'e kadar nokta nokta ile ifade etmeni istesem.

Özge: Nokta nokta ile. Mesela 123…100 ondan sonra 99 98…1

Araştırmacı: Böyle bir gösterim olabilir mi sence?

Özge: Olabilir aslında.

…

Görüldüğü gibi organizasyon aşamasında zorluk yaşayan Özge, nasıl organize edeceğine karar verdikten sonra 100. adımı yordayabilmiştir. Yordama aşamasının başarıyla sergilenmesinin nedenlerinden biri, örüntünün gözlemi ve organizesi aşamalarında gösterilen başarılardır. Yordama aşamasında başarısızlığın genel sebebini ise yazılı sınav verileri ile paralel olarak eksik gözlemler veya yanlış organizasyonlar oluşturmaktadır.

Genelleme aşamasında formüllerin yanlış yazılma sebepleri *n*. adıma anlam verememe, *n*. adımı bulmak için bir önceki veya bir sonraki adımın bilinmesi gerektiğini söyleme, doğrudan 100. adıma bağlı bir formül veya aritmetik değişen örüntü formülünü yazma şeklinde görülmüştür. Formüllerin doğru yazılma sebepleri ise cebire yüklenen anlamın doğru olması, '*n'* ifadesinin çok büyük veya çok küçük bir adımdan ziyade istenen adım olduğu düşüncesi şeklinde özetlenebilir. Genelleme aşamasında bulunan Levent'in '*n'* harfine yüklediği anlam aşağıdaki diyalogda görülmektedir **(Diyalog 3)**:

…

Araştırmacı: Peki *n.* adım denince aklına ne geliyor Levent?

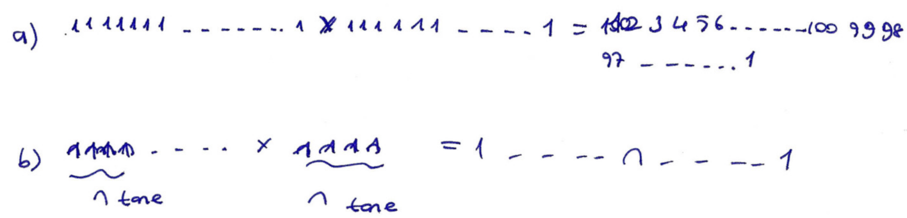
Levent: *n*. adım…bize yani sorulan adım sayısı hani bize 2. adımı soruyorsa *n* yerine 2 koymamız gerekir. Hani 100. adımı soruyorsa *n* yerine 100 koymamız gerekir. Bize sorulan adım *n*'dir.

Araştırmacı: *n,* büyük bir adım mıdır sence yoksa küçük bir adım mıdır?

Levent: *n*, bizden istenilen adım sayısı olur.

Araştırmacı: Evet. Yani büyük ya da küçük olarak ifade etmiyorsun.

Levent: Evet.

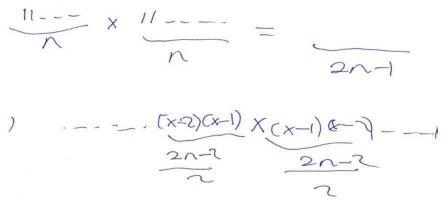


Şekil 27. Levent'in çarpma örüntüsü problemine verdiği yazılı açıklama.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü üzere Levent'in '*n'* harfine yüklediği doğru anlam, genelleme aşamasında ona yardımcı olmaktadır. Ayrıca eşitliğin hem sağ hem de sol tarafına bütüncül bakabilmek doğru formülün bulunmasını sağlayan diğer noktadır.

Bununla ilgili başka bir örnek araştırmacı ile Mine isimli öğrenci ile araştırmacı arasında geçen şu diyalogda görülmektedir (**Diyalog 4**):

> **…**
>
> **Mine:**[Çarpma örüntüsü probleminin b şıkkını okur ve eşitliğin sol kısmını göstererek] Şimdi şurada *n* tane 1 olacak [der ve düşünür]. Sonuçta da ikisinin toplamının 1 eksiği kadar rakam olacak.
>
> **Araştırmacı:** Yani
>
> **Mine:** *2n-1*
>
> **Araştırmacı:** Peki bu sayıyı yazarak gösterebilir misin?
>
> **Mine:** Tamam. Şöyle yapalım o zaman ben ortadaki sayıya *x* diyeyim. Kenarındaki sayılar da kaç tane olur? *2n-1* [düşünür]*2n-2* olacak herhalde. Her 2 kısımda da *(2n-2)/2*tane sayı olacaktır. Bunun kenarlarındaki sayılar da *x-1, x-1* onun kenarlarındakiler de *x-2, x-2* olacaktır.
>
> **…**



Şekil 28. Mine'nin çarpma örüntüsü problemine verdiği yazılı açıklama.

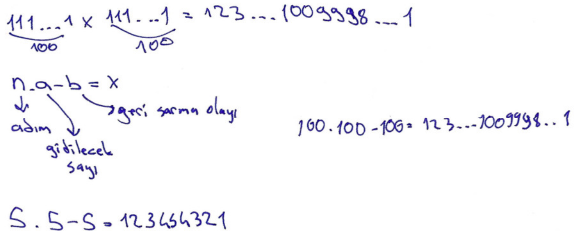
Görüldüğü gibi Mine, basamak sayısını *n* harfi ile ortadaki herhangi bir sayıyı ise *x* harfi ile temsil etmektedir. Ayrıca genelleme formülü üretmek amacıyla basamak sayısına odaklanan Mine, harfleri cebirsel anlamıyla kullanmaktadır.

Genellemenin testi aşaması yalnızca Koray ve Özge tarafından sergilenmiştir. Bu öğrenciler yanlış buldukları genelleme formüllerini test etmişler ve formülde herhangi bir düzenlemeye gitmemişlerdir. Örneğin,aşağıdaki diyalogda görüldüğü üzere Özge, ürettiği formülün (kendi isimlendirmesi ile geri sardırma formülünün) testini gerçekleştirmiştir (**Diyalog 5**):

> **…**[Çarpma örüntüsü probleminin b şıkkını okuyan Özge, araştırmacının sorularıyla örüntü formülünü oluşturmaya devam eder].
>
> **Özge:** Mesela *n.* adımda şöyle bir şey diyebilirim. *n* çarpı *a* eksi *b* eşittir *x* sayısı. [Der ve $n \times a\text{-}b\text{=}x$ formülünü yazar]
>
> **Araştırmacı:** Bu formülde *n* harfi neyi ifade ediyor Özge?
>
> **Özge:** Mesela 5. adıma kadar gidiliyorsa adım 5 olur *a* da 5 olur. Eksi *b* dememin sebebi ise sonuçta geri sarması gerekiyor rakamı. Yani 5'e kadar gelecek. Ondan sonra döneceğim sayıyı yazıyorum.

Araştırmacı: Peki döndüğünde en son kaça kadar gidersin?

Özge: Mesela *n.* adıma 5 dedik gidilecek sayıya da 5 dedik 5'e kadar gelirim 5'ten sonra tekrardan 4, 3, 2, 1 diye giderim [yazılı açıklaması için bakınız, Şekil 29].



Şekil 29. Özge'nin çarpma örüntüsü problemine verdiği yazılı açıklama.

Görüldüğü gibi Özge, genellemesini test ederken ürettiği geri sardırma formülünü teste tabi tutmuştur. Formülü genel bir ifade değildir ancak eşitliğin sonucuna doğru bir şekilde ulaşmıştır. Ayrıca Özge, formülünün testi esnasında önceki adımlardan 5. adıma bir dönüş yaparak doğrulama işlemini gerçekleştirmiştir.

4.2. SAYI ÖRÜNTÜSÜ PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen sayı örüntüsü problemine aşağıda yer verilmektedir:

1, 8, 27, 64, …

Yukarıda bir sayı örüntüsünün ilk 4 terimine yer verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 25. terimini bulunuz? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Bu örüntünün herhangi bir terimi (*n.* terim) sorulsaydı bu terimi kolaylıkla bulmak için nasıl bir kural ya da formül oluştururdunuz? **Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.**

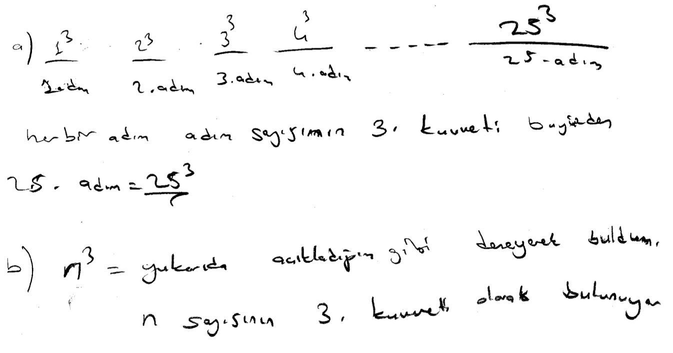
Öğrencilerin sayı örüntüsü problemini çözerken 1, 8, 27, … şeklinde ilerleyen sayı örüntüsünün artarak değişen bir örüntü olduğu ve terimler arasında sabit bir farkın 3. açılımda (bakınız, Şekil 7) bulunabileceği gibi noktalara dikkat etmeleri gerekmektedir. Özellikle terimler arasındaki farklara odaklanılmadan adım sayısı ile terim sayısı arasındaki ilişki keşfedilirse doğru bir genellemeye ulaşılması mümkündür. Aşağıda sayı örüntüsü probleminin yazılı sınav analizini gösteren tabloya yer verilmektedir. Tablo 10'dan da anlaşılacağı üzere 210 katılımcı öğrencinin 32 tanesi (%15.3) gözlemleme aşamasında kalarak sonraki aşamaları sergileyememiştir. Bu aşamada kalan çözümler, genellikle başarılı olup adım-terim sayısı ilişkisinden ziyade sadece verilen terimler arasındaki aritmetiksel farka bakma yoluyla gerçekleştirilmiştir.

Tablo 10. Sayı örüntüsü problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	**Başarılı**	**Yalnızca verilen terimler arasındaki aritmetiksel farklara bakma**	32	**15.3**
	Başarısız		**0**	**0**
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız	Adımlarda rasyonel ve anlamsız ilişkiler bulup düzenleme	**2**	**1**
		Terimler arası aritmetiksel farka bakarak organizesini yapma	**3**	**1.4**
YORDAMA	**Başarılı**	**25. adım için başarılı aritmetiksel sonuca ulaşma**	**5**	**2.4**
	Başarısız	Terimler arası aritmetiksel farka bakarak ve örüntüyü devam ettirme ve örüntünün herhangi bir terimini bulma	**11**	**5.2**
		Anlamsız birtakım işlemlerle örüntünün 25. adımına ulaşma	**7**	**3.3**
YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
GENELLEME	**Başarılı**	**Cebirsel**	**34**	**16.2**
		Sözel	**1**	**0.5**
		Sözel+cebirsel	**17**	**8.1**
	Başarısız	Geometrik veya aritmetik değişen örüntü formülünü kullanma	**5**	**2.4**
		Sözel bir açıklama ve terime bağlı bir ilişki bulma	**5**	**2.4**
		Yordama doğru ancak formül hatalı	**2**	**1**
		Anlamsız	**13**	**6.2**
GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**Cebirsel**	**4**	**1.9**
		Sözel+cebirsel	**3**	**1.4**
	Başarısız	Anlamsız formüllerin test edilmesi	**1**	**0.5**
		Terimler arası farka bakılarak oluşturulan veya aritmetik değişen örüntü şeklinde yazılan formüllerin testi	**2**	**1**
BOŞ	**Çözüm yok**		**63**	**30**

Öğrencilerin 5 tanesi (%2.4) gözlemlerin organizesi aşamasında kalmıştır. Bu aşamada bulunan 5 çözümün tamamı da başarısızdır; çünkü bu çözümlerin tamamı adımlar arası aritmetiksel farklara odaklanılarak yapılan organizasyon hatalarını içermektedir. Bu noktada başarısız gözlemlerin başarısız organizasyonları da beraberinde getirdiği görülmüştür.

Öğrencilerin 23 tanesi (%10.9) yordama aşamasında kalarak cebirsel ifadelerden uzak aritmetiksel sonuçlarla örüntünün 25. terimini bulmaya çalışmıştır. Yordama aşamasının çoğunluğunu başarısız çözümler oluşturmuştur. Terimler arası aritmetiksel farklara bakılarak örüntünün herhangi bir teriminin yanlış bir şekilde bulunduğu çözümler, başarısız çözümlerin genel sebebini oluşturmaktadır. Yordamanın testi aşamasında kalan çözüm bulunmamaktadır. Bu durumun sebebi, yordamayı başarı ile gerçekleştiren grubun yordamalarını kontrol etmeden doğrudan genelleme aşamasına geçmiş olmasıdır. Katılımcı öğrencilerin 77 tanesi (%36.8) genelleme aşamasında kalarak çözümlerini bir kuralla açıklamaya çalışmıştır. Ayrıca bu aşama, sayı örüntüsü problemi için en çok sergilenen tümevarımsal düşünce aşamasıdır. Genelleme aşamasında kalan başarılı çözümlerin başarısız çözümlerden fazla olması sayı örüntüsü probleminin öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde çözüldüğünü göstermektedir. Ayrıca başarılı çözümlerin genelinde cebirsel bir formül kullanıldığı görülmektedir. Aşağıda cebirsel-sözel anlamda üretilmiş başarılı genelleme örneğine yer verilmektedir:



Şekil 30. Sayı örüntüsü problemi için genelleme aşamasında bulunan başarılı çözüm örneği (Ö43).

Şekil 30'da görüldüğü gibi adım sayısı ile terim sayısı arasında çarpımsal ilişkiyi görebilen öğrenci, başarılı bir çözüm sergilemiştir. Gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordama aşamalarındaki başarı, genelleme aşamasına yansımıştır. Sonuçta 'n^3' şeklindeki formülü '*adım sayısının 3. kuvveti*' şeklinde açıklayan öğrenci, çözümü başarılı bir şekilde sonlandırmıştır.

Genelleme aşamasındaki başarısızlık sebepleri genellikle yordamanın doğru, genellemenin yanlış yapılması veya sorunun aritmetiksel-geometrik değişen örüntüye benzetilerek çözülmesidir (bakınız, Şekil 33). Yordamanın doğru, genellemenin yanlış yapılması; yapılan yordamanın genel ifadeden uzak, yordamanın tüm terimlerinin göz önünde bulundurulmadan yapılmış olmasından kaynaklanmaktadır. Sorunun aritmetik-geometrik değişen örüntüye benzetilmesi konusu ise öğrencilerin bu örüntü türüne aşina olmalarından kaynaklanmaktadır. Özellikle verilen örüntüde ilk etapta aritmetiksel farklara bakmanın sebebi ortak farkın bulunmaya çalışılması ve formülün bu şekilde oluşturulmasıdır.

Öğrencilerin 10 tanesi (%4.8) genellemenin testi aşamasında kalarak ürettikleri formülü test etmiştir. Bu testler genellikle örüntünün verilen adımlarına geri dönüşlerle gerçekleştirilmiştir (bakınız, Şekil 33). Genelleme aşamasında başarılı çözümlerin daha çok olması, genellemenin testi aşamasında da başarılı çözüm sayısını artırmıştır. Bu durum, genelleme aşamasının genellemenin testi aşamasını etkilediğini göstermektedir.

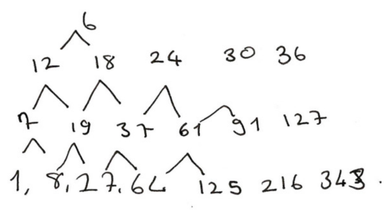
Yürütülen mülakatlar esnasında öğrencilerin verilen sayı örüntüsünü genellikle aritmetiksel artışlara bakarak başarılı bir şekilde gözlemledikleri ve organize ettikleri görülmüştür. Yordama aşamasında ise sayı örüntüsünün 25. adımına ulaşabilen öğrenciler olduğu gibi ulaşamayan öğrencilerin de olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca öğrenciler, adım-terim sayısı ilişkisini göremedikleri için çoğunlukla başarısız formüller üreterek çözümlerini sonlandırmışladır. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 11. Mülakata katılan öğrencilerin sayı örüntüsü probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	HAKAN	KORAY	LEVENT	MAHİR	MELİS	MİNE	ÖZGE	RABİA	SİNEM
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	-	X	X	X	X	-	X
Yordama	X	X	-	X	X	X	X	-	X
Yordamanın Testi	-	-	-	-	X	-	-	-	-
Genelleme	X	X	X	X	X	X	X	X	-
Genellemenin testi	X	X	X	X	X	X	X	X	-

Tablo 11'de görüldüğü gibi mülakata katılan öğrencilerden hiçbiri aşamaların tamamını sergilememiştir. Hakan ve Koray, yordamanın testi aşamasını atlayıp hatalı genelleme formülleri üretmişler ve bu formülü test etmişlerdir. Melis, Mahir ve Özge ise 25. adıma ulaşamayarak veya bu adımı yanlış bularak yordama aşamasında gösterdikleri başarısız çözümü sonraki aşamalara yansıtmışlardır. Levent, gözlemlerinin sonucunda genelleme aşamasında başarılı bir çözüm sergilerken; Rabia gözleminin ardından bu aşamada yanlış bir formül üretmiştir. Sinem ise yordama aşamasına kadar gelmiş sonraki aşamaları sergileyememiştir. Katılımcı öğrencilerin en çok gözlemleme ve genelleme aşamalarını sergileyip yordamanın testi aşamasını atladıkları görülmüştür. Öğrencilerin en çok hatayı genelleme ve dolayısıyla genellemenin testi aşamalarında, en az hatayı ise gözlemleme aşamasında yaptıkları tespit edilmiştir.

Gözlemleme aşamasının tüm öğrenciler tarafından sergilenmesi bu aşamanın aritmetik öğrenme alanındaki önemini göstermektedir. Çünkü gözlemleme aşamasında öğrenci, soru hakkında fikir sahibi olmakta ve çözüm için seçeceği yola karar verme imkânı bulmaktadır. Gözlemlerin organizesi aşamasında 1, 8,27,64,… şeklinde ilerleyen sayı örüntüsü için öğrenciler genellikle düzenli aritmetiksel artışlar olabileceğini düşünseler de terimler arası aritmetiksel farkların 7-19-37 şeklinde olmasından dolayı bu dizinin düzenli artmadığı sonucuna varmışlardır. Ancak en sonunda 12-18 arasında bulunan farkın 6 olması, öğrencilerin bu örüntüyü aritmetiksel değişen bir örüntü şeklinde düşünmelerine neden olmuştur. Bazı öğrenciler buldukları farkları düzenli bir şekilde ilerleterek sonraki terime başarılı bir şekilde ulaşabilirlerken bazıları terimler arasındaki farkı yanlış bulma veya yanlış ilerletme gibi sebeplerden örüntüyü devam ettirememiştir. Aşağıda Sinem'in başarılı organizasyonuna yer verilmektedir:



Şekil 31. Sayı örüntüsü problemi için Sinem'in oluşturduğu organizasyon.

Şekilde görüldüğü gibi Sinem, 1, 8, 27,64, … şeklinde ilerleyen sayı örüntüsündeki ilişkiyi bulmak için terimler arasındaki farklara bakarak örüntüyü doğru bir şekilde devam ettirmiştir. Ortak farkı hatalı bulan öğrencilerin ise genellikle soru çözümünü yarıda bıraktıkları veya bazı artışları ortak fark kabul ederek yanlış formüller ürettikleri görülmektedir. Nitekim ortak farka dayalı yapılan gözlemler ve organizasyonlar yordama ve genelleme aşamalarını başarısızlık yönünde etkilemektedir.

Örneğin örüntünün terimleri arasında yatay olarak (terimler arası ilişki) aritmetiksel farklara bakmaya çalışan Özge, buradan bir sonuca ulaşamayacağını anlayınca yazılı sınav esnasında soruyu tamamlayamamıştır. Ancak araştırmacının sorularıyla örüntüde dikey ilişki (adım-terim sayısı arası ilişki) aradığı zaman doğru genelleme formülüne ulaşmayı başarmıştır ki bu durum aşağıdaki diyalogdan anlaşılmaktadır (**Diyalog 6**):

…[Sayı örüntüsü probleminin a şıkkını okuyan Özge, soruyu çözmeye başlar].

Özge: 1, 8, 27, 64 diyor 1’den 8’i çıkarttım 7, 8’den 27’yi çıkarttım 19, ondan sonra 27’den de 64’ü çıkarttım 37 buldum. [Kâğıda yazmaya devam eder].

Araştırmacı: 7 buldun, 19 buldun, 37 buldun. Evet.

Özge: İlk başta bu yoldan hareket ederek bulabileceğimi düşündüm ama bunun belirli bir farkla artmadığını anladım. Yani bana öyle geldi. Çünkü 7’nin hiçbir katı 19’a eşit değil, 19’un hiçbir katı 37’ye eşit değil.

Araştırmacı: Peki farkların sabit olmadığını görünce ne düşündün?

Özge: Sonra burada bıraktım açıkçası. Bana mantıklı gelmedi.

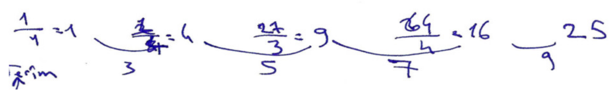
Araştırmacı: Peki 1. adımın 1’i ile 1 arasında, 2. adımın 2’si ile 8 arasında hani birbirinden farklı olarak bir bağlantı kurabilir misin Özge?

Özge: [Düşünür]. Olabilir. 1. adımda 1’i 1’e böldük bir, 2. adımda 2’yi 8’e böldük 4, 3. adımda 27’yi 3’e böldük 9.

Araştırmacı: Yazabilirsin.

Özge:[Öğrenci yazar]4. terimde 64’ü 4’e bölersek 16 çıkıyor. [Der ve bölme sonuçları arasındaki farkları yazmaya başlar].

…



Şekil 32. Sayı örüntüsü problemi için Özge’nin verdiği yazılı açıklama.

Diyalog 6’dan anlaşıldığı gibi örüntü denince Özge’nin zihninde düzenli bir artışla ilerletilebilen bir dizi oluşmaktadır. Yani örüntülerin sabit bir sayı ile artması ya da azalması gerektiğini düşünen Özge, bu noktada bir kavram yanılgısına sahiptir. Görüldüğü gibi araştırmacının yönlendirmesi ile yapılan yukarıdaki organizasyonda önce dikey ilişkilere bakan öğrenci yine sayılar arasındaki aritmetiksel artışlara bakmaya yönelmiştir (bakınız, Şekil 32). Çünkü öğrencinin alışkın olduğu yöntem onu bu yola sevk etmekte ve yatay ilişkilerle soruya yaklaştığı için çarpımsal manadaki artışları görememektedir.

Yordama aşaması, mülakata alınan öğrenciler tarafından2 türlü işletilmiştir. Birincisi, terimler arası farklara bakılarak teker teker 25. adıma kadar yazma davranışının gösterilmesini içerirken, ikincisi adım sayısı ve terimler arasındaki ilişki ve bağıntının daha genel yaklaşımlarla araştırılmasını içermektedir. Yordamanın testi aşaması sadece bir öğrenci tarafından sergilenmiştir. Bu durum öğrencilerin yaptıkları yordamayı test etmeden genelleme aşamasına geçtiklerini göstermektedir. Yordamayı test etmeyen 6 öğrencinin sonraki aşamalarda başarısız çözümler sergilemesi, yordamayı test etmenin sonraki aşamalardaki başarıyı etkilediğini göstermektedir.

Mülakata katılan 9 öğrencinin 6'sı başarısız, 2'si başarılı bir şekilde genelleme aşamasına ulaşırken; 1'i bu aşamaya ulaşamamıştır. Bu aşamaya yanlış ulaşan öğrencilerin yaptıkları ilk hata terime bağlı olarak ürettikleri formüllerdir (örneğin '*n+6*', '*n+25*' gibi). Genel bir kural niteliğinde olmayan bu formüllerin üretilmesi, genelleme aşamasında görülen hataların pek çoğunun sebebini oluşturmaktadır. Görülen 2. hata ise aritmetik değişen örüntü formülünün 1, 8, 27,… şeklinde artarak değişen örüntüye uygulanmasıdır. Bununla ilgili olarak Rabia ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir **(Diyalog 7)**:

…

Rabia: [Sayı örüntüsü probleminin b şıkkını okur].

Araştırmacı: Bu şıkkı nasıl çözersin Rabia?

Rabia: $a_1 \times (n-1) \times d$ derim.

Araştırmacı: Bu formülü niye yazdın?

Rabia: Çünkü a_n terim sayısı…[Der ve formüldeki her harfin anlamını söyleyerek kâğıda yazar].

Araştırmacı: Yani bu soruda bu formülü kullanarak sonuca ulaşabilirim diyorsun.

Rabia: Evet sonuca ulaşabilirim. İlk terim 1, *n*=25 dediği için (25-1) yaptım. [Sayı örüntüsünü yazar ve terimler arasındaki farklara bakmaya başlar]. Buradan buraya [1. ve 2. terimleri göstererek] 7 fark var, buradan buraya [2. ve 3. terimleri göstererek] 19, buradan buraya da [3. ve 4. terimleri göstererek] 37 fark var.

Araştırmacı: Artış miktarını belirleyebiliyor musun?

Rabia: Hayır belirleyemedim. 7 ve 19 arasında 12 fark var, 37 ve 19 arasında 18 fark var. 18 ve 12 arasında da 6 fark olduğu için ortak fark 6'dır.

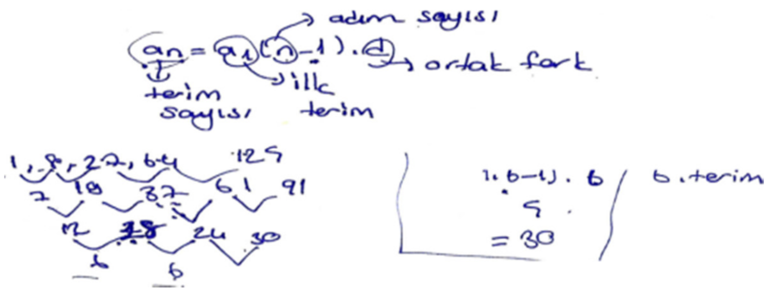
Araştırmacı: Peki bunu açtığında 6. adım kaç çıkar?

Rabia: [İşlemleri yapar ve bulmaya çalışır]. 215. [Teker teker açtığı çözüme bakarak].

Araştırmacı: Senin yazdığın ilk formülden bir de 6. adımı bulur musun Rabia?

Rabia: [İlk yazdığı formülde 6. adımı bulur]. 30 çıktı. [Der ve sonuçların uyuşmadığını fark eder].

…



Şekil 33. Sayı örüntüsü problemi için Rabia'nın verdiği yazılı açıklama.

Şekil 33'te görüldüğü gibi Rabia, sayı örüntüsü problemindeki örüntünün aritmetiksel olmadığını ufak bir test ile görebilmiştir. Aritmetik değişen örüntü formülünü doğrudan yazması, örüntüyü yanlış yorumlamasına sebep olmuştur; ardından ürettiği formülü test eden Rabia, bu formülün hatalı olduğunu fark etmiştir. Mülakat analizlerine göre genellemenin testi aşaması, öğrencilerin 8'i tarafından sergilenmiş ancak genellemeyi yanlış yapıp test aşamasında formülün yanlışlığını anlayan 4 öğrenci, formüllerinde herhangi bir düzeltmeye gitmemiştir. Çünkü bu öğrencilerden 3'ü, soruda aritmetik değişen örüntü formülünü yanlış yazarak formülü hatırlamakta güçlük çekmiş ve doğru sonuca ulaşamamıştır. Bu durum, aritmetik değişen örüntü formülünün öğrenciler tarafından bilindiğini ve sergilendiğini ancak uygulamaların örüntünün türüne bakılmadan yapıldığını göstermektedir.

4.3. KİTAP OKUMA PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen kitap okuma problemi şu şekildedir:

> Tamer her gün bir önceki günden 3 sayfa daha fazla okuyarak bir romanı bitirmeye karar vermiştir. Tamer ilk gün romanın 20 sayfasını okuduğuna göre;
>
> **a)** Tamer sadece 25. gün kaç sayfa kitap okur? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**
>
> **b)** Tamer'in herhangi bir gün (*n.* gün) kaç sayfa kitap okuduğunu kolaylıkla hesaplayabilmesi için bir formül veya kural geliştiriniz? **Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

Bu sorunun çözümünde, sadece verilen gün için sayfa sayısının istenmesine, Tamer'in ilk gün kaç sayfa kitap okuduğuna ve her gün bir önceki güne kıyasla 3 sayfa daha fazla kitap okuduğu gibi kritik bilgilere dikkat edilmesi gerekmektedir. Bu soruya ilişkin yazılı sınav bulgularının özeti Tablo 12' de sunulmuştur.

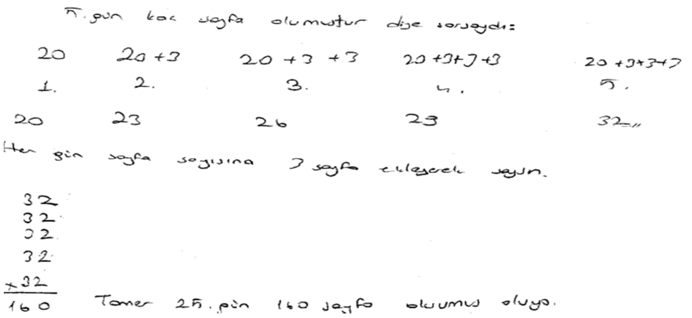
Tablo 12. Kitap okuma problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız	Sorunun yanlış anlaşılması	**1**	**0.5**
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız	23 sayfadan başlayarak sayma	**1**	**0.5**
		Sadece 3,6, 9, 12, … şeklindeki artışları organize etme	**2**	**1**
YORDAMA	**Başarılı**	**Sadece 25. gün için teker teker sayarak veya işlemler yoluyla doğru sonuca ulaşma**	**24**	**11.4**
	Başarısız	Anlamsız çözümler veya yanlış hesaplamalar	**24**	**11.4**
		İlk adımı 23 alarak veya yanlış artışlarla sonucu 95 bulma	**8**	**3.8**
		İlk 5 gün ile 25 gün için doğru orantı kurma	**2**	**1**
YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
GENELLEME	**Başarılı**	**Cebirsel**	**38**	**18.1**
		Cebirsel+sözel	**9**	**4.3**
	Başarısız	İlk günü 23 kabul ederek '*3n+20*' formülünü yazma	**25**	**11.9**
		Yordama doğru formül yanlış	**25**	**11.9**
		Anlamsız sözel veya cebirsel formüller	**19**	**9**
GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**Cebirsel**	**4**	**1.9**
		Sözel	**1**	**0.5**
	Başarısız	Cebirsel	**5**	**2.4**
BOŞ		**Çözüm yok**	**22**	**10.5**

Tablo 12'de görüldüğü gibi başarılı çözümlerin bütünü gözlemleme aşamasını atlamıştır. Bununla birlikte öğrencilerin 1 tanesi (%0.5) soruyu yanlış anladığı için başarısız bir çözüm sergileyerek bu aşamada kalmıştır. Katılımcı öğrencilerin 3 tanesi (%1.5) gözlemlerin organizesi aşamasında kalarak sadece belli günlerde okunan sayfaları organize etmiş ve 25. gün için herhangi bir yorum yapamamıştır. Bu aşamada yine sadece başarısız çözümlerin bulunması da başarılı çözümlerin bu aşamayı atlayarak sonraki aşamalara ilerlediğini göstermektedir.

