T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDE ÜRETTİĞİ MATEMATİK MODELLERİNİN NİTEL BİR YAKLAŞIMLA İNCELENMESİ

Hazırlayan
Duygu ÖZGÜN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2012
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDE ÜRETTİĞİ MATEMATİK MODELLERİNİN NİTEL BİR YAKLAŞIMLA İNCELENMESİ

Hazırlayan
Duygu ÖZGÜN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT

Yüksek Lisans Tezi

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu tarafından BİDEB 2210 kodlu Yurt içi Burs Programı ile desteklenmiştir.

Haziran 2012
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim. Ayrıca, eldeki tez çalışmasından bir tanesi dergi makalesi ve bir tanesi de sempozyum bildirisi olmak üzere iki tane yayının üretilip aşağıda belirtilen kaynaklarda basılmış olduğunu beyan ederim.

1. Bayazit, İ., & Uğur, D. (2011). Öğretmen Adaylarının Ürettiği Matematik Modellerinin Bilişsel ve Kavramsal Boyutları İtibariyle İncelenmesi. *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi*, 32, 49-67.
2. Bayazit, İ., & Uğur, D. (2011). Bilişsel ve Karamsal Modeller Arası Geçiş Sürecinin Nitel Bir Yaklaşımla İncelenmesi. *Matematikçiler Derneği 10. Matematik Sempozyumu ve Şenlikleri Özetler Kitapçığı* (s. 88). Işık Üniversitesi, İstanbul.

Duygu ÖZGÜN

İmza

…İlköğretim….Matematik…Öğretmen…Adaylarının…..Problem….Çözme…..
…Sürecinde…..Ürettiği……Matematik….Modellerin…..Nitel…Bir……..
…Yaklaşımla…….İncelemesi…………………………….........adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Duygu ÖZGÜN
İmza

Danışman
Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT
İmza

İlköğretim…………ABD Başkanı
Ad Soyad İmza
Prof.Dr.Sibel Saracoğlu

Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZIT danışmanlığında Duygu ÖZGÜN tarafından hazırlanan İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Problem Çözme Sürecinde Ürettiği Matematik Modellerin Niteliği Bir Yaklaşımları İncelenmesi adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

14.06.2012

(Tez Savunma Sınav Tarihi)

JÜRİ:

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Dursun SOYLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz AKSOY

Üye : Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZIT

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 18/06/2012 tarih ve 17 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

16./06./2012

Prof. Dr. H. [illegible] KIZILTEMUR

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Çalışmam boyunca rehberliğini esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT'a, bana öğrencisi olma fırsatını sunduğu için sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmama ilişkin pilot uygulamaların yürütülmesine yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Muharrem AKTÜMEN'e, arkadaşlığını ve desteğini hiç esirgemeyen Arş. Gör. Merve KIRNAP'a teşekkür ederim. Bu zamana kadar elde ettiğim tüm başarıların mimarı olan anneme ve desteğini hep yanımda hissettiğim kardeşime çok teşekkür ederim. Sabrı, desteği ve en önemlisi varlığıyla çalışmam boyunca hep yanımda olan sevgili eşime sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca sağlamış olduğu destek ile tezimin yürütülmesine katkı sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkürlerimi sunarım.

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Problem Çözme Sürecinde Ürettiği Matematik Modellerinin Nitel Bir Yaklaşımla İncelenmesi

Duygu ÖZGÜN

Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2012

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İbrahim BAYAZİT

ÖZET

Araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ürettiği matematik modelleri bilişsel ve kavramsal boyutları itibariyle incelenmiş ve bu modellerin uygunluk ve yeterliliği tespit edilmiştir. Problem çözme, probleme ilişkin bilişsel modellerin matematiğe has kavramsal modeller ışığında işlendiği ve sonuçların bilişsel açıdan tekrar yorumlandığı süreç olarak değerlendirilmektedir. Araştırmaya katılan 188 öğretmen adayına alan yazını taraması sonucu geliştirilen açık uçlu problemlerden oluşan yazılı sınav uygulanmış, daha sonra seçilen 5 öğretmen adayıyla yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Toplanılan veriler nitel yöntemler kullanılarak analiz edilmiş ve üretilen matematik modelleri bilişsel ve kavramsal boyutları göz önünde bulundurularak *uygun ve yeterli modeller, uygun ancak geliştirilmesi gereken modeller ve uygun olmayan modeller* diye üç grupta toplanmıştır. Bilişsel ve kavramsal modeller arası ilişki ve etkileşim ise mülakattan elde edilen nitel verilerden yola çıkarak aydınlatılmıştır. Bulgular bilişsel ve kavramsal modeller arasında karşılıklı bir ilişki ve etkileşimin var olduğunu göstermektedir. Uygun ve yeterli model geliştiren öğretmen adaylarının bilişsel ve kavramsal modellerinin iç içe geçtiği anlaşılmaktadır. Ayrıca, elde edilen bulgular bilişsel modellerin tek başına yeterli olmadığını, bunların uygun kavramsal modellerle desteklenmesi gerektiğini göstermektedir. Bilişsel ve kavramsal modeller arasındaki ilişki ve etkileşimin sağlıklı bir şekilde kurulup yürütülmesinin üretilen matematik modelin uygunluk ve yeterliliği noktasında belirleyici olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Öğretmen adayları, problem çözme, matematik modelleri, bilişsel model, kavramsal model.

A Qualitative Inquiry into Mathematical Models Produced by Prospective Elementary School Mathematics Teachers

Duygu ÖZGÜN

Erciyes University, Institute of Educational Sciences

Master Thesis, June 2012

Supervisor: Assist. Prof. Dr. İbrahim BAYAZİT

ABSTRACT

This study examines prospective teachers' proficiency at producing mathematical models for solving non-routine problems. The study employed a qualitative inquiry to produce rich and realistic data concerning the research case at hand. Data were collected through written exam and semi-structured interviews, and they were analysed using qualitative methods that included content and discourse analysis. The research was carried out with 188 prospective elementary school mathematics teachers. Models are examined in terms of their appropriateness and sufficiency and the interactions between cognitive and conceptual components of a mathematical model are investigated. The result indicated that many prospective teachers lacked the ability to produce models that are appropriate and sufficient for the solution of problems they were given. There appears to be mutual relationships between cognitive and conceptual components of a mathematical model and each aspect influences the other. The research findings show that appropriate cognitive models are essential but not sufficient to solve mathematical problems. They should be accompanied with the conceptual models so that the problem solvers could revise their cognitive models by reflecting upon the conceptual ones throughout the problem solving. The results also show that appropriateness and sufficiency of a mathematical model depends upon the quality of relationships established between its cognitive and conceptual components.

Key words: Prospective teachers, problem solving, mathematical models, cognitive model, conceptual model.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. GİRİŞ

Matematiği anlamanın ve günlük hayatta kullanmanın ayrıcalık olduğu günümüz toplumunda, matematik yapan bireylerin önemi her geçen gün artmaktadır. Bu bireyler matematiği sadece bir ders olarak görmemekte, karşılaştıkları her türlü sorunu ya da problemi matematiği kullanarak çözmeye çalışmaktadır. Yani bireylerin problemlerini çözmek için kullandığı her türlü matematiksel düşünce ya da kavram matematiğin soyut dünyasından çıkıp bireyin bilişsel süreçlerine dâhil olmaktadır. Dolayısıyla matematiğin algılanmayı bekleyen dünyası ile bireyin zihni arasında geçen bu süreç matematik gerçeğinin zihinsel olarak temsil edilmesinden, modellenmesinden başka bir şey değildir. Bu durumun farkında olan ve bütün bu süreçleri başarılı bir şekilde yöneten bireyler ise matematiği öğrenmekle kalmamakta kendi matematiklerini oluşturmakta ve bu sayede bilgiyi nasıl değerlendirip kullanmaları gerektiğine karar verebilmektedirler. Bu nedenledir ki ülkemizde uygulanmakta olan matematik programında öğrencilerin 'matematiksel kavram ve sistemleri anlayabilmesi, bunlar arasında ilişki kurabilmesi, bunları günlük hayatta ve diğer öğrenme alanlarında kullanabilmesi, problem çözme stratejileri geliştirilebilmesi ve bunları günlük hayattaki problemlerin çözümünde kullanabilmesi, model kurabilmesi, modelleri sözel ya da matematiksel ifadelerle ilişkilendirebilmesi' amaçlanmaktadır (MEB, 2006). Bu doğrultuda bireylerden sadece matematik dersinde değil diğer öğrenme alanlarında ve yaşantılarında karşılaştıkları sorunlar için problem çözme becerilerini kullanması, yaşantısı ile matematik arasında ilişkilendirmeler yapması, matematik kavramlarını, sistemlerini farklı temsil biçimleri ile ilişkilendirmesi ve bu temsil biçimleri arasında dönüşüm yapması beklenmektedir (a.g.e). Yani bireylerin matematiğe özgü işlem, kural ve kavramları öğrenmesinin ötesinde karşılaştığı durumlar ile bunları ilişkilendirmesi ve modellemesi gerekmektedir.

Matematiksel modelleme, bireylerin karşılaştığı problemleri kendisi için anlamlı kılma, matematikten yardım alarak temsil etme ve çözüme ulaştırma çabası olarak değerlendirilebilir (Lesh ve Doerr, 2003). Matematiksel modelleme bir olgunun gözlenmesi, ilişkilerin açığa çıkarılması, matematiksel analizler yapılması, sonuçların elde edilmesi ve elde edilen modelin tekrar yorumlanması süreçlerini içermektedir (Swetz ve Hartzler, 1991; Akt. Lingefjärd, 2006). Yani matematiksel modelleme bireyin matematiksel düşünce ya da kavrama sahip olmasının ötesinde bunları varsayımları doğrultusunda probleme uygun olacak şekilde düzenlemesini, uygulamasını ve elde ettiği sonuçları değerlendirmesini gerektirmektedir. Dolayısıyla matematiksel modellemenin bireylerin matematiği öğrenmesinden çok matematik yapmasına ve düşüncelerini açıklamasına fırsat tanıdığı ve bu yönüyle matematik eğitimine hizmet ettiği söylenebilir. Bu nedenledir ki özellikle son yıllarda matematik eğitimi alanında matematiksel modelleme üzerine yapılan çalışmaların sayısı artmıştır (bknz. Blum v.d., 2006; Barbosa, 2006; MaaB, 2006). Bu kapsamda yapılan çalışmalarda matematiksel modellemenin bireylerin düşüncelerini denklem, grafik, tablo gibi değişik temsil biçimleri ile ifade etmesine ve yeni matematik kavramlarını hayata geçirmesine imkân tanıdığı, hem soruların sorulması hem de cevaplanması için uygun ortamlar oluşturduğu, formal matematik kavramlarının kullanılması için gerekli becerileri geliştirdiği gibi sonuçlara ulaşılmıştır (Lesh ve Doerr, 2003; Doerr ve English, 2003).

Modelleme sürecinin matematik eğitiminde benimsenmesiyle gerek sınıflarda kullanılan etkinliklerin doğasının gerekse öğretmenin süreç içersindeki rolünün değiştiği dikkat çekmektedir. Öğretmenlerin, öğrencilerinin günlük hayattaki ihtiyaçlarına cevap verecek tarzda ve düşüncelerini ifade etmelerine, geliştirmelerine, düzenlemelerine imkân tanıyan etkinliklere sınıflarda yer vermeleri önerilmektedir (Doerr, 2006). Bu noktada öğretmenlerden, öğrencilerinin mevcut çözüm yollarını belirlemesi ve yorumlamasının yanı sıra bu çözüm yollarını ve düşüncelerini düzenlemelerine, geliştirmelerine imkân tanıyacak ortamlar oluşturması beklenmektedir (a.g.e). Dolayısıyla öğrencilerin günlük hayat ile matematik arasında ilişki kurması için etkinliklerin sınıflarda uygulanmasının yanı sıra problem çözme sürecinin ayrıntılı bir şekilde analiz edilmesi ve öğrencilerin bu süreci bilinçli bir şekilde yürütmesi sağlanmalıdır (Blum,1991). Başka bir ifadeyle etkinlikler modellenirken cevaba ulaşmaktan ziyade problem çözme sürecinin bilinçli bir şekilde yürütülmesi amaçlanmalıdır (Kaf, 2007). Ancak modelleme açısından problem çözme süreci kavramları pekiştirmek adına yapılan alıştırmalar ya da belirli kurallara göre çözülebilen sözel problemler olarak sınırlandırılmamalıdır. Çünkü klasik sözel problemlerin çözümünde bireyin amacı; temel işlemler ve benzer nicelikleri kullanarak problem ifadesindeki matematiği su yüzeyine çıkarmak iken modelleme etkinliklerinde bireyin amacı problem durumuna ilişkin öngörü oluşturarak bu problemi kendisi için anlamlı olacak şekilde matematikselleştirmektir (Lesh ve Doerr, 2003). Bu noktada geleneksel problem çözme süreci, problemin anlaşılmasından çözülmesine ve hatta çözümün değerlendirilmesine kadar gerekli sistematik olarak karşımıza çıkmakta iken modelleme süreci bu sistematik içersinde kullanılacak somut ya da soyut temsillerin, kavramların oluşumunu açıklamaktadır. Yani problem çözme, modelleme süreci sayesinde ürün odaklı olmaktan çıkıp süreç odaklı bir hal almakta ve bireyin probleme ilişkin düşünce yolları hakkında ipucu vermektedir. Bu nedenledir ki bireyden, verilenlerden hareketle istenilenlere ulaşması için gerekli araç, işlem ya da stratejiyi araması yerine verilenler ile istenilenler arasındaki bir dizi sürecin üstesinden gelmesi beklenmektedir.

Eldeki problemin çözümüne ilişkin bireyin düşüncelerinden oluşan ve içsel temsiller olarak adlandırılan bilişsel modeller (Greca ve Moreira, 2002) problemin anlaşılması ve algılanması için şarttır ancak matematikselleştirilmesi için yeterli değildir. Problemin uygun bir şekilde matematikselleştirilmesi için bireyin bilişsel modellerini uygun kavramsal modeller ile desteklemesi gerekir (Norman, 1983). Kavramsal modeller bir sistemi, bir problem durumunu veya bir düşünceyi izah etmek amacıyla kullanılan araçlardır (Wu v.d., 1998). Öğretmenler, bilim adamları ya da mühendisler tarafından hedef sistemin uygun, doğru, tutarlı bir şekilde temsil edilmesi amacıyla üretilen ve beş duyuyla algılanabilen yapılar olarak da tanımlanabilir (Norman, 1983). Bu bağlamda, matematiksel formüller, analojiler, grafikler, katı materyaller ve bilgisayar ortamında oluşturulan animasyonlar birer kavramsal model olarak kabul edilebilir (Ornek, 2008). Öğrencilerin uygun ve yeterli bilişsel model oluşturmalarına yardımcı olacak kavramsal modellerin geliştirilmesi ise öğretmenlerin sorumluluğundadır (Wu v.d., 1998). Bu noktada öncelikle öğretmenlerin problem çözme sürecinde ne tür matematik modelleri ürettiği ve bunların bilişsel ve kavramsal açıdan ne denli uygun olduğu tespit edilmelidir. Çünkü öğretmenlerin, öğrencilerinin yanı sıra kendi düşünme süreçlerinin ve yaklaşımlarının farkında olması gerekmektedir (Ferri ve Blum, 2010). Öğretmenlerin bu husustaki farkındalık ve yeterlilikleri süreç içersinde öğrenciye tanınacak serbestlik ile rehberlik arası dengeyi kurabilmeleri ve matematik ile günlük yaşam arasındaki dönüşümü sağlayabilmeleri için önem arz etmektedir (a.g.e).

Eldeki çalışmada problem çözme süreci modelleme açısından ele alınarak öğretmen adaylarının süreç içersinde ürettiği matematik modelleri bilişsel ve kavramsal boyutları itibariyle incelenecektir. Üretilen matematik modellerinin ardındaki bilişsel ve kavramsal modellerin ortaya çıkarılması ve bunlar arasındaki ilişki ve etkileşimin aydınlatılması eldeki çalışmanın ulusal ve uluslararası alan yazınına yaptığı en önemli katkı olarak belirtilebilir.

1.1. ARAŞTIRMA PROBLEMİ

Bu araştırma kapsamında problem çözme süreci matematiksel modelleme açısından ele alınarak bu süreçte öğretmen adaylarının yaşadıkları zorluklar, problemleri matematikselleştirmek adına ürettikleri modeller ve bu modellerin eldeki problemin çözümü için uygun olup olmadığı incelenmektedir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ürettiği matematik modellerinin bütüncül bir yaklaşımla ele alınması ve bu modellerin kavramsal ve bilişsel modellerle olan ilişkisinin ve etkileşiminin derinlemesine incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaçla aşağıdaki araştırma problemlerine cevap aranmıştır:

a. Öğretmen adayları problem durumunu matematikselleştirmek adına ne tür matematik modelleri ortaya koymaktadır? Bu matematik modelleri ne denli uygun ve yeterlidir?

b. Öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ürettiği matematik modellerinin ardındaki bilişsel ve kavramsal modeller arasında ne tür bir ilişki ve etkileşim vardır?

c. Bu bilişsel ve kavramsal modeller arasındaki ilişki ve etkileşim üretilen matematik modelinin niteliğini nasıl etkilemektedir?

1.2. ARAŞTIRMANIN AMACI VE ÖNEMİ

Araştırma kapsamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde geliştirdiği matematik modellerinin bilişsel ve kavramsal boyutları itibariyle incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda problem çözme süreci matematiksel modelleme açısından ele alınmakta ve rutin olmayan problemler üzerinde çalışan öğretmen adaylarındaki bilişsel süreçler ve matematiksel bilgi kullanımı incelenmektedir. Problem çözme sürecinin modelleme ışığında incelenmesi problem çözme sürecini ürün odaklı olmaktan çıkarması ve bireyin probleme ilişkin düşünme yollarını gözler önüne sermesi açısından önemlidir. Nitekim ilgili alan yazını incelendiğinde geleneksel problem çözme süreci, problemin anlaşılmasından çözülmesine ve çözümün değerlendirilmesine kadar izlenmesi gereken prosedürler ve stratejiler olarak karşımıza çıkmakta iken modelleme süreci probleme ilişkin belirli stratejilerden ziyade somut ya da soyut temsillerin, kavramların, düşüncelerin oluşturulmasına imkân tanımaktadır.

Bu araştırma kapsamında problem çözme süreci probleme ilişkin bilişsel modellerin matematiğe has kavramsal modeller ışığında işlendiği ve sonuçların bilişsel açıdan yorumlandığı süreç olarak değerlendirilmektedir. Bu sayede öğretmen adaylarının sahip oldukları matematiksel bilgiyi bilişsel açıdan nasıl düzenledikleri incelenmekte ve ürettikleri matematik modellerinin bilişsel ve kavramsal modellerle olan ilişkisi nitel yöntemler kullanılarak araştırılmaktadır. Nitekim öğrencilerin uygun ve yeterli bilişsel model oluşturmalarına yardımcı olacak kavramsal modellerin geliştirilmesi öğretmenlerin sorumluluğundadır (Wu v.d., 1998). Bu noktada öğretmenlerin sahip oldukları bilişsel ve kavramsal modellerin ne denli farkında olduklarının ve bunlar arasında iletişim kurarak ne denli uygun matematik modelleri geliştirdiklerinin tespit edilmesi önem arz etmektedir. Bu nedenledir ki bu araştırma kapsamında geleceğin öğretmenlerinin modelleme sürecine ilişkin sahip olması gereken beceriler ya da öğretimsel yeterliliklerden önce kendi öğrenme süreçlerine ne denli hâkim oldukları ve matematiksel bilgiyi ne denli kullanabildikleri tespit edilecektir. Bu çalışmanın öğretmen adaylarının mevcut durumunu gözler önüne sermesi ve bu doğrultuda yürütülecek diğer araştırmalara ışık tutması açısından alan yazınına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Diğer taraftan ülkemizde problem çözme sürecine ilişkin çok sayıda çalışma yapılmış olmasına karşın bu süreci modelleme açısından ele alan araştırmaların pek fazla olmadığı dikkat çekmektedir. Dolayısıyla eldeki çalışmanın ulusal alan yazınında var olan bu eksikliğin giderilmesine katkı sağlayacağı söylenebilir. Yapılan alan yazını taraması neticesinde bilişsel ve kavramsal modeller arasındaki ilişki ve etkileşimlerin uluslararası araştırmacılar tarafından da çok fazla çalışılmadığı görülmüştür. Bu nedenle, bu çalışmadan elde edilecek bilgi ve bulguların uluslararası alan yazını açısından da önemli olduğu söylenebilir.

1.3. SINIRLILIKLAR

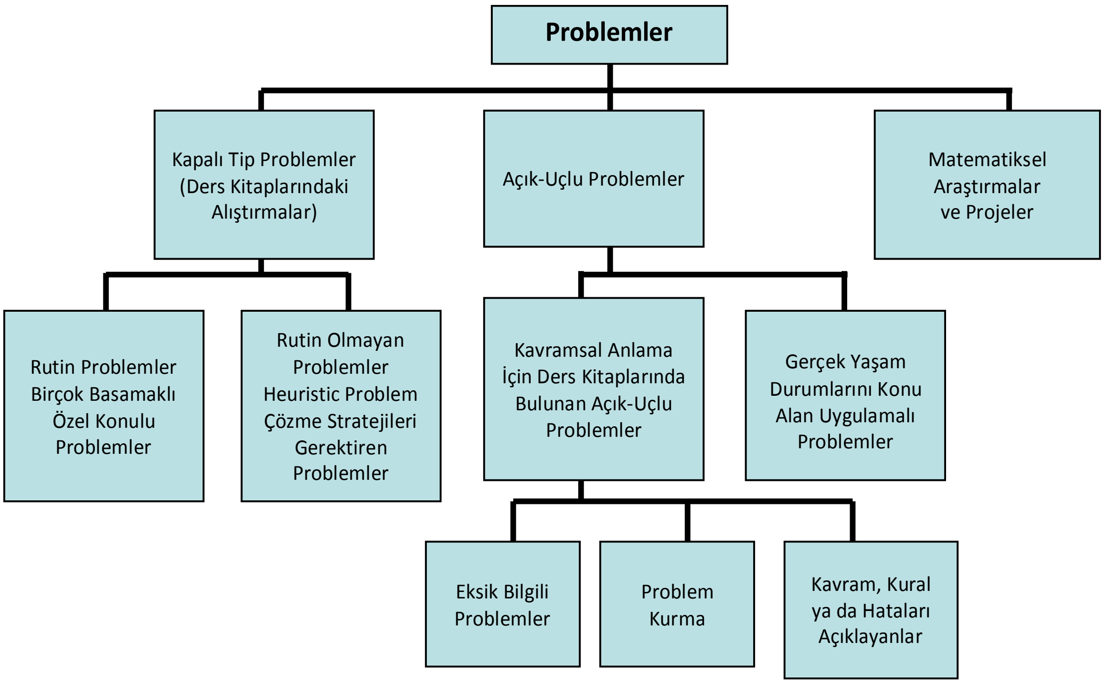
Farklı tür problem durumları için üretilen matematik modellerinin uygunluk ve yeterlilik açısından incelenmesi mümkündür. Ancak araştırma kapsamında rutin olmayan problemler üzerinde çalışan öğretmen adaylarının ürettiği matematik modelleri uygunluk ve yeterlilik açısından incelenmiştir. Dolayısıyla elde edilen bilgi ve bulguların rutin olmayan ve araştırmada kullanılan problem durumlarıyla sınırlıdır. Diğer taraftan çalışmanın katılımcıları bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 188 kişilik 3. ve 4. sınıf öğretmen adayı grubu ile sınırlıdır. Süre açısından ise 2010-2011 eğitim öğretim yılının bahar dönemi (2. dönem) ile sınırlıdır.

2. ALAN YAZINI TARAMASI

2.1. PROBLEM VE PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNE GENEL BAKIŞ

Problem çözme, bireyin içersinde bulunduğu en anlamlı ve önemli düşünme ve öğrenme sürecidir (Jonassen, 1997). Bu nedenledir ki problem çözme matematik eğitimi alanında yapılan araştırmalara sık sık konu olmaktadır. Yapılan araştırmalar kapsamında problem çözme sürecinin farklı açılardan ele alındığı ve sürecin nasıl işlediğine ilişkin evrensel bir teorinin geliştirilemediği dikkat çekmektedir. Ancak genel olarak problem çözme sürecinin verilenlerden hareketle istenenlere ulaşılmasını sağlayan kavram, kural ya da prensiplerin uygulaması olarak sınırlandırılmaması gerektiği vurgulanmaktadır (Lesh ve Doerr, 2003; Lester ve Kehle, 2003). Çünkü geleneksel problem çözme süreci öğrencilerin probleme ilişkin kişisel anlamlar ya da temsiller oluşturmasına imkân tanımamaktadır (Hines, 2008). Bu noktada problem çözme sürecinin sınırlarının belirlenmesi için öncelikle sürece yön veren problemlerin niteliğinin incelenmesi yerinde olacaktır.

Problem, çözümün açıkça görülmediği, çözenin zihnini yoklamasını ve kendinden bir şeyler katarak çözüme ulaşmasını gerektiren bir durumdur (Umay, 2007). Başka bir ifadeyle kişide çözme arzusu uyandıran ve çözüm yolu açıkça bilinmeyen fakat kişinin bilgi ve deneyimlerini kullanarak çözebileceği durumlara problem denir (Toluk ve Olkun, 2001). Blum ve Niss'e (1991) göre en genel anlamda problem, belirli açık sorular taşıyan, kişinin ilgisini çeken ve kişinin bu soruları cevaplayacak yeterli algoritma ve yöntem bilgisine sahip olmadığı bir durumdur. Matematiksel problem ise, matematiksel bilginin uygulanmasını gerektiren, karşılaştıklarında bireyin bilişsel dengesini bozup çözüm yolları aramaya sevk eden bütün matematiksel durumlar olarak tanımlanabilir (Bayazit ve Aksoy, 2009). Bu bağlamda matematik problemleri gerçek yaşam durumlarını ele alan uygulamalı matematik problemleri ve matematiğin kendi içersinde tanımlanan pür matematik problemleri (Blum ve Niss, 1991) olarak sınıflandırılabileceği gibi açık uçlu ve kapalı uçlu, rutin ve rutin olmayan problemler olarak da kategorize edilebilir. Foong'un (2002) alan yazınında var olan problem türlerini ve bunların süreç içersindeki rollerini göz önünde bulundurarak geliştirdiği sınıflandırma ise aşağıdaki gibidir:



Şekil 1. Matematiksel problemler için sınıflandırma şeması (Foong, 2002).

Kapalı uçlu problemlerde bireylerden problem ifadesindeki verileri çeşitli şekillerde düzenleyerek tek bir doğru cevaba ulaşması beklenmektedir (Foong, 2002). Kapalı uçlu problemler sınırlı sayıda kavram, kural ya da prensibin uygulanmasını gerektirir (Jonassen, 1997). Bu kapsamdaki rutin problemler matematik ders kitaplarında çokça yer alan ve dört işlem problemleri olarak bilinen problemlerdir. Bu tür problemler sadece aritmetik işlemlerin uygulanmasıyla çözülebilmektedir. Rutin olmayan problemlerde ise doğrudan aritmetiksel işlemlerin uygulanmasının ötesinde verilerin farklı açılardan organize edilmesi gerekmektedir. Bu problemler belirli bir kuralın uygulanmasından ya da hatırlanmasından ziyade üretici, yaratıcı ve eleştirel düşüncenin kullanımını gerektirmektedir.

Kapalı uçlu problemlerden farklı olarak açık uçlu problemleri çözüme götürecek sabit bir kural ya da prosedür yoktur (Foong, 2002). Açık uçlu problemlerin çoğu günlük yaşam ile ilişkilidir ve bireyin varsayımları doğrultusunda farklı çözümlere ulaşması mümkündür. Matematiksel araştırmalar ve projeler ise pür matematik bilgilerinin keşfedilmesi ve geliştirilmesi amacıyla yürütülen projelerdir ve açık uçlu problemlerin bir parçası olarak da düşünülebilir. Bu projeler ve araştırmalar bireylere matematiksel bilgi ve becerileri yaratıcı bir şekilde kullanabilme fırsatı sunmaktadır.

Buraya kadar anlatılanlardan hareketle problemlerin çeşitliliğine bağlı olarak problem çözme sürecinin de çeşitlilik göstereceği söylenebilir. Nitekim problem çözme, bireyin her biri rutin olmayan ancak belirli bilgi ve becerileri de içine alan bilişsel eylemlere sahip olmasını gerektirir (Lester ve Kehle, 2003). Dolayısıyla problem çözme kavram, kural ve prensiplerin uygulanmasından ziyade bunların ilişkilendirilmesi, modellerin üretilmesi, sonuca ilişkin tahminlerin yapılması, çıkarımlarda bulunulması, hedeflerin düzenlenmesi ve önceki bilgilerin değerlendirilmesi gibi birçok zihinsel beceriyi gerektirir (Jonassen, 1997). Bu gerçek, problem çözmeyi alıştırmalara ve rutin problemlere çözüm üretmenin ötesinde çok daha açık uçlu ve birey merkezli bir süreç haline getirmektedir. Problem çözmenin birey merkezli ve açık uçlu bir süreç olarak ele alınması sürece ilişkin evrensel bir teorinin ortaya konmasını güçleştirmektedir. Ancak, sürecin işleyişine ilişkin Polya (1973) tarafından geliştirilmiş olan ve dört temel aşamadan oluşan problem çözme modeli eğitimciler arasında genel kabul görmektedir. Bu aşamalar şu şekilde izah edilebilir:

a. Problemin anlaşılması: Problemin çözüme kavuşturulması için şüphesiz ki problem durumunun öncelikle birey tarafından anlaşılması gerekmektedir. Aksi takdirde birey problem durumuna ilişkin hiçbir düşünce geliştiremez. Bu aşamada bireyin problemi çözüme kavuşturabilmesi için gerekli verileri belirlemesi ve istenilen durum ile verilen durum arasındaki ilişkiyi anlaması gerekmektedir (Aktaran: Bayazit ve Aksoy, 2009).

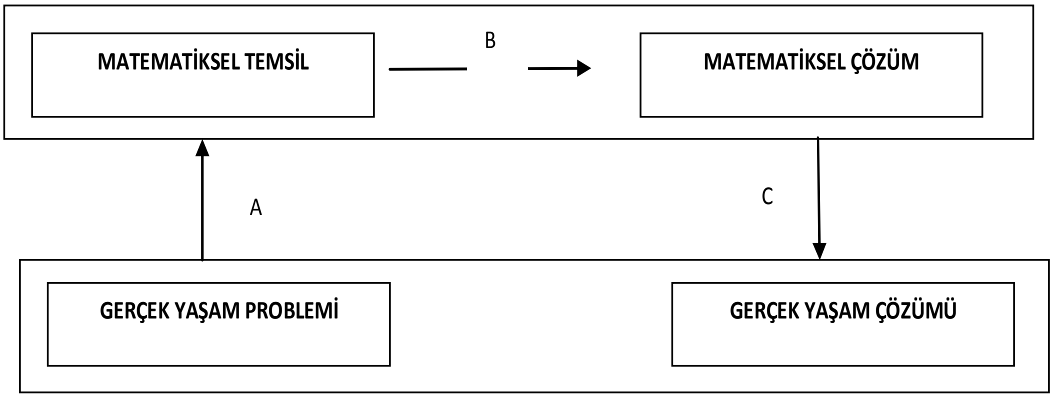
b. Bir plan tasarlama: Bu basamağın başarılı bir şekilde yürütülmesi problemin tam olarak anlaşılmasına bağlıdır. Bu aşamada problemin çözümü için kullanılacak stratejilerin ve matematik modellerinin belirlenmesi gerekmektedir (Aktaran: Bayazit ve Aksoy, 2009).

c. Planın uygulanması: Bir önceki basamakta belirlenen stratejiler, modeller ve işlemler bu basamakta uygulamaya konur.

d. Değerlendirme: Ulaşılan çözümün ihtiyaçlara cevap verip vermediğinin belirlenmesi amacıyla çözüm süreci gözden geçirilir ve çözüm değerlendirilir.

Problem çözme süreci temel olarak bu basamaklar doğrultusunda şekillense de süreç lineer bir şekilde işlememekte problemin niteliğine ve amacına uygun olacak şekilde yeniden yapılanmaktadır. Lester ve Kehle (2003) problemlerin ve süreç içersinde bireyden beklenen kritik davranışların niteliğini göz önünde bulundurarak problem çözme sürecini üç farklı açıdan ele alıp incelemiştir.

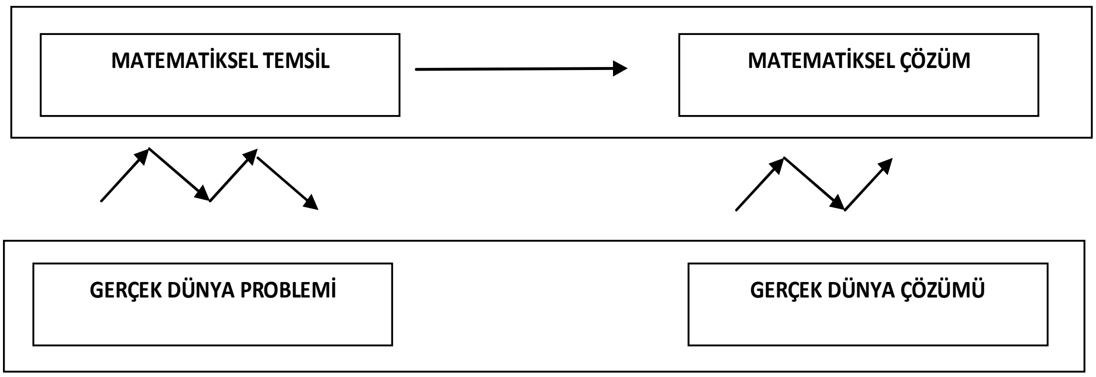
Bu bakış açılarından ilkine göre bireyin günlük yaşam problemleri ve matematik uygulamalarını çözüme götürmesi için daha önceden öğrendiği matematiksel kavram, işlem ve sembolleri kullanması gerekmektedir. Üç aşamadan oluşan problem çözme süreci lineer bir şekilde işlemekte ve problem durumu ile matematik arasındaki ilişki tek yönlü kurulmaktadır.



Şekil 2: Problem çözme sürecinin işleyişini açıklayan temel bir bakış açısı (Lester ve Kehle, 2003).

Bu bakış açısına göre problem çözücünün problem ifadesindeki verileri daha önceden bildiği kural, formül ve bağıntılar yardımıyla matematikselleştirmesi, ardından gerekli işlemleri yaparak çözüme ulaşması ve yorumlaması gerekir. Ayrıca problem çözmenin matematiğin uygulamalarından ayrı öğrenildiği, dolayısıyla matematiksel kavramlar öğrenildikten sonra bu düşüncelerin uygulamaya konması amacıyla problem çözme etkinliklerine yer verilmesi gerektiği savunulmaktadır. Ancak, problem çözmeye böyle yaklaşan bireylerin öğrendiklerinden farklı, çok daha karmaşık problemlerle karşılaştıklarında kendine has çözümler üretme noktasında sıkıntı yaşayacakları bir gerçektir. Dolayısıyla, alıştırma ve rutin problemlerin ötesinde farklı yaklaşımların ve özgün stratejilerin kullanımını gerektiren ve yeni anlamların keşfedilmesine imkân tanıyan çok daha açık uçlu ve sıra dışı problemler için bu sürecin yeniden yapılandırılması gerekmektedir.

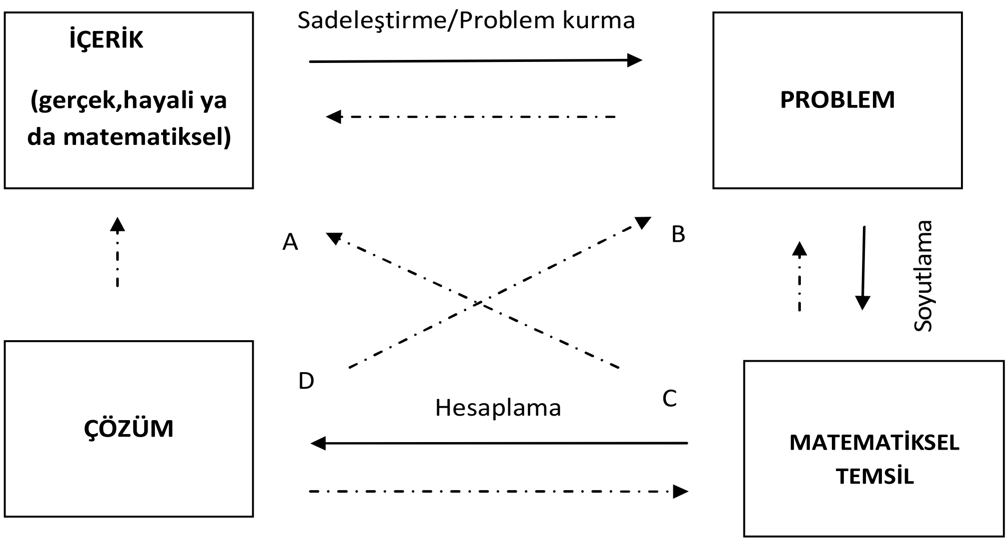
Rutin olmayan problemlerin çözümünde sergilenen düşünceleri açıklamak amacıyla geliştirilen ikinci bakış açısına göre bireylerden hâlihazırdaki kavram ya da kuralları uygulamasının ötesinde matematiksel kavram ve kuralları inşa etmeleri beklenmektedir (Lester ve Kehle, 2003). Problem durumu ile matematiksel süreçler arasında kurulan çift yönlü iletişim bireyi sürecin içersinde aktif kılmakta ve bireyin matematiksel kavram ve kuralları doğrudan uygulamasından ziyade yapılandırmasına imkân tanımaktadır. Bu bakış açısına göre problem çözme süreci Şekil 3'teki gibi işlemektedir.



Şekil 3. Geliştirilmiş problem çözme süreci (Lester ve Kehle, 2003).

Yukarıdaki şekilde yukarı ve aşağı yönlü oklar bireyin matematik ile problem durumu arasında gidip geldiğini göstermektedir. Yukarı yönlü oklar genelleme ve soyutlama süreçlerini temsil etmekte iken aşağı yönlü oklar problemi çözen kişinin matematiksel süreçler ile bu süreçlerin temsil ettiği gerçekleri ilişkilendirdiğini göstermektedir. Birey, matematiksel kural veya kavramları unutsa dahi kurduğu ilişkiler sayesinde bunları yeniden yapılandırabilir. Bu yaklaşım ilk yaklaşıma göre daha gelişmiş olsa da gerçek problem çözmenin içerdiği birçok bilişsel ve bilişsel olmayan eylemleri açıklamakta yetersiz kalmaktadır.

Problem çözme sürecine ilişkin geliştirilen son yaklaşıma göre ise problem çözme matematiksel bir aktivite olarak ele alınmaktadır (Lester ve Kehle, 2003). Bu bakış açısına göre problem çözme süreci matematiksel bilgilerin uygulamaya konulduğu, soyutlama ve genellemelerin yapıldığı, eleştirel ve yaratıcı düşüncenin yanı sıra üst bilişsel yeteneklerin işe koşulduğu zihinsel aktiviteler bütünü olarak tanımlanmaktadır. Bu süreçte sergilenen düşünce ve yaklaşımlar ve bunların nasıl işlediği Şekil 4'te temsil edilmiştir.



Şekil 4. İdeal bir problem çözme süreci (Lester ve Kehle, 2003).

Problem çözme sürecinin idealize edildiği ve yukarıdaki şekilde şematize edilen yaklaşıma göre bireylerden öncelikle üzerinde çalıştığı hayali, gerçek ya da matematiksel bir durumdan yola çıkarak problemi tanımlamaları ve varsayımları doğrultusunda problemi sadeleştirmeleri, yani probleme ilişkin gerçek modeller ortaya koymaları beklenmektedir (Lester ve Kehle, 2003). Ardından ise bu modellerin önemli özelliklerini temsil edecek matematiksel kavramların seçimini yapıp bunlarla alakalı uygun işlemleri yürüterek çıkarımda bulunmaları gerekmektedir. Son aşamada ise bütün bu sürecin gözden geçirilerek değerlendirilmesinin yeterli olacağı belirtilmektedir.

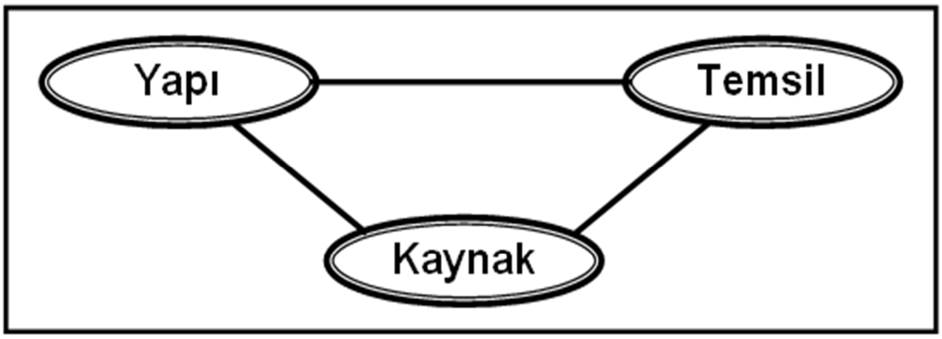
Dikkat edilecek olunursa bu son bakış açısı problem çözme sürecini matematiksel modelleme yaklaşımı açısından ele almakta ve bireylerin kurallara dayalı çözümler üretmek yerine problem ifadesindeki ilişkileri irdelemek için anlamlı modeller geliştirmelerinin daha yararlı olacağını savunmaktadır. Bu yaklaşıma göre model oluşturma problem ifadesindeki verilerin, bilgilerin, örüntülerin, işlemlerinin ve nesnelerin düzenlenmesini, koordine edilmesini ve boyutlandırılmasını, daha genel bir ifadeyle matematikselleştirilmesini içermektedir (Lesh ve Harel, 2003). Buraya kadar anlatılanları netleştirmek adına bundan sonraki kısımda öncelikle 'model ve modelleme' kavramları üzerinde durulacak, ardından ise model kullanımının problem çözme sürecindeki rolü ve önemi izah edilecektir.

2.2. MATEMATİKSEL MODELLEME SÜRECİNE GENEL BAKIŞ

2.2.1. Matematiksel Model ve Modelleme Süreci

Modelleme yaklaşımı açısından model terimi bireyin düşünce süreçlerini tanımlamak ve özetlemek amacıyla kullanılan araçlar ya da şemalardan ziyade bireyin geliştirdiği kavramsal araçlar olarak karşımıza çıkmaktadır (Lesh ve Doerr, 2003). Bu nedenle matematiksel düşünceyi farklı boyutları ile içinde barındıran problem çözme sürecinde bireyin ürettiği her türlü bilişsel ve kavramsal modelin, şemanın, düşüncenin incelenmesi bu sürecin daha iyi anlaşılmasına katkı sağlayacaktır.

