



T.C.

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GALİLE UZAYINDA EĞRİLERİN DARBOUX ELEMANLI
SMARANDACHE EĞRİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE OKUR

AĞUSTOS

**GALİLE UZAYINDA EĞRİLERİN DARBOUX ELEMANLI
SMARANDACHE EĞRİLERİ**

Merve OKUR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Dr.Öğr.Üyesi Tefik ŞAHİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AĞUSTOS 2018

Merve OKUR tarafından hazırlanan “GALİLE UZAYINDA EĞRİLERİN DARBOUX ELEMENLİ SMARANDACHE EĞRİLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tefvik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan: Prof. Dr. Keziban ORBAY

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye: Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ

Matematik Anabilim Dalı, Sinop Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 16/08/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç.Dr. Meryem EVECEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına göre uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri , bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Merve OKUR

16/08/2018

GALİLE UZAYINDA EĞRİLERİN DARBOUX ELEMANLI SMARANDACHE
EĞRİLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Merve OKUR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2018

ÖZET

Bu çalışmada, Galile uzayında birim hızlı bir eğrinin Darboux elemanlarına göre özel Smarandache eğrilerinin konum vektörleri belirlendi. Bu eğrilerin özel halleri olan Jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olma durumları için Smarandache eğrilerinin konum vektörleri araştırıldı. Ayrıca bu eğrilerin daha özel halleri olan dairesel helis, genel helis, Salkowski ve anti-Salkowski eğrilerinin Smarandache eğrileri için bazı karakterizasyonlar verildi. Sonuç olarak, bu eğrilerle ilgili bazı örnekler verilerek grafikleri çizildi.

Sayfa Adedi : 62

Anahtar Kelimeler : Galile uzayı, Smarandache eğrileri, Darboux çatısı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Tevfik ŞAHİN

THE SMARANDACHE CURVES WITH DARBOUX APPARATUS IN THE CURVES
IN GALILEAN SPACE

(M. Sc. Thesis)

Merve OKUR

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2018

ABSTRACT

In this work position vectors of special Smarandache curves were determined by Darboux apparatus of a unit-speed curve in Galilean space. The position vectors of Smarandache curves were investigated for the special cases of these curves, which are geodesic, asymptotic and curvature lines. Furthermore, some characterizations were given for the Smarandache curves of the circular helix, general helix, Salkowski and Anti-Salkowski curves, which are considered to be more specific in the family of curves. Finally, some elaborate examples of these curves were given along with their graphs.

Page Number : 62
Key Words : Galilean Space, Smarandache curves, Darboux Frame
Supervisor : Asistant Professor Tevfik ŞAHİN

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca beni destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Dr.Öğr.Üyesi Tefvik ŞAHİN'e, ayrıca değerli zamanlarını ayırarak tez savunma sınavımda bulunan ve önerileriyle tezimize katkı sağlayan Prof.Dr.Keziban ORBAY ve Doç.Dr.Fatma KARAKUŞ hocalarıma teşekkür ederim. Son olarak ise hayatım boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
TABLolar DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	15
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	16
4.1. G_3 Uzayında Darboux Elemanlarına Göre Konum Vektörü Verilen Bir Eğrinin Özel Smarandache Eğrileri.....	16
4.2. G_3 Uzayında Bir Jeodezik Eğrinin Özel Smarandache Eğrilerinin Konum Vektörleri	20
4.3. G_3 Uzayında Bir Asimptotik Eğrinin Özel Smarandache Eğrilerinin Konum Vektörleri	28
4.4. G_3 Uzayında Bir Eğrilik Çizgisi Eğrisinin Özel Smarandache Eğrilerinin Konum Vektörleri	34
5. UYGULAMALAR	378
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	478
KAYNAKLAR	49

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 1 : Açı ve uzunlukların ölçülerine göre geometriler.....	1
Çizelge 2 : Genel bir eğrinin özel durumları.....	9
Çizelge 3 : Bazı eğrilerin eğrilik ve burulma fonksiyonlarına göre durumları.....	10



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1 : $\gamma(x)$ eğrisinin grafiği.....	39
Şekil 2 : $\gamma(x)$ eğrisinin sırasıyla $\gamma_{TN}, \gamma_{TB}, \gamma_{TNB}$ Smarandache eğrileri.....	39
Şekil 3 : $\varphi(u, v)$ yüzeyi.....	40
Şekil 4 : $\gamma(x)$ eğrisi.....	41
Şekil 5 : γ_{TNB} Smarandache eğrisi.....	41
Şekil 6 : γ_{TB} Smarandache eğrisi.....	42
Şekil 7 : γ_{TN} Smarandache eğrisi.....	42
Şekil 8 : γ_{Tn} Smarandache eğrisi.....	42
Şekil 9 : γ_{TQ} Smarandache eğrisi.....	43
Şekil 10 : γ_{TQn} Smarandache eğrisi.....	43

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\kappa(x)$	Eğrinin eğrilik fonksiyonu
$\tau(x)$	Eğrinin burulma fonksiyonu
$T(x)$	Eğrinin birim teğet vektör alanı
$N(x)$	Eğrinin normal vektör alanı
$B(x)$	Eğrinin binormal vektör alanı
$\kappa_g(x)$	Eğrinin jeodezik eğrilik fonksiyonu
$\kappa_n(x)$	Eğrinin normal eğrilik fonksiyonu
$\tau_g(x)$	Eğrinin jeodezik burulma fonksiyonu
$\alpha^g(x)$	Jeodezik eğrilerin konum vektörü
$\beta^a(x)$	Asimptotik eğrilerin konum vektörü
$\gamma^c(x)$	Eğrilik çizgisinin konum vektörü

Kısaltmalar	Açıklama
\mathbb{R}^n	n- boyutlu reel vektör uzayı
G_3	3- boyutlu Galile uzayı
$v \cdot_G u$	İki vektörün Galile çarpımı
$v \times_G u$	İki vektörün Galile vektörel çarpımı

1. GİRİŞ

Kelime anlamı olarak “yerin ölçülmesi” anlamına gelen geometri; uzay ve uzayda tasarlanabilen (nokta, düzlem, doğru vs.) biçimleri ve bunların birbirleriyle olan ilişkilerini inceleyen bir bilim dalıdır. Geometri çok geniş bir kavram olup içerisinde bir çok işlem, uzay ve özellik barındırır. Hiperbolik geometrinin keşfedilmesine kadar bilim insanları Öklid geometrisinin tek geometrik sistem olduğunu düşünüyorlardı. Hiperbolik geometrinin keşfedilmesiyle Öklid geometrisi dışında geçerli olan bir geometrik sistemin var olduğu kanıtlanmış oldu. 1870 yılında ise Cayley-Klein’in yaptığı çalışmalar sonucunda, düzlemde Öklid geometrisini de içeren 9 farklı geometrik sistemin olduğu gösterildi. Bu geometriler, açılarının ve uzunluklarının; eliptik, parabolik ve hiperbolik ölçülmesine göre adlandırıldı. Örneğin; Öklid geometrisi açının eliptik ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle, Minkowski geometrisi açının hiperbolik ve uzunluğun ise parabolik ölçülmesiyle ve Galile geometrisi de açı ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle adlandırılmıştır. Bu dokuz geometriyi aşağıdaki çizelge ile verebiliriz.

Çizelge 1 : Açı ve uzunlukların ölçülerine göre geometriler (Yaglom, 1979).

GEOMETRİLER	UZUNLUKLARIN ÖLÇÜSÜ		
	ELİPTİK	PARABOLİK	HİPERBOLİK
AÇILARIN ÖLÇÜSÜ	ELİPTİK	PARABOLİK	HİPERBOLİK
ELİPTİK	Eliptik Geometri	Öklid Geometri	Hiperbolik Geometri
PARABOLİK	Co-Eliptik Geometri	Galile Geometri	Co-Minkowski Geometri
HİPERBOLİK	Co-Hiperbolik Geometri	Minkowski Geometri	Doubly Hiperbolik Geometri

Bu tezdeki çalışma alanımız olan Galile geometrisinde vektör çarpımının lineer olmaması, burada yapılacak işlemlerde diğer geometrilere göre daha dikkatli olmamıza ve işlemlerin daha da uzamasına yol açarken bu durum bazen de bazı basitliklere yol açmaktadır. Bu nedenle Öklid geometrisinde genel durumlar için çözülemeyen bazı problemler Galile geometrisinde kolaylıkla çözülebilir. Örneğin; bir eğrinin eğrilik fonksiyonlarına göre genel konum vektörünün belirlenmesi problemi Öklid geometrisinde genel durumlarda çözülemezken Galile geometrisinde eğrinin türüne bağlı olmaksızın çözülebilir (Ali, 2012).