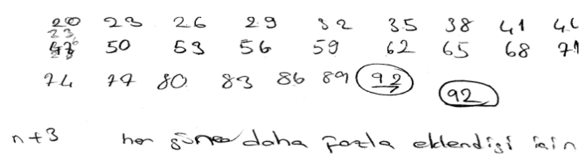
210 öğrencinin 58 tanesi (%27.6) yordama aşamasında kalarak 25. günde okunan sayfa sayısını hesaplamaya çalışmıştır. Tamer'in 25. gün okuduğu sayfa sayısına teker teker sayma ve 4 işlemle hesaplama şeklinde ulaşan başarılı çözümleri bu

aşamada görebilmek mümkündür. Yordama aşamasında kalan başarısız çözümlerin genel sebebini ise anlamsız çözümler oluşturmaktadır. Anlamsız olarak nitelendirilen çözümler, 25. gün için sonucu çağrıştırmayan çözümlerden oluşmaktadır. Ayrıca ilk günü 23 alarak 25. adıma kadar tek tek açma yolunu izleyen çözümlerin yanı sıra oran-orantı mantığını içeren çözümler de bulunmaktadır. Oran-orantı mantığı ile ilgili örnek çözüm şu şekildedir:



Şekil 34. Kitap Okuma Problemi için yordama aşamasında bulunan ve oran-orantı mantığını içeren başarısız çözüm örneği (Ö159).

Şekil 34'te görüldüğü gibi 5. gün okunan sayfadan yola çıkılarak 25. gün okunan sayfa sayısına ulaşılmıştır. Problemde bu mantığın yanlış olma sebebi ise sayfa sayısının her geçen gün artırıldığı konusunun göz ardı edilmesidir. Çünkü son 20 gün, ilk 5 gün okunan sayfadan daha fazla sayfa okunmaktadır. Yordamanın testi aşamasında kalan hiçbir çözüm bulunmamaktadır. Bu aşama, genellikle katılımcı öğrencilerden başarılı çözüm sergileyenler tarafından atlanmıştır. 210 katılımcı öğrencinin 116 tanesi (%55.2) genelleme aşamasında kalarak kitap okuma problemi için formül üretmiştir. Bu aşamada kalan başarısız çözümler ise başarılı çözümlerden daha fazladır. Bu durumun sebebi, başarısızlık sebeplerinden anlaşılabilir. İlk günün 23 alınarak '*3n+20*' formülünün üretilmesi veya yordamanın doğru yapılarak 25. gün için yanlış formüllerin yazılması başarısız çözümlerin sebeplerini oluşturmaktadır. Yordamanın başarılı üretilen formülün başarısız olduğu çözüm örneğine aşağıda yer verilmektedir:



Şekil 35. Kitap okuma problemi için genelleme aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö55).

Şekilde görüldüğü gibi 25. gün okunan sayfa sayısına teker teker yazarak ulaşan öğrenci, bir önceki terimin bir sonraki terimin bulunmasını sağladığı için terime bağlı cebirsel bir formül *(n+3)* üretmiştir. Bu formül, örüntünün genel terimi olmadığından örüntünün herhangi bir teriminin tahmini için yeterli değildir.

Genelleme aşamasında başarılı olan çözümlerin çoğunu ise cebirsel formüller oluşturmaktadır (bakınız, Şekil 36). Ayrıca bu aşamada cebirsel ve sözel formüllerin birlikte olduğu çözümleri de görebilmek mümkündür. Öğrencilerin 10 tanesi (%4.8) genellemenin testi aşamasında kalarak ürettikleri başarılı veya başarısız formülleri test etmiştir. Formüllerin testi öğrenciler tarafından önceki günlerde okunan sayfa sayılarının hesaplanması ile gerçekleştirilmiştir.

Yürütülen mülakatlar esnasında öğrencilerin genellikle başarılı gözlemlerin ardından oluşturdukları organizasyonlarla Tamer'in 25. gün okuduğu sayfa sayısına başarılı bir şekilde ulaştıkları görülmüştür. Ancak Tamer'in *n.* gün okuduğu sayfa sayısı bulunurken genelleme aşamasına kadar gelen öğrencilerin yarısının zorlanarak başarısız formüller ürettiği saptanmıştır. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 13. Mülakata katılan öğrencilerin kitap okuma probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	**HAKAN**	**KORAY**	**LEVENT**	**MAHİR**	**MELİS**	**MİNE**	**ÖZGE**	**RABİA**	**SİNEM**
Gözlemleme	X	X	-	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	-	X	X	X	X	X	X
Yordama	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordamanın Testi	X	-	-	-	X	-	-	-	-
Genelleme	-	X	X	X	X	X	X	X	X
Genellemenin testi	-	X	X	X	-	X	X	X	X

Tablo 13'te görüldüğü gibi Hakan, yordama aşamasına kadar gelmiş ancak Tamer'in *n.* gün okuduğu sayfa sayısını bulamamıştır. Koray, Mahir ve Özge ise sadece yordamanın testi aşamasını atlayıp başarısız bir formül üretmiş ve bu formülü test etmişlerdir. Mine, Rabia ve Sinem yine sadece yordamanın testi aşamasını atlayarak tüm aşamaları başarılı bir şekilde sergilemişlerdir. Levent, genelleme aşamasına kadar sadece yordama aşamasını gerçekleştirmiş ancak bu aşamaya başarısız bir formül üreterek erişmiştir. Melis ise organizasyon ve yordamayı ilk başta başarısız bir şekilde sergilemiştir. Ancak yordamanın testi aşamasında hatasını fark ederek başarılı bir formül üretmeyi başarmıştır. Bu problemde en çok sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları gözlemleme, yordama ve genelleme iken en az sergilenen aşama yordamanın testidir. Ayrıca öğrenciler en çok hataya genelleme ve genellemenin testi aşamalarında; en az hataya ise gözlemleme aşamasında düşmüşlerdir.

Tabloda görüldüğü gibi gözlemleme aşaması, 9 öğrencinin 8'i tarafından sergilenmiştir. Çünkü Levent, gözlemleme aşamasını yansıtmadan pratik bir yolla çözüme ulaşmıştır. Gözlemlerin organizesi aşamasını sergileyen 8 öğrencinin de çözümleri başarılıdır. Başarısız organizenin sebebi, öğrencinin yazdığı örüntüyü yanlış terimden başlatması iken; başarılı organizasyonlarda ise terimler doğru yazılarak ilerideki aşamalara ışık tutmuştur. Başarılı çözümler, okunan sayfa sayısının teker teker doğru bir şekilde yazılması veya gözlemlenen adımlar için sayıların farklı bir şekilde ifade edilmesi (23 yerine 20+3 gibi) şeklinde çeşitlenmektedir. Mine'nin kitap okuma problemi için oluşturduğu organizasyonu gösteren diyalog şu şekildedir **(Diyalog 8)**:

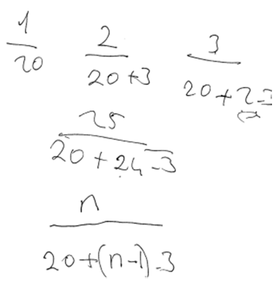
…

Mine: [Kitap okuma probleminin a ve b şıklarını okur]. 25. günün sayfa sayısını bulmak için …1. gün 20 sayfa okumuş, 2. gün 20+3 sayfa okumuş, 3. gün 20+3×2 sayfa okumuş. [Der ve yazar].

Araştırmacı: Peki sayıları neden böyle ifade ettin Mine?

Mine: Neden böyle ifade ettim burada 2 tane 3 vardı. Kolay yoldan yapmak için 2×3 yazdım ve buradaki 2'nin özelliği buradaki 3'ün1 eksiği olması. 3'ün çarpılma sayısı adım sayısının 1 eksiğine eşit olduğuna göre 20 artı 25. gün için söylüyorum. 20+(25-1)×3 bu kadar sayfa okumuştur Tamer.

…



Şekil 36. Kitap okuma problemi için Mine'nin verdiği yazılı açıklama.

Yukarıda yer alan organizasyon, sonraki tümevarımsal düşünce aşamalarının Mine tarafından kolaylıkla sergilenmesini sağlamaktadır. Problemde yordama aşamasında başarılı olan öğrenciler, 2 çeşit çözüm yolu sergilemişlerdir. Bunlardan ilki,

25. adıma kadar örüntüyü tek tek devam ettirme iken; 2.'si ilk gün ile kalan günlerde okuduğu sayfa sayısını toplama yoludur. Bahsedilen ilk yol 9 öğrencinin 6'sı tarafından, 2. yol ise 2 öğrenci tarafından sergilenmiştir. Yordama aşamasında karşılaşılan başarısızlık sebepleri ise sorunun yanlış anlaşılarak ilk terimin yanlış yazılması veya 25. gün yerine 26. günün hesaplanmasıdır.

Yordamanın testi aşaması ise 2 öğrenci tarafından sergilenmiştir. Bu öğrencilerden ilki olan Hakan, önce teker teker sonuca gitme yolunu denemiş, ardından 5'er 5'er ve 10'ar 10'ar sayma yoluyla bulduğu sonucun doğruluğunu göstermiştir. Bu durum öğrencinin 25. adıma ulaşmak için kullandığı2 yolun da uyuştuğunu göstermektedir. Yordamanın testini yapan diğer bir öğrenci Melis ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir **(Diyalog 9)**:

> **…**[Melis, adımları tek tek açınca 95 sonucunun yanlış olduğunu fark ederek çözümüne devam eder].
>
> **Araştırmacı:** 25. terimin 92 olduğunu görüyorsun peki formülündeki hata nedir?
>
> **Melis:** ….formülümdeki hata ben 95 bulmuşum şimdi en kısa yoldan 95'ten 3'ü çıkarırsam doğru sonuç olur.
>
> **…**

Görüldüğü gibi Melis, yordamayı test ederken deneme-yanılma yolunu tercih etmiştir. Hatasının nerede olduğunu anlamadan sadece sonuca odaklanarak sonuçtan 3 rakamını çıkarmanın yeterli olduğuna kanaat getirmiştir. Bu durum yordamayı test ederken önceki aşamalara nasıl döndüğünü veya öğrencinin çözümünü kontrol etme davranışındaki eksikliği göstermektedir.

Genelleme aşamasında ise terime bağlı formüllerin yazılması, doğru formülün birkaç deneme ile bulunması şeklinde başarısız; yordama ve gözlemleme aşamasındaki bütünsel bakışın formüle yansıtılması, aritmetik değişen örüntü formülünün yerinde kullanılması şeklinde başarılı çözümler görülmüştür. Bu çözümlerden terime bağlı formüllerin yazılması, teker teker 25. adıma kadar yazarak sonuca ulaşmaya çalışan öğrenciler tarafından gösterilen bir çözümdür (bakınız, Şekil 35). Genelleme aşamasında bütünsel bir bakışla formül üreten Levent'in sergilediği düşünce ise aşağıdaki diyalogda görülmektedir **(Diyalog 10)**:

> **…**
>
> **Levent**: [Kitap okuma probleminin b şıkkını okur]. Ben Tamer'in ilk gün okuduğu sayfa sayısına *n* dedim. İlk gün okuduğu sayfa belli olduğu için 25 değil 24 günü hesaba kattım. Her gün 3 sayfa fazla okuduğu için çarpı 3 dedim. Formülümde de ilk

güne *n* dedim daha sonra 24, 25'in 1 eksiği olduğu için ilk gün belli o zaman burada $n+(n-1)\times 3$ demem gerekiyor. [Levent ifadeyi düzenlemeye başlar]. $4n-3$ olur.

Araştırmacı: $4n-3$ olarak formülü bulmuş oldun. Peki, 1. gün 20 okuduysa 2. gün kaç sayfa okuması gerekiyor?

Levent: 23.

Araştırmacı: Peki bu ifadeleri formülde yerine koyduğunda doğru oluyor mu?

Levent:…olmuyor. [Der ve formüldeki hatayı bulmaya çalışır].

Araştırmacı: Peki bir şey soracağım buradaki *n* ile şuradaki *n* [$n+(n-1)\times 3$ formülündeki *n*'leri göstererek] aynı şey mi acaba sence Levent?

Levent: [Biraz düşünür]. Hayır, buradaki *n* yerine başka bir bilinmeyen koymamız lazım. Orası *n* olmaz yani. İlk yazdığım *n* ifadesi ilk gün okunan sayfa sayısına eşittir. 20'ye eşit. [Formülü tekrardan yazar]

Levent: O zaman $20+(3x-3)$olur.

…

Diyalog 10'da görüldüğü gibi Levent, en başta '*n*' ifadesini ilk gün okunan sayfa sayısı olarak yazmıştır. Bu durum üretilen formülün yanlış olmasına neden olsa da belli kontrollerle hatasını anlayan Levent, '*n*' yerine 20 yazarak bu hatasını düzeltmiştir. Ayrıca Levent, oluşturduğu yeni formülde '*x*' harfini kullanmayı tercih etmiştir. Bu doğrultuda harflerin farklı yazılmasının önemsiz olduğu ve öğrenci açısından cebire yüklenen anlamın semboldeki değişime bağlı olmayıp formülün içeriği ile ilgili olduğu görülmektedir.

Genellemenin testi aşaması, mülakata katılan 3 öğrenci tarafından başarılı, 4 öğrenci tarafından başarısız bir şekilde sergilenmiştir. Genelleme hatasına düşen 4 öğrencinin 2 tanesi yaptıkları kontroller sonucu formüllerini düzelterek doğru formüllere ulaşırken; kalan 2 öğrenci formüllerindeki hatayı görememiştir. Bu aşama, öğrenciler tarafından genellikle ürettikleri formüllerin örüntünün önceki adımlarında kontrol edilmesi şeklinde sergilenmiştir.

4. 4. SAYI MAKİNESİ PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen sayı makinesi problemine aşağıda yer verilmektedir:

Giren Sayı	Çıkan Sayı
1	2
2	5
3	8
4	11

Matematikçiler ‘Sayı Makinesi’ isminde bir makine üretmişlerdir. Bu makine, içerisine giren sayıyı farklı bir sayıya çevirip çıkarmaktadır. Yukarıdaki tabloda makineye atılan ve makineden çıkan sayılardan bazılarına yer verilmiştir.
Buna göre;
a) Sayı makinesine 50 atılsaydı hangi sayı çıkardı bulunuz ve **sonucu nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.**
b) Makineye herhangi bir sayı (*n* sayısı) atılsaydı hangi sayı çıkardı? **Bu sayıyı bulmak için bir formül veya kural üretiniz ve bu kuralın mantığını açıklayınız.**

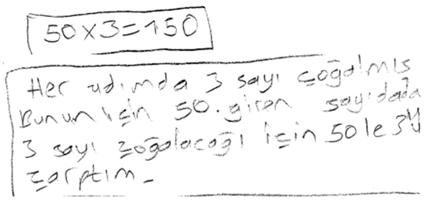
Sayı makinesi probleminde verilen tablodaki giren ve çıkan sayıların dikkatle incelenmesi ve ardından bu sayılar arasında hem toplamsal hem de çarpımsal ifadeleri birlikte içeren ‘*3n-1*’ ilişkisinin bulunması gerekmektedir. Ayrıca oran-orantı mantığı ile çözülmesi mümkün olmayan bu soruda 50. adımın bulunmasını kolaylaştıran nokta, giren ve çıkan sayılar arasındaki ilişkinin bulunmasıdır. Soruda genellemeyi sağlayan nokta ise *n*. terimi bulduran bir formülün üretilmesidir. Aşağıda sayı makinesi probleminin yazılı sınav analizini gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 14. Sayı makinesi problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	**Başarılı**	**Sadece verilen adımlar için giren ve çıkan sayılar arasındaki farka bakma**	**2**	**1**
	Başarısız	Verilen terimler için giren ve çıkan sayıları çarpma veya sadece aritmetiksel artışları yazma	**2**	**1**
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**	**Giren ve çıkan sayılar arasındaki farkı belli bir terime kadar düzenli olarak yazma**	**2**	**1**
	Başarısız	Adımları teker teker hatalı yazma	**1**	**0.5**
YORDAMA	**Başarılı**	**Adımları 50. adıma kadar teker teker sayma**	**13**	**6.2**
		4 işlem yoluyla sadece 50. adımı bulma	**9**	**4.3**
	Başarısız	Adımları teker teker yazarken veya 4 işlem yaparken hataya düşme	**25**	**11.9**
		Sadece artan sayılara bakarak sonuca ulaşma (giren ve çıkan sayılar)	**2**	**1**
		Anlamsız	**8**	**3.8**
YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**	**Belli bir düşünceye göre önceki adımları kontrol etme**	**1**	**0.5**
	Başarısız		**0**	**0**
GENELLEME	**Başarılı**	**Cebirsel**	**48**	**22.9**
		Sözel	**4**	**1.9**
		Sözel+cebirsel	**12**	**5.7**

	Başarısız	Cebirsel	**14**	**6.7**
		Yordama doğru formül yanlış (veya standart bir formül değil)	**11**	**5.2**
		Anlamsız	**4**	**1.9**
		Sözel	**3**	**1.4**
GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**Sözel**	**1**	**0.5**
		Cebirsel	**26**	**12.4**
		Cebirsel+sözel	**1**	**0.5**
	Başarısız	Cebirsel	**1**	**0.5**
BOŞ	**Çözüm yok**		**20**	**9.5**

Tablo 14'te görüldüğü gibi katılımcı öğrencilerin 4 tanesi (%2) gözlemleme aşamasında kalarak sonraki aşamalara geçememiştir. Öğrencilerin 3 tanesi (%1.5) gözlemlerin organizesi aşamasında kalarak 50. adıma ulaşamamıştır. Öğrencilerin 57 tanesi (%27.2) yordama aşamasında kalarak 50. adıma ulaşmaya çalışmıştır. Yordama aşamasında kalan başarısız çözümler başarılı çözümlere göre daha fazladır. Başarısız çözümlerin sebepleri, adımların hatalı bir şekilde teker teker yazılması veya 4 işlemle hatalı hesapların yapılmasıdır. Hatalı hesaplarla ilgili örnek çözüm şu şekildedir:



Şekil 37. Sayı makinesi problemi için yordama aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö206).

Şekilde görüldüğü gibi 50. adıma kadar 49 yerine 50 defa artış olduğunu düşünen Ö206, 50×3 ifadesini kullanmıştır. Yordamada yapılan bu hata, öğrencinin gözlemlerindeki hatadan ve organizasyonundaki eksiklikten kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin 1 tanesi (%0.5) yordamanın testi aşamasında kalarak belli kontrollerle adımları teker teker ileriye götürmeye çalışmıştır. Öğrencilerin büyük bir kısmı (%45.7) genelleme aşamasında kalarak sayı makinesi problemi için formül üretmeye çalışmıştır. Bu aşamada bulunan başarılı çözümlerin başarısız çözümlerden fazla olduğu görülmektedir. Başarılı çözümlerin genelini üretilen cebirsel formüller oluştururken; bu aşamada kalan başarısız çözümleri ise üretilen hatalı cebirsel formüller veya yordamanın doğru formülün hatalı yazıldığı çözümler oluşturmaktadır.

Öğrencilerin 29 tanesi (%13.9) genellemenin testi aşamasında kalarak ürettikleri formüllerin testini gerçekleştirmiştir. Bu aşamada bulunan başarılı çözümler, başarısız çözümlerden fazladır. Başarılı çözümlerin genelini, genelleme aşamasında üretilen başarılı cebirsel formüllerin testi oluşturmaktadır. Bu doğrultuda genelleme aşamasının genellemenin testi aşamasını etkilediği sonucuna varılabilir.

Yürütülen mülakatlar esnasında öğrencilerin tamamı giren ve çıkan sayıları başarılı bir şekilde gözlemleyerek organizasyonlarını başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Sayı makinesine '50' atıldığında çıkacak sayıyı öğrencilerin çoğu başarılı bir şekilde hesaplamıştır. Ancak sayı makinesine atılacak herhangi bir sayı için formül üretme noktasında öğrencilerin büyük bir kısmı zorlanarak başarısız çözümler sergilemiştir. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 15. Mülakata katılan öğrencilerin sayı makinesi probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	HAKAN	KORAY	LEVENT	MAHİR	MELİS	MİNE	ÖZGE	RABİA	SİNEM
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordama	X	X	-	X	X	X	X	X	X
Yordamanın Testi	-	-	-	-	X	X	X	X	X
Genelleme	-	X	X	X	X	X	X	X	X
Genellemenin testi	-	X	X	X	X	-	X	X	X

Tablo 15'te görüldüğü gibi mülakata katılan öğrencilerden Hakan, yordama aşamasına kadar gelebilmiş ve sonraki aşamalara geçememiştir. Koray ve Mahir yordamanın testi aşaması hariç diğer aşamaları sergilemişler ancak genelleme ve genellemenin testi aşamalarında hataya düşmüşlerdir. Levent yordama ve yordamanın testi aşamasını atlayarak başarılı bir genellemeye ulaşırken; Melis ve Özge yordama aşamasından itibaren başarısız çözümler sergilemişlerdir. Mine, genellemenin testi aşaması haricindeki tüm aşamaları, Rabia ise tümevarımsal bütün aşamaları başarılı bir şekilde sergilemiştir. Sinem ise bütün aşamaları sergilerken başarısız bir formül üreterek bu formülü test etmiştir. Öğrencilerin hataya en çok düştükleri aşamalar yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi iken; hataya en az düştükleri aşamalar gözlemleme ve gözlemlerin organizesidir.

Gözlemleme aşaması tüm öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Bu aşamada genel olarak giren ve çıkan sayılara bakan öğrenciler yordama aşaması için hazırlık yapmaya başlamışlardır. Örneğin Koray'ın gözlemini anlatan diyalog şu şekildedir **(Diyalog 11**):

…

Koray: [Sayı makinesi problemini okur].

Araştırmacı: Mesela a şıkkını nasıl çözersin Koray?

Koray: [Düşünür]…..Giren…Çıkan…Girenler 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayma sayısı olarak gitmiş zaten. Ondan sonra çıkan sayılar da 2, 5, 8, 11, 14.

Araştırmacı: Çıkan sayıları neden 2, 5, 8, 11, 14,… şeklinde devam ettirdin?

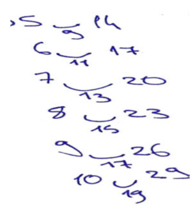
Koray: Çünkü bunlar 3'er3'er gitmiş. Şimdi giren sayı ile çıkan sayı arasındaki fark 1'dir. 1 ve 2'nin arasındaki fark1'dir. 2 ile 5'in arasındaki fark 3'tür. 3 ile 8 arasındaki fark 5'tir. 4 ile 11 arasındaki fark ise 7'dir. Bunlar 1, 3, 5, … tek sayılar şeklinde gidiyor.

…

Şekil 38. Sayı makinesi problemi için Koray'ın verdiği yazılı açıklama.

Diyalog 11'de görüldüğü gibi Koray, giren ve çıkan sayıları tek tek inceleyerek önce giren sonra çıkan sayılar arasında bir bağlantı kurmuştur. Ardından teker teker giren-çıkan sayılar arasındaki farka bakarak bu farkların tek sayılar örüntüsü olduğu sonucuna varmıştır. Koray, gözlemleri yoluyla sayı örüntüsünü ilerletmeye başlamıştır.

Gözlemlerin organizesi tüm öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Bu aşamada verilen sayıların genellikle öğrenciler tarafından tekrar yazılarak sayılar arasındaki ilişkinin araştırıldığı görülmüştür. Aşağıda Özge'nin sayı makinesi problemi için oluşturduğu organizasyona yer verilmektedir:



Şekil 39. Sayı makinesi problemi için Özge'nin oluşturduğu organizasyon.

Şekilde de görüldüğü gibi Özge, giren ve çıkan sayılar arasındaki farkı, verilen adımlar için yazmış ve ardından sonraki adımlar için örüntüyü devam ettirmeye çalışmıştır. Özge, giren-çıkan sayılar arasında, girenlerin kendi içinde, çıkanların da kendi içindeki farklarını tek tek bildiği için örüntüyü devam ettirebilmiştir. Özge, bildiği bu farklarla önceki adımlara bağlı olarak sonraki adımları yazabilmektedir.

Yordama aşaması ise mülakata katılan 9 öğrencinin 6'sı tarafından başarılı bir şekilde sergilenirken bir öğrenci tarafından sergilenmemiş, 2 öğrenci tarafından ise başarısız bir şekilde sergilenmiştir. Başarılı çözümlerde izlenen yordama yöntemleri genellikle giren ve çıkan sayılar arasındaki farklara bakarak teker teker 50. adıma kadar sayma, 50. adıma kadar 49 aralıktan hareketle ilk terimle aralık sayısının artışını toplama ve aritmetik değişen örüntü formülü mantığından yararlanmaktır. Yordama aşamasında başarısızlık nedenlerinden biri yürütülen oran-orantı mantığıdır. Bu mantıkla yapılan çözümler '5. adımda 14 ise 50. adımda 140 olur' düşüncesinden hareketle oluşturulmaktadır. Bu çözüm türündeki mantık hatası, formülde toplama işleminin de olacağı göz ardı edilerek sadece çarpımsal bir çözümün yapılmasından kaynaklanmaktadır. Çünkü 5 ile 14 arasında '3 katının 1 eksiği' kuralı varken; 50 ile 140 arasında böyle bir kural yoktur.

Yordamanın testi aşaması ise 9 öğrencinin 5'i tarafından doğru bir biçimde işletilmiştir. Bu aşamanın diğer sorulara nazaran daha çok sergilenmesi sorunun işlemsel boyutuyla ilişkilendirilebilir. Genelleme aşaması, 8 öğrenciden 5'i tarafından doğru ve 3'ü tarafından yanlış bir şekilde sergilenmiştir. Aşamanın doğru sergilenme nedenleri, sayılar arasındaki ilişkinin doğru organizesi, aritmetik değişen örüntü formülünün doğru bir şekilde uygulanması iken; yanlış sergilenme nedenleri ise terime bağlı '$n+2$, $2n+1$' şeklinde formüllerin üretilmesi, deneme-yanılma yoluyla pek çok anlamsız formülün üretilmesi şeklindedir. Bu aşamanın sergilenmeme nedeni ise 'n' harfine anlam yüklenememesidir ki bu durum aşağıdaki diyalogdan anlaşılmaktadır (**Diyalog 12**):

…[Araştırmacı belli sorularla öğrencinin giren ve çıkan sayılar arasındaki ilişkiyi görmesini sağlar ve Hakan, çözümüne devam eder].

Araştırmacı: 2 kaç artınca 3 olur?

Hakan: 1.

…

Araştırmacı: Peki 7 kaç artmış ve 13 olmuş?

Hakan: 6.

Araştırmacı: Bu durumda *n* kaç artar?

Hakan: İşte bana buradaki sayıları vermeleri gerekiyor. Örneğin sayı, 15 olsa ben kaç artarak 15 olduğunu bulabilirdim.

Araştırmacı: Peki örneğin sayı 15 olsaydı kaç artarak bu sayı bulunmuş olurdu?

Hakan: 15 olsa (hesaplar) 8**.**

Araştırmacı: Neden?

Hakan: 7'den13, 6 artarak oluşmuş. 8'e7 eklemek gerekiyor ki 15 olsun. Ondan sonra 9 mesela 8 artarak 17 olurdu diye düşünüyorum. Bana giren veya çıkan sayıları vermeleri gerekiyor ki ben *n*'i bulayım.

Araştırmacı: Yani *n*'i muhakkak bir sayı olarak görmen gerektiğini düşünüyorsun öyle mi?

Hakan: Evet.

…

Görüldüğü gibi '*n'* harfi Hakan için herhangi bir sayıyı ifade etmemektedir. Hakan ise kendisine bir sayı verilirse doğru sonuca ulaşabileceğini düşünmektedir. Görüldüğü gibi cebirsel manada genellemelerin yapılabilmesi için harfe verilen anlamı çözebilmek oldukça önemlidir. '*n'* ifadesi terime bağlı olarak formül üreten yani önceki terimi bilerek sonraki terimi bulabilen öğrenciler için mutlaka bilinmesi gereken bir sayı anlamına gelmektedir. Aşağıdaki diyalog, Mine'nin sayılardan yola çıkarak '*n'* harfine yüklediği anlamı göstermektedir **(Diyalog 13)**:

…

Mine: ….buradan şöyle bir şey yapabiliriz. 3 girince 8 çıkıyor ya 2+3+3=8 yani bunların önceki sayı ile toplamı aradaki sayıyı veriyor.

Araştırmacı: Peki bu sorunun b şıkkını nasıl çözersin Mine?

Mine: b şıkkı için şöyle derim ben giren sayıya *n* dersem ….$n+(n-1)+n$.

Araştırmacı: Yani giren *n* ise bir önceki ile topladın artış miktarını buldun sonra…

Mine: Tekrar o sayıyla topladım.

Araştırmacı: Bu ifadeyi düzenler misin?