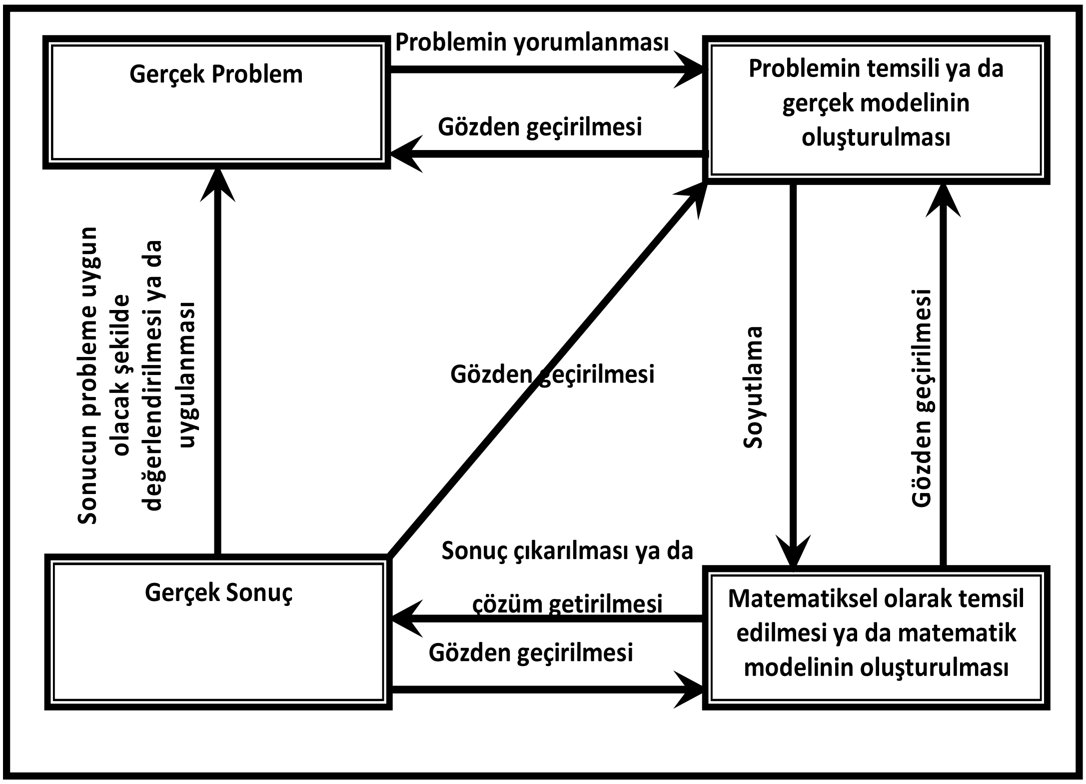
Model bir sorunun çözüme kavuşturulması için asıl durumun yerine, bu durumun zihinsel temsillerinin geçmesi sonucu oluşmaktadır (Fischbein, 2001). Model belirli bir problemle ilgili gerçeğin sadeleştirilmiş temsilidir ve problemin bazı yönlerinin görselleştirilmesi, özelliklerinin genellenmesi ya da kıyaslama yapılması amacıyla kullanılabilir (Daupeto ve Porenti, 1999). Diğer taraftan model verilen bir sistemdeki yapının temsili olarak tanımlanmaktadır (Hestenes, 2010). Bu tanımda sistem, birbiri ile ilişkili gerçek ya da hayali, basit ya da karmaşık, fiziksel ya da zihinsel nesneler kümesi; yapı ise bu nesneler arası ilişkiler ağı olarak karşımıza çıkmakta ve model sembolik olarak Şekil 5'teki gibi gösterilmektedir (a.g.e.) :



Şekil 5. Modelin sembolik gösterimi (Hestenes, 2010).

Buraya kadar sunulan bilgilerden matematiksel modelin gerçek ya da hayali, fiziksel ya da zihinsel her türlü durumun ya da sorunun matematik aracılığıyla temsil edilmesi sonucu oluşan bir ürün olduğu söylenebilir. Hennig (2009) matematik modelini, gerçek nesneler ve bu nesneler üzerinde yürütülen matematiksel işlemler sonucu geliştirilen matematiksel nesneler koleksiyonu olarak tanımlamaktadır. Matematik modelleri tanımladığı durumların ya da sistemlerin fiziksel ya da görsel özelliklerinden ziyade bu sistemlerde var olan nitel ve nicel çokluklar arasındaki ilişkilere odaklanmaktadır (Lesh ve Doerr, 2003).

Problem durumunu matematik modeline dönüştüren süreç ise matematiksel modelleme olarak tanımlanmaktadır (Blum, 2002). Barbosa (2003) matematiksel modelleme sürecini gerçeğin kaynaklık ettiği durumların matematik aracılığı ile keşfedildiği ve soruşturulduğu öğrenme ortamı olarak ifade etmektedir. Model oluşturma bir problem durumunu çözüme götürecek algoritma ya da kuralı uygulamaktan ziyade çözüm için uygun aracı üretmeyi gerektirmektedir (Zawojewski ve Lesh, 2003). Dolayısıyla matematiksel modelleme, verilenler ile ulaşılmak istenenler arasında izlenmesi gereken katı bir süreç olmaktan ziyade mümkün olan çözüm yolları hakkında değişik düşünme yollarını ve aşamalarını içine alan oldukça karmaşık, çok yönlü ve esnek bir süreçtir (Lesh ve Doerr, 2003). Matematiksel modellemenin bu özelliği, modelleme sürecinin işleyişine ilişkin genel bir tanımlamanın yapılmasını güçleştirmektedir. Prensip olarak her matematik modelinin ardında bir modelleme süreci yatar; yani birey doğrudan ya da dolaylı olarak gerçek yaşam durumu ile matematik arasında ilişki kurmasını gerektiren bir süreç içerisine girer (Kaiser v.d., 2006). Bu sürecin işleyişi ise modellemenin nasıl ele alındığı, karmaşık olan ya da olmayan etkinliklerin kullanılıp kullanılmadığı gibi durumlar açısından farklılık gösterebilir (Ferri, 2006). Bu nedenle modelleme sürecinin işleyişine ilişkin genel bir tanımlamanın yapılması zor olsa da alan yazını ışığında ön plana çıkan ve farklı modelleme süreçlerinin de işleyişine yön veren aşağıdaki temel basamaklardan söz edilmesi mümkündür.



Şekil 6. Matematiksel modelleme sürecinin basitleştirilmiş gösterimi (Lesh ve Doerr, 2003; Eric, 2008; Blum 1996; Akt. MaaB, 2006).

Matematiksel modellemenin başlangıç noktası gerçek problem durumudur (Blum ve Niss, 1991; Blum, 2002). Bu noktada gerçeklik somut bir materyal, sosyal ya da doğal bir olgu olmak zorunda değildir (Dapueto ve Porenti, 1999). Bütünüyle matematik evreninin içerisinde tanımlanan pür matematik problemlerinden farklı her türlü durum ve problem, matematiksel modellemenin başlangıç noktası olabilir (Blum ve Niss, 1999). Diğer taraftan, problemi çözen kişinin bilgisi ve ilgisi doğrultusunda problem durumuna ilişkin tahminlerde ve varsayımda bulunularak problem durumunun sadeleştirilmesi, yapılandırılması, netleştirilmesi, başka bir ifadeyle problem durumunun gerçek modelinin oluşturulması gerekmektedir (Blum ve Niss, 1991; Blum, 2002). Oluşturulan bu gerçek modelin matematiğin süzgecinden geçirilip matematiksel bir karakter kazandırılması ile matematik modeli oluşmaktadır. Matematikselleştirme, problemi temsil etmek adına dil, sembol, grafik, resim, materyal ya da diğer kavramsal sistemleri özelleştirmeyi gerektiren bir modelleme oluşumudur (Lester ve Kehle, 2003). Dolayısıyla matematik modeli soyut, somut, analojik, şematik, sözlü ya da sözsüz olabilir (Fischbein, 2001). Matematikselleştirme sürecinin ardından önce yorumlanan, sonra değerlendirilen matematik modeli problem durumu için uygun bir çözüm sunmuyor ise sürecin bazı bölümleri ya da tamamının değiştirilmesi gerekebilir.

Her ne kadar matematiksel modelleme sürecinin temel basamakları Şekil 6'daki gibi ifade edilse de sürecin lineer bir şekilde işlediğini söylemek zordur (Eric, 2008; MaaB, 2006; Lesh ve Doerr, 2003). Her bir modelleme süreci, probleme ilişkin tanımların, tahminlerin, açıklamaların problem ile iletişim içerisinde olunan süre boyunca yeniden düzenlenmesini gerektiren çoklu döngüleri içerir (Doerr ve English, 2003). Matematiksel modelleme sürecinin dinamik yapısının daha iyi anlaşılması için alan yazınında yer alan farklı modelleme yaklaşımları bir sonraki kısımda incelenecektir.

2.2.2. Farklı Bakış Açılarından Matematiksel Modelleme Süreci

Her bir matematik modelinin ardında bir modelleme süreci yatmaktadır (Kaiser v.d., 2006). Ancak alan yazını incelendiğinde farklı yaklaşımlara ve ilkelere dayanan matematiksel modelleme süreçlerine rastlamak mümkündür. Bu yaklaşımlarda modelleme sürecinin basamakları benzerlik gösterse de sürece hâkim olan temel düşünce farklılaşmaktadır. Bu nedenle modelleme sürecine yön veren temel bakış açılarının anlaşılması sürecin ve süreç içerisinde ortaya konan matematik modelinin niteliğinin anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Başta ICMI ve ICTMA etkinlikleri olmak üzere, alan yazını kapsamında yayınlanan araştırmalardan yola çıkılarak matematiksel modelleme sürecine yön veren bakış açıları ve temel yaklaşımlar Tablo 1'deki gibi sınıflandırılabilir (Kaiser, 2005; Kaiser ve Sriraman, 2006; Kaiser v.d., 2007).

Tablo 1. Farklı bakış açılarından modelleme süreci (Kaiser, 2005; Kaiser ve Sriraman, 2006; Kaiser v.d., 2007).

YAKLAŞIMLAR	ANA HEDEFLER	ALT YAPISI
Realistik-Uygulamalı Modelleme	Yararcı-faydacı hedefler: Gerçek yaşamın anlaşılması, gerçek hayat problemlerinin çözülmesi, modelleme yeterliliklerinin geliştirilmesi	Anglo-saxon Pragmatizm ve Uygulamalı Matematik Pollak'ın Pragmatik Yaklaşımı
Bağlamsal (contextual) Modelleme	Konu ile ilişkili ve psikolojik hedefler: Sözel problem çözme	Problem Çözme Tartışması ve Psikolojik Laboratuar Deneyleri
Eğitimsel Modelleme	Pedagojiksel ve konu ile ilişkili hedefler:	Didaktik Teoriler ve Öğrenme Teorileri
a. Didaktik Modelleme	**a.** Öğrenme sürecinin yapılandırılması ve geliştirilmesi.	
b. Kavramsal Modelleme	**b.** Kavramın tanıtılması ve geliştirilmesi.	
Sosyo-Kültürel-Eleştirel Modelleme (Sosyo-cultural-critical)	Modelleme etkinliklerinin ait olduğu sosyo-kültürel ortam içerisinde değerlendirilerek modelleme sürecinin ve modelin eleştirel olarak incelenmesi.	Sosyo-Kültürel-Eleştirel Yaklaşımlar
Epistemolojik Modelleme	Teori Temelli Hedefler: Matematik etkinlikleri ile modelleme etkinlikleri arasındaki bağlantının geliştirilmesi, matematiğin yeniden kavramsallaştırılması, modelleme açısından okul matematiğinin yeniden düzenlenmesi.	Roman Epistemolojisi
Bilişsel Modelleme	Psikolojik Hedefler: **a.** Modelleme sürecinde meydana gelen zihinsel süreçlerin analiz edilmesi ve bu zihinsel süreçlerin anlaşılması. **b.** Modelleri zihinsel ya da fiziksel resimler olarak kullanarak veya modellemeyi soyutlama, genelleme gibi zihinsel süreçler olarak ele alarak matematiksel düşünme süreçlerinin geliştirilmesi.	Bilişsel Psikolojisi

Tablo 1'de görüldüğü üzere, alan yazınında var olan modelleme yaklaşımları genel amaçları doğrultusunda realistik, bağlamsal, eğitimsel, sosyo-kültürel, epistomolojik ve bilişsel yaklaşımlar olarak sınıflandırılabilmektedir.

Realistik yaklaşıma göre, matematiksel modelleme uygulamalı problem çözme olarak karşımıza çıkmakta ve birçok bilimsel, teknolojik ve hatta sosyal sorunun matematik aracılığı ile çözüme kavuşturulmasına imkân tanımaktadır. Bu yaklaşıma göre öğrencilerin matematiksel modelleme yeterlilikleri geliştirilmeli, ürettikleri modeller gerçek dünya ya da gerçek verilere uygunluğuna göre değerlendirilmeli ve teknolojik olarak desteklenmelidir (Blomhoj, 2008). Ayrıca bu yaklaşıma göre modelleme parçalar halinde değil, bütün halinde işleyen bir süreçten oluşmaktadır (Kaiser ve Sriraman, 2006).

Bağlamsal modelleme yaklaşımının temeli matematik eğitiminde sözel problemlerin rolüne ve problem çözme sürecine dayanmaktadır. Ancak bu yaklaşım açısından problem çözme geleneği okullarda uygulanan problem çözme etkinliklerinin ötesinde ele alınmaktadır (Kaiser ve Sriraman, 2006). Geleneksel problem çözmede amaç, belirli yapılarla ilgili prosedürlerin kullanılarak bilginini işlenmesi iken, bağlamsal modelleme yaklaşımında problem çözme sürecinde ortaya konan matematiksel düşünce ve kavramların kendisinin işlenmesi hedeflenmektedir (Lesh ve Doerr, 2003). Her bir modelleme süreci probleme ilişkin tanımlamaların, varsayımların, tahminlerin, açıklamaların problem ile iletişim içerisinde olduğu süre boyunca yeniden düzenlenmesini içeren çoklu döngüleri gerektirmektedir (Doerr ve English, 2003). Bu nedenle, bağlamsal modelleme yaklaşımının odağında öğrenmeyi kolaylaştırmak ve desteklemek amacıyla model oluşturma (model eliciting) etkinliklerinin tasarlanması yer almaktadır. Bu yaklaşımın savunucularından Lesh ve Doerr'e (2003) göre model oluşturma etkinlikleri geleneksel problemlerde tanımlanan durumu sembolik olarak anlamlı kılmanın ötesinde birey için anlamlı durumların matematiksel tariflerinin oluşturulmasına dayanmaktadır. Dolayısıyla öğrenciyi ileri düzeyde matematiksel düşünmeye sevk eden model oluşturma etkinlikleri rutin matematik etkinliklerine nazaran açık uçludur ve çok daha fazla zaman gerektirir (Doerr, 2006). Bir matematik etkinliğinin model oluşturma etkinliği olması için sahip olması gereken temel ilkeler vardır (Lesh ve Doerr, 2003). Bu ilkelerden ilki gerçeklik ilkesidir ve bu ilkeye göre, tasarlanan model oluşturma etkinliği öğrenciler için anlamlı gerçek hayat durumlarından oluşmalı ve öğrencilerin ilgi ve yetenekleri ile ilişkili olmalıdır. İkinci olarak, tasarlanan etkinlik öğrencileri düzenlenebilir, geliştirilebilir, paylaşılabilir modeller üretmeye sevk etmelidir; yani tasarlanan etkinlik model inşasına imkân tanımalıdır. Bunun yanı sıra modelleme etkinliği öğrencilerin oluşturdukları modellerin öz değerlendirmesini yapmalarına ve süreç içerisinde düşüncelerini bütün yönleriyle ifade etmelerine imkân tanımalıdır. Son olarak, üretilen modelin eldeki durumun pratiğini yansıtması ve benzer durumlar için de genellenebilir olması gerekmektedir.

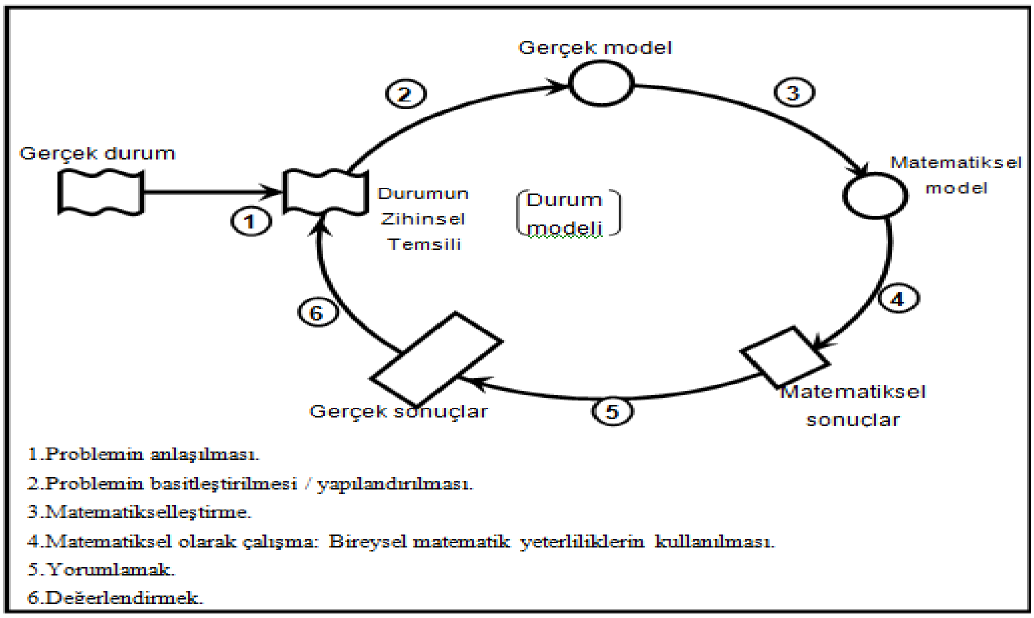
Eğitimsel modelleme yaklaşımı ise model ve modelleme etkinliklerinin kullanılmasının matematik öğrenimi ve öğretimini kolaylaştıracağını savunmaktadır. Bu yaklaşım açısından modelleme bir hedef olarak görülmektedir (Blomhoj, 2008). Bu kapsamda eğitimsel modelleme yaklaşımı farklı türdeki matematik müfredatlarında matematiksel modelleme etkinliklerinin düzenlenmesi, sınıf ortamında modellemenin uygulanması ve modellerin değerlendirilmesi gibi konuları incelemektedir.

Sosyokültürel ve eleştirel yaklaşım ise etno-matematikte olduğu gibi matematiğin sosyokültürel boyutlarına odaklanmaktadır. Bu yaklaşım toplumda matematiğin rolüne vurgu yapmakta ve matematiğin rolü ve fonksiyonu hakkında eğitim camiası ve toplumdaki eleştirel düşüncenin geliştirilmesi gerektiğini savunmaktadır (Kaiser ve Sriraman, 2006). Matematiksel modellemelerin ve uygulamalarının öğretiminin, bağımsız ve özgür bireylerin yetiştirilmesi için önemli olduğunu savunmaktadır (Blomhoj, 2008). Bu nedenledir ki, düşünce ve kavram eksenli yansıtıcı tartışmaların modelleme sürecinin ayrılmaz bir parçası olarak yürütülmesinin önemi vurgulanmaktadır (Kaiser ve Sriraman, 2006).

Epistomolojik yaklaşıma göre modelleme matematik dışındaki konuların matematikselleştirilmesiyle sınırlı tutulmalıdır (Kaiser ve Sriraman, 2006). Bu yaklaşım matematiğin öğrenilmesine ve öğretilmesine imkân tanıyan genel teorilerin geliştirilmesine odaklanmaktadır. Freudenthal enstitüsü tarafından geliştirilen gerçekçi matematik eğitimi (realistic mathematics education - RME) teorisi bu kapsamda geliştirilen teorilerden biridir (Blomhoj, 2008). Gerçekçi matematik eğitimine göre, öğrenciler matematiği uygularken matematiksel bilgi ve düşünceleri öğretmen rehberliğinde yeniden keşfetme olanağı bulurlar. Bu nedenle, matematikselleştirme gerçekçi modelleme yaklaşımda olduğu gibi sadece günlük hayat ile sınırlandırılmamalı, matematik konuları için de kullanılmalıdır. Bu aşamada Treffers (1987) tarafından geliştirilen yatay ve dikey matematikselleştirme kavramlarının göz önünde bulundurulması yerinde olacaktır. Yatay matematikselleştirme, matematiksel araçların ortaya çıkarılmasını ve bu araçların günlük hayat durumlarına ait problemlerin çözümünde kullanılmasını gerektirirken, dikey matematikselleştirme öğrencinin matematik sistemi içersinde yürüttüğü her türlü yeniden düzenleme ve işlem yapma sürecini içerir (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Bu sayede bireyler matematik öğrenirken duruma bağlı informal çözüm yolları bulmaktan, şemalar oluşturmaya, ilkeleri ve bunlar arasındaki ilişkileri tespit etmeye kadar farklı anlama seviyelerinden oluşan aktif bir zihinsel süreç yaşarlar (a.g.e.).

Son olarak, matematik eğitimcilerinin son yıllarda çokça üzerinde durdukları bilişsel modelleme yaklaşımından da bahsedilebilir. Bu yaklaşımın temel hedefi, modelleme sürecinde geliştirilen bireysel alışkanlıkların, yaşanan zorlukların ya da sınırlıkların tespit edilmesidir (Kaiser ve Sriraman, 2006). Ayrıca, bu yaklaşım bireylerin süreç içersinde sergiledikleri düşünce ve modelleme aşamalarını analiz etmeyi amaçlamaktadır. Bu yaklaşımın öncülerinden olan Ferri (2006)'nin farklı modelleme süreçlerinin ilk üç basamağını dikkate alarak geliştirdiği sınıflandırmanın incelenmesi, gerek bilişsel modelleme yaklaşımının gerekse farklı modelleme süreçlerinin anlaşılmasını kolaylaştıracaktır. Ferri (2006), modelleme süreçlerini ilk üç basamağı açısından aşağıdaki gibi dört grup altında incelemektedir:

I. GRUP: Bu gruptaki modelleme döngüsü üzerinde çalışan araştırmacılar, özellikle modelleme sürecindeki bireylerin bilişsel süreçlerine odaklanmaktadır. Bu yönüyle bilişsel modelleme yaklaşımı bu grup içerisinde de düşünülebilir. Bu grupta tanımlanan modelleme sürecinin işleyişi aşağıdaki gibidir:



Şekil 7. Ferri (2006)'nin farklı modelleme süreçlerinin ilk üç aşamasına göre sınıflandırdığı birinci tür modelleme döngüsü.

Şekilden anlaşılacağı üzere modelleme döngüsünü başlatan gerçek durum problem ifadesinde verilen durumdur. Bir resim, bir yazı ya da her ikisi birden olabilir. Problemin birey tarafından anlaşılması, probleme ilişkin zihinsel temsillerin, başka bir ifadeyle durum modellerinin oluşturulmasına imkân sağlamaktadır. Problem durumunun zihinsel temsili, bireyin matematiksel düşünce tarzına bağlı olarak değişiklik gösterebilir. Ayrıca birey geliştirdiği zihinsel temsillerin doğrudan farkında olmayabilir. Bu nedenle bireyin zihinsel temsillerini sadeleştirerek yapılandırması, netleştirmesi gerekmektedir ki, bu da gerçek modelin oluşturulmasına imkân tanımaktadır. Gerçek model ile problem durumunun zihinsel temsili arasında güçlü bir bağ vardır. Bu nedenle, problem durumuna ilişkin bir taslak veya formül gibi dışsal temsiller gerçek model olarak ele alınsa da bu dışsal temsilleri oluştururken bireyin kullandığı sözel ifadeler önemlidir.

Gerçek modelden matematik modeline geçiş ise, bireyin matematikselleştirme sürecinde ilerlemesi ve kendinden beklenen ilave matematiksel bilgileri kullanması ile mümkündür. Bu aşamada bireyler, formüller ve semboller gibi dışsal temsilleri sık kullanırlar ve bireylerin sözel ifadeleri çok daha matematiksel düzeydedir. Diğer taraftan matematik modelinden matematiksel sonuçlara geçiş için bireylerin sahip oldukları matematiksel bilgileri kullanması gerekir. Elde ettikleri matematiksel sonuçların yorumlanması ise bu sonuçların gerçek sonuçlara dönüşmesini sağlamaktadır. Bu sonuçların gerçek durum ve bu durumun zihinsel temsilleri göz önünde bulundurularak değerlendirilmesi ve doğruluğunun tespit edilmesi ise son aşamadır.

II. GRUP: Bu kapsamda yapılan araştırmalar daha ziyade sözel problemler ve bu problemlerin nasıl çözüleceği ile ilişkilidir. Bu doğrultuda probleme ilişkin matematik modelinin geliştirilmesi için izlenmesi gereken süreç aşağıdaki gibidir:

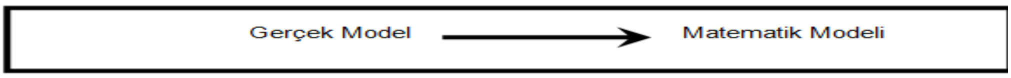
Şekil 8. Ferri (2006)'nin farklı modelleme süreçlerinin ilk üç aşamasına göre sınıflandırdığı ikinci tür modelleme döngüsü.

Şekilden anlaşıldığı üzere durum modeli ya da durumun zihinsel temsili, modelleme döngüsünü gerektiren sözel problemlerin bir parçası olarak görülebilir. Durum modelinin oluşumu ile gerçek modelin oluşumu aynı anda olmaktadır. Sözel problem durumu sadeleştirilmiş olduğu için durum modeli ya da durumun zihinsel temsili doğrundan gerçek modele dönüşmektedir. Bu nedenle sözel problemlerin çözümüne ve analizine dayanan araştırmalar durumsal model ile gerçek modeli birleştiren modelleme döngüsünü esas almaktadır.

III. GRUP: Bu gruptaki araştırmacılar durumsal model ya da durumun zihinsel temsili ile gerçek model arasında herhangi bir ayrıma gitmemektedir. Dolayısıyla durumsal modelin oluşturulması modelleme döngüsünün bir parçası değildir. Probleme ilişkin matematik modelinin oluşturulması için izlenmesi gereken süreç aşağıdaki gibidir:

Şekil 9. Ferri (2006)'nin farklı modelleme süreçlerinin ilk üç aşamasına göre sınıflandırdığı üçüncü tür modelleme döngüsü.

IV. GRUP: Bu gruptaki modelleme döngüsünde matematiksel kavram ve kuralların günlük hayattaki uygulamalarına yer verilmektedir (Ferri, 2006). Modelleme günlük hayat durumlarına ilişkin uygulamalı matematik problemlerine cevap aramakta ve bunların çözüme kavuşturulmasını amaçlamaktadır. Bu nedenledir ki durumsal model ile gerçek model ayırt edilmeksizin doğrudan gerçek durumdan matematik modeline geçilmesi söz konusudur. Başka bir ifadeyle gerçek model ile matematik model arasında hiçbir aşama yoktur. Probleme ilişkin matematik modelinin oluşturulması için izlenmesi gereken süreç aşağıdaki gibidir:



Şekil 10. Ferri (2006)'nin farklı modelleme süreçlerinin ilk üç aşamasına göre sınıflandırdığı dördüncü tür modelleme döngüsü.

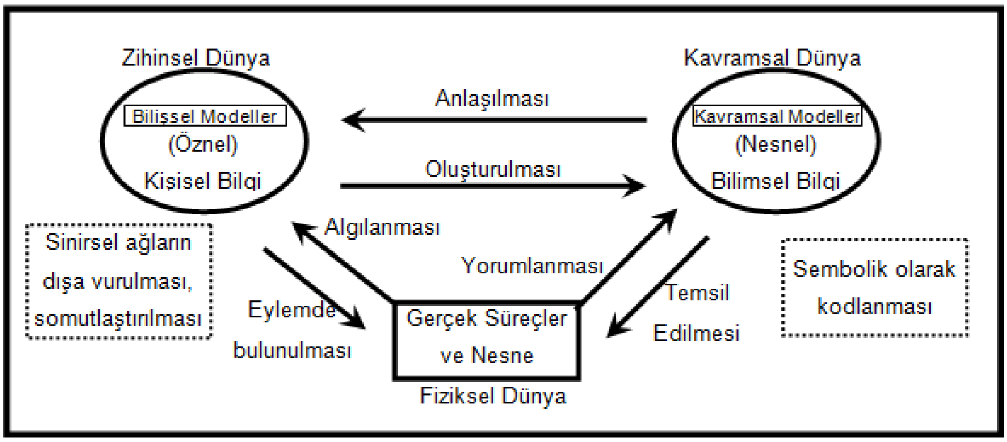
Gerek Kaiser (2005)'in sınıflandırdığı modelleme yaklaşımları, gerekse Ferri (2006)'nin yaptığı modelleme döngüleri dikkatle incelenecek olunursa, matematiksel modellemeye ilişkin evrensel bir teorinin geliştirilmesinin zor olduğu anlaşılmaktadır. Bu durumun üretilen matematik modelinin niteliğinin anlaşılmasını da etkilediği söylenebilir. Ancak matematik modelinin her ne kadar benimsenen modelleme yaklaşımı ya da izlenen modelleme döngüsü doğrultusunda faklı yönleri ön plana çıksa da değişmeyen bir yönü vardır ki o da bireyin zihni ile matematik arasındaki dönüşümün ürünü olmasıdır. Başka bir ifadeyle birey hangi modelleme sürecini yürütürse yürütsün, ürettiği matematik modelinin ardında zihnine ait bilişsel modelleri ile matematiği has kavramsal modelleri yatmaktadır. Bu nedenle üretilen matematik modelinin daha iyi anlaşılması için matematik modelinin ardındaki bilişsel ve kavramsal modellerin incelenmesi yerinde olacaktır.

2.2.3. Modelleme Sürecinde Üretilen Matematik Modelinin Bilişsel ve Kavramsal Açıdan İncelenmesi

Bireyin problem durumu karşısında ürettiği matematik modeli bireyin zihni ile matematik arasındaki dönüşümün bir ürünüdür. Eldeki problemin çözümü için birey bir başlangıç modeli üretir ve süreç içerisinde gerek geçmişten getirdiği, gerekse problem ifadesinde verilen bilgiler ışığında başlangıç modelini sürekli geliştirerek sonuca ulaşmaya çalışır (Jonassen v.d., 2005). Üretilen matematik modelinin dinamik yapısının daha iyi anlaşılması için modelin matematiğe has kavramsal yönü kadar, bireyin zihnine has bilişsel yönünün de olduğu gözden kaçırılmamalıdır. Bu bölümde öncelikle bilişsel ve kavramsal model kavramları izah edilecek, ardından ise bu kavramlar ışığında matematik modelleri incelenecektir.

Bilişsel model, bir sistemi ya da soyut bir kavramı anlama çabasında olan bireye bu sistemi ya da kavramı açıklama ve tahminde bulunma fırsatı sunan temsillerdir (Wu v.d., 1998). Bilişsel modeller işaret ettikleri nesnenin ya da kavramın yapısını sunan analojik temsillerdir (Vosniadou, 2002). Yani bilişsel modellerin bireyin zihnindeki en temel yapılar olduğu söylenebilir. Bilişsel modelin en önemli rolü, onu inşa eden bireye, temsil ettiği sistem hakkında yorum ve açıklama yapma fırsatı sunmasıdır (Greca ve Moreira, 2002). Kavramsal model ise bir sistemi, bir problem durumunu veya bir düşünceyi izah etmek amacıyla kullanılan araçlardır (Wu v.d., 1998). Öğretmenler, bilim adamları ya da mühendisler tarafından hedef sistemin uygun, doğru ve tutarlı bir şekilde temsil edilmesi amacıyla üretilen ve beş duyu ile algılanan yapılar olarak tanımlanabilir (Norman, 1983).

Bilişsel modeller bireyin zihnine ait, henüz tamamlanmamış, içsel temsiller iken, kavramsal modeller toplum tarafından paylaşılan ve toplumdaki bilimsel bilgi ile tutarlı dışsal temsillerdir (Greca ve Moreira, 2002). Ancak her kavramsal modelin ardında bir bilişsel modelin yattığı söylenebilir (Hestenes, 2006). Bu noktada, kavramsal model ile bilişsel model arasındaki ilişki aşağıdaki gibi şematize edilebilir (Hestenes, 2006):



Şekil 11. Bilişsel ve kavramsal modeller arası geçiş ve ilişkiler (Hestenes, 2006).

Hestenes (2006) bireyin bilişsel modellerinin hiçbir zaman tamamlanamayacağını, yeni bilgiler doğrultusunda büyümeye ve gelişmeye devam edeceğini ifade etmektedir. Norman (1983)'a göre ise bilişsel modeller dinamik yapılardır; durağanlıktan ve bilimsellikten uzaktır; dolayısıyla bireylerin sahip oldukları bilişsel modellere ilişkin farkındalıkları ve bu modelleri işe koşma yeterlilikleri sınırlıdır. Bir bireyin sahip olduğu bilişsel modelin yapısının diğer bireylerin de bilişsel model oluşturmasına imkân sağlayacak şekilde sembolik olarak kodlanması sonucu kavramsal model ortaya çıkmaktadır (Hestenes, 2006). Kavramsal modeller gerçek olgu, nesne ya da durumların basitleştirilmiş temsilleridir (Greca ve Moreira, 2002).

Ancak bu temsiller toplumda paylaşılan bilimsel bilgi ile tutarlı olacak şekilde sembolik bir formda oluşturulmalıdır (Hestenes, 2006).

Buraya kadar sunulan bilgilerden matematiksel modelleme süreci içerisindeki bireyin problemi anlamlandırmak ve yapılandırmak adına ürettiği zihinsel temsillerin her biri bilişsel model; bu bilişsel modelleri matematikselleştirmek adına kullandığı her türlü kavram, sembol, şekil, şema, grafik ve cebirsel ifadeler gibi yapıların ise kavramsal model olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla modelleme süreci bireyin zihnine has bilişsel modeller ışığında matematiğe has kavramsal modellerini düzenlediği ve geliştirdiği bir süreç olarak ele alınabilir. Bireyin bir olay ya da durumu anlamadan bu olay ya da durumun basitleştirilmiş ve idealleştirilmiş temsilleri olan kavramsal modellerini anlaması ve geliştirmesi mümkün değildir (Greca ve Moreira, 2002). Bu nedenledir ki, bireyin bir problem durumu karşısında geliştirdiği matematik modeli, probleme ilişkin bilişsel modellerini ve bunlarla etkileşim halindeki kavramsal modellerini düzenlediğinin ve geliştirdiğinin kanıtıdır. Yani bireyin problem durumu karşısında ürettiği matematik modellerini gerek bireyin zihninde, gerekse sayılar, semboller, grafikler gibi çeşitli temsil biçimlerinde görmek mümkündür (Lesh ve Doerr, 2003). Bu noktada bireyin ders kitaplarında öğretilmeyi bekleyen formül, grafik, sembol gibi kavramsal modelleri, bilişsel modelleri ışığında düzenlemesi ve yeniden yapılandırması yoluyla bu modellerin dinamik birer matematik modeline dönüştüğü söylenebilir.

2.3. PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNİN MATEMATİKSEL MODELLEME AÇISINDAN İNCELENMESİ

Matematiksel modelleme süreci benimsenen modelleme yaklaşımları doğrultusunda çeşitlilik gösterse de esas itibariyle verilenlerden hareketle istenenlere ulaşmayı amaçlayan geleneksel problem çözme sürecinden oldukça farklıdır. Geleneksel problem çözme sürecinde birey verilenlerden hareketle problem durumunu sembolik olarak anlamlı kılma ve çözüme ulaşma çabasındadır (Lesh ve Doerr, 2003). Bu durum bireyin üst biliş becerilerinde eksikliğe sebep olmaktadır (Mousoulides v.d., 2007). Bu nedenledir ki, geleneksel sözel problemler üzerinde çalışan öğrenciler problemleri çözmek için anahtar kelimeler ya da doğrudan uygulamaya yönelik stratejiler aramanın ötesine geçememektedir (a.g.e.). Problem çözmenin süreç eksenli değil, sonuç eksenli algılanıp yürütülmesi bu süreci olabildiğince basitleştirmektedir.

Model oluşturma, bir problem durumunu çözüme götürecek algoritma ya da kuralı uygulamaktan ziyade, çözüm için uygun aracın üretilmesini gerektirir (Zawojewski ve Lesh, 2003). Bu nedenledir ki, geleneksel problem çözmede amaç belirli yapılarla ilgili prosedürlerin kullanılarak bilginin işlenmesi iken, matematiksel modellemede amaç yapıların kendilerinin işlenmesidir (Lesh ve Doerr, 2003). Yani geleneksel problem çözme sürecinde verilenler ve istenenler statik ve değişmez yapıda iken, modelleme yaklaşımında bireyin varsayımları, sınırlılıkları ve şartları doğrultusunda yeniden yorumlanabilen, düzenlenebilen dinamik bir yapıdadır (Zawojewski, 2010). Geleneksel problem çözmede verilenler ile istenenler arasında güçlü bir prosedür uygulanırken, matematiksel modellemede verilenler, istenenler ve mümkün çözüm yolları hakkında değişik düşünme yolları esastır. Dolayısıyla problem çözme sürecinin modelleme yaklaşımı açısından ele alınması, verilenler ile sonuçlar arasında tek bir sürecin olmadığını ve bireyin bu süreçteki zorlukların üstesinden gelmesi için bir dizi strateji yürütmesi gerektiğini göstermektedir (Mousoulides v.d., 2007). Bu bağlamda, problem çözme süreci için aşağıdaki gibi dört temel basamaktan oluşan bir modelleme döngüsünün var olduğundan bahsedilebilir (Lesh ve Doerr, 2003; Blum ve Niss, 1991; Mousoulides v.d., 2007):

a. Problemin anlaşılması ve birleştirilmesi, problem ifadesinde tanımlanan durumun, grafiğin, tablonun, formülün anlaşılması ve bunlara ilişkin sonuç çıkarılması.

b. Problemin manipüle edilmesi ve matematik modelinin geliştirilmesi, problem durumunun eleştirel bir şekilde değerlendirilmesi, düzenlenmesi, üzerinde düşünülmesi ve matematik modelinin geliştirilmesi.

c. Çözümün yorumlanması, geliştirilen matematik modeli doğrultusunda elde edilen çözümün yorumlanması.

d. Çözümün doğrulanması, çözüme ilişkin yorumların problem durumu göz önünde bulundurularak doğrulanması ve çözümün farklı açılardan değerlendirilmesi.

Ayrıca eğer eldeki durum, bilinen hazır stratejilerin uygulanmasını gerektiren rutin bir problemden ziyade, matematiksel olarak farklı açılardan yorumlanacak bir problem ise açıklamaların, tahminlerin, yorumların düzenleneceği, geliştirileceği birden fazla modelleme döngüsünü gerekebilir (Lesh ve Doerr, 2003). Yani problem çözmenin modelleme yaklaşımı açısından ele alınması, bireylerin üzerinde çalıştıkları rutin olmayan, açık uçlu modelleme etkinlikleri için geliştirilebilir, yeniden düzenlenebilir, paylaşılabilir ve genellenebilir matematik modelleri oluşturmasını gerektirmektedir. Gerçekçi ve karmaşık problemlerden oluşan bu etkinlikler bireylerin matematiksel düşüncelerini test edebilecekleri, ifade edebilecekleri ve düzenleyebilecekleri modeller geliştirmesine imkân tanımaktadır (Eric, 2008). Bireyi en üst düzeyde bilişsel açıdan sürece dâhil eden bu etkinlikler Lesh ve Doerr (2003) tarafından model oluşturma etkinlikleri olarak adlandırılmaktadır. Model oluşturma etkinliklerinde süreç üründür ve amaç belirli sorulara kısa cevaplar üretmekten ziyade, önemli matematik sistemlerini açıklamak, kontrol etmek, tahmin etmek için yeniden kullanılabilir, düzenlenebilir, paylaşılabilir kavramsal araçların geliştirilmesidir (Lesh ve Doerr, 2003). Dolayısıyla model oluşturma etkinliklerinde bireyin kayıp bir aracı ya da düşünceyi bulmasının ötesinde problem durumu hakkındaki mevcut yorumlarını düzenlemesi, geliştirmesi ve sadeleştirmesi gerekmektedir (Zawojewski ve Lesh, 2003). Yani model oluşturma etkinliklerinde birey problem durumuna ilişkin bir öngörü oluşturarak kendisi için anlamlı olacak şekilde problemi matematikselleştirmeyi amaçlamaktadır (Doerr ve English, 2003). Problem çözmenin ve matematik eğitiminin amaçları göz önünde bulundurulacak olunursa bireylere belirli bir algoritmanın ya da stratejinin uygulanmasına dayanan geleneksel problemlerden ziyade kendileri için anlamlı durumları matematiksel olarak ifade etmelerine imkân tanıyacak açık uçlu modelleme etkinliklerinin sunulmasının uygun olacağı söylenebilir. Nitekim Eric (2008) altı tane ilköğretim öğrencisi üzerinde yaptığı çalışmada, modelleme etkinliklerinin sınıfa getirilmesinin öğrencilerin gerçek yaşam kaynaklı durumları çözmesine imkân tanıdığı ve geleneksel problem çözme sürecinin geliştiremediği matematiksel süreçleri ve düşünceleri geliştirdiği sonucuna ulaşmıştır. Benzer şekilde Doerr ve English (2003) modelleme etkinliklerinin güçlü matematiksel düşüncelerin gelişimi için bireylere zengin platformlar sunduğunu belirtmektedir.

2.4. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Matematik eğitiminde modelleme yaklaşımının kullanılması belirli problemlere çözüm üretmekten ziyade genellenebilir ve yeniden kullanılabilir ilişkiler sistemi oluşturulmasını gerektirmektedir. Bu doğrultuda ilköğretimden üniversite düzeyine kadar her sevideki öğrenci grupları üzerinde yapılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır.

English ve Doerr (2003) 11-13 yaş grubundaki Amerikalı ve Avustralyalı öğrencilerin katılımıyla gerçekleştirdiği çalışmada, öğrencilerin verileri seçmek, sıralamak, kıyaslamak adına kullandığı matematiksel düşünme süreçlerinin izlenmesini ve gerek modelleme etkinliklerinin gerek birbirleri ile iletişim içersinde oldukları süre boyunca geliştirdikleri değişik düşünme yollarının sınıflandırılmasını amaçlamıştır. Bu amaçla niceliklerin seçimini, sıralanmasını, sınıflandırılmasını ve elde edilen sınıfların kıyaslanmasını gerektiren 5 modelleme etkinliği sınıf ortamında sıra ile uygulanmıştır. Öğrenciler küçük gruplara ayrılmadan önce etkinlikler sınıf ortamında okunmuş ve tüm sınıfın problemi tartışması sağlanmıştır. Ardından öğrenciler 4-5 kişilik gruplar halinde bir araya gelerek probleme ilişkin model üretmeye çalışmışlardır. Bu süre boyunca araştırmacılar grupların etrafında dolaşarak öğrenciler arası etkileşimi gözlemlemiş ve notlar almışlardır. Dersin sonunda gruplar bir araya gelerek ürettikleri modeller üzerinde tartışmışlar ve bu sayede üretilen modelleri tanıtma, kıyaslama, düzenleme imkânı bulmuşlardır. Öğrencilere ait video ve ses kayıtları, çalışma kâğıtları, modellerine ve bunları nasıl geliştirdiklerine dair sundukları raporlar ve araştırmacı notları araştırmanın veri kaynaklarını oluşturmaktadır. Bu verilerin analizinde öncelikle araştırmacı notları göz önünde bulundurularak öğrencilerin tespit ettiği nicelik ve ilişkilerin türü belirlenmiş ardından her bir etkinlik için geliştirilen farklı modellerin çeşitliliği belirlenmeye çalışılmıştır. Sonuçlar öğrencilerin her bir modelleme etkinliği için bağlamın, ilişkilerin ve temsillerin yorumlanması gerektiren çoklu döngüler yürüttüklerini göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin ürettikleri modelleri geliştirdikleri ve düzenledikleri görülmüştür. Diğer taraftan bazı öğrencilerin anahtar matematiksel kavramlara ilişkin ilk düşüncelerini sözel olarak ifade etme noktasında zorluk çektiği görülmüştür.

English ve Watters (2004) 8 yaş grubundaki öğrencilerden oluşan dört sınıf ve bu sınıfın öğretmenleri ile yürüttüğü nitel araştırmada modelleme problemleri üzerinde çalışan öğrencilerdeki matematiksel bilgi gelişimi ve düşünme süreçlerini araştırmıştır. Bu kapsamda öğretmenlere bir dönem boyunca modelleme etkinlikleri tanıtılmış ve öğretmenlerden değişik düşünme yollarını tanımlamaları ve yorumlamaları istenmiştir. Her bir modelleme etkinliğinin uygulanmasından önce ve sonra toplantılar düzenlenerek öğretmenlerin öğrencilerdeki bilgi ve düşünce gelişimi, etkinlikler ve uygulama stratejileri üzerine tartışmaları sağlanmıştır. Ön hazırlık amaçlı uygulanan bu modelleme etkinliklerinin ardından her bir sınıfa iki modelleme problemi uygulanmıştır. Bu problemler eldeki durumun matematiksel olarak tanımlanmasını, yorumlanmasını gerektiren gerçek-yaşam problemlerdir ve öğretmenin sınıfta uygulayacağı temalara uygun olarak seçilmiştir. Modelleme problemlerinin uygulanması sırasındaki öğretmen davranışları, öğretmen-öğrenci etkileşimi, bir grup öğrencinin modelleme sürecine ait video görüntüleri ve öğretmenler ile yürütülen görüşmelere ait ses kayıtları araştırmanın başlıca veri kaynaklarını oluşturmaktadır. Toplanan verilerin analizinde öğrencilerin tespit ettiği ilişkilerin ve düşüncelerin gelişimi, yorumlama, iletişim süreçlerinin gelişimi ve grup içersinde sosyal-matematiksel eylemlerin gelişimi üzerinde durulmuştur. Bu doğrultuda öğrencilerin problemdeki verilere dikkat etmeden kaydettikleri ve geçmiş deneyimlerinden elde ettikleri informal bilgilerden hareketle verilerdeki değişkenliği açıkladıkları gözlenmiştir. Ayrıca modelleme etkinliklerinde öğrencilerin, informal bilgisi ile problemde tespit ettiği anahtar kavramlar hakkındaki bilgisi arasında gidip geldikleri ve bu bilgileri birbirinden ayırt eden öğrencilerin üst bilişsel ve eleştirel düşünme becerilerinin geliştiği gözlenmiştir.