Bu çalışmada Galile geometrisinde bazı özel eğriler incelenecektir. Bilindiği gibi eğriler diferansiyel geometrinin önemli bir sınıfını oluşturur. Eğriler birçok bilim alanında karşımıza çıkabilir. Örneğin; kimyada; elementler arası bağlarda, biyolojide; DNA yapısında, fizikte; fiziksel problemlerin çözümünde, mühendislikte; karayolu dizaynında vs. (Allman ve Rhodes, 2004); (Shaik ve Hilbert, 1991). Fiziksel olarak eğri, hareketli bir parçacığın yörüngesi olarak tanımlanır. Matematiksel olarak ise; reel sayıların bir alt kümesinde tanımlı diferansiyellenebilen bir fonksiyona eğri denir. Yüzey üzerindeki eğrileri incelemek için en önemli araçlardan biri hareketli çatı kavramıdır. Bir eğri verildiğinde bu eğrinin eğrilikleri Frenet çatı formülleri yardımıyla elde edilebilir. Fakat eğrilik fonksiyonları verildiğinde bu eğrilik fonksiyonlarına sahip olan eğrinin konum vektörünü bulmak her geometride her zaman mümkün değildir. Örneğin; Öklid veya Minkowski uzayındaki bir eğrinin konum vektörünün belirlenmesi problemi ancak eğrinin; doğru, helis, slant helis olma özel durumları için çözülebilir. Fakat bu problem Galile uzayında genel bir eğri için çözülebilir.

Eğriler fiziksel problemlerin çözümlerinden veya hareketli bir parçacığın yörüngesinden elde edilebildiği gibi eğrinin Frenet vektörleri kullanılarak da yeni eğriler elde edilebilir. Örneğin; evolüt, involüt, küresel gösterge eğrileri ve Smarandache eğrileri eğrinin Frenet vektör alanları kullanılarak elde edilen eğrilerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu çalışmada Frenet vektörleri yardımıyla elde edilen Smarandache eğrileri incelenmiştir. Smarandache eğrileri ile ilgili farklı uzaylarda, farklı çatılara göre bir çok çalışma yapılmıştır. Aşağıda bu çalışmalardan bazıları kısaca tanıtılmaktadır.

Turgut ve Yılmaz, (2008) makalelerinde Minkowski uzayında herhangi bir eğri için Frenet çatı elemanları yardımıyla Smarandache eğrilerini tanımlamışlardır. Daha sonrada herhangi bir eğrinin Smarandache eğrilerini elde etmişlerdir.

Ali, (2012) çalışmasında Galile uzayında herhangi bir eğrinin konum vektörünü incelemiştir. İlk olarak eğrilerin Frenet çatısını belirlemiş, daha sonra da herhangi bir eğrinin eğrilik fonksiyonu ve burulma fonksiyonu cinsinden konum vektörünü elde etmiştir. Ayrıca dairesel helis, genel helis, Salkowski eğrisi ve Anti-Salkowski eğrisi gibi özel eğrileri için konum vektörlerini tanımlamıştır.

Bektaş ve Yüce, (2013) yılında yaptıkları çalışmalarında 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux çatısına göre bazı özel Smarandache eğrilerini tanımlayıp, bu eğrilerin özel durumlarını ifade etmişlerdir. Bu eğrilere çeşitli örnekler vermişlerdir.

Taşköprü ve Tosun, (2014) yılında yaptıkları çalışmalarında Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini tanımlamışlardır. Bazı özel eğrilerin Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini elde etmişlerdir. Bu sonuçlara uygun örnekler vermişlerdir.

Aziz ve Saad, (2015) çalışmalarında 3-boyutlu Galile uzayında herhangi bir eğrinin konum vektörünü ele alıp, bu eğrinin Smarandache eğrilerini ve bazı özel eğrilerin Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Daha sonra bu eğrilere örnekler verip, grafiklerini çizmişlerdir.

Yine Aziz ve Saad, (2017) yılında yaptıkları çalışmalarında 3-boyutlu Minkowski uzayında Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki alışılmış dönüşümü kullanarak, bir yüzey üzerindeki bazı özel Smarandache eğrilerini araştırmışlardır.

Demircan, (2015) yılında yaptıkları tez çalışmasında Bishop ve 2. Tip Bishop çatılarına göre Smarandache eğrilerini inceleyerek bu eğrilere uygun örnekler vermişlerdir.

Şahin ve Dirişen, (2017) yılında yaptıkları çalışmalarında 3-boyutlu Galile uzayında yüzeydeki herhangi bir eğrinin Darboux elemanlı konum vektörlerini araştırmışlardır. Ayrıca jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi gibi özel eğrilerin Darboux elemanlarına göre konum vektörlerini ifade etmişlerdir.

Bu çalışmada ise; 3-boyutlu Galile uzayında Darboux elemanlarına göre konum vektörü verilmiş bir eğrinin Frenet çatı elemanlarına göre Smarandache eğrileri incelenmiştir. Verilen bu eğrileri özelleştirip jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi gibi eğrilerin Smarandache eğrileri belirlenmiştir. Ayrıca bu eğrilerin daha özel halleri olan dairesel helis, genel helis, Salkowski ve Anti-Salkowski eğrileri için Smarandache eğrilerinin konum vektörleri ifade edilmiştir. Son olarak bazı özel örnekler verilip, grafikleri çizilmiştir.

Aşağıda bu çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

2.1. Tanım

A boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ dan A ya bir fonksiyona A kümesi üzerinde bir *ikili işlem* veya *işlem* denir. İşlemin bir fonksiyon olmasından dolayı şu iki özellik sağlanır:

i) $a, b \in A$ olmak üzere, her (a, b) sıralı ikilisine $*$ işlemi altında A nın bir elemanı karşılık gelir. Yani $(a * b) \in A$.

ii) $a * b$ elemanı tektir (Hacısalıhoğlu, 1996).

2.2. Tanım

$(A, *)$ bir işlemlili bir cebirsel yapı olsun.

i) her $a, b \in A$ için, $a * b = b * a$ ise $*$ değişme özelliğine sahip,

ii) her $a, b, c \in A$ için, $a * (b * c) = (a * b) * c$ ise $*$ birleşme özelliğine sahip,

iii) her $a \in A$ için, $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in A$ varsa $*$ işleminin birimi var ve e ye birim eleman denir.

iv) $*$ işlemi birimli ve $a \in A$ elemanı için, $a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde bir $a' \in A$ varsa a' ye a nın $*$ işlemine göre tersi denir ve a^{-1} veya $-a$ ile gösterilir.

Birleşmeli, birimli ve her elemanın tersi varsa $(A, *)$ cebirsel yapısına bir *grup* denir.

Ayrıca değişme özelliği de varsa bir değişmeli grup veya abel grubu denir (Hacısalıhoğlu, 1996).

2.3. Tanım

A kümesi üzerinde iki işlem \circ ve $*$ olsun, yani $(A, \circ, *)$ iki işlemlili cebirsel yapısı verilsin.

Her $a, b, c \in A$ için;

- i) $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ ise $*$ işleminin \circ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği var,
- ii) $(a \circ b) * c = (a * b) \circ (b * c)$ ise $*$ işleminin \circ işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği var denir.

$(A, \circ, *)$ iki işlemlili cebirsel yapısı verilsin.

- i) (A, \circ) bir değişmeli grup,
- ii) “ $*$ ” işleminin birleşme özelliği var,
- iii) “ $*$ ” işleminin \circ üzerine soldan ve sağdan dağılma özellikleri varsa, $(A, \circ, *)$ cebirsel yapısına bir *halka* denir. Bir halkada birinci işleme göre etkisiz elemana halkanın sıfırı denir. a, b elemanları sıfırdan farklı olduğu halde, ikinci işleme göre $a * b = 0$ olabilir. Bu takdirde a ve b ye birer sıfır bölen denir (Hacısalihoglu, 1996).