Mine: [İfadesini düzenleyerek tekrardan yazar] $2n+n-1=3n-1$. Böyle oluyor yani.

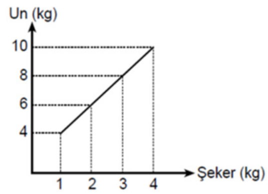
Araştırmacı: $3n-1$ formülüne ulaşmış oldun.

…

Diyalog 13'te görüldüğü gibi sayılar arasındaki ilişkiden yola çıkan Mine, cebirsel bir formül üretmiştir. Bu noktada Mine, sayılara yüklediği anlamı harflere yansıtmıştır. Genellemenin testi aşaması ise 7 öğrenci tarafından sergilenmiştir. Bu öğrencilerden 4 tanesi oluşturduğu başarısız formülü test etmiştir ancak bu 4 öğrenci, hatalı olduğunu anladıkları formüllerde herhangi bir düzeltme yapmadan problem çözümüne son vermiştir. Öğrencilerden 1 tanesi bulduğu hatalı formülün doğrusuna bu formülü birkaç kez test ederek deneme yanılmalar yoluyla ulaşmıştır. Öğrencilerden 2 tanesi ise ürettikleri başarılı formülleri, örüntünün verilen adımlarında kontrol etmiştir.

4. 5. PASTA PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen pasta problemine aşağıda yer verilmektedir:



Tecrübeli bir aşçı bir pastanın kıvamında olması için un ve şekerin yukarıdaki doğrusal grafikte verildiği gibi olması gerektiğini söylemiştir. Bu grafiğe göre;

a) Aşçı 50 kg şekere kaç kg un kullanırsa kıvamında pastalar elde edebilir? **Sonucu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

b) Aşçı herhangi miktardaki (*n* kg) şeker için gereken un miktarını içeren pratik bir tarif vermek istiyor. **Un ve şeker arasındaki ilişkiyi gösterecek olan pratik tarif için cebirsel bir kural veya formül bulunuz ve bulduğunuz kuralın mantığını açıklayınız** (YÖK, 2010-YGS' de çıkan 28. matematik sorusundan uyarlanmıştır).

Pasta problemi, sayı makinesi problemiyle içeriksel açıdan aynıdır; çünkü sayı makinesi probleminde tablo şeklinde sunulan bilgiler, pasta probleminde grafikle sunulmuştur. Grafikte x ve y eksenlerinde belli değerlerin verilmiş olması, bu grafiğin bir örüntü gibi yorumlanmasını ve ardından bu değerler arasında bir ilişki kurulmasını gerektirmektedir. Kurulan ilişki ile de örüntünün 50. ve n. adımına kadar ulaşılması beklenmektedir. Aşağıda pasta probleminin yazılı sınav analizini gösteren tabloya yer verilmektedir:

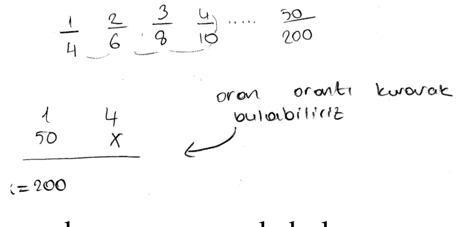
Tablo 16. Pasta problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	Başarılı	Sadece verilen adımlar arasındaki ilişkiye bakma	3	1.4
	Başarısız		0	0
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	Başarılı		0	0
	Başarısız		0	0
YORDAMA	Başarılı	50. adım için tahminlerle ve işlemlerle doğru sonuca varma	4	1.9
		Teker teker sayarak 50. adıma ulaşma	2	1

	Başarısız	Oran-orantı ile yanlış sonuca ulaşma	**21**	**10**
		Yanlış sayma, tahmin veya anlamsız hesaplarla yanlış sonuca ulaşma	**45**	**21.4**
YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
GENELLEME	**Başarılı**	**Sözel**	**4**	**1.9**
		Cebirsel	**41**	**19.5**
		Sözel+cebirsel	**8**	**3.8**
	Başarısız	Cebirsel	**28**	**13.3**
		Sözel	**1**	**0.5**
		Doğru yordama yanlış formül	**3**	**1.4**
GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**Cebirsel**	**13**	**6.2**
		Cebirsel+sözel	**1**	**0.5**
	Başarısız		**0**	**0**
BOŞ	**Çözüm Yok**		**36**	**17.1**

Tablo 16'da görüldüğü gibi katılımcı öğrencilerin 3 tanesi (%1.4) gözlemleme aşamasında kalarak sonraki aşamalara geçememiştir. Bu başarılı 3 çözüm, sadece verilen adımların gözlemlenerek adımlar arasındaki ilişkinin incelenmesini içermektedir. Nitekim adımlar arasında belli bir ilişki kurulamadığı için çözüm gözlemleme aşamasında bırakılmıştır.

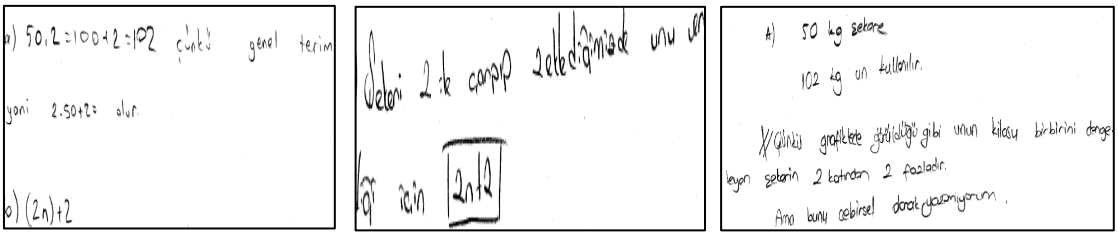
Katılımcı öğrencilerin hiçbiri gözlemlerin organizesi aşamasında bulunmamaktadır. Bu durumda başarılı veya başarısız çözümlerin tamamının bu aşamayı atladığı görülmektedir. Öğrencilerin 72 tanesi (%34.3) yordama aşamasında bulunarak 50 kg şeker için ne kadar un gerektiğini hesaplamıştır. Bu aşamada başarısız çözümler başarılı çözümlere göre daha fazladır. Başarılı çözümlerin 50 kg şeker için ne kadar un gerektiği sorusuna işlemlerle veya teker teker sayma yoluyla ulaştıkları görülmüştür. Yordama aşamasında bulunan başarısız çözümler ise oran-orantı veya yanlış hesaplama gibi yaklaşımlar içermektedir. Oran-orantı mantığını içeren çözüm örneğine aşağıda yer verilmektedir:



Şekil 40. Pasta problemi için yordama aşamasında bulunan ve oran-orantı mantığını içeren başarısız çözüm örneği (Ö99).

Şekilde görüldüğü gibi 1. ve 50. adım arasında oran-orantı mantığı ile bağlantı kuran öğrenci, 50 kg şeker için 200 kg un kullanılması gerektiği sonucuna varmıştır. Bu çözümde yordamanın başarısız olma sebebi ise 2. ve 3. adım için kurulan orantının 1. adım için kurulan orantı ile aynı sonucu vermemesidir.

Yordamanın testi aşamasında kalan hiçbir çözüm bulunmamaktadır. Bu durumda genelleme ve genellemenin testi aşamasına kadar gelen çözümlerin tamamı yordamanın testi aşamasını atlamıştır. 210 katılımcı öğrencinin 85 tanesi (%40.4) genelleme aşamasında kalarak verilen örüntünün genel terimini bulmaya çalışmıştır. Bu aşamada bulunan başarılı çözümlerin başarısız çözümlerden fazla olması pasta probleminin başarılı bir şekilde formülüze edildiğini göstermektedir. Bu aşamada görülen başarılı çözümleri ilk sırada cebirsel formüller oluştururken; başarılı çözümler arasında 2. sırayı sözel+cebirsel; 3. sırayı ise sözel formüller oluşturmaktadır. Aşağıda başarılı çözümlerin 3'ünün de yer aldığı şekle yer verilmektedir:



Şekil 41. Pasta Problemi için genelleme aşamasında bulunan ve soldan sağa sırasıyla cebirsel, cebirsel+sözel ve sözel formülleri içeren başarılı çözümler (Ö28, Ö47, Ö19).

Şekil 41'de görüldüğü gibi un ve şeker arasında bağlantı kuran öğrenciler, bu bağlantıyı formüle dökmeye çalışmışlardır. Soldan sağa sırasıyla Ö28 ve Ö47, kurdukları bağlantıyı '*2n+2*' şeklinde cebirsel bir formülle ifade ederken, Ö19 '*unun kilosu birbirini dengeleyen şekerin 2 katından 2 fazladır*' şeklinde sözel bir formülle ifade etmiştir. Ayrıca Ö19, '*cebirsel olarak yazamıyorum*' diyerek sözel formülü oluşturma nedenini açıklamıştır.

Genelleme aşamasındaki başarısız çözümlerin genelini ise yine cebirsel genelleme formülleri oluşturmaktadır. Ayrıca yordamanın doğru formülün yanlış olduğu ve sözel genellemenin yer aldığı çözümleri de bu aşamada görebilmek mümkündür. Öğrencilerin 14 tanesi (%6.7) genellemenin testi aşamasında kalarak üretilen formülü test etmiştir. Bu aşamada sadece başarılı çözümlerin bulunması, sadece başarılı genelleme formüllerinin kontrol edildiğini göstermektedir.

Yürütülen mülakatlar esnasında gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamalarının 2 öğrenci (Mine ve Sinem) tarafından atlandığı, kalan öğrenciler tarafından da başarılı bir şekilde sergilendiği görülmüştür. 50 kg şeker için gereken un miktarı ise önceki aşamaları atlayan 2 öğrenci (Mine ve Sinem) tarafından yanlış, kalan öğrencilerin büyük bir çoğunluğu tarafından doğru bir şekilde hesaplanmıştır. *'n'* kg şeker için gereken un miktarı için ise öğrencilerin çoğu başarısız formüller üreterek çözümü tamamlamıştır. Ayrıca yordamanın testi ve genellemenin testi aşamalarının sayı makinesi probleminde olduğu gibi diğer aritmetiksel sorulara nazaran daha çok sergilendiği tespit edilmiştir. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 17. Mülakata katılan öğrencilerin pasta probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	**HAKAN**	**KORAY**	**LEVENT**	**MAHİR**	**MELİS**	**MİNE**	**ÖZGE**	**RABİA**	**SİNEM**
Gözlemleme	X	X	X	X	X	-	X	X	-
Gözlemlerin organizesi	X	X	X	X	X	-	X	X	-
Yordama	X	X	-	X	X	X	X	X	X
Yordamanın Testi	-	-	-	-	X	X	X	-	X
Genelleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Genellemenin testi	X	X	X	X	X	X	X	-	-

Tablo 17'de görüldüğü gibi Hakan, yordamanın testi haricindeki tüm aşamaları başarılı bir şekilde sergilemiştir. Koray ve Mahir yaptıkları yordamayı test etmeden başarısız bir formüle ulaşarak ardından bu formülü test etmişlerdir. Levent, yordama ve yordamanın testi aşamalarını atlayarak başarılı bir formül üretmiştir. Melis, gözlemlerini ve organizelerini tamamlayarak sonraki aşamaları başarısız bir şekilde sergilemiştir. Mine ise gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamalarını atlayarak sonraki aşamaları başarısız bir şekilde tamamlamıştır. Özge, tüm aşamaları başarılı bir şekilde sergilerken; Rabia yaptığı yordamayı veya genellemeyi test etmeden süreci tamamlamıştır. Sinem ise gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamalarını atlayarak geldiği yordama aşamasını ve ardından yordamanın testi, genelleme aşamalarını başarısızlıkla sergilemiştir. Ayrıca Sinem, oluşturduğu hatalı formülü test etmeden süreci tamamlamıştır. Görüldüğü gibi pasta probleminde mülakata katılan öğrencilerin en çok sergilediği aşamalar, yordama ve genellemedir. Öğrencilerin en çok hataya düştükleri aşama genelleme iken; en az hataya düştükleri aşamalar gözlemleme ve gözlemlerin organizesidir.

Gözlemleme aşamasının 7 öğrenci tarafından başarılı bir şekilde sergilendiği görülmektedir. Bu aşamanın başarılı bir şekilde sergilenme nedeni, verilen grafiğin dikkatle gözlemlenmesi ve yorumlanmasıdır. Bu aşamanın 2 öğrenci tarafından sergilenmeme sebebi ise öğrencilerin doğrudan oran-orantı kurmaya yönelmeleridir. Un ve şeker arasındaki aritmetiksel farklara bakarak gözlem yapan Mahir ve araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir **(Diyalog 14)**:

…

Mahir: [Pasta probleminin a şıkkını okur].

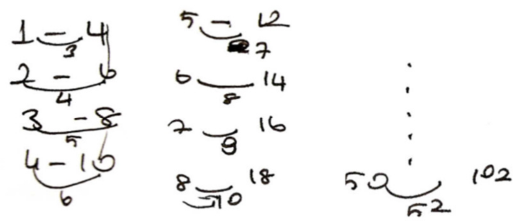
Araştırmacı: Bu problemi nasıl çözersin Mahir? 50 kg şeker için ne kadar un kullanılmış?

Mahir: Grafikte gördüğüm şekilde 1'de 4 kullanılmış, 2'de 6,3'te8, 4'te 10.[Giren ve çıkan sayıları göstererek]**.** ….bunların arasında 3 fark var. Burada 4, burada 5, burada 6 devam edip gidiyor.

Araştırmacı: Sayılar arasındaki farka baktın değil mi?

Mahir: Evet. Giren sayı ile bulduğum fark arasında 2 fark var.

…



Şekil 42. Pasta problemi için Mahir'in verdiği yazılı açıklama.

Görüldüğü gibi Mahir, gözlemlerini verilen sayılar arasındaki farka bakarak gerçekleştirmiştir. Ayrıca gözlemlerini organize ederek bulduğu fark ile giriş sayıları arasında kurduğu ilişki yoluyla 50 kg şeker için gereken un miktarına ulaşmıştır. Mülakata katılan 9 öğrencinin 7 tanesi gözlemlerini grafiği devam ettirme, tablo oluşturma, adım ile terim arasında ilişki kurma gibi yollarla organize etmiştir. Yordama aşamasını atlayan 1 öğrenci varken; geri kalan 8 öğrenci bu aşamayı sergilemiştir. Bu aşamayı başarılı bir şekilde sergileyen 5 öğrenci 50. adıma kadar tek tek açma, şeker ve un arasında verilen adımlar için basit bir ilişki bulma (her adımda şeker ve un arasındaki 2 kg farkı görerek), 50 kg şeker için gereken un miktarını doğrudan hesaplayabilme şeklinde çözümler geliştirmiştir. Başarısız çözümlerin gözlemleme ve organizasyon yapmadan doğrudan çıkarımlarda bulunma, oran-orantı ile 50 kg şeker için ne kadar un gerektiğini bulma, doğrudan bir sayı vererek cevabı söyleme şeklinde çeşitlendiği görülmektedir. Gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamalarını atlayarak doğrudan yordama aşamasına geçen Mine ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir (**Diyalog 15**):

…

Mine: [Pasta probleminin a ve b şıklarını okur]. Buradan oran-orantı kurabilirim. Şimdi buradan rastgele sayılar seçelim. ….un miktarı 10 olsun, şeker miktarı 4 olsun. 50 kg şeker için istiyordu. Buna *x* dersek 4 ve 50'yi sadeleştirirsek 2, 25 ve 125 [Der ve orantıyı kurar].

Araştırmacı: 125 kg olarak buldun.

Mine: 125 kg un gerekiyormuş**.**

Araştırmacı: Peki aynı orantıyı bir de 1kg ve 4 kg şeker için oluşturabilir misin?

Mine: 4 kg un, 1 kg şeker eşittir 50 kg un [der ve orantıyı kurarak sonuca ulaşır ancak sonuçları karşılaştırdığında farklı olduğunu görür]. Olmuyor.

Araştırmacı: Sence sonuçlar neden farklı çıktı?

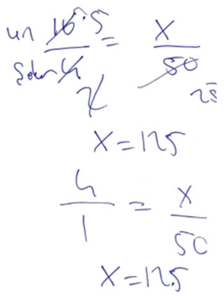
Mine: Bilemiyorum. Ters orantı olabilir mi acaba?Burada hepsinin 2.5 katı olarak görünüyor. Şeker sayısının 2.5 katı un kullanılmış.

Araştırmacı: Yani 4'ün 2.5 katı 10, ama 3'ün 2.5 katı kaç?

Mine: 3'ün 2.5 katı 6 değil değil mi?

Araştırmacı: Değil, çünkü 7.5. 3 kg şeker için 7.5 değil 8 kg un gerekiyor. Başka nasıl bir ilişki kurabilirsin?

…



Şekil 43. Pasta problemi için Mine'nin verdiği yazılı açıklama.

Görüldüğü gibi Mine, 50 kg şeker için ne kadar un kullanılması gerektiğini doğrudan bulmak amacıyla oran-orantı yolunu tercih etmiştir. Ancak terimler arasında sadece çarpımsal bir ilişki olmadığını izlediği yolu test ederek anlamıştır. Çünkü pasta probleminde hem çarpımsal hem de toplamsal bir ilişki (*2n+2 gibi*) bulunmaktadır.

Yordamanın testi aşamasında kalan öğrencilerden 3 tanesi başarısız iken; 1 tanesi başarılıdır. Bu aşamanın açıklığa kavuşması açısından Diyalog 15, Mine'nin yordamayı nasıl kontrol ettiğine güzel bir örnek oluşturmaktadır. Çünkü 4 kg şeker için gereken undan yola çıkarak 50 kg şeker için gereken un miktarını bulan Mine, benzer mantıkla1 kg şeker için gereken undan yola çıktığı zaman aynı sonuca ulaşamamıştır. Bu durumda Mine hatalı bir çözüm yaptığını bu test sayesinde anlamıştır.

Genelleme aşamasında bulunan 9 öğrencinin 4 tanesi, aritmetik değişen örüntü formülünü yazma, un ve şeker arasındaki ilişkiyi deneme-yanılma ile formülüze etme veya gözlemler yoluyla kurulan ilişkiyi formüle dökerek (bakınız, Diyalog 14 ve şekil 42) başarılı çözümleri oluşturmuştur. Beş öğrenci ise çözümlerini deneme-yanılma yoluyla başarısız cebirsel veya sözel formüller üreterek sergilemiştir. Aritmetik değişen örüntü mantığını sergileyen Levent ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir (**Diyalog 16**):

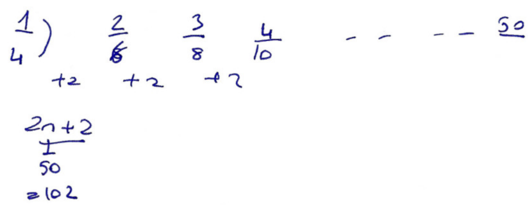
…

Levent: [Pasta probleminin a ve b şıklarını okur]. Ben burada şeker sayılarını adım sayısı olarak yani 1kg şekeri 1. adım, 2 kg şekeri 2. adım kabul ettim. Burada 1kg şekere 4 kg un kullanılmış yani 1. adımda 4, 2. adımda 6, 3. adımda 8, 4. adımda 10. Burada 50 kg şeker deyince bize 50. adımı sormuş oluyor. Burada 2'şer 2'şer artan bir örüntü vardır. O zaman formülü yazarsak 2, *n*'in katsayısı. Formül de $2n+2$ olmuş oluyor. 50. adımda *n*'i yerine koyarsak 102 cevabını bulurum.

Araştırmacı: 102 olarak cevabı buldun. Yani artış miktarına bakarak bir formül ürettiğini ve bu formülden sonuca ulaştığını söylüyorsun değil mi?

Levent: Evet.

…



Şekil 44. Pasta problemi için Levent'in verdiği yazılı açıklama.

Diyalog 16'da görüldüğü gibi Levent, bildiği bir formülden yararlanarak '$2n+2$' ifadesini yazmıştır. Levent, bu formülü probleme uygularken sabit artışın 2 olmasından ve ilk terimden yararlanmıştır. Genellemenin testi aşamasında ise genelleme aşamasında başarısız olan 5 öğrencinin 4 tanesi ürettikleri başarısız formülleri test etmiştir. Öğrencilerin 3 tanesi bu test sonunda başarısız formülleri düzeltmiştir. Bu aşamada bulunan 3 öğrenci ise başarılı formüllerin testini gerçekleştirmiştir. Örneğin şekil 44'te görüldüğü gibi Levent, ürettiği başarılı formülü 50. adım için test etmiştir.

4.6. SANDALYE KAPMACA PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen sandalye kapmaca problemine aşağıda yer verilmektedir:

> Bir okul şenliğinde Sandalye Kapmaca Oyunu'na katılan öğrenciler müzikle birlikte sandalyeler etrafında dönmeye başlamaktadırlar. **Müzik bittiğinde sandalyesiz kalan öğrenci elenmekte ve sandalyeler değiştirilerek farklı sandalyelerle** diğer tura geçilmektedir. 2. tura kalan öğrenciler arasında oyun tekrarlanmakta yine sandalyesiz kalan öğrenci elenip farklı sandalyeler getirilerek kazanan öğrenci belli oluncaya kadar oyun bu şekilde devam etmektedir. Buna göre;
>
> **a)** 21 öğrencinin olduğu bir sandalye kapmaca oyununun her turunda farklı sandalyeler kullanıldığına göre oyun bitiminde **toplam** kaç sandalye kullanılmıştır? **Sonucunuzu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**
>
> **b)** Her turda farklı sandalyelerin kullanıldığı ve *n* tane öğrencinin katıldığı sandalye kapmaca oyununda **toplamda** kaç sandalyeye ihtiyaç vardır? **Bir kural veya formül geliştiriniz ve bu kuralı nasıl geliştirdiğinizi açıklayınız.**

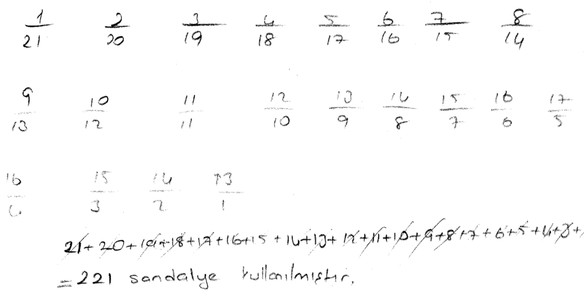
Sandalye kapmaca probleminde öğrencilerin öncelikle soruyu iyi anlamaları gerekmektedir. Çünkü problemde bahsedilen oyunun her turunda sandalyelerin tamamı götürülmekte ve diğer turda gerektiği kadar farklı türdeki sandalyeler getirilerek oyun devam ettirilmektedir. Bu durumda 21 öğrencinin katıldığı sandalye kapmaca oyunu için 20'den 1'e kadar sayıların toplamı kadar sandalye gerekmektedir. *n* öğrencinin bulunduğu sandalye kapmaca oyunu için ise *n-1*'den 1'e kadar sandalyeye ihtiyaç duyulmaktadır. Öğrencilerden kolay formüller üretmelerinin yanı sıra çözümde *n-1*'den 1'e kadar terimleri nasıl ifade ettiklerini ve genelleme ifadesini nasıl oluşturduklarını açıklamaları beklenmektedir. Aşağıda sandalye kapmaca probleminin yazılı sınav analizini gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 18. Sandalye kapmaca probleminin yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız	Yanlış terimden başlayarak sadece yazma	**1**	**0.5**
YORDAMA	**Başarılı**	**21. adım için doğru sonuca ulaşma**	**24**	**11.4**
	Başarısız	Sandalye sayısını 21'den başlatma	**3**	**1.4**
		Yanlış tahminde bulunma veya yanlış, anlamsız hesaplar yapma	**44**	**21**
YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
GENELLEME	**Başarılı**	**Cebirsel**	**16**	**7.6**
		Sözel	**6**	**2.9**
		Cebirsel+sözel	**1**	**0.5**
	Başarısız	Doğru yordama yanlış formül	**32**	**15.2**
		Cebirsel	**25**	**11.9**
		Sözel	**1**	**0.5**
GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız	Cebirsel	**3**	**1.4**
BOŞ	**Çözüm yok**		**54**	**25.7**

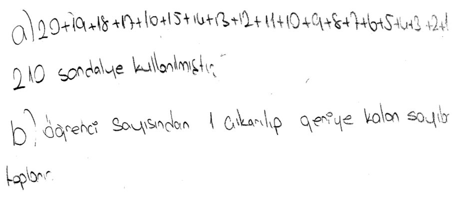
Tablo 18'de görüldüğü gibi gözlemleme aşaması öğrencilerin hiçbiri tarafından kâğıda yansıtılmamıştır. Bunun genel sebebi ise öğrenciler tarafından sorunun okunması ve ardından hemen a şıkkı için çözüm üretilmeye başlanmasıdır. Katılımcı öğrencilerin 1 tanesi (%0.5) gözlemlerin organizesi aşamasında kalarak sonraki aşamalara geçememiştir. Bu aşamada kalan tek başarısız çözüm yanlış terimin organize edilmesi ile oluşturulmuştur. Çünkü 21. turda toplam kaç sandalye kullanılacağının sorulduğu problemde 20 sandalye ile başlatılması gereken örüntü, 21 sandalye ile başlatılarak toplanmaya çalışılmıştır.

Öğrencilerin 71 tanesi (%43.8) yordama aşamasında kalarak sadece 21 öğrencinin katıldığı sandalye kapmaca oyunu için toplam sandalye sayısını hesaplamıştır. Bu aşamada kalan başarısız çözümler, başarılı çözümlerden fazladır. Başarılı çözümler 21. adımın doğru bir şekilde bulunmasını içerirken; başarısız çözümler yanlış tahminlerin yapılması veya örüntünün yanlış bir terimden başlatılarak ilerletilmesi gibi durumları içermektedir. Aşağıda sandalye kapmaca problemi için yordama aşamasında bulunan başarısız çözüm örneğine yer verilmektedir:



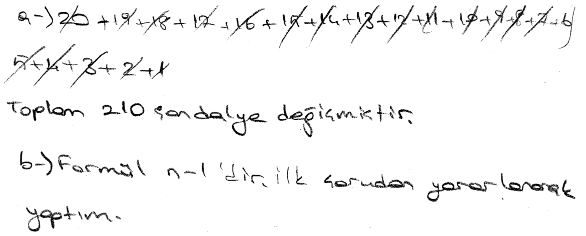
Şekil 45. Sandalye kapmaca problemi için yordama aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö198).

Şekilde görüldüğü gibi Ö198, ilk turdaki sandalye sayısını 21 olarak hesaplamıştır. Bu noktada problemin anlaşılmadan çözüme geçildiği ve her turda yer alan sandalye sayısı yerine kişi sayısının yazılarak çözüme başlandığı görülmektedir. Bu durumda toplam sandalye sayısı yanlış hesaplanarak yordama aşaması hatalı bir şekilde sergilenmiştir. Yordamanın testi aşamasında kalan hiçbir çözüm bulunmamaktadır. Yapılan çıkarımlar test edilmeden sonraki aşamaya geçişler söz konusudur. 210 katılımcı öğrencinin 81 tanesi (%38.6) genelleme aşamasında kalarak *n* kişinin katıldığı sandalye kapmaca oyunu için formül üretmiştir. Bu aşamada bulunan başarılı çözümler sırasıyla cebirsel, sözel ve cebirsel+sözel temsillerle ifade edilen formüllerden oluşmaktadır. Aşağıda sözel formülü içeren başarılı çözüm örneğine yer verilmektedir:



Şekil 46. Sandalye kapmaca problemi için genelleme aşamasında bulunan başarılı çözüm örneği (Ö50).

Şekil 46'da görüldüğü gibi Ö50, harfli ifadeler kullanmadan sözel bir formül üretmiştir. Öğrencinin *'n'* harfini kullanmama sebebi formülü oluşturma konusundaki kuşkusudur. Bu yüzden Ö50, oyundaki öğrenci sayısını hiçbir harfle veya sayıyla temsil etmeden '*öğrenci sayısından 1 çıkarılıp geriye kalan sayılar toplanır*' ifadesiyle formülün nasıl üretileceğini açıklamıştır. Genelleme aşamasında bulunan başarısız çözümlerin genel sebepleri ise yordamanın doğru yapılıp formülün yanlış yazılması veya çözümde cebirsel, sözel içerikli anlamsız formüllerin yer almasıdır. Aşağıda doğru yordama yaparak ardından yanlış bir formül üreten Ö30'un çözümüne yer verilmektedir:



Şekil 47. Sandalye kapmaca problemi için genelleme aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö30).

Şekil 47'de görüldüğü gibi Ö30, doğru yordamada bulunarak 21 kişinin katıldığı sandalye kapmaca oyunundaki toplam sandalye sayısını hesaplamıştır. Ancak *n* kişinin katıldığı oyun için Ö30 tarafından üretilen formül yanlıştır. Çünkü bu formül terime bağlı olarak yazılmış olup tüm adımlara hitap etmeyen bir nitelik taşımaktadır. Üretilmesi gereken formül '(n-1)+ (n-2)…+1' şeklinde olmalı iken şekildeki çözümde sadece formülün tek ifadesi (n-1) kullanılmıştır.

Öğrencilerin 3 tanesi (%1.4) genellemenin testi aşamasında kalarak oluşturduğu genellemeyi test etmiştir. Bu 3 çözümün tamamı da başarısız formüllerin testini içermektedir. Başarılı formül üreten öğrenciler genellikle formüllerini kontrol etmemişlerdir.

Yürütülen mülakatlar esnasında öğrencilerin büyük bir kısmı tarafından gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamalarının başarılı bir şekilde işletildiği görülmüştür. Öğrencilerin 5 tanesi 21 öğrencinin katıldığı oyunda kullanılan sandalye sayısını doğru hesaplarken, kalan 4 öğrenci sandalye sayısını hesaplamamış ve yordama aşamasını atlamıştır. Herhangi bir sayıda öğrencinin bulunduğu sandalye kapmaca oyunu için ise öğrencilerin geneli hatalı formüller üreterek çözümü sonlandırmıştır. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir.