Llnares ve Roig (2005) tarafından yürütülen araştırmada ortaöğretim öğrencilerinin sözel problemleri çözerken kavramsal araç olarak ürettikleri ve kullandıkları matematik modellerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda zorunlu eğitimlerinin son yılında olan 15-16 yaş grubundaki 511 öğrenciye 3 sözel problem yöneltilmiştir. Bu problemlerin çözümü için öğrencilerin bilmesi gereken matematiksel kavram ve prosedürler ortaöğretim müfredatında mevcuttur. Ayrıca öğrencilerin problemleri nasıl anlamlandırdıklarının ve matematik modelleri kullanarak nasıl çözdüklerinin derinlemesine incelenmesi amacıyla rastgele seçilen 71 öğrenciyle görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerin problemlere ilişkin verdikleri cevaplar her bir öğrencinin problemi yorumlamak için ürettiği ve kullandığı model oluşturma yolları ve bu modellerden hareketle nasıl karara vardıkları dikkate alınarak analiz edilmiştir. Bu kapsamda öncelikle öğrencilerin problemleri çözmek adına kullandıkları yaklaşımların temel özellikleri belirlenmiştir. Ardından bu özelliklerden hareketle matematik modeli geliştirme sürecine ilişkin farklı basamaklar tanımlanmış ve bu basamaklar açısından veriler kategorize edilmiştir. Bu doğrultuda öğrenciler tarafından yürütülen sürecin kavramsal öğrenmenin farklı yönlerini ortaya koyduğu ve matematiksel bilginin modelleme sürecindeki rolünü ön plana çıkardığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin modelleme sürecine ilişkin ciddi sıkıntılar yaşadığı gözlenmiştir. Öğrencilerin sahip oldukları matematiksel bilgiyi problemi çözüme götürecek model oluşturmak adına kullanmakta zorluk çektikleri görülmüştür.

Alman hükümeti tarafından 1998-2003 yılları arasında matematik ve fen öğretiminin geliştirilmesi amacıyla yürütülen SINUS adlı reform projesi kapsamında derste kullanılacak etkinliklerin değiştirilmesi ve bunun sonucu olarak ise matematik öğretiminde kalitenin artırılması amaçlanmıştır (Blum, 2004). Almanya genelinde 10-16 yaş grubundaki öğrencilerden oluşan 180 okul bu projeye katılmıştır. Öğrencilerin derslerde matematiksel yeterlilikler gerektiren ve bilişsel olarak aktif olabilecekleri etkinlikler ve problemlerle baş etmesi temel amaç olarak benimsenmiştir. Proje kapsamında öğretmenlerden her kademedeki ders programları ve öğretim elemanları ile işbirliği içersinde olmaları istenmiştir. Proje kapsamında öğrenciyi bilişsel olarak zorlayan etkinlikler, yeterliliklerini geliştirmeyi amaçlayan senaryolar ve metodolojik kavramlar gibi birçok uygulanabilir materyal geliştirilmiştir. Diğer taraftan öğrencilerin matematiksel başarısı sınıf gözlemleri, sınavlar, periyodik olarak yapılan testler aracılığıyla değerlendirilmiştir. Sonuçlar öğrencilerin sınıf ortamında model oluşturma ve tartışma fırsatı bulduklarını, matematiksel kavramlar arasında ilişkiler kurduklarını ve öğrencilerin zihinsel aktivitelerinde kayda değer gelişimler olduğunu göstermektedir (a.g.e). Ayrıca proje kapsamında ortaya çıkan sorunların öğretmenlerin bilgilerini uygulama noktasında yaşadığı sıkıntılardan değil bilgi eksikliğinden kaynaklandığı anlaşılmıştır. Bu doğrultuda öğretmenlerin, öğrencilerin karşılaştığı zorluklar ve yürüttükleri sürece ilişkin bilgilerinin eksik olduğu ve öğrencilerin çözüm süreçlerini belirlemek amacıyla uygun yollar geliştiremedikleri gözlenmiştir (a.g.e). Bu eksikliklerin giderilmesi için DISUM adlı yeni bir proje hayata geçirilmiştir. Matematik eğitimi ve pedagoji arasında ilişki kuran bu projenin amacı öğrencilerin öğrenme süreçlerinin analizi ve SINUS projesine katılan öğretmenlerin tecrübesi doğrultusunda öğretimle ilgili kavramların keşfedilmesi ve geliştirilmesidir (Leiβ, 2005). Projeye farklı tür okullardaki 9. sınıflar katılmıştır; dolayısıyla proje kapsamında 9. sınıflara yönelik modelleme etkinlikleri kullanılmıştır. Bu doğrultuda toplanan veriler modelleme etkinliklerinin detaylı analizlerine, laboratuar ortamındaki öğrencilerin problem çözme süreçlerinin belirlenmesine, bu ortamdaki öğretmenlerin öğretim yaklaşımlarının ve teşhislerinin tanımlanmasına ve SINUS projesine katılan deneyimli öğretmenlerin modelleme etkinliklerine yer verdiği derslere dayanmaktadır (Blum ve Leiβ, 2005).

Bulgular öğretmenlerin, öğretim yaklaşımları ile öz düzenlemeli öğrenme süreçlerini bir araya getirmesinin önemini göstermektedir (Leiβ, 2005). Öğretim yaklaşımlarının uygulanmasındaki başarının ders düzeni, motivasyon ve bağlam gibi farklı değişkenlere bağlı olduğu görülmüştür. Bireysel çalışmaları yeterince desteklenmediğinde öğrencilerin bilişsel, duyuşsal ve sosyal problemler yaşadıkları görülmüştür. Ayrıca, çalışma sonuçları öğretmenlerin etkinliklere ilişkin bilgisinin öğretim yaklaşımlarının belirlenmesinde ve öğrencilerdeki bilişsel sınırlılıkların aşılmasında etkili olduğunu göstermektedir (Blum ve Leiβ, 2005).

Schorr ve Lesh'in (2003) öğretmenler ile yürüttüğü proje kapsamında ise öğretmenlerin modelleme sürecindeki öğrencileri nasıl değerlendirdikleri, öğrencilerin düşüncelerini nasıl algıladıkları ve bunlara uygun olarak öğretim yöntemlerini nasıl planladıkları araştırılmıştır. Bu kapsamda düzenlenen çalıştaylar boyunca öğretmenlere modelleme etkinlikleri yöneltilmiş ve öğretmenlerden küçük gruplar halinde çalışarak problemi çözüme götürecek önemli matematiksel kavramları ve düşünceleri, öğretim stratejilerini ve öğrenciden gelebilecek cevapları belirlemeleri istenmiştir. Ardından öğretmenlerden modelleme etkinliklerini sınıflarda uygulamaları ve öğrencilerinin verilen problemleri çözmek için kullandıkları matematik kavramlarını nasıl ortaya çıkardıklarını belirlemeleri istenmiştir. Sınıf uygulamalarının ardından bir araya gelen öğretmenler belirledikleri öğrenci ürünleri üzerinde gruplar halinde çalışarak öğrencilerin düşünce gelişimini ve sınıfta uygulanan yöntemin pedagojiksel boyutlarını tartışmışlardır. Öğretmenlere etkinlikleri çözüme götürecek temel düşüncenin ne olduğuna ve uygulama sırasında gözlemledikleri en önemli öğrenci davranışlarının neler olduğuna ilişkin periyodik olarak sorulan sorular, araştırmacının gözlemleri ve notları, sınıf içersindeki öğrenci çalışmaları, öğretmenlerin her bir öğrenci çalışmasını ve gelişimini değerlendirmek için kullandığı kriterler araştırmanın başlıca veri kaynaklarını oluşturmuştur. Bu kapsamda öğretmenlerin öğrencilerinden problem çözme sürecinde beklediği kritik davranışlara ilişkin algılarını, öğrenci çalışmalarını nasıl değerlendireceğine ilişkin görüşlerini ve öğrencilerin verdiği cevapların zayıf ve güçlü yönlerine ilişkin düşüncelerini değiştirdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Doerr (2006) ortaöğretim matematik öğretmenleri ile yürüttüğü araştırmada katılımcıların öğrencilerinin üstel artışa ilişkin ürettiği matematik modellerine nasıl karşılık verdiklerini ve bu süreçte karşılaştıkları zorlukları tespit etmeyi amaçlamıştır. Katılımcılarının 20 yıldan daha fazla öğretmenlik tecrübesi olan ve üstel fonksiyonlara ilişkin geniş alan bilgisine sahip öğretmenlerden oluştuğu belirtilmektedir. Ayrıca öğretmenler üstel fonksiyonlar konusunda öğrencilerin sahip oldukları bilgi, düşünce ve yaklaşımların neler olabileceğinin tartışıldığı çok sayıda çalıştaya katılmışlardır. Araştırma kapsamında kullanılan problem dersin giriş kısmında sunulmuştur. Bu doğrultuda öğrencilerden geometrik dizi oluşturacak şekilde satranç tahtasına yerleştirilen bozuk paralar arasındaki üstel artışı keşfetmeleri ve her bir karedeki bozuk para miktarını, kare sayısının fonksiyonu olarak ifade etmeleri istenmiştir. Ayrıca öğrencilere hangi karedeki bozuk paraların yüksekliğinin sınıfın tavanına, dağın tepesine ulaşacağı sorulmuştur. Bu problemin uygulandığı ders boyunca her öğretmenin sınıfında video kaydı yapılmış ve araştırmacı tarafından notlar alınmıştır. Video kayıtlarının odağında öğretmen-öğrenci arasındaki etkileşim ve bilgi değişimi vardır. Diğer taraftan dersten sonra öğretmenlerle kısa görüşmeler yapılmıştır. Çalışmanın veri kaynakları derslerin işlenişine ait video görüntüleri, araştırmacı notları ve öğretmenlerle yürütülen görüşmelere ait ses kayıtlarından oluşmaktadır. Araştırmacı notları ve öğretmenlerle yapılan görüşmelerin çözümleri açık uçlu kodlar kullanılarak kodlanmıştır. Bu açık uçlu kodlar her bir duruma ait kodların anlamları kıyaslanarak yeniden düzenlenmiş ve geliştirilmiştir. Ardından video görüntüleri de dikkatle incelenerek her bir öğretmenin dersinin kritik özelliklerini gösteren kodlar belirlenmiştir. Sonuçlar araştırmaya katılan her bir öğretmenin öğrencileri dinlemek için farklı yöntemler kullandıklarını göstermektedir. Bu farklılıkların katılımcıların sınıf ortamındaki sınırlılıklarından ve bilginin karmaşıklığından kaynaklandığı belirtilmektedir. Öğrencilerin geliştirdiği matematik modelleri ile ilgilenebilmek için öğretmenlerin öğretim sürecinde yeni roller üstlenmesinin gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Böyle bir rolü yürütebilmeleri için öğretmenlerin, öğrencilerinin sahip olduğu bilgi birikimi hakkında fikir sahibi olmalarının önemli olduğu belirtilmektedir.

Ferri ve Blum (2009) tarafından öğretmen adaylarına yönelik düzenlenen seminer kapsamında öğretmen adaylarının modelleme etkinliklerini nasıl yapılandırdıklarından ziyade modellemeyi nasıl öğretebileceklerini keşfetmeleri amaçlanmıştır. Bu seminere üniversite dördüncü sınıfta öğrenim gören 25 öğretmen adayı katılmıştır. Seminer boyunca haftalık 90 dakikayı bulan kurslar düzenlenmiş ve öğretmen adayları bu kurslara aktif bir şekilde katılmışlardır. Seminer boyunca yürütülen kurslar teorik yeterlilikler, etkinliklerle ilgili yeterlilikler, öğretim yeterlilikleri ve öğrencilerin modelleme sürecinde yaşadığı zorlukların tanımlanmasına ilişkin yeterlilikler dikkate alınarak düzenlenmiştir. Bu kapsamda 3 ders teorik, 3 ders uygulamalı, 4 ders teorik ve uygulamalı, 3 ders her gruptaki etkinliklerin gösterilmesi ve son ders de seminerin değerlendirilmesi şeklinde işlenmiştir. Seminer boyunca öğretmen adayları gruplar halinde çalışmış ve araştırmacılar beyin fırtınası, düşün-eşleş-paylaş gibi öğrenme stratejileri kullanarak semineri yürütmüşlerdir. Öğretmen adaylarından düşünme ve öğrenme süreçlerini netleştirmek için öğrenme günlükleri yazmaları istenmiştir. Bu öğrenme günlükleri dersin konusu ve tarihi, bu etkinleri neden yaptıkları ve öğrenme süreci hakkındaki düşüncelerinden oluşmaktadır ve her dersin son beş dakikasında yazılmıştır. Seminer sonunda bütün günlükler toplanarak kullanılan yöntemler, öğretmen adaylarının modellemenin öğretimi ve öğrenimi hakkındaki düşünceleri dikkate alınarak analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının seminerden önce modellemenin bu kadar geniş olduğunu bilmedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Modelleme yeterlilikleri ve inançları konusu öğretmen adaylarının dikkatini çekmiş ve bu konu hakkında daha çok bilgi sahibi olmak istemişlerdir. Diğer taraftan öğretmen adaylarının alan yazının da var olan modelleme yaklaşımlarını ve döngülerini anlama konusunda sıkıntı çektikleri gözlenmiştir.

Kaiser v.d. (2010) geleceğin matematik öğretmenlerinin modelleme yeterliliklerine ilişkin sahip olması gereken mesleki bilgilerini incelemiştir. Bu kapsamda öğretmen adaylarının yeterlilikleri alan bilgisi, alan eğitimi bilgisi ve genel pedagoji bilgisi açısından değerlendirilmiştir. Araştırmaya farklı kademelere yönelik eğitim alan 80 matematik öğretmen adayı katılmış ve bu öğretmen adaylarına açık uçlu maddelerden oluşan 7 soru yöneltilmiştir. Bu sorulardan 3’ü gerçek yaşam durumları ve modelleme, 3’ü tartışma ve kanıtlama, 1’i de matematik öğretimindeki heterojenliğin üstesinden gelinmesi ile ilgilidir. Diğer taraftan gönüllü 20 öğretmen adayı ile problem merkezli yarı yapılandırılmış görüşmeler yürütülmüştür. Görüşmeler sırasında öğretmen adaylarına sabit ücret ve dakikalık konuşma ücreti açısından GSM şirketlerinin tarifelerinin kıyaslanmasını içeren problemler yöneltilmiştir. Ayrıca görüşmeler boyunca öğretmen adaylarından modelleme döngüsünün her basamağında neler yaptıklarını açıklamaları ve öğrencilerin yanlış cevaplarını analiz etmeleri istenmiştir. Görüşme kayıtları çözümlenerek içerik analizine tabi tutulmuştur. Bu doğrultuda alan bilgisi okul matematiği olarak sınırlandırılmış ve modelleme açısından ele alınmıştır. Alan eğitimi bilgisi kapsamında ise modellemenin amaçları, öğrencilerin yanlış anlamalarının ne denli tespit edildiği ve olası ders planlarının ne denli düzenlendiği incelenmiştir. Genel pedagoji bilgisi ise öğrencilerin motive edilmesi ve sınıf ortamındaki heterojenliğin üstesinden gelinmesi açısından değerlendirilmiştir. Araştırma neticesinde öğretmen adaylarının modelleme süreci hakkındaki derin alan bilgileri olmasına rağmen bu sürecin öğretimine ilişkin bilgilerinin yeterli olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının, öğrencilerin yanlış cevaplarının değerlendirilmesi ve tanımlanması noktasında zorluk çektiği gözlenmiştir. Araştırma göstermektedir ki modellemenin ve onun eğitsel değerinin anlaşılması için öğretmen adaylarının matematik, matematik eğitimi ve genel pedagoji kapsamında yeterli düzeyde bilgi ve beceriye sahip olması gerekmektedir.

Kertil (2008) 4. sınıf matematik öğretmen adaylarının katılımıyla gerçekleştirdiği özel durum çalışmasında öğretmen adaylarının problem çözme becerilerini matematiksel modelleme süreci açısından incelemiştir. Bu süreçteki becerilerinin belirlenmesinde modelleme testi (ön-test ve son-test) ve modelleme etkinlikleri kullanılmıştır. Öğretmen adayları modelleme etkinlikleri üzerinde önce bireysel, daha sonra grup olarak çalışmıştır. Modelleme etkinliklerinden elde edilen nitel verilerin analizinde kategori yöntemi ve betimsel istatistik kullanılmıştır. Modelleme testinden elde edilen bulgular modelleme etkinliklerindeki çözüm süreçlerinden elde edilen bulgular ışığında yorumlanmıştır. Ayrıca öğretmen adayları ile yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmeler ile modelleme testi ve etkinliklerinde yasadıkları zorluklar, problemlere bakış açıları ve çalışma süreci sonundaki kazanımları araştırılmıştır. Çalışma sonucunda elde edilen bulgular öğretmen adaylarının modelleme etkinlikleri sürecinde problem çözme becerilerinin yeteri kadar iyi olmadığını göstermiştir. Öğretmen adaylarının problemin çözümü için hedefi belirginleştirme, bir matematiksel model seçme ve uygulama, grafiksel gösterimlerden yararlanma gibi modelleme sürecinin bazı aşamalarında zorlandıkları belirlenmiştir.

Türker v.d. (2010) öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecindeki performanslarını ve sürece ilişkin görüşlerini araştırmıştır. Bu doğrultuda 4 modelleme etkinliği 60 matematik öğretmen adayına uygulanmıştır. Tamamı üniversite son sınıf öğrencisi olan katılımcıların yarısı ilköğretim matematik öğretmen adayı iken geri kalan yarısı ortaöğretim matematik öğretmen adaylarından oluşmaktadır. Katılımcılara 4 modelleme etkinliği bir saat boyunca uygulanmış ve öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar modelleme basamakları referans alınarak analiz edilmiştir. Ardından yüksek ve düşük başarı gösteren 9 öğretmen adayı ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler yürütülmüştür. Toplanan veriler betimsel analiz yöntemleri kullanılarak analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının özellikle doğrudan matematiksel veri içermeyen gerçek-yaşam problemlerini matematikselleştirmede zorluk çektiği gözlenmiştir. Ayrıca öğretmen adayları derslerde matematiksel modelleme konularına yer verilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir.

Güzel ve Uğurel (2010) tarafından yapılan araştırmada ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının Analiz-I dersindeki akademik başarıları ile matematiksel modelleme yaklaşımları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Araştırmaya Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği birinci sınıf dersleri arasında yer alan Analiz-I dersi kapsamında yapılan 5 sınavın (başarı açısından) sonuçları ve sonuçların ortalaması göz önüne bulundurularak seçilen 12 öğretmen adayı katılmıştır. Öğretmen adaylarının beş sınavdan aldıkları notlarının ortalamaları alınarak akademik başarıları açısından bir sıralamaya gidilmiştir ve bu sınavların ortalamalarına göre yüksek, orta ve düşük düzey ortalamaya sahip olan gruplardan dörder kişi seçilmiştir. Veri toplama aracı olarak matematiksel modellemeyi gerektiren gerçek yaşam problemleri kullanılmıştır. Bu problemlerinin kapsamı trigonometri, fonksiyon, limit, süreklilik ve türev kavramları ile sınırlandırılmıştır. Veriler alan yazınında var olan modelleme yaklaşımları dikkate alınarak geliştirilen basamaklardan yola çıkılarak analiz edilmiştir. Basamakların her birinde öğretmen adaylarının yaklaşımlarını belirlemek için, 4 tip puanın yer aldığı (0–3) dereceli puanlama anahtarı kullanılmıştır. Araştırma kapsamında akademik başarının matematiksel modelleme yaklaşımlarını bir ölçüde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır. Aynı zamanda araştırma sonuçları akademik başarının modelleme becerisinin geliştirilmesinde gerekli fakat yeterli olmadığını göstermektedir.

Özetle, matematiksel modeller ve öğretim süreçlerindeki kullanımlarını konu edinen araştırmalar göstermektedir ki modelleme, öğrenme sürecindeki öğrencilerin kendi bilgisini oluşturmalarına ve düşünme süreçlerini geliştirmelerine imkân tanımaktadır. Buraya kadar sunulan bilgi ve bulgulardan modelleme etkinliklerinin öğrencilerin matematik hakkındaki farkındalık düzeylerini arttırdığı, matematiksel kavram ve düşünceleri bilinçli bir şekilde yapılandırmalarına olanak sağladığı, eleştirel ve yaratıcı düşüncenin yanı sıra üst düzey zihinsel yeteneklerin gelişimine katkı sağladığı sonucu çıkarılabilir.

3. YÖNTEM

3.1. ARAŞTIRMA MODELİ

Bilimsel araştırmalara yön veren ve kaynağı 17.-18. yy dayanan pozitivist paradigmanın özünde tek doğruyu arama düşüncesi yatmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu doğrultuda evren mekanik bir düzen içerisinde ele alınmakta ve bireyin kendinden bağımsız gerçeklere tepki gösterdiği düşünülmektedir. Neuman (2007) ise bu yaklaşımın doğa bilimlerinin yaklaşımı olduğunu ve esasında nedensel yasaları keşfetmek ve değerden bağımsız araştırmalar yapmak olduğunu ifade etmektedir. Pozitivist ötesi yorumlayıcı paradigmaya göre ise evren holografiktir yani mekaniksel bir düzende bir araya gelmenin ötesinde evrendeki her şey birbiriyle ilintilidir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Bu iki paradigmayı birbiri perspektifinden değerlendirmekten ziyade her birini kendi koşulları içersinde sağladığı avantajlar açısından değerlendirmek daha doğru olacaktır (Neuman, 2007). Nitekim birinin diğerine üstünlüğünden söz etmek mümkün olmayabilir. Ancak bilime yön veren bu paradigmaların araştırmada kullanılacak yöntem ve araştırma soruları ile yakından ilişkili olduğu göz önünde bulundurulmalı, veri toplama ve analiz yöntemleri bakımından seçilen nitel ve nicel yaklaşımların araştırmanın doğasını derinden etkileyeceği unutulmamalıdır.

Nicel araştırma yaklaşımlarına göre bireyden bağımsız olan gerçek, doğru ölçüm ve dikkatli sayısallaştırma ile tanımlanabilir ve anlaşılır hale getirilebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu nedenledir ki araştırmacı kendisini araştırılan ortamın dışında tutabildiği ve birbirinden bağımsız değişkenler ortaya koyabildiği sürece güvenilir ve geçerli araştırmalar yapacaktır.

Nitel araştırma ise gözlem, görüşme, doküman analizi gibi nitel veri yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir şekilde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Nitel araştırmacı gözlemlerin tümünü sayılar gibi tek bir ortak aracıya çevirmemekte bunun yerine verileri farklı şekiller, büyüklükler ve biçimlerde bırakan çok daha esnek ve devam eden bir süreç geliştirmektedir (Neuman, 2007).

En sıradan insanın bile düşüncelerinin, sosyal ilişkilerinin insanı mekanik, tek düze bir hayattan uzaklaştırdığı düşünülürse insana has tek bir doğru üretme çabasının ötesinde bireyin doğasına ilişkin bilgilerin yorumlanmasını ve inşa edilmesini gerektiren eğitim bilimlerin de o denli kapsamlı ve tek düzelikten uzak olması gerektiği söylenebilir. Bu nedenledir ki özünde birey olan eğitim bilimlerinin şekillenmesinde yorumlayıcı paradigmanın rol üstlenmesi kaçınılmazdır. Nitekim son yıllarda nitel verilere dayalı yorumlayıcı paradigmanın sosyal bilimler ve eğitim alanında yapılan çalışmalara yön verdiği de gözlemlenmektedir. Bu araştırmada da öğretmen adaylarının karşılaştıkları problemlere çözüm getirip getirmemesinin ötesinde ürettiği matematik modellerinin ve bunların ardındaki düşüncelerin ait olduğu bağlamda derinlemesine tespit edilmesi ve anlaşılması amaçlandığı için gerçeği bireyden bağımsız ele alan nicel yaklaşımların aksine nitel araştırma yöntemleri kullanılmıştır (Yin, 2003; Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Problem çözme sürecini matematiksel modelleme süreci açısından ele alan ve öğretmen adaylarının bu süreçte ne tür matematiksel modeller ürettiğini araştıran bu çalışma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (örnek olay) niteliğinde olup öğretmen adaylarının kavramsal modellerinin ardındaki bilişsel modellerini de ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır. Durum çalışması araştırmacının kontrolü dışındaki bir olayı ya da olguyu niçin ve nasıl sorularını esas alarak derinlemesine inceleme fırsatı sunan bir araştırma yaklaşımıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Eldeki çalışmada öğretmen adaylarının problemlere ürettiği matematik modelleri bütüncül bir şekilde ele alınmakta ve üretilen modellerin kavramsal ve bilişsel modellerle olan ilişkisi ve etkileşimi derinlemesine incelemektedir. Bu yönüyle eldeki çalışma durum çalışması niteliği taşımaktadır.

Nitel araştırmaların doğası gereği durum çalışmalarında araştırma probleminin belirlenmesinden verilerin toplanması ve yorumlanmasına kadar geçen süreç lineer bir şekilde işlememekte, araştırmacının zaman zaman sürecin basamakları arasında gidip gelmesi ve süreci yeniden yapılandırması gerekmektedir (Neuman, 2007). Bu nedenle araştırmacı bu çalışmada araştırma sorularının belirlenmesi, öğretmen adaylarına yöneltilecek problemlerin seçimi ve geliştirilmesi, verilerin toplanması, toplanan verilerin analizi ve yorumlanması aşamalarını alan yazını taraması sonucu oluşturduğu kuramsal çerçeve bağlamında ele alarak süreci bir bütün halinde yürütmüştür.

3.2. ÖRNEKLEM

Araştırma 2010-2011 öğretim yılı bahar döneminde Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim gören 121'i üçüncü sınıf ve 67'si ise dördüncü sınıf öğrencisi olmak üzere toplam 188 öğretmen adayının katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu öğretmen adaylarının 1. ve 2. sınıf öğrencilerine nazaran aldıkları alan dersleri itibariyle problemleri matematikselleştirmek adına kullanılacak her türlü kavram ve düşünceye hâkim oldukları varsayılmaktadır. Ayrıca bu öğretmen adayları doğrudan matematiksel modelleme sürecine ilişkin bir ders almasalar da gördükleri Özel Öğretim Yöntemleri-I ve Özel Öğretim Yöntemleri-II gibi alan eğitimi dersleri kapsamında problem çözme sürecini geleneksel problem çözme sürecinin ötesinde ele almış ve farklı açılardan inceleme fırsatı bulmuşlardır.

Araştırmaya katılan 188 öğretmen adayına araştırmada kullanılan problemler yazılı olarak verilmiş ve bu problemleri yine yazılı olarak çözmeleri istenmiştir. Ardından yazılı sınav kâğıtlarının ön analizleri göz önünde bulundurularak seçilen 5 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yürütülmüştür. Amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile seçilen (Yıldırım ve Şimşek, 2008) bu öğretmen adaylarının belirlenmesinde ürettikleri modellerin çeşitliliği, uygunluğu ve yeterliliği dikkate alınmıştır. Bulgular bölümünde bahsedilen ve öğretmen adaylarıyla yürütülen mülakatlara ilişkin alıntılarda geçen isimler, öğretmen adaylarının gerçek isimleri değildir. Bilimsel etik gereği öğretmen adaylarının gerçek isimleri yerine kod adları kullanılmıştır.

3.3. VERİ TOPLAMA ARAÇLARININ GELİŞTİRİLMESİ VE VERİLERİN TOPLANMASI

Araştırma kapsamında öğretmen adaylarına varsayımları doğrultusunda farklı açılardan matematikselleştirebilecekleri problemler ile gerek bu problemlere gerekse ürettikleri modellere ilişkin düşüncelerini açığa çıkarmaya yönelik açık uçlu sorulardan oluşan bir yazılı sınav uygulanmıştır. Yazılı sınavda 4 tanesi rutin olmayan problem ve

1 tanesi de gerçek yaşam problemi olmak üzere toplam 5 soru kullanılmıştır. Araştırma kapsamında öğretmen adaylarına yöneltilen problemler tespit edilen kritik kavramların sınırlandırılmasını ve bunlara ilişkin varsayımda bulunulmasını gerektiren ve bu varsayımların birbirinden farklı kavramsal modeller yardımıyla matematikselleştirilmesine olanak sağlayan problemlerdir. Bu problemler 188 öğretmen adayına yaklaşık 1,5 saat süreyle eş zamanlı olarak uygulanmış ve uygulama esnasında çalışmanın amacı katılımcılara aktarılarak bu problemlere çözüm üretmenin ötesinde problem ifadesindeki ilişkileri nasıl tanımladıklarını ve matematikselleştirdiklerini açıkça ortaya koymaları istenmiştir. Ayrıca sınav esnasında katılımcıların birbirlerinden etkilenmemeleri için gerekli önlemler alınmıştır.

Alan yazınındaki çalışmalar incelendiğinde rutin ya da rutin olmayan matematik problemlerinden ziyade günlük hayatla çok daha yakından ilişkili olan gerçek yaşam problemlerinin modelleme etkinliği olarak kullanıldığı görülmektedir. Ancak gerçek yaşam problemlerinden oluşan etkinliklerin verimli bir şekilde gerçekleştirilmesi için katılımcıların modelleme yaklaşımına dair ciddi bir alt yapısının olması gerekmektedir. Ayrıca yapılacak araştırma, modelleme yaklaşımı açısından ele alınırsa matematiğin problem çözme sürecinde daha anlamlı kılınması için öncelikle mevcut durumlarda matematiğin nasıl kullanıldığı mercek altına alınmalı ardından gerek eksiklikleri gidermek gerekse bu süreçte matematiği daha etkin kılmak adına problemlerin niteliği daha açık uçlu hale getirilerek süreç yeniden yapılandırılmalıdır. Bu nedenle eldeki çalışma kapsamında öğretmen adaylarının açık uçlu günlük yaşam problemine ürettiği modellerin yanı sıra kritik kavramların tespit edilmesi ve bunlara ilişkin varsayımda bulunulmasını gerektiren rutin olmayan matematik problemlerine ürettikleri modeller de uygunluk ve yeterlilik açısından incelenecek ve bunların ardındaki bilişsel ve kavramsal modeller arası etkileşim tespit edilmeye çalışılacaktır. Araştırmada kullanılan problemlerin güvenilirlik ve geçerliliğinin sağlanması için ana çalışmadan önce 53 öğretmen adayı üzerinde pilot çalışma yapılmış ve ayrıca uzman görüşlerine başvurulmuştur. Pilot çalışma ve uzman görüşleri doğrultusunda problem ifadeleri yeniden düzenlenmiş ve öğretmen adaylarının ürettikleri matematik modellerinin ardındaki ilişkileri ve kritik kavramları ifade etmelerini sağlamak amacıyla katılımcılardan her bir problem için aşağıdaki soruları cevaplamaları istenmiştir:

a. Bu problemle ilgili anahtar unsurları belirleyerek problemden ne anladığınızı ifade ediniz.

b. Belirlediğiniz anahtar unsurlar çerçevesinde farklı matematiksel modeller kullanarak problemi matematikselleştiriniz ve çözünüz.

c. Kullanmış olduğunuz matematiksel modellerin problem çözme sürecindeki rolünü ve uygunluğunu değerlendiriniz.

Alan yazını kapsamında yapılan çalışmalardan uyarlanan ve gerek pilot çalışma sonucu gerekse uzman görüşü alınarak son şekli verilen bu problemler araştırmaya katılan öğretmen adaylarına yazılı olarak dağıtılmış ve öğretmen adaylarından problemi çözmenin ötesinde tespit ettikleri ilişkileri ve bunları matematikselleştirmek adına kullandıkları modelleri izah etmeleri istenmiştir. Bu kapsamda modelin kelime anlamından yola çıkılarak sadece görselleştirme ya da somutlaştırma olarak sınırlandırılmaması gerektiği vurgulanmış, öğretmen adaylarının yönergeyi dikkatlice okuması ve tespit edilen ilişkilerin probleme uygun olacak şekilde düzenlenmesine imkân tanıyan her türlü matematiksel kavramın, sayının, sembolün model olabileceği ifade edilmiştir. Ayrıca her bir öğretmen adayının bilişinden izler taşıyan matematik modellerinin anlaşılmasında ve derinlemesine incelenmesinde yazılı sınavda verilen cevapların yeterli olamayacağı düşüncesiyle seçilen 5 öğretmen adayı ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler yürütülmüştür. Görüşmeler boyunca öğretmen adayına yöneltilen sorular problemin ve üretilen modelin niteliğine paralel olarak değişiklik gösterse de aşağıdaki sorulara benzer sorular yöneltilerek öğretmen adaylarının ürettiği modellerin ardındaki düşüncelerine ulaşılmaya çalışılmış ve gelen cevaplar doğrultusunda farklı sorular yöneltilmiştir. Bu noktada araştırmacı yönelttiği farklı sorularla öğretmen adaylarının bilişsel modellerini düzenlemesini, irdelemesini ve bu doğrultuda farklı matematik modelleri üretmesini sağlamaya çalışmıştır.

a. Problemle ilişkili olduğunu düşündüğünüz ve modelinizi üretmede dikkate aldığınız kritik kavramlar nedir?

b. Bu kritik kavramları matematikselleştirmek adına kullandığınız modelinizi açıklar mısınız?

c. Ürettiğiniz model, ilişkileri irdeleme noktasında size ne sağlamaktadır?

d. Ürettiğiniz modelin yeterli olduğunu düşünüyor musunuz?

e. Problemi farklı bir şekilde de matematikselleştirebilir misiniz?

Düşüncelerini yazılı olarak da ifade edebilmeleri için katılımcılara kâğıt ve kalem temin edilmiştir. Mülakat verileri ses kayıt cihazları kullanılarak kaydedilmiştir.

Ayrıca araştırmacı önemli gördüğü noktaları mülakat esnasında veya mülakattan hemen sonra yazılı olarak da kaydetmiştir.

Diğer taraftan değinilmesi gereken bir husus vardır ki o da araştırmanın ve veri toplama araçlarının geçerliliğinin ve güvenilirliğinin ne ölçüde sağlandığıdır. Nitel araştırmalarda geçerliliği ve güvenirliği sağlamak adına alınan önlemler nicel araştırmalarda olduğu gibi test etme ve saptamaya yönelik olmamakta araştırmanın olabildiğince yansız yürütülmesine ve diğer araştırmacılar için aşamalarının belirgin ve anlaşılır hale getirilmesine katkı sağlamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu kapsamda asıl uygulamadan önce öğretmen adaylarına yöneltilecek problemlerin düzenlenmesi ve belirlenmesi amacıyla alan yazını taramasının ve ardından pilot çalışmanın yapılması, uzman görüşünün alınması, veri çeşitlemesi yardımıyla elde edilen bulguların, analiz çeşitlemesi yardımıyla yorumlanması araştırmada geçerlilik ve güvenirliği sağlamaya yöneliktir.

Geçerliliği ve güvenirliği sağlamak adına nitel araştırmalarda kullanılan en önemli stratejilerden biri çeşitlemedir. Çeşitleme araştırmacıya gerçeği farklı boyutları ile bir bütün halinde ele alma fırsatı sunarken araştırmanın ve sonuçlarının da inandırıcılığını arttırmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu doğrultuda araştırmacı geçerliliği ve güvenirliliği arttırmak için yazılı veri toplama aracının sınırlılığını görüşme yöntemi ile aşmaya çalışarak veri çeşitlemesine ve verilerin analizinde hem tematik hem sayısal verilere yer verilmesi yoluyla da analiz çeşitlemesine başvurmuştur.

3.3.1. Araştırma Kapsamında Kullanılan Problemler

Araştırma kapsamında öğretmen adaylarına 4 rutin olmayan problem ile 1 gerçek yaşam problemi yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarından kendilerine yöneltilen problemleri çözüme kavuşturacak pratik yollar üretmesinin ötesinde durumu göz önünde bulundurarak bilişsel modelleri ışığında nicelik ve nitelikler arası ilişkileri tespit etmesi ve bunları uygun ve yeterli matematik modelleri ile desteklemesi beklenmiştir. Araştırmada kullanılan problemler, her bir problemin temel özelliklerine ve kullanım amaçlarına sıra ile yer verilecektir:

3.3.1.1. İş İlanı Problemi

Araştırmada kullanılan ve iş ilanı problemi olarak adlandırılan birinci soru şu şekildedir:

> Yerel gazetede pizza dağıtım işinde çalışmak isteyenler için bir ilan yer almaktadır. A şirketi her çalışanına aylık 120 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,2 TL prim vermektedir. B şirketi ise çalışanına aylık 48 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,8 TL prim vermektedir. Sizce bu şirketlerden hangisinde çalışmak daha karlıdır? Neden? (Llınares ve Roig'den (2005) uyarlanmıştır)

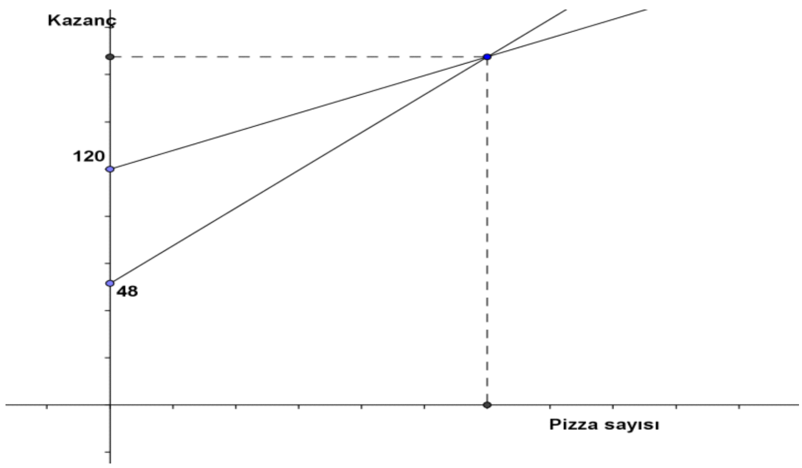
Rutin olmayan bu problemde öğretmen adaylarının öncelikle dağıtılan pizza sayısı ile kazanç arasındaki ilişkiyi fark etmesi ve her iki şirkette dağıtılan pizza sayılarına ilişkin varsayımda bulunması gerekmektedir. Bu varsayımlar doğrultusunda sayılar, cebirsel semboller, doğru denklemleri veya grafikleri kullanılarak problemin matematikselleştirilmesi mümkündür. Örneğin her iki şirkette dağıtılan pizza sayısına ilişkin 100, 200 gibi sayısal değerler atanması yoluyla kazançlar hesaplanabilir. Ancak bu durumda şirketlerin kazancının sadece atanan değer için kıyaslanması mümkündür; atanan değer dışındaki farklı pizza sayıları için kazançlar kıyaslanamaz.

Diğer taraftan şirketlerde dağıtılan pizza sayıları yerine *x* ve *y* gibi değişkenler atanabilir. Bu durumda şirketlerin kazancı;

$K_A=120+1,2x$

$K_B=48+1,8y$

şeklinde matematikselleştirilse de öğretmen adaylarının bu kazançları kıyaslaması için kazançların eşit olduğu anda pizza sayılarının da eşit olduğunu keşfetmesi gerekmektedir. Aksi takdirde öğretmen adayları kazançları kıyaslamak adına *x* ve *y* değişkenlerine sayısal değerler atamanın ötesine geçemeyecektir. Bu noktada bilinmeyenin bulunmasının ötesinde pizza sayıları ile kazançlar arasındaki ilişkinin Şekil 12'deki gibi doğru grafikleri yardımıyla matematikselleştirilmesi mümkündür.



Şekil 12. İş ilanı probleminin grafiksel modeli.

Bu grafik sayesinde öğretmen adayları hem kazançların eşit olduğu anda pizza sayılarının eşit olduğunu keşfederek kritik pizza sayısını bulabilecek hem de kritik pizza sayısı dışındaki durumlar için de kazançları kıyaslayabilecektir.

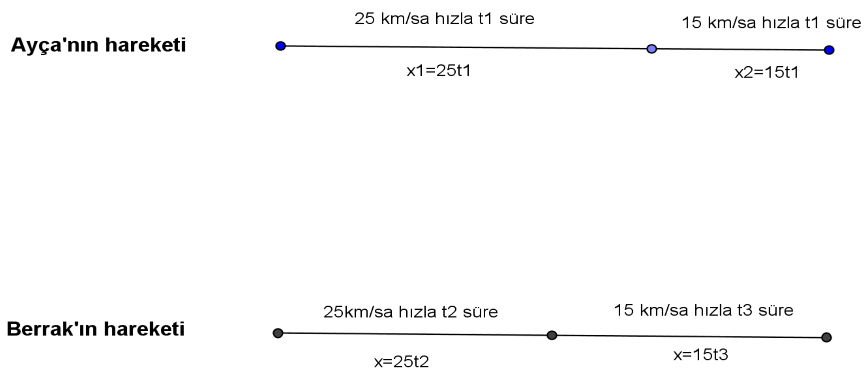
3.3.1.2. Koşu Problemi

Araştırmada kullanılan ve koşu problemi olarak adlandırılan ikinci soru ise şu şekildedir:

> Ayça ve Berrak tren istasyonundan aynı anda aynı otele doğru koşmaktadır. Ayça otele ulaşması için geçen sürenin ilk yarısını 25km/sa hızla, diğer yarısını da 15 km/sa hızla koşmakta; Berrak ise yolun ilk yarısını 25 km/sa hızla, diğer yarısını da 15 km/sa hızla koşmaktadır. Buna göre otele kim daha önce ulaşır? [Leikin ve Lev'den (2007) uyarlanmıştır].

Bu problem, yol=hız×zaman bağıntısının uygulanmasının ötesinde yol, hız, zaman arasındaki ilişkinin Ayça ve Berrak'ın hareketi için yeniden düzenlenmesini gerektiren rutin olmayan bir problemdir. Öğretmen adaylarının her iki hareketi tanımlamak için kullandıkları değişkenleri ve matematiksel ifadeleri birbiri ile ilişkilendirmesi ve birbiri açısından değerlendirmesi gerekmektedir. Bu noktada yol uzunluğu ya da zamana ilişkin varsayımda bulunan öğretmen adayının zaman, yol ve hız kavramlarını sadece cebirsel olarak birbirine dönüştürmenin ötesinde sayılar arası ilişkileri bilişsel, cebirsel ve hatta grafiksel olarak ele alması mümkündür. Örneğin yol uzunluğu (ya da zaman) yerine atanan 150 km gibi sayısal bir değer üzerinden Ayça ve Berrak'ın otele ulaşmaları için geçen süreler hesaplanabilir. Ancak bu model yol ve zaman arasındaki ilişkinin ortaya konmasından ziyade bu değişkenlerden birinin sabitlenerek diğerinin bulunmasına yöneliktir.

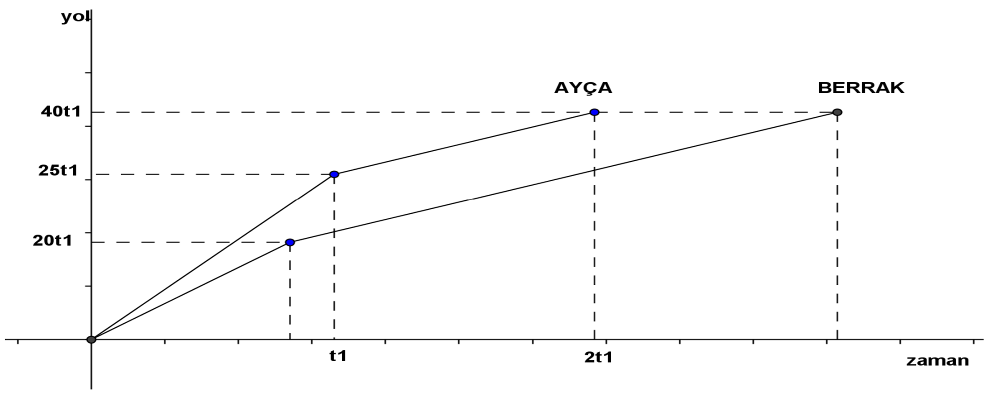
Diğer taraftan yol ve zaman yerine atanan değişkenlerden yola çıkılarak Ayça ve Berrak'ın hareketi aşağıdaki gibi modellenebilir.