2.4. Tanım

Değişmeli ve birimli bir halkada, sıfır eleman çıkarıldıktan sonra geriye kalan elemanların ikinci işleme göre tersi varsa bu halkaya bir *cisim* denir (Hacısalihoglu, 1996).

2.5. Tanım

$(V, +)$ değişmeli bir grup ve $(F, +, \cdot)$ bir cisim olsun. $F \times V \rightarrow V, (c, v) \rightarrow cv$ fonksiyonu

- i) Her $v_1, v_2 \in V$ ve her $c \in F$ için, $c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$,
- ii) Her $v \in V$ ve her $c_1, c_2 \in F$ için, $(c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$,
- iii) Her $v \in V$ ve her $c_1, c_2 \in F$ için, $(c_1c_2)v = c_1(c_2v)$,
- iv) Her $v \in V$ için, $1v_F = v$

özelliklerine sahip ise V kümesine F cismi üzerinde bir *vektör uzayı* denir. Eğer burada $F = \mathbb{R}$ ise V kümesine reel vektör uzayı, $F = \mathbb{C}$ ise V kümesine kompleks vektör uzayı denir. (Hacısalihoglu, 1996).

2.6. Tanım

V bir vektör uzayı ve $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ olsun.

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0_V \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

ise S kümesine, V nin bir *lineer bağımsız alt kümesi* denir (Hacısalıhoğlu, 1996).

2.7. Tanım

S , V vektör uzayının bir alt kümesinin elemanlarının lineer kombinasyonları cinsinden ifade edilebiliyorsa ve V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ise S ye V nin bir *tabanı* veya bir *bazı* denir (Hacısalıhoğlu, 1996).

2.8. Tanım

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, V vektör uzayının bir tabanı ve $T = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ise $m \leq n$ dir. Buradan bir V vektör uzayının sonlu elemanlı bir tabanı varsa her tabanında aynı sayıda eleman olduğu görülür. Herhangi bir tabanındaki elemanların sayısına V vektör uzayının *boyutu* denir ve $BoyV$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1996).

2.9. Tanım

A boş olmayan bir küme ve V bir K cisimi üzerindeki vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa, A kümesine V vektör uzayı ile birleşen *afin uzay* denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

$$i) \forall P, Q \in A \text{ için } f(P, Q) = \overline{PQ} \in V$$

$$ii) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R) \quad (2.1)$$

$$iii) \forall P \in A \text{ ve } \forall \beta \in V \text{ için } f(P, Q) = \beta$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

2.10. Örnek

\mathbb{R}^n sıralı n-lilerinin kümesi \mathbb{R} kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya n-boyutlu standart reel vektör uzayı denir. Bu takdirde,

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = Q - P$$

ile tanımlı f fonksiyonu afin uzay aksiyomlarını sağlar. O halde \mathbb{R}^n sıralı n-lilerinin kümesi, \mathbb{R}^n n-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleşen afin uzaydır. Bu uzaya *standart reel afin uzay* denir (Hacısalihoglu,1982).

2.11. Tanım

V bir vektör uzayı, A kümesinde V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in A$ noktaları için; $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörlerinin oluşturduğu $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi V vektör uzayının bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve $P_i, 1 \leq i \leq n$ noktalarına bu çatının birim noktaları denir.

Eğer $\text{boy}V = n$ ise A kümesine *n-boyutlu bir afin uzay* denir (Hacısalihoglu,1982).

2.12. Tanım

Düzlemin kendi üzerine en genel afin dönüşümü

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= cx + dy + n \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}$ şeklinde 6-parametrel bir dönüşümdür (Hacısalihoglu, 1998).

Eğer burada lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı ($ad-bc=0$) sıfır ise; bu dönüşüme *tekil veya singüler afin dönüşüm* katsayılar determinantı ($ad-bc \neq 0$) sıfır değilse bu dönüşüme *regüler afin dönüşüm* denir. Regüler afin dönüşümleri bileşke işlemine göre bir grup yapısı oluşturur. Bu gruba *afin grup* denir. Afin dönüşümü altında korunan özelliklere de *afin özellik* denir (Hacısalihoglu, 1998).

2.13. Tanım

Afin dönüşümde lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı ($ad - bc = 1$) bir ise; bu durumda dönüşüme *hareket dönüşümü* denir. Hareket dönüşümleri de bir grup yapısı oluştururlar. Bu gruba *hareketler grubu* denir. Bu grup afin grubun bir alt grubudur.

Genel afin dönüşümünde $a = d$, $b = -c$ yazılırsa ve bu dönüşüm bir hareket dönüşümü ise, yani $a^2 + b^2 = 1$ ise;

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= -bx + ay + n \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm 3-parametrelidir. Çünkü $a^2 + b^2 = 1$ olduğundan $a = \cos\alpha$ ve $b = \sin\alpha$ olacak şekilde bir α açısı bulunur. Bu dönüşüme *Öklid Hareket Dönüşümü* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Geometri; hareket dönüşümleri altında değişmeyen (invariant) özellikleri inceleyen bir bilim dalıdır (Hacısalıhoğlu, 1998). Dolayısıyla Öklid geometrisi Öklid hareket dönüşümleri altında korunan özellikleri, Galile geometrisi ise aşağıda vereceğimiz Galile hareket dönüşümleri altında korunan özellikleri inceler.

2.14. Tanım

G_3 uzayında hareket dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a + x \\ \bar{y} &= b + cx + y\cos\theta + z\sin\theta \\ \bar{z} &= d + ex - y\sin\theta + z\cos\theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

burada a, b, c, d, e ve θ reel sayılardır.

G_3 hareketler grubu 6-parametrelidir. G_3 uzayındaki hareket dönüşümleri; öteleme, dönme ve burkulma hareketlerinin bileşkesidir. Daha ayrıntılı bilgi için Yaglom'un çalışmasına bakılabilir (Yaglom, 1979: 174-201).

2.15. Tanım

Galile uzayında bir $\gamma(x)$ eğrisinin Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$, eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ olsun. Burada $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ fonksiyonları sabit fonksiyon ise; $\gamma(x)$ eğrisine *dairesel helis* denir (Ali, 2012).

2.16. Tanım

Galile uzayında $\kappa(x)$ eğrilik ve $\tau(x)$ burulma fonksiyonuna sahip bir $\gamma(x)$ eğrisi için $\frac{\tau}{\kappa}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise; $\gamma(x)$ eğrisine *genel helis* denir (Ali, 2012).

2.17. Tanım

Galile uzayında eğrilik fonksiyonu sabit, burulma fonksiyonu sabit olmayan bir regüler eğriye *Salkowski eğrisi* denir (Ali, 2012).

2.18. Tanım

Galile uzayında burulma fonksiyonu sabit, eğrilik fonksiyonu sabit olmayan bir regüler eğriye *Anti-Salkowski eğrisi* denir (Ali, 2012).

Diferansiyel geometrinin bilinen önemli bazı sonuçlarını aşağıda bir tablo ile verecek olursak $\gamma(x)$ eğrisi için şunları söyleyebiliriz.

Çizelge 2 : Genel bir eğrinin özel durumları

$\gamma(x)$ eğrisi için durumlar		
Jeodezik Eğri	\Leftrightarrow	$\kappa_g \equiv 0$
Asimptotik Eğri	\Leftrightarrow	$\kappa_n \equiv 0$
Eğrilik Çizgisi	\Leftrightarrow	$\tau_g \equiv 0$

Aşağıdaki çizelge ile eğrilik fonksiyonlarının eğrilerin bazı özel halleri için durumları verilmiştir.

Çizelge 3 : Bazı eğrilerin eğrilik ve burulma fonsiyonlarına göre durumları

$\gamma(x)$ eğrisi için özel durumlar		
$\kappa \equiv 0$	\Leftrightarrow	γ bir doğrudur.
$\tau \equiv 0$	\Leftrightarrow	γ bir düzlemsel eğridir.
$\kappa \equiv \text{sabit} > 0, \tau \equiv \text{sabit} > 0$	\Leftrightarrow	γ bir dairesel helisdir.
$\frac{\tau}{\kappa} \equiv \text{sabit}$	\Leftrightarrow	γ bir genel helisdir.
$\kappa \equiv \text{sabit}, \tau \neq \text{sabit}$	\Leftrightarrow	γ bir Salkowski eğrisidir.
$\kappa \neq \text{sabit}, \tau \equiv \text{sabit}$	\Leftrightarrow	γ bir Anti-Salkowski eğrisidir.