Tablo 19. Mülakata katılan öğrencilerin sandalye kapmaca probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

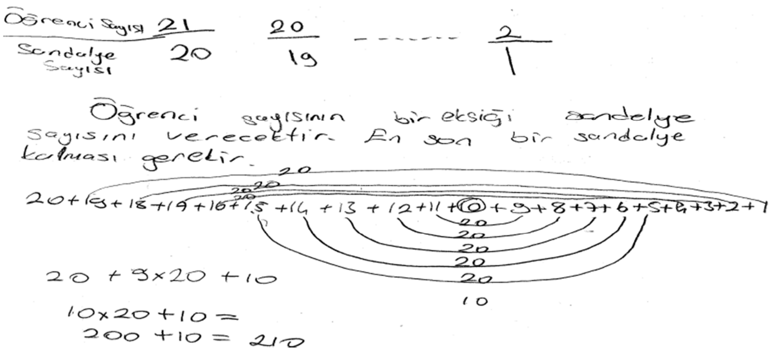
TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	HAKAN	KORAY	LEVENT	MAHİR	MELİS	MİNE	ÖZGE	RABİA	SİNEM
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordama	X	X	X	-	X	-	-	-	X
Yordamanın Testi	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Genelleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Genellemenin testi	-	-	-	-	-	X	-	-	-

Tablo 19'da görüldüğü gibi Hakan, Koray, Melis ve Sinem oluşturdukları yordamayı test etmeden geldikleri genelleme aşamasında ürettikleri başarısız formülleri de test etmeden çözümü sonlandırmışlardır. Levent oluşturduğu yordamayı ve ürettiği formülü test etmeden başarılı bir çözüm sergilemiştir. Gözlemlerini ilk etapta hatalı yapan Mahir, organize aşamasını sergiledikten sonra doğrudan başarısız bir formül üretmiştir. Mine, yordama ve yordamanın testi aşamalarını atlayarak tüm aşamaları başarılı bir şekilde sergilemiştir. Özge ve Rabia ise yordama ve yordamanın testi aşamalarını atlayarak başarısız genelleme formülleri üretmişler ve ürettikleri formülü test etmemişlerdir. Mülakata katılan öğrencilerin en çok sergiledikleri aşamalar gözlemleme, gözlemlerin organizesi, genelleme iken; en az sergiledikleri aşamalar yordamanın testi, genellemenin testi aşamalarıdır. Öğrencilerin hataya en çok düştükleri aşama genelleme iken, en az düştükleri aşama gözlemlerin organizesidir.

Gözlemleme aşaması, tüm öğrenciler tarafından sergilenmiştir. Ancak bu aşamada soruyu tam olarak anlayamayan Mahir, 21 öğrencinin katıldığı sandalye kapmaca oyununda her turda sandalyelerin değiştiğini göz ardı ederek toplam 20 sandalye kullanılacağını belirtmiştir. Bu ifade Mahir'in gözlemindeki hatayı göstermektedir. Sandalye kapmaca probleminde gözlemleme aşamasındaki hatalar genellikle bu noktada toplanmaktadır.

Gözlemlerin organizesi aşaması, tüm öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Çözümlerde genellikle 1'den 20'ye kadar sayıların toplamını gösteren aritmetiksel ifadeler görülmektedir. Yazılan 1+2+3+…+20 şeklindeki toplam öğrencilerin 8 tanesi tarafından da tek tek alt alta toplanarak sonuçlandırılırken; 1

öğrenci bu toplamın organizasyonunu farklı bir şekilde yapıp genelleme aşamasına da bu organizasyon sayesinde kolaylıkla ulaşabilmiştir. Aşağıda Mine'nin oluşturduğu organizasyona yer verilmektedir:



Şekil 48. Sandalye kapmaca problemi için Mine'nin verdiği yazılı açıklama.

Şekilde görüldüğü gibi Mine, organizasyonu gerçekleştirerek 21. turdaki toplam sandalye sayısına ulaşmıştır. Bulduğu yöntemle baştaki ve sondaki sayıları toplayarak (yani 20+1, 19+2, 18+3,…işlemlerini yaparak)sonuçta $21\times10=210$ tane sandalye gerektiği sonucuna varmıştır. Tablo 19'da görüldüğü gibi mülakata katılan 5öğrenci yordama aşamasını başarılı bir şekilde sergilemiştir. Bu öğrencilerden 4 tanesi adımları alt alta veya yan yana yazarak tek tek toplama yolunu tercih ederken; Mine şekil 48'de görüldüğü gibi 21 öğrencinin katıldığı sandalye kapmaca oyunundaki toplam sandalye sayısını kısa yoldan bularak yordama yapmıştır. Yordamanın testi aşaması ise hiçbir öğrenci tarafından sergilenmemiştir.

Genelleme aşamasında ise 9 öğrencinin 7 tanesi başarısız, 2 tanesi başarılı çözüm sergilemiştir. Başarısızlık nedenleri '*n-1*' ile başlayan örüntüyü devam ettiremeden *n-1*'de bırakma, yine *n-1*'den başlayan örüntünün a şıkkı ile kurulan bağlantıdan kaynaklı *n-21*'de sona ereceğini düşünme, *n-1*'den 1'e kadar örüntünün gidişatına bakarak aritmetik değişen örüntü formülüne dönüştürürken ortak farkı -1 yerine 1 alma şeklinde gözlemlenmiştir. Genelleme aşamasını başarılı bir şekilde gerçekleştiren 2 öğrenci ise 1'den *n-1*'e kadar devam eden örüntü için ardışık terimlerin toplamı formülünü yazma veya şekil 48'de verilen organizasyonu ilerleterek formül üretme (21×10 ifadesini cebirsel bir dile dökme)gibi yollar izlemişlerdir. Genelleme aşamasında başarılı bir çözüm sergileyen Levent ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir **(Diyalog 17)**:

…

Levent: [Sandalye kapmaca probleminin b şıkkını okur]. İlk başta *n-1* sayıda sandalye vardır. Daha sonra bu *n-2* olacak 2 öğrenci gitmiş olacak daha sonra bu böyle gidecek. Yani *n*, tek kalana kadar n-20 olana kadar.

Araştırmacı: Peki neden *n-20*.

Levent: 20, çünkü 21 öğrenci var. Çünkü sandalye eksik olmalı ki1 öğrenci açıkta kalsın ve böylece oyun devam edebilsin.

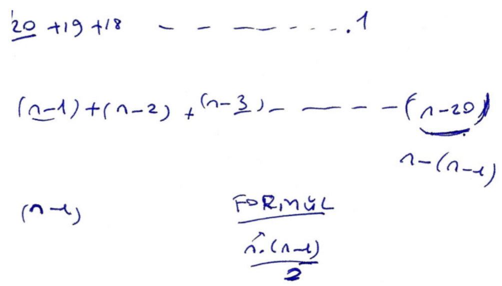
Araştırmacı: Peki*n-20* yerinde başka bir şey olabilir miydi? *n-18, n-17* falan.

Levent: ….*n-20* en son kullanılacak sayı. Buradan gidiyor zaten *n-1, n-2, n-3*, …

…[Mülakat devam eder].

Araştırmacı: Peki yeni yazacağın formülü nasıl ifade edersin?

Levent: Ben bunu yazdıktan sonra formülünü ürettim. Biz bunu 5. sınıfta da görmüştük yani. ….*n×(n-1)÷2*. Hani ardışık sayıların toplamı olan formül.[Der ve yazar].



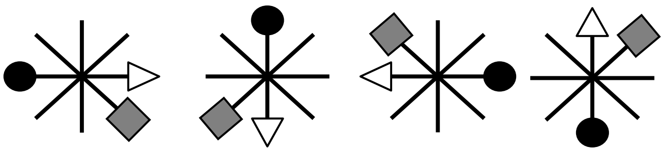
Şekil 49. Sandalye kapmaca problemi için Levent'in verdiği yazılı açıklama.

Diyalog 17'de görüldüğü gibi Levent, *n-1*'den 1'e kadar değil de *n-1*'den *n-20* ifadesine kadar (yani 21-20=1 sandalye kalana kadar) formülünü oluşturmuştur. İlk etapta genelleme hatasına *n-20* ifadesiyle düştüğü görülen öğrenci, ürettiği formülle doğru sonuca ulaşmayı başarmıştır. Çünkü ürettiği formül *n-1*'den 1'e kadar toplanan örüntü terimlerinin genel formülünü oluşturmaktadır (bakınız, Şekil 49). Öğrencilerin pek çoğu en son kaça kadar gider sorusunun cevabına Levent gibi bir yanıt vermişler ve hatta formüllerini bu mantığa endekslemişlerdir. Yanlışın temel sebebi ise a şıkkını hayal ederek *n*. adımın 21'den küçük olabileceğini tahmin edememeleridir.

Genellemenin testi aşaması, genellemeyi doğru yapan 2 öğrenciden sadece biri tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu durum, genelleme aşamasında bulunan çözümlerin yetersizliğinden kaynaklanmaktadır. Sandalye kapmaca probleminde ilköğretim seviyesindeki öğrencilerin tam bir formül üretmeleri beklenmemiştir ancak öğrencilerin oyunun turlarını hayal edememeleri ve özellikle a şıkkında yer alan 21 öğrencinin katıldığı sandalye kapmaca oyununa odaklanmaları, genellemeleri ve dolayısıyla genellemenin testini tam manasıyla yapamama sebeplerini oluşturmaktadır.

4.7. ŞEKİL DÖNDÜRME PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen şekil döndürme problemine aşağıda yer verilmektedir:



1. Adım **2. Adım** **3. Adım** **4. Adım**

Yukarıda siyah daire, beyaz üçgen ve gri kareden oluşan şeklin saat yönünde dönmesiyle oluşturulan örüntünün ilk 4 adımına yer verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 16. ve 22. adımını çiziniz. **Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

b)Bu örüntünün *n.* adımda alacağı şekil sorulsaydı bu şekli nasıl bulurdunuz? (Pilten'den (2008) uyarlanmıştır.)

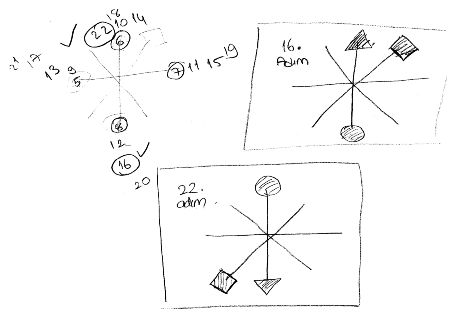
Şekil döndürme probleminde örüntünün verilen ilk 4 adımı için belli gözlemlerin yapılması ve ardından örüntüdeki ilişkinin görülerek 16. ve 22. adımların yordanması gerekmektedir. Bu adımların bulunması noktasında öğrenciler tarafından adımları teker teker açma veya sayılarla ilişkilendirme gibi yolların izlenmesi beklenmektedir. Esasında b şıkkında *n.* adım için verilen cevapların öğrencilerin temel algısını yansıtacağı düşünülmektedir. Bu sorunun çözümüyle alakalı yazılı sınav sonuçları aşağıdaki tabloda görülmektedir:

Tablo 20. Şekil döndürme problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız	Şeklin ilk 4 adımını gözlemleyerek bu adımlar arası ilişkiyi görememe	**1**	**0.5**
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
YORDAMA	**Başarılı**	**Teker teker adımları sayarak 16. ve 22. adımları çizme veya bu adımları ilk 4 adıma benzetme**	**115**	**54.8**
		Dönüşüm geometrisi veya açılarla doğru şekiller çizme	**8**	**3.8**

		Herhangi bir şekli referans noktası alarak istenen adımlara kadar teker teker döndürme	**6**	**2.9**
	Başarısız	Örüntünün 5 adımda bir tekrarlanacağını düşünme	**6**	**2.9**
		16. adımı doğru, 22. adımı yanlış çizme	**11**	**5.2**
		Her 2 adımı da yanlış dönüşlerle yanlış çizme, yanlış hesaplar yapma ve anlamsız tahminler yürütme	**19**	**9**
YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
GENELLEME	**Başarılı**	**Cebirsel**	**4**	**1.9**
		Sözel	**6**	**2.9**
		Cebirsel+Sözel	**1**	**0.5**
	Başarısız	Yordamanın doğru formülün yanlış olması veya anlamsız formüller üretme	**8**	**3.8**
		n. adım hangi sayının katsayısı ise (1, 2, 3, 4) onun şeklini alacağını ifade etme	**10**	**4.8**
		Düzensiz bir kural olduğunu ifade etme veya anlamsız formüller üretme	**6**	**2.9**
GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**Sözel+cebirsel**	**2**	**1**
	Başarısız	Sözel+cebirsel	**1**	**0.5**
BOŞ	**Çözüm yok**		**6**	**2.9**

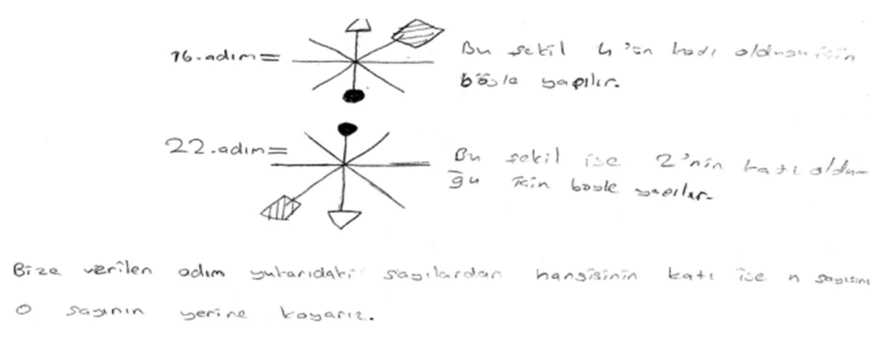
Tablo 20’de görüldüğü gibi şekil döndürme probleminde çözümlerin en çok yer aldığı tümevarımsal düşünce aşamaları, ilk sırada yordama, 2. sırada genelleme iken; en az bulunduğu düşünce aşamaları gözlemleme, gözlemlerin organizesi aşamalarıdır. Öğrencilerden 1 tanesi (%0.5) gözlemleme aşamasında kalarak verilen şekil örüntüsünü gözlemlemiş ve verilen adımlar arasındaki ilişkiyi çözememiştir. Bu aşamada kalan başarılı herhangi bir çözümün bulunmaması ise başarılı çözümlerin bu aşamayı kolaylıkla atladığını göstermektedir. Katılımcı öğrencilerin hiçbiri gözlemlerin organizesi aşamasında kalmamıştır. Şekil örüntüsünün organize edilerek verilmiş olması bu aşamanın kolaylıkla atlanmasını sağlayan bir sebeptir. 210 öğrencinin 165 tanesi (%78.6) ise yordama aşamasındadır. Yordama aşamasında bulunan başarılı çözümlerin başarısız çözümlerden daha fazla olduğu görülmektedir. Başarılı çözümlerin genel sebepleri, teker teker adımların sayılması ile ilerideki adımın tahmini, dönüşüm geometrisi veya açılarla doğru tahmin, herhangi bir geometrik şekli (üçgen, kare, daire) referans noktası alarak sadece o şeklin döndürülmesi ile istenen adımın bulunmasıdır. Tablo 20’de görüldüğü gibi öğrencilerin büyük bir kısmı (115 tanesi) ‘teker teker adımları sayarak bulma ve verilen adımların hangi adımlara benzediğini ifade etme’ kategorisini sergilemiştir. Bununla ilgili çözüm örneği şu şekildedir:



Şekil 50. Şekil döndürme problemi için yordama aşamasında bulunan başarılı çözüm örneği (Ö19).

Şekilde görüldüğü gibi, adımlarda bulunan şekillerin hangi adımda nereye geleceği sayılarla eşleştirerek 16. ve 22. adımlar çizmiştir. Örneğin 22. adım dairenin üstte olduğu örüntü adımı (2. adım) ile 16. adım dairenin altta olduğu örüntü adımı (4. adım) ile eşleştirilerek çizimler yapılmıştır.

Yordamanın testi aşaması, katılımcı öğrencilerin hiçbiri tarafından sergilenmemiştir. Bu durumda genelleme aşamasına kadar gelen çözümlerin çoğunun bu aşamayı atladıkları sonucu çıkarılabilir. 35 öğrencinin şekil örüntüsü için bir formül oluşturmaya çalıştığı görülmektedir. Genelleme aşamasında bulunan başarısız çözümler başarılı çözümlerden fazladır. Başarılı çözümler en çoktan en aza sırasıyla sözel, cebirsel, cebirsel+sözel formüller içerirken; başarısız çözümler yordamanın doğru yapılıp formülün yanlış yazılması, *n*. adıma bir katsayı getirme, anlamsız bir formülün yazılması şeklindeki formülleri içermektedir. Başarısız çözümlerin genelinde *n*. adıma katsayı getirme şeklindeki çözüm görülmektedir. Bununla ilgili örnek şu şekildedir:

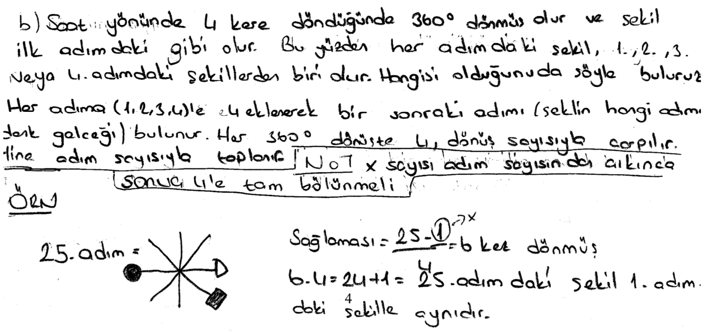


Şekil 51. Şekil döndürme problemi için genelleme aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö27).

Şekilde görüldüğü gibi Ö27, örüntünün *n*. adımını verilen ilk 4 örüntü adımının katsayısı ile eşleştirerek bulabileceğini ifade etmiştir. Bu yüzden öğrenci tarafından '*16.*

adım 4. adımın, 22. adım da 2. adımın katı olmalı' düşüncesi ile şekiller çizilmiştir. Ancak burada unutulan nokta 16. adımın hem 2'nin hem de 4'ün katı olmasıdır. Ayrıca bu mantıkla *n*. adımın bulunması için mutlaka bir sayı verilmesi gerekmektedir.

210 katılımcı öğrencinin 3 tanesi (%1.5) genellemenin testi aşamasında kalarak bütün aşamaları sergilemiştir. Başarılı çözümler genel olarak doğru sözel+cebirsel formüllerin test edilmesi ile oluşurken; başarısız çözümler yine bu tür yanlış formüllerin testinden oluşmaktadır. Başarılı çözümle ilgili örnek şu şekildedir:



Şekil 52. Şekil döndürme problemi için genellemenin testi aşamasında bulunan başarılı çözüm örneği (Ö5).

Şekilde görüldüğü gibi örüntünün 4 adımda bir tekrarından hareketle oluşturulan genelleme *'x sayısı adım sayısından çıkınca 4'e tam bölünmeli'* şeklinde ifade edilmiştir. *n*. adım için geçerli olan bu ifadenin kontrolü ise 25. adımda yapılmıştır.

Yürütülen mülakatlar esnasında öğrencilerin bütünü tarafından verilen şekil örüntüsünün dikkatle gözlemlendiği, gözlemlenen örüntü için gerek aritmetiksel gerek görsel organizasyonların oluşturularak 16. ve 22. adımlarda bulunan şekillerin başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmüştür. Ancak şekil örüntüsünün herhangi bir adımı için formül üretmeye çalışan öğrencilerin çoğunlukla yanlış formüller üreterek bu formülleri test ettikleri saptanmıştır. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 21. Mülakata katılan öğrencilerin şekil döndürme probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	HAKAN	KORAY	LEVENT	MAHİR	MELİS	MİNE	ÖZGE	RABİA	SİNEM
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordama	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordamanın Testi	-	-	-	-	X	-	-	-	-
Genelleme	-	-	X	X	X	X	X	-	-
Genellemenin testi	-	-	X	X	X	X	X	-	-

Tablo 21'de görüldüğü gibi Hakan, Koray, Rabia ve Sinem gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama aşamalarını sergileyip herhangi bir formül üretmeden çözümü sonlandırmışlardır. Levent ve Mine ise yordamanın testi aşamasını atlayarak bütün aşamaları başarılı bir şekilde sergilemişlerdir. Mahir ve Özge, yordamanın testi aşamasını atlayarak başarısız bir formülle diğer bütün aşamaları sergilemişlerdir. Melis ise bütün tümevarımsal düşünce aşamalarını sergilemiş ve sadece genelleme aşamasında başarısız bir formül üreterek bu formülü test etmiştir. Ayrıca öğrencilerin en çok sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları, gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordama iken; en az sergiledikleri aşama yordamanın testidir. Öğrencilerin en çok hataya düştükleri aşamalar genelleme ve genellemenin testi iken; hiçbir hataya düşmedikleri aşamalar gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordamadır.

Gözlemleme aşaması öğrencilerin tamamı tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Mülakata katılan öğrenciler gözlemlerinde adımları teker teker kontrol etmişler veya bir şekilden yola çıkarak bu şeklin hareketini incelemişlerdir.1 şekli (siyah daireyi)referans noktası alarak gözlem yapan Mahir ile araştırmacı arasında şöyle bir diyalog yaşanmıştır (**Diyalog 18**):

…

Mahir: [Şekil döndürme probleminin a şıkkını okur].

Araştırmacı: Evet şimdi bir şekil örüntüsü görüyorsun bu örüntüde ilk 4 adım verilmiş, nasıl çözersin bu problemi Mahir?

Mahir: Mesela 4. adımda içi dolu daire [siyah daireyi göstererek] aşağı gelmiş. Sonra bunları incelediğimizde hep böyle saat yönünde ilerliyor. 6. adımda [kâğıdında üst kısmı göstererek] mesela burada olur. 7, 8 ve 9'da burada olur diye gidebiliriz [Şeklin gideceği yerleri göstererek].

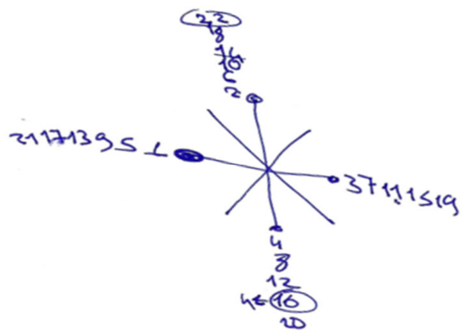
Araştırmacı: Yani bu şekilde siyah daireden yola çıkarak çiziyorsun ve şeklin döndürülmüş halini buluyorsun öyle mi?

Mahir: Evet.

…

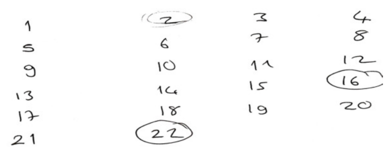
Görüldüğü gibi gözlemleme aşaması öğrencilerin düşüncelerinin kayıt altına alınması yoluyla sağlıklı bir şekilde izlenebilmektedir. Ayrıca bu aşamadaki düşünceler diyalog 18'de görüldüğü gibi diğer aşamaların da nasıl tahmin edildiğinin bir göstergesidir. Mahir, örüntüyü sağlıklı bir şekilde ilerlettiğinde yordama aşamasında da başarılı bir çözüm sergileme imkânı bulmuştur.

Gözlemlerin organizesi ise tüm öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Öğrencilerin soruyu çözmek için yaptıkları planla eşdeğer olan bu aşamada aritmetiksel yazım, görsel-aritmetiksel organize şeklinde 2 çeşit çözüm görülmektedir. Aşağıda Özge'nin oluşturduğu organizasyona yer verilmiştir:



Şekil 53. Şekil döndürme problemi için Özge'nin oluşturduğu organizasyon.

Şekilde görüldüğü gibi Özge, şekil döndürme probleminde verilen tüm adımları gözlemleyerek siyah dairenin geldiği yönleri sayılarla ifade etmiştir. Öğrenci, bu organizasyonla şekilleri tek tek çizmeden başarılı bir yordama yapabilmiştir. Aşağıda Sinem'in ilk 4 adımda bulunan şekillerin altına bu adımlarla eşdeğer adımları yazarak oluşturduğu aritmetiksel organizasyonu gösteren şekle yer verilmektedir:



Şekil 54. Şekil döndürme problemi için Sinem'in oluşturduğu organizasyon.

Tablo 21'de görüldüğü gibi yordama aşamasında bütün öğrenciler tarafından başarılı bir çözüm sergilenmiştir. Bu çözümler ise genellikle adımları aritmetiksel olarak eşleştirme, şekle bakarak 16. ve 22. adımları tek tek çizme gibi yöntemleri içermektedir. Şekil 53 ve şekil 54'te görüldüğü gibi gözlemlerin organizesi aşamasını yordama aşamasından tam manasıyla ayırmak mümkün değildir. Çünkü örüntünün verilen adımları organize edilirken aynı zamanda sonraki adımlar için yordama yapılmaktadır. Yordamanın testi aşaması sadece Melis tarafından sergilenmiştir. Bu aşamada adımları her 4 adımda bir tekrarlayacak şekilde teker teker yazan Melis, belli bir açıyla şekilleri döndürerek bulduğu sonucu kontrol etmiştir.

Genelleme aşamasını sergileyen 5 öğrencinin 3 tanesi genelleme hatasına düşmüştür. Düşülen hatalar; '*n+4, n+2'* şeklinde terime bağlı formüllerin üretilmesi, tek ve çift adımlarda formülün farklılaşacağı düşünülerek '*2n, 2n+1*'şeklinde 2 formülün yazılmasıdır. Formülün doğru yazılma sebepleri ise 4 adımda bir tekrarlayan örüntü için verilen basamakta 4 sayısının kaç defa olduğunun bulunması şeklindedir. Bu mantık esasında modüler aritmetik konusu ile uyuşmaktadır. Şekil döndürme problemi için formül üreten Mine ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir (**Diyalog 19**):

…[Yordama aşamasında 16. adımı bulan Mine, bu adımı nasıl bulduğunu anlatarak çözüme devam eder].

Mine: Şimdi ben 16. adımı şöyle buldum. Sayının içinde kaç tane 4 varsa ona göre yaptım. Bunu cebirsel olarak yazmak istesem *1+4n* eşittir 16 olur [der ve *1+4n=16* ifadesini yazar].

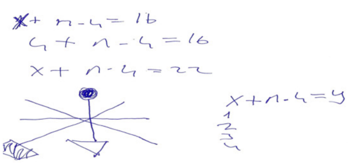
Araştırmacı: Neden böyle bir formül yazdın Mine? *n* bu formülde neyi ifade ediyor?

Mine: Formülü *n*'i bulabilmek için yazdım. Buradaki *n* ise değişkeni ifade ediyor. Yani 4'ün kaç defa geleceğini bu şeklin kaç kere geleceğini ifade ediyor. [Formülü göstererek]. Şuradaki 1'i yanlış yazmışım bunu *x* olarak değiştireyim. [Der ve aşağıdaki formülü yazar].

Araştırmacı: Neden *x* olarak değiştirdin?

Mine: Çünkü *x* buradaki şekillerden herhangi biri olacaktır ve ben bunu ….*x+4n=16*'yı buradaki *x* üzerinden 1, 2, 3, 4'e uygulayacağım şimdi.

…



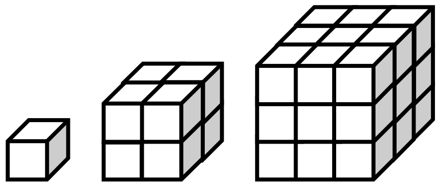
Şekil 55. Şekil döndürme problemi için Mine'nin verdiği yazılı açıklama.

Diyalog 19'da görüldüğü gibi Mine, verilen adımda kaç tane 4 sayısının olduğunu bulduran bir formül geliştirmiştir. Ayrıca bölme mantığı ile yazdığı ifadede bölme sonucu kalan sayıların da olacağını düşünerek x gibi bir harfi denkleme atamıştır. Çünkü verilen adımda 4 sayısı tam olarak bulunmadığında kalan sayının 4. adım dışındaki adımlardan biri (1, 2, 3. adımlar) olabileceğini düşünmüştür.

Genellemenin testi aşaması ise problem için formül üreten 5 öğrenci tarafından sergilenmiştir. Ancak yanlış formülü test eden 3 öğrenci formüllerini düzeltememiştir. Örneğin '$n+2$' şeklindeki formülü test eden Özge, formülün yanlış olduğunu anlamış ancak başka bir formül üretememiştir. Bu aşamada bulunan 2 öğrenci ise ürettiği başarılı formülün testini gerçekleştirmiştir.

4.8. KÜP ÖRÜNTÜSÜ PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen küp örüntüsü problemine aşağıda yer verilmektedir:



> Ayşe elindeki birim küpleri şekildeki gibi bir araya getirerek bir örüntü oluşturmaktadır. Yukarıda bu örüntünün ilk 3 adımına yer verilmiştir. Buna göre;
>
> **a)** Ayşe bu örüntünün 15. adımındaki küpü elde etmek için kaç tane birim küpe gereksinim duyar? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**
>
> **b)** Ayşe örüntünün herhangi bir adımındaki (n. adımdaki) küpü elde etmek için kaç tane birim küpe ihtiyaç duyar? **Bu hesaplamayı yapmak için bir kural veya formül üretiniz ve bu kuralı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız** (Yeşildere ve Türnüklü'den (2007) uyarlanmıştır).