Şekil 13. Koşu probleminin cebirsel ve görsel modeli.

Ayça ve Berrak'ın otele ulaşması için geçen sürelerin kıyaslanması için tanımlanan değişkenlerin her birinin birbiri ile ilişkilendirilmesi ve birbirine dönüştürülmesi gerekmektedir. Nitekim aynı sürelerde farklı hızlarla giden Ayça'nın aldığı $40t_1$'lik yolun ilk yarısını Berrak'ın 25 km/sa hızla, diğer yarısını 15 km/sa hızla gittiği göz önünde bulundurulursa $20t_1=25t_2$ ve $20t_1=15t_3$ eşitlikleri elde edilir. Ardından t_1, t_2, t_3 değişkenleri birbiri cinsinden yazılarak kıyaslanabilir. Ayrıca bu değişkenler işlem yapılmaksızın mantıksal çıkarımlar yoluyla da kıyaslanabilir. Ayça'nın aynı sürede 25 km/sa hızla aldığı yol 15km/sa hızla aldığı yoldan daha fazla olacağı için Ayça 25km/sa hızla giderken yolun yarısından fazlasını almıştır. Berrak'ın 25 km/sa hızla gittiği mesafe (yolun yarısı) Ayça'nınkinden az olduğu için Ayça'nın gerisinde kalacaktır. Dolayısıyla Ayça otele Berrak'tan önce ulaşacaktır.

Son olarak ise Ayça ve Berrak'ın hareketi aşağıdaki gibi grafik yardımıyla matematikselleştirilebilir. Bu sayede hareketin bir bütün halinde incelenmesi mümkündür.



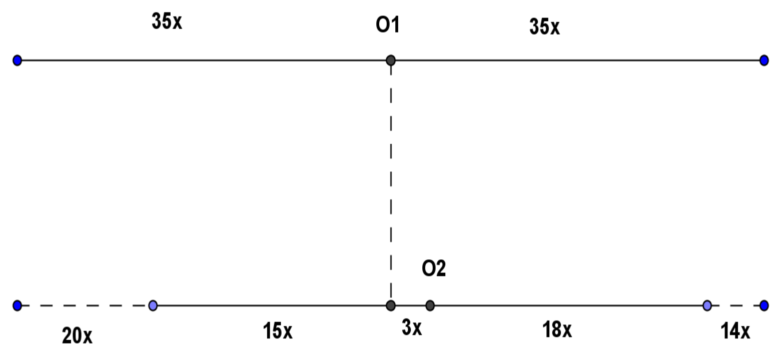
Şekil 14. Koşu probleminin grafiksel modellemesi.

3.3.1.3. Tel Problemi

Araştırmada kullanılan üçüncü soru tel problemi olarak adlandırılmaktadır ki bu soru şu şekildedir:

> Bir parça telin bir ucundan telin 2/7 si, diğer ucundan da (telin ilk halinin) 1/5 i kesiliyor. Telin orta noktası eski durumuna göre 9 cm kayıyor. Buna göre telin tamamı kaç cm dir?

Rutin olmayan bu problemde kesilen parçaların büyüklüklerinin ve yönlerinin dikkate alınarak orta noktadaki kayma miktarının tespit edilmesi gerekmektedir. Yani öğretmen adaylarından çözüm odaklı salt cebirsel yaklaşımlar sergilemesinin ötesinde kesilen parçaların büyüklükleri ile yönleri arasında ilişki kurması ve bunların orta noktayı nasıl etkileyeceğini kestirmesi beklenmektedir. Bu problemin, bilişsel ve kavramsal modeller arası geçişin ve etkileşimin ortaya çıkarılması hususunda önem arz ettiği düşünülmektedir. Kayma miktarı ve yönünün belirlenmesi öğretmen adaylarının gerçek durumlara ilişkin hâlihazırdaki bilişsel modellerini probleme uygun olacak şekilde yeniden düzenlemesi ile mümkün iken tanımladığı değişkenler ya da sayılar arasında ilişki kurması ve çıkarımda bulunmasıyla da mümkündür. Örneğin telin iki tarafından aynı miktarda kesildiğinde orta noktanın değişmeyeceğine dair bilişsel modellere sahip öğretmen adayları 2/7 ve 1/5 lik parçaları kıyaslayarak kaymanın kesilen parçalar arası farkın yarısı kadar (orta nokta olduğu için) ve 1/5 lik kısmın kesildiği yöne doğru (2/7 >1/5 olduğu için) olacağını kestirebilir. Diğer taraftan kayma yönü ve kesilen parçalara ilişkin doğrudan bilişsel modeli olmayan öğretmen adaylarının çizdikleri 35 birimlik tel üzerinde kesilen parçaların gösterilmesi ve orta noktanın kaydırılması yoluyla kayma miktarını ve buradan hareketle telin gerçek uzunluğunu belirlemesi mümkündür. Ancak öğretmen adaylarının problemi çözüme götürmesinin ötesinde kesilen parçaların büyüklükleri ve yönü ile orta nokta arasındaki ilişkiyi tespit etmesi ve yorumlaması gerekmektedir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarından telin kesilmeden önceki ve sonraki durumumu görselleştirmesi, görselleştirilen şekil üzerinde değişkenler ataması ve bunları probleme uygun olacak şekilde ilişkilendirmesi ve çıkarımda bulunması gerekmektedir. Bir öğretmen adayı problemi aşağıdaki gibi modelleyebilir:



Şekil 15. Tel probleminin cebirsel modellemesi.

3.3.1.4. Folklorcu Problemi

Araştırmada kullanılan dördüncü soru folklorcu problemi olarak adlandırılmaktadır:

> Bir folklor oyuncusu, oyunun gereği; sahnede doğrusal bir çizgi boyunca 5 adım ileri, 2 adım geri atıyor. Oyuna başladığı noktadan 20 adım uzakta ise, bu noktaya gelinceye kadar kaç adım atmıştır? [Altun v.d. (2007)'den alınmıştır.]

Bu problem sayılar arası ilişkilerin probleme uygun olacak şekilde düzenlenmesini gerektiren ve bu ilişkilerin semboller yardımıyla cebirsel olarak modellenmesine imkân tanıyan rutin olmayan bir problemdir. Bu problem tel probleminde olduğu gibi öğretmen adaylarının bilişsel modellerinin ne denli farkında olduğunu ve bunları uygun kavramsal modeller ile ne denli desteklediklerini tespit etmek amacıyla kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının, folklorcuyu çizdikleri görsel model üzerinde 20 adım ilerleme elde edinceye kadar hareket ettirerek problemi modellemesi mümkündür. Ancak öğretmen adaylarından folklorcunun her 7 adımda 3 adım ilerleyeceğini belirlemesi ve bu açıdan 20 adımlık ilerlemenin nasıl olabileceğini bilişsel olarak yorumlaması ve uygun kavramsal modeller ile desteklemesi beklenmektedir.

Folklorcunun oyunun kuralı gereği ileri ve geri adımları kendi içersinde parçalamaksızın gruplar halinde attığı ve 3 adımlık ilerlemenin katları için eşit sayıda ileri ve geri adım grubundan oluşan tam bir hareket yaptığı söylenebilir. Ancak folklorcu başlangıç noktasından itibaren 20 adım ilerlediğine göre en son ki ileri adım grubunu geri adım grubu takip etmemiştir. Yani folklorcunun ileri adım grupları geri adım gruplarından bir fazladır. Bu durum göz önünde bulundurularak ileri attığı adım grubu x ise geri attığı adım grubu $x-1$ şeklinde ifade edilebilir. Folklorcu her ileri adım grubunda 5 adım ilerleyeceği ve her geri adım grubunda 2 adım gerileyeceği için 20 adımlık ilerleme $5x-2(x-1)= 20$ şeklinde modellenebilir.

3.3.1.5. Postacı Problemi

Araştırmada kullanılan son soru postacı problemi olarak adlandırılmaktadır:

> Bir postacının caddenin karşılıklı taraflarındaki postaları dağıtması gerekmektedir. Bunun için ya önce caddenin bir tarafındaki postaları dağıttıktan sonra karşıya geçip caddenin bu tarafındaki postaları dağıtması gerekmektedir. Ya da önce caddenin bir tarafındaki postalardan birini dağıtıp ardından karşıya geçip bu taraftaki iki postayı dağıtacak ve tekrar karşıya geçip iki postayı daha dağıtacaktır. Postacı bütün postalar dağıtılana kadar bu şekilde devam edecektir. Siz postacının yerinde olsanız hangi yolu tercih ederdiniz? [Swetz ve Hartzler (1991; Akt. Türker v.d., (2010)'den uyarlanmıştır].

Diğer problemlere nazaran çok daha açık uçlu günlük yaşam problemi olan bu problem öğretmen adaylarının gerçek yaşam durumlarını ifade edebilmek adına kullandığı matematiksel sistem, kavram ve araçların gözlenmesi açısından önemlidir. Öğretmen adayının problemi modelleyebilmesi için cadde uzunluğu, genişliği, posta sayısı ve trafik gibi birçok değişkeni sınırlandırması, bunlara ilişkin varsayımda bulunması ve varsayımları doğrultusunda ortaya koyduğu modeller yardımıyla karara varması gerekmektedir. Bu kapsamda öğretmen adaylarının varsayımları doğrultusunda ortaya koyacağı modeller çeşitlilik gösterebilir. Örneğin kimi öğretmen adayları bu iki durumun kıyaslanması noktasında geçen süreleri dikkate alabilir ve trafik olabileceği düşüncesiyle ilk durumun daha avantajlı olabileceğini savunabilir. Bunun yanı sıra trafik olmadığını varsayan kimi öğretmen adayları ise postacının gideceği mesafelerin uzunluğuna göre karar vermeyi planlayabilir. Bunun için öğretmen adaylarının caddenin uzunluğu, genişliği, posta sayısı gibi kritik kavramlara ilişkin varsayımda bulunması gerekmektedir. Bu noktada kimi öğretmen adaylarının bu kritik kavramlar yerine atadığı sayısal değerlerden yola çıkarak sonuca ulaşması mümkündür. Ancak bu sonuç sadece atadığı değerler açısından doğrudur, her durum için genellenemez. Bazı öğretmen adayları ise probleme ilişkin daha uygun ve genellenebilir sonuçlar elde etmek için cadde uzunluğu, genişliği ve posta sayısı arasındaki ilişkiyi değişkenler açısından modelleyebilir.

3.4. VERİ ANALİZİ VE KURAMSAL ÇERÇEVE

Eldeki çalışmada problem çözme süreci; probleme ilişkin bilişsel modellerin matematik disiplinine ait kavramsal modeller ışığında işlendiği ve elde edilen sonuçların bilişsel açıdan tekrar yorumlandığı bir süreç olarak ele alınmaktadır. Dolayısıyla araştırmada öğretmen adayının problem çözme süreci basamaklarındaki performansını belirlemenin ötesinde bu basamaklara esas itibariyle yön veren bilişsel ve kavramsal modeller arası etkileşim ve ilişkinin açığa çıkarılması amaçlanmakta ve bu ilişki ve etkileşimi içinde barındıran matematik modeli derinlemesine incelenmektedir. Bu noktada bilişsel ve kavramsal modellerin ayrık yapılar olmadığını, birbirini bütünleyen iç içe geçmiş yapılar olduğunu ve bunların bileşiminin matematik modelini oluşturduğunu belirtmek gerekmektedir. Yazılı kaynaklarda farklı türden problemlerin çözümünde kullanılmak üzere üretilmiş çok sayıda modele rastlamak mümkündür; ancak bu modellerin amaca yönelik bilinçli bir şekilde kullanılması zihinsel çaba ve gayret gerektirir (Lesh, 1981). Ders kitaplarında yer alan formüller, grafikler, şekil, şema ve diyagramlar gibi kavramsal modeller statik bir yapıdadır. Bu modeller düşüncenin işe koşulması ile anlam kazanırlar. Kavramsal modeller, bireylerin bilişsel modelleri ışığında düzenlendiği ve yeniden yapılandırıldığı takdirde dinamik bir matematik modeline dönüşürler. Dolayısıyla, araştırma kapsamında öğretmen adaylarının ürettiği matematik modelleri bunların ardındaki bilişsel ve kavramsal modeller göz önünde bulundurularak incelenmektedir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının yazılı sınavda ürettiği matematik modelleri, bunları üretme sürecine ilişkin düşünce ve yorumları ve seçilen öğretmen adaylarıyla yürütülen mülakat kayıtları araştırmanın başlıca veri kaynaklarını oluşmaktadır. Bu verilerin analizinde içerik ve söylem analizi yöntemleri kullanılmış (Miles ve Huberman, 1994; Philips ve Hardy, 2002), giriş kısmında sunulan alan yazını bilgilerinden ise kuramsal çerçeve olarak yararlanılmıştır.

Modelin sembolik gösteriminden anlaşılacağı üzere (bknz. Şekil 5) model, bir kaynak durum içersindeki yapının temsilinden oluşmaktadır (Hestenes, 2010). Dolayısıyla öğretmen adayının probleme ilişkin ürettiği matematik modelleri ne ait olduğu problemden, ne problemin tanımladığı ilişkilerden, ne de bu ilişkileri göstermek ve çözümlemek amacıyla kullanılan temsillerden ayrı düşünülmez. Bu nedenle araştırma kapsamında, problem kaynak olarak ele alınmış, problemi anlaşılır kılmak, veriler arası ilişkileri zihinsel açıdan düzenlemek için üretilen çıkarımlar, varsayımlar yorumlar ve çizimler bilişsel model olarak kabul edilmiş, bütün bunları desteklemek ve analiz etmek amacıyla kullanılan matematiğe has her türlü kavram, sayı, sembol ve grafikler gibi temsiller ise kavramsal model olarak değerlendirilmiştir. Yazılı sınav kâğıdında yer aldığı şekliyle öğretmen adaylarının ortaya koyduğu matematik modellerinin kavramsal yönleri ön planda olsa da problem çözme sürecinde yapılan matematikselleştirme ve model oluşturma aktiviteleri ile bu çerçevede sergilenen düşünce ve yorumlar dikkatlice incelenerek üretilen modellerin bilişsel boyutları (bilişsel modeller) tespit edilmeye çalışılmıştır. Bu kapsamda analiz sürecinin ilk aşamasında öğretmen adaylarının her bir problem için ürettiği matematik modelleri ve bu modelleri oluşturma sürecinde sergiledikleri düşünce ve yorumları satır satır incelenerek problem durumunun aşamalı bir şekilde nasıl matematikselleştirildiği tespit edilmiştir. Ardından her bir problem için öğretmen adaylarının tespit ettiği kritik kavramları nasıl sınırlandırdığı, bunlara ilişkin ne tür varsayımlarda bulunduğu ve bunları nasıl matematikselleştirdiği belirlenerek sürecin işleyişine yön veren düşünce ve kavramlar tespit edilmiştir. Bu doğrultuda her bir probleme ilişkin kodlar geliştirilirken kritik kavramların tespit edilmesi ve bunlara ilişkin varsayımda bulunulması, tespit edilen ilişkilerin ve kritik kavramların matematikselleştirilmesi adına kavramsal modellerin seçilmesi ve kavramsal ve bilişsel modellerin birbiri açısından düzenlenmesi olmak üzere üç ana unsur göz önünde bulundurulmuştur. Örnek teşkil etmesi amacıyla iş ilanı probleminin ürettiği verilerin analizi sürecinde üretilen kodların sunulması yerinde olacaktır (bakınız Tablo 2).

Tablo 2. İş ilanı probleminin analizi için belirlenen kodlar.

AŞAMALAR	SERGİLENEN DÜŞÜNCE	KULLANILAN KODLAR
Kritik kavramların tespit edilmesi ve bunlara ilişkin varsayımda bulunulması:	Kazançların kıyaslanmasında dağıtılan pizza sayılarının etkili olduğunun farkına varılması	PİZ-SAY-ETK
	Dağıtılan pizza sayılarının eşit olduğunun varsayılması	PİZ-SAY-EŞ
Tespit edilen ilişkilerin ve kritik kavramların matematikselleştirilmesi adına kavramsal modellerin seçilmesi:	Pizza sayısı yerine sayısal değerler atanması	PİZ-SAY-DEĞ
	Pizza sayısı yerine değişkenler atanması	PİZ-DĞŞKN
	Pizza sayısı yerine atanan değişkenler yardımıyla elde edilen kazanç fonksiyonlarının grafiklerinin çizilmesi	PİZ-FONK
Kavramsal ve bilişsel modellerin birbiri açısından düzenlenmesi	Pizza sayısı arttıkça kazançlar arası farkın kapanacağının kestirilmesi ve maaşlar arası farkın primler arası farka oranlanması	(MA-FR)/(PRM-FR)
	Grafikten yola çıkılarak kazançların eşit olduğu anda dağıtılan pizza sayılarının eşit olduğunun keşfedilmesi	GRF-KA=PİZ

Belirlenen kodlar çerçevesinde, her bir problem için üretilen matematik modelleri öncelikle kullanılan kavramsal modelin türüne göre alt kategorilere ayrılmıştır. Bu kapsamda nicelik ve nitelikler arası ilişkilerin grafikler yardımıyla incelendiği modeller '**Grafiksel Modeller'**, nicelik ve niteliklerin bilinmeyen bir noktadaki ilişkilerinin semboller yardımıyla tanımlandığı modeller **'Cebirsel Modeller'** ve bu ilişkilerin tespiti için sayı ve aritmetiksel işlemlerin kullanıldığı modeller ise **'Aritmetiksel Modeller'** olarak sınıflandırılmıştır. Daha sonra bu kavramsal araçların seçimine ve uygulanmasına yön veren bilişsel modeller de göz önünde bulundurularak üretilen matematik modelleri uygunluk ve yeterliliklerine göre kategorize edilmiştir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının ürettiği matematik modelleri '**Uygun ve Yeterli Modeller**', '**Uygun Ancak Geliştirilmesi Gereken Modeller**' ve '**Uygun Olmayan Modeller**' olmak üzere üç ana kategori altında toplanmıştır. Uygun bilişsel modeller ışığında nicelikler ve nitelikler arası ilişkinin matematiksel olarak uygun bir şekilde temsil edildiği matematik modelleri **'Uygun ve Yeterli Modeller'** olarak değerlendirilmiştir. Buna karşın, problemde verilen nicelikler ve nitelikler arası ilişkinin tam olarak keşfedilemediği ya da modelin bilişsel ve kavramsal boyutuna dair bir takım eksiklerinin bulunduğu modeller **'Uygun Ancak Geliştirilmesi Gereken Modeller'** olarak kabul edilmiştir. Probleme ilişkin kritik kavramların doğru tespit edilemediği ve uygun bir şekilde matematikselleştirilmediği modeller ise **'Uygun Olmayan Modeller'** olarak kabul edilmiştir.

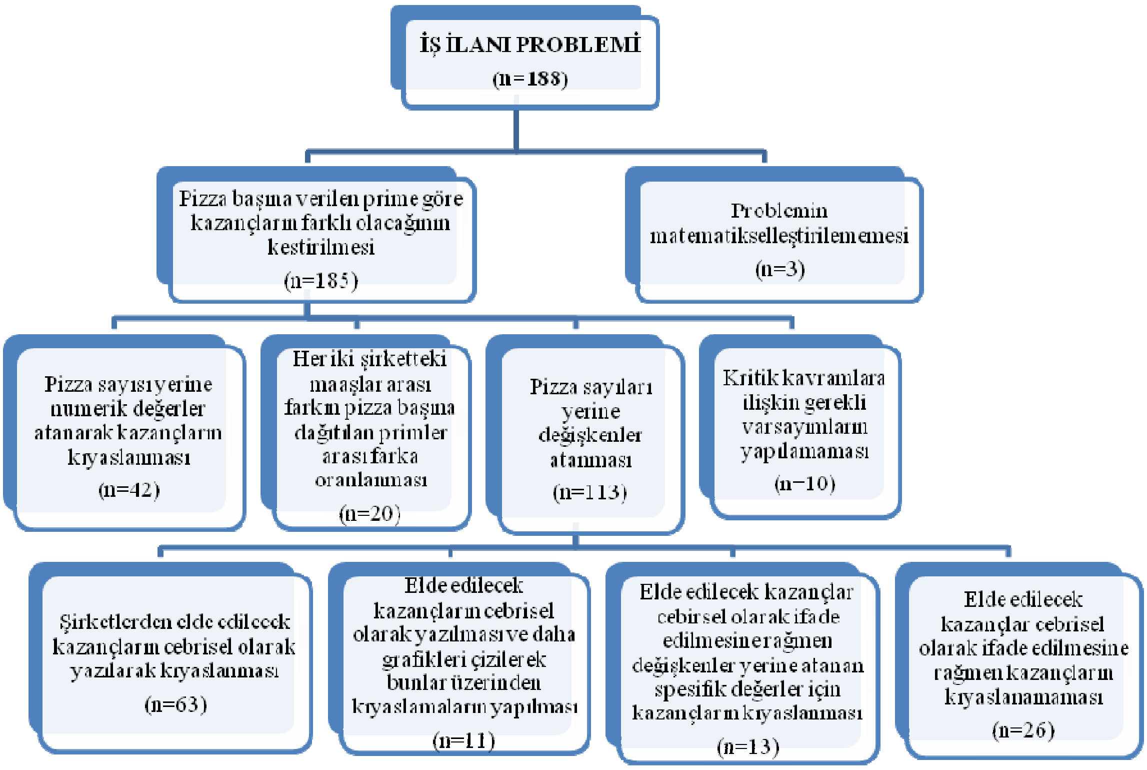
Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatların analizinde yazılı sınav verilerinin analizinde takip edilen yöntem ve yaklaşımların benzeri uygulanmıştır. Öncelikle mülakatlara ait ses kayıtlarının tamamı bilgisayar ortamına aktarılarak tam çözümlemesi yapılmış ve analiz işlemleri bu yazılı dokümanlar üzerinden yürütülmüştür. Bu dokümanlar tekraren okunmuş ve öğretmen adaylarının model oluşturma sürecinde sergiledikleri düşünceler, veriler arası ilişkileri tespit için yaptıkları saptamalar ve kullandıkları kavramsal araçlara ilişkin özetler tutulmuştur. Sonraki aşamalarda ise problemlerin çözümü esnasında sergilenen bilişsel ve kavramsal modeller ve bunların uygunluğuna ilişkin yapılan saptamalar kısa kodlarla ifade edilmiştir. Analizin son aşamasında ise üretilen kodlar daha genel kategoriler altında toplanmıştır. Yazılı sınav ve mülakat verilerinin analizinden elde edilen bulgular bir sonraki kısımda sunulacaktır.

4. BULGULAR VE YORUMLAR

Araştırma bulguları öğretmen adaylarının uygun ve yeterli modeller üretme noktasında zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. Problemlerin uygun bir şekilde matematikselleştirilmesi için öğretmen adaylarının problemlere ilişkin geliştirdiği bilişsel modellerini uygun matematiksel kavramlar ile desteklemesi ve bunlar arasında ilişki ve iletişim kurması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Nitekim yazılı sınav esnasında probleme ilişkin uygun matematik modeli geliştiremeyen kimi öğretmen adayı görüşmeler esnasında bilişsel ve kavramsal modellerini ilişkilendirmeyi ve problemi uygun bir şekilde matematikselleştirmeyi başarmıştır. Bulguların akıcı olması ve konunun anlaşılmasını kolaylaştırmak için her bir problem için yazılı sınav ve mülakatlardan elde edilen bulgular sıra ile sunulacaktır.

4.1. İŞ İLANI PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Öğretmen adaylarının bu probleme uygun matematik modeli üretebilmesi için öncelikle dağıtılan pizza sayısı ile elde edilecek kazanç arasında ilişkinin var olduğunu fark etmesi gerekir; ancak, bu ilişkinin fark edilmesi tek başına yeterli değildir. Satılan pizza sayısı arttıkça kazançlar arası farkın kapanacağını keşfetmeleri ve buna paralel olarak da problem durumunu belli sayıdaki pizza satışları için değil, daha bütüncül bir yaklaşımla değerlendirip yorumlamaları gerekmektedir. Yazılı sınav kâğıtlarının analizleri neticesinde üretilen matematik modelleri ve bu modellerin işleyişine yön veren düşünce ve kavramlar Şekil 16'daki gibi özetlenmiştir.



Şekil 16. Öğretmen adaylarının iş ilanı problemini matematikselleştirme adımları.

Şekil 16'dan anlaşılacağı üzere 3 öğretmen adayı probleme ilişkin hiçbir matematik modeli üretemezken 185 öğretmen adayı problemi matematikselleştirmek adına primin yani satılan pizza sayısının kazanç üzerindeki etkisinden yola çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarının modellerinin ardında, pizza sayısı değiştikçe kazançların değişeceği yönündeki bilişsel modelleri olsa da üretilen matematik modellerinin şirketlerin kazançlarını kıyaslama noktasında farklılık gösterdiği dikkat çekmektedir. 42 öğretmen adayı pizza sayısı yerine atadığı özel sayısal değerlerden yola çıkarak kazançları kıyaslarken 113 öğretmen adayı kazançları cebirsel olarak ifade etmeyi tercih etmiştir. Diğer taraftan 20 öğretmen adayı maaşlar arası farkın primler arası farka oranını göz önünde bulundurarak kazançları kıyaslarken 10 öğretmen adayı pizza sayıları değiştikçe kazançların değişeceğini fark etmekle birlikte kritik pizza sayısı ya da şirketlerin çalışma kapasitelerine ilişkin varsayımda bulunamadığı için problemi matematikselleştirememiştir.

Diğer taraftan öğretmen adaylarının ürettiği matematik modelleri bilişsel ve kavramsal boyutları göz önünde bulundurularak uygunluk ve yeterlilik kriterleri çerçevesinde analiz edilmiş ve sonuçlar Tablo 3'de sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretmen adaylarının iş ilanı probleminin çözümü için ürettiği matematik modellerinin uygunluk ve yeterlilik kriterlerine göre sınıflandırılması.

UYGUNLUK VE YETERLİLİK	KAVRAMSAL ARAÇLAR	PROBLEMİN MATEMATİKSELLEŞTİRME SÜRECİ	Frekans
UYGUN VE YETERLİ MODELLER	**Aritmetiksel**	Her iki şirketteki maaşlar arası farkın pizza başına dağıtılan primler arası farka oranlanması	n=20
	Cebirsel	Şirketlerden elde edilecek kazançların cebrisel olarak yazılarak kıyaslanması	n= 63
	Cebirsel – Grafiksel	Elde edilecek kazançların cebrisel olarak yazılması ve daha grafikleri çizilerek bunlar üzerinden kıyaslamaların yapılması	n=11
UYGUN ANCAK GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODELLER	**Aritmetiksel**	Kazançların spesifik pizza sayıları için kıyaslanması (deneme-yanılma)	n=42
	Cebirsel	Şirketlerden elde edilecek kazançlar cebrisel olarak ifade edilmiş (fonksiyonları yazılmış) ancak bu yapılar arasında ilişkiler kurularak kıyaslamalar yapılamamış	n=26
	Cebirsel – Aritmetiksel	Elde edilecek kazançlar cebrisel olarak ifade edilmiş (fonksiyonları yazılmış) ancak kıyaslama değişkenlere özel değerler atanarak yapılmış	n=13
MATEMATİK MODELİ YOK	**Problemin Anlaşılamaması**	Probleme ilişkin hiçbir yorum, düşünce ya da modelin üretilememesi	n=3
	Sadece Bilişsel Modeller Mevcut	Problem durumu anlaşılmış, kritik kavramlar tespit edilmiş, ancak gerekli varsayımda bulunularak problem matematikselleştirilememiş	n=10

Tablo 3'ten anlaşılacağı üzere araştırmaya katılan 188 öğretmen adayından 94'ü probleme ilişkin uygun ve yeterli modeller geliştirirken 81'i uygun ancak geliştirilmesi gereken modeller üretebilmiştir. Ayrıca araştırmaya katılan öğretmen adaylarından 3'ü problemi bilişsel olarak yapılandıramadıkları ve kritik kavramları tespit edemedikleri için hiçbir model üretemezken 10 öğretmen adayı da pizza sayısı değiştikçe kazançların değişeceğini fark etmesine rağmen kritik pizza sayısı ya da şirketlerin çalışma kapasitelerine ilişkin varsayımda bulunamadığı için problemi matematikselleştirememiştir. Yani bilişsel modelleri doğrultusunda kavramsal modeller ortaya koyamamışlardır. Bu öğretmen adaylarından birinin verdiği cevap aşağıdaki gibidir:

> Anahtar unsur çalışan kişinin kârıdır. Kâr da satışa bağlı olduğu için pek yorum yapılamaz ama 120 TL'yi garanti etmek daha mantıklı görünüyor, çünkü satış değişir. Ama sabit ücretler garantidir. **[ÖA152[1]]**

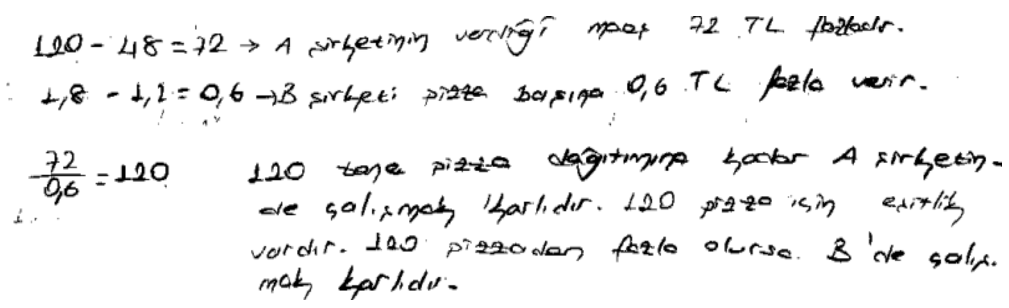
Bu öğretmen adayının satılan pizza sayısı değiştikçe kazançların değişeceğine dair bir algısının olduğu açıktır. Ancak "*Kâr da satışa bağlı olduğu için pek yorum yapılamaz…*" ifadesinden öğretmen adayının şirketlerden elde edilecek kazançların eşitlendiğinde satılan pizza sayısının da eşitleneceğini göremediği anlaşılmaktadır. Bu ise öğretmen adayının problem durumuna ilişkin bilişsel modelinde bir eksikliğin var olduğu ve bu eksikliğin ise uygun ve yeterli kavramsal model oluşturmak için engel teşkil ettiği sonucuna götürmektedir.

Öğretmen adaylarının uygun ve yeterli matematik modeli üretmesi için kazançları ve dağıtılan pizza sayılarını birbirinden bağımsız değerlendirmekten ziyade pizza sayısındaki artışa paralel olarak kazançlar arası farkın kapanacağını keşfetmesi gerekmektedir. Bu bağlamda primler arası fark ile maaşlar arası farkın dengelendiği noktayı tespit eden aritmetiksel modeller (n=20); kazançların değişkenler yardımıyla tanımlandığı ve kıyaslandığı cebirsel modeller (n=63); bu cebirsel ifadelere ait grafiklerden yola çıkılarak kazançları kıyaslayan cebirsel-grafiksel modeller (n=11) uygun ve yeterli model kapsamında değerlendirilmiştir.

Dağıtılan pizza sayısı arttıkça kazançlar arası farkın kapanacağını kestiren ve bu doğrultuda maaşlar arası farkı pizza başına verilen primler arası farka oranlayan 20 öğretmen adayından birinin ürettiği uygun ve yeterli aritmetiksel model Şekil 17'deki gibidir.

---

[1] ÖA152: Yazılı sınava katılan 152 numaralı öğretmen adayını göstermektedir. Bundan sonraki kısımlarda da yazılı sınav kâğıtlarından yapılan alıntılarda bu sunum şekli kullanılacaktır.


$120 - 48 = 72 \rightarrow$ A şirketinin verdiği maaş 72 TL fazladır.

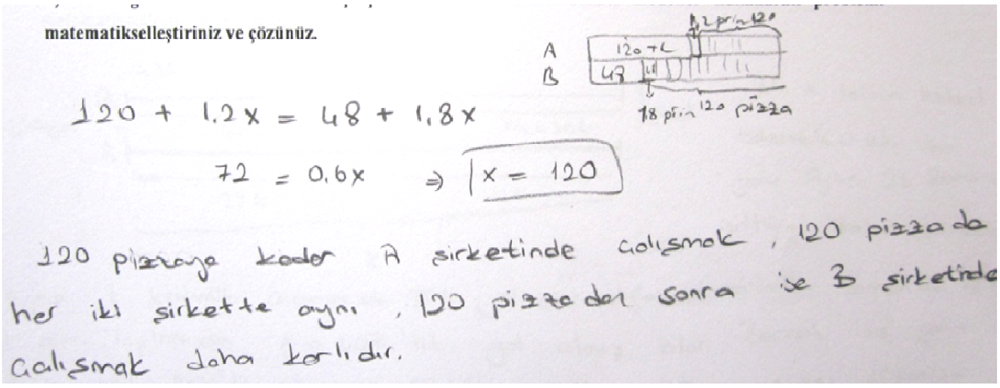
$1,8 - 1,2 = 0,6 \rightarrow$ B şirketi pizza başına 0,6 TL fazla verir.

$\frac{72}{0,6} = 120$ 120 tane pizza dağıtımına kadar A şirketinde çalışmak karlıdır. 120 pizza için eşitlik vardır. 120 pizzadan fazla olursa B'de çalışmak karlıdır.

Şekil 17. İş ilanı problemine ilişkin uygun ve yeterli aritmetiksel model örneği (ÖA9).

Dikkat edilecek olunursa öğretmen adayı sayılar arası ilişkilerden yola çıkarak A şirketinin verdiği 72 TL fazla maaşa karşın B şirketinin dağıtılan her pizza başına 0,6 TL daha fazla prim verdiğini tespit etmiştir. Bu doğrultuda dağıtılan her pizza da 0,6 TL öne geçen B şirketi çalışanının A şirketi ile arasındaki 72 TL lik maaş farkını kapatması için 120 pizza satması gerektiğini hesaplamıştır. Buradan hareketle 120 pizzaya kadar A şirketinde çalışmanın, 120 pizzadan sonra ise B şirketinde çalışmanın daha kârlı olduğuna karar vermiştir. Bu noktada öğretmen adayının sayılar arası ilişkilerden yola çıkarak kazançlar arası farkın kapanacağına dair bilişsel model geliştirdiği ve farkın kapandığı noktayı tespit etmek amacıyla da maaşlar arası fark ile primler arası farkı oranlayarak problemi matematikselleştirdiği görülmektedir.

Diğer taraftan uygun ve yeterli cebirsel model üreten öğretmen adaylarından birinin ürettiği aşağıdaki matematik modeli incelendiğinde öğretmen adayının görsel modelinden hareketle dağıtılan pizza sayısı arttıkça kazançlar arası farkın kapanacağını kestirdiği ve bunu uygun şekilde matematikselleştirdiği anlaşılmaktadır.



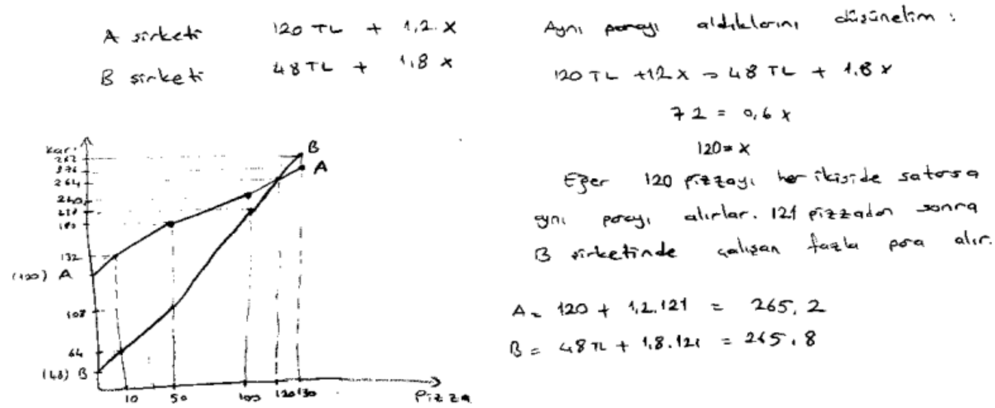
$120 + 1,2x = 48 + 1,8x$

$72 = 0,6x \Rightarrow \boxed{x = 120}$

120 pizzaya kadar A şirketinde çalışmak, 120 pizzada her iki şirkette aynı, 120 pizzadan sonra ise B şirketinde çalışmak daha karlıdır.

Şekil 18. İş ilanı problemine ilişkin uygun ve yeterli cebirsel model örneği (ÖA29).

Bu öğretmen adayı, her iki şirket için görsel model üzerinde gösterdiği maaşlar ve primlerden yola çıkarak pizza sayısının eşit olduğu bir noktada kazançların da eşit olabileceğini keşfetmiştir. Öğretmen adayı dağıtılan pizza sayılarının eşit olduğu bir noktada kazançların eşit olabileceğine dair geliştirdiği bilişsel modelini ise *120+1,2x=48+1,8x* şeklinde matematikselleştirmiştir. Bu öğretmen adayından farklı olarak aşağıdaki gibi uygun ve yeterli cebirsel-grafiksel model üreten öğretmen adaylarından birinin matematik modeli incelenirse bu öğretmen adayının çizmiş olduğu grafikten yola çıkarak bilişsel modellerini düzenlediği ve kazançları kıyasladığı görülür.

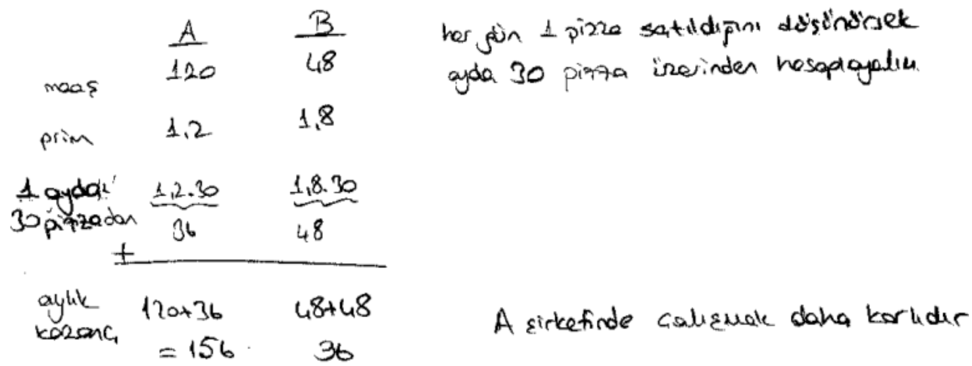


Şekil 19. İş ilanı problemine ilişkin uygun ve yeterli cebirsel-grafiksel model örneği (ÖA115)**.**

Bu öğretmen adayı her iki şirketin kazancını pizza sayısı yerine atadığı değişkenler cinsinden ifade etmekle kalmamış aynı zamanda bu kazanç fonksiyonlarına ait grafikleri çizerek dağıtılan pizza sayısı ile kazançlar arasında nasıl bir ilişki olduğunu bütüncül bir şekilde gözler önüne sermiştir. Bu noktada kazanç fonksiyonlarının kesiştiği noktadan hareketle kazançlar arası farkın kapanacağına ve pizza sayısının eşit olduğu bir noktada kazançların da eşit olacağına dair bilişsel model geliştirdiği ve bu bilişsel model doğrultusunda *120+1,2x=48+1,8x* şeklinde kazançları kıyasladığı görülmektedir.

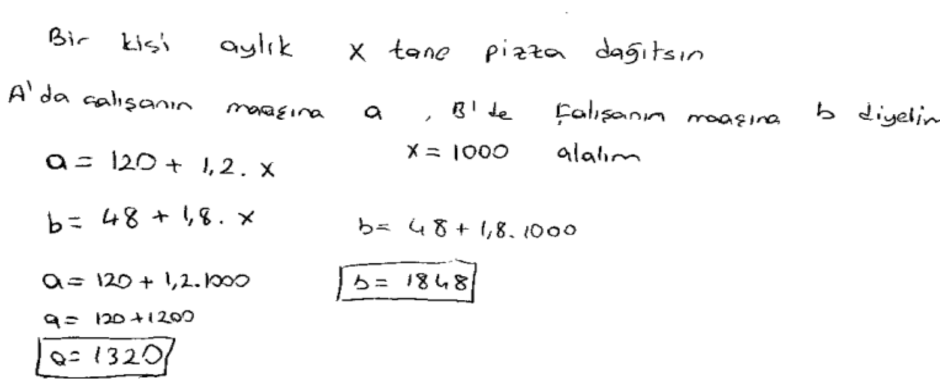
Diğer taraftan uygun ve yeterli matematik modeli üreten öğretmen adaylarının aksine problemi bütüncül bir yaklaşımla ele alamayıp belli sayıdaki pizza satışları için yorumlar yapan, ortaya koydukları bilişsel ve kavramsal modelleri kazançları kıyaslama noktasında yetersiz kalan öğretmen adaylarının ürettiği modeller ise uygun ancak geliştirilmesi gereken modeller olarak değerlendirilmiştir. Bu kapsamda öğretmen adayları tarafından sergilenen düşüncelerdeki eksikliğin, yani bilişsel modellerdeki sınırlılığın, kullandıkları kavramsal modellerde de sınırlılığa sebep olduğu anlaşılmaktadır. Tablo 3'te görüldüğü gibi 42 öğretmen adayının aritmetiksel işlemler yardımıyla belli sayıdaki pizza satışları için kazançları kıyasladığı ve bir tür deneme yanılma yoluyla doğru yanıtı elde etmeye çalıştıkları ancak başarılı olamadıkları görülmektedir. Katılımcılardan 26'sının ise kazançları cebirsel olarak ifade ettikleri, ancak bu cebirsel ifadeleri birbiri açısından değerlendiremedikleri dolayısıyla kazançlara ilişkin doğru çıkarımlarda bulunamadıkları görülmektedir. 13 öğretmen adayı ise cebirsel olarak ifade ettikleri kazançları belli sayıdaki pizza satışları için kıyaslamışlardır. Bu öğretmen adayları her ne kadar atadıkları özel sayısal değerler için kazançları doğru kıyaslamış olsalar da pizza satışı-kazanç arasındaki ilişkiyi irdeleme noktasında daha genel ve bütüncül bir yaklaşım sergileyememiş ve problemin çözümüne ilişkin tatmin edici yanıtlar verememiştir.

Uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel model üreten öğretmen adaylarından (n=42) birinin ürettiği aşağıdaki model incelenecek olunursa öğretmen adayının kazançların eşit olduğu noktadan ziyade spesifik pizza sayısı için kıyaslamaya gittiği görülür.



Şekil 20. İş ilanı problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel model örneği (ÖA12).

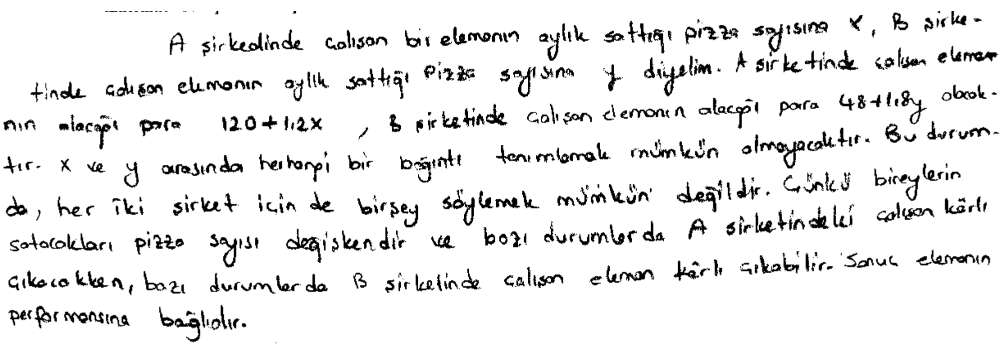
Şekil 20'den anlaşılacağı üzere bu öğretmen adayı günde 1 pizza dağıttığını varsayarak her iki şirketten elde edilecek kazancı hesaplamıştır. Öğretmen adayı her ne kadar kritik kavram olarak belirlediği pizza sayısına ilişkin varsayımda bulunsa da pizza sayısının kazanç üzerindeki etkisini varsayımın dışındaki diğer durumlar için değerlendirememiştir. Benzer şekilde uygun ancak geliştirilmesi gereken cebirsel-aritmetiksel model üreten öğretmen adaylarından (n=13) birinin ürettiği aşağıdaki model incelenecek olunursa öğretmen adayının kazançları cebirsel olarak ifade ettiği ancak dağıtılan pizza sayıları ile kazançlar arasında ilişki kuramadığı ve kazançları sadece pizza sayıları yerine atadığı sayısal değerler açısından değerlendirdiği görülür.