Bu ifadeler Galile uzayında bir eğri için de geçerli olup, Galile uzayında bu eğrilerle ilgili daha detaylı bilgiler (Dede, Ekici ve Çöken, 2013); (Karacan ve Bukcu, 2017); (Ali, 2012) çalışmalarında bulunabilir.

Aşağıdaki tanımlarda Galile uzayındaki işlemler ve özellikleri verilmiştir.

2.19. Tanım

G_3 uzayında $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $u = (u_1, u_2, u_3)$ gibi iki vektörün Galile çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$v \cdot_G u = \begin{cases} v_1 u_1, & v_1 \neq 0 \text{ veya } u_1 \neq 0 \\ v_2 u_2 + v_3 u_3, & v_1 = 0 \text{ ve } u_1 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Burada $v \cdot_G u = 0$ ise v ve u vektörleri diktir (Yaglom,1979).

2.20. Tanım

G_3 uzayında iki vektörün vektörel çarpımı

$$v \times_G u = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}; & v_1 \neq 0 \text{ veya } u_1 \neq 0 \\ \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}; & v_1 = 0 \text{ ve } u_1 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlıdır (Aziz ve Saad, 2015).

2.21. Tanım

Bir $A = (x, y, z)$ vektörünün normu

$$\|A\|_G = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ \sqrt{|y^2 + z^2|}, & x = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklindedir. Burada $A = (x, y, z)$ vektörüne $x = 0$ ise *izotropik*, $x \neq 0$ ise *non-izotropik* vektör denir (Yaglom, 1979).

2.1. Teorem

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$ birim hızlı eğrisi

$$\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$$

şeklinde verilir. Bu eğrinin Frenet çatı elemanları

$$T(x) = \gamma'(x)$$

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{\|\gamma''(x)\|} \gamma''(x) \\ &= \frac{1}{\kappa(x)} \gamma''(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= T(x) \times_G N(x) \\ &= \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z''(x), y''(x)) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonu $\kappa(x) = \sqrt{(y'')^2 + (z'')^2}$ olarak tanımlanır. $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ vektörlerine sırasıyla teğet vektör alanı, normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir.

2.1. İspat

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$, birim hızlı $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$ eğrinin Frenet vektör alanlarını elde etmek için eğrinin birinci ve ikinci türevleri alınmalıdır. O halde;

$$\begin{aligned}\gamma'(x) &= (1, y'(x), z'(x)), \\ \gamma''(x) &= (0, y''(x), z''(x))\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{T}(x)$ vektörü, $\gamma(x)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı olup eğrinin birinci türevine eşittir. Yani

$$\mathbf{T}(x) = (1, y'(x), z'(x))$$

şeklindedir.

$\mathbf{N}(x)$ vektörü, $\gamma(x)$ eğrisinin binormal vektör alanı olup

$$\mathbf{N}(x) = \frac{1}{\|\gamma''(x)\|} \gamma''(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada $\|\gamma''(x)\| = \sqrt{(y'')^2 + (z'')^2} = \kappa(x)$ şeklindedir. O halde $\mathbf{N}(x)$ normal vektör alanı

$$\mathbf{N}(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, y''(x), z''(x))$$

olarak elde edilir.

$\mathbf{B}(x)$ vektörü, $\gamma(x)$ eğrisinin binormal vektör alanı olup

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{T}(x) \times \mathbf{N}(x)$$

olarak tanımlıdır. O halde $\mathbf{B}(x)$ binormal vektör alanı

$$\mathbf{B}(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z''(x), y''(x))$$

şeklinde elde edilir.

2.2. Teorem

Frenet-Serret formülleri ve türevleri arasındaki ilişki matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

şeklindedir.

2.2. İspat

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet vektör alanlarının türevleri alındığında, eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden yukarıdaki eşitlikler elde edilir. Burada $\kappa(x) = \sqrt{(y'')^2 + (z'')^2}$ eğrinin eğrilik fonksiyonu ve $\tau(x) = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\kappa(x)^2}$ eğrinin burulma fonksiyonudur.

Galile uzayında yüzey üzerindeki eğriler incelenirken Frenet çatısı dışında başka bir çatı daha kullanılır. Eğrinin bir P noktasında teğet vektör alanı \mathbf{T} ve bu noktadaki yüzeyin birim normal vektör alanı \mathbf{n} olsun. Bu durumda $\mathbf{n} \times_{\mathcal{G}} \mathbf{T} = \mathbf{Q}$ vektör alanı \mathbf{T} ve \mathbf{n} vektörlerine dik olan birim bir vektör alanıdır. O halde bu vektör alanlarının oluşturduğu $\{\mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\}$ çatısına “Darboux çatı alanı” veya “teğet normal çatı alanı” denir.

2.3. Teorem

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset G_3$ birim hızlı bir eğri ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\}$, M yüzeyinin Darboux çatı alanı olmak üzere γ eğrisinin Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ 0 & 0 & \tau_g \\ 0 & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

olarak elde edilir (Yaglom, 1979).

2.3. İspat

$\{\mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\}$ Darboux çatı elemanlarının türevleri alındığında eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden yukarıdaki eşitlikler elde edilir. Burada $\kappa_g(x)$, $\kappa_n(x)$ ve $\tau_g(x)$ sırasıyla jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik burulma fonksiyonlarıdır.

$\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ fonksiyonları ile Darboux elemanları arasındaki ilişkinin

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2 \quad , \quad \tau = -\tau_g + \frac{\kappa_g' \kappa_n - \kappa_g \kappa_n'}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \quad (2.11)$$

şeklinde olduğu 2.1 Teorem yardımıyla elde edilebilir.

2.22. Tanım

G_3 uzayında regüler bir $\alpha(x)$ eğrisinin Frenet çatı elemanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ olmak üzere bu eğrinin bazı özel Smarandache eğrileri;

$$\begin{aligned} \alpha_{TN} &= \frac{\mathbf{T} + \mathbf{N}}{\|\mathbf{T} + \mathbf{N}\|} \\ \alpha_{TB} &= \frac{\mathbf{T} + \mathbf{B}}{\|\mathbf{T} + \mathbf{B}\|} \\ \alpha_{TNB} &= \frac{\mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{B}}{\|\mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{B}\|} \end{aligned} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır. (Aziz ve Saad, 2015).

Burada Galile çarpım işlemine göre $\|\mathbf{T} + \mathbf{N}\| = \|\mathbf{T} + \mathbf{B}\| = \|\mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{B}\| = 1$.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Galile uzayında yüzey üzerindeki eğrilerin Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerinin belirlenmesi için Şahin ve Dirişen (2017) yaptıkları çalışmada verilen konum vektöründen yararlanılmıştır. Buradan hareketle eğrilik fonksiyonlarına göre konum vektörü verilen genel bir eğrinin Smarandache eğrileri belirlenmiştir. Bu yöntem sayesinde daha özel eğrilerin de Smarandache eğrileri elde edilmiştir.



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde G_3 uzayında bir yüzey üzerindeki Darboux elemanlarına göre konum vektörü verilen bir eğrinin özel Smarandache eğrilerini inceleyeceğiz.

4.1. G_3 Uzayında Darboux Elemanlarına Göre Konum Vektörü Verilen Bir Eğrinin Özel Smarandache Eğrileri

4.1. Teorem

$\gamma(x)$, G_3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve $\gamma(x)$ eğrisinin Frenet çâtısı $\{T, N, B\}$ olsun. Bu durumda $\gamma(x)$ birim hızlı eğrisinin Frenet çâtısına göre Darboux elemanlı **TN, TB, TNB** özel Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{TN}}(x) &= \left(1, \int N_1 dx + \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} N_1, \int N_2 dx + \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} N_2 \right), \\ \gamma_{\text{TB}}(x) &= \left(1, \int N_1 dx - \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} N_2, \int N_2 dx - \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} N_1 \right), \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\gamma_{\text{TNB}}(x) = \left(1, \int N_1 dx + \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} (N_1 - N_2), \int N_2 dx + \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} (N_2 - N_1) \right)$$

şeklindedir. Burada N_1 ve N_2 fonksiyonları

$$N_1 = \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) - \kappa_n \sin(\int \tau_g dx),$$

$$N_2 = \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) - \kappa_n \cos(\int \tau_g dx)$$

şeklinde olup ayrıca $\gamma(x)$ eğrisi için κ_g jeodezik eğrilik fonksiyonu, κ_n normal eğrilik fonksiyonu ve τ_g jeodezik burulma fonksiyonudur.