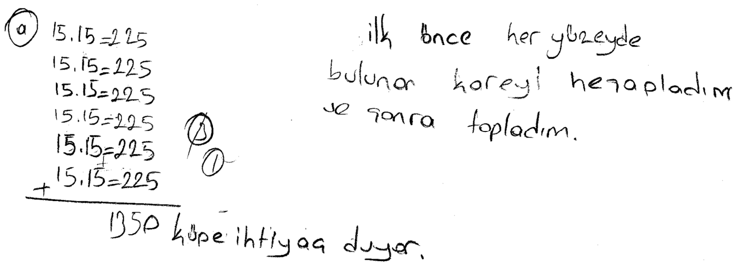
Küp örüntüsü problemi, sayı örüntüsü problemi ile içeriksel açıdan aynı sorudur; çünkü bu problem, 1, 8, 27,…şeklinde ilerleyen sayı örüntüsünün görsel şeklidir. Problemin sorulmasındaki amaç, sayı örüntüsü probleminde sergilenen düşünce aşamalarının küp örüntüsünde nasıl sergilendiğini incelemek ve cebire geçişleri karşılaştırmaktır. Görüldüğü gibi küp örüntüsü problemi, sayı örüntüsü probleminden daha kolay anlaşılmaktadır. Bu doğrultuda problemde verilen küpler yardımıyla 'n^3' formülünün öğrenciler tarafından kolaylıkla üretilmesi beklenmektedir. Ancak örüntüdeki küpler fark edilmezse her adımdaki birim küp sayısının yine öğrenciler tarafından teker teker sayılması söz konusu olabilir. Böyle bir durumda ise küp örüntüsü probleminde bulunan şekil örüntüsü, sayı örüntüsüne dönüştürülerek sayı örüntüsü probleminde olduğu gibi terimler arasında bulunan ilişkiler formüle dökülmeye çalışılabilir. Aşağıda küp örüntüsü probleminin yazılı sınav analizini gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 22. Küp örüntüsü problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	**Başarılı**	**Sadece verilen adımlardaki birim küpleri sayma**	**12**	**5.7**
	Başarısız	Küplerin yüzeylerindeki birim kareleri sayma	**1**	**0.5**
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
YORDAMA	**Başarılı**	**Sadece 15. adımı veya ilerideki bir adımı hesaplama**	**10**	**4.8**
	Başarısız	Küplerin 2 boyutlu düşünülmesi veya anlamsız tahminlerle yapılan yanlış hesaplar	**43**	**20.5**
		Birim küp sayıları arasındaki farklardan hareketle 15. adımı hesaplama	**4**	**1.9**
YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
GENELLEME	**Başarılı**	**Cebirsel**	**53**	**25.2**
		Sözel	**3**	**1.4**
		Cebirsel+sözel	**24**	**11.4**
	Başarısız	Cebirsel veya sözel	**34**	**16.2**
		Doğru yordama yanlış formül	**1**	**0.5**
GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**Cebirsel**	**3**	**1.4**
		Sözel	**1**	**0.5**
		Cebirsel+sözel	**2**	**1**
	Başarısız	Cebirsel	**3**	**1.4**
BOŞ	**Çözüm yok**		**16**	**7.6**

Tablo 22'te görüldüğü gibi küp örüntüsü probleminde en çok sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları sırasıyla genelleme ve yordama iken; en az sergilenen aşamalar gözlemlerin organizesi ve yordamanın testidir. Öğrencilerin 13 tanesi (%6.2) gözlemleme aşamasında kalarak sadece verilen adımları izlemiş ve sonraki aşamalara geçememiştir. Bu aşamada yer alan başarılı çözümler, başarısız çözümlerden fazladır. Başarılı gözlemler, verilen küplerin kaç tane olduğunu teker teker doğru bir şekilde sayan; başarısız gözlemler ise küplerin sadece belli yüzeylerini görebilen ve dolayısıyla eksik sayımların yapıldığı çözümleri içermektedir. Gözlemleme aşamasında, uzamsal düşüncenin işe koşulması gözlemlerin doğru yapılması noktasında önem kazanmaktadır.

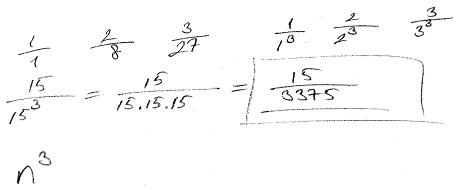
Gözlemlerin organizesi aşamasında kalan hiçbir çözüm bulunmamaktadır. Çünkü adımlarda kaçar küp olduğunu gözlemleyen öğrenciler gerekirse buldukları sayıları yazarak sonraki aşamalara kolaylıkla geçebilmişlerdir. Öğrencilerin 57 tanesi (%27.2) yordama aşamasında kalarak şekil örüntüsünün 15. adımını bulmaya çalışmıştır. Bu aşamada bulunan başarısız çözümler başarılı çözümlerden fazladır. Başarılı çözümlerin genel sebebi, 15. adımın veya çok sonraki adımların hesaplanabileceği yordamaların oluşturulmasıdır. Başarısız çözümlerin sebebi ise küpün hacmi ile ilgili değil, yüzey sayısı ile ilgili çözümlerin yapılması veya 1, 8, 27 arasında aritmetiksel farklardan yararlanarak hatalı yordamaların oluşturulmasıdır. Küpü oluşturan birim küplerin değil, 6 yüzeyin düşünülmesi ile oluşturulan örnek çözüm şu şekildedir:



Şekil 56. Küp örüntüsü problemi için yordama aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö81).

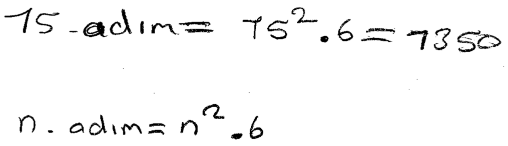
Şekilde görüldüğü gibi 15. adımda bulunan küp için ilk etapta, bütün yüzeylerinde bulunan birim kareler Ö81 tarafından ayrı ayrı hesaplanmıştır. Ardından 6 yüzeyde bulunan bu kareler toplanarak sonuç elde edilmiştir. Bu çözümde küpün birim küplerle değil, karelerle oluşturulduğu düşünülmüştür ve küpün sadece dışını kaplayan yüzeyler hesaplanmıştır. Bu durum, uzamsal düşüncenin işe koşulmamasından kaynaklanmaktadır.

Yordamanın testi aşamasında kalan hiçbir çözüm bulunmamaktadır. 210 öğrencinin 115 tanesi (%54.7) genelleme aşamasında kalarak küp örüntüsü problemi için formül üretmeye çalışmıştır. Bu aşamada kalan başarılı çözümlerin başarısız çözümlerden fazla olması problemin başarılı bir şekilde çözüldüğünü göstermektedir. Başarılı çözümlerin fazla olmasının sebebi ise soruda görselliğin ön plana çıkmış olmasıdır. Ayrıca başarılı çözümlerin en çoktan en aza cebirsel, cebirsel+sözel ve cebirsel temsillerle ortaya çıkması soruya farklı açılardan bakılabildiğini göstermektedir. Aşağıda genelleme aşamasında bulunan başarılı çözüm örneğine yer verilmektedir:



Şekil 57. Küp örüntüsü problemi için genelleme aşamasında bulunan başarılı çözüm örneği (Ö104).

Şekil 57'de görüldüğü gibi adım sayısı ile terim sayısını ilişkilendiren Ö104, seçtiği bu yol sayesinde doğru bir formül üretebilmiştir. Genelleme aşamasında bulunan çözümlerin başarısızlık nedenleri ise anlamsız cebirsel veya sözel formüllerin yazılması veya doğru yordamaların yapılarak ardından yanlış formüllerin üretilmesidir. Aşağıda genelleme aşamasında yanlış formül üreten Ö27'nin çözümüne yer verilmektedir:



Şekil 58. Küp örüntüsü problemi için genelleme aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö27).

Şekilde görüldüğü gibi örüntünün 15. adımında bulunan küpün tek yüzeyindeki birim karelerin sayısını bulan Ö27, küpün tüm yüzeylerini hesaplamak için bulduğu sonucu 6 ile çarpmıştır. Böylece küpün tüm yüzeylerindeki birim karelerin sayısını veren ($n^2 \times 6$) formülü üretmiştir. Bu formül, şekil 56'da Ö81 tarafından sergilenen çözümün Ö27 tarafından adeta formüle dönüştürülmüş şeklini oluşturmaktadır.

Katılımcı öğrencilerin 9 tanesi (%4.3) genellemenin testi aşamasında kalarak ürettikleri formülleri test etmeye çalışmıştır. Bu aşamada kalan başarılı çözümler, başarısız çözümlerden fazladır. Başarılı çözümlerin genel sebebi,formüllerin doğru olduğu çözümlerin test edilmesi iken; başarısız çözümlerin genel sebebi anlamsız cebirsel formüllerin test edilmesidir.

Yürütülen mülakatlar esnasında birim küpleri yanlış sayarak çözüme başlayan 4 öğrencinin bu hatalarını bütün aşamalarda devam ettirdiği görülmüştür. Çözümlerini ilk 2 aşamada başarıyla sergileyen 2 öğrenci (Rabia ve Hakan) ise yordama aşamasında bahsedilen 4 öğrenciye eklenerek küp örüntüsünün 15. adımını yanlış hesaplamıştır. Dolayısıyla yordama aşaması, öğrencilerin büyük bir kısmı tarafından başarısız bir şekilde işletilmiştir. 15. adım için oluşturulan yordamalar, genellikle ilk 3 aşamayı başarısız bir şekilde işleten öğrenciler tarafından kontrol edilmiştir. Küp örüntüsünün herhangi bir adımı için formül üretmeye çalışan 4 öğrenci başarılı olurken, 3 öğrenci ise başarısız olmuştur. Ayrıca genelleme aşamasına gelen bütün öğrenciler genellemenin testi aşamasına da gelerek ürettikleri formülleri kontrol etmişlerdir. Mülakat sonuçlarını gösteren tabloya aşağıda yer verilmektedir:

Tablo 23. Mülakata katılan öğrencilerin küp örüntüsü probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	HAKAN	KORAY	LEVENT	MAHİR	MELİS	MİNE	ÖZGE	RABİA	SİNEM
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordama	X	X	-	X	X	X	X	X	X
Yordamanın Testi	X	X	-	-	-	X	X	-	-
Genelleme	-	X	X	X	X	X	X	X	-
Genellemenin testi	-	X	X	X	X	X	X	X	-

Tablo 23'te görüldüğü gibi Hakan, gözlemleme ve gözlemlerin organizesini başarılı bir şekilde sergilemiş ve hatalı bir yordama yaparak bu yordamanın testi ile çözümünü tamamlamıştır. Sinem ise gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordama aşamalarını başarısız bir şekilde sergilemiş ve ardından formül üretmeden çözümünü tamamlamıştır. Koray, bütün aşamaları başarılı bir şekilde sergilemiştir. Levent yordama ve yordamanın testi aşamalarını atlayarak, Melis ise sadece yordamanın testi aşamasını atlayarak başarılı bir şekilde çözümlerini tamamlamışlardır. Mahir, sadece yordamanın testi aşamasını atlayarak, Özge ise hiçbir aşama atlamadan ikisi de bütün aşamaları başarısız bir şekilde sergilemiştir. Mine ise yordamanın testi aşamasına kadar başarısız bir çözüm sergilerken, hatasını fark ederek başarılı bir formül üretmiş ve bu formülü test etmiştir. Rabia gözlemleme ve gözlemlerin organizesini başarılı bir şekilde sergilerken; yordamanın testini atlayarak yordama ve sonraki aşamaları başarısız bir şekilde sergilemiştir. Tabloda görüldüğü gibi öğrenciler tarafından en çok sergilenen aşamalar, gözlemleme ve gözlemlerin organizesi iken; en az sergiledikleri aşama yordamanın testidir. Ayrıca en çok hataya düşülen aşama yordamadır.

Gözlemleme aşamasını 9 öğrencinin 5 tanesi başarılı, 4 tanesi başarısız bir şekilde sergilemiştir. Bu aşamada yer alan başarılı çözümler, her adımdaki küpün kaç birim küpten oluştuğunun sayılması yoluyla gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada yer alan başarısız çözümlerin küpün 2 boyutlu düşünülmesi veya birim küplerin yanlış hesaplanması sonucu oluşturulduğu görülmektedir. Adımlardaki birim küpleri yanlış bir şekilde hesaplayan Mahir ile araştırmacı arasında şöyle bir diyalog yaşanmıştır **(Diyalog 20)**:

…

Mahir: [Küp örüntüsü probleminin a şıkkını okur].

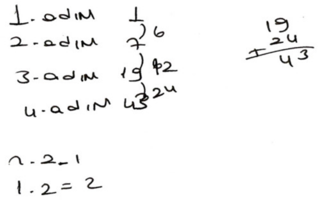
Araştırmacı: Şimdi nasıl çözersin bu soruyu Mahir?

Mahir: Şimdi 1. adımında 1 tane, 2. adımında 7 tane birim küp kullanılmış [Der ve yazmaya başlar].

Araştırmacı: Peki 3. adımda kaç tane birim küp kullanmış?

Mahir: 19.

…



Şekil 59. Küp örüntüsü problemi için Mahir'in verdiği yazılı açıklama.

Diyalog 20'de görüldüğü gibi probleme ilk etapta 3 boyutlu bakamayan Mahir hatasını devam ettirmiş ve organizasyonunu bu şekilde tamamlamıştır. Bulduğu sayılar arasındaki farklardan yola çıkarak bir formül üretmeye çalışmıştır. Görüldüğü gibi gözlemleme aşamasındaki hata, tümevarımsal düşünce aşamalarının bütününe yansımaktadır.

Gözlemlerin organizesi aşamasını öğrencilerin 6 tanesi başarılı, 3 tanesi başarısız bir şekilde sergilemiştir. Bu noktada gözlemlerin yanlışlığına bağlı organizasyon hatalarının olduğu dikkat çekmektedir (bakınız, Şekil 59). Şekil 59'da yer alan organizasyonun genel sebebi, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştüren Mahir'in sayılar arasında sadece toplamsal ilişkiler olacağını düşünmesidir. Mahir, küp örüntüsü probleminde her adımda küplerin olduğunu keşfetseydi 4. adımı kolaylıkla tahmin edebilirdi.

Yordama aşamasında öğrencilerin çoğu (8 öğrencinin 6 tanesi) başarısız çözümler sergilemiştir. Başarısızlık nedenlerine bakıldığında küpün 6 yüzeyi olduğundan hareketle hacim bağıntısı yerine yüzey alanı bağıntısı oluşturma, yanlış gözlemler sonucu örüntüyü hatalı bir biçimde ilerletme şeklindedir. Katılımcı öğrencilerden Özge'nin nasıl yordama yaptığını gösteren diyalog şu şekildedir **(Diyalog 21)**:

…

Özge: [Küp örüntüsü probleminin a şıkkını okur]. Ben şöyle bir şey düşündüm. 1. adımda 1 küp var, 2. adımda yan yana 2 küp var, 3. adımda yan yana 3 küp var. O zaman 15. adımda yan yana 15 tane küp olması lazım.

Araştırmacı: Evet.

Özge: 15 ile de 15'i çarptım 225 buldum. Küpün de 6 tane yüzü olduğu için bulduğum sonucu6 ile çarptığımda ise 1950 sonucuna ulaştım.

Araştırmacı: Bunu tekrar yapabilir misin? Mesela 15 tane yan yana dizilmiş bir küp şekli çizebilir misin?

Özge: Çizebilirim [der ve çizer].

Araştırmacı: Peki burada 15 birimlik kareyi çizdikten sonra ne yaptın?

Özge: Sonra bunları birbirleriyle çarptım ve 225 buldum.

Araştırmacı: 225. Tamam.

Özge: 6 adet 225 var. Küpte 6 yüz olduğu için 225×6=1350 oluyor.

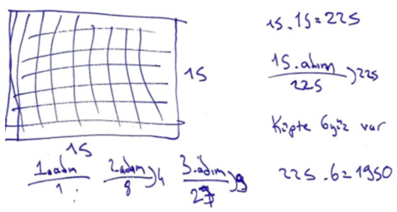
Araştırmacı: Bir küpün içinde kaç birim küp olduğunu bu mantıkla bulabilir misin?

Özge: Örneğin 2 birimlik için 2×2=4 mesela bu sonucu 6 ile çarparsak 24 oluyor.

Araştırmacı: Peki 24 tane birim küp var mı 2. adımdaki şekil içerisinde?

Özge: Hayır yok.

…



Şekil 60. Küp örüntüsü problemi için Özge'nin verdiği yazılı açıklama.

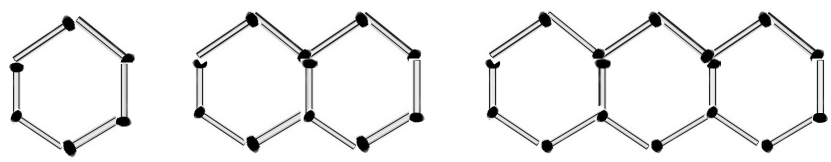
Görüldüğü gibi hacim kavramı ile yüzey alanı kavramları arasında bir kargaşa yaşayan Özge, tüm yüzeylerdeki birim kareleri toplayarak sonuca ulaşabileceğini düşünmektedir. Ancak Özge, küp örüntüsünün 2. adımı için yaptığı kontrol yoluyla yordamasının doğru olmadığını anlamıştır. Bu durumda Özge'nin yaşadığı kavram kargaşası yazılı sonuçlarıyla da bağdaşan 43 öğrencinin (%20.5) yordamayı neden yanlış yaptığına açıklık getirir niteliktedir.

Yordamanın testi aşamasında ise 4 öğrencinin 3 tanesi başarılı bir çözüm sergilerken, 1 tanesi başarısız bir çözüm sergilemiştir. Diyalog 21'de görüldüğü gibi Özge, ilk önce 15. adım için yaptığı yordama ile $15\times15\times6$ şeklinde 15. adımdaki küpün yüzey alanını bulmuştur (bakınız, Şekil 60). Ardından 2. adıma dönerek yaptığı bu yordamanın başarısız olduğunu fark etmiş ve hemen bu yordamayı değiştirmiştir.

Genelleme ve genellemenin testi aşamalarında4 öğrenci başarılı, 3 öğrenci başarısızdır. Genelleme aşamasında başarısız formül üreten 3 öğrenciden 1 tanesi, yaptığı kontrol sonrasında hatasını düzeltmiştir. Problemin genelleme aşamasında bulunan öğrencilerin 3 tanesi küpün 6 yüzeyini hesaba katma, soruda aritmetik değişen örüntü olduğunu düşünerek bu mantıkla örüntüyü devam ettirme, yanlış gözlem sonucunda anlamsız genelleme formüllerine ulaşma gibi yollarla başarısız olurken; öğrencilerin 4 tanesi bir sayının küpü mantığından hareket etme, hacim konusuna hâkim olma gibi nedenlerle başarılı formüller üretmiştir. Genellemenin testi aşamasında ise formüllerini kontrol eden 2 öğrencinin doğru sonuca ulaşamadığı görülürken, 1 öğrenci, ürettiği başarısız formülü test ederek yanlışını tespit etmiş ve ardından başarılı bir formül yazmıştır. 4 öğrenci ise ürettiği başarılı formülü bu testle onaylamıştır.

4.9. BAL PETEĞİ PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen bal peteği problemine aşağıda yer verilmektedir:



1. Adım 2. Adım 3. Adım

Yukarıda kibrit çöpleriyle oluşturulan bal peteği örüntüsünün ilk 3 adımına yer verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 12. adımının inşası için kaç tane kibrit çöpüne gereksinim duyulur? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Bu örüntünün *n*. adımındaki yapıyı oluşturmak için kaç tane kibrit çöpüne ihtiyaç vardır? **Bu hesaplamayı yapmak için cebirsel bir kural veya formül üreterek bu formülün mantığını açıklayınız.**

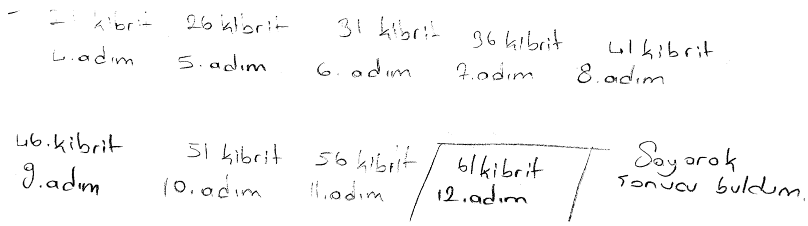
Bal peteği probleminin çözümünde öğrencilerin öncelikle örüntüdeki her bir adımın nasıl inşa edildiğine dikkat etmeleri gerekmektedir. Bu doğrultuda problemde verilen şekil örüntüsünün öğrenciler tarafından aritmetiksel veya görsel anlamda gözlemleneceği düşünülmektedir. Görsel anlamda önce toplam altıgen sayısına ulaşma ve ardından da ortak kibrit çöplerini toplamdan çıkarma gibi bir yol izlenebileceği gibi ayrıca altıgenin üst-alt-orta bölümlerinin ayrı ayrı hesaplanarak toplam sayıya ulaşılması da söz konusu olabilir. Aritmetiksel anlamda ise örüntüdeki her bir adımın sayıya dönüştürülmesi ve ardından 12. adıma kadar örüntünün ilerletilmesi gibi bir çözüm sergilenmesi beklenmektedir. Problemin b şıkkında üretilmesi beklenen formül ise görsel çözümlerde '*6n-(n-1)*' veya '*4n+n+1*' iken; aritmetiksel çözümlerde '*5n+1*' olarak çeşitlenmektedir. Aşağıda bal peteği probleminin yazılı sınav analizini gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 24. Bal peteği problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	Başarılı	Verilen adımlar için kibrit çöpü sayısını yazma	2	1
	Başarısız		0	0
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	Başarılı		0	0
	Başarısız		0	0
YORDAMA	Başarılı	Adımları teker teker sayarak 12. adıma ulaşma	28	13.3
		Doğru sonuca bazı işlemlerle doğrudan ulaşma	7	3.3
	Başarısız	Yanlış tahminler veya yanlış hesaplar yapma	38	18.1
YORDAMANIN TESTİ	Başarılı		0	0
	Başarısız		0	0
GENELLEME	Başarılı	Cebirsel	54	25.7
		Cebirsel+sözel	5	2.4
	Başarısız	Cebirsel	31	14.8
		Doğru yordama yapma yanlış formül üretme	19	9
GENELLEMENİN TESTİ	Başarılı	Cebirsel	14	6.7
	Başarısız	Cebirsel	2	1
BOŞ	Çözüm yok		10	4.8

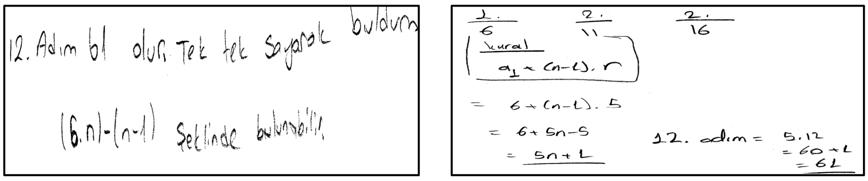
Tablo 24'te görüldüğü gibi bal peteği probleminde en çok sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları sırası ile genelleme ve yordama iken en az sergilenen düşünce aşamaları gözlemlerin organizesi ve yordamanın testidir. Öğrencilerin 2 tanesi (%1) gözlemleme aşamasında kalarak sonraki aşamaları sergileyememiştir. Bu aşamada bulunan başarılı gözlemlerin sebebi, sadece verilen adımlar için kibrit çöpü sayısının hesaplanmasıdır. Bu aşamada başarısız bir çözüm bulunmamaktadır. Bununla birlikte katılımcı öğrencilerin hiçbiri gözlemlerin organizesi aşamasında kalmamıştır. Bu durumun sebebi görsel bir nitelik taşıyan problemde bu aşamanın kolaylıkla atlanmasıdır.

Katılımcı öğrencilerin 73 tanesi (%34.7) yordama aşamasında kalarak bal peteği örüntüsünün 12. adımını bulmaya çalışmıştır. Bu aşamada bulunan başarısız çözümler, başarılı çözümlerden fazladır. Başarılı çözümlerin nedenleri adımların teker teker sayılarak veya aritmetiksel işlemlerle doğrudan 12. adıma ulaşılması iken; başarısız çözümlerin nedeni hatalı hesaplamalarla istenen sonuca ulaşamama şeklinde belirlenmiştir. Yordamanın testi aşamasında ise hiçbir çözüm bulunmamaktadır. Bal peteği probleminin 12. adımına teker teker sayarak ulaşan Ö81'e ait çözüme aşağıda yer verilmiştir:



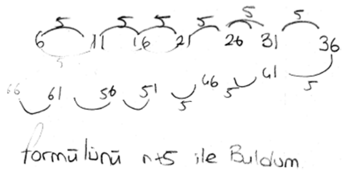
Şekil 61. Bal peteği problemi için yordama aşamasında bulunan başarılı çözüm örneği (Ö81).

Şekilde görüldüğü gibi örüntü terimleri arasında 5 fark olduğunu gözlemleyen öğrenci, 12. adıma teker teker sayarak ulaşmıştır. Bu çözüm terime bağlı olup örüntünün ileri adımlarının bulunmasında etkili değildir. Çünkü bir önceki adımın bilinmesi ile bir sonraki adım bulunmaktadır. Öğrencilerin 59 tanesi (%51.9) genelleme aşamasında kalarak problem için genel bir formül üretmeye çalışmıştır. Bu aşamada görülen başarılı çözümler, başarısız çözümlerden fazladır. Başarılı çözümler en çok cebirsel+sözel formülleri, en az cebirsel formülleri içermektedir. Başarılı genelleme formülleri ile ilgili örnek çözümlere aşağıda yer verilmektedir:



Şekil 62. Bal peteği problemi için genelleme aşamasında bulunan ve sırasıyla görsel ve aritmetiksel formülleri içeren başarılı çözüm örnekleri (Ö105, Ö15).

Şekilde görüldüğü gibi ilk örnekte, altıgeni oluşturan toplam kibrit çöpü sayısından ortak kibrit çöplerinin çıkarılmasıyla elde edilen '*6n-(n-1)*' formülü görsel bir çözümle üretilmiştir. Yani önce altıgenlerin tamamını oluşturan kibrit çöpü hesaplanmış ve ardından ortak kibrit çöpleri toplamdan çıkarılarak formül üretilmiştir. 2. örnekte ise şekil örüntüsü, aritmetik değişen örüntüye çevrilerek bilinen formüle uyarlanmaya çalışılmıştır. Sonuç olarak '*6n-(n-1)*' formülünün düzenlenmiş şekli olan '*5n+1*' formülüne ulaşılmıştır. Genelleme aşamasında bulunan başarısız çözümler ise en çok hatalı cebirsel formüllerden meydana gelmektedir. Ayrıca yordamanın doğru formüllerin yanlış olduğu çözümleri de bu kategoride görebilmek mümkündür. Bununla ilgili örnek çözüm şu şekildedir:



Şekil 63. Bal peteği problemi için genelleme aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö137).

Şekilde görüldüğü gibi terimler arasındaki farkları bulan Ö137, terime bağlı olarak '*n+5*' formülünü üretmiştir. Yazılan bu formül örüntünün genel terimi değildir. Görüldüğü gibi şekil örüntüsünün aritmetiksel değişen bir örüntüye çevrilmesi ile terimler arasındaki farka odaklanan öğrenci, başarısız bir formül üretmiştir. Bu noktada şekil örüntülerinin sağladığı avantaj, öğrenci tarafından kullanılmamıştır.

210 öğrencinin 16 tanesi (%7.7) genellemenin testi aşamasına kadar gelerek ürettiği formülleri test etmiştir. Hem başarılı hem de başarısız çözümlerin genel sebebini cebirsel formüller oluşturmaktadır (bakınız, Şekil 62, Soldan 2. çözüm).

Yürütülen mülakatlar esnasında bal peteği örüntüsünün bütün öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde gözlemlendiği ve aşamayı atlayan bir öğrenci haricinde yine başarılı bir şekilde organize edildiği tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin büyük bir kısmının örüntünün 12. adımındaki kibrit çöpü sayısını doğru bir şekilde hesaplayarak örüntünün herhangi bir adımındaki kibrit çöpünü bulduracak formülü başarılı bir şekilde ürettiği görülmüştür. Üretilen formüller ise öğrencilerin geneli tarafından kontrol edilmiştir. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 25. Mülakata katılan öğrencilerin bal peteği probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	**HAKAN**	**KORAY**	**LEVENT**	**MAHİR**	**MELİS**	**MİNE**	**ÖZGE**	**RABİA**	**SİNEM**
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	X	X	X	-	X	X	X
Yordama	X	X	X	X	-	X	X	X	X
Yordamanın Testi	-	X	-	-	-	-	-	-	X
Genelleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Genellemenin testi	X	-	X	X	X	-	X	X	X

Tablo 25’te görüldüğü gibi mülakata katılan öğrencilerden Hakan, Levent ve Rabia yordamanın testi aşamasını atlayarak bütün aşamaları başarılı bir şekilde sergilemişlerdir. Mahir ve Özge ise yine yordamanın testi aşamasını atlayarak bütün aşamaları sergilemişler; ancak genelleme ve genellemenin testi aşamalarında başarısız olmuşlardır. Koray, genelleme aşamasına kadar gelmiştir ancak yaptığı yanlış yordamayı yordamanın testi aşamasında düzelterek genelleme aşamasını başarılı bir şekilde sergilemiştir. Melis yordama ve yordamanın testi aşamalarını atlayarak bütün aşamaları başarılı bir şekilde sergilemiştir. Mine ise gözlemlerin organizesi, yordamanın testi ve genellemenin testi aşamalarını atlayarak diğer tüm aşamaları başarılı bir şekilde sergilemiştir. Son olarak Sinem, gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamalarında başarılı, yordama ve sonraki aşamalarda başarısız bir çözüm sergilemiştir. Ayrıca bal peteği probleminde en çok sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları gözlemleme ve genelleme iken; en az sergilenen tümevarımsal düşünce aşaması yordamanın testidir. Öğrencilerin en çok hataya düştükleri aşamalar genelleme ve genellemenin testi iken; en az hataya düştükleri aşamalar gözlemleme ve gözlemlerin organizesidir.

Gözlemleme aşaması tüm öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Bu aşamada öğrenciler tarafından '*kibrit çöpleri birleşirken kaç tanesi ortak oluyor, her adımda kaç kibrit çöpü kullanılmış*' şeklindeki soruların cevabı aranmıştır. Aşağıda Özge ile araştırmacı arasında geçen diyalog görülmektedir **(Diyalog 22):**

…

Özge: [Bal peteği probleminin a şıkkını okur]. 12. adımını bulmamız gerekiyor. Burada şöyle bir yol izledim 1. adımda 6 tane var.

Araştırmacı: Yazalım 1. adımda 6.

Özge: 2. adımda 2 tane altıgen var ama kibrit çöpünün 1 eksik olması lazım. O zaman 11 olması gerekiyor.