Şekil 21. İş ilanı problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken cebirsel-aritmetiksel model örneği (ÖA69).

Şekil 21'den anlaşılacağı üzere öğretmen adayı kazançların pizza sayısına göre değişeceğinin farkındadır. Nitekim kazançları pizza sayısına (x) bağlı olarak $a=120+1,2x$ ve $b=48+1,8x$ şeklinde ifade etmiştir. Ancak şirketlerin kazancını pizza sayısı yerine atadığı 1000 değeri için kıyaslaması, dağıtılan pizza sayılarının eşit olduğu bir noktada kazançların eşit olabileceğine dair bilişsel modele sahip olmadığını göstermektedir. Bu durumda matematik modeli, kavramsal boyutu itibariyle uygun olsa da bilişsel modellerdeki eksiklikler modelin yeterliliğini etkilemektedir.

Diğer taraftan uygun ancak geliştirilmesi gereken cebirsel model üreten öğretmen adaylarından (n=26) birinin ürettiği Şekil 22'deki model incelenecek olunursa bu öğretmen adayının kazançları cebirsel olarak ifade ettiği ancak kıyaslayamadığı görülür.


A şirkeolinde calışan bir elemanın aylık sattığı pizza sayısına x, B şirke-
tinde calışan elemanın aylık sattığı pizza sayısına y diyelim. A şirketinde calışan elemanın alacağı para 120+1,2x , B şirketinde calışan elemanın alacağı para 48+1,8y olacak-
tır. x ve y arasında herhangi bir bağıntı tanımlamak mümkün olmayacaktır. Bu durumda, her iki şirket için de birşey söylemek mümkün değildir. Çünkü bireylerin satacakları pizza sayısı değişkendir ve bazı durumlarda A şirketindeki calışan kârlı çıkacakken, bazı durumlarda B şirketinde calışan eleman kârlı çıkabilir. Sonuç elemanın performansına bağlıdır.

Şekil 22. İş ilanı problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken cebirsel model örneği (ÖA165).

Bu alıntıdan anlaşılacağı üzere öğretmen adayı dağıtılan pizza sayısına bağlı olarak kazançların değişeceğini fark etse de pizza sayılarının eşit olduğu bir anda kazançların eşit olabileceğini kestirememiştir. Bu nedenle *120+1,2x* ve *48+1,8y* şeklinde tanımladığı kazançları kıyaslayamamıştır.

Diğer taraftan öğretmen adayları ile yürütülen mülakatlara ilişkin bulgular sunulacak olunursa öncelikle araştırmacının soruları doğrultusunda öğretmen adaylarının ürettiği matematik modellerine ilişkin aşağıdaki tablonun incelenmesi faydalı olacaktır. Mülakat esnasında öğretmen adayı Buket ve Elif uygun ve yeterli matematik modeli geliştirirken Arzu, Çetin ve Engin uygun ancak geliştirilmesi gereken modeller ortaya koymuştur.

Tablo 4. Öğretmen adaylarının iş ilanı problemi için ürettiği matematik modelleri.

Model	ARZU	BUKET	ELİF	ÇETİN	ENGİN
Uygun ve Yeterli Modeller		C.G.M	C.M		
Uygun Ancak Geliştirilmesi Gereken Modeller	A.M			C.M	C.A.M

Kısaltmalar: A.M: Aritmetiksel Model, **C.M:** Cebirsel Model, **C.G.M:** Cebirsel-Grafiksel Model, **C.A.M:** Cebirsel-Aritmetiksel Model.

Mülakatta kimi öğretmen adaylarının yazılı sınavda ürettikleri matematik modellerini araştırmacının soruları neticesinde düzenleyerek geliştirdiği görülmüştür ki bu durum bilişsel ve kavramsal modeller arası ilişkinin incelenmesi noktasında araştırmaya ışık tutmaktadır. Örneğin başlangıçta primler arası fark kazançlar arası farktan daha fazla olduğu düşüncesiyle daima A şirketinin kazançlı olacağını ifade eden öğretmen adayı Çetin ile yürütülen mülakattan yapılan bir alıntı şu şekildedir (**Diyalog 1**)**:**

………………………

Araştırmacı: … A'nın sabit ücreti daha fazla olduğu için ve primler arası fark da az olduğu için daha kazançlıdır diyorsun. Sence bu her zaman böyle midir?

Çetin: (Tereddütle) Her zaman. Çok da emin değilim ama.

Araştırmacı: 100 pizza için düşünsen?

Çetin: (Kazançları hesaplar). A daha fazla oldu.

Araştırmacı: Peki 200 pizza için?

Çetin: (Kazançları tekrar hesaplar) B daha kârlı oldu.

Araştırmacı: O zaman bunlar arasında nasıl bir ilişki vardır? Sence hangi şirket daha kârlı?

Çetin: O zaman satılan pizza sayısı arttıkça B daha kârlı olacak.

Araştırmacı: Yani belli bir noktaya kadar A daha kârlı.

Çetin: Belli bir noktadan sonra B daha kârlı olacaktır.

Araştırmacı: O kritik noktada ne olacak peki?

Çetin: (Kazançlar) eşit olur.

……………………………

Araştırmacı: İlk başta her zaman A şirketinin kârlı olacağını söyledin. Daha sonra farklı sayılardaki pizza için denedin, böyle olmadığını gördün. Aradaki farkın kapanacağını söylüyorsun. Şimdi de hangi noktada aradaki farkın kapanacağını soruyorum.

Çetin: x tane pizza için A şirketinin kazancının $120+1,2x$ olduğunu düşünsem B şirketinin kazancı ona eşit olduğunda yine x olur mu ya da oraya ne demem lazım? (Düşünür). Buna farklı bir değişken söylesem $120+1,2x=48+1,8y$ (eşitliğini yazar) ama bu defada elimdeki tek denklemle bu pizza sayılarına ulaşamayabilirim. Çünkü iki bilinmeyen var. Deneyerek baksam rastgele sonuçlar olur.

Çetin'in 100 ve 200 tane pizza satışı için hesapladığı kazançlardan yola çıkarak A şirketinin sabit ücreti fazla olduğu için her zaman daha kazançlı olacağı şeklinde başlangıçta sergilediği bilişsel modelini düzenlediği açıkça görülmektedir. Çetin'in buna paralel olacak şekilde pizza sayısı yerine atadığı değişkenler üzerinden problemi matematikselleştirdiği, çözüm için yeterli olmasa da kavramsal bir model ortaya koyduğu görülmektedir. Bu durum bireyin problem ile etkileşim içersinde olduğu sürece bilişsel modellerini düzenlemeye devam edeceği görüşünü desteklemektedir (Norman, 1983). Ancak *120+1,2x* ve *48+1,8y* şeklinde matematikselleştirdiği kazançları kıyaslayamamaktadır ki bu durumun kazançların eşit olduğu anda satılan pizza sayılarının da eşit olacağını kestirememesinden kaynaklandığı anlaşılmaktadır. Bu sonuçlar bir yandan bilişsel modellerin kavramsal modellerin üretimine öncülük ettiğini gösterirken diğer yandan bilişsel modellerdeki sınırlılıkların uygun ve yeterli kavramsal modellerin (kazançların aynı olduğu anda pizza sayılarını temsilen aynı değişkenin kullanılması: *120+1,2x =48+1,8x*) üretilmesinin önünde engel teşkil ettiği sonucuna bizleri götürmektedir.

Bulgular ürettikleri grafiksel modeller yardımıyla kazançlar arası farkın kapanacağını keşfeden öğretmen adaylarının bu kavramsal modeller üzerinde düşünerek probleme ilişkin bilişsel modellerini revize edip geliştirdiklerini göstermektedir. Bu durum aşağıdaki alıntıda açıkça görülmektedir (**Diyalog 2**)

…………………………

Buket: Mesela şöyle düşünelim. (Kazançları P_A*=120+1,2x ve* P_B*=48+1,8y* şekilde yazar) Mesela 1 pizza dağıtmış olursa diğeri de 1 pizza dağıtmış olursa A şirketi kârlı, belli bir seviyeye kadar mesela 2,3,4,5… Öyle bir an gelecek ki belki eşitlendiği an olacak ama ondan sonra dağıttığı pizza sayıları eşit olduğu zaman B şirketinde çalışmak daha kârlı olacak. O pizza sayısına bağlı. Grafik yaparsam belli bir seviyede…

Araştırmacı: Peki eşit olduğu noktayı nasıl bulabiliriz?

Buket: Şöyle mesela acaba her ikisi de kaç tane pizza dağıttığı zaman kazançlar eşit olabilir? (*120+1,2x = 48+1,8x* şeklindeki eşitliği yazar ve grafiklerini çizer, bakınız Şekil 23)…

……………………………

Araştırmacı: Farklı pizza sayıları için kazançlar eşit olamaz mı?

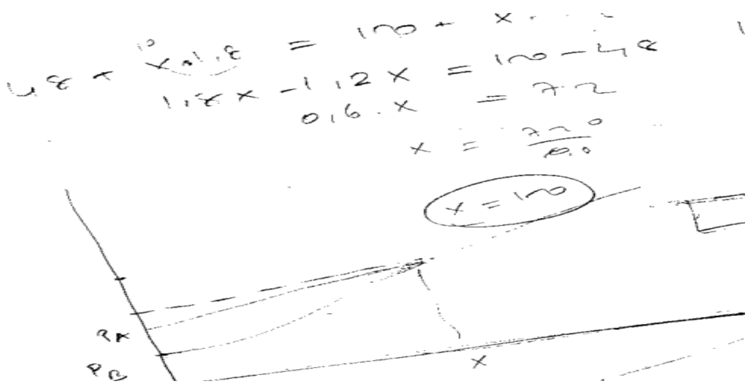
Buket: Olabilir.

Araştırmacı: Burada pizza sayılarını bilinmeyen cinsinden aynı aldın… Bu kazançların eşit olması anlamına mı geliyor?

Buket: Doğru anlamına gelmez (Düşünür). Onu bulmamız için ne yapmamız lazım?

Araştırmacı: Peki çizdiğin grafik üzerinde x ile gösterdiğin nokta neresidir?

Buket: (Grafik üzerinde göstererek) Aynı pizzayı satmış olsa bile kazançları eşit olabilir ortada bir yerde… Evet, aynı sayıda pizza satıldığında kazançlar eşit olur… Bakalım devam etsek kaç çıkıyor? (Eşitliği çözer)…



Şekil 23: İş ilanı problemi için Buket tarafından üretilen matematik modeli.

Buket yazılı sınavda kazançları pizza sayısı yerine *x* ve *y* değişkenlerini atayarak $P_A=120+1,2x$ ve $P_B=48+1,8y$ şeklinde matematikselleştirmiş ancak bunları kıyaslayarak doğru yanıtı elde edememiştir. Ancak mülakat sırasında araştırmacının yönelttiği sorular karşısında bilişsel ve kavramsal modellerini yeniden düzenlediği görülmektedir. Bir taraftan grafik çizerken diğer taraftan kazançların eşit olduğu noktada pizza sayıları da eşit olacak şekilde problemi matematikselleştirdiği ($120+1,2x= 48+1,8y$) görülmektedir. Ancak araştırmacının *"Farklı pizza sayıları için kazançlar eşit olmaz mı?"* sorusu üzerine Buketin bilişsel ve kavramsal modellerini yeniden gözden geçirip düzenlediği görülmektedir. Bu durum bireyin tüm yönleriyle bilişsel modelinin farkında olmayabileceği, ancak yöneltilen deşeleyici sorular karşısında var olan modelini geliştirme imkânı bulacağı tezini desteklemektedir (Franco ve Colinvaux, 2000; Akt. Ornek, 2008). Neticede, mülakatın sonuna doğru Buket çizdiği grafik üzerinden yorumlar yaparak kazançların eşit olduğu anda dağıtılan pizza sayılarının da eşitleneceği çıkarımında bulunmuştur. Diyalogdan Buketin bilişsel ve kavramsal modelleri arasında ilişkiler kurmaya çalıştığı, oluşturduğu kavramsal model üzerinde düşünerek bilişsel modelini revize etiği ve netice olarak da probleme ilişkin matematik modelini sürekli geliştirdiği görülmektedir.

Mülakat verilerinin analizinden elde edilen bir diğer önemli bulgu ise bilişsel ve kavramsal modeller arasında anlamsal ilişkilerin kurulamaması halinde üretilecek matematik modelinin eksik ve işlevsiz kalacağı gerçeğidir. Aşağıdaki alıntıda Engin isimli öğretmen adayının uygun bilişsel ve kavramsal modellere sahip olduğu halde bunları ilişkilendiremediği için işlevsel bir matematik modeli üretemediği görülmektedir (**Diyalog 3):**

Engin: A şirketinin kazancını *120+1,2x*, B şirketininkini ise *48+1,8y* biçiminde yazalım.

Araştırmacı: Burada *x* ile gösterdiğin ne oluyor?

Engin: Prim

Araştırmacı: Her pizza satışı için 1,2 ve 1,8 TL veriyorlar; bu durumda *x* prim mi pizza sayısı mı sence?

Engin: Pardon, pizza sayısı tabiî ki de.

Araştırmacı: Kazançları *120+1,2x* ve *48+1,8y* şeklinde yazdın; birde bunları kıyaslaman gerekecek herhalde.

Engin: Evet, *x* yerine değerler vererek kıyaslarım (*x* yerine sırasıyla 100, 98 ve 95 değerlerini vererek kazançları kıyaslıyor).

………………………..

Araştırmacı: Yaptıklarına göre pizza sayısı değiştikçe kazançlarda değişiyor, öyle değil mi?

Engin: Evet, Pizza sayısı 95'e kadarsa A şirketi daha kazançlı

Araştırmacı: Mesela 100 verdiğinde hangisi daha kârlı olmuş?

Engin: 240 (A şirketinden sağlanan kazanç) ve 228 (B şirketinden sağlanan kazanç) olmuş

Araştırmacı: O halde burada A'daki mi daha kârlı olmuş. 95'e kadar demiştin biraz önce.

Engin: İşlem hatası mı yapmışım? Bir hata yaptım herhalde orada.

Araştırmacı: Peki 95 olmasın. O kritik pizza sayısı hangi değer olabilir sence?

Engin: Tahminim 100 ile 98 arasında olacak. (deneme yapmaya devam eder)

………………………..

Engin: Yani aslında bir yere kadar A şirketi bir yerden sonra B şirketi daha kârlı olabilir.

Araştırmacı: Ama önemli olan o nokta.

Engin: Evet. Ben burada o noktayı yanlış bulmuşum...

Araştırmacı: Peki üstünlüğün olmadığı o noktada kazançlar nasıl olmalı?

Engin: Eşit olmalı elbette.

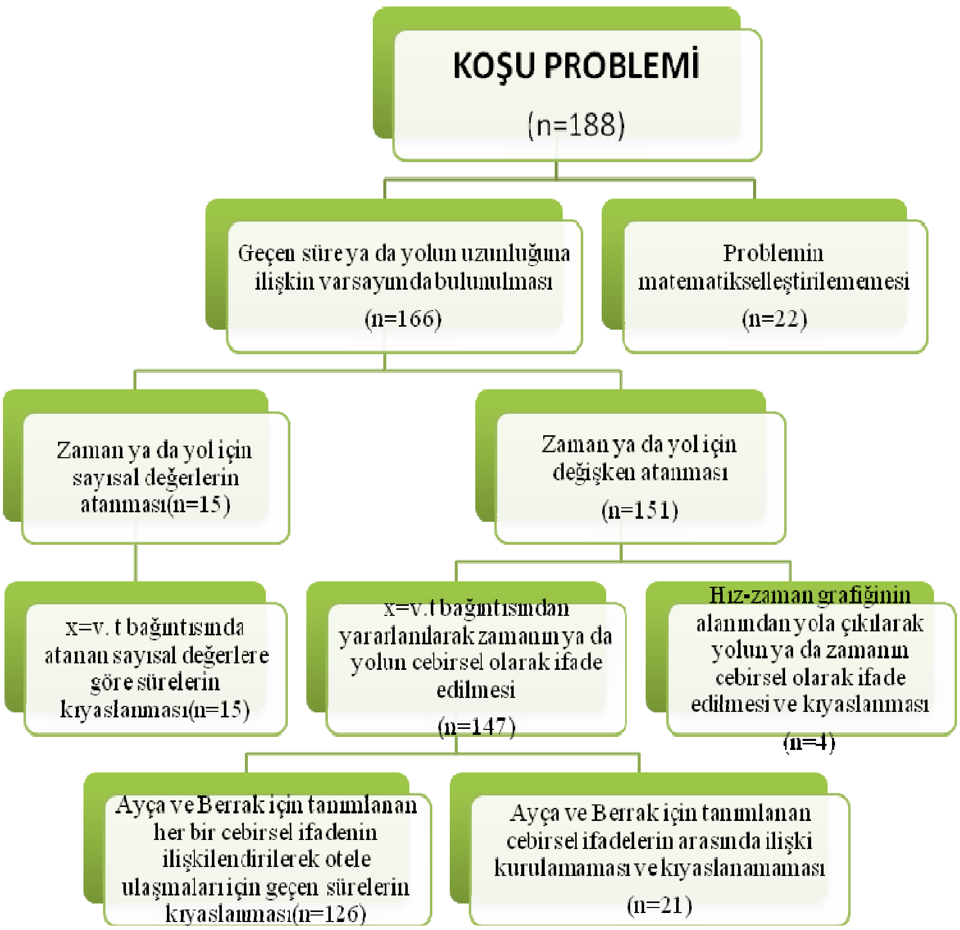
Araştırmacı: Eşit olmalıysa o noktadaki kazançları kıyaslarken ne yaparsın?

Engin: O noktada denklemde *x* gördüğüm yere pizzaları yazdığım zaman ikisinde de eşit çıktığı için kazançlar eşit olur.

Diyalogdan anlaşıldığı üzere Engin her ne kadar problemi *120+1,2x* ve *48+1,8y* şeklinde matematikselleştirse de bu kavramsal modelini kazançları kıyaslama noktasında işe koşamamış, pizza sayısı yerine atadığı özel değerler için kazançları kıyaslama yolunu seçmiştir. Ayrıca '*Bir yere kadar A şirketi bir yerden sonra da B şirketi daha kârlı olabilir*' şeklindeki ifadesi Engin'in kritik pizza sayısına kadar şirketlerden birinin daha kârlı olacağını, o pizza sayısından sonra ise üstünlüğün diğer şirkete geçeceğinin farkında olduğunu göstermektedir. Ancak bu düşüncesini ürettiği kavramsal model ile ilişkilendirememiştir. Yani öğretmen adayının bilişsel ve kavramsal modelleri arasında iletişim kuramadığı görülmektedir. Bu ilişkinin kurulamamış olması ise çözüm için işlevsel bir modelin üretilip doğru yanıtın elde edilememesinin en temel sebebi olarak karşımıza çıkmaktadır.

4.2. KOŞU PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Öğretmen adaylarına yöneltilen bu problem yol, zaman, hız arasındaki ilişkinin yol=hız×zaman formülü bağlamında ele alınmasının ötesinde yaklaşımlar gerektirmektedir. Öğretmen adaylarının öncelikle Ayça ve Berrak'ın yolun farklı bölümlerini aynı hızda fakat farklı sürede gittiğini kestirmesi ardından da geçen süreler ve alınan yollar arasında orantısal ilişkiler kurarak problemi matematikselleştirmesi gerekmektedir. Yazılı sınav kâğıtlarının analizleri neticesinde tespit edilen matematik modelleri ve bu modellerin işleyişine yön veren düşünce ve kavramlar aşağıda sunulmuştur.



Şekil 24: Öğretmen adaylarının koşu problemini matematikselleştirme adımları.

Şekil 24'ten anlaşılacağı üzere 22 öğretmen adayı problemi matematikselleştiremezken 166 öğretmen adayı kritik kavram olarak tespit ettiği yol ve zaman kavramlarından ve yol=hız×zaman bağıntısından yola çıkarak problemi matematikselleştirmiştir. Ancak bu öğretmen adaylarının kullandığı ortak model her ne kadar yol=hız×zaman bağıntısı olsa da bu modelin, yol, hız, zaman arasındaki ilişkinin irdelenmesi ve otele ulaşılması için geçen sürelerin kıyaslanması noktasında farklılık gösterdiği dikkat çekmektedir. Örneğin, yol ya da zaman yerine atanan sayısal değerlerden yola çıkarak Ayça ve Berrak'ın hareketini değerlendiren 15 öğretmen adayının aksine yol ya da zaman yerine atadığı değişkenler yardımıyla problemi matematikselleştiren öğretmen adaylarının (n=151) doğru sonuca ulaşabilmesi için atadıkları değişkenleri ilişkilendirerek birbiri cinsinden ifade etmeleri gerekmektedir. Ancak, bu öğretmen adaylarından 21'i atadığı değişkenler arasında ilişki kuramadığı için otele ulaşılması için geçen süreleri kıyaslayamamıştır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının ürettiği matematik modelinin her ne kadar çıkış noktası yol=hız×zaman bağıntısı olsa da bu modelin probleme uygun olacak şekilde düzenlenmesi farklılık göstermektedir ki bu durum da matematik modelinin uygunluk ve yeterliliğini etkilemektedir. Bu noktada öğretmen adaylarının kullandıkları kavramsal modellerin yanı sıra bunların seçimine ve işleyişine yön veren bilişsel modelleri de göz önünde bulundurularak kategorize edilen matematik modelleri aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 5. Öğretmen adaylarının koşu probleminin çözümü için ürettiği matematik modellerinin uygunluk ve yeterlilik kriterlerine göre sınıflandırılması.

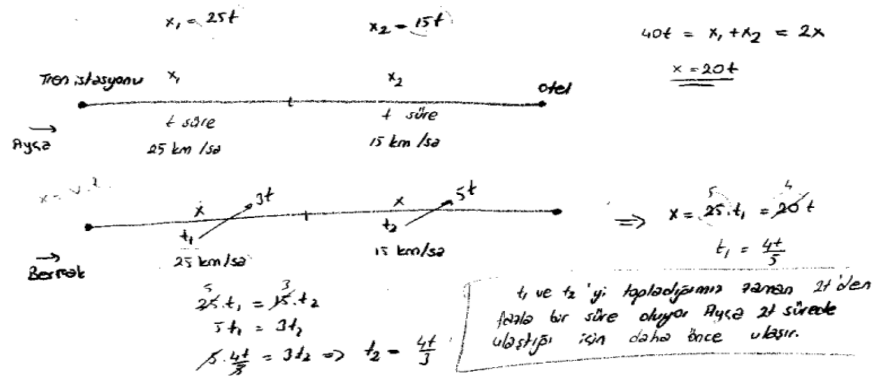
UYGUNLUK VE YETERLİLİK	KAVRAMSAL ARAÇLAR	PROBLEMİ MATEMATİKSELLEŞTİRME SÜRECİ	Frekans
UYGUN VE YETERLİ MODELLER	Cebirsel	$x = v \cdot t$ bağıntısından yararlanılarak yol ya da zamanın cebirsel olarak ifade edilmesi ve bunların ilişkilendirilerek kıyaslanması	n=126
	Cebirsel – Grafiksel	Hız-zaman grafiğinin alanından hareketle yolun zaman değişkenine bağlı olarak ifade edilmesi ve her ikisinin otele ulaşması için geçen sürelerin ilişkilendirilerek kıyaslanması	n=4

UYGUN ANCAK GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODELLER	**Aritmetiksel**	$x=v{\cdot}t$ bağıntısında zaman ya da yol yerine atanan sayısal değerlerden yola çıkılarak kıyaslamaya gidilmesi	n=15
	Cebirsel	$x=v{\cdot}t$ bağıntısından yola çıkılarak yol ya da zamanın cebirsel olarak ifade edilmesi ancak Ayça ve Berrak'ın hareketleri arasında ilişki kurulamaması ve kıyaslanamaması	n=21
MATEMATİK MODELİ YOK	**Sadece Bilişsel Modeller Mevcut**	Problem durumu anlaşılmış, kritik kavramlar tespit edilmiş, ancak gerekli varsayımda bulunularak problem matematikselleştirilememiş	n=4
	Problemin yanlış anlaşılması	Problem ifadesinin dikkatli okunmaması nedeniyle her ikisinin aynı sürede aynı yolu koştuğunun düşünülmesi	n=5
	Problemin Anlaşılamaması	Probleme ilişkin hiçbir yorum, düşünce ya da modelin üretilememesi	n=13

Tablo 5'ten anlaşılacağı üzere araştırmaya katılan 188 öğretmen adayından 130'u probleme ilişkin uygun ve yeterli model geliştirirken 36'sı uygun ancak geliştirilmesi gereken modeller üretebilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarından 5'i problemi yanlış anladığı, 4'ü problemi anlamış olmasına rağmen yol ve zaman kavramlarına ilişkin varsayımda bulunamadığı için problemi matematikselleştiremezken 13 öğretmen adayı ise probleme ilişkin hiçbir düşünce ya da model üretememiştir.

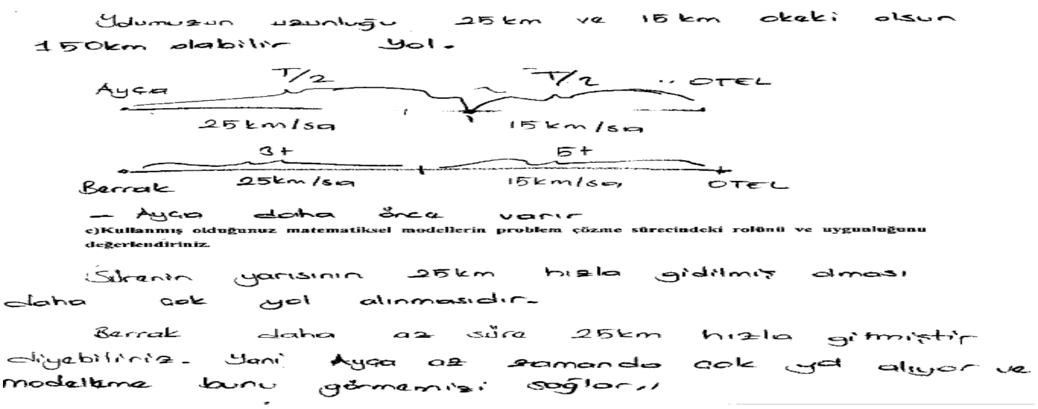
Öğretmen adaylarının uygun ve yeterli matematik modeli üretmesi için $x=v{\cdot}t$ bağıntısını uygulamasının ötesinde yol ve zaman yerine atadığı değişkenler arasında ilişki kurması ve bunları birbiri cinsinden ifade ederek kıyaslaması gerekmektedir. Bu bağlamda $x=v{\cdot}t$ bağıntısından (n=126) ya da hız-zaman grafiğinin alanından (n=4) yola çıkarak yolu ya da zamanı cebirsel olarak ifade eden ve bunları kıyaslayan öğretmen adaylarının (n=130) ürettiği modeller uygun ve yeterli model olarak kabul edilmiştir.

$x=v{\cdot}t$ bağıntısından yola çıkarak Ayça ve Berrak'ın her biri için atadığı farklı değişkenlere göre problemi matematikselleştiren ve bunlar arasında ilişki ve orantı kurarak otele ulaşılması için geçen süreleri kıyaslayan 126 öğretmen adayından birinin ürettiği matematik modeli Şekil 25'teki gibidir:



Şekil 25. Koşu problemine ilişkin uygun ve yeterli cebirsel model örneği-I (ÖA19).

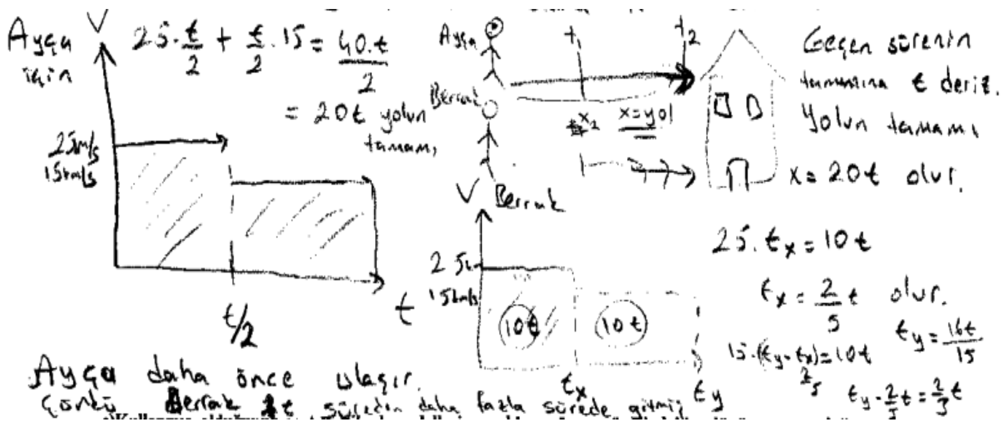
Şekil 25'teki matematik modeli incelenecek olunursa öğretmen adayının önce Ayça ve Berrak'ın hareketini kendi içersinde ele alarak $5t_1=3t_2$ ve $x_1+x_2=40x$ eşitliklerine ulaştığı ardından da bu hareketleri birbiri açısından değerlendirerek $x=25t_1=20t$ eşitliğinden $t_1=4t/3$ sonucuna ulaştığı görülmektedir. Bu durumda göstermektedir ki probleme uygun matematik modelinin üretilmesi için problemin sadece cebirsel olarak ifade edilmesi yeterli olmamakta bu cebirsel ifadelerin birbiri açısından bilişsel ve kavramsal olarak değerlendirilmesi gerekmektedir. Diğer taraftan uygun ve yeterli cebirsel model üreten bir diğer öğretmen adayının ürettiği aşağıdaki matematik modeli incelenecek olunursa bu öğretmen adayının $x=v{\cdot}t$ bağıntısı doğrudan uygulamaktan ziyade bu bağıntının hız, zaman, yol arasında tanımladığı orantısal ilişkiyi bilişsel açıdan yorumladığı ve bunu uygun cebirsel modeller ile desteklediği görülür.



Şekil 26. Koşu problemine ilişkin uygun ve yeterli cebirsel model örneği-II (ÖA39).

Şekil 26'da görüldüğü üzere öğretmen adayı yol, zaman, hız kavramları arasındaki orantıdan yararlanarak Berrak'ın yolun iki bölümünü alması için geçen süreleri 3*t* ve 5*t* olarak tanımlamakta ardından bu durumu Ayça'nın hızından ve zaman diliminden yola çıkarak ilk yarıda daha fazla yol alacağına dair geliştirdiği bilişsel modeli ile kıyaslamakta ve yeni bir sonuca ulaşmaktadır. Bu durum göstermektedir ki bilişsel modelleri ile iletişim halindeki kavramsal modeller yeni bilişsel modellerin üretilmesine imkân sağlamaktadır.

Diğer taraftan probleme ilişkin uygun ve yeterli model üreten öğretmen adaylarından 4'ü ise doğrudan yol=hız×zaman formülünü kullanmanın ötesinde Ayça ve Berrak için ayrı ayrı hız-zaman grafiğini çizmiş ve bu grafiğin alanından yararlanarak otele ulaşılması için geçen süreleri kıyaslayabilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin üretmiş olduğu matematik modeli aşağıdaki gibidir.

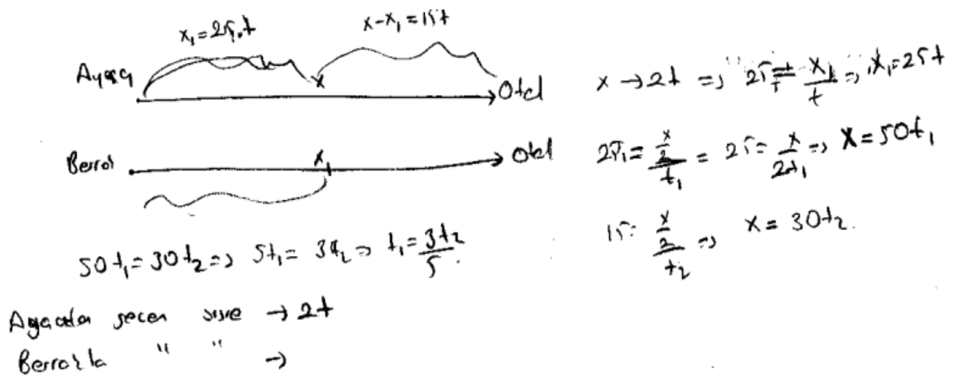


Şekil 27. Koşu problemine ilişkin uygun ve yeterli cebirsel-grafiksel model örneği (ÖA105).

Dikkat edilecek olunursa bu öğretmen adayı *x=v·t* bağıntısının çıkış noktasını oluşturan hız-zaman grafiğinin alanından yola çıkarak problemi matematikselleştirmiştir. Öğretmen adayının çizmiş olduğu bu grafiğin, bireyin probleme ilişkin bilişsel modellerini somutlaştıran görsel modelinin ötesinde kavramsal modeli daha anlamlı kıldığı ve gerek yolun farklı kısımları gerekse farklı zamanlar için Ayça ve Berrak'ın hareketini inceleme fırsatı verdiği söylenebilir.

Diğer taraftan problemi $x=v\cdot t$ bağıntısı yardımıyla matematikselleştirmelerine rağmen Ayça ve Berrak'ın hareketlerini birbirinden bağımsız ele alarak otele ulaşmaları için geçen süreleri kıyaslayamayanların (n=21) ya da bunlar arasında ilişki kurmadan yol ya da zaman yerine atadıkları spesifik değerler üzerinden çözüme ulaşmaya çalışan öğretmen adaylarının (n=15) ürettikleri modeller uygun ancak geliştirilmesi gereken modeller olarak değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adayları yol, hız, zaman arasındaki ilişkiyi $x=v\cdot t$ bağıntısı yardımıyla kavramsal olarak tanımlasa da bunları birbiri açısından değerlendirme ve ilişkilendirme noktasında bilişsel modelleri yetersiz kalmaktadır.

Ayça ve Berrak'ın hareketini yol ya da zaman yerine atadığı değişkenler cinsinden ifade eden ancak hareketleri bütün halinde değerlendiremediği için bu değişkenleri ilişkilendiremeyen ve geçen süreleri kıyaslayamayan öğretmen adaylarının (n=21) ürettiği cebirsel modeller kavramsal yönü itibariyle problem durumu için uygun olsa da bu modellerin bilişsel açıdan sınırlılıkları söz konusudur. Aşağıdaki matematik modeli incelenecek olunursa bu modelleri üreten öğretmen adayının atadığı değişkenleri ilişkilendirmede sıkıntı yaşadığı açıkça görülebilir.

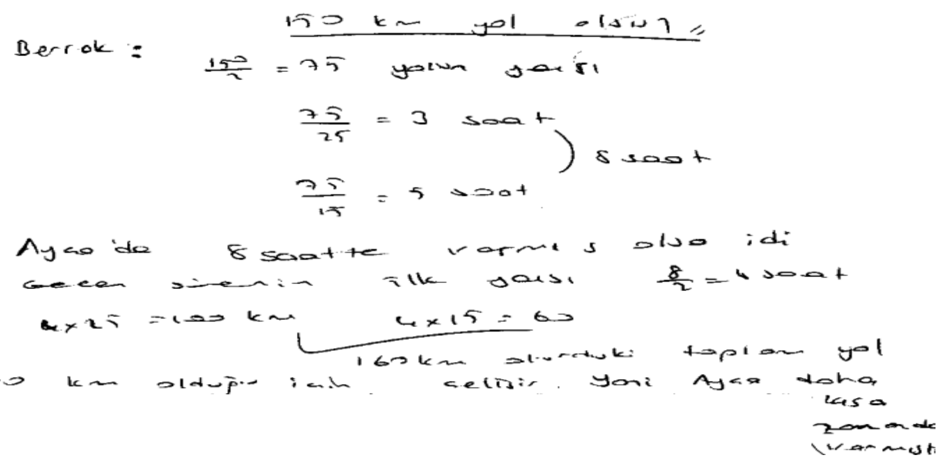


Şekil 28. Koşu problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken cebirsel model örneği (ÖA153).

Bu öğretmen adayı Ayça'nın otele ulaşması için geçen süreyi $2t$ olarak tanımlamış ve Berrak'ın yolun ilk ve ikinci yarısını aldığı süreler arasında $t_1=3t_2/5$ şeklinde bir ilişki kurmuş olmasına rağmen t, t_1, t_2 değişkenleri arasında ilişki kuramamıştır. Bu noktada gerek görsel modelden gerekse yol uzunluğu yerine atanan x

değişkeninden anlaşılacağı üzere öğretmen adayının Ayça ve Berrak'ın aldığı yolun aynı olduğunun farkında olduğu ancak bunlar arasındaki ilişkiyi sembolik olarak ifade edemediği görülmektedir. Bu durumdan bireylerin problemi uygun bir şekilde matematikselleştirebilmesi için probleme ilişkin bilişsel modellere sahip olmasının tek başına yeterli olmayacağı, sahip oldukları bilişsel modelleri kullandıkları kavramsal modeller ile ilişkilendirerek probleme uygun olacak şekilde düzenlemesi gerektiği sonucunu çıkarabiliriz.

Diğer taraftan yol ya da zaman yerine atadığı sayısal değerlerden yola çıkarak $x=v\cdot t$ bağıntısı yardımıyla sonuca ulaşmaya çalışan öğretmen adaylarının ürettiği aritmetiksel modeller de uygun ancak geliştirilmesi gereken model kapsamında ele alınmıştır. Çünkü bu öğretmen adaylarının ürettiği aritmetiksel modeller değişkenler arası ilişki kurulmasının ve bunların sembolik düzeyde kıyaslanmasının ötesinde doğrudan $x=v\cdot t$ bağıntısının uygulanmasına ve elde edilen sonuçların karşılaştırılmasına dayanmaktadır. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği model aşağıdaki gibidir:



Şekil 29. Koşu problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel model örneği (ÖA30).

Şekilden anlaşılacağı üzere öğretmen adayı probleme yol, zaman, hız kavramları arası ilişkileri irdelemeden doğrudan $x=v\cdot t$ bağıntısının uygulaması olarak yaklaşmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayının ürettiği matematik modelinin çözüm odaklı olduğu ve kavramsal modelin uygulamasından öte gitmediği söylenebilir.

Görüşmeler sırasında öğretmen adaylarının araştırmacının soruları neticesinde mevcut modellerini geliştirerek uygun ve yeterli modeller ürettiği tespit edilmiştir (mülakatlardan elde edilen bulgular için bakınız Tablo 6). Bu kapsamda Elif ve Buket isimli öğretmen adayları yazılı veri toplama aracında ürettikleri cebirsel modeli mülakat esnasında grafik ile zenginleştirirken Engin isimli öğretmen adayı ise problemi yanlış anladığı için yazılı sınav esnasında model üretemezken mülakat sırasında bilişsel modellerini düzenleyerek uygun ve yeterli cebirsel model ortaya koyabilmiştir.

Tablo 6. Öğretmen adaylarının koşu problemi için ürettiği matematik modelleri.

Model	ARZU	BUKET	ELİF	ÇETİN	ENGİN
Uygun ve Yeterli Modeller	C.M	C.G.M	C.G.M	C.M	C.M

Kısaltmalar: C.G.M: Cebirsel-Grafiksel Model, **C.M:** Cebirsel Model.

Diğer taraftan mülakatlar sırasında öğretmen adaylarından Ayça ve Berrak'ın otele ulaşmaları için geçen süreleri kıyaslamasının ötesinde bunların hareketini birbiri açısından değerlendirmesi istenmiştir. Yöneltilen sorular karşısında öğretmen adaylarının bilişsel ve kavramsal modellerini yeniden gözden geçirme ve yorumlama ihtiyacı hissettikleri gözlenmiştir. Elif isimli öğretmen adayı ile yürütülen mülakattan bir kesit aşağıda sunulmuştur. Bu diyalog incelenecek olunursa öğretmen adayının kavramsal modellerinden hareketle bilişsel modellerini yeniden düzenlediği dikkat çekmektedir (**Diyalog 4):**

………….

Araştırmacı: … Ayça ve Berrak'ı bütüncül halde değerlendirebilir misin? Sadece Berrak'ın yolun iki parçası için olan zamanlarını değil de Ayça'nın zamanları ile olan ilişkisini de kıyaslayabilir miyiz sence?

Elif: Kıyaslayabiliriz tabii ki. Berrak x yolunu bitirdiğinde Ayça'nın da x kadar yol alması gerekiyor. Ama x noktası tam orta (duraksar). Yok, yapamadım, düşünemedim şuan.

Araştırmacı: Olabilir toparlamaya çalışalım. O halde Berrak orta noktasına geldiğinde Ayça'da orta noktası yer kadar gelmeli mi? Ayça daha fazlasını mı gidecek yoksa daha eksiğini mi?

Elif: Biraz daha fazlasını gidecek. Çünkü biz biliyoruz ki 25km hızla *t* sürede aldığı yol 15km hızla *t* sürede aldığı yoldan daha fazladır.

……..

Araştırmacı: Evet sözel olarak söyledik ama matematiksel olarak kıyasladığında ne yapabiliriz? Öyle bir model üret ki hem sürelerin kıyaslamasını görelim hem aldıkları yolların oranını. Yapabilir miyiz acaba.

Elif: Bilmiyorum. Yapacak olursak grafikten ya da sütun olarak ilerleyebiliriz.

……..

Elif: Hız-zaman grafiği yapalım. Aldıkları yol eşit herhangi bir kesişme alsak.

Araştırmacı: Bizim için önemli olan ne kadar sürede oraya ulaştıkları değil mi?

Elif: Evet. O zaman birisi 25 ile ulaşsa bu eğimi olması gerekiyor.

Araştırmacı: Ayça geçen sürenin ilk yarısını, Berrak ise yolun ilk yarısını.

Elif: Geçen süreye *6t* desek. *3t*'de *x* yolunu aldıysa *6t*'ye gidene kadar da işte. Birincinin eğimi 25 diyeceksem *75t*, diğeri 15 olacaksa 45 daha *120t*.

Araştırmacı: Bu Ayça için oldu. Berrak için nasıl yapacağım. Berrak için yolun yarısını.

Elif: Burada kesiştiklerini almıştık *120t* idi. Bunun yarısı *60t*. Öncelikle bunu alırız.

Araştırmacı: Berrak'ın ilk *60t'ye* gelinceye kadar olan hızı ne kadardı?

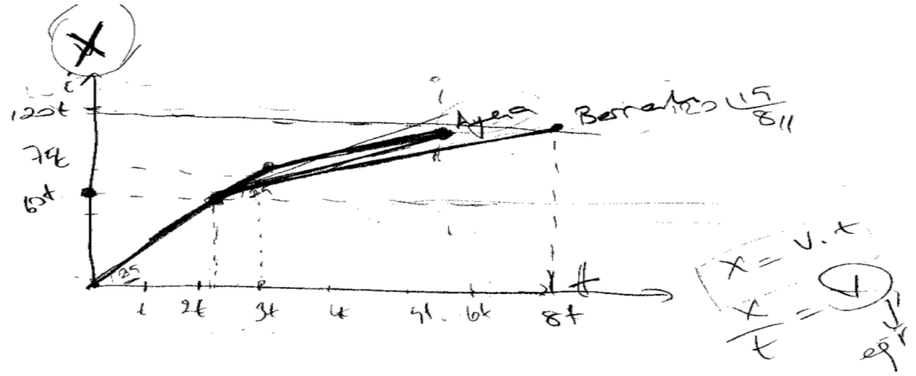
Elif: *x*'e şimdi *60t* dedik. 25 ile gidiyorsa, eğimi 25 olacak şekilde. (Ayça'nın grafiğini göstererek) Bu 25 eğimine sahipti birincisi. (Şekil 30'daki gibi grafiği çizer)

……………

Elif: Grafiği çizerken sadece bu bağıntıyı kullanıyoruz. Hoş işlemi yaparken de bu bağıntı ve daha sonra denklemlerin karşılaştırmasını yaptık. Daha sonra görmek adına işlemde zor olsa da grafikte baktığımız zaman aynı olacak. Fakat nerede hangisinin daha hızlı hareket ettiğini çıkarıyoruz.