4.1. İspat

G_3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde bulunan birim hızlı $\gamma(x)$ eğrisinin Darboux elemanlarına göre konum vektörü

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x, \int(\int(\kappa_g \sin(\int \tau_g dx) - \kappa_n \int \tau_g \sin(\int \tau_g dx) dx) dx) dx, \\ \int(\int(\kappa_g \cos(\int \tau_g dx) - \kappa_n \int \tau_g \cos(\int \tau_g dx) dx) dx) dx \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

olarak verilir (Şahin ve Dirişen, 2017).

Darboux elemanlarına göre konum vektörü verilen $\gamma(x)$ eğrisinin özel Smarandache eğrilerini elde etmek için eğrinin Frenet vektörlerini bulmalıyız. Bunun için $\gamma(x)$ eğrisinin türevlerini almalıyız. O halde $\gamma(x)$ eğrisinin türevleri sırasıyla;

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1, \int(\kappa_g \sin(\int \tau_g dx) - \kappa_n \int \tau_g \sin(\int \tau_g dx) dx) dx, \\ \int(\kappa_g \cos(\int \tau_g dx) - \kappa_n \int \tau_g \cos(\int \tau_g dx) dx) dx \end{pmatrix},$$

$$\gamma''(x) = \begin{pmatrix} 0, \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) - \kappa_n \int \tau_g \sin(\int \tau_g dx) dx, \\ \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) - \kappa_n \int \tau_g \cos(\int \tau_g dx) dx \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$\gamma(x)$ eğrisinin Frenet çatı elemanlarını ifade eden Teorem 2.1 kullanılırsa;

$T(x)$ vektörü, $\gamma(x)$ eğrisinin birim teğet vektörü olduğundan eğrinin birinci türevine eşittir. O halde $T(x)$ teğet vektörü

$$T = \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1, \int(\kappa_g \sin(\int \tau_g dx) - \kappa_n \int \tau_g \sin(\int \tau_g dx) dx) dx, \\ \int(\kappa_g \cos(\int \tau_g dx) - \kappa_n \int \tau_g \cos(\int \tau_g dx) dx) dx \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$N(x)$ vektörü, $\gamma(x)$ eğrisinin birim normal vektörü olup;

$$N = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$\|\gamma''\| = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}}$$

olduğundan $\mathbf{N}(x)$ birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} \begin{pmatrix} 0, \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) - \kappa_n \sin(\int \tau_g dx), \\ \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) - \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$\mathbf{B}(x)$ vektörü $\gamma(x)$ eğrisinin binormal vektör alanı olup

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times_G \mathbf{N}$$

şeklindedir. Buna göre $\mathbf{B}(x)$ vektörü

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} \begin{pmatrix} 0, -\kappa_g \cos(\int \tau_g dx) + \kappa_n \cos(\int \tau_g dx), \\ \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) - \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $\gamma(x)$ eğrisinin Frenet vektörleri yardımıyla Smarandache eğrilerini bulacağız. O halde Tanım 2.22 yardımıyla $\mathbf{T}(x)$ ve $\mathbf{N}(x)$ vektörlerinin oluşturduğu Smarandache eğrisi

$$\gamma_{TN} = \mathbf{T} + \mathbf{N}$$

şeklinde olduğundan $\gamma_{TN}(x)$ Smarandache eğrisinin Darboux elemanlı konum vektörü;

$$\gamma_{TN}(x) = \left(1, \int N_1 dx + \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} N_1, \int N_2 dx + \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} N_2 \right)$$

olarak bulunur. $\gamma_{TB}(x)$ Smarandache eğrisi

$$\gamma_{TB} = \mathbf{T} + \mathbf{B}$$

şeklinde olduğundan $r_{TB}(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü

$$r_{TB}(x) = \left(1, \int N_1 dx - \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} N_2, \int N_2 dx - \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} N_1 \right)$$

şeklinde elde edilir.

Son olarak γ_{TNB} Smarandache eğrisi

$$\gamma_{TNB} = T + N + B$$

şeklinde olduğundan

$\gamma_{TNB}(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü;

$$\gamma_{TNB}(x) = \left(1, \int N_1 dx + \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} (N_1 - N_2), \int N_2 dx + \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} (N_2 - N_1) \right)$$

olarak elde edilir.

Yukarıdaki denklemlerde N_1 ve N_2 fonksiyonları ise;

$$N_1 = \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) - \kappa_n \sin(\int \tau_g dx),$$

$$N_2 = \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) - \kappa_n \cos(\int \tau_g dx)$$

şeklindedir.

Yukarıda elde ettiğimiz TN , TB ve TNB özel Smarandache eğrilerinin konum vektörleri jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi gibi özel eğriler için tanımlandığında bu işlem için eğrilerin $\kappa_g(x)$, $\kappa_n(x)$ ve $\tau_g(x)$ fonksiyonlarına bazı özel koşullar uygulanır. Bu eğrilerin çok daha özel durumları olan dairesel helis, genel helis, Salkowski ve Anti-Salkowski gibi eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörlerini bulmak için ise $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$

fonksiyonlarına bazı özel koşullar uygulanır. Buradan hareketle bir çok özel eğrilerin özel Smarandache eğrilerinin konum vektörleri elde edilmiş olur.

4.2. G_3 Uzayında Bir Jeodezik Eğrinin Özel Smarandache Eğrilerinin Konum Vektörleri

Aşağıdaki teorem bir jeodezik eğrinin Smarandache eğrisinin genel konum vektörünü ifade etmektedir.

4.2. Teorem

G_3 uzayında $\alpha^g(x)$ jeodezik eğri ailesinin özel Smarandache eğrilerinin konum vektörleri

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{TN}}^g &= \begin{pmatrix} 1, & \int \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx, \\ - \int \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) dx - \sin \int \tau_g dx \end{pmatrix}, \\ \alpha_{\text{TB}}^g &= \begin{pmatrix} 1, & \int \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx, \\ - \int \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx \end{pmatrix}, \\ \alpha_{\text{TNB}}^g &= \begin{pmatrix} 1, & \int \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx + \sin \int \tau_g dx, \\ - \int \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) dx - \sin \int \tau_g dx + \cos \int \tau_g dx \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.2.1)$$

şeklindedir.

4.2. İspat

G_3 uzayında jeodezik eğri ailesinin Darboux elemanlı $\alpha^g(x)$ konum vektörü,

$$\alpha^g(x) = \begin{pmatrix} x, & - \iint \kappa_n \int \tau_g \sin(\int \tau_g dx) dx dx, \\ - \iint \kappa_n \int \tau_g \cos(\int \tau_g dx) dx dx \end{pmatrix}\quad (4.2.2)$$

şeklindedir. G_3 uzayında jeodezik eğri ailesinin Darboux elemanlı $\alpha^g(x)$ konum vektörü, (4.1.2) genel konum vektöründe $\kappa_g \equiv 0$ yazılarak elde edilmiştir (Şahin ve Dirişen, 2017).

Şimdi $\alpha^g(x)$ eğrisinin Smarandache eğrilerini bulmak için Frenet vektörlerini bulmalıyız. Öncelikle $\alpha^g(x)$ eğrisinin sırasıyla türevleri alınırsa:

$$\alpha^{g'}(x) = \left(1, \int \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) dx, -\int \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) dx \right),$$

$$\alpha^{g''}(x) = \left(0, \kappa_n \cos \int \tau_g dx, -\kappa_n \sin \int \tau_g dx \right)$$

eğrileri elde edilir.

G_3 uzayında $\alpha^g(x)$ jeodezik eğrisinin Frenet vektör alanları $\alpha^g(x)$ jeodezik eğrisinin Frenet vektör alanları Teorem 2.1 kullanılarak bulunmuştur.

$T(x)$ vektörü

$$T = \alpha^{g'}(x) = \left(1, \int \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) dx, -\int \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) dx \right)$$

şeklinde elde edilir.

$N(x)$ birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\alpha^{g''}(x)}{\|\alpha^{g''}(x)\|}$$

şeklinde tanımlı olup, gereken işlemler yapıldığında;

$$N = \left(0, \cos \int \tau_g dx, -\sin \int \tau_g dx \right)$$

olarak elde edilir.