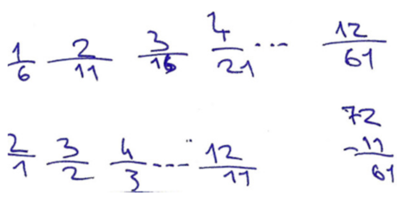
Araştırmacı: 11, peki 3. adımda?

Özge: 3. adımda 2 eksiği olması lazım. 6 ile 3'ü çarparım 18. 18-2=16 olur.

Araştırmacı: Niye 2 eksiği?

Özge: Çünkü her kibrit çöpünü bir defa yerleştirdiği için 1. adımda sadece 1 tane altıgen olmalı. 3. adımda verilen örüntüde 3 tane altıgen var. Normalde altıgenlerin hepsini ayrı ayrı düşündüğümüzde 18 çıkıyor. Ama birleştirdiğimiz zaman 2 kibrit çöpü eksilmiş oluyor. Bu yüzden 2 eksiği.

…



Şekil 64. Bal peteği problemi için Özge'nin verdiği yazılı açıklama.

Diyalog 22'de görüldüğü gibi Özge, yaptığı gözlemle diğer adımlarda başarılı olmanın kapısını aralamıştır. Çünkü gözlemleme aşamasında oluşturduğu toplam kibrit çöpünden ortak kibrit çöplerini çıkarma mantığını tüm adımlarda uygulamaya başlamıştır.

Gözlemlerin organizesi aşaması,Mine haricindeki tüm öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Bu aşamada öğrencilerin tümü verilen şekil örüntüsünü aritmetik değişen örüntü haline getirmiştir. Şekil 64'te görüldüğü gibi Özge, şekil örüntüsünün adımlarındaki kibrit çöpü sayısını tek tek yazarak gözlemlerini organize etmiştir. Bu organizasyonda şekillerin aritmetiğe dönüştürüldüğü görülmektedir.

Yordama aşamasında 8 öğrencinin 7 tanesi başarılı, 1 tanesi başarısız çözüm sergilemiştir. Bu aşamada bulunan başarılı çözümler, 12. adıma kadar adımları teker teker veya 4'er 4'er sayarak yazma, ortak kibrit çöplerini toplam kibrit çöplerinin sayısından çıkarma (bakınız, Şekil 64), üstte-altta ve aradaki kibrit çöplerini bölüm bölüm hesaplayarak toplam kibrit çöpüne ulaşma şeklinde çeşitlenmektedir. Başarısız çözümler ise adımların hatalı bir şekilde ilerletilmesi ile bulunan sonuçları içermektedir.

Yordamanın testi aşaması ise Koray ve Sinem tarafından başarısız bir şekilde sergilenmiştir. Öğrenciler bu aşamada yordama aşamasında yaptıkları hataları düzeltmeye çalışmışlardır. Örneğin Koray, alt-üst-orta şeklinde bölüm bölüm kibrit çöplerini sayarken alt ve üst kısımdaki toplam kibrit çöpünü 4. adım için yanlış söylemiş ve hatasını yordamanın testi aşamasında fark ederek düzeltmiştir. Bunun yanı sıra Sinem, kibrit çöplerini 12. adıma kadar teker teker yazarken birkaç adımda hatalı toplamalar yapmış ve yordamanın testi aşamasında bu hatasını düzeltmiştir.

Genelleme aşaması, Mahir, Özge ve Sinem haricindeki diğer katılımcı öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Genelleme aşamasında görülen başarılı çözüm türleri; adım sayısı ile kibrit çöpü sayısı arasında kurulan bağlantının '*5n-1*' şeklinde cebire dökülmesi, ortak farkın bulunmasıyla aritmetik değişen örüntü formülünün probleme uyarlanması (bakınız, Şekil 62, Soldan 2. çözüm), üst-alt-orta şeklinde bölüm bölüm hesaplanan kibrit çöpü sayısının *n.* adım için formüle dönüştürülmesi, toplam kibrit çöpünün oluşan altıgen sayısından hesaplanarak aradaki ortak çöp sayısının toplamdan çıkarılması (bakınız, Şekil 62, Soldan 1. çözüm) şeklinde çeşitlenmektedir. Başarısız çözümler ise terimler arası ortak farkın 5 olması ile '*n+5*' (bakınız, Şekil 63) veya '*5n*' gibi formüllerinin üretilmesi şeklinde çeşitlenmektedir.

Genellemenin testi aşaması ise 7 öğrencinin 4 tanesi tarafından başarılı, 3 tanesi tarafından başarısız bir şekilde test edilmiştir. Bu aşamada hatalı formül üreten 3 öğrenciden 2 tanesi (Özge ve Sinem) doğru formüle ulaşırken, 1 tanesi (Mahir) ulaşamamıştır. Genelleme aşamasında başarılı formüller üreten öğrenciler ise ulaştıkları formülleri test ederek doğruluğunu teyit etmişlerdir. Aşağıda Hakan'ın genellemeyi nasıl test ettiğini gösteren şekle yer verilmektedir:

$$\boxed{n \cdot 5+1} \rightarrow \begin{array}{l} 4 \cdot 5+1=21 \\ 8 \cdot 5+1=41 \end{array}$$

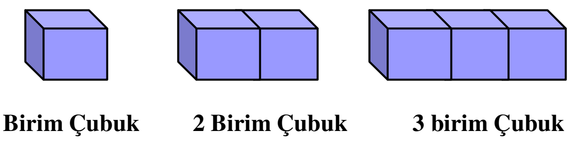
Şekil 65. Bal peteği problemi için genellemenin testi aşamasında Hakan'ın sergilediği başarılı çözüm.

Görüldüğü gibi Hakan, ürettiği genelleme formülünü 4. ve 8. adımlar için deneyerek doğru bir formül ürettiğinin farkına varmıştır. Benzer şekilde genellemenin testi, diğer öğrenciler tarafından da önceki adımlara dönüşler yapılarak gerçekleştirilmiştir.

4. 10. ÇUBUK ÜRETME PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Araştırma kapsamında öğrencilere yöneltilen çubuk üretme problemine aşağıda yer verilmektedir:

> Bir şirket, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi küpleri bir sırada birleştirerek boya makinesi ile renkli çubuklar üretmektedir.



> Bu makine, çubuktaki **her küpün bir yüzeyini bir kutu boya ile boyamaktadır.** Eğer bir küp diğer küple birleşiyorsa **yapışan yüzey boyanmamakta** küpün diğer tüm yüzeyleri ise boyanmaktadır. Buna göre;
>
> **a)** 20 birim uzunluğundaki çubuğu boyamak için kaç kutu boyaya ihtiyaç vardır? **Sonucu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**
>
> **b)** Herhangi bir uzunluktaki (*n* birim) çubuğu boyamak için kaç kutu boyaya ihtiyaç vardır? **Bu hesaplamayı yapmak için bir kural veya formül geliştiriniz ve bu kuralın mantığını açıklayınız** (Lannin v.d'den (2006) uyarlanmıştır).

Çubuk üretme problemi, bal peteği problemiyle içeriksel açıdan oldukça benzer bir sorudur. Verilen örüntü adımları bu problemde 3 boyutlu, bal peteği probleminde ise 2 boyutlu bir şekilde görülmektedir. Bu açıdan çubuk üretme probleminde öğrenciler tarafından uzamsal düşünce işe koşulmalıdır. Geometrik cisimlerle ilgili bu problemde üretilen çubuğun taban ve arka yüzeyleri de dahil edilerek bütünsel bir hesap yapmak gerekmektedir. Ayrıca küpün toplam yüzey sayısının hesaplanması ve ortadaki 2 yüzeyin toplamdan çıkarılması da öğrenciler tarafından izlenecek diğer bir yol olabilir. Aritmetiksel bir bakışla üretilen çözümlerin ise her adımdaki yüzey sayısının bulunarak örüntünün 20. ve *n.* adıma kadar devam ettirilmesi mantığını içermesi beklenmektedir. Aşağıda çubuk üretme probleminin yazılı sınav analizini gösteren tabloya yer verilmektedir:

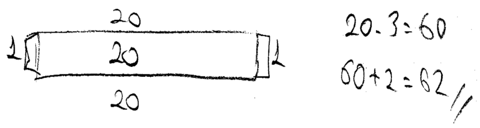
Tablo 26. Çubuk üretme problemine ait yazılı sınav analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	FREKANS	YÜZDE%
GÖZLEMLEME	**Başarılı**	**Verilen adımların yüzeylerini bulup yazma**	**1**	**0.5**
	Başarısız	Verilen adımların yüzeylerini yanlış sayma ve yazma	**3**	**1.4**
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**	**Verilen 3 adımı organize ederek yazma**	**1**	**0.5**
	Başarısız		**0**	**0**
YORDAMA	**Başarılı**	**20. adımı bulma**	**17**	**8.1**
		Teker teker sayarak 20. adımı bulma	**4**	**1.9**
	Başarısız	Küpün sadece belli yüzeylerini düşünerek yanlış hesaplar yapma	**60**	**28.6**
YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**		**0**	**0**
	Başarısız		**0**	**0**
GENELLEME	**Başarılı**	**Sözel**	**3**	**1.4**
		Cebirsel	**40**	**19**
		Cebirsel +Sözel	**5**	**2.4**
	Başarısız	Cebirsel	**43**	**20.5**
GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**Cebirsel**	**1**	**0.5**
	Başarısız	Cebirsel	**6**	**2.9**
BOŞ	**Çözüm yok**		**26**	**12.4**

Tablo 26'da görüldüğü gibi çubuk üretme probleminde en çok sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları sırasıyla genelleme ve yordama aşamalarıdır. En az sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları ise yordamanın testi ve gözlemlerin organizesidir. 210 katılımcı öğrencinin 4 tanesi (%1.9) gözlemleme aşamasında kalarak sonraki aşamalara geçememiştir. Gözlemleme aşamasında bulunan başarısız çözümler başarılı çözümlerden fazladır. Bu durum, başarılı çözümlerin sonraki aşamalara kolaylıkla atlayabildiğini göstermektedir. Başarılı gözlemler, sadece verilen adımlardaki küplerin yüzey sayısının başarılı bir şekilde hesaplanmasıyla oluşturulmuştur. Başarısız gözlemler ise küplerin yüzey sayısının yanlış hesaplanması sonucunda meydana getirilmiştir.

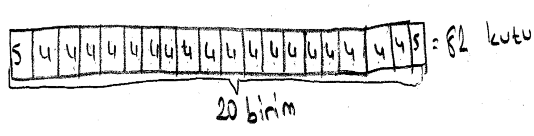
Öğrencilerin 1 tanesi (%0.5) gözlemlerin organizesi aşamasında kalarak gözlemlerini aritmetiksel bir dille ifade etmiş ancak yordama veya genelleme aşamasına geçememiştir. Bu öğrenci, verilen 3 adımı aritmetiksel bir temsille başarılı bir şekilde yazmıştır. Ayrıca bu aşamada başarısız bir çözüme rastlanmamıştır.

Katılımcı öğrencilerin 81 tanesi (%38.6) yordama aşamasında kalarak üretilen 20 birimlik çubuk için kaç kutu boya gerektiğini hesaplamıştır. Bu aşamada bulunan başarısız çözümlerin başarılı çözümlerden fazla olduğu görülmektedir. Başarısız çözümler küpün sadece görünen yüzeylerinin hesaplanması veya hatalı işlemler yapılması yoluyla oluşturulmuştur. Nitekim çubuk üretme probleminde uzamsal düşünce gerektiren gözlemleme hataları yordama aşamasındaki başarısız çözümlerin temel sebebidir. Aşağıda birleşen küplerin arka yüzünü hayal edemediği için yordama aşamasında hataya düşen Ö178'in çözümüne yer verilmektedir:



Şekil 66. Çubuk üretme problemi için yordama aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö178)

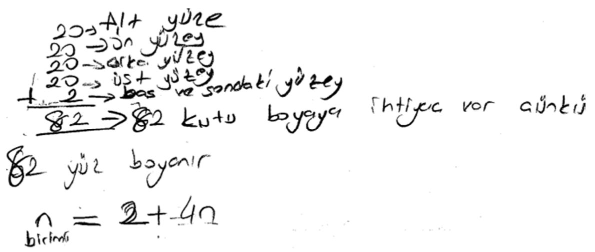
Şekil 66'da görüldüğü gibi 20 birimlik çubuk için şeklin sadece ön-üst-alt ve yan yüzeylerini hesaplayan Ö178, arka yüzeyi hesaba katmamıştır. Çünkü küpün açınımını hayal edememiş ve yüzeylerinin bütününü gözünde canlandıramamıştır. Yordama aşamasında kalan başarılı çözümler ise 20. adıma teker teker sayarak ulaşma veya 4 işlem yoluyla istenen adımı bulma şeklindedir. Ayrıca başarılı çözümlerde uzamsal düşüncenin başarılı bir şekilde işe koşulduğu tespit edilmiştir. Aşağıda yordama aşamasında kalan başarılı çözüm örneğine yer verilmektedir:



Şekil 67. Çubuk üretme problemi için yordama aşamasında bulunan başarılı çözüm örneği (Ö5)

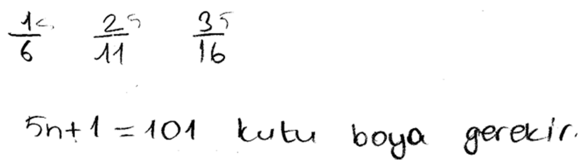
Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi Ö5 tarafından birleşen küplerin tüm yüzeyleri göz önünde bulundurulmuştur. Şekil 67'de Ö5 tarafından oluşturulan çizimin ilk ve son karelerinde yazan ‘5’ sayısı başlardaki küplerin yüzey sayısıdır. Ortada kalan küplerde ise ‘4’ yazmaktadır. Çünkü yapışan yüzeyler toplama dahil edilmemektedir.

Yordamanın testi aşamasında ise hiçbir çözüme rastlanmamıştır. Öğrencilerin 91 tanesi (%43.3) genelleme aşamasında kalarak çubuk üretme problemi için formül üretmeye çalışmıştır. Bu aşamada kalan başarılı çözümler, başarısız çözümlerden fazladır. Başarılı çözümler, en çoktan en aza cebirsel, cebirsel+sözel ve sözel temsillerle formülüze edilmiştir. Aşağıda Ö156 tarafından üretilen cebirsel formüle yer verilmektedir:



Şekil 68. Çubuk üretme problemi için genelleme aşamasında bulunan ve cebirsel formülü içeren başarılı çözüm örneği (Ö156).

Şekil 68’de görüldüğü gibi Ö156, 20 birimlik çubuğa bütünsel olarak bakmış ve çubuğun alt-üst-ön-arka ve yan yüzeylerini toplayarak 82 sonucuna ulaşmıştır. Bu toplamı, formüle yansıtan Ö156, alt-üst-ön-arka yüzeylerin sayısı eşit olduğu için ‘*4n*’ ifadesini yazmış ve her zaman yan kısımlarda bulunan 2 yüzeyi toplama dahil ederek ‘*4n+2*’ formülüne ulaşmıştır. Yordama aşamasında bulunan başarısız çözümler ise üretilen hatalı cebirsel formüllerden oluşmaktadır.



Şekil 69. Çubuk üretme problemi için genelleme aşamasında bulunan başarısız çözüm örneği (Ö99).

Şekil 69’de görülen çözüm, yapılan yanlış gözlemlerden kaynaklanmaktadır. Çünkü ilk küpün yüzey sayısı 6 iken, 2. küpün yüzey sayısı, kesişen bölgede ortak 2 yüzey bulunacağı için 10 olmalıdır. Ancak Ö99, örüntünün 2. adımındaki yüzey sayısına 11 yazarak aradaki 5 fark ile örüntüyü devam ettirmiş ve ‘*5n+1*’ şeklinde yanlış bir formül üretmiştir. Bu çözümde bal peteği probleminde görülen 2 boyutlu düşünce mantığı görülmektedir. Ancak çubuk üretme probleminde 2 boyutlu bu düşüncenin yerini 3 boyutlu düşüncenin alması gerekmektedir.

Öğrencilerin 7 tanesi (%3.4) genellemenin testi aşamasında kalarak ürettiği formülü test etmiştir. Bu aşamada bulunan başarısız çözümler başarılı çözümlerden fazladır. Başarılı çözümler doğru formüllerin testlerini içerirken; başarısız çözümler ise yanlış cebirsel formüllerin testlerini içermektedir.

Yürütülen mülakatlar esnasında 2 öğrenci (Rabia ve Sinem) tarafından bütün düşünce aşamaları başarısız bir şekilde işletilmiştir. Kalan öğrencilerin büyük bir bölümü çubuk örüntüsünü başarılı bir şekilde gözlemleyerek gözlemlerini organize etmiş ve örüntünün 20. adımında kaç kutu boya gerektiğini doğru bir şekilde hesaplamıştır. Bu öğrencilerin yine büyük bir kısmı genelleme aşamasında bahsedilen 2 öğrenciye benzer bir şekilde yanlış formüller üreterek ürettikleri bu formülleri kontrol etmiştir. Aşağıda mülakat sonuçlarını gösteren tabloya yer verilmektedir:

Tablo 27. Mülakata katılan öğrencilerin çubuk üretme probleminde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları analiz tablosu.

TÜMEVARIMSAL DÜŞÜNCE AŞAMALARI	**HAKAN**	**KORAY**	**LEVENT**	**MAHİR**	**MELİS**	**MİNE**	**ÖZGE**	**RABİA**	**SİNEM**
Gözlemleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Gözlemlerin organizesi	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordama	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Yordamanın Testi	-	-	-	-	-	X	-	X	X
Genelleme	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Genellemenin testi	X	X	-	X	X	X	X	X	-

Tablo 27'de görüldüğü gibi Hakan, Koray, Mahir ve Melis, yordamanın testi haricindeki tüm aşamaları sergilemişler ve başarısız formüller üreterek bu formüllerini test etmişlerdir. Özge ise yordamanın testi haricindeki tüm aşamaları başarılı bir şekilde sergilemiştir. Levent yordama, yordamanın testi ve genellemenin testi aşamalarını atlayarak başarılı bir çözüm sergilemiştir. Mine ve Rabia, tümevarımsal bütün aşamaları sergilemişler ancak Mine sadece gözlemleme aşamasında hataya düşerken Rabia bütün aşamalarda başarısız olmuştur. Sinem ise genellemenin testi haricindeki aşamaları başarısız bir şekilde sergileyerek çözümünü tamamlamıştır. Mülakat esnasında öğrencilerin en çok sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları gözlemleme, gözlemlerin organizesi, genelleme aşamaları iken; en az sergiledikleri aşama, yordamanın testidir. Ayrıca öğrenciler en fazla hatayı genelleme ve genellemenin testi aşamalarında yapmışlardır. Öğrencilerin en az hataya düştükleri aşama ise gözlemlerin organizesi ve yordama aşamalarıdır.

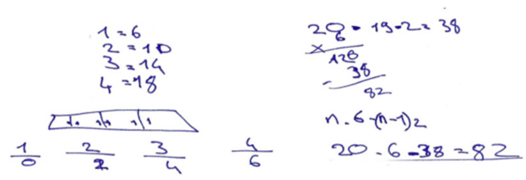
Gözlemleme aşamasında 9 öğrencinin 6 tanesi başarılı çözümler sergilerken, 3 tanesi başarısız çözümler sergilemiştir. Bu aşamada öğrencilerin tümü, gördükleri küplerin yüzeylerini sayarak aritmetiksel ifadeler kullanmıştır. Başarı sebeplerinden ilki, görülen yüzeylerin doğru bir şekilde sayılması ve ardından aritmetik değişen bir örüntünün (6, 10, 14, …) oluşturulmasıdır. Başarısızlık sebepleri ise yüzeylerden herhangi birinin sayılmaması veya yanlış sayılması şeklinde çeşitlenmektedir. 3 boyutlu olan bu soruda küpler birleştirilirken 2 yüzey ortaktır ve bu ortak yüzeylerin hesaba katılmaması gerekmektedir. Örneğin gözlemlerini ilk etapta başarısız bir şekilde yapan Mine, küplerin sadece 1 yüzeyinin ortak olacağını düşünmüş ancak araştırmacının sorularıyla yaptığı kontroller sonrasında birleşme noktasında 2 yüzeyin ortak olduğuna karar vermiştir.

Gözlemlerin organizesi aşamasında 7 öğrenci başarılı, 2 öğrenci başarısız olmuştur. Bu aşamada görülen başarılı çözümler problemdeki şekil örüntüsünün sayı örüntüsü şeklinde yazılması ile başarısız çözümler Rabia ve Sinem tarafından yüzey sayılarının hatalı bir şekilde hesaplanması ile (6, 10, 15, … örüntüsünün yazılması ile) oluşturulmuştur. Bu doğrultuda 3 boyutlu gözlemler, hem gözlemleme hem de organize aşamalarını doğrudan etkilemiştir.

Yordama aşaması 7 öğrenci tarafından başarılı; 2 öğrenci tarafından ise başarısız bir şekilde sergilenmiştir. Bu aşamada bulunan başarılı çözümler toplam yüzey sayısından kesişen yüzeyleri çıkarmak, görsel anlamda doğrudan 20 birim çubuğun yüzey sayısını bulmak, 6, 10, 14… gibi aritmetik değişen örüntünün terimlerini 4’er 4’er artırmak şeklinde sergilenmiştir. Başarısız çözümler ise yanlış gözlemler sonucu oluşturulan yordama hatalarından kaynaklanmaktadır. Bu hata ise 6, 10, 14, … örüntüsünün terimleri arasındaki farkın 4 olmasından dolayı 20. adım için ‘$20\times4=80$’ şeklinde bir sonucun bulunmasından kaynaklanmaktadır.

Genelleme aşamasında 6 öğrencinin başarısız, 3 öğrencinin başarılı formüller ürettiği görülmüştür. Bu aşamada başarılı olan çözümler, 6-10-14… şeklindeki örüntünün aritmetik değişen örüntü formülüne çevrilmesi, ön-arka-alt-üst ve yanlardaki yüzeylerin hesaplanması ile ‘$4n+2$’ formülünün üretilmesi veya her küpün toplam yüzeyinin hesaplanarak kesişen yüzeylerin bu toplamdan çıkarılması şeklinde çeşitlenmektedir. Başarısız çözümler ise örüntünün terime bağlı '*n+4, 4n'* formüllerinin yazılması veya deneme-yanılmalarla anlamsız formüllerin bulunması şeklinde çeşitlenmiştir. Toplam yüzey sayısından ortak yüzeyleri çıkararak formül üreten Özge ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir **(Diyalog 23**):

> **…**[Toplam yüzey sayısından kesişen yüzey sayısını çıkararak yordama aşamasına ulaşan Özge, sorunun b şıkkında bu düşüncesini formüle dökmek ister ve çözümüne devam eder]:
>
> **Özge:** Mesela adım sayısına *n* diyelim. 1 küpün de yüzey sayısına 6. Sonra ne yazmalıyım [düşünür]. Eksi arada birleşen yüzey sayısı olabilir.
>
> **Araştırmacı:** Birleşen yüzeyi nasıl ifade edersin?
>
> **Özge:** Birleşen yüzey *n-1*. Ancak birleşenler 2'şer yüzey götürdüğü için. *2×(n-1)* [der ve formülün tamamını yazar].
>
> **…**



Şekil 70.Çubuk üretme problemi için Özge'nin verdiği yazılı açıklama.

Diyalog 23'te görüldüğü gibi Özge, önce ortak yüzeyleri hesaplayarak '*n-1*' ifadesini yazmıştır. Ancak yapının 3 boyutlu olması gereği birleşim noktasında bulunan 2 yüzeyden hareketle bu ifadeyi '*2×(n-1)'* formülüne dönüştürmüştür. Son olarak toplam yüzey sayısını veren '*6n*' ifadesinden ortak yüzey sayısını veren '*2×(n-1)*' ifadesini çıkararak çözümünü tamamlamıştır (bakınız, Şekil 70).

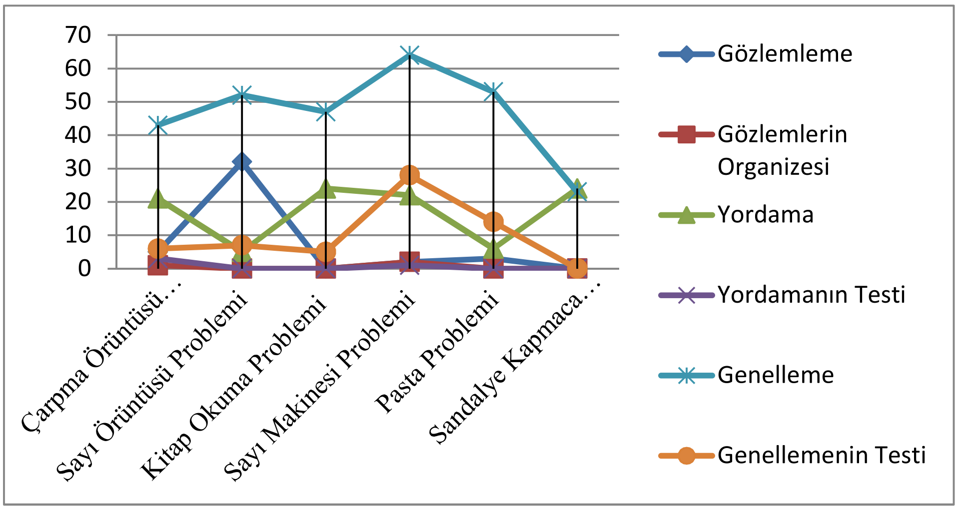
Genellemenin testi aşaması, 6 öğrenci tarafından başarısız, 2 öğrenci tarafından başarılı bir şekilde sergilenmiştir. Bu aşamada bulunan başarılı çözümler başarılı formüllerin testine (bakınız, Şekil 70), başarısız çözümler ise başarısız formüllerin testine dayanmaktadır (bakınız, Şekil 69). Ayrıca bu aşama, bütün öğrenciler tarafından önceki adımlara dönüşler yapılarak gerçekleştirilmiştir.

5. TARTIŞMA-SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yapılan araştırmada ilköğretim öğrencilerinin aritmetik, geometri öğrenme alanları ve bu alanlar arası geçişleri içeren tümevarımsal problemlerde sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamalarını belirlemek, öğrenme alanlarına göre bu aşamaları karşılaştırmak ve aşamaların birbiri ile ilişkisini saptamak amaçlanmıştır. Araştırmada elde edilen bulguların, ilköğretim düzeyinde öğrenme alanlarına göre hangi aşamaların nasıl, ne derece sergilendiği konusuna açıklık getirdiği düşünülmektedir.

Aşağıdaki grafik, aritmetiksel soruların tümünde sergilenen başarılı çözümlerin hangi tümevarımsal düşünce aşamasında kaldığını göstermektedir:



Şekil 71. Aritmetiksel sorular için başarılı çözümlerin bulunduğu tümevarımsal düşünce aşamaları grafiği.

Grafikte görüldüğü gibi aritmetiksel sorularda başarılı çözümlerin en çok bulunduğu tümevarımsal düşünce aşamaları sırasıyla genelleme, yordama, genellemenin testi, gözlemleme, yordamanın testi ve gözlemlerin organizesidir. Genelleme aşaması, en çok sayı makinesi ve pasta problemlerinde sergilenmiştir. Çünkü bu problemlerde giren ve çıkan sayıların tablo veya grafik üzerinde belli olması örüntünün kolaylıkla görülmesini, dolayısıyla adım-terim sayısı arasındaki ilişkinin kolaylıkla çözülmesini sağlamıştır (bakınız,Şekil 38 ve Şekil 39). Örneğin Mahir, grafik üzerinde verilen sayıları yazarak şeker ve un arasındaki farklara bakmıştır. Bulduğu ilişkiden hareketle 50 kg şeker için ne kadar un gerektiğini yordamıştır (bakınız, Diyalog 14 ve Şekil 42). Buradan çıkarılacak sonuç, adım sayısı ve terim sayısının açıkça verildiği sorularda genelleme aşamasına ulaşmanın daha kolay olduğudur. Bu bağlamda eldeki çalışmanın sonuçları Yaman'ın (2010) bulgularını desteklemektedir. Yaman (2010), yaptığı çalışmada sunum biçimlerinde girdi ve çıktı değerlerinin açık olarak görülebilmesinin verilen örüntülerin elemanları arasındaki ilişkiyi bulmayı kolaylaştırdığı sonucuna varmıştır. Genelleme aşamasında kalan başarılı çözümler ise en az sandalye kapmaca probleminde görülmektedir. Problemin sözel bir nitelik taşıması ve 1'den n'e kadar sayıların toplamı için formül üretme konusundaki eksiklik bu sonucun nedenlerini oluşturmaktadır (bakınız, Şekil 46). Bu noktada değinilmesi gereken diğer husus, genelleme aşamasında yapılan hatalardır. Araştırma bulguları göstermektedir ki aritmetiksel sorular kapsamında aritmetik değişen örüntüler içeren problemlerde terime bağlı hatalı formüller üretilmektedir. Örneğin, kitap okuma probleminde Ö55 tarafından yazılan '$n+3$' formülü (bakınız, Şekil 35) terimler arasındaki ortak fark 3 olduğu için üretilmiştir. Sayı örüntüsü probleminde çözüm sergileyen Rabia, soruda aritmetiksel değişen bir örüntü verilmemesine rağmen ortak farkı 6 bularak, bildiği formülü ($1+(n-1)\times 6$) bu probleme uyarlamaya çalışmış ancak formülün adımların bütününü sağlamadığını görmüştür (bakınız, Diyalog 7 ve Şekil 33). Elde edilen bu sonuç, Sasman v.d.'nin (1999) bulgularını desteklemektedir. Sasman v.d. (1999) yaptıkları çalışmada öğrencilerin çok az bir kısmının örüntülerdeki fonksiyonel ilişkileri (terime bağlı olmayan formüller) bulabildiğini ve öğrencilerin genellikle önceki adıma bağlı olarak örüntünün bir sonraki adımını bulabildikleri sonucuna varmışlardır.