Araştırmacı: Ben sana *3t* zamanda her ikisi de ne kadar yoldadır desem?

Elif: Cebirselde zor. Grafikte hepsini gösteririz. Örneğin *2,5t* sürede Ayça'nın önce olduğunu gösterebiliriz. Hangi noktaya kadar aynı ilerlediklerini görebiliriz.



Şekil 30. Koşu problemi için Elif tarafından üretilen matematik modeli.

Elif başlangıçta her ne kadar "*Berrak x yolunu bitirdiğinde Ayça'nın da x kadar yol alması gerekiyor.*" şeklinde bir cümle kursa da bu ifadenin doğruluğundan emin olamamıştır. Ancak daha sonra $x=v{\cdot}t$ bağıntısının tanımladığı orantısal ilişkiden hareketle Ayça'nın 25km/sa hızla t sürede alacağı yolun 15km/sa hızla t sürede alacağı yoldan daha fazla olacağını göz önünde bulundurmuş ve Ayça'nın t sürede yolun yarısından daha fazlasını gideceğine karar vermiştir. Dolayısıyla bireyin kullandığı kavramsal modelin ve bu modelin tanımladığı ilişkilerin bilişsel açıdan düzenlenmesinin mevcut bilişsel modellerin de gözden geçirilmesine ve sınanmasına imkân tanıdığı söylenebilir. Nitekim birey, tüm yönleri ile bilişsel modellerinin farkında olamayacağı (Franco ve Colinvaux, 2000; Akt. Ornek, 2008) için kullanılan kavramsal modellerin doğrudan uygulanmasının ötesinde bu kavramsal modellerin ve bunlara has özelliklerin problem durumu açısından irdelenmesi bireyin bilişsel modellerini geliştirmesine katkı sağlayabilir. Örneğin probleme ilişkin uygun ve yeterli cebirsel model üreten Elif ile yürütülen mülakatın devamı incelendiğinde öğretmen adayının koşu problemini yol-zaman grafiği yardımıyla modellemeye çalıştığı görülmektedir. Bu grafiği oluştururken ise öğretmen adayının $x=v{\cdot}t$ bağıntısını doğrudan uygulamanın ötesinde bunu eğim kavramı ile ilişkilendirdiği dikkat çekmektedir. Bu noktada öğretmen adayının *"Fakat nerede hangisinin daha hızlı hareket ettiğini çıkarıyoruz"* ya da *"Grafikte hepsini gösteririz. Örneğin 2,5t sürede Ayça'nın önce olduğunu gösterebiliriz. Hangi noktaya kadar aynı ilerlediklerini görebiliriz"* şeklindeki cümlelerinden yola çıkarak öğretmen adayının ürettiği cebirsel modelini eğim ile ilişkilendirmesinin ve grafik yardımıyla zenginleştirmesinin bilişsel modellerini de geliştirdiği sonucuna varılabilir.

Diğer taraftan başlangıçta problemi yanlış anladığı için probleme ilişkin matematik modeli üretemeyen Çetin mülakat esnasında bu durumun farkına vararak uygun ve yeterli cebirsel model ortaya koyabilmiştir. Ancak Ayça ve Berrak'ın hareketini birbiri açısından değerlendirmesi istendiğinde öğretmen adayı Elif de olduğu gibi Çetin'in de kavramsal modelleri doğrultusunda bilişsel modellerini tekrar gözden geçirdiği dikkat çekmektedir. Bu öğretmen adayı ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir **(Diyalog 5):**

…………………

Araştırmacı: … Ayça ve Berrak'ın hareketleri iki kısımdan oluşuyor ya mesela bu hareketlerinin ilk kısımlarını kıyaslamak istesem hangi noktaya kadar ikisi beraber gitmiş sonra ayrılmıştır. Hangi noktada Ayça Berrak'tan öne geçmiştir ya da Berrak Ayça'dan öne geçmiştir? Sadece kim daha önce ulaşır ya da ulaşmaz şeklinde değil de?

Çetin: (düşünür). Belli bir noktaya kadar birlikte gitmişlerdir (duraksar) diyemeyiz. (tereddütle)

Araştırmacı: Ya da gitmemişlerdir. Hani kıyasladığımızda Ayça daha önce ulaşacağı sonucuna vardın hangi noktada Ayça Berrak'ın önüne geçmiştir?

Çetin: Yine kritik bir zaman noktası var. Hani belli bir süreye kadar geriye ya da bir anda yan yana geldikleri bir nokta da var ama.

Araştırmacı: Bunu nasıl tespit edebiliriz. Yol=hız×zaman bağıntısı bize bunu verebilir mi?

Çetin: Veremez.

……..

Araştırmacı: Şimdi Ayça sürenin ilk yarısını 25 ile diğer yarısını 15 km ile alıyormuş. Ayça hareketinin hangi parçasından daha fazla yol almıştır sence?

Çetin: İlk yarısında.

Araştırmacı: Bunu nasıl gösterebilirsin görsel model üzerinde.

Çetin: Yani hızının birine 3*v* desem diğerine 5*v* desem dolayısıyla hızlarıyla doğru orantılı yol alacaklar. Yol 5*x* ve 3*x* şeklinde olacak.(Şekil 31'deki gibi problemi görselleştirir.)

Araştırmacı: Berrak için baktığımızda.

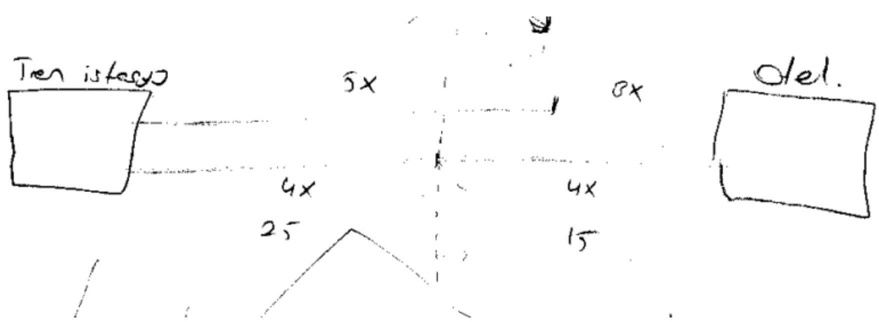
Çetin: Berrak yolun ilk yarısını dediği için 8*x* çıkıyor. 4*x*'e kadar 25 ile gitmiş. Yani aslında her iki aşmada da aynı yolu almış ama süreleri değişmiş.

Araştırmacı: Ayça ve Berrak'ın hareketini iki parça halinde düşündüğümüzde ilk parçada kim daha fazla mesafe gitmiştir ya da hangi noktaya kadar beraber gitmişlerdir?

Çetin: 4*x* noktasından sonra Ayça öne geçmiş.

Araştırmacı: Çünkü neden?

Çetin: Çünkü *x* gittikten sonra Berrak hızını 15'e düşürmüş ama Ayça düşürmemiş 25 ile gidiyor.

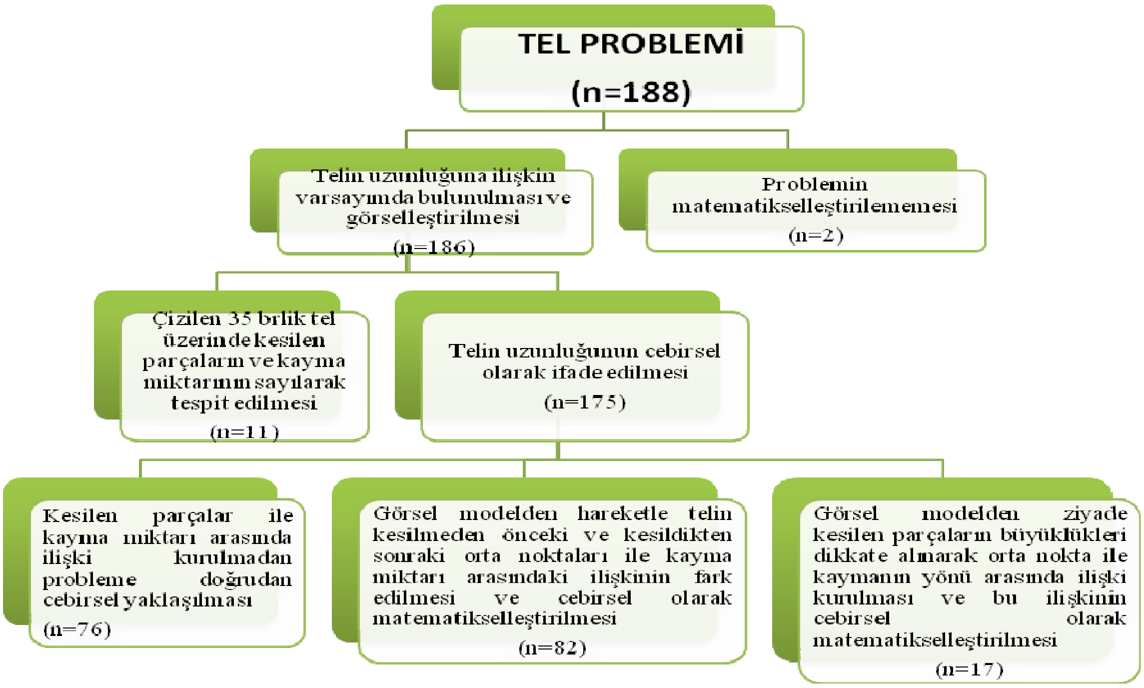


Şekil 31. Koşu problemi için Çetin tarafından üretilen matematik modeli.

Çetin $x=v{\cdot}t$ bağıntısının tanımladığı orantısal ilişkiden yola çıkarak Ayça'nın gittiği yolu *5x*'e *3x*; Berrak'ın gittiği yolu ise *4x*'e *4x* şeklinde tanımlamış ve bunları görsel model üzerinde göstermiştir. Bu noktada öğretmen adayının oluşturduğu görsel modelin bilişsel modellerin somutlaştırılmış hali olduğu düşünülebilir. Öğretmen adayı düzenlediği bu görsel modeli uygun ve yeterli cebirsel ifadeler ile destekleyerek Berrak'ın hızını 15 km/sa 'e düşürdüğü anda Ayça'nın hâla 25 km/sa hızla ilerlediğinin farkına varmış ve yolun yarısından (*4x* noktasından) sonra Ayça'nın öne geçeceğini keşfetmiştir. Dolaysıyla bireyin bilişsel modellerini uygun kavramsal modeller ile desteklemesinin yeni bilişsel modellerin üretilmesine imkân sağladığı söylenebilir.

4.3. TEL PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Öğretmen adayının bu probleme uygun matematik modeli üretmesi için telin kesilmeden önceki ve sonraki orta noktalarını birbirinden bağımsız olarak cebirsel bir şekilde ele almasının ötesinde kesilen parçaların orta noktayı nasıl etkileyeceğini kestirmesi ve bunu matematikselleştirmesi gerekmektedir. Sorunun çözümü için telin uzunluğunun bulunmasından ziyade telden kesilen parçaların orta noktayı hangi yönde ve ne kadar etkileyeceğinin kestirilmesi önem kazanmaktadır. Yazılı sınavda öğretmen adaylarının bu problemi matematikselleştirmek adına sergiledikleri düşünceler ve kullandıkları kavramsal araçların özeti Şekil 32'deki gibi sunulmuştur:



Şekil 32. Öğretmen adaylarının tel problemini matematikselleştirme adımları.

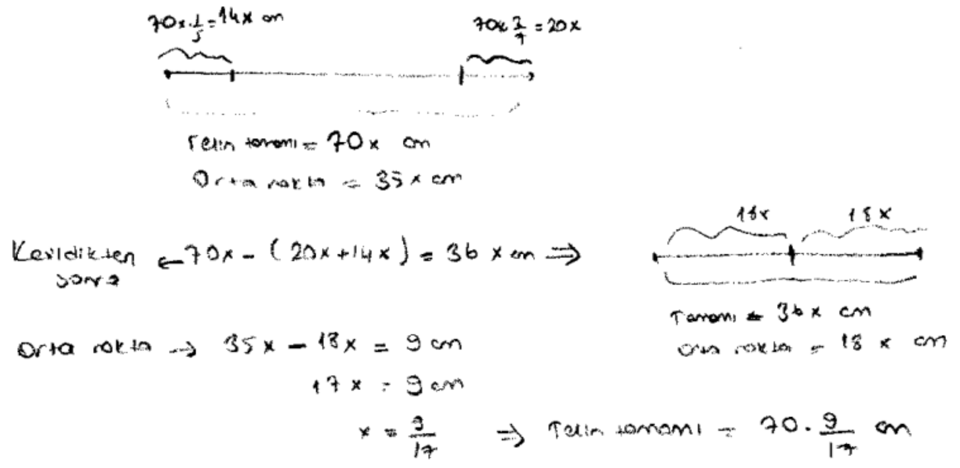
Şekil 32'den anlaşılacağı üzere 2 öğretmen adayı problemi matematikselleştiremezken 186 öğretmen adayı telin uzunluğuna ilişkin varsayımda bulunarak problemi görselleştirmiştir. Öğretmen adayı telin uzunluğunu ister 35 birim olarak belirlesin ister cebirsel olarak ifade etsin sorunun çözümü için kesilen parçalar ile kaymanın yönü ve miktarı arasındaki ilişkinin bilişsel ve kavramsal açıdan değerlendirmesi önem arz etmektedir. Sonuçlar 17 öğretmen adayının sayılar arası ilişkilerden yola çıkarak, 11 öğretmen adayının çizdiği 35 birimlik tel üzerinde kesilen parçaları sayarak, 82 öğretmen adayının da görsel modeli üzerinde telin kesilmeden önceki ve sonraki durumlarını ilişkilendirerek kayma miktarı ve yönünü belirlediğini göstermektedir. Görsel modelini sadece problemi somutlaştırmak adına ortaya koyan ve bu modeli bilişsel açıdan sürece katmayan 76 öğretmen adayının ise telin kesilmeden önceki ve sonraki durumunu salt cebir aracılığı ile modellediği görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının veriler arası ilişkileri sorgulamadan sonuç eksenli bir problem çözme yaklaşımı sergiledikleri söylenebilir.

Diğer taraftan öğretmen adaylarının ürettiği matematik modelleri bilişsel ve kavramsal boyutları göz önünde bulundurularak uygunluk ve yeterlilik kriterleri çerçevesinde analiz edilmiş ve sonuçlar Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7. Öğretmen adaylarının tel probleminin çözümü için ürettiği matematik modellerinin uygunluk ve yeterlilik kriterlerine göre sınıflandırılması**.**

UYGUNLUK VE YETERLİLİK	KULLANILAN KAVRAMSAL ARAÇLAR	PROBLEMİ MATEMATİKSELLEŞTİRME SÜRECİ	Frekans
UYGUN VE YETERLİ MODELLER	**Cebirsel**	Görsel modelden hareketle telin kesilmeden önceki ve kesildikten sonraki orta noktaları ile kayma miktarı arasındaki ilişkinin fark edilmesi ve cebirsel olarak matematikselleştirilmesi	n= 82
	Aritmetiksel-Cebirsel	Görsel modelden ziyade kesilen parçaların büyüklükleri dikkate alınarak orta nokta ile kaymanın yönü arasında ilişki kurulması ve bu ilişkinin cebirsel olarak matematikselleştirilmesi	n=17
UYGUN ANCAK GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODELLER	**Aritmetiksel**	Çizilen 35 brlik tel üzerinde kesilen parçaların ve kayma miktarının sayılarak tespit edilmesi	n=11
UYGUN OLMAYAN MODELLER	**Probleme doğrudan cebirsel yaklaşılması**	Kesilen parçalar ile kayma miktarı ve yönü arasında ilişki kurulmadan probleme doğrudan cebirsel yaklaşılması	n= 76
MATEMATİK MODELİ YOK	**Problemin anlaşılamaması**	Probleme ilişkin hiçbir yorum, düşünce ya da modelin üretilememesi	n=2

Tablo 7'den anlaşılacağı üzere araştırmaya katılan 188 öğretmen adayından 99'u probleme ilişkin uygun ve yeterli matematik modeli üretirken 11'i uygun ancak geliştirilmesi gereken model üretebilmiştir. Diğer taraftan 2 öğretmen adayı probleme ilişkin hiçbir düşünce, yorum ya da model üretemezken 76'sı telin kesilmeden önceki ve sonraki durumları arasında ilişki kurmadan probleme salt cebirsel yaklaştığı için uygun matematik modeli ortaya koyamamıştır. Bu öğretmen adaylarından birinin modeli Şekil 33'teki gibidir.

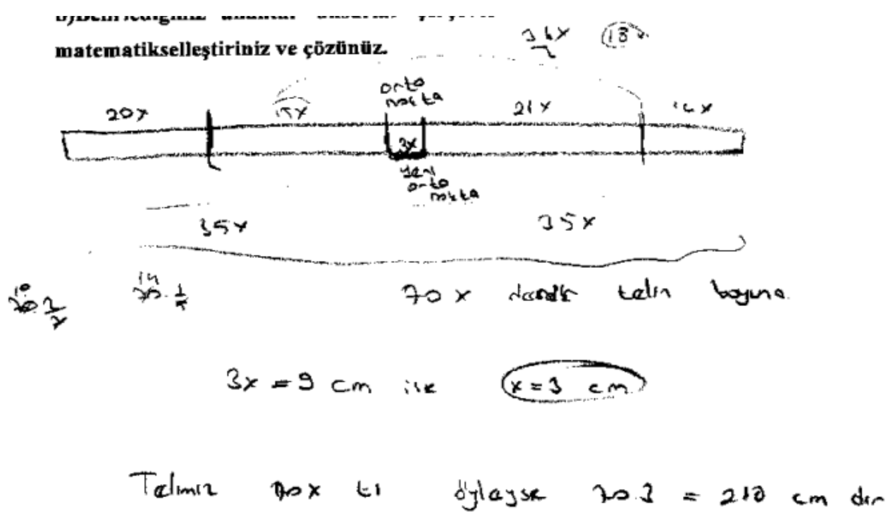


Şekil 33. Tel problemine ilişkin uygun olmayan cebirsel model örneği (ÖA28).

Bu öğretmen adayı problemi görselleştirmiş, ancak ürettiği görsel model üzerinde düşünerek orta noktalar arası ilişkiyi bilişsel açıdan yapılandıramamıştır. Telin farklı uçlarından kesildiği gerçeğini dikkate almamıştır. Geçmişte çözdüğü benzer problemlerden hareketle orta noktadaki kaymayı telin aynı ucundan kesilen parçalara göre değerlendirmiş olabilir.

Öğretmen adaylarının probleme ilişkin uygun ve yeterli matematik modeli üretebilmesi için telden kesilen parçaların orta noktayı hangi yönde, ne kadar kaydıracağını kestirmesi gerekmektedir. Bu bağlamda telin uzunluğunu cebirsel olarak ifade eden ve ürettikleri görsel modellerden hareketle bu cebirsel ifadelerini düzenleyen öğretmen adayları (n=82) ile kesilen parçaların büyüklükleri ve yönleri arasında ilişki kurarak kaymanın yönünü ve miktarını belirleyen öğretmen adaylarının (n=17) ürettiği modeller uygun ve yeterli matematik modelleri kapsamında değerlendirilmiştir.

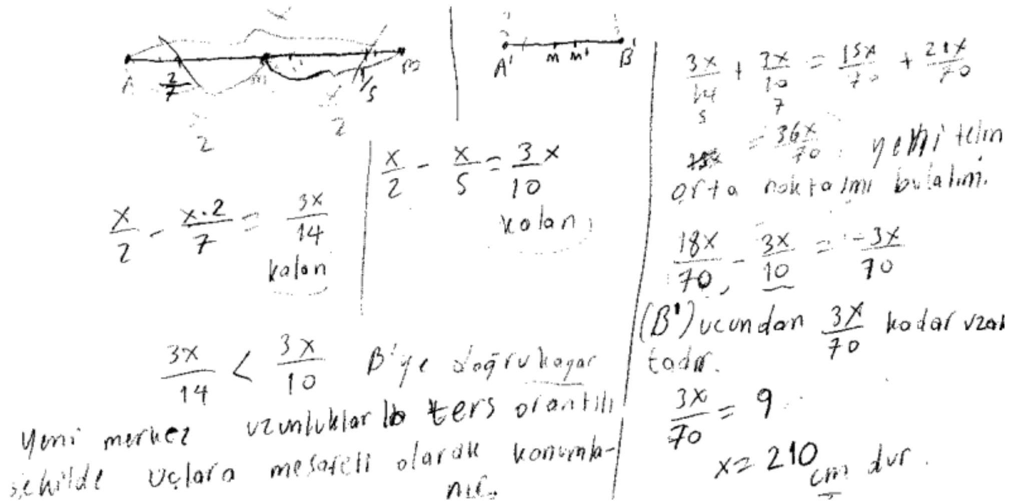
82 öğretmen adayı ürettiği görsel modeller üzerinde çalışarak telin uzunluğunu cebirsel olarak ifade etmiş ve kesilen parçalara göre orta noktayı hem görsel hem de cebirsel olarak modellemiştir. Bu öğretmen adayları kayma miktarı, orta nokta ve kesilen parçalar arası ilişkileri bilişsel ve kavramsal açıdan ele almış ve probleme ilişkin uygun ve yeterli cebirsel modeller üretebilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği matematik modeli Şekil 34'teki gibidir.



Şekil 34. Tel problemine ilişkin uygun ve yeterli cebirsel model örneği (ÖA5).

Öğretmen adayının ortaya koyduğu görsel model bilişsel modellerinin bir parçası olarak düşünülürse bu öğretmen adayının bilişsel modellerini uygun cebirsel ifadelerle desteklemenin ötesinde bu cebirsel ifadeleri görsel modeli üzerinde yaptığı değişikliklere göre yeniden düzenlediği görülmektedir. Nitekim problem durumu ile karşı karşıya kalan birey çözüm için bir başlangıç modeli üretir; süreç içerisinde ise gerek geçmişten getirdiği gerekse problem hikâyesinde verilen bilgiler ışığında başlangıç modelini sürekli geliştirerek sonuca ulaşmaya çalışır (Jonassen v.d., 2005). Bu öğretmen adayı da başlangıç modeli olarak ürettiği görsel modelini ve telin uzunluğu ile kesilen parçalar yerine atadığı cebirsel ifadeleri problem ifadesine uygun olacak şekilde düzenleyerek ve ilişkilendirerek problemi matematikselleştirmiştir.

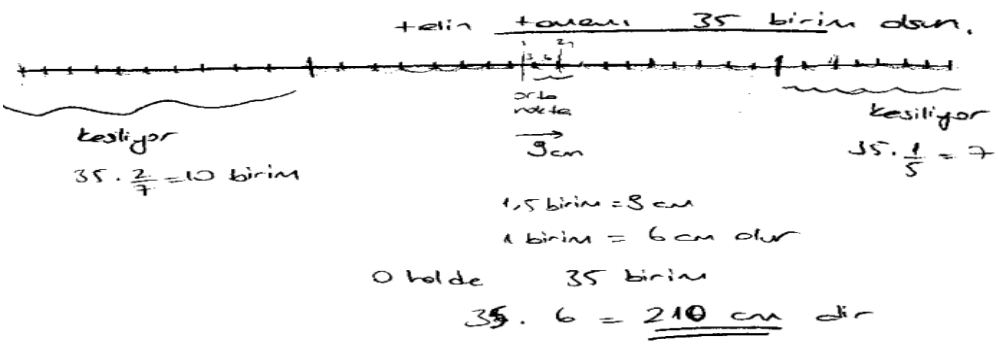
Uygun ve yeterli matematik modeli üreten öğretmen adaylarından 17'si ise kayma miktarını ve yönünü görsel modelden ziyade kesilen parçaların büyüklüklerini ve yönünü dikkate alarak cebirselleştirmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği model Şekil 35'teki gibidir.



Şekil 35. Tel problemine ilişkin uygun ve yeterli aritmetiksel cebirsel model örneği (ÖA3).

Bu öğretmen adayı telin uzunluğunu x olarak tanımlamış ve teli iki parça halinde düşünerek kesilen parçaları telin yarısından çıkarmıştır. Bu sayede öğretmen adayı telin farklı uçlarından kesildiğinde başlangıçtaki orta noktasına ($x/2$) göre bir tarafında telin $3x/14$'ünün, diğer tarafında ise $3x/10$'unun kalacağını keşfetmiştir. $3x/14 < 3x/10$ olduğu için yani telin uçlarından kesildiğinde A tarafında kalan parça B tarafına nazaran daha az olduğu için yeni orta noktanın B'ye doğru kayacağını fark etmiş ve sağ taraftaki gibi görselleştirmiştir. Bu durum öğretmen adayının sayılar arası ilişkilerden yararlanarak probleme ilişkin yeni bilişsel modeller geliştirdiğini göstermektedir. Ardından ise bu yeni bilişsel modelleri doğrultusunda kayma miktarını (M ve M$'$ noktaları arası uzaklığı), $\left|MB'\right| = 3x/10$ ve $M' = 18x/70$ uzaklıklarını birbirinden çıkararak tespit etmiştir. Bu öğretmen adayı uygun ve yeterli cebirsel model üreten öğretmen adaylarının yaptığı gibi telin uzunluğuna ve orta noktasına ilişkin tanımladığı cebirsel ifadeleri, doğrudan görsel modeli üzerinde kesilen parçalara göre hareket ettirerek düzenlememiştir. Bunun yerine öncelikle kalan parçaların büyüklüklerini kıyaslayarak orta noktanın hangi yönde kayacağını tespit etmiş ardından da geliştirdiği yeni bilişsel modellerinden hareketle kayma miktarına uygun cebirsel ifadeyi düzenlemiştir.

Diğer taraftan çizdikleri 35 birimlik tel üzerinde kesilen parçaları kaydırarak kayma miktarını ve buradan hareketle telin uzunluğunu bulan öğretmen adaylarının ürettiği modeller uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel model kapsamında ele alınmıştır. Çünkü bu öğretmen adaylarının ürettiği aritmetiksel model kayma miktarı ve kesilen parçalar arasındaki ilişkinin benzer durumlar için genellenmesine ve yeniden düzenlenmesine imkân tanımamaktadır. Örneğin telin uzunluğunun daha büyük birimlerle ifade edilmesi gereken durumlar için görsel modelin oluşturulması noktasında sıkıntılar yaşanabilir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği model aşağıdaki gibidir.



Şekil 36. Tel problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel model örneği (ÖA4).

Alıntıdan anlaşılacağı üzere öğretmen adayı çizdiği 35 birimlik telin bir ucundan 2/7'sini yani 10 birimini; diğer ucundan da 1/5'ini yani 7 birimini keserek kalan telin yeni orta noktasının 1,5 birim sağa doğru kaydığını tespit etmiştir. Bu öğretmen adayının ürettiği aritmetiksel model, uygun ve yeterli cebirsel model de olduğu gibi kesilen parçaların görsel model üzerinde hareket ettirilmesine ve buradan hareketle kayma miktarının belirlenmesine dayanmaktadır. Ancak uygun ve yeterli cebirsel modelden farklı olarak görsel model üzerinde tanımladığı cebirsel ifadelerin hem bilişsel hem kavramsal açıdan düzenlenmesinin yerine görsel model üzerindeki birimler sayılmakta ve kayma miktarı belirlenmektedir. Bu noktada öğretmen adayının bilişsel modellerini görsel modeli ile sınırladığı ve kesilen parçalar ile orta nokta arasındaki ilişkinin irdelenmesi açısından uygun ve yeterli matematik modellerine nazaran daha temel düzeyde bir matematik modeli ortaya koyduğu söylenebilir. Nitekim bu durumu destekler nitelikte bulgulara öğretmen adayları ile yürütülen mülakatlar sonucunda da ulaşılmıştır. Bu bağlamda mülakatlar esnasında öğretmen adaylarının ne tür matematik modelleri ürettiğine yer verilmesi ve bu matematik modellerinin geliştirilmesine yön veren bilişsel ve kavramsal modellerin tespit edilmesi yerinde olacaktır.

Yürütülen mülakatlar esnasında öğretmen adaylarının tel problemine ilişkin ürettiği matematik modelleri Tablo 8'de sunulmaktadır. Tabloda görüldüğü üzere katılımcılardan üç tanesi aritmetiksel ve cebirsel temsiller kullanarak uygun ve yeterli modeller üretirken, bir tanesi uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel bir model üretmiş, bir öğretmen adayı ise uygun olmayan cebirsel bir model ortaya koymuştur.

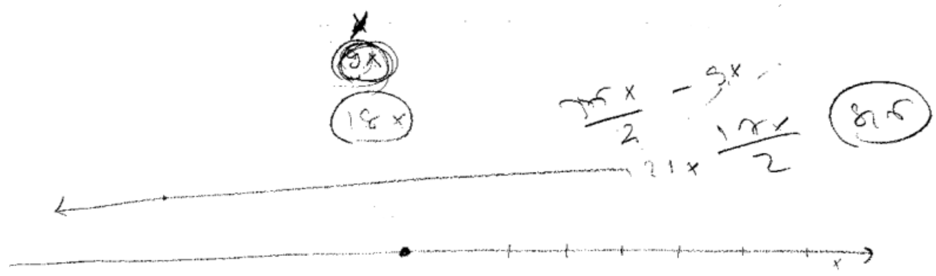
Tablo 8. Öğretmen adaylarının tel problemi için ürettiği matematik modelleri.

Model	ARZU	BUKET	ELİF	ÇETİN	ENGİN
Uygun ve Yeterli Modeller	A.C.M		A.C.M	A.C.M	
Uygun Ancak Geliştirilmesi Gereken Modeller		A.M			
Uygun Olmayan Model					C.M

Kısaltmalar: A.C.M: Aritmetiksel-Cebirsel Model, **C.M:** Cebirsel Model, **A.M:** Aritmetiksel Model.

Görüşmeler sırasında bazı öğretmen adaylarının araştırmacının soruları üzerine bilişsel modellerini yeniden düzenlediği ve yazılı sınavda ürettiği modellerden farklı matematik modelleri geliştirdikleri görülmüştür. Örneğin; Buket ve Çetin isimli öğretmen adayları yazılı sınavda uygun olmayan cebirsel model ortaya koysa da görüşmeler sırasında geliştirdikleri bilişsel modellerini uygun ve yeterli matematik modelleri ile desteklemişlerdir. Benzer şekilde Arzu yazılı sınavda ürettiği uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel modelini görüşme esnasında yeniden düzenleyerek problem için uygun ve yeterli matematik modeli ortaya koyabilmiştir.

Diğer taraftan görüşmeler esnasında öğretmen adaylarından telin uzunluğunu bulmanın ötesinde kesilen parçalar ile kayma miktarı arasındaki ilişkiyi tespit etmeleri istenmiş ve bu doğrultuda öğretmen adaylarının gerek bilişsel gerek de kavramsal modellerini yeniden düzenledikleri gözlemlenmiştir. Örneğin ilk etapta uygun olmayan cebirsel model ortaya koyan Buket ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir **(Diyalog 6):**



Şekil 37: Tel problemi için Buket tarafından ortaya konan uygun olmayan matematik modeli.

……………………

Buket: (Soruyu tekrar okur). Telin ilk haline göre düşünüp keseceğiz.

Araştırmacı: Bunlar nasıl etkiler orta noktasını sence? Nasıl düşünmüştün sen?

Buket: Ben telin uzunluğu *35x* dedim. (Tel çizer ve orta noktayı gösterir)

Araştırmacı: Sonra 2/7si bir ucundan kesiliyormuş, Ne kadara denk geliyor?

Buket: *10x* bu taraftan kestiğimi düşünüyüm. Diğer taraftan da 7x kesiyim. Toplam *17x* kadar kesmiş olacağım. Telin tamamı 35x di, geriye kalan 18x kadar kalacak.

Araştırmacı: Peki, bu kesilen parçalar ile kayma arasında ilişki var mıdır?

Buket: (Düşünür). Tamamı 35x idi, orta noktası $35x/2$. Burada *9x*. (Düşünür)

Araştırmacı: Şöyle diyelim: kayma hangi yöne doğru olur?

Buket: (Tel üzerinde göstererek) *10x* bu taraftan kestim, *7x* diğer taraftan kestim. (Düşünür). (sağ tarafı göstererek) Bu taraftan daha fazla kesmiş oldum, dolayısıyla kayma ters yönde olacak.

Araştırmacı: Peki kesilen parçaları da göz önünde bulundurursan ne kadarlık bir kayma olur sence?

Buket: Onun yerini tam olarak belirlemek gerekiyor işte.

Araştırmacı: Nasıl belirleyebiliriz sence? İlk başta dedin ki kestiğim kısımda orta noktası *9x*'e karşılık gelecek, kesmeden önce de $35x/2$ 'den 17,5 denk gelecek. O halde bu ikisi arasındaki fark kadar mı kayma olacaktır sence?

……….

Buket: Genelde bu soruları şekil üzerinde yaparım. Burada *35x* vermesi onu çizmesi sıkıntı ama.

Araştırmacı: Tamam şekil üzerinden yapalım.

Buket: (35brlik tel çizmeye başlar)

Araştırmacı: Şekil bu noktada ne sağlıyor?

Buket: Kolaylık sağlıyor. Ben öyle daha rahat yapıyorum. (Aşağıdaki gibi 35brlik tel çizer, orta noktasını gösterir, kesilen parçaları gösterir. Kalan parçaların orta noktasını gösterir)

Araştırmacı: Ne kadarlık yer kaydı?

Buket: (Tel üzerindeki orta noktalar arası birimi sayar) 2,5. İlkinde çıkarsam *17,5x-9x=8,5x* kalıyor.

Araştırmacı: Hangisi sence daha doğru?

Buket: (Çizdiği teli göstererek) Bence bu daha doğru.

……………………….

Dikkat edilecek olunursa görüşme sırasında Buket kayma miktarının, telin kesilmeden önceki ve sonraki orta noktaları arasındaki farka eşit olup olmayacağı konusunda tereddüt yaşamıştır. '*10x bu taraftan kestim, 7x diğer taraftan kestim. Bu taraftan daha fazla kesmiş oldum, dolayısıyla kayma ters yönde olacak.*' şeklindeki cümlesinden de anlaşılacağı üzere Buket'in kesilen parçaların büyüklüklerini dikkate almış ve kaymanın yönünü belirlemiştir. Dolayısıyla kavramsal modellerin bilişsel açıdan yorumlanmasının, yeni bilişsel modellerin üretilmesine imkân sağladığı söylenebilir. Ancak öğretmen adayı kesilen parçalara karşılık gelen cebirsel ifadelerin orta noktayı ne kadar kaydırabileceğini kestiremediği için kayma miktarını belirleyememiştir. Bu durumdan öğretmen adayının bilişsel modellerindeki sınırlılığın kavramsal modellerini etkilediği, hatta bununda ötesinde matematik modellerinde sınırlılığına yol açtığı anlaşılmaktadır. Bu noktada öğretmen adayı her ne kadar bu sınırlılığı aşmak adına çizdiği 35 birimlik tel üzerinde kesilen parçaları ve orta noktaları gösterse de çizimden kaynaklanan yanlışlık sebebiyle kayma miktarını 2,5 birim olarak belirlemiştir.

Diğer taraftan öğretmen adayı Çetin ile yürütülen mülakattan yapılan aşağıdaki alıntı incelendiğinde öğretmen adayının bilişsel modellerini probleme uygun olacak şekilde düzenlemekte sıkıntı çektiği ve bu doğrultuda problemi matematikselleştiremediği görülmektedir **(Diyalog 7):**

………………..

Çetin: Tek taraftan kesiyorsak onun yarısı kadar kestiğimiz yönün tersine kayması lazım. Onun dışında iki taraftan bir daha kestiğimizde yine yönde kayması lazım. Kestiğimizin yarısı kadar.

…………….

Çetin: Şimdi 70x demişim önce 2/7'sini kesmişim. Telin uzunluğu *50x* kalmış. Telin ilk orta noktası *35x* idi. Sonra *50x* kaldığındaki orta noktası *25x* oldu. Ben bunu sol tarafından kestim (Aşağıdaki görsel model üzerinde göstererek) bunu sağ yönde *35x* iken kestiğimde şu noktasının 25’e geldiğini düşündüm. Kaydı *10x*’lik. Sonra 1/5 kesilecek ama ilk halinin. *14x*’e denk geliyor. Bu defa sağ taraftan yani bir bütün gibi düşündüm teli *70x*’den orada (yazılı kağıdını göstererek) *50x*’den çıkarmışım orada bir sorun var. *70x-14x=56x* kalıyor. Bunun yarısını *28x* olarak aldım.

Araştırmacı: Sen kayma miktarlarını her iki durum için farklı farklı almışsın. Birinci durum için bir kaydırmışsın sonra ikinci durum için kesip kaydırmışsın. Ama burada *70x*’ten mi çıkarmalıyım yoksa *50x*’ten mi kalandan mı?

Çetin: Şimdi ikinci kesimde ilk halinin 1/5’ini sadece miktar olarak vermiş. Ben yine *50x*’den mi çıkaracağım?

…………….

Araştırmacı: Peki, dedin ki eğer bir taraftan kesilse telin orta noktası kesilen parçanın yarısı kadar etkiliyor. İki taraftan kesilse farklı mı olur?

Çetin: Normalde farklı olmaz. Sağdan kestim sola kaydı, tel yeni bir şekil aldı. Sonra tekrar kestim yine onun yarısı kadar kayar ama en baştaki duruma göre iki defa yer değiştirdiği için.

Araştırmacı: İlk sağdan kesince sola doğru kayacak. Sağa doğru kayan miktar ne kadar olacak?

Çetin: Soldan kestiğimin yarısı kadar. *20x*’in yarısı kadar *10x* kadar.

Araştırmacı: Daha sonra sağdan kestim.

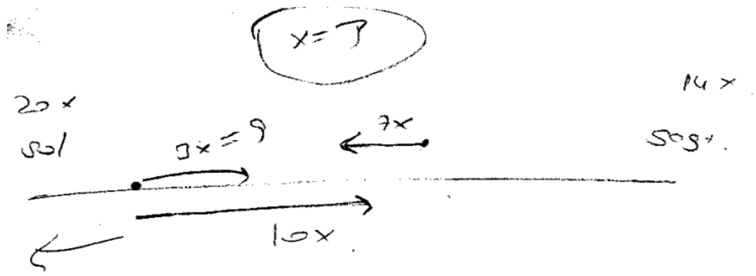
Çetin: Sağdan 14x kadar kesmiştim. O zaman yarısı *7x* kadar kayacak. Arada fark *3x* kalacak. Farkı 9’a (duraksar)

Araştırmacı: Öyle mi olacak? Hangi yaptığın doğru? Neden iki farklı sonuç elde ettin?

Çetin: Yani ilk başta soldan kestim, sağ yönde kaydı. Kayan miktara 10x dedim. Daha sonra sağ taraftan kestim. Sağ taraftan da *14x* kestiğim için *7x* zıt yönde kaydı. Orta noktayı kaymamış düşünürsem demek ki 10x sağa kaydı ikinci aşamada bir daha kestim *7x* sola kaydı. Ama sonuç olarak 3x sağ kaymış oldu. *3x=9* olması lazım. *x=3* ve telin uzunluğu *70x*’ten 210

……………….

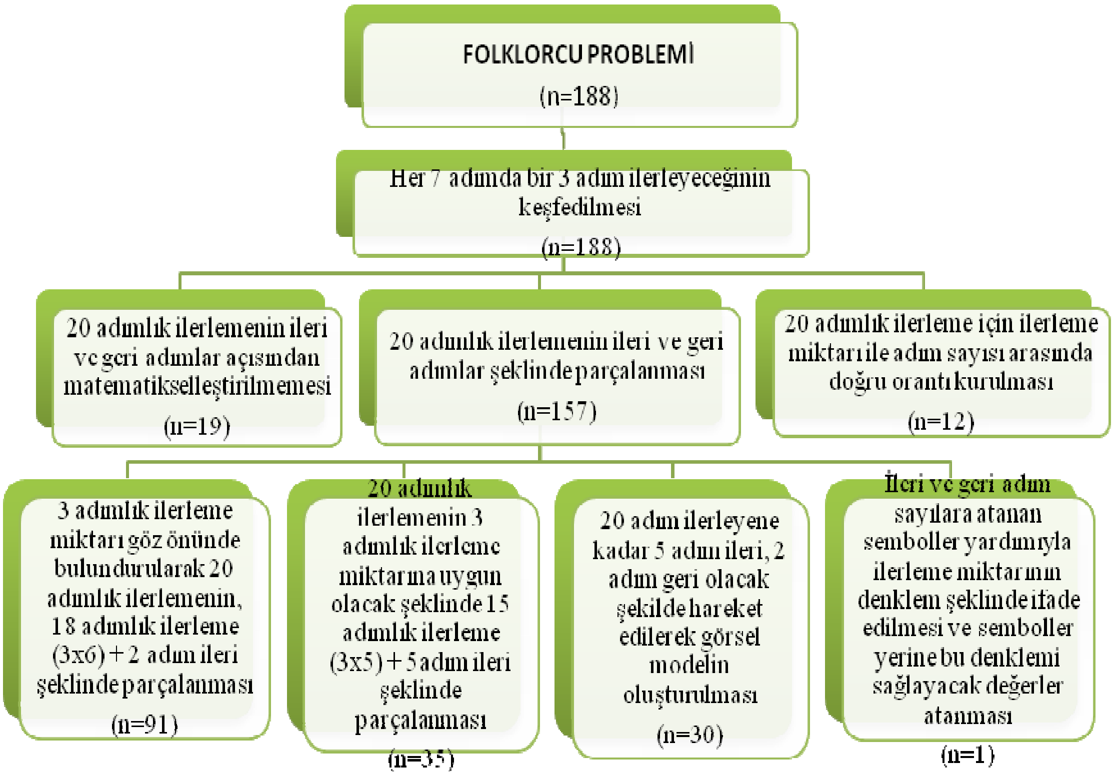
“*Tek taraftan kesiyorsak onun yarısı kadar kestiğimiz yönün tersine kayması lazım*” ifadesi Çetin’in kayma miktarı ve yönü ile kesilen parça arasındaki ilişkinin farkında olduğunu göstermektedir. Nitekim bu bilişsel modeli doğrultusunda *70x* uzunluğundaki telin *20x*’i (2/7 si) kesilince orta noktanın *10x* kayacağını tespit etmiş ancak *14x*’e karşılık gelen ikinci kesim için bilişsel modelini düzenleyememiştir; çünkü Çetin *70x* üzerinden mi yoksa *50x* üzerinde mi hareket edeceğini kestirememiştir. Bu durumda, öğretmen adayının, telin tek tarafından kesildiğinde orta noktanın ters yönlü ve kesilen parçanın yarısı kadar kayacağına ilişkin bilişsel modelini problem durumu için düzenleyemediği açıktır. Ancak araştırmacının *“Tel iki tarafından kesilse farklı olur mu?”* sorusu üzerine öğretmen adayının bilişsel modelini tekrar gözden geçirdiği ve sol taraftan kesilen *20x*'lik parçanın orta noktayı *10x* kadar sağa, sağ taraftan kesilen *14x*'lik parçanın da *7x* kadar sola kaydıracağını fark ettiği görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayı probleme uygun olacak şekilde düzenlediği bilişsel modelleri doğrultusunda kavramsal modellerini düzenlemiş ve kayma miktarını *3x* olarak tespit etmiştir.



Şekil 38: Tel problemi için öğretmen adayı Çetin'in ürettiği matematik modeli.

4.4. FOLKLORCU PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Öğretmen adaylarının folklorcu problemini uygun bir şekilde modelleyebilmesi için folklorcunun her 7 adımda (5 adım ileri, 2 adım geri) 3 adım ilerleyeceğini keşfetmeleri gerekmektedir. Ancak bu durumun farkına varması tek başına yeterli olmamakta öğretmen adayının oyun gereği ileri adımların 5 adımlık, geri adımların da 2 adımlık gruplar şeklinde atılacağını göz önünde bulundurması gerekmektedir. Öğretmen adaylarının ürettikleri matematik modellerine yön veren düşünceler ve kullandıkları kavramsal araçların özeti Şekil 39'da sunulmuştur. Veriler incelendiğinde öğretmen adaylarının folklorcunun 7 adımda 3 adım ilerlediğini keşfettiği ancak 20 adımlık ilerlemeyi farklı biçimlerde matematikselleştirdikleri görülmektedir.