$B(x)$ binormal vektör alanı olup

$$B = \left(0, \sin \int \tau_g dx, \cos \int \tau_g dx \right)$$

şeklinde elde edilir.

Buradan hareketle Frenet vektörleri yardımıyla $\alpha^g(x)$ jeodezik eğri ailesinin Smarandache eğrilerini elde edebiliriz.

$$\alpha^g_{TN}(x) = \mathbf{T} + \mathbf{N}$$

şeklinde olup $\alpha^g_{TN}(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü

$$\alpha^g_{TN}(x) = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx, \\ - \int \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) dx - \sin \int \tau_g dx \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $\alpha^g_{TB}(x)$ Smarandache eğrisi

$$\alpha^g_{TB} = \mathbf{T} + \mathbf{B}$$

şeklinde olup $\alpha^g_{TB}(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü

$$\alpha^g_{TB}(x) = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) dx + \sin(\int \tau_g dx), \\ - \int \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) dx + \cos(\int \tau_g dx) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Son olarak $\alpha^g_{TNB}(x)$ Smarandache eğrisi

$$\alpha^g_{TNB}(x) = \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{B}$$

şeklinde tanımlı olup $\alpha^g_{TNB}(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü

$$\alpha^g_{TNB}(x) = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_n \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx + \sin \int \tau_g dx, \\ - \int \kappa_n \sin(\int \tau_g dx) dx - \sin \int \tau_g dx + \cos \int \tau_g dx \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

4.2.1. Sonuç

G_3 uzayında $\alpha^g(x)$ jeodezik eğri ailesinin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri Teorem 4.1 ile verilen (4.1.1) denklemlerinde $\kappa_g \equiv 0$ yazılarak da elde edilebilir.

Şimdi eğrilik fonksiyonları yardımıyla jeodezik eğriler için daha özel sonuçlar vereceğiz.

4.2.2. Sonuç

Bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $\gamma(x)$ eğrisinin Frenet elemanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau$ ve Darboux elemanları $\mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}, \kappa_g, \kappa_n$ ve τ_g olsun. $\kappa(x)$ eğrilik ve $\tau(x)$ burulma fonksiyonlarının $\kappa_g(x)$ jeodezik eğrilik, $\kappa_n(x)$ normal eğrilik ve $\tau_g(x)$ jeodezik burulma fonksiyonları arasındaki ilişki

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2, \quad \tau = -\tau_g + \frac{\kappa_g' \kappa_n - \kappa_g \kappa_n'}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \quad (4.2.3)$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $\gamma(x)$ eğrisi bir jeodezik eğri ise;

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 \Rightarrow \kappa = \kappa_n, \quad \tau = -\tau_g \quad (4.2.4)$$

eşitliklerine ulaşılır. Eğer $\gamma(x)$ eğrisi bir asimptotik eğri ise;

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 \Rightarrow \kappa = \kappa_g, \quad \tau = -\tau_g \quad (4.2.5)$$

eşitlikleri elde edilir. Son olarak $\gamma(x)$ eğrisi bir eğrilik çizgisi olmak üzere ve özel olarak $\kappa_g = a_1, \kappa_n = 0$ olarak alınırsa;

$$\kappa^2 = a_1^2, \quad \tau = 0 \quad (4.2.6)$$

eşitliklerine ulaşılır.

4.2.3. Sonuç

G_3 uzayında dairesel helis olan jeodezik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\alpha_{ch}^g \mathbf{TN} = \left(1, \frac{e}{c} \sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1), \frac{e}{c} \cos(cx + c_1) - \sin(cx + c_1) \right),$$

$$\alpha_{ch}^g \mathbf{TB} = \left(1, \left(\frac{e+c}{c} \right) \sin(cx + c_1), \left(\frac{e+c}{c} \right) \cos(cx + c_1) \right), \quad (4.2.7)$$

$$\alpha_{ch}^g \mathbf{TNB} = \left(1, \left(\frac{e+c}{c} \right) \sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1), \left(\frac{e+c}{c} \right) \cos(cx + c_1) - \sin(cx + c_1) \right)$$

şeklindedir.

4.2.3. İspat

Tanım 2.15 de ifade edilen dairesel helis eğrisi tanımından, (yani κ sabit fonksiyon ve τ sabit fonksiyon) ve (4.2.3) denkleminde κ_n eğrilik fonksiyonu $\kappa_n = e$ (sabit) ve $\tau_g = c$ (sabit) olarak elde edilir. O halde Jeodezik eğrilerin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.2.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, jeodezik olan dairesel helis eğrileri için Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\alpha_{ch}^g \mathbf{TN} = \left(1, \frac{e}{c} \sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1), \frac{e}{c} \cos(cx + c_1) - \sin(cx + c_1) \right),$$

$$\alpha_{ch}^g \mathbf{TB} = \left(1, \left(\frac{e+c}{c} \right) \sin(cx + c_1), \left(\frac{e+c}{c} \right) \cos(cx + c_1) \right),$$

$$\alpha_{ch}^g \mathbf{TNB} = \left(1, \left(\frac{e+c}{c} \right) \sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1), \left(\frac{e+c}{c} \right) \cos(cx + c_1) - \sin(cx + c_1) \right)$$

şeklinde elde edilir.

4.2.4. Sonuç

G_3 uzayında genel helis olan jeodezik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\alpha_{gh}^g \mathbf{TN} = \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{d} \sin(d \int \kappa_n dx) + \cos(d \int \kappa_n dx), \\ \frac{1}{d} \cos(d \int \kappa_n dx) - \sin(d \int \kappa_n dx) \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{gh}^g \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{d} \sin(d \int \kappa_n dx) + \sin(d \int \kappa_n dx), \\ \frac{1}{d} \cos(d \int \kappa_n dx) + \cos(d \int \kappa_n dx) \end{pmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$\alpha_{gh}^g \mathbf{TNB} = \begin{pmatrix} 1, \frac{d+1}{d} \sin(d \int \kappa_n dx) + \cos(d \int \kappa_n dx), \\ \frac{d+1}{d} \cos(d \int \kappa_n dx) - \sin(d \int \kappa_n dx) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.2.4. İspat

Tanım 2.16 da ifade edilen genel helis eğrisi tanımından, (yani $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit fonksiyon) ve (4.2.3) denkleminde $\tau_g = d \cdot \kappa_n$ olarak elde edilir. O halde jeodezik eğrilerin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.2.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, jeodezik olan genel helis eğrileri için Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\alpha_{gh}^g \mathbf{TN} = \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{d} \sin(d \int \kappa_n dx) + \cos(d \int \kappa_n dx), \\ \frac{1}{d} \cos(d \int \kappa_n dx) - \sin(d \int \kappa_n dx) \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{gh}^g \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{d} \sin(d \int \kappa_n dx) + \sin(d \int \kappa_n dx), \\ \frac{1}{d} \cos(d \int \kappa_n dx) + \cos(d \int \kappa_n dx) \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{gh}^g \mathbf{TNB} = \begin{pmatrix} 1, \frac{d+1}{d} \sin(d \int \kappa_n dx) + \cos(d \int \kappa_n dx), \\ \frac{d+1}{d} \cos(d \int \kappa_n dx) - \sin(d \int \kappa_n dx) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.5. Sonuç

G_3 uzayında Salkowski eğrisi olan jeodezik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\begin{aligned}\alpha_s^g \mathbf{TN} &= \left(1, m \int \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos(\int \tau_g dx), \right. \\ &\quad \left. -m \int \sin(\int \tau_g dx) dx - \sin(\int \tau_g dx) \right), \\ \alpha_s^g \mathbf{TB} &= \left(1, m \int \cos(\int \tau_g dx) dx + \sin(\int \tau_g dx), \right. \\ &\quad \left. -m \int \sin(\int \tau_g dx) dx + \cos(\int \tau_g dx) \right),\end{aligned}\quad (4.2.9)$$

$$\alpha_s^g \mathbf{TNB} = \left(1, m \int \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos(\int \tau_g dx) + \sin(\int \tau_g dx), \right. \\ \left. -m \int \sin(\int \tau_g dx) dx - \sin(\int \tau_g dx) + \cos(\int \tau_g dx) \right)$$

şeklindedir.