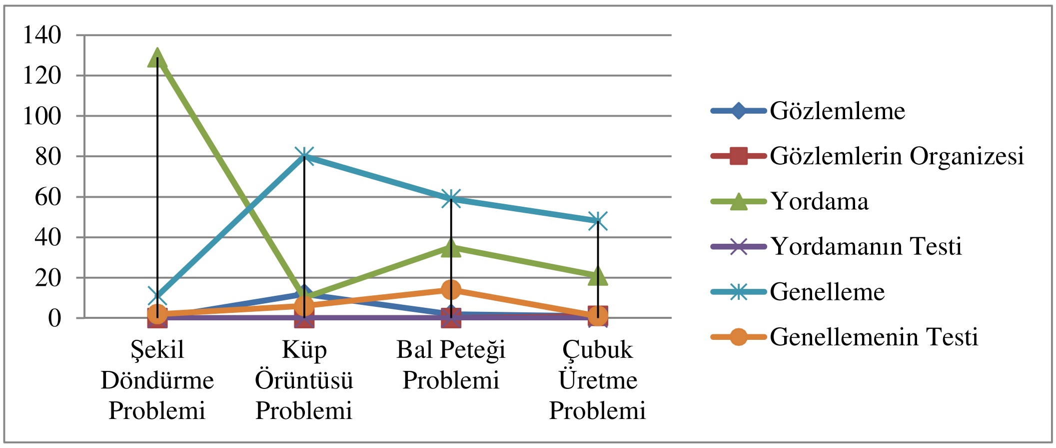
Aritmetiksel sorular açısından yordama aşamasında bulunan başarılı çözümler en az sayı örüntüsü ve pasta problemlerinde, en çok kitap okuma ve sandalye kapmaca problemlerinde görülmektedir. Bu durumun sebebi ise sayı örüntüsü ve pasta problemlerinde başarılı çözümlerin yordama aşamasını kolaylıkla atlayarak genelleme aşamasına ulaşabilmesidir. Dolayısıyla sayı örüntüsü ve pasta problemlerinde başarısız yordamalar çoğunluktadır (bakınız, Tablo 10 ve Tablo 16). Örneğin sayı örüntüsü probleminde artarak değişen 1, 8, 27, … örüntüsünün aritmetiksel değişen bir sayı örüntüsü gibi görülerek 25. adıma hatalı bir şekilde ulaşılması başarısızlık sebeplerinden biridir. Örneğin Özge, bu problemde verilen terimler arasındaki farkın sabit olmasını beklemektedir (bakınız, Diyalog 6). Özellikle terimler arasındaki farklara bakılarak örüntünün ilerletilmeye çalışılması, ilişkilerin görülmesini ve formülün üretilmesini zorlaştırmaktadır. Bu bağlamda çıkan sonuç, Orton ve Orton'un (1999) bulgularını desteklemektedir. Orton ve Orton (1999), artarak değişen örüntülerle ilgili çocukların ve yetişkinlerin düşüncelerini araştırdıkları çalışmalarında terimler arası farklara bakan çocukların örüntünün kuralını ifade etmede yetersiz olduklarını tespit etmişlerdir. Pasta probleminde ise başarısız yordamalar, oran-orantı veya hatalı hesaplamalarla 50 kg şeker için gereken un miktarının bulunmaya çalışılmasından kaynaklanmaktadır. Örneğin Mine, '*4 kg şeker için 10 kg un gerekirse, 50 kg şeker için ne kadar un gerekir*' düşüncesi ile kurduğu orantıyı 1 kg şeker için tekrarladığında yordamasının hatalı olduğunu anlamıştır (bakınız, Şekil 43 ve Diyalog 15). Bu durumda pasta probleminin genellenmesi için kullanılan oran-orantı yöntemi bu problemin yanlış genellenmesine yol açmıştır. Benzer şekilde sayı makinesi ve kitap okuma problemlerinde de sergilenen oran-orantı düşüncesi de yanlış genellemelere yol açmaktadır (bakınız, Şekil 34 ve Tablo 14). Buradan çıkarılacak sonuç ise oran-orantı yönteminin öğrenciler tarafından etkili bir şekilde kullanılamamasıdır. Çıkan bu sonuç, Lannin v.d.'nin (2006) bulgularını desteklemektedir. Lannin v.d. (2006) yaptıkları çalışmada orantısal akıl yürütme yoluyla yapılan genellemelerin sık sık hatalı sonuçlar verdiği sonucuna ulaşmışlardır.

Kitap okuma ve sandalye kapmaca problemlerinde ise diğer problemlere nazaran yordama aşamasında kalan çözümlerin fazla olması problemlerde bulunan örüntülerin belli adımlarına başarılı bir şekilde ulaşıldığını göstermektedir. Kitap okuma problemine olan aşinalık hem yordama hem de genelleme aşamasında başarılı çözümlerin fazla olmasını sağlamıştır. Ancak sandalye kapmaca probleminde yordama (n=24) ve genelleme aşamalarında (n=23) bulunan başarılı çözümlerin birbirine yakın olması '*n*' sayıda öğrencinin değil, belli bir sayıda öğrencinin katıldığı oyun için çözümlerin daha kolay yapıldığını göstermektedir (bakınız, Şekil 46).

Genellemenin testi aşamasında bulunan başarılı çözümler ise en fazla sayı makinesi, en az sandalye kapmaca probleminde görülmektedir. Dikkat edilirse bu sonuç, genelleme aşamasındaki sonuçla paraleldir. Çünkü genelleme aşamasının en başarılı sergilendiği problem, sayı makinesi iken; en az başarı ile sergilendiği problem, sandalye kapmaca problemidir. Bu doğrultuda genellemenin testi aşamasında başarılı genellemelerin teyit edildiği sonucu çıkarılabilir. Örneğin Levent, pasta problemi için ürettiği '$2n+2$' formülünü 50. adıma dönerek kontrol etmiştir (bakınız, Diyalog 16 ve Şekil 44). Buradan çıkan sonuç ise ilköğretim düzeyinde genellemenin testi aşamasının önceki adımlara dönülerek gerçekleştirilmesidir. Bu sonuç, Cañadas ve Castro'nun (2007) bulgularını desteklemektedir. Cañadas ve Castro (2007), ilköğretim düzeyinde yaptıkları çalışmada öğrenciler tarafından üretilen formüllerin örüntünün önceki adımlarına dönülerek kontrol edildiği sonucuna varmışlardır. Genellemenin testi aşamasından sonra başarılı çözümler en çoktan en aza sırasıyla gözlemleme, yordamanın testi ve gözlemlerin organizesi aşamalarında kalmıştır.

Gözlemleme aşamasında bulunan başarılı çözümler en çok sayı örüntüsü probleminde (n=32) bulunmaktadır. Kitap okuma ve sandalye kapmaca problemlerinde ise gözlemleme aşamasında hiçbir çözüm bulunmamaktadır. Gözlemleme aşamasının öğrenciler tarafından en çok sayı örüntüsü probleminde sergilenmesinin sebebi, artarak değişen 1, 8, 27, … örüntüsünün terimleri arasındaki farklara bakılması ve ortak fark bulunamayınca çözümün bu noktada bırakılmasıdır (bakınız, Diyalog 6 ve Şekil 32). Gözlemleme aşamasında bulunan çözümlerin kitap okuma ve sandalye kapmaca gibi problemlerde sergilenmeme sebebi ise sözel bir tarzda sorulmuş bu problemler için gözlemlerin kâğıda yansıtılamamasıdır. Çünkü problem okunduktan sonra soruda verilenler yazılmadan çözüme geçen öğrenciler bu aşamayı zihinsel olarak işletmektedirler. Gözlemlerin organizesi ve yordamanın testi aşamalarında başarılı çözümlerin aritmetiksel soruların genelinde görülmemesi ise bu aşamaların başarılı çözümler tarafından kolaylıkla atlandığını göstermektedir.

Aşağıda geometrik soruların tamamında sergilenen başarılı çözümlerin hangi aşamalarda olduğunu gösteren grafiğe yer verilmektedir (bakınız, Şekil 72). Araştırma bulguları göstermektedir ki şekil döndürme problemi haricindeki geometrik problemlerde en çok sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları sırasıyla genelleme, yordama, genellemenin testi, gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordamanın testidir. Nitekim şekil döndürme probleminde en çok sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları, yordama, genelleme ve genellemenin testi iken; gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordamanın testi aşamaları öğrenciler tarafından sergilenmemiştir.



Şekil 72. Geometrik sorular için başarılı çözümlerin bulunduğu tümevarımsal düşünce aşamaları grafiği.

Şekil döndürme probleminde yordama aşamasında bulunan başarılı çözümler (n=129) sadece örüntünün 16. ve 22. adımlarının bulunması ile oluşturulmuştur (bakınız, Şekil 50). Bu durumun sebebi şekil örüntüsünün cebirsel olarak nasıl ifade edileceğinin bilinmemesidir. Nitekim başarısız formüllerin çoğunda öğrenciler tarafından '*n*' harfinin bir sayı olarak bilinmesi gerektiği vurgulanmıştır (bakınız, Şekil 51). Buradan çıkan sonuç, herhangi bir aritmetiksel örüntü türüne çevrilemeyen geometrik sorularda genelleme aşamasına başarılı bir şekilde geçilememesidir. Bu kapsamda geometrik sorularda bulunan şekil örüntüleri, öğrenciler tarafından sayı örüntüleri oluşturmak için kullanılmıştır. Araştırmadan elde edilen bu sonuç, Rico'nun (1996) bulgularını desteklemektedir. Çünkü Rico (1996), yaptığı çalışmada öğrencilerin şekilleri bir ilişki bulma yönünde incelemek yerine sayı örüntüsüne dönüştürmek için kullandıkları sonucuna ulaşmıştır. Genelleme aşamasında bulunan başarılı çözümler en çok küp örüntüsü probleminde görülmektedir (n=80). Bu durumun sebebi ise küp örüntüsü probleminde görsel unsurların genellemeye büyük bir katkı sağlamasıdır. Araştırmadan çıkan bu sonuç, Cañadas v.d.'nin (2009) bulgularını desteklemektedir. Cañadas v.d. (2009), yaptıkları çalışmada görsel unsurlar içeren soruların öğrenciler tarafından daha iyi tanımlanarak daha kolay genellendiğini belirtmişlerdir.

Yordama aşaması, şekil örüntüsü probleminden sonra en çok bal peteği probleminde sergilenmiştir (n= 59). Bu durumun sebebi, bal peteği probleminde bulunan şekil örüntüsünün kolaylıkla gözlemlenerek organize edilmesidir. Çünkü çubuk üretme probleminde 3 boyutlu şeklin gözlemlenmesi, küp örüntüsü probleminde sayı örüntüsünün devam ettirilmesi konusunda bazı zorluklar bulunmasına rağmen bal peteği probleminde böyle bir durum söz konusu değildir. Çünkü bu problemde yer alan şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne kolaylıkla çeviren öğrenciler, 12. adımdaki çubuk sayısına kolaylıkla ulaşabilmişlerdir. Örneğin Özge bu problemde verilen ilk 3 adımı gözlemlemiş ve toplam kibrit çöpünden ortak olanları çıkararak 12. adımdaki kibrit çöpü sayısına ulaşmıştır (bakınız, Diyalog 22 ve Şekil 64).

Genellemenin testi aşamasında ise başarılı çözümler en çok bal peteği probleminde (n=14), en az çubuk üretme probleminde (n=1) bulunmaktadır. Bu durumun sebebi ise genelleme aşamasında başarılı formülleri içeren çözümlerin bal peteği probleminde daha çok (n=59) çubuk üretme probleminde daha az (n=48) olmasıdır. Görüldüğü gibi genellemenin testi aşaması, başarılı genelleme formüllerine paralel olarak sergilenmektedir. Gözlemleme aşamasında bulunan başarılı çözümler ise en çok küp örüntüsü probleminde görülmektedir. Çünkü bu problemde 1, 8, 27, … şeklinde ilerleyen örüntü için ilk etapta sabit bir fark arayan öğrenciler, bu farkı bulamayınca çözümü yarıda bırakmışlardır. Örneğin Mahir, küp örüntüsü probleminde adımlarda bulunan birim küplerin sayısını yazarak bu sayılar arasındaki farklara bakmış ve sabit bir fark aramıştır (bakınız, Diyalog 20 ve Şekil 59). Gözlemlerin organizesi ve yordamanın testi aşamalarında geometrik sorular bazında başarılı çözümlerin görülmemesi ise bu aşamaların atlandığını göstermektedir. Gözlemlerin organizesi aşamasının atlanmasının sebebi, geometrik sorularda adımların tek tek belli olması ve problemlerde verilen şekil örüntülerinin esasında organize edilmiş bir şekilde verilmiş olmasıdır.

Araştırma bulguları göstermektedir ki aritmetiksel ve geometrik sorularda aritmetikten cebire veya geometriden cebire geçiş, öğrenciler tarafından başarılı bir şekilde gerçekleştirilmektedir. Ancak aritmetiksel sorularda soruların bütününde, geometrik sorularda ise şekil döndürme problemi hariç bütün sorularda bu durum geçerlidir. Bu konuya açıklık getirmesi bakımından araştırmada kullanılan paralel soruların yorumlanması yerinde olacaktır. Paralel sorulardan sayı örüntüsü ve küp örüntüsü problemleri arasında, küp örüntüsü probleminde daha başarılı çözümlerin yer alması sayı örüntülerinin görsel versiyonlarında geometriden cebire geçişlerin aritmetikten cebire geçişlerden daha kolay olduğunu göstermektedir (bakınız, Tablo 10 ve Tablo 22). Örneğin mülakata katılan öğrencilerden Koray ve Melis, sayı örüntüsü probleminde başarısız, küp örüntüsü probleminde ise başarılı çözümler sergilemiştir (bakınız, Tablo 11 ve Tablo 23). Bu durum, küp örüntüsü probleminde verilen görsel örüntünün daha anlaşılır olduğunu göstermektedir. Elde edilen bu sonuç, Sasman v.d.'nin (1999) bulgularını desteklemektedir. Sasman v.d. (1999) yaptıkları çalışmada aritmetiksel örüntülerinin görsel sunumlarında genellemelerin daha kolay yapıldığı sonucuna ulaşmışlardır. Diğer paralel sorular, tablo şeklinde sunulan sayı makinesi ve grafik şeklinde sunulan pasta problemidir. Sayı makinesi probleminde pasta problemine göre daha başarılı çözümlerin sergilenmesi, tablo ile sunulan örüntülerde tümevarımsal düşünce aşamalarının daha başarılı bir şekilde sergilendiğini göstermektedir (bakınız, Tablo 14 ve Tablo 16). Nitekim grafiklerin çizimi esnasında tablolar bir geçiş niteliğindedir. Bu durumda ilk etapta tablodan elde edilen veriler, grafikten elde edilen verilere göre daha anlaşılır bir nitelik taşımaktadır. Elde edilen bu sonuç Yerushalmy'nin (1997) bulgularını desteklemektedir. Yerushalmy (1997), fonksiyonların gösterimleri konusunda yaptığı çalışmada öğrencilerin problem çözerken önce bilgileri tabloya döktüklerini, ardından tablodaki bilgileri genellediklerini ve son olarak genel durumu yansıtan denklemin grafiğini çizdiklerini belirtmiştir. Bu noktada öğrencilerin grafik çizimi esnasında tabloları adeta bir köprü gibi kullandıklarını ifade etmiştir.

Diğer paralel sorular bünyesinde 2 boyutlu bal peteği ve 3 boyutlu çubuk üretme problemleri arasında bal peteği probleminde daha başarılı çözümlerin sergilenmesi, 2 boyutlu problemlerde tümevarımsal düşünce aşamalarının daha kolay gerçekleştirildiğini göstermektedir. Bu durumun sebebi, küplerin yüzeyleri hesaplanırken 3 boyuttan 2 boyuta uzamsal düşüncenin sergilenmesidir. Esasında küpün yüzeylerini hesaplamak, önce küpün açınımını zihinde canlandırmayı gerektirmektedir. Örneğin Rabia, bal peteği probleminde tüm aşamalarda başarılı bir çözüm sergilerken, çubuk üretme probleminde başarısız bir çözüm sergilemiştir (bakınız, Tablo 25 ve Tablo 27). Çıkarılan bu sonuç Karaaslan v.d.'nin (2012) bulgularını desteklemektedir. Karaaslan v.d. (2012) yaptıkları çalışmada öğrencilerin3 boyutlu şekillerin açınımlarını zihinde canlandırma ve bu şekilleri 2 boyutlu düşünme noktasında sıkıntı yaşadıklarını tespit etmişlerdir.

Araştırma bulguları göstermektedir ki tümevarımsal düşünce sergilenirken önceki aşamalar, sonraki aşamaları etkilemektedir. Örneğin çarpma örüntüsü probleminde örüntüyü nasıl organize edeceğini planlayan Özge, oluşturduğu organize mantığı sayesinde örüntünün 100. adımını yordayabilmiştir (bakınız, Diyalog 2).

Esasında yapılan organizasyonun hem yordama hem de genelleme aşamasına ışık tuttuğunun bir örneğini de Mine'nin kitap okuma probleminde oluşturduğu organizasyon mantığında görebilmek mümkündür (bakınız, Diyalog 8). Örneğin, kitap okuma probleminde Mine'nin ilk gün 20, 2. gün 23, 3. gün 26,…şeklinde ilerleyen örüntüyü $20+3\times0$, $20+3\times1$, $20+3\times2$, … şeklinde organize etmesi, 25. gün için '$20+3\times24$' ve *n.* gün için '$20+3\times(n-1)$' şeklinde formül üretmesini sağlamıştır (bakınız, Şekil 36). Diğer bir örnek ise Özge'nin sayı örüntüsü, sayı makinesi ve küp örüntüsü gibi problemlerde yordama aşamasında yaptığı yanlışlığın genelleme ve genellemenin testi aşamasına yansımasıdır (bakınız, Tablo 11, Tablo 15 ve Tablo 23). Bütün bu bulgular tümevarımsal düşünce süreci aşamalarının birbirleriyle çok yakın bir ilişki içerisinde olduklarını, bir aşamada ortaya konulan fikir ve düşüncelerin bir sonraki aşamada yürütülen zihinsel aktiviteleri etkilediğini göstermektedir. Ulaşılan bu sonuç, Cañadas v.d.'nin (2009), bulgularını desteklemektedir. Cañadas v.d. (2009), öncekine bağlı 4 tümevarımsal düşünce aşaması tespit etmişlerdir. Bağımlı olan bu aşamalar şu şekildedir: organizasyon aşaması gözlemlemeye, araştırma ve tahmin etme aşaması organizasyona, araştırma ve tahmin etme aşaması gözlemlemeye, genelleme ise araştırma ve tahmin etme aşamalarına bağlı olarak değişmektedir.

Sonuç olarak ilköğretim 2. kademe öğrencilerinin aritmetik öğrenme alanında sergiledikleri tümevarımsal düşünce aşamaları en çoktan en aza genelleme, yordama, genellemenin testi, gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordamanın testidir. Geometri öğrenme alanında ise toplam çözümler açısından sergilenen tümevarımsal düşünce aşamaları en çoktan en aza yordama, genelleme, genellemenin testi, gözlemleme, yordamanın testi ve gözlemlerin organizesidir. Şekil döndürme problemi haricindeki geometrik problemlerde genelleme aşamasının yordamadan fazla olması öğrencilerin geometrik örüntüleri sayı örüntülerine çevirerek çözüme ulaşmaya çalışmalarından kaynaklanmaktadır. Çünkü şekil döndürme problemini sayı örüntüsüne dönüştüremeyen öğrenciler, bu problemde genelleme aşamasını başarılı bir şekilde sergileyememişlerdir. Ancak sergilenen başarılı çözümlerin sayısı açısından aritmetik öğrenme alanında tümevarımsal düşünce aşamaları geometri öğrenme alanına göre daha başarılı bir şekilde sergilenmektedir. Görüldüğü gibi ilköğretim düzeyindeki öğrenciler, aritmetik öğrenme alanında daha başarılı çözümler sergilemekte ve alanlar arası geçişte bu alanı muhakkak kullanmaktadırlar. Araştırmadan çıkan diğer bir sonuç ise aritmetiksel soruların görsel sunumlarını içeren sorularda genelleme formüllerinin öğrenciler tarafından daha kolay üretilmesidir. Nitekim geometri öğrenme alanındaki soru, aritmetik öğrenme alanındaki soruyu görsel anlamda zenginleştiriyorsa geometriden cebire geçişler kolaylaşmaktadır. Ayrıca paralel sorulardan elde edilen diğer sonuç, tablo ile sunulan problemlerin grafikle sunulan problemlere göre daha başarılı bir şekilde çözülmesidir. Bunun yanı sıra öğrencilerin 2 boyutlu görsel ortamlarda sorulan tümevarımsal problemlerde 3 boyutlu problemlere göre daha başarılı çözümler sergiledikleri görülmektedir. Bu durum 3 boyutlu örüntülerin 2 boyutlu örüntülerden daha zor görülerek bu tür örüntülerin zihinde hayal edilememesinden kaynaklanmaktadır. Araştırmadan elde edilen diğer bir sonuç ise tümevarımsal düşünce aşamalarının birbirini etkileyen bir nitelik taşımasıdır. Özellikle önceki aşamalar, sonraki aşamalara bir temel oluşturmaktadır. Çünkü her aşama, bir sonraki aşamaya hazırlamakta ve genelleme aşamasına bu şekilde bir genişletme yoluyla ulaşılmaktadır. Bir aşamadaki başarısız çözüm bir sonraki aşamayı etkilemekte veya kontroller esnasında geriye dönüşler gerçekleştirilerek aşamalardaki hatalar giderilmeye çalışılmaktadır. Ayrıca aşamaların tamamı tüm sorularda sergilenmemekte, genel olarak bazı sorularda bazı aşamalar kişiden kişiye değişen bir nitelik göstererek atlanmakta ve sergilenmektedir.

5.2. ÖNERİLER

Tümevarımsal düşünce, matematiksel manada verilen örüntüdeki ilişkilerin fark edilmesi ile başlayan ve bu ilişkilerin matematiksel bir dile dönüştürülerek evrensel bir formüle dönüşümünün gerçekleştirilmesi ile sonlanan bir süreçtir. Bu süreçte var olduğu düşünülen gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi aşamaları problemlerin çözümü esnasında sergilenmektedir. Matematikte üretilen formüllerin ispatının yapılmasını da içine alan bu süreç, matematik yapmakla eşdeğerdir (NTCM, 1989). Çünkü kuralların üretilmesi, durumların matematiksel manada yorumlanmasını gerektirmektedir. Bu bağlamda örüntülerden yola çıkılarak sergilenen tümevarımsal düşünce, cebirsel düşüncenin çatısını oluşturmaktadır. Bu yüzden verilen örüntülerin genel bir ifadeye dönüştürülmesi oldukça önemli bir husustur. Böylece birey, ürettiği formülün anlamını kavrayarak gördüğü nesneleri matematiksel bir dille anlatma yolunda ilerleme kaydederek matematiksel düşünmeyi gerçekleştirecektir (Yeşildere ve Türnüklü, 2007; Kabael ve Tanışlı, 2010).

Araştırmada öğrenciler tarafından hem aritmetik hem de geometri öğrenme alanlarında tümevarımsal düşünce aşamalarının tamamının sergilendiği tespit edilmiştir. Ancak bu sürecin aritmetik öğrenme alanında geometri öğrenme alanına göre daha başarılı bir şekilde işletildiği görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin karşılaştıkları tüm örüntüleri belli formül kalıpları içinde düşünmelerinden kaynaklanmaktadır. Çünkü sınıf içi öğretimsel etkinliklerde hem sayı hem de şekil örüntüleri 'ortak farkla artan' veya 'ortak farkla artmayan' şeklinde sınıflandırılmakta ve örüntü ne olursa olsun aritmetiğe çevrilmesi gerektiği vurgulanmaktadır. Bu yaklaşımla örüntüler konusu, cebirsel düşünceyi geliştirme amacından çok, bilinen formüllerin sorulara uyarlanması gibi bir amaca hizmet etmektedir. Dolayısıyla sınıf ortamında, örüntülerden formüllere giden süreç, doğal bir şekilde gerçekleştirilmelidir. Formülle başlayan örüntü öğretimi yerine, pek çok örüntü örneği ile başlayıp formüllerin üretimini içeren bir öğretim süreci planlanmalıdır. Ayrıca geometri öğrenme alanındaki tümevarımsal düşüncenin gelişimini destekleyen (örneğin sayı örüntülerinin şekil örüntülerine dönüştürülmesini içeren) etkinlikler tasarlanmalıdır.

Örüntü öğretiminin nitelikli bir hale getirilmesi için öncelikle öğretmenlerin bu konudaki alan bilgileri artırılmalı ve örüntülere bakış açıları zenginleştirilmelidir. Çünkü 2005-2006 eğitim-öğretim yılından itibaren uygulanan ilköğretim programı doğrultusunda programa eklenen yeni matematik konularının öğretimi noktasında bazı aksaklıkların yaşanabileceği düşünülmektedir. Bu noktada örüntülerin öğretimi konusunda matematik öğretmenlerine hizmet içi seminerler ile tümevarımsal düşünce süreci aşamaları tanıtılmalı ve öğretmenlerin bu sürecin işletilmesine ilişkin becerileri geliştirilmelidir. Ayrıca değişen ilköğretim programında örüntü konusu içeriksel anlamda zenginleştirilmeli ve tümevarımsal düşünce sürecinin işletilmesine yönelik örnek etkinliklere yer verilmelidir.

Son olarak seçilen bir grup öğrencinin tüm öğrenim düzeylerini içine alan tümevarımsal düşünce aşamalarının gelişimi konusunda uzun soluklu bir araştırma yapılabilir. Böylece tümevarımsal düşünce aşamalarının gelişim sürecinin nasıl gerçekleştiği, süreçte hangi aşamaların nasıl sergilendiği ve değişikliğe uğradığı konusunda daha ayrıntılı bilgiler elde edilebilir. Ayrıca eldeki araştırmanın geliştirilerek gerekirse daha fazla öğrenci ile sadece mülakatlarla toplanan verilerin ayrıntılı incelenmesini içeren araştırmaların yapılması da önerilebilir.

KAYNAKÇA

Akkaş, S., H. Hacısalihoğlu, Z. Özel ve A. Sabuncuoğlu. (2010). *Soyut Matematik* (4. Baskı). Ankara: Hacısalihoğlu Yayınları.

Albayrak-Bahtiyari, Ö. (2010). *8. Sınıf Matematik Öğretiminde İspat ve Muhakeme Kavramlarının ve Önemlerinin Farkındalığı*. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Anabilim Dalı. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. Erzurum.

Allen, L. G. (2001). "Teaching Mathematical Induction: An Alternative Approach". *Mathematics Teacher, 94*, 500-504.

Altındağ, M. (2005). *Nitel Araştırma Teknikleri*. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Eğitim Bilimleri Anabilim Dalı. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ankara.

Altıparmak, K. ve T. Öziş. (2005). "Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme". *Ege Eğitim Dergisi 6*(1), 25–37.

Armağan, İ. (1974). *Bilgi ve Toplum I- Bilgi Sosyolojisine Giriş*. İstanbul: Otağ Matbaası.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi*. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı. Yayımlanmış Doktora Tezi. Bursa.

Arslan, R. ve S. Yeşildere. (2010). "Sayı Örüntülerinde Cebirsel Genelleme Yapmayı Destekleyen Etkinlik Tasarımları". *Matematikçiler Derneği 9. Matematik Sempozyumu ve Şenlikleri,* Trabzon, Türkiye.

Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Balcı, M. ve A. Aral. (2003). *Çözümlü Matematik Analiz Problemleri Cilt 1*. Ankara: Balcı Yayıncılık.

Bayazit, İ. ve Y. Aksoy. (2009). Matematiksel problemlerin öğrenimi ve öğretimi. E. Bingölbali ve F. Özmantar (Eds.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde (ss. 287-312). Ankara, Pegem Akademi.

Burns, M. (2000). *About Teaching Mathematics A-K 8 research.* California: Math Solutions Publication.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y Caracterización del Razonamiento Inductivo Utilizado por Estudiantes de Educación Secundaria al Resolver Tareas*

Relacionadascon Sucesiones Lineales y Cuadráticas. [Description and Characterization of Inductive Reasoning Used by Secondary Students in Solving Tasks Related to Linear Quadratic Sequences]. Universidad de Granada. Doctoral thesis. Granada.

Cañadas, M. C. and E. Castro. (2007). "A Proposal of Categorisation for Analysing Inductive Reasoning". *PNA,1* (2), 67-78.

Cañadas, M. C., E. Castro and E. Castro. (2009). "Using A Model to Describe Students' Inductive Reasoning in Problem Solving". *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7* (1), 261-278.

Cañadas, M. C., J. Deulofeu, L. Figueiras, D. Reid and A. Yevdokimov. (2008). "The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice". *Journal of Teaching and Learning, 5* (1), 55-72.

Carpenter, T. and M. Franke. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. H, Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: the future of the teaching and learning of algebra* içinde (ss. 155–162). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Carraher, D. W., M. V. Martinez and A. D. Schliemann. (2008). "Early Algebra and Mathematical Generalization". *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22.

Cathcart, W. G., V. M. Pothier, T. H. Vance and N. S. Bezuk. (2003). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools*. River, N. J: Merrill/ Prentice Hall.

Cohen, L., L. Manion and K. Morrison. (2002). *Research Methods in Education*. London: Routledge.

DiLivio, L. L. (2009). *Relationshıps Between Inductive Reasoning and Knowledge Based Variables: An Integration of Psychometric and Cognitive Approaches*. University of New York. Doctoral Thesis. New York.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* içinde (ss. 25–41). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* içinde (ss. 95–123). Kluwer Academic Publishers, Dordecht.

Ellis, A. B. (2007). “A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actionsand Reflection Generalizations”. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221–262.

English, L. and E. Warren. (1995). “General Reasoning Processes and Elementary Algebraic Understanding: Implications for Instruction”. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17*(4), 1–19.

Ergün, M. (2005). Bilimsel Araştırma Yöntemleri: Nitel Araştırma. Web Sitesi: **http://www.egitim.aku.edu.tr/nitelarastirma.ppt#256,1**,. (Erişim Tarihi: Mayıs 2012).

Figueiras, L. and M. C. Cañadas. (2010). “Reasoning on Transition from Manipulative Strategies to General Procedures in Solving Counting Problems”. *The Britisth Congress of Mathematics Education*, Manchester, North West England.