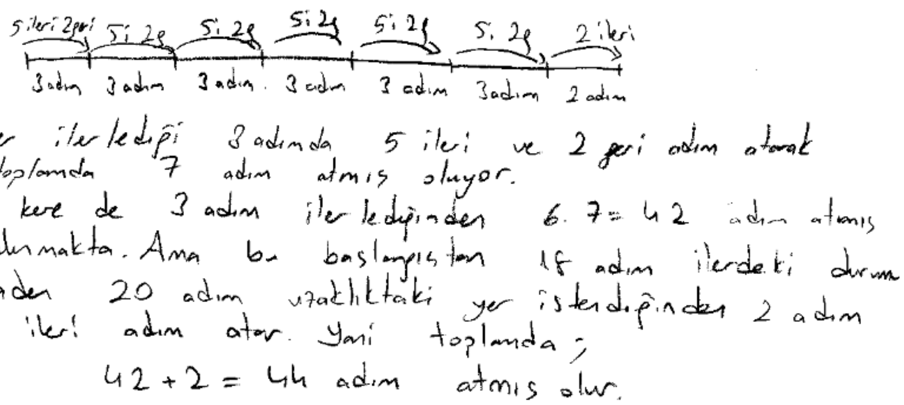
Şekil 39. Öğretmen adaylarının folklorcu problemini matematikselleştirme adımları.

Katılımcıların tamamı folklorcunun her 7 adımda 3 adım ilerleyeceğini keşfetmiştir. Ancak bunlardan 19'u 20 adımlık ilerlemeyi ileri ve geri adımlar açısından değerlendirememiş ve problemi matematikselleştirememiştir. Bu öğretmen adayları bilişsel modellerini probleme uygun olacak şekilde düzenleyemedikleri için uygun ve yeterli matematik modelleri üretememişlerdir. Ayrıca 12 öğretmen adayı ise her 7 adımdaki 3 adımlık ilerlemeden yola çıkarak ilerleme miktarı (20 adım) ile atılması gereken adım sayısı arasında doğru orantı kurmayı tercih etmiştir. Bu öğretmen adaylarının ileri ve geri adımlar arasında ilişki kurmadan sonuç eksenli bir problem çözme yaklaşımı sergiledikleri anlaşılmaktadır. Bu öğretmen adaylarının yanı sıra 157 öğretmen adayı ise 20 adımlık ilerleme miktarını ileri ve geri adımlar şeklinde parçalamaya çalışmıştır. Ancak öğretmen adaylarının 20 adımlık ilerlemeyi farklı şekillerde parçaladıkları dikkat çekmektedir. Bu noktada öğretmen adaylarının problemi matematikselleştirmek adına kullandıkları bilişsel ve kavramsal modelleri göz önünde bulundurularak uygunluk ve yeterlilik açısından kategorize edilen matematik modelleri Tablo 9'da sunulmaktadır.

Tablo 9: Öğretmen adaylarının folklorcu probleminin çözümü için ürettiği matematik modellerinin uygunluk ve yeterlilik kriterlerine göre sınıflandırılması.

UYGUNLUK VE YETERLİLİK	KAVRAMSAL ARAÇLAR	PROBLEMİ MATEMATİKSELLEŞTİRME SÜRECİ	Frekans
UYGUN VE YETERLİ MODELLER	**Aritmetiksel**	20 adımlık ilerlemenin 3 adımlık ilerleme miktarına uygun olacak şeklinde 15 adımlık ilerleme (3×5)+5 adım ileri şeklinde parçalanması	n= 35
UYGUN ANCAK GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODELLER	**Aritmetiksel**	20 adım ilerleyene kadar 5 adım ileri, 2 adım geri olacak şekilde hareket edilerek görsel modelin oluşturulması ve toplamda atılması gereken adım sayısının hesaplanması	n=30
	Cebirsel-Aritmetiksel	İleri ve geri adım sayılara atanan semboller yardımıyla ilerleme miktarının denklem şeklinde ifade edilmesi ve semboller yerine bu denklemi sağlayacak değerler atanması	n=1
UYGUN OLMAYAN MODELLER	**20 adımlık ilerlemenin oyun kuralına uygun olacak şekilde parçalanmaması**	3 adımlık ilerleme miktarı göz önünde bulundurularak 20 adımlık ilerlemenin, 18 adımlık ilerleme (3×6)+2 adım ileri şeklinde parçalanması	n=91
	20 adımlık ilerlemenin ileri ve geri adımlar açısından değerlendirilememesi	20 adımlık ilerleme için ilerleme miktarı ile adım sayısı arasında doğru orantı kurulması	n=12
MATEMATİK MODELİ YOK	**Bilişsel modelin probleme uygun olacak şekilde düzenlenememesi**	Folklorcunun her 7 adımda 3 adım ilerlediğinin fark edilmesine rağmen bu durumun 20 adımlık ilerlemeye uygun olacak şekilde düzenlenememesi	n=19

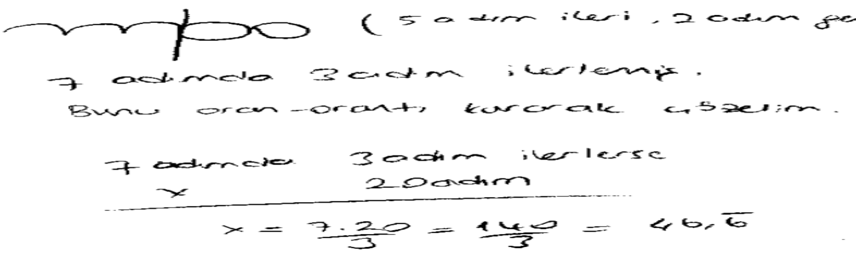
Tabloda görüldüğü gibi 188 öğretmen adayından 35'i folklorcu problemine ilişkin uygun ve yeterli matematik modeli üretirken 31'i uygun ancak geliştirilmesi gereken matematik modeli ortaya koymuştur. 19 öğretmen adayı ise folklorcunun her 7 adımda 3 adım ilerleyeceğini fark etmesine rağmen bunu 20 adımlık ilerleme miktarına uygun olacak şekilde düzenleyememiş ve probleme ilişkin matematik modeli üretememiştir. 20 adımlık ilerlemeyi oyunun kurallarına uygun olacak şekilde parçalamayan 91 öğretmen adayı ile ilerleme miktarı ve toplam adım sayısı arasında doğru orantı kuran ve elde ettiği sonucu bilişsel açıdan değerlendirmeyen 12 öğretmen adayı probleme ilişkin uygun matematik modeli üretememiştir. Bu durumun öğretmen adaylarının bilişsel modellerindeki yetersizliklerden kaynaklandığı anlaşılmaktadır. Örneğin oyunun kurallarına uygun olacak şekilde 20 adımlık ilerlemeyi parçalamayan öğretmen adaylarından birinin ürettiği matematik modeli aşağıdaki gibidir.



Şekil 40. Folklorcu problemine ilişkin uygun olmayan model örneği (ÖA146).

Bu öğretmen adayı, folklorcunun her 7 adımındaki 3 adımlık ilerleme miktarından hareketle 20 adımlık ilerlemeyi 18 (3×6) adım ilerleme+2 adım ileri şeklinde modellemiştir. Yani bu öğretmen adayına göre folklorcu 5 adımlık ileri, 2 adımlık geri hareketini 6 kez tekrarladıktan sonra 2 adım daha ileri giderse başladığı noktadan 20 adım uzakta olacaktır. Ancak oyunun kuralı gereği ileri ve geri adımları kendi içinde parçalayamayacağını ve ileri adımların 5 adımlık, geri adımların da 2 adımlık gruplar şeklinde atılması gerektiğini göz önünde bulundurmamıştır. Dolayısıyla uygun bilişsel modellere sahip olamayan bu öğretmen adayı çözüme ilişkin uygun matematik modeli de ortaya koyamamıştır.

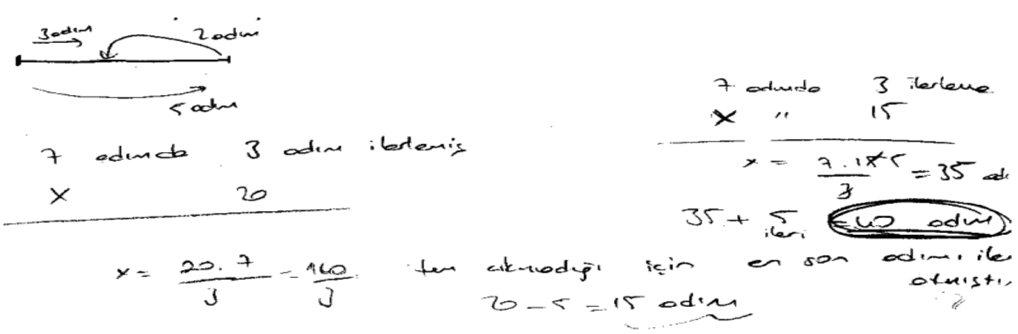
Diğer taraftan ilerleme miktarı ile atılan toplam adım sayısı arasında doğru orantı kuran 12 öğretmen adayından birinin ortaya koyduğu uygun olmayan matematik modeli Şekil 41'deki gibidir:



Şekil 41. Folklorcu problemine ilişkin uygun olmayan model örneği (ÖA36).

Bu öğretmen adayı folklorcunun hareketini ileri ve geri adımlar şeklinde değil 7 adımlık gruplar şeklinde ele almış ve ilerleme miktarı ile toplam adım arasında orantı kurmuştur. Öğretmen adayının probleme, hareketi oluşturan parçalar arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurmadan yaklaştığı ve bulduğu sonucu günlük yaşam açısından değerlendirmediği görülmektedir. Bu durum öğretmen adayının problemi bilişsel açıdan irdelemeden çözüm odaklı yaklaştığının göstergesidir.

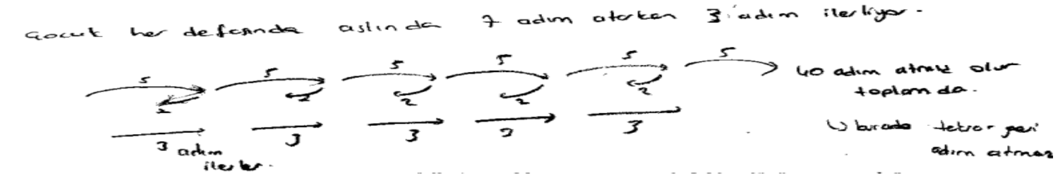
Öğretmen adaylarının probleme ilişkin uygun ve yeterli matematik modeli üretebilmesi için folklorcunun ileri adımlarını 5 adımlık, geri adımlarını 2 adımlık gruplar şeklinde atacağını göz önünde bulundurması ve 20 adımlık ilerlemeyi buna uygun olacak şekilde parçalaması gerekmektedir. Dolayısıyla 20 adımlık ilerlemeyi (3×5)+5 adım ileri şeklinde modelleyen öğretmen adaylarının ürettiği aritmetiksel model (n=35) uygun ve yeterli model olarak değerlendirilmiştir. Çünkü bu öğretmen adaylarının sayılar arası ilişkileri (ileri ve geri adımlar ile ilerleme miktarı ve atılan toplam adım) 20 adımlık ilerleme miktarına uygun olacak şekilde düzenledikleri görülmüştür. Bu bağlamda uygun ve yeterli bir model örneği aşağıda sunulmuştur:



Şekil 42. Folklorcu problemine ilişkin uygun ve yeterli aritmetiksel model örneği (ÖA4).

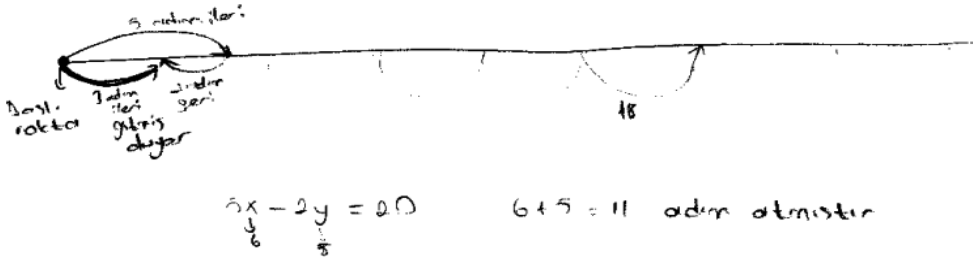
Şekil 42'deki modelden hareketle öğretmen adayının öncelikle folklorcunun her 7 adımda 3 adım ilerleyeceğini keşfettiği ve 20 adımlık ilerleme için atılması gereken adım sayısını doğru orantı yoluyla hesapladığı görülmektedir. Ancak bulduğu sonuç (140/3) tam çıkmadığı için hareketin 7 adımlık gruplardan oluşan tam bir hareket olmadığına ve en son adımların ileri adım olduğuna dair yeni bir bilişsel model geliştirmiştir. Bu noktada bu öğretmen adayının Şekil 41'deki gibi uygun olmayan matematik modeli ortaya koyan öğretmen adayından farklı olarak kullandığı kavramsal modellerin sonucu açısından probleme ilişkin yeni bilişsel modeller geliştirdiği ve problemi yeniden yapılandırdığı söylenebilir. Ardından öğretmen adayının geliştirdiği bilişsel modelleri doğrultusunda sayılar arası ilişkileri yeniden gözden geçirdiği ve 20 adımlık ilerlemeyi 15 adım ileri+5 adım ileri şeklinde parçaladığı görülmektedir. Bu süreçte problemi anlamlandırmak adına kullanılan bilişsel modellerin kavramsal modellere dönüştüğü ve kavramsal modellerin sonuçları açısından yeni bilişsel modellerin düzenlendiği görülmektedir.

Diğer taraftan 20 adım ilerleme elde edinceye kadar folklorcuyu oluşturduğu görsel model üzerinde 5 adım ileri, 2 adım geri hareket ettiren öğretmen adayları (n=91) ile ileri ve geri adımlar yerine atadığı semboller yardımıyla ilerleme miktarını cebirsel olarak modelleyen ancak bu adımlar arasında ilişki kurmaksızın semboller yerine sayısal değer atayan öğretmen adaylarının (n=1) ürettiği modeller uygun ancak geliştirilmesi gereken model kapsamında ele alınmıştır. Bu öğretmen adaylarının ileri ve geri adımlar arasındaki ilişkiyi tam olarak tespit edemedikleri için deneme-yanılma yoluyla sonuca ulaşmaya çalıştıkları görülmüştür. Örneğin uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel model üreten (n=91) öğretmen adaylarından birinin ürettiği model aşağıdaki gibidir:



Şekil 43. Folklorcu problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel model örneği (ÖA104).

Bu modeli oluşturan öğretmen adayının folklorcunun her 7 adımda 3 adım ilerleyeceğini fark ettiği ancak 20 adımlık ilerleme ile bu durum arasında doğrudan ilişki kuramadığı bunun yerine 20 adım ilerleyinceye kadar folklorcuyu 5 adım ileri, 2 adım geri hareket ettirdiği dikkat çekmektedir. Benzer şekilde uygun ancak geliştirilmesi gereken cebirsel-aritmetiksel model üreten öğretmen adayının (n=1) ürettiği aşağıdaki model incelenecek olunursa bu öğretmen adayının da ileri ve geri adımlar arasında doğrudan ilişki kuramadığı görülür.



Şekil 44. Folklorcu problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken cebirsel-aritmetiksel model örneği (ÖA44).

Bu öğretmen adayının ileri adım grupları yerine *x*, geri adım grupları yerine *y* değişkenini atadığı ve ilerleme miktarını *5x-2y=20* şeklinde modellediği görülmektedir. Ancak öğretmen adayı her 7 adımda 3 adım ilerleyen folklorcunun eşit sayıda ileri ve geri adım grubu atmayacağını (20, 3'ün tam katı olmayacağı için) dolayısıyla ileri adım grubunun geri adım grubundan bir fazla olacağını göz önünde bulundurmamıştır. Yani bu öğretmen adayı ileri ve geri adım grupları arasında ilişki kuramadığından *x* ve *y* değişkenleri yerine denklemi sağlayan sayısal değerler vermeyi tercih etmiştir. Nitekim öğretmen adayının değişkenler yerine verdiği değerler toplamının atılması gereken adım sayısı olduğunu düşünmesi atadığı değişkenlerin ve bu değişkenler arası ilişkilerin tam olarak farkında olmadığını göstermektedir.

Diğer taraftan öğretmen adayları ile yürütülen mülakatlara ilişkin bulgular sunulacak olunursa öncelikle görüşülen öğretmen adaylarının ürettiği matematik modellerinin incelenmesi faydalı olacaktır (bakınız Tablo 10).

Tablo 10. Öğretmen adaylarının folklorcu problemi için ürettiği matematik modelleri.

Model	ARZU	BUKET	ELİF	ÇETİN	ENGİN
Uygun ve Yeterli Modeller	A.M	A.M		C.M	A.M
Uygun Olmayan Model			A.M		

Kısaltmalar: A.M: Aritmetiksel Model, **C.M:** Cebirsel Model.

Görüşmeler esnasında öğretmen adaylarının mevcut bilişsel ve kavramsal modellerini tekrardan gözden geçirdiği ve ürettikleri matematik modellerini geliştirdikleri gözlenmiştir. Örneğin yazılı sınav esnasında probleme ilişkin uygun olmayan model ortaya koyan Engin mülakat sırasında uygun ve yeterli aritmetiksel model üretmeyi başarmıştır. Bu öğretmen adayı ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir (**Diyalog 8**):

……………

Engin: Şuradan 5 adım ileri gitti, sonra 2 adım geri, yani şurası 3 adım oldu. Daha sonra yine aynı şekilde 3 adım daha gidecek.

Araştırmacı: Hep 3'erli gruplar halinde mi gidecek?

Engin: Evet.

Araştırmacı: Ama benim ilerlemem 20 adım.

Engin: 3 adım 3 adım gidecek 18'inci adımda 2 adım kalıyor. Direk 5 adım ileri gitmesine bile gerek yok.

Araştırmacı: Niye ama 5 adımlık bir kural var.

Engin: O zaman 5 adım ileri gider, 2 adım geri gelir.

Araştırmacı: O zaman 21 olur.

Engin: Nasıl 21 oluyor?

Araştırmacı: 5 adım ileri gitti, 2 adım geri geldi, 3 adım ilerlemiş oldu, 18+3=21 oldu.

Engin: Yani orada, 20 adımda direk o noktaya gelemez.

…………

Engin: 20 adımlık bir mesafe gidecek değil mi?

Araştırmacı: Evet, ama 5 ve 2 adımlık gruplar ile gidecek.

Engin: İşte 18'e kadar sıkıntı olmuyor, 3'er 3'er geliyor. 2 adım kalıyor. 5 adım ileri gidip 2 adım geri gelirsek 21 adım oluyor, doğru.

Araştırmacı: Şimdi demek ki 20 adımın içerisinde 7'şerli adımlar tam grup şeklinde ilerliyor mu?

Engin: Yani 20'ye kadar ilerlemiyor. 18'e kadar sıkıntı yok.

………..

Engin: Soruya göre, 5 adım ileri gidip, 2 adım geri gitmek zorunda değil mi?

Araştırmacı: Her 5 adımdan sonra 2 adım geri gelecek ama mesela 20'inci adımda ileri-geri adımlar aynı anda olmak zorunda değil, belki de 20'nci adıma geldiği zaman ileri atacağı adım sayıları fazladır ya da eksiktir. Onu bilemezsin.

Engin: O zaman burada 5 adım ileri gittikten sonra 2 adım geri gitmesine gerek yok. Yani en sonunda geri gelmeyebilir de. Çünkü direk 20 adıma gelirsin. Şimdi 5 adım ileri, 2 adım geri atınca 3 adım ileri gitmiş oluyor ya, 20 sayısı 3'e bölünemediği için hiçbir zaman 20'nci adıma gelemez ki.

Araştırmacı: Demek ki 20'nci adıma kadar tam bir tur yapmıyor.

Engin: Evet, 21 olsaydı olabilirdi.

Araştırmacı: O halde tam bir tur yapmıyor ama tam bir tur yaptığı yerler var mıdır?

Engin: Evet. Mesela 18 var, 15 var, 12 var.

Araştırmacı: Peki, 18 için 18+2 şeklinde modelledin. Ama adım sayısı olmadı.

Engin: 15 için baksak. O zaman oluyor. 15'ten 5 adım ileri gidince 20'nci adıma gelmiş oluyor.

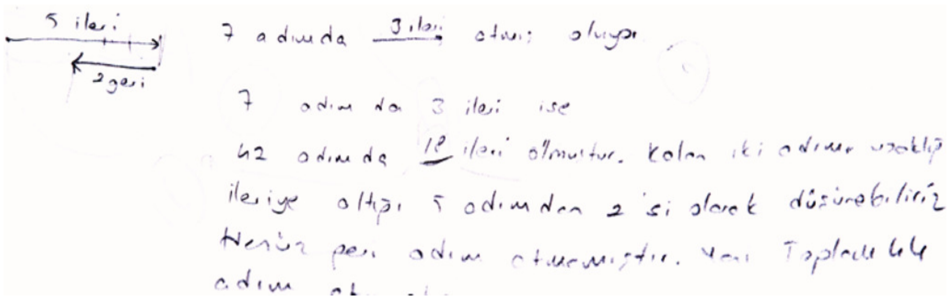
Araştırmacı: O halde 15+5 şeklinde mi olacak?

Engin: Evet.

………..

Engin "*3 adım gidecek 18'inci adımda 2 adım kalıyor. Direk 5 adım ileri gitmesine bile gerek yok*" ifadesini kullanmaktadır. Bu cümle Engin'in oyun kuralı gereği ileri ve geri adımların parçalanmayacağının farkında olmadığını açıkça göstermektedir. Bilişsel modeldeki bu eksiklik yazılı sınav esnasında uygun olmayan model ortaya koymasına sebep olmuştur. Mülakat esnasında ise oyun kuralı gereği ileri adımların 5'er adımlık, geri adımlarında 2'şer adımlık gruplar şeklinde atılacağı belirtilmiştir. Bu durum karşısında öğretmen adayı folklorcuyu 18 adım ilerleme miktarının üzerine 5 adım ileri 2 adım geri hareket ettirerek başlangıç noktasından itibaren 21 adım ilerletmiştir. Ancak öğretmen adayı "*5 adım ileri, 2 adım geri atınca 3 adım ileri gitmiş oluyor ya, 20 sayısı 3'e bölünemediği için hiçbir zaman 20'nci adıma gelemez ki*" şeklinde bir ifade kullanmıştır. Bu ifadeden anlaşılacağı üzere folklorcunun 20 adımlık ilerleme için eşit sayıda ileri ve geri adım gruplarından oluşan tam bir hareket yapmayacağının farkındadır. Ayrıca tam hareketi yaptığı noktaların 21, 18, 15, 12 gibi 3'ün katı olan noktalar olduğunun farkına varmış ve buradan hareketle ilerleme miktarını 15+5 adım ileri şeklinde modellemiştir.

Benzer şekilde yazılı sınav esnasında bilişsel modellerindeki eksiklikten dolayı uygun olmayan model ortaya koyan Çetin, mülakat esnasında yeni bir matematik modeli geliştirmiştir.



Şekil 45. Folklorcu problemi için Çetin tarafından ortaya konan uygun olmayan matematik modeli.

Çetin her ne kadar yazılı sınav esnasında Şekil 45'teki gibi uygun olmayan matematik modeli ortaya koysa da görüşme sırasında bilişsel ve kavramsal modellerini düzenleyerek yeni bir matematik modeli üretebilmiştir. Çetin tarafından geliştirilen bu yeni matematik modeli diğer öğretmen adaylarının yazılı sınav esnasında geliştirdiği matematik modellerinden farklıdır. Çetin ile araştırmacı arasında geçen aşağıdaki diyalog incelenecek olunursa Çetin'in ileri ve geri adım grupları arasındaki ilişkiyi ve ilerleme miktarını cebirsel olarak tanımladığı görülmektedir (**Diyalog 9**):

……………

Araştırmacı: Yalnız 5 adımlık ilerlemeyi parçalayabilirsin diye bir şey söylememiş. Hani 7 adım 1 tam gruptu ama o 7 adımlık tam grubun içerisinde 5 adımlıklar da parçalanmayacak bir grup, 2 adımlık geriler de bir grup parçalanmayacak şekilde. Böyle olduğunda senin yaptığın 18 adımlık tam bir grubun üzerine ileri adımları iki şekilde parçalayarak verdin ki 20 adıma ulaşması için. Ama bu sefer doğru olmadı. 5 adımı parçaladık. Yani biz öyle modellemeliyiz ki 20 adımı, ne 5 adım parçalansın, ne 2 adım parçalansın, ne de bu ikisinin toplamı olan 7 adımlık tam bir grup parçalansın.

…….

Araştırmacı: İlla 18'in üzerine ileri adım atmasına gerek yok, belki başka bir adım için yaptı 20 adımlık ilerlemeyi. Yani sen 20'yi 18+2 şeklinde modelledin. Ama onun yanlış olduğunu gördük, çünkü ileri adımın 5 adımlık şekilde ilerlediğini göstermen gerekiyor. Demek ki buradaki ifadeyi biraz düzenlemen lazım. Belki başka bir tam grup için değerlendirmen gerekiyor.

Çetin: O zaman 5'leri bir bütün olarak düşünsem, geri dönemiyoruz diye.

Araştırmacı: O zaman şöyle düşünelim, ileri attığı adımları bir grup olarak düşünsen, geriye attığı adımları bir grup düşünsen, ikisi grup sayısı olarak birbirine eşit midir?

Çetin: Değildir.

Araştırmacı: Nereden anladın?

Çetin: Çünkü öyle bir durumda 20 adım uzaklaşamaz.

Araştırmacı: Peki 3'ün katı mı olmalı?

Çetin: Evet.

Araştırmacı: Tamam, eşit değildir. Eşit değilse, ileri attığı grup adım daha mı fazladır, yoksa geriye attığı grup adım sayısı mı fazladır?

Çetin: İleriye attığı daha fazladır.

Araştırmacı: Neden?

Çetin: Çünkü önce ileriye gidiyor, sonra geriye gidiyor.

Araştırmacı: Tamam bu da anlaşıldı. Peki ileriye attığı adım grup sayısı, geriye attığı grup sayısından ne kadar fazla olabilir?

Çetin: En çok 1 tane fazla olabilir.

Araştırmacı: Tamam, bunu da anladık. Peki, bütün bunları matematikselleştirebilir miyiz? Şimdi geriye attığı adımları biliyor musun?

Çetin: Bilmiyorum, ileriye attığı adımları da bilmiyorum. Ama ileri attığı adımlara x dersem. O zaman geri de x-1 olabilir.

Araştırmacı: Peki, her bir ileri adımda ne kadar ilerliyor?

Çetin: Her bir ileri adımda 5 adım ilerliyor.

Araştırmacı: x adımda ne kadar ilerler?

Çetin: Bir adımda 5 ilerlediğine göre, x'te de $5x$ ilerleyecek.

Araştırmacı: Tamam bu kadar ilerledi. Her bir geri adımda?

Çetin: Her bir geri adımda, 2 adım geriliyor. $x-1$'den $2(x-1)$ olur.

Araştırmacı: Peki, buna göre toplam 20 adımlık ilerlemeyi nasıl yazarız?

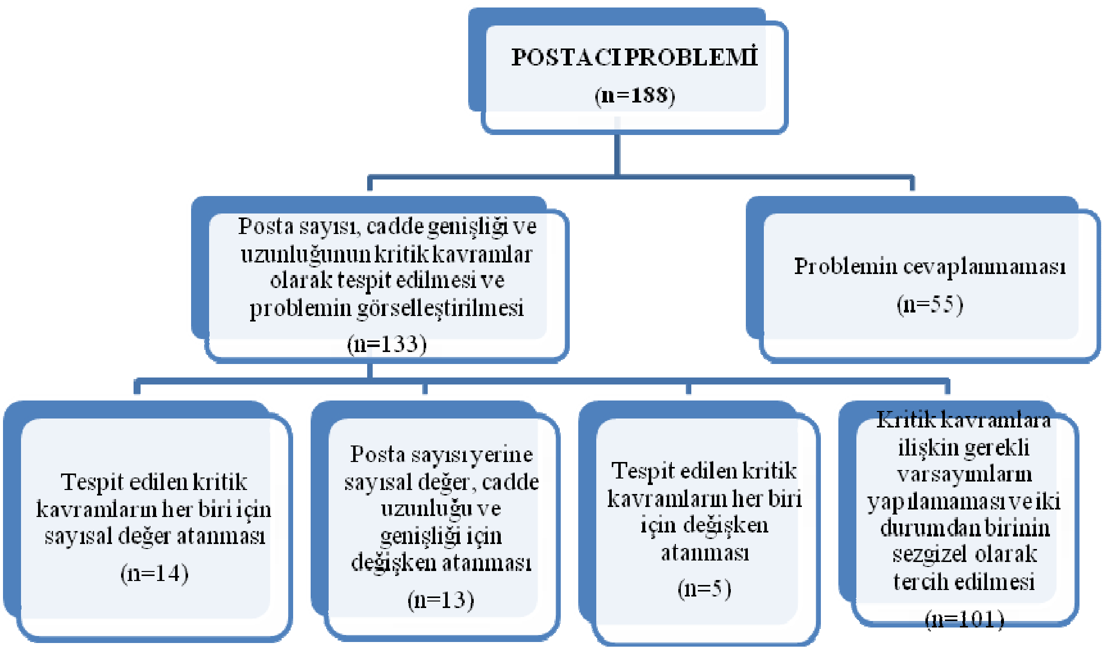
Çetin: Şöyle düşündüm: 5 ileri, 2 geri, farkını aldığımda bu kadar ilerledi diyordum. O zaman 5x ilerlediyse, gerilediği kadarını tekrar çıkararak, buna da 20 derim o zaman. (Çözmeye çalışır)

………………….

Çetin ilk etapta ileri adımların parçalanamayacağını göz önünde bulundurmadığı için problemi uygun bir şekilde modelleyememiştir. Bu durum Çetin'in sadece ileri ve geri adımlardan oluşan 7 adımlık hareketi tam bir grup olarak değerlendirmesinden ve bu hareketi oluşturan ileri ve geri adımları kendi içersinde gruplandıramamasından kaynaklanmaktadır. Bu noktada araştırmacının soruları doğrultusunda ileri ve geri adımları gruplar halinde ele alan Çetin, 20 adımlık ilerleme için atılması gereken ileri adım gruplarının geri adım gruplarından bir fazla olacağına dair yeni bir bilişsel model geliştirmiştir. Bu bilişsel modeli doğrultusunda ise ilerleme miktarını $5x\text{-}2(x\text{-}1)=20$ şeklinde cebirsel olarak modellemiştir.

4.5. POSTACI PROBLEMİNE İLİŞKİN BULGULAR

Postacı problemi, araştırma kapsamında kullanılan diğer problemlere göre daha az matematiksel bilgi içeren güncel yaşam problemidir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının günlük yaşam ile ilişki kurup trafik, cadde uzunluğu, cadde genişliği, posta sayısı ve konumu gibi birçok değişkeni sınırlandırması ve matematikselleştirmesi gerekmektedir. Yazılı sınav kâğıtlarının analizleri neticesinde üretilen matematik modelleri ve bu modellerin işleyişine yön veren düşünce ve kavramlar aşağıdaki şekilde özetlenmiştir.



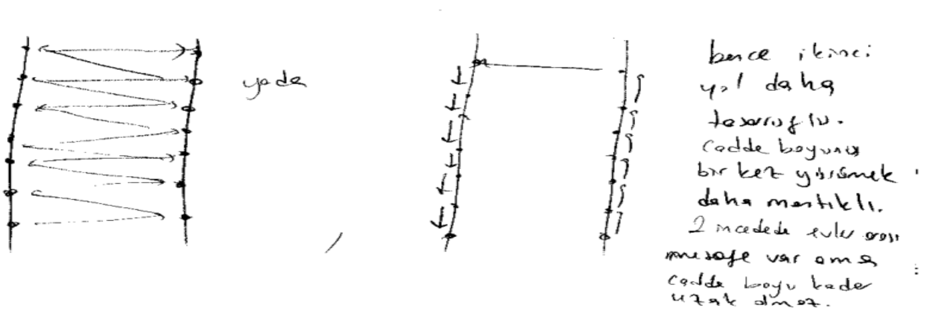
Şekil 46. Öğretmen adaylarının postacı problemini matematikselleştirme adımları.

Şekil 46'den anlaşılacağı üzere 55 öğretmen adayı problemi cevaplamazken 133 öğretmen adayı cadde uzunluğu, genişliği ve posta sayısını kritik kavramlar olarak tespit etmiş ve problemi görselleştirmiştir. Bu sorunun çözümünde problemin matematikselleştirilmesi için tespit edilen kritik kavramların nasıl sınırlandırıldığı ve bunlara ilişkin ne tür varsayımlarda bulunulduğu önem arz etmektedir. Nitekim tespit ettikleri kritik kavramlara ilişkin varsayımda bulunmayıp iki durumdan birini sezgisel olarak tercih eden 101 öğretmen adayı probleme ilişkin matematik modeli ortaya koyamamıştır. 14 öğretmen adayı tespit ettiği kritik kavramlar yerine sayısal değerler atarken 5 öğretmen adayı da değişkenler yardımıyla problemi matematikselleştirmiştir. Ayrıca 13 öğretmen adayı ise posta sayısını atadığı sayısal değer ile sınırlandırıp cadde uzunluğu ve genişliği yerine tanımladığı değişkenler yardımıyla problemi modellemiştir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının problemi matematikselleştirmek adına ortaya koyduğu modeller bilişsel ve kavramsal boyutları göz önünde bulundurularak uygunluk ve yeterlilik kriterleri çerçevesinde analiz edilmiş ve sonuçlar aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 11. Öğretmen adaylarının postacı probleminin çözümü için ürettiği matematik modellerinin uygunluk ve yeterlilik kriterlerine göre sınıflandırılması.

UYGUNLUK VE YETERLİLİK	KULLANILAN KAVRAMSAL ARAÇLAR	PROBLEMİ MATEMATİKSELLEŞTİRME SÜRECİ	Frekans
UYGUN VE YETERLİ MODELLER	**Cebirsel**	Tespit edilen kritik kavramların her biri için değişken atanması	n= 5
UYGUN ANCAK GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODELLER	**Cebirsel- Aritmetiksel**	Posta sayısı yerine sayısal değer cadde uzunluğu ve genişliği için değişken atanması	n=13
	Aritmetiksel	Tespit edilen kritik kavramların her biri için sayısal değer atanması	n=14
MATEMATİK MODELİ YOK	**Sadece Bilişsel Modeller Mevcut**	Kritik kavramlara ilişkin gerekli varsayımlarda bulunulmaması ve iki durumdan birinin sezgisel olarak tercih edilmesi	n=101
	Problemin Anlaşılamaması	Probleme ilişkin hiçbir yorum, düşünce ya da modelin üretilememesi	n=55

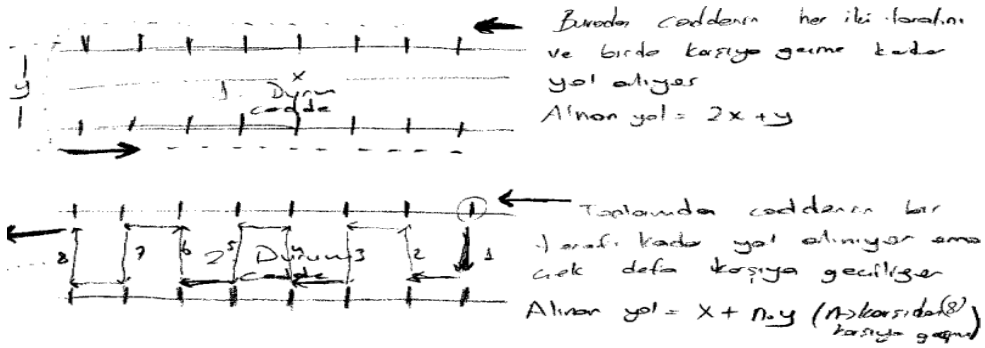
Bu tablodan anlaşılacağı üzere araştırmaya katılan 188 öğretmen adayından sadece 5'i postacı problemine ilişkin uygun ve yeterli matematik modeli üretirken 27'si ise uygun ancak geliştirilmesi gereken matematik modeli ortaya koyabilmiştir. 55 öğretmen adayı probleme ilişkin herhangi bir cevap üretemezken 101 öğretmen adayı cadde uzunluğu, genişliği gibi kavramların etkili olacağını fark etmesine rağmen bunlara ilişkin varsayımda bulunamamış ve iki durumdan birini sezgisel olarak tercih etmiştir. Bu öğretmen adaylarının cadde uzunluğu, genişliği ve posta sayısının farklı değerleri için tercih edilebilecek yolun değişebileceğini göz önünde bulundurmadıkları söylenebilir. Örneğin bu öğretmen adaylarından birinin vermiş olduğu cevap aşağıdaki gibidir:



Şekil 47. Postacı probleminin sezgisel olarak cevaplanması (ÖA154).

Dikkat edilecek olunursa öğretmen adayının cadde boyu ve evler arası mesafenin etkili olduğunu fark ettiği ancak bunlara ilişkin varsayımda bulunamadığı için problemi uygun bir şekilde matematikselleştiremediği görülmektedir. Bu durum bireylerin sahip oldukları bilişsel modelleri problem durumuyla tutarlılık arz edecek şekilde düzenleyemedikleri ve uygun kavramsal modellerle destekleyemedikleri sürece uygun ve yeterli modeller üretemeyeceklerini açıkça göstermektedir.

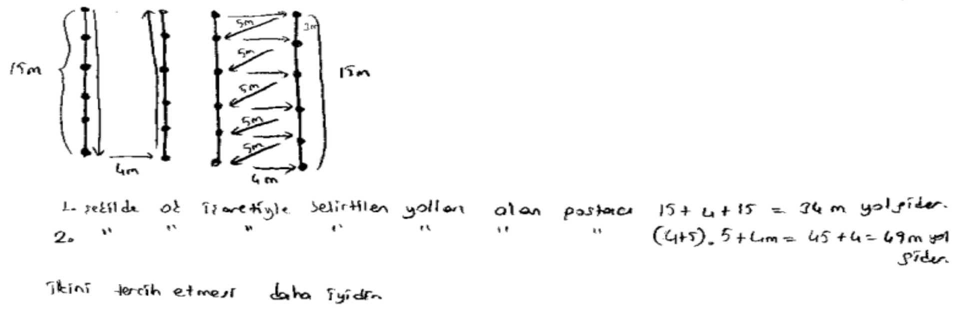
Öğretmen adaylarının probleme ilişkin uygun ve yeterli matematik modeli üretebilmesi için postacının her iki durumda alacağı mesafeyi cadde uzunluğu, genişliği ve posta sayısı gibi kritik kavramların tek bir değeri için kıyaslamaması, aksine bunların alabileceği olası değerleri göz önünde bulundurarak karara varması gerekmektedir. Bu kapsamda kritik kavramların her biri için atadığı değişkenlerden yola çıkarak postacının alacağı mesafeleri sembolik olarak kıyaslayan 5 öğretmen adayının modeli uygun ve yeterli matematik modeli olarak değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği model Şekil 48'deki gibidir:



Şekil 48. Postacı problemine ilişkin uygun ve yeterli cebirsel model örneği (ÖA78).

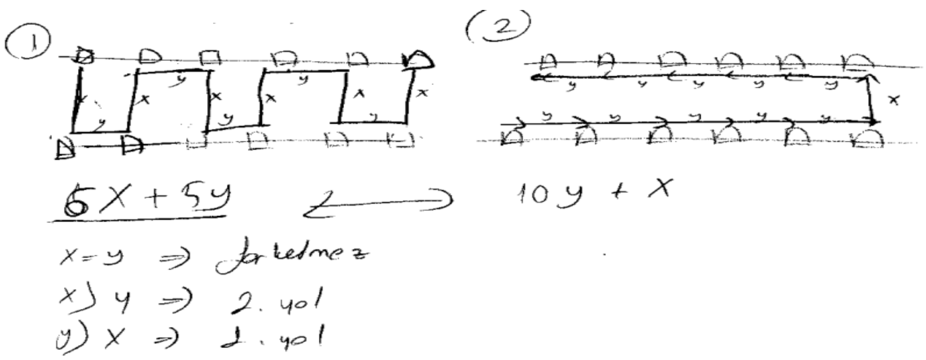
Bu öğretmen adayı cadde uzunluğu için *x*, genişliği için *y* değişkenini kullanmış ve ilk durumda postacının alacağı mesafeyi $2x+y$ olarak tanımlamıştır. İkinci durumda ise cadde boyunca karşıdan karşıya geçerek dağıtım yapılacağı için postacının aldığı mesafe $x+n\times y$ olarak ifade edilmiştir. Buradaki n postacının karşıdan karşıya kaç defa geçtiğini göstermektedir. Dolayısıyla öğretmen adayı posta sayısı ve konumuna göre değişiklik gösteren *n* değişkeninin, cadde uzunluğunun, genişliğinin alabileceği değerlere göre postacının tercihinin farklılık göstereceğini ifade etmiştir. Bu durum öğretmen adayının bilişsel modellerini belirli sayıdaki posta ya da cadde uzunluğu ile sınırlandırmadığını göstermektedir. Dolayısıyla öğretmen adayının belirlediği kritik kavramları birbirinden bağımsız ele almak yerine bütüncül bir şekilde değerlendirdiği ve matematikselleştirdiği söylenebilir.

Probleme ilişkin uygun ve yeterli matematik modeli geliştiren 5 öğretmen adayının aksine 27 öğretmen adayı posta sayısı, cadde uzunluğu ya da genişliği yerine atadığı sayısal değerler açısından problemi sınırlandırmıştır. Öğretmen adayları her ne kadar kritik kavramlar yerine atadığı sayısal değerler açısından karara varsa da öğretmen adayının bu sayısal değerlerin dışındaki değerler için gidilecek mesafeleri kıyaslaması mümkün değildir. Bu nedenledir ki bu öğretmen adaylarının ortaya koyduğu modeller uygun ancak geliştirilmesi gereken model olarak değerlendirilmiştir. Bu kapsamda 14 öğretmen adayının posta sayısı, cadde uzunluğu ve genişliği için atadığı sayısal değerlerden yola çıkarak postacının gideceği mesafeleri kıyasladığı görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının kritik kavramlar arasında ilişki kurmaksızın probleme çözüm odaklı yaklaştığı söylenebilir. Örnek teşkil etmesi amacıyla bu öğretmen adaylarından birinin ortaya koyduğu Şekil 49'daki aritmetiksel modelin incelenmesi yerinde olacaktır.



Şekil 49. Postacı problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel model örneği (ÖA129).

Bu öğretmen adayı, postacının 15 m uzunluğunda 4 m genişliğindeki yol boyunca 12 posta dağıtacağını varsayarak gideceği mesafeleri hesaplamıştır. Ardından elde ettiği mesafeleri kıyaslayarak postacının ikinci durumu tercih etmesinin daha iyi olacağına karar vermiştir. Öğretmen adayının varsayımları doğrultusunda ulaştığı sonuç her ne kadar doğru olsa da atadığı sayısal değerlerin, kritik kavramlar arası ilişki kurulmasını zorlaştırdığı söylenebilir. Diğer taraftan sadece posta sayısını sınırlayıp cadde uzunluğu ve genişliği için değişken tanımlayan 13 öğretmen adayının ortaya koyduğu aritmetiksel-cebirsel model uygun ancak geliştirilmesi gereken model kapsamında değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ortaya koyduğu model Şekil 50'deki gibidir:



Şekil 50. Postacı problemine ilişkin uygun ancak geliştirilmesi gereken aritmetiksel-cebirsel model örneği (ÖA112).

Bu öğretmen adayı, postacının x birim genişliğine sahip caddenin karşılıklı taraflarına y birim aralıklarla yerleştirilen 12 postayı (caddenin her bir tarafında 6 posta olacak şekilde) dağıtacağını varsaymış ve her iki durumda gideceği mesafeyi x ve y cinsinden ifade etmiştir. Ardından bu değişkenleri kıyaslayarak postacının tercih etmesi gereken yollara ilişkin farklı sonuçlara ulaşmıştır. Ancak öğretmen adayının cadde uzunluğu ve genişliğine ilişkin geliştirdiği bu kıyaslama sadece 12 posta sayısı için geçerlidir. Farklı posta sayıları için gidilmesi gereken mesafelerin cebirsel olarak yeniden tanımlanması gerekmektedir.