4.2.5. İspat

Tanım 2.17 de ifade edilen Salkowski eğrisi tanımından, (yani κ sabit fonksiyon ve τ sabit değil) ve (4.2.3) denkleminde κ_n eğrilik fonksiyonu $\kappa_n = m$ sabit fonksiyon olarak elde edilir. O halde Jeodezik eğrilerin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.2.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, jeodezik olan Salkowski eğrileri için Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\alpha_s^g \mathbf{TN} = \left(1, m \int \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos(\int \tau_g dx), \right. \\ \left. -m \int \sin(\int \tau_g dx) dx - \sin(\int \tau_g dx) \right),$$

$$\alpha_s^g \mathbf{TB} = \left(1, m \int \cos(\int \tau_g dx) dx + \sin(\int \tau_g dx), \right. \\ \left. -m \int \sin(\int \tau_g dx) dx + \cos(\int \tau_g dx) \right),$$

$$\alpha_s^g \mathbf{TNB} = \left(1, m \int \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos(\int \tau_g dx) + \sin(\int \tau_g dx), \right. \\ \left. -m \int \sin(\int \tau_g dx) dx - \sin(\int \tau_g dx) + \cos(\int \tau_g dx) \right)$$

şeklinde elde edilir.

4.2.6. Sonuç

G_3 uzayında Anti-Salkowski eğrisi olan jeodezik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\begin{aligned}\alpha_{as}^g \mathbf{TN} &= \left(1, \int \kappa_n \cos(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1), \right. \\ &\quad \left. - \int \kappa_n \sin(cx + c_1) dx - \sin(cx + c_1) \right), \\ \alpha_{as}^g \mathbf{TB} &= \left(1, \int \kappa_n \cos(cx + c_1) dx + \sin(cx + c_1), \right. \\ &\quad \left. - \int \kappa_n \sin(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1) \right),\end{aligned}\quad (4.2.10)$$

$$\alpha_{as}^g \mathbf{TNB} = \left(1, \int \kappa_n \cos(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1) + \sin(cx + c_1), \right. \\ \left. - \int \kappa_n \sin(cx + c_1) dx - \sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1) \right)$$

şeklindedir.

4.2.6. İspat

Tanım 2.18 de ifade edilen Anti-Salkowski eğrisi tanımından, (yani τ sabit fonksiyon ve κ sabit değil) ve (4.2.3) denkleminde τ_g burulma fonksiyonu $\tau_g = c$ sabit fonksiyon olarak elde edilir. O halde jeodezik eğrilerin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.2.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, jeodezik olan Anti-Salkowski eğrileri için Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\alpha_{as}^g \mathbf{TN} = \left(1, \int \kappa_n \cos(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1), \right. \\ \left. - \int \kappa_n \sin(cx + c_1) dx - \sin(cx + c_1) \right),$$

$$\alpha_{as}^g \mathbf{TB} = \left(1, \int \kappa_n \cos(cx + c_1) dx + \sin(cx + c_1), \right. \\ \left. - \int \kappa_n \sin(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1) \right),$$

$$\alpha_{as}^g \mathbf{TNB} = \left(1, \int \kappa_n \cos(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1) + \sin(cx + c_1), \right. \\ \left. - \int \kappa_n \sin(cx + c_1) dx - \sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1) \right)$$

şeklinde elde edilir.

4.3. G_3 Uzayında Bir Asimptotik Eğrinin Özel Smarandache Eğrilerinin Konum Vektörleri

Aşağıdaki teorem bir asimptotik eğrinin Smarandache eğrisinin konum vektörünü ifade etmektedir.

4.3. Teorem

G_3 uzayında $\beta^a(x)$ asimptotik eğri ailesinin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri

$$\beta_{\text{TN}}^a = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx, \\ \int \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx \end{pmatrix},$$

$$\beta_{\text{TB}}^a = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx - \cos \int \tau_g dx, \\ \int \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx \end{pmatrix}, \quad (4.3.1)$$

$$\beta_{\text{TNB}}^a = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx - \cos \int \tau_g dx, \\ \int \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx + \sin \int \tau_g dx \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.3. İspat

G_3 uzayında asimptotik eğri ailesinin $\beta^a(x)$ konum vektörü,

$$\beta^a(x) = \begin{pmatrix} x, \iint (\kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx) dx, \\ \iint (\kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx) dx \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

şeklindedir. G_3 uzayında asimptotik eğri ailesinin $\beta^a(x)$ konum vektörü, (4.1.2) genel konum vektöründe $\kappa_n \equiv 0$ yazılarak elde edilmiştir (Şahin ve Dirişen, 2017).

Şimdi $\beta^a(x)$ eğrisinin Smarandache eğrilerini elde edebilmek için Frenet vektörlerini bulmalıyız. Bu nedenle $\beta^a(x)$ eğrisinin sırasıyla türevleri alınır;

$$\beta^{a'}(x) = (1, \int \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx, \int \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx),$$

$$\beta^{a''}(x) = (0, \kappa_g \sin(\int \tau_g dx), \kappa_g \cos(\int \tau_g dx))$$

şeklinde elde edilir. $\beta^a(x)$ asimptotik eğri ailesinin Frenet vektör alanları Teorem 2.1 yardımıyla elde edilmiştir.

$T(x)$ vektörü;

$$T = \beta^a(x)' = \left(1, \int \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx, \int \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx \right)$$

şeklinde elde edilir.

$N(x)$ birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\beta^{a''}(x)}{\|\beta^{a''}(x)\|}$$

şeklinde tanımlı olup, gerekli işlemler yapıldığında

$$N = \left(0, \sin \int \tau_g dx, \cos \int \tau_g dx \right)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $B(x)$ binormal vektör alanı da

$$B = \left(0, -\cos \int \tau_g dx, \sin \int \tau_g dx \right)$$

şeklinde elde edilir.

Buradan hareketle Frenet vektör alanı yardımıyla $\beta^a(x)$ asimptotik eğri ailesinin Smarandache eğrilerini elde edebiliriz.

$\beta^a(x)$ asimptotik eğri ailesinin Smarandache eğrilerinin konum vektörlerini bulmak için $T(x)$, $N(x)$, $B(x)$ Frenet çatı elemanları kullanılır. Buradan

$$\beta_{TN}^a(x) = T + N$$

şeklinde olup $\beta_{TN}^a(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü;

$$\beta_{TN}^a(x) = \left(1, \int \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx, \int \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx \right)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$\beta_{TB}^a(x) = \mathbf{T} + \mathbf{B}$$

şeklinde tanımlı olup $\beta_{TB}^a(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü;

$$\beta_{TB}^a(x) = \left(1, \int \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx - \cos \int \tau_g dx, \int \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx \right)$$

olarak elde edilir. Son olarak

$$\beta_{TNB}^a(x) = \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{B}$$

şeklinde tanımlı olup $\beta_{TNB}^a(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü;

$$\beta_{TNB}^a(x) = \left(1, \int \kappa_g \sin(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx - \cos \int \tau_g dx, \int \kappa_g \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx + \sin \int \tau_g dx \right)$$

şeklinde elde edilir.

4.3.1. Sonuç

Başka bir yöntem olarak G_3 uzayında $\beta^a(x)$ asimptotik eğri ailesinin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri Teorem 4.3 ile verilen (4.3.1) denklemlerinde $\kappa_n \equiv 0$ yazılarak da elde edilebilir.

Şimdi eğrilik fonksiyonları yardımıyla asimptotik eğriler için daha özel sonuçlar vereceğiz.

4.3.2. Sonuç

G_3 uzayında dairesel helis olan asimptotik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\beta_{ch}^a \mathbf{TN} = \left(1, -\frac{f}{c} \cos(cx + c_1) + \sin(cx + c_1), \frac{f}{c} \sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1) \right),$$

$$\beta_{ch}^a \mathbf{TB} = \left(1, -\left(\frac{c+f}{c}\right) \cos(cx + c_1), \left(\frac{c+f}{c}\right) \sin(cx + c_1) \right), \quad (4.3.3)$$

$$\beta_{ch}^a \mathbf{TNB} = \begin{pmatrix} 1, & -\left(\frac{c+f}{c}\right)\cos(cx + c_1) + \sin(cx + c_1), \\ \left(\frac{c+f}{c}\right)\sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.3.2. İspat

Tanım 2.15 de ifade edilen dairesel helis eğrisi tanımından, (yani κ sabit fonksiyon ve τ sabit fonksiyon) ve (4.2.5) denkleminde κ_n eğrilik fonksiyonu $\kappa_g = f$ sabit fonksiyon ve $\tau_g = c$ sabit fonksiyon olarak elde edilir. O halde asimptotik eğrilerin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.3.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, asimptotik olan dairesel helis eğrisinin Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\beta_{ch}^a \mathbf{TN} = \begin{pmatrix} 1, & -\frac{f}{c}\cos(cx + c_1) + \sin(cx + c_1), \\ \frac{f}{c}\sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1) \end{pmatrix},$$

$$\beta_{ch}^a \mathbf{TB} = \left(1, -\left(\frac{c+f}{c}\right)\cos(cx + c_1), \left(\frac{c+f}{c}\right)\sin(cx + c_1)\right),$$

$$\beta_{ch}^a \mathbf{TNB} = \begin{pmatrix} 1, & -\left(\frac{c+f}{c}\right)\cos(cx + c_1) + \sin(cx + c_1), \\ \left(\frac{c+f}{c}\right)\sin(cx + c_1) + \cos(cx + c_1) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

4.3.3. Sonuç

G_3 uzayında genel helis olan asimptotik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\beta_{gh}^a \mathbf{TN} = \begin{pmatrix} 1, & -\frac{1}{k}\cos(k \int \kappa_g dx) + \sin(k \int \kappa_g dx), \\ \frac{1}{k}\sin(k \int \kappa_g dx) + \cos(k \int \kappa_g dx) \end{pmatrix},$$

$$\beta_{gh}^a \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} 1, & -\frac{1}{k}\cos(k \int \kappa_g dx) - \cos(k \int \kappa_g dx), \\ \frac{1}{k}\sin(k \int \kappa_g dx) + \sin(k \int \kappa_g dx) \end{pmatrix}, \quad (4.3.4)$$

$$\beta_{gh}^a \mathbf{TNB} = \left(1, \begin{array}{l} -\frac{1}{k} \cos(k \int \kappa_g dx) + \sin(k \int \kappa_g dx) - \cos(k \int \kappa_g dx), \\ \frac{1}{k} \sin(k \int \kappa_g dx) + \cos(k \int \kappa_g dx) + \sin(k \int \kappa_g dx) \end{array} \right)$$

şeklindedir.

4.3.3. İspat

Tanım 2.16 da ifade edilen genel helis eğrisi tanımından, (yani $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit fonksiyon) ve (4.2.5) denkleminde $\tau_g = k \cdot \kappa_g$ olarak elde edilir. O halde asimptotik eğrilerin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.3.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, asimptotik olan genel helis eğrisinin Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\beta_{gh}^a \mathbf{TN} = \left(1, \begin{array}{l} -\frac{1}{k} \cos(k \int \kappa_g dx) + \sin(k \int \kappa_g dx), \\ \frac{1}{k} \sin(k \int \kappa_g dx) + \cos(k \int \kappa_g dx) \end{array} \right),$$

$$\beta_{gh}^a \mathbf{TB} = \left(1, \begin{array}{l} -\frac{1}{k} \cos(k \int \kappa_g dx) - \cos(k \int \kappa_g dx), \\ \frac{1}{k} \sin(k \int \kappa_g dx) + \sin(k \int \kappa_g dx) \end{array} \right),$$

$$\beta_{gh}^a \mathbf{TNB} = \left(1, \begin{array}{l} -\frac{1}{k} \cos(k \int \kappa_g dx) + \sin(k \int \kappa_g dx) - \cos(k \int \kappa_g dx), \\ \frac{1}{k} \sin(k \int \kappa_g dx) + \cos(k \int \kappa_g dx) + \sin(k \int \kappa_g dx) \end{array} \right)$$

şeklinde elde edilir.

4.3.4. Sonuç

G_3 uzayında Salkowski eğrisi olan asimptotik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\beta_s^a \mathbf{TN} = \left(1, \begin{array}{l} \int (f \sin(\int \tau_g dx)) dx + \sin(\int \tau_g dx), \\ \int (f \cos(\int \tau_g dx)) dx + \cos(\int \tau_g dx) \end{array} \right),$$

$$\beta_s^a \mathbf{TB} = \left(1, \begin{array}{l} \int (f \sin(\int \tau_g dx)) dx - \cos(\int \tau_g dx), \\ \int (f \cos(\int \tau_g dx)) dx + \sin(\int \tau_g dx) \end{array} \right), \quad (4.3.5)$$

$$\beta_s^a \mathbf{TNB} = \begin{pmatrix} 1, \int (f \sin(\int \tau_g dx)) dx + \sin(\int \tau_g dx) - \cos(\int \tau_g dx), \\ \int (f \cos(\int \tau_g dx)) dx + \cos(\int \tau_g dx) + \sin(\int \tau_g dx) \end{pmatrix}$$

şeklindedir

4.3.4. İspat

Tanım 2.17 de ifade edilen Salkowski eğrisi tanımından, (yani κ sabit fonksiyon ve τ sabit değil) ve (4.2.5) denkleminde κ_g eğrilik fonksiyonu $\kappa_g = f$ sabit fonksiyon olarak elde edilir. O halde asimptotik eğrilerin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.3.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, asimptotik olan Salkowski eğrileri için Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\beta_s^a \mathbf{TN} = \begin{pmatrix} 1, \int f \sin(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx, \\ \int f \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx \end{pmatrix},$$

$$\beta_s^a \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} 1, \int f \sin(\int \tau_g dx) dx - \cos \int \tau_g dx, \\ \int f \cos(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx \end{pmatrix},$$

$$\beta_s^a \mathbf{TNB} = \begin{pmatrix} 1, \int f \sin(\int \tau_g dx) dx + \sin \int \tau_g dx - \cos \int \tau_g dx, \\ \int f \cos(\int \tau_g dx) dx + \cos \int \tau_g dx + \sin \int \tau_g dx \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

4.3.5. Sonuç

G_3 uzayında Anti-Salkowski eğrisi olan asimptotik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\beta_{as}^a \mathbf{TN} = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_g \sin(cx + c_1) dx + \sin(cx + c_1), \\ \int \kappa_g \cos(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1) \end{pmatrix},$$

$$\beta_{as}^a \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_g \sin(cx + c_1) dx - \cos(cx + c_1), \\ \int \kappa_g \cos(cx + c_1) dx + \sin(cx + c_1) \end{pmatrix}, \quad (4.3.6)$$

$$\beta_{as}^a \mathbf{TNB} = \begin{pmatrix} 1, \int \kappa_g \sin(cx + c_1) dx + \sin(cx + c_1) - \cos(cx + c_1), \\ \int \kappa_g \cos(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1) + \sin(cx + c_1) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.3.5. İspat

Tanım 2.18 de ifade edilen Anti-Salkowski eğrisi tanımından, (yani τ sabit fonksiyon ve κ sabit değil) ve (4.2.5) denkleminde $\tau_g = c$ sabit fonksiyon olarak elde edilir. O halde asimptotik eğrilerin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.3.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, asimptotik olan Salkowski eğrileri için Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\beta_{as}^a \mathbf{TN} = \left(1, \int \kappa_g \sin(cx + c_1) dx + \sin(cx + c_1), \int \kappa_g \cos(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1) \right),$$

$$\beta_{as}^a \mathbf{TB} = \left(1, \int \kappa_g \sin(cx + c_1) dx - \cos(cx + c_1), \int \kappa_g \cos(cx + c_1) dx + \sin(cx + c_1) \right),$$

$$\beta_{as}^a \mathbf{TNB} = \left(1, \int \kappa_g \sin(cx + c_1) dx + \sin(cx + c_1) - \cos(cx + c_1), \int \kappa_g \cos(cx + c_1) dx + \cos(cx + c_1) + \sin(cx + c_1) \right)$$

şeklinde elde edilir.

4.4. G_3 Uzayında Bir Eğrilik Çizgisi Eğrisinin Özel Smarandache Eğrilerinin Konum Vektörleri

Aşağıdaki teorem bir eğrilik çizgisi eğrisinin Smarandache eğrisinin konum vektörlerini ifade eder.

4.4. Teorem

G_3 uzayında $\gamma^c(x)$ eğrilik çizgisi ailesinin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri

$$\gamma_{\mathbf{TN}}^c = \left