Fox, D. (1969). *The Research Process in Education*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Gallardo, A. (2002). “The Extension of the Natural-Number Domain to the Integers in the Transition from Arithmetic to Algebra”. *Educational Studies in Mathematics,49*,171–192.

Goetz, J. P. and M. D. Le Compte. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. New York: Academic Press.

Harel, G. and D. Tall. (1991). “The General, the Abstract, and the Generic”. *For the Learning of Mathematics*, *11*, 38–42.

Hargreaves, M., D. Shorrocks-Taylor and J. Threlfall. (1998). “Children’s Strategies with Number Patterns”. *Educational Studies, 24*(3), 315-331.

Heit, E. (2000). “Properties of Inductive Reasoning”. *Psychonomic Bulletin & Review, 7,* 569-592.

Heit, E. (2007). What is induction and why is it important. A. Feeney and E. Heit (Eds.), *Inductive reasoning: experimental, developmental and computational approaches* içinde (ss.3-49). New York: Cambridge University Press.

Herbert, K. and R. H. Brown. (1997). “Patterns as Tools for Algebraic Reasoning”. *Teaching Children Mathematics, 3*, 123-128.

Kabael, T. ve D. Tanışlı. (2010). “Cebirsel Düşünme Sürecinde Örüntüden Fonksiyona Öğretim”. *İlköğretim Online,9*(1), 213–228.

Kaptan, S. (1977). *Bilimsel Araştırma Teknikleri ve İstatistik Yöntemleri*. Ankara: Rehber Dağıtım.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* içinde (ss. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Karaaslan, G., K. G. Karaaslan ve A. Delice. (2012). "Öğrencilerin Uzamsal Yeteneklerine Göre Üç Boyutlu Geometri Problemlerinin Çözümlerinin İncelenmesi". (*X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi,* 27-30 Haziran 2012*,* Niğde, Türkiye), *Bildiri Özetleri*, Pegem Akademi, Ankara 2012, s. 470.

Karasar, N. (2009). *Bilimsel Araştırma Yöntemi.* Ankara: Nobel Yayınları.

Lannin, J. K., D. D. Barker and B. E. Townsend. (2006). "Recurcive and Expicit Rules: How Can We Build Student Algebraic Understanding?". *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 299-317.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* içinde (ss. 87–106). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Lesh, R. and D. Clarke. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. A. E. Kelly and R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* içinde (ss. 113–149). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesley, L. and V. Freiman. (2004). Tracking primary students' understanding of patterns. M. J. Hoines and A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* içinde (ss. 415–422). Bergen, Norway.

Liljedahl, P. (2004)."Repeating Pattern or Number Pattern: The Distinction is Blurred". *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26* (3), 24-42.

Liljedahl,P., E. Chernoff and R. Zazkis. (2007). "Interweaving Mathematics and Pedagogy in Task Design: A Tale of One Task". *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*,239-249.

Lodico, M. G.,D. T. Spaulding and K. H. Voegtle. (2006). *Methods In Educational Research From Theory to Practice*. San Francisco: Jossey- Bass.

Magnusson, S., H. Borko and J. Krajcik. (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge for science teaching. J. Gess-Newsome and N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* içinde (ss. 95-132). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

McMillan, J. H. (2004). *Educational Research.* Boston: Pearson Education.

MEB. (2005). *İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu (1-5. Sınıflar için).* Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.

MEB. (2009a). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu*. Ankara: MEB.

MEB. (2005). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: MEB.

MEB. (2010). *Orta Öğretim Kurumlarına Geçiş Sistemi 8. Sınıf Seviye Belirleme Sınavı Soru Kitapçığı A*. Ankara: MEB

Mevarech, Z. R. and B. Kramarskı. (1997).“Improve: A Multidimensional Methods for Teaching Mathematics in Heterogeneous Classrooms”. *Amerikan Educational Research Journal*, *34*(2), 365-395.

Milas M. and M. Huberman. (1994). *An Expanded Sourcebook Qualitative Data Analysis.* California: Sage Publications.

Mitchelmore, M. (2002). “The Role of Abstraction and Generalization in The Development of Mathematical Knowledge”. *East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, Singapore.

Mitchelmore, M. and P. White. (2007). “Abstraction in Mathematics Learning”. *Mathematics Education Research Journal, 19* (2), 1-9.

Moralı, S.,I. Uğurel, E. Türnüklü ve S. Yeşildere. (2006). “Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri”. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(1)*,* 147-160.

NCTM, (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: Virginia.

NCTM, (2000). *Principles and Standarts for School Mathematics*. Reston: VA.

Neubert, G. A. and J. B. Binko. (1992). *Inductive Reasoning in the Secondary Classroom*. Washington DC: National Education Association.

Olkun, S. ve S. Yeşildere. (2007). *“Sınıf Öğretmeni Adayları İçin” Temel Matematik 1*. Ankara: Maya Akademi.

Orton, A. and J. Orton. (1999). Pattern and the approach to algebra. A. Orton *(Ed.), Pattern in the teaching and learning of mathematics* içinde (ss. 104-120). London: Cassel.

Palabıyık, U. ve O. Akkuş-İspir. (2011). "Örüntü Temelli Cebir Öğretiminin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Becerileri ve Matematiğe Karşı Tutumlarına Etkisi". *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30* (2). 111-123.

Paschos, T. and V. Farmaki. (2006). The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral: a case study. J. Novotná, H. Moraová, M. Krátkáand N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (ss. 337-344). Prague: PME.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods.* London: Sage Publications.

Phillips, N. and C. Hardy. (2002). *Discourse Analysis: Investigating Processes of Social Construction*. United Kingdom: Sage Publications Inc.

Pilten, P. (2008). *Üstbiliş Stratejileri Öğretiminin İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Muhakeme Becerilerine Etkisi*. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Ana Bilim Dalı. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ankara.

Pólya, G. (1967). *Le Découverte des Mathématiques*. *[The discovery of mathematics]*. Paris: DUNOD.

Pólya, G. (1988). *How to Solve It*. New Jersey, NJ: Princeton University Pres.

Radford, L. (2008). "Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns in Different Contexts". *ZDM Mathematics Education, 40*, 83–96.

Reid, D. (2002). "Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Reys, R. E., M. N. Suysam, M. M. Lindquist and N. L. Smith. (1998). *Helping Children Learn Mathematics.* Boston: Allyn and Bacon.

Rico, L. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. L. Puig and A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* içinde (ss. 87–102). Valencia: University of Valencia.

Sarı, M. A. (2007). *Bilimde “Tümevarım Sorunu” Üzerine Bir Çalışma.* Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Felsefe Anabilim Dalı. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ankara.

Sarı, M., A. Altun ve P. Aşkar. (2007). “Üniversite Öğrencilerinin Analiz Dersi Kapsamında Matematiksel Kanıtlama Süreçleri: Örnek Olay Çalışması”. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40* (2)*,* 295-319.

Sasman, M.C., L. Linchevskiand A. Olivier. (1999). The influence of different representations on children’s generalisation thinking processes. J. Kuiper (Ed.), *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* içinde (ss. 406-415). Harare, Zimbabwe.

Shulman, L. S. (1986). “Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching”. *Educational Researcher*, *15*, 4-14.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London: Falmer.

Smith, E. P. and K. B. Henderson. (1959). Proof. H. Fawcett, A. Hach, C. Junge, H. Syer, H. Van Engen and P. Jones (Eds.), *The growth of mathematical ideas K-12. Twenty-fourth yearbook* içinde (ss.111-181). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Steele, D. (2005).“Using Writing to Access Students’ Schemata Knowledge for Algebraic Thinking”. *School Science and Mathematics, 103*(3), 142-154.

Stylianides, A. J. and G. J. Stylianides. (2008). “Studying the Classroom Implementation of Tasks: High-Level Mathematical Tasks Embedded in “Real-Life” Contexts”. *Teaching and Teacher education, 24* (4)*,*859-875.

Swan, M.(2007). “The Impact of the Task – Based Professional Development on Teachers’ Practices and Beliefs: A Design Research Study”. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 217-237.

Tanışlı, D. (2008). *İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Örüntülere İlişkin Anlama ve Kavrama Biçimlerinin Belirlenmesi.* Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı**.** Yayınlanmış Doktora Tezi. Eskişehir.

Tanışlı, D. ve A. Özdaş. (2009). “İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Örüntüleri Genellemede Kullandıkları Stratejiler”. *Educational Sciences: Theory & Practice, 9*(3), 1453-1497.

Tanışlı, D. ve N. Yavuzsoy-Köse. (2011). "Lineer Şekil Örüntülerine İlişkin Genelleme Stratejileri: Görsel ve Sayısal İpuçlarının Etkisi". *Eğitim ve Bilim, 36* (160). 184-198.

Tanışlı, D. ve S. Olkun. (2009). *Basitten Karmaşığa Örüntüler*. Ankara: Maya Akademi.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* içinde (ss. 18-30). London and New York, NY: Cassell.

Topdemir, H. G. (2011). "John Stuart Mill ve Tümevarım Kuralları". *TUBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi, 528*, 72-75.

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally.* USA: Pearson Education.

Van Dalen, D. B. (1966). *Understanding Educational Research: An Introduction*. US: Mountain.

Vogel, R. (2005). "Pattern- A Fundamental Idea of Mathematical Thinking and Learning". *ZDM*, *37* (5), 445-449.

Yaman, H. (2010). *İlköğretim Öğrencilerinin Matematiksel Örüntülerdeki İlişkileri Algılayışları Üzerine Bir İnceleme*. Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı. Yayımlanmış Doktora Tezi. Ankara.

Yerushalmy, M. (1997). "Designing Representations: Reasoning About Functions of Two Variables". *Journal of Research in Mathematics Education*, *28*(4), 431-466.

Yeşildere, S. ve E. Türnüklü. (2007). "Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi". *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40* (1), 181-213.

Yeşildere, S. ve E. Türnüklü. (2008). "İlköğretim Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Bilgi Oluşturma Süreçlerinin Matematiksel Güçlerine Göre İncelenmesi". *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 21* (2), 485-510.

Yeşildere, S. ve H. Akkoç. (2010). "Matematik Öğretmen Adaylarının Sayı Örüntülerine İlişkin Pedagojik Alan Bilgilerinin Konuya Özel Stratejiler Bağlamında İncelenmesi". *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 29* (1), 125-149.

Yıldırım, C. (1966). *Eğitimde Araştırma Metodları*. Ankara: MEB Eğitim Birimi Müdürlüğü.

Yıldırım, A. ve H. Şimşek. (2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods.* USA: Sage.

YÖK. (2010). *Yükseköğretime Giriş Sınavı Kitapçığı A*. Ankara: YÖK.

Zaskis, R. and P. Liljedahil. (2002). "Generalization of Patterns: The Tension Between Algebraic Thinking and Algebraic Notation". *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.

Zaskis, R. and P. Liljedahil. (2006). On the path to number theory: Repeating patterns as a gateway. R. Zaskis and S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education* içinde (ss. 99-114). London: Lawrence Erlbaum AssocHates, Publishers.

EKLER

Ek 1. Veri Toplama Aracı (Yazılı Sınav ve Mülakatta Kullanılan Sorular)

ADI-SOYADI:

NUMARASI:

Sevgili Öğrenciler,

İki aşamalı olarak uygulanacak araştırmanın ilk aşamasını oluşturan aşağıdaki problemlerde düşünme şeklinizi ortaya koymanız ve problemi nasıl çözdüğünüzü ayrıntılarıyla açıklamanız beklenmektedir.

- Cevabınız, bir başkasının okuyabilmesini ve düşünce şeklinizi anlayabilmesini sağlayacak kadar açık ve net olmalıdır.
- Cevaplarınızda şekiller kullanabilir, harflendirmeler yapabilirsiniz.
- Problemlerin bütününde tüm şıkları cevaplamanız ve bu şıklara açıklamalar getirmeniz bu araştırma için çok önemlidir. Teşekkür ederim.

1. SORU

$$
\begin{array}{rcl}
1 \times 1 = 1 & \longrightarrow & \text{1. Adım} \\
11 \times 11 = 121 & \longrightarrow & \text{2. Adım} \\
111 \times 111 = 12321 & \longrightarrow & \text{3. Adım} \\
1111 \times 1111 = 1234321 & \longrightarrow & \text{4. Adım} \\
\vdots \qquad \vdots & &
\end{array}
$$

Yukarıda ilk adımında 1 basamaklı (1), 2. adımında 2 basamaklı (11), 3. adımında 3 basamaklı (111), 4. adımında 4 basamaklı (1111) sayılarla oluşturulmuş bir çarpma işlemi örüntüsü verilmiştir. Buna göre;

a) Örüntünün 100. adımı için sonucu bulunuz? **<u>Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.</u>**

b) Örüntünün herhangi bir adımı (n. adım) sorulsaydı sonucu kolaylıkla bulabilmek için nasıl bir formül ya da kural oluştururdunuz? **<u>Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.</u>**

2. SORU

1, 8, 27, 64, …

Yukarıda bir sayı örüntüsünün ilk 4 terimine yer verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 25. terimini bulunuz? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Bu örüntünün herhangi bir terimi (n. terim) sorulsaydı bu terimi kolaylıkla bulmak için nasıl bir kural ya da formül oluştururdunuz? **Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.**

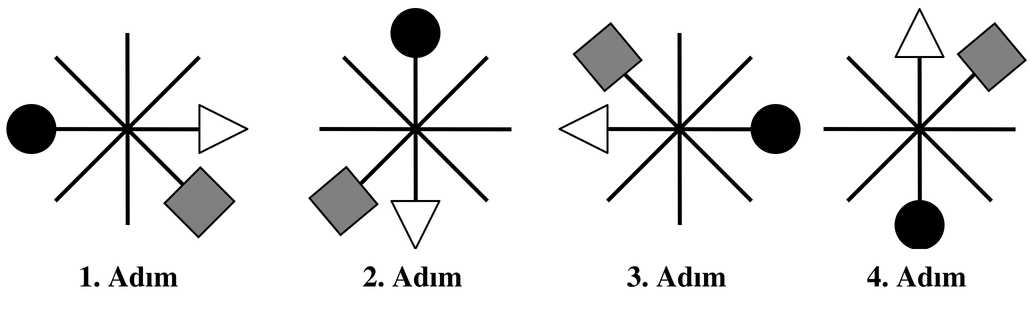
3. SORU

Tamer her gün bir önceki günden 3 sayfa daha fazla okuyarak bir romanı bitirmeye karar vermiştir. Tamer ilk gün romanın 20 sayfasını okuduğuna göre;

a) Tamer sadece 25. gün kaç sayfa kitap okur? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b) Tamer'in herhangi bir gün (n. gün) kaç sayfa kitap okuduğunu kolaylıkla hesaplayabilmesi için bir formül veya kural geliştiriniz? **Bu formülün cebirsel ifadesini yazınız ve nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

4. SORU



Yukarıda siyah daire, beyaz üçgen ve gri karenin saat yönünde dönmesiyle oluşturulan örüntünün ilk 4 adımına yer verilmiştir. Buna göre;

a)Bu örüntünün 16. ve 22. adımını çiziniz. **Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

b) Bu örüntünün n. adımda alacağı şekil sorulsaydı bu şekli nasıl bulurdunuz?

5. SORU

Giren Sayı	Çıkan Sayı
1	2
2	5
3	8
4	11

Matematikçiler "Sayı Makinesi" isminde bir makine üretmişlerdir. Bu makine, içerisine giren sayıyı farklı bir sayıya çevirip çıkarmaktadır. Yukarıdaki tabloda makineye atılan ve çıkan sayılardan bazılarına yer verilmiştir.

Buna göre;

a)Sayı makinesine 50 atılsaydı hangi sayı çıkardı bulunuz ve **sonucu nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.**

b) Makineye herhangi bir sayı (n sayısı)atılsaydı hangi sayı çıkardı? **Bu sayıyı bulmak için bir formül veya kural üretiniz ve bu kuralın mantığını açıklayınız.**

ADI-SOYADI:

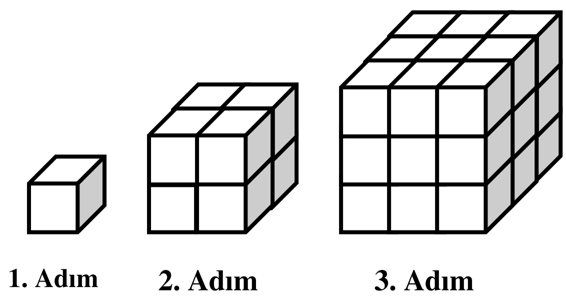
NUMARASI:

Sevgili Öğrenciler,

Araştırmamızın 2. aşaması olarak 6. sorudan başlanarak size yöneltilen aşağıdaki problemlerde, düşünme şeklinizi ortaya koymanız ve problemi nasıl çözdüğünüzü ayrıntılarıyla açıklamanız beklenmektedir.

- Cevabınız, bir başkasının okuyabilmesini ve düşünce şeklinizi anlayabilmesini sağlayacak kadar açık ve net olmalıdır.
- Cevaplarınızda şekiller kullanabilir, harflendirmeler yapabilirsiniz.
- Problemlerin bütününde tüm şıkları cevaplamanız ve bu şıklara açıklamalar getirmeniz bu araştırma için çok önemlidir. Teşekkür ederim.

6. SORU



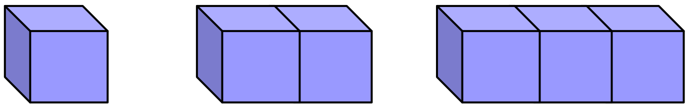
Ayşe elindeki birim küpleri şekildeki gibi bir araya getirerek bir örüntü oluşturmaktadır. Yukarıda bu örüntünün ilk 3 adımına yer verilmiştir. Buna göre;

a) Ayşe bu örüntünün 15. adımındaki küpü elde etmek için kaç tane birim küpe gereksinim duyar? **<u>Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.</u>**

b) Ayşe örüntünün herhangi bir adımındaki (n. adımdaki) küpü elde etmek için kaç tane birim küpe ihtiyaç duyar? **<u>Bu hesaplamayı yapmak için bir kural veya formül üretiniz ve bu kuralı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.</u>**

7. SORU

Bir şirket, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi küpleri bir sırada birleştirerek boya makinesi ile renkli çubuklar üretmektedir.



1 Birim Çubuk **2 Birim Çubuk** **3 birim Çubuk**

Bu makine,çubuktaki **her küpün bir yüzeyini bir kutu boya ile boyamaktadır.** Eğer bir küp diğer küple birleşiyorsa **yapışan yüzey boyanmamakta** küpün diğer tüm yüzeyleri ise boyanmaktadır. Buna göre;

a)20 birim uzunluğundaki çubuğu boyamak için kaç kutu boyaya ihtiyaç vardır? **Sonucu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

b) Herhangi bir uzunluktaki (n birim) çubuğu boyamak için kaç kutu boyaya ihtiyaç vardır? **Bu hesaplamayı yapmak için bir kural veya formül geliştiriniz ve bu kuralın mantığını açıklayınız.**

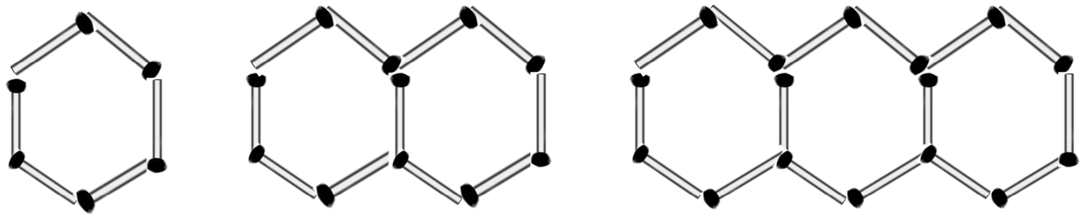
8. SORU

Bir okul şenliğinde Sandalye Kapmaca Oyunu'na katılan öğrenciler müzikle birlikte sandalyeler etrafında dönmeye başlamaktadırlar. **Müzik bittiğinde sandalyesiz kalan öğrenci elenmekte ve sandalyeler değiştirilerek farklı sandalyelerle** diğer tura geçilmektedir. 2. tura kalan öğrenciler arasında oyun tekrarlanmakta yine sandalyesiz kalan öğrenci elenip farklı sandalyeler getirilerek kazanan öğrenci belli oluncaya kadar oyun bu şekilde devam etmektedir. Buna göre;

a) 21 öğrencinin olduğu bir sandalye kapmaca oyununun her turunda farklı sandalyeler kullanıldığına göre oyun bitiminde **toplam** kaç sandalye kullanılmıştır? **Sonucunuzu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

b) Her turda farklı sandalyelerin kullanıldığı ve n tane öğrencinin katıldığı sandalye kapmaca oyununda **toplamda** kaç sandalyeye ihtiyaç vardır? **Bir kural veya formül geliştiriniz ve bu kuralı nasıl geliştirdiğinizi açıklayınız.**

9. SORU



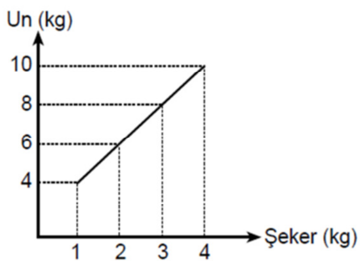
1. Adım 2. Adım 3. Adım

Yukarıda kibrit çöpleriyle oluşturulan bal peteği örüntüsünün ilk 3 adımına yer verilmiştir. Buna göre;

a) Bu örüntünün 12. adımının inşası için kaç tane kibrit çöpüne gereksinim duyulur? **Sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız.**

b)Bu örüntünün n. adımındaki yapıyı oluşturmak için kaç tane kibrit çöpüne ihtiyaç vardır? **Bu hesaplamayı yapmak için cebirsel bir kural veya formül üreterek bu formülün mantığını açıklayınız.**

10. SORU



Tecrübeli bir aşçı bir pastanın kıvamında olması için un ve şekerin yukarıdaki doğrusal grafikte verildiği gibi olması gerektiğini söylemiştir. Bu grafiğe göre;

a) Aşçı 50 kg şekere kaç kg un kullanırsa kıvamında pastalar elde edebilir? **Sonucu nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

b) Aşçı herhangi miktardaki (n kg) şekerimin gereken un miktarını içeren pratik bir tarif vermek istiyor. **Un ve şeker arasındaki ilişkiyi gösterecek olan pratik tarif için cebirsel bir kural veya formül bulunuz ve bulduğunuz kuralın mantığını açıklayınız.**

Ek 2: Öğrenci Velisi Bilgilendirme ve Görüşme Onay Formu

Sayın Veli,Öncelikle yapacağım bu araştırmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve öğrencinizin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı, "İlköğretim 2. Kademe Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerin Çözümünde Sergiledikleri Tümevarımsal Düşünce Süreçlerinin İncelenmesi" adlı yüksek lisans tez araştırması için belirlenen hedef öğrencilerin Matematik dersinde tümevarımsal akıl yürütme süreçlerine yönelik görüşlerini almaktır.

Velisi bulunduğunuz öğrencinin araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu araştırmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri ses kayıt cihazı ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Öğrencinizin yada sizin isteğiniz doğrultusunda ses kayıtları verileri yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size teslim edilecektir.

İzniniz olmadığı takdirde, öğrencinizin ismi bu araştırmada kullanılmayacak,yerine takma bir isim kullanılacaktır. Öğrenci istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve araştırmadan ayrılabilir. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları size teslim edeceğim.

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya velisi bulunduğunuz öğrencinin gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim size verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyorum.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederim.

Matematik Öğretmeni
Yukarısarıkaya İlköğretim Okulu
Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi
E-posta: mat_mat_559@hotmail.com

Tarih: İsim ve İmza

Ek 3: Kayseri İl Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan Araştırma İzni

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ 1978

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı

25/03/2011

Sayı :B.30.2.ERC.0.70.72.00/ 500 - 0556
Konu: Tez Çalışması İzni

EĞİTİM BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi: **a)** 28/02/2011 tarihli ve 500-174 sayılı yazınız.
b) Kayseri Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğünün 22/03/2011 tarihli ve 008973 sayılı yazısı.

Kayseri Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğünden alınan ilgi (b) yazıda; Enstitünüz İlköğretim Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı Öğrencilerinden **Venhar AYDIN**'ın "İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerinin Çözümünde Sergiledikleri Tümevarımsal Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu tez çalışması yapmasının uygun görüldüğü bildirilmektedir.
Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. M. Metin HÜLAGÜ
Rektör Yardımcısı

T.C.
Erciyes Üniversitesi
216
30-03-2011
500
Kayıt Eden :

E K L E R :
1- İlgi (b) yazı ve ekleri (7 sayfa)

38039 Melikgazi-KAYSERİ
Tel: 0(352) 437 49 47 Fax: 0(352) 437 20 23 e-mail:ogridbsk@erciyes.edu.tr

T.C.
KAYSERİ VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : B.08.4.MEM.4.38.00.03-605.01/ 22.03.2011*008973

Konu: Tez Çalışması

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı)

İlgi :03/03/2011 tarih ve 0233 sayılı yazınız.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencilerinden Venhar AYDIN'ın İlimiz Melikgazi İlçesi Boydak İlköğretim Okulu,Mustafa Özgür İlköğretim Okulu,Yahya Kemal Beyatlı İlköğretim Okulu ve Kocasinan İlçesi Refika Küçükçalık İlköğretim Okulu öğrencilerine "İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerinin Çözümünde Sergiledikleri Tümevarımsal Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu tez çalışmasını uygulanmasında bir sakıncanın olmadığı Anket Değerlendirme Komisyonunca tespit edilmiştir.

Söz konusu araştırmanın eğitim-öğretimi aksatmadan Okul Müdürünün gözetiminde ve sorumluluğunda yapılması , araştırma sonucundan bilgi verilmesi kaydıyla uygun görüldüğü ile ilgili Valilik Makamının 21/03/2011 tarih ve 008723 sayılı yazıları ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

M.Vasi ARAT
İl Milli Eğitim Müdür V.

EKLER:
1-Onay örneği (1 adet 1 sayfa)
2-Anket Örneği (1 adet 5 sayfa)

Yusuf h-
21-03-2011

Kayseri İl Millî Eğitim Müdürlüğü – ARGE
Osman Kavuncu Bulvarı No:40/B Kocasinan KAYSERİ
Tel: 352 330 1125 Faks:352 320 95 03
İnternet Adresi: http://kayseri.meb.gov.tr, http://www.kayseriarge.org
İrtibat İçin: Nuriye YAŞAR (İl Koord.) (320 20 84)
E-posta :ab38@meb.gov.tr, nuriyeyasar38@hotmail.com

Bilgi: Mehmet ŞAHİN (Şb.Md.) (138)
E-posta: msahin38@windowslive.com
Gülizar YALÇINOĞLU (Şef) (160)
E-posta:gulemre@hotmail.com

T.C.
KAYSERİ VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı :B.08.4.MEM.4.38.00.03-605.01-
Konu :Tez Çalışma İzni

21.03.2011*008723

VALİLİK MAKAMINA

İlgi:Bakanlığımız Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Daire Başkanlığı'nın 05/03/2007 tarih ve 1143 sayılı (Yönerge) emirleri.

Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencilerinden Venhar AYDIN'ın "İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerinin Çözümünde Sergiledikleri Tümevarımsal Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu tez çalışmasını ilimiz Melikgazi ilçesi Boydak İlköğretim Okulu, Mustafa Özgür İlköğretim Okulu,Yahya Kemal Beyatlı İlköğretim Okulu ve Kocasinan ilçesi Refika Küçükçalık İlköğretim Okulunda uygulama isteği ile ilgili Erciyes Üniversitesi Rektörlüğü Öğrenci İşleri Daire Başkanlığının 03/03/2011 tarih ve 0233 sayılı yazıları ilişikte sunulmuştur.

Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencilerinden Venhar AYDIN'ın "İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerinin Çözümünde Sergiledikleri Tümevarımsal Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu tez çalışmasını yapmasında bir sakıncanın olmadığı Anket Değerlendirme Komisyonu tarafından tespit edilmiş olup, eğitim-öğretimi aksatmadan Okul Müdürünün gözetiminde ve sorumluluğunda araştırmanın yapılması, adı geçen kişinin araştırma sonucundan Müdürlüğümüze bilgi vermesi kaydıyla uygun görülmektedir.

Makamınızca da uygun görüldüğü takdirde , olurlarınıza arz ederim..

Erdoğan AYATA
İl Milli Eğitim Müdürü

OLUR
21../03/2011

İ.Hami ÇOMAKTEKİN
Vali a..
Vali Yardımcısı

EKLER:
1-Yazı (1 adet 1 sayfa)
2-Anket Örneği (1 adet 5 sayfa)
3-Fiziki zararları karşılama taahhüdü (1 adet 1 sayfa)

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Venhar NAVRUZ

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 14 Eylül 1986, Kayseri

Medeni Durumu: Evli

E mail: mat_mat_559@hotmail.com

Yazışma Adresi: Yukarısarıkaya İlköğretim Okulu, Sarıkaya/YOZGAT

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	E. Ü. Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğrt.	2009
Lise	Melikgazi Mustafa Eminoğlu Anadolu Lisesi, Kayseri	2005

İŞ DENEYİMİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2010-Halen	Yukarısarıkaya İlköğretim Okulu, Yozgat	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİL

İngilizce (ÜDS: 67.5)

YAYINLAR

1. Bayazit İ., Uğur D. ve Aydın V. (2010, Ekim). "Öğretmen Adaylarının Fonksiyonel Düşünme Gerektiren Cebirsel Problemlerin Çözümünde Kullandıkları Stratejiler". *Matematikçiler Derneği 9. Matematik Sempozyumu ve Şenlikleri Özetler Kitabı*. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon 2010. s. 83-84.

2. Benli B., Uğur D., Aydın V., Erkoç Ş. ve Akbulut B. (2010). "Performans ve Proje Görevlerine İlişkin Veli, Öğretmen ve Öğrenci Görüşleri" *IX. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, İzmir.

3. Akbıyık C., Akbulut B., Uğur D., Erkoç Ş. ve Aydın V. (2010, Mayıs). "Sınıf Ortamında Yaşanan Öğretmen ve Öğrenci Duyguları" *V. Ulusal Eğitim Yönetimi Kongresi*, Antalya.