Diğer taraftan öğretmen adayları ile yürütülen mülakatlara ilişkin bulgular sunulacak olunursa öncelikle görüşülen öğretmen adaylarının ürettiği matematik modellerine ilişkin aşağıdaki tablonun incelenmesi faydalı olacaktır.

Tablo 12. Öğretmen adaylarının postacı problemi için ürettiği matematik modelleri.

Model	**ARZU**	**BUKET**	**ELİF**	**ÇETİN**	**ENGİN**
Uygun Ancak Geliştirilmesi gereken Modeller	A.M	A.M	A.M	A.C.M	M.Y

Kısaltmalar: A.M: Aritmetiksel Model, **A.C.M:** Aritmetiksel-Cebirsel Model, **M.Y:** Model Yok

Görüşmeler esnasında öğretmen adayları cadde uzunluğu, genişliği ve posta sayısının farklı değerlerine göre tercih edilecek yolun değişeceğini dile getirse de bunların yerine sayısal değerler vermenin ötesine geçememiş ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi bütüncül bir şekilde değerlendirememiştir. Problem ifadesinde hiçbir sayısal veri olmaması öğretmen adaylarının kafasını karıştırmakta ve belirledikleri kritik kavramlara ilişkin varsayımda bulunmalarını ve bunları ilişkilendirmelerini zorlaştırmaktadır. Örneğin Engin ile yürütülen mülakata ilişkin aşağıdaki bölüm incelenirse Engin'in cadde uzunluğu ve genişliğine ilişkin varsayımda bulunamadığı ve problemi matematikselleştiremediği görülür **(Diyalog 10):**

……..

Araştırmacı: Peki birincisinde yolun uzunluğunu kaç defa alıyor?

Engin: Mesela burada, bir defa alacak, sonra dönüp şurayı da alacak, 2 defa almış olacak.

Araştırmacı: Peki ikincisinde?

Engin: Bu şekilde gidecek, sonra yana geçecek, burada 1 kere alacak.

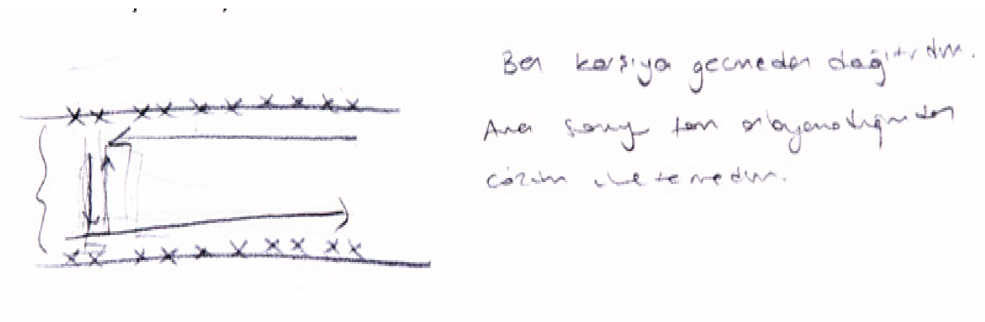
Araştırmacı: Bunlar arasında nasıl bir ilişki var?

Engin: O zaman ilişkiyi kuramayız.

Araştırmacı: Neden, matematiksel olarak kıyaslayamaz mıyız?

Engin: Çünkü yolun eni belli değil.

………..



Şekil 51. Postacı probleminin Engin tarafından görselleştirilmesi.

Alıntıdan anlaşılacağı üzere Engin problemi görselleştirmiş ancak cadde uzunluğu ve genişliğini bilmediği için bir karara varamamıştır. Engin her ne kadar yolun eninin ve boyunun verilecek karar üzerinde etkili olduğunun farkında olsa da bu değişkenleri ilişkilendirme ve sınırlandırma noktasında zorluk çekmiştir. O halde problemin uygun bir şekilde matematikselleştirilmesi için kritik kavramların tespit edilmesinin ötesinde bunlara matematiksel karakter kazandıracak varsayımlarda bulunulmasının gerektiği söylenebilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇ

Araştırma kapsamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ürettiği matematik modellerinin uygunluk ve yeterliliğinin tespit edilmesi, bu modellerin bilişsel ve kavramsal boyutları ile bunlar arasındaki ilişki ve etkileşimin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu araştırmada elde edilen bulgular öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ürettiği matematik modellerinin niteliği ve bu süreçte sergiledikleri düşünce ve yaklaşımlar hakkında önemli bilgiler vermektedir. Öğretmen adaylarının süreç içersinde ortaya koydukları modellerin uygunluk ve yeterliliğine ilişkin aşağıdaki tablo incelendiğinde öğretmen adaylarının genel olarak %58,4'ünün problemlere ilişkin uygun ve yeterli modeller ortaya koyduğu, % 19'unun problemleri uygun bir şekilde modelleyemediği ve % 22,6'sının ise hiçbir matematik modeli geliştiremediği görülmektedir.

Tablo 13. Öğretmen adaylarının problemler için ürettikleri modellerin uygunluk ve yeterlilik yüzdeleri.

PROBLEM	UYGUN VE YETERLİ MODEL		UYGUN ANCAK GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL		UYGUN OLMAYAN MODEL		MODEL YOK	
	FREKANS	YÜZDE	FREKANS	YÜZDE	FREKANS	YÜZDE	FREKANS	YÜZDE
İŞ İLANI	94	50	81	43,1	0	0	13	6,9

KOŞU	130	69,1	36	19,1	0	0	22	11,7
TEL	99	52,7	11	5,9	76	40,4	2	1,1
FOLKLORCU	35	18,6	31	16,5	103	54,8	19	10,1
POSTACI	5	2,7	27	14,4	0	0	156	83

Tablodaki verilerden hareketle öğretmen adaylarının problemleri çözüme kavuşturmak adına matematiksel kavram ve düşünceleri kullanabildikleri söylenebilir. Ancak her bir problem için ortaya konan modellerin uygunluk ve yeterliliği tek tek incelendiğinde öğretmen adaylarının diğer problemlere nazaran postacı problemini matematikselleştirme noktasında sıkıntı çektikleri görülmektedir. Bu problem hiçbir sayısal veri içermeyen ve bireyin varsayımları doğrultusunda farklı açılardan matematikselleştirebileceği bir gerçek-yaşam problemidir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının hepsi postacının gideceği mesafeler açısından problemi ele almıştır. Öğretmen adaylarının problemi modelleyebilmesi için cadde uzunluğu, genişliği gibi kritik kavramları tespit etmesinin ötesinde bunlara matematiksel karakter kazandıracak varsayımlarda bulunması gerekmektedir. Ancak kritik kavramlar olarak belirledikleri cadde uzunluğu, genişliği ve posta sayısına ilişkin hiçbir varsayımda bulunmayan çok sayıda öğretmen adayı (n=101) problemi matematikselleştirememiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının sayısal veriler içermeyen, gerçek yaşamla çok daha yakından alakalı açık uçlu durumlara ilişkin varsayımda bulunma noktasında sıkıntılar çektikleri, dolayısıyla sahip oldukları matematiksel bilgileri problem durumuna uyarlamada oldukça zorlandıkları söylenebilir. Bu bağlamda eldeki çalışmanın sonuçları Kertil'in (2008) bulgularını desteklemektedir. Yaptığı çalışmada Kertil (2008) öğretmen adaylarının güncel yaşam problemlerini çözme sürecinde matematiksel bilgilerini yeterince kullanamadıkları sonucuna ulaşmıştır.

Araştırmanın bulguları göstermektedir ki öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram ve düşünceleri kullanabilme, bunları gerek birbiriyle gerekse problem durumu ile ilişkilendirebilme dereceleri ortaya koydukları modelin niteliğini etkilemektedir. Örneğin iş ilanı problemine ilişkin cebirsel-aritmetiksel model geliştiren öğretmen adaylarının (n=13) modeli, kazançları pizza sayısı yerine atanan değişkenler açısından ortaya koyması yönüyle uygun olsa da kazançların kıyaslanmasında bütüncül bir yaklaşım sergilenmediği için yeterli değildir. Benzer şekilde Koşu probleminde Ayça ve Berrak'ın gittikleri yolu, zaman ve yol yerine atadıkları değişkenler cinsinden ifade eden ancak bu değişkenler arasında ilişki kuramayan öğretmen adaylarının (n=21) ortaya koydukları cebirsel modeller uygun olsa da bu modeller geçen sürelerin kıyaslanması noktasında etkin bir şekilde kullanılmamıştır. Tel probleminde ise kesilen parçalar ile kayma miktarı ve yönü arasında ilişki kurmaksızın probleme salt cebirsel yaklaşan öğretmen adaylarının uygun olmayan modelleri (n=76), telin kesilmeden önceki ve sonraki durumları ilişkilendirilerek düzenlendiği takdirde uygun bir matematik modeline dönüşebilir. Bu sonuçlar öğretmen adaylarının sahip oldukları matematiksel kavram ve düşünceleri probleme uygun olacak şekilde düzenleyemedikleri takdirde uygun ve yeterli matematik modelleri geliştirmeyeceklerini göstermektedir. Eldeki araştırmada kimi öğretmen adaylarının problem durumuyla alakalı kritik kavramları tespit ettikleri ancak bunlara ilişkin varsayımda bulunamadıkları, dolayısıyla da bu katılımcıların problemi anladıkları ancak zihinsel olarak yapılandırmadıkları görülmüştür. Örneğin İş İlanı probleminde pizza sayısı değiştikçe kazançların değişeceğini fark eden ancak pizza sayısına ilişkin varsayımda bulunamayan öğretmen adaylarının (n=10) problemi matematikselleştiremediği görülmektedir. Ayrıca İş ilanı problemine ilişkin öğretmen adayı Engin ile yürütülen diyalogdan anlaşılacağı üzere Engin belli sayıdaki pizza satışı için her iki şirketin kazancının eşitleneceğini ifade etmesine rağmen bu kritik pizza sayısının nasıl bulunacağına ilişkin herhangi bir düşünce ya da varsayım ortaya koyamamıştır (bakınız, Diyalog 3). Buradan hareketle problemin uygun bir şekilde modellenebilmesi için bireyin problemi zihinsel olarak yapılandırması gerektiği söylenebilir. Ancak zihinsel yapılandırma süreci problemin sadece anlaşılmasını değil aynı zamanda kritik kavramların tespit edilmesini, bunlara ilişkin varsayımda bulunulmasını ve bunların uygun matematiksel kavramlar ile ilişkilendirilmesini gerektirmektedir. Bu bağlamda, eldeki çalışma kapsamında yapılan gözlemler ve ulaşılan bulgular Galbraith ve Stillman'nın (2006) tezlerini desteklemektedir. Galbraith ve Stillman (2006) yürüttükleri araştırmada kritik kavramların tespit edilerek bunlara ilişkin varsayımda bulunulmasının problem durumunun yapılandırılması, uygun metot ve stratejilerin seçimi ve problem durumunu temsil yeteneğine sahip modellerin geliştirilmesi için gerekli olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak aritmetiksel ve cebirsel araçlar içeren modeller kullanma noktasında güçlü eğilimlerinin olduğunu göstermektedir. Nitekim grafiksel olarak modellenmesi mümkün olan İş ilanı ve Koşu problemine ilişkin üretilen modeller incelenirse öğretmen adaylarının grafiksel modellere nazaran cebirsel ve aritmetiksel modelleri tercih ettikleri görülür. Örneğin İş İlanı problemine ilişkin uygun ve yeterli model geliştiren toplam 94 öğretmen adayından 20'sinin maaşlar ve primler arası farktan yola çıkarak problemi aritmetiksel olarak modellediği, 63'ünün ise kazançları cebirsel olarak kıyasladığı görülmektedir (bakınız, Tablo 3) . Sadece 11 öğretmen adayı pizza sayısı yerine atadığı değişkenler açısından kazançları ifade etmiş ve bu kazanç grafikleri üzerinden kıyaslamaya gitmiştir. Diğer taraftan 42 öğretmen adayının aritmetiksel olarak bir tür deneme yanılma yoluyla çözüm üretmeye çalıştığı, 39 öğretmen adayının ise kazançları cebirsel olarak ifade ettiği ancak bu modelleri işlevsel bir şekilde kullanamadığı görülmektedir. Bu noktada grafiksel gösterimlerden oluşan kavramsal modelin pizza sayısındaki değişimin kazanç üzerindeki etkisini gözler önüne sermesi ve problemi bütüncül bir açıdan ele alması yönüyle aritmetiksel ve cebirsel modellere nazaran daha güçlü ve uygun olduğu söylenebilir. Benzer şekilde Koşu problemine ilişkin uygun ve yeterli model geliştiren öğretmen adaylarından (n=130) 126'sı problemi cebirsel olarak modellerken sadece 4 öğretmen adayı hız-zaman grafiğinin alanından hareketle problemi matematikselleştirmiştir (bakınız, Tablo 5). Diğer taraftan 21 öğretmen adayı yolu, hız ve zaman açısından cebirsel olarak ifade etmesine rağmen hareketlerin kıyaslanmasında bu modeli etkin bir şekilde kullanamazken 15 öğretmen adayı yol ya da zaman yerine atadığı sayısal değerler açısından kıyaslamaya gitmiştir. Problemin hız-zaman grafiği yardımıyla modellenmesinin, cebirsel ve aritmetiksel modellerin sınırlılıklarının aşılmasına ve hareketlerin bütüncül bir şekilde değerlendirilmesine imkân tanıdığı söylenebilir.

Araştırma bulguları öğretmen adaylarının nicelikler ve nitelikler arasındaki ilişkileri farklı açılardan değerlendirmekten ziyade problemi doğrudan çözüme götürme ve sonuca ulaşma çabası içersine girdiklerini göstermektedir. Çok sayıda öğretmen adayının problemi bir bütün olarak ele almaktan kaçındığı, problemi mümkün olduğunca kısa yoldan çözüme götürecek sembolleri, sayıları ve orantı kavramı gibi geçmişten getirdikleri bilgileri kullanma eğilimi içinde olduğu görülmüştür. Problem durumunu temsil etmek için uygun ve yeterli modeller üretmek yerine aritmetiksel ve cebirsel gibi daha geleneksel araçlardan oluşan modelleri tercih etmektedirler. Bu durum öğretmen adaylarının geleneksel problem çözme alışkanlıklarının bir sonucu olabilir. Matematik eğitimcilerinin ve öğretmenlerin tecrübelerinden bileceği gibi özelikle ilköğretim ve ortaöğretim düzeyinde sınıf içi öğretimlerde problem çözümleri yapılırken aritmetiksel ve sembolik gösterimlerden oluşan kurallar, formüller ve algoritmalar yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Üniversite düzeyinde okutulan alan dersleri içinde benzer bir durum söz konusudur. Dolayısıyla, bu tür bir eğitim sürecinden geçen öğretmen adayları problem çözme sürecinin nasıl işletilmesi gerektiğiyle alakalı bir takım kültürel normlar ve inanç sistemleri geliştirmiş olabilirler ve bu çerçevede de grafiksel modellerden ziyade sembolik ve aritmetiksel araçlardan oluşan modelleri tercih etmiş olabilirler.

Bireylerin problem çözme sürecinde kullandığı prosedürler ve stratejiler ürettiği modelin en önemli parçalardır. Kullanılan bu zihinsel ve gösterimsel araçlar bireyin problem durumunu nasıl yapılandırdığı ile yakından ilişkilidir (Zawojewski ve Lesh, 2003). Bu noktada araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının problemi anlamlandırmak adına ürettikleri bilişsel modellerin kavramsal modellere öncülük ettiğini göstermektedir. Örneğin İş İlanı problemine ilişkin öğretmen adayı Çetin ile araştırmacı arasında geçen diyalog bir kez daha incelenirse Çetin'in mülakat esnasında bilişsel modellerini sürekli geliştirdiği ve buna paralel olarak da cebirsel gösterimler içeren kavramsal model ortaya koyduğu görülmektedir (bakınız, Diyalog 1). Aynı diyalogdan Çetin'in bilişsel modelindeki eksikliklerin ürettiği kavramsal modelin niteliğini negatif manada etkilediği anlaşılmaktadır. Benzer şekilde Folklorcu problemine ilişkin öğretmen adayı Engin ile araştırmacı arasında geçen diyalog incelenirse Engin'in folklorcunun her 7 adımda 3 adım ilerleyeceğine dair geliştirdiği bilişsel modelini 20 adımlık ilerleme miktarı için yeniden düzenlediği ve problemi aritmetiksel olarak matematikselleştirdiği görülür (bakınız, Diyalog 8). Yani problemin uygun bir şekilde matematikselleştirilmesi için bireyin bilişsel modellerini uygun kavramsal modeller ile desteklemesi gerekmektedir. Ancak matematik modelinin bireyin zihni ile matematik arasındaki dönüşümün bir ürünü olduğu (Jonassen v.d., 2005) ve sadece bilişsel modeldeki değişimin kavramsal modeli etkilemediği benzer şekilde kavramsal modellerin bilişsel açıdan yeniden düzenlenmesinin ve yorumlanmasının yeni bilişsel modellerin geliştirilmesine imkân sağladığı görülmektedir. Örneğin öğretmen adayı Buket'in İş ilanı problemi için oluşturduğu grafiksel model üzerinde yapmış olduğu analizler neticesinde bilişsel modelini geliştirerek kazançların eşit olduğu anda dağıtılan pizza sayılarının da eşit olacağı çıkarımında bulunduğu görülmektedir (bakınız, Diyalog 2). Benzer şekilde Koşu problemine ilişkin uygun ve yeterli cebirsel model ortaya koyan öğretmen adayı (bakınız, Şekil 26) zaman değişkeni açısından ifade ettiği yol kavramını bilişsel açıdan yeniden yorumlamış ve buradan hareketle Ayça ve Berrak'ın otele ulaşması geçen sürelere ilişkin çıkarımda bulunmuştur. Folklorcu problemine ilişkin uygun ve yeterli aritmetiksel model ortaya koyan öğretmen adayının ise (bakınız, Şekil 42) orantı kavramından hareketle atılması gereken adımlara ilişkin yeni bir bilişsel model geliştirdiği ve bu doğrultuda problemi matematikselleştirdiği görülür. Netice olarak, araştırma bulguları bilişsel ve kavramsal modeller arasında çok yakın bir ilişki ve etkileşimin var olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda çalışmanın bilişsel ve kavramsal modeller arasındaki ilişki ve etkileşimin aydınlatılması noktasında önemli bulgular ortaya koyduğunu söyleyebiliriz.

Yukarıdaki sunulan bulgulardan hareketle problemi anlamlandırmak adına kullanılan bilişsel modellerin kavramsal modellere dönüştüğü ve bu kavramsal modellerin bilişsel açıdan yeniden yorumlanmasının yeni bilişsel modellerin geliştirilmesine imkân sağladığı söylenebilir. Başka bir ifadeyle, araştırma bulgularından bireyin tüm yönleri ile bilişsel modellerinin farkında olamayacağı (Franco ve Colinvaux, 2000; Akt. Ornek, 2008) için kullanılan kavramsal modellerin doğrudan uygulanmasının ötesinde bu kavramsal modellerin ve bunlara has özelliklerin problem durumu açısından irdelenmesi bireyin bilişsel modellerini geliştirmesine katkı sağladığı çıkarımında bulunabiliriz.

Sonuç olarak bilişsel ve kavramsal modeller arasında karşılıklı bir ilişki ve etkileşimin olduğunu ve bu ilişki ve etkileşimin üretilen matematik modelinin uygunluk ve yeterliliği noktasında belirleyici olduğu söylenebilir. Nitekim probleme ilişkin uygun ve yeterli matematik modeli üreten öğretmen adaylarının bilişsel ve kavramsal modellerinin iç içe geçtiği ve bunlar arasındaki anlamsal ilişkileri sağlıklı bir şekilde kurdukları görülmektedir. Öğretmen adaylarının uygun bilişsel ve kavramsal modellere sahip olsalar da bunlar arasındaki ilişki ve etkileşimi sağlıklı bir şekilde kuramadıkları takdirde ürettikleri modellerin uygun ancak geliştirilmesi gereken model olarak kaldığı görülmektedir. Bu bağlamda, araştırma bulguları bir matematik modelin bilişsel ve kavramsal boyutlarına dikkat çeken, amaca hizmet noktasında uygun ve yeterli modellerin üretilebilmesi için bu iki bileşen arasındaki ilişkinin sağlıklı bir şekilde kurulup yürütülmesinin önemine vurgu yapan eğitimcilerin görüşlerini desteklemektedir (Lesh ve Carmano, 2003). Ayrıca bilişsel ve kavramsal modeller arasındaki ilişkinin öncelik sonralık ilişkisinden daha çok aynı bütünü oluşturan ve yeri geldikçe birbirine dönüşen iki bileşen arasındaki ilişki olduğu söylenebilir. Bilişsel modellerin kavramsal modellerin üretimine öncülük ettiği, buna karşın uygun kavramsal modellerin de bilişsel modellerin revize edilerek geliştirilmesine imkân sağladığı görülmektedir. Bilişsel ve kavramsal modeller arasındaki ilişki ve etkileşimin sağlıklı bir şekilde kurulup yürütülmesinin ise amaca uygun işlevsel matematik modellerin oluşturulması için gerekli oldu unutulmamalıdır.

5.2. ÖNERİLER

Matematiksel modelleme, bireyi her türlü matematiksel kavram ve süreç üzerinde düşünmeye ve bunları karşılaştıkları durumlara uygun olacak şekilde yapılandırmaya sevk etmektedir. Modelleme problem çözme sürecindeki bireyin sahip olduğu matematiksel bilgi ve becerileri problem durumu ışığında yeniden gözden geçirmesini, problemi matematikselleştirmesini sağlayacak kavramları belirlemesini ve uygulamasını ardından da elde ettiği sonuçları problem durumu ile ilişkilendirerek bir karara varmasını hedeflemektedir. Başka bir ifadeyle hali hazırdaki kavram ve kuralları uygulamanın ötesinde kurduğu ilişkiler ve belirlediği kavramlar ışığında sürecin sorumluluğunu tam anlamıyla yüklenen bireyin problemi ve çözümünü kendisi için anlamlı kılması esastır. Ayrıca bireyin problemi matematikselleştirmek adına kullandığı her türlü kavram ve düşünceyi problem durumu ışığında gözden geçirmesi bu kavram ve düşünceleri durağanlıktan kurtarmakta ve bunlara işlevsellik kazandırmaktadır.

Araştırmada öğretmen adaylarının problemleri bilişsel ve kavramsal açıdan irdelemeden doğrudan çözüme kavuşturma çabası içersinde oldukları görülmüştür. Bu durumun bireyi bilişsel olarak aktif kılmanın ötesinde belirli kavram ve kuralları uygulamaya sevk eden geleneksel problem çözme sürecinden kaynaklandığı söylenebilir. Bu noktada bireylerin problem çözme sürecine ilişkin farklı bakış açıları geliştirmeleri ve süreç içersinde daha etkin olmalarını sağlamak adına farklı açılardan matematikselleştirebilecekleri problemlere sınıflarda yer verilmesi uygun olacaktır. Ayrıca matematiksel modelleme sadece eldeki problemlerin çözümü için aritmetiksel, cebirsel ve görsel unsurlar içeren kavramsal araçlardan ibaret görülmemeli, bu araçların oluşturulması ve problemin anlaşılıp yapılandırılması sürecinde sergilenen zihinsel aktiviteleri de kapsayacak şekilde çok daha geniş manasıyla ele alınıp işlenilmelidir.

Ülkemizde yapılandırmacı anlayış çerçevesinde yeniden düzenlenen ve 2005-2006 eğitim öğretim yılından itibaren uygulanan matematik programı her ne kadar bireye öğrendiği kavram ve bilgileri işleme özgürlüğü sunsa da modelleme sürecini matematiksel kavramların görselleştirilmesi ve somutlaştırılması olarak sınırlandırmaktadır. Bu noktada matematiksel modelleme süreci doğrultusunda programın yeniden düzenlenmesi veya var olan eksikliklerin giderilmesi önerilebilir. Oluşturulacak yeni program kapsamında öğrencilerin grup halinde uzun süreli çalışabilecekleri güncel yaşam problemlerine ve modelleme etkinliklerine yer verilmesi uygun olacaktır.

Ayrıca matematik eğitiminde modelleme sürecinin benimsenmesi öğretmenlerin süreç içersinde farklı yeterliliklere sahip olmasını gerektirmektedir. Öğretmenlerin öncelikle öğrencilerin ne öğrenmesi gerektiğinden çok hali hazırda ne bildiği üzerinde durması gerekmektedir. Ardından öğrencilerin mevcut bilgi ve becerilerini nasıl geliştireceğini ve bunları kullanarak dersi nasıl yapılandıracağını göz önünde bulundurmalıdır. Bütün bunları yürütürken öğrenciye tanıyacağı serbestlik ile kendi rehberliği arasındaki dengeyi de kurmalıdır. Bu nedenle öğretmen yetiştirme programlarına matematiksel modelleme süreci ve bu sürecin öğretimine yönelik derslerin konulması yerinde olacaktır. Halen görev yapmakta olan öğretmenler için ise düzenlenecek hizmet içi seminerler ile öğretmenlerin modelleme süreci ve bu sürecin öğretimine ilişkin temel bilgi ve becerileri kazanması sağlanabilir. Bu bilgi ve becerilerin kazandırılmasının ardından bunları ne denli kullandıkları, süreç içersinde ne tür zorluklarla karşılaştıkları gibi konular incelenebilir. Ayrıca bireyin başta günlük yaşam problemleri olmak üzere farklı problemler için ortaya koyduğu matematik modellerinin de incelenmesi mümkündür.

Son olarak, öğretmen adaylarının geçmişte aldıkları eğitimin ve bu çerçevede geliştirmiş oluşturdukları kültürel ve pedagojik normların model oluşturma ve kullanma yeterlilikleri üzerindeki etkilerinin araştırılması önerilebilir. Nitel araştırma yöntemlerin kullanılacağı ve geniş katılımcı kitlesi üzerinde yapılacak böyle bir çalışma öğretmen adaylarının model kullanma sürecinde sergiledikleri düşünce ve eğilimlerin sebeplerine ilişkin çok daha aydınlatıcı bilgiler ortaya koyacaktır.

KAYNAKÇA

Altun, M., D. Z. Memnun ve Y. Yazgan. (2007). "Sınıf Öğretmeni Adaylarının Rutin Olmayan Matematiksel Problemleri Çözme Becerileri ve Bu Konudaki Düşünceleri". *İlköğretim Online*, *6* (1), 127-143.

Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? S.J. Lamon, W.A. Parder ve K. Houston (Ed.), *Mathematical modelling: a way of life* içinde (ss. 227-234). Chichester, Ellis Horwood.

Barbosa, J. C. (2006). "Mathematical Modeling in Clasroom: A Socio-Critical and Discursive Perspective". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (3), 293-301.

Bayazit, İ. ve Y. Aksoy. (2009). Matematiksel problemlerin öğrenim ve öğretimi. E. Bingölbali ve F. Özmantar (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde (ss. 287-312). Ankara, Pegem Akademi.

Blomhøj, M. (2008). "Different Perspectives on Mathematical Modelling in Educational Research-Categorising the TSG21 papers". *11th International Congress on Mathematics Education*, Monterrey, Mexico.

Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching a review of arguments and ınstructional aspects. M. Niss, W. Blum ve I. Huntley (Ed.), *Teaching of mathematical modelling and applications* içinde (ss. 10-29). England, Chichester: Ellis Horwood.

Blum; W. (2002). "ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education-Discussion Document". *Educational Studies in Mathematics, 51* (1-2), 149-171.

Blum, W. (2004). "Opportunities and Problems for Quality Mathematics Teaching- the SINUS and DISUM Projects". *ICME-10 Proceedings* , Copenhagen, Denmark.

Blum, W. and M. Niss. (1991). "Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and links to Other Subjects-State, Trends and Issues in Mathematics Instruction". *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Blum, W. and D. LeiB. (2005). "Filling up-the Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with demanding Modelling Tasks". *Proceedings of CERME 4*, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Blum, W., P. L. Galbraith, H. Henn and M. Niss. (2006). *ICMI Study 14: Applications and Modeling in Mathematics Education*. New York: Springer.

Dapueto, C. and L. Parenti. (1999). “Contributions and Obstacles of Contexts in the Development of Mathematical Knowledge”. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 1-21.

Doerr, H. M. (2006). “Teachers’ Ways of Listening and Responding to Students’ Emerging Mathematical Models”. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (3), 255-268.

Doerr, H. M. and L. D. English. (2003). “A Modeling Perspective on Students Mathematical Reasoning about Data”, *Journal for Research in Mathematics Education, 34* (2), 110-136.

English, L. D. and J.J Watters. (2004). “Mathematical Modelling with Young Children”. *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway.

Eric, C. C. M. (2008). “Using Model-Eliciting Activities for Primary Mathematics Classrooms”. *The Mathematics Educator, 11* (1), 47-66.

Ferri, R. B. (2006). “Theoretical and Empirical Differentiations of Phases in the Modelling Process”. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 86-95.

Ferri, R. T. and W. Blum. (2009). “Mathematical Modelling in Teacher Education – Experiences from a Modelling Seminar”. *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Fiscbein, E. (2001). “Tacit Models and Infinity”. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 309-329.

Foong, P. Y. (2002). “Using Short Open-Ended Mathematics Questions to Promote Thinking and Understanding”. *Proceedings of the International Conference: The Humanistic Renaissance in Mathematics Education*, Palermo, Italy.

Galbraith, P. and G. Stillman. (2006). “A Framework for Identifying Student Blockages During transitions in the modelling process” . *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 143-162.

Greca, I. M. and M. A. Moreira. (2002). “Mental, Physical, and Mathematical Models in the Teaching and Learning of Physics”. *Science Education, 1*, 106-121.

Güzel, E. ve I. Uğurel. (2010). “Matematik Öğretmen Adaylarının Analiz Dersi Akademik Başarıları ile Matematiksel Modelleme Yaklaşımları Arasındaki İlişki”. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 29* (1), 69-90.

Hennig, C. (2010). “Mathematical Models and Reality-a Constructivist Perspective”. *Foundations of Science, 15*, 29-49.

Hestenes, D. (2006). “Notes for a Modeling Theory of Science”. Cognition and Instruction. *Proceedings of the GIREP Conference: Modelling in Physics and Physcis Education*, Amsterdam, Hollanda.

Hestenes, D. (2010). Modelling theory for math and science Education. Lesh, R., P.L Galbraith, C.R Haines ve A. Hurford. (Ed.), *Modelling students' mathematical modelling competencies: ICTMA 13* içinde (ss. 13-41). New York, Springer.

Hines, M. T. (2008). “African American Children and Mathematical Problem Solving in Texas an Analysis of Meaning Making in Review”. *National Forum of Applied Educational Research Journal, 21* (3), 1-17.

Jonassen, D. H. (1997). “Instructional Design Models for Well-Structured and Ill-Structured Problem-solving Learning Outcomes”. *Educational Technology Research and Development, 45* (1), 65-94.

Jonassen, D., J. Strobel and J. Gottdenker. (2005). “Model Building for Conceptual Change”. *Interactive Learning Environments, 13* (12), 15-37.

Kaf, Y. (2007). *Matematikte Model Kullanımının 6. Sınıf Öğrencilerinin Cebir Erişilerine Etkisi*. Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Üniversitesi İlköğretim Anabilim Dalı. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ankara.

Kaiser, G. (2005). “Introduction to the Working Group Applications and Modelling”. *Proceedings of CERME 4*, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Kaiser, G. and B. Sriraman. (2006). “A Global Survey of International Perspectives on in Mathematics Education”. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (3), 302-310.

Kaiser, G., M. Blomhoj and B.Sriraman. (2006). “Mathematical Modelling and Applications: Empirical and Theoretical Perspectives”. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 82-85.

Kaiser, G., B. Sriraman, M. Blomhøj and F. J. Garcia. (2007). “Report from the Working Group Modelling and Applications - Differentiating Perspectives and Delineating Commonalties”. *Proceedings of CERME 5*, Larnaka, Cyprus.

Kaiser, G., B. Schwarz and S. Tiedemann (2010). Future Teachers' Professional Knowledge on Modeling. Lesh, R., P.L Galbraith, C.R Haines ve A. Hurford.

(Ed.), *Modelling students' mathematical modelling competencies: ICTMA 13* içinde (ss. 433-444). New York, Springer.

Kertil, M. (2008). *Matematik Öğretmen Adaylarının Problem Çözme Becerilerinin Modelleme Sürecinde İncelenmesi*. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. İstanbul.

Leiβ, D. (2005). "Teacher Intervention vs. Self-regulated Learning". *Teaching Mathematics Applications, 24* (2-3), 75-89.

Leikin, R. and M. Lev. (2007). "Multiple Solution Tasks as a Magnifying Glass for Observation of Mathematical Creativity". *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Seoul, Korea.

Lesh, R. (1981). "Applied Mathematical Problem Solving". *Educational Studies in Mathematics, 12*, 235-264

Lesh, R. and G. Carmano. (2003). Piagetian conceptual systems and models for mathematizing everyday experiences. Lesh R. ve H.M. Doerr (Ed.), *Beyond constructivism: a models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* içinde (ss. 71-122). NJ. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. and H.M. Doerr. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. R. Lesh ve H.M. Doerr (Ed.), *Beyond constructivism: a models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* içinde (ss. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., G. Harel. (2003). "Problem Solving, Modelling and Conceptual Development". *Mathematical Thinking and Learning*, *5* (2), 157-189.

Lester, K.F and P.E. Kehle. (2003). From problem solving to modelling: the evolution of thinking about research on complex mathematical activity. R. Lesh ve H.M. Doerr (Ed.), *Beyond constructivism: a models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* içinde (ss. 501-517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lingefjärd, T. (2006). "Faces of Modelling". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 96-112.

Llinares, S. and A. I. Roig. (2005). “Secondary School Students’ Construction and Use of Mathematical Models in Solving Word Problems”. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 502-532.

Maaß, K. (2006). “What are Modelling Competencies?”. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2). 113-142.

MEB (2006). *İlköğretim Okulu Matematik Programı*. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

Miles, M. B.and A. M. Huberman. (1994). *Qualitative Data Analysis (An Expanded Sourcebook)*. London: Sage Publications.

Mousoulides, N., B. Sriraman and C. Christou. (2007). “From Problem Solving to Modelling-The Emergence of Models and Modelling Perspectives”. *Nordics Studies in Mathematics Education, 12* (1), 23-47.

Neuman, W.L. (2007). *Toplumsal araştırma yöntemleri: Nitel ve nicel yaklaşımlar*. (Çev. Sedef Özge) İstanbul: Yayınodası Yayıncılık.

Norman, D. A. (1983). Some observations on mental models. D. Gentner ve A.L. Stevens (Ed.), Mental models içinde (pp. 7-14). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum.

Ornek, F. (2008). “Models in Science Education: Applications of Models in Learning and Teaching Science”. *International Journal of Environmental and Science Education*, *3* (2), 35-45

Phillips, N. and C. Hardy. (2002). *Discourse Analysis: Investigating Processes of Social Construction*. United Kingdom: Sage Publications Inc.

Polya, G. (1973). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*. New Jersey: Princeton University Press.

Schorr, Y.R. and R. Lesh. (2003).A modeling approach for providing teacher development. R. Lesh ve H.M. Doerr (Ed.), *Beyond constructivism: a models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* içinde (ss. 141-157). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Toluk, Z. ve S. Olkun. (2001). *İlköğretimde Matematik öğretimi 1–5 Sınıflar*. Ankara: Artım Yayınları.

Treffers, A. 1987. *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction-The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Türker, B., Y. Sağlam ve A. Umay. (2010). "Preservice Teachers' Performances At Mathematical Modeling Process And Views On Mathematical Modeling". *Procedia Social and Behavioral Sciences, 2* (2), 4622-4628

Umay, A. (2007). *Eski Arkadaşımız Okul Matematiğinin Yeni Yüzü (*Birinci Baskı*)*, Ankara: Aydan WEB Tesisleri.

Van Den Heuvel-Panhuizen,M. (2003). "The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: an Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage". *Educational Studies in Mathematics, 54***,** 9–35.

Vosniadou, S. (2002). Mental models in conceptual development. L. Magnani ve N. Nersessian (Ed.), *Model-based reasoning: science, technology, values* içinde (ss.353-369). New York, Kluwer Academic Press.

Wu, C., D.B. Nale and L.J. Bethel. (1998). "Conceptual Models and Cognitive Learning Styles in Teaching Recursion". *Proceedings of the 29th SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education*, Atlanta, USA.

Yıldırım, A. ve H. Simsek. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (6.Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods*. United Kingdom: Sage Publications Ltd.

Zawojewski, J.S. and R. Lesh. (2003). A models and modelling perspective on problem solving. R. Lesh ve H.M. Doerr (Ed.), *Beyond constructivism: a models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* içinde (ss. 317-336). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Zawojewski, J. (2010). Problem solving versus modelling. Lesh, R., P.L Galbraith, C.R Haines and A. Hurford. (Ed.), *Modelling students' mathematical modelling competencies: ICTMA 13* içinde (ss. 237-243). New York, Springer.

Ek 1: Veri toplama aracı (yazılı sınav ve mülakatta kullanılan sorular)

İSİM-SOYİSİM: **SINIF:**

Değerli Öğretmen Adayı;

Bu ölçme aracı, matematik öğretmenlerinin problemlerin çözümü için ürettikleri modellerin uygunluğunu ve zenginliğini tespit etmek amacıyla hazırlanmıştır.

Model; bir sorunu çözüme kavuşturmak için asıl durumun yerine bu durumun zihinsel temsillerinin geçmesi sonucu oluşmaktadır. Yani model, bireyin bir durumu kavrayışı, yorumlayışıdır. Matematiksel modeller ise problemlere çözüm bulma girişiminde problemleri matematiksel terimlerle (cebirsel ifadeler, grafikler, tablolar vs.) gösterme, matematik diline çevirme sürecidir. Dolayısıyla matematiksel modeller kimi zaman somut kimi zaman soyut kimi zaman da yarı somut yarı soyut olabilir.

Bu araştırmada sizden ölçme aracındaki problemlere birbirinden farklı matematik modelleri kullanarak matematikselleştirmeniz ve çözüme kavuşturmanız istenmektedir. Toplanan bilgiler yalnızca bu araştırmada kullanılacak ve gizli tutulacaktır.

Yanıtsız problem bırakmamanızı diler, araştırmaya getireceğiniz katkı için şimdiden teşekkür ederim.

. Duygu UĞUR

Matematik Öğretmeni

1- İŞ İLANI

Yerel gazetede pizza dağıtım işinde çalışmak isteyenler için bir ilan yer almaktadır. A şirketi her çalışanına aylık 120 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,2 TL prim vermektedir. B şirketi ise çalışanına aylık 48 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,8 TL prim vermektedir. Sizce bu şirketlerden hangisinde çalışmak daha karlıdır? Neden?

a) Bu problemle ilgili anahtar unsurları belirleyerek problemden ne anladığınızı ifade ediniz.

b) Belirlediğiniz anahtar unsurlar çerçevesinde farklı matematiksel modeller kullanarak problemi matematikselleştiriniz ve çözünüz.

c) Kullanmış olduğunuz matematiksel modellerin problem çözme sürecindeki rolünü ve uygunluğunu değerlendiriniz.

2- KOŞU

Ayça ve Berrak tren istasyonundan aynı anda aynı otele doğru koşmaktadır. Ayça otele ulaşması için ***geçen sürenin*** ilk yarısını 25km/sa hızla, diğer yarısını da 15 km/sa hızla koşmakta; Berrak ise ***yolun*** ilk yarısını 25 km/sa hızla, diğer yarısını da 15 km/sa hızla koşmaktadır. Buna göre otele kim daha önce ulaşır?

a) Bu problemle ilgili anahtar unsurları belirleyerek problemden ne anladığınızı ifade ediniz.

b) Belirlediğiniz anahtar unsurlar çerçevesinde farklı matematiksel modeller kullanarak problemi matematikselleştiriniz ve çözünüz.

c) Kullanmış olduğunuz matematiksel modellerin problem çözme sürecindeki rolünü ve uygunluğunu değerlendiriniz.

3- TEL

Bir parça telin bir ucundan telin $^{2}/_{7}$ si, diğer ucundan da (telin ilk halinin) $^{1}/_{5}$ i kesiliyor. Telin orta noktası eski durumuna göre 9 cm kayıyor. Buna göre telin tamamı kaç cm dir?

a) Bu problemle ilgili anahtar unsurları belirleyerek problemden ne anladığınızı ifade ediniz.

b) Belirlediğiniz anahtar unsurlar çerçevesinde farklı matematiksel modeller kullanarak problemi matematikselleştiriniz ve çözünüz.

c) Kullanmış olduğunuz matematiksel modellerin problem çözme sürecindeki rolünü ve uygunluğunu değerlendiriniz.

4- FOLKLORCU

Bir folklor oyuncusu, oyunun gereği; sahnede doğrusal bir çizgi boyunca 5 adım ileri, 2 adım geri atıyor. Oyuna başladığı noktadan 20 adım uzakta ise, bu noktaya gelinceye kadar kaç adım atmıştır?

a) Bu problemle ilgili anahtar unsurları belirleyerek problemden ne anladığınızı ifade ediniz.

b) Belirlediğiniz anahtar unsurlar çerçevesinde farklı matematiksel modeller kullanarak problemi matematikselleştiriniz ve çözünüz.

c)Kullanmış olduğunuz matematiksel modellerin problem çözme sürecindeki rolünü ve uygunluğunu değerlendiriniz.

5- POSTACI

Bir postacının caddenin karşılıklı taraflarındaki postaları dağıtması gerekmektedir. Bunun için ya önce caddenin bir tarafındaki postaları dağıttıktan sonra karşıya geçip caddenin bu tarafındaki postaları dağıtması gerekmektedir. Ya da önce caddenin bir tarafındaki postalardan birini dağıtıp ardından karşıya geçip bu taraftaki iki postayı dağıtacak ve tekrar karşıya geçip iki postayı daha dağıtacaktır. Postacı bütün postalar dağıtılana kadar bu şekilde devam edecektir. Siz postacının yerinde olsanız hangi yolu tercih ederdiniz?

a) Bu problemle ilgili anahtar unsurları belirleyerek problemden ne anladığınızı ifade ediniz.

b)Belirlediğiniz anahtar unsurlar çerçevesinde farklı matematiksel modeller kullanarak problemi matematikselleştiriniz ve çözünüz.

c)Kullanmış olduğunuz matematiksel modellerin problem çözme sürecindeki rolünü ve uygunluğunu değerlendiriniz.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Duygu ÖZGÜN

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 25 Temmuz 1986, Bolu

Medeni Durumu: Evli

E mail: ysflduygu2004@hotmail.com

Yazışma Adresi: Barış cad. Yenişehir Jandarma Lojmanları A Blok No: 4
Yenişehir /MARDİN

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans	E. Ü. Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğrt.	2008
Lise	Yozgat Şehitler Fen Lisesi, Yozgat	2004

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2012-Halen	Suphiye Bölünmez İlköğretim Okulu, Mardin	Matematik Öğretmeni
2011-2012	Yunus Emre İlköğretim Okulu, Kayseri	Matematik Öğretmeni
2008-2011	YahyalıYerköy İlköğretim Okulu, Kayseri	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİL

İngilizce (ÜDS:78)

YAYINLAR

1. Bayazit, İ., & Uğur, D. (2011). Öğretmen Adaylarının Ürettiği Matematik Modellerinin Bilişsel ve Kavramsal Boyutları İtibariyle İncelenmesi. *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi*, 32, 49-67.
2. Bayazit, İ., & Uğur, D. (2011). Bilişsel ve Karamsal Modeller Arası Geçiş Sürecinin Nitel Bir Yaklaşımla İncelenmesi. *Matematikçiler Derneği 10. Matematik Sempozyumu ve Şenlikleri Özetler Kitapçığı* (s. 88). Işık Üniversitesi, İstanbul.

3. Benli B., Uğur D., Aydın V.,Erkoç Ş. ve Akbulut B. “Performans ve Proje Görevlerine İlişkin Veli, Öğretmen ve Öğrenci Görüşleri” IX. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi,(2010).
4. Akbıyık C., Akbulut B., Uğur D., Erkoç Ş., Aydın V., “Sınıf Ortamında Öğretmen ve Öğrenci Duyguları” V. Ulusal Eğitim Yönetimi Kongresi, (2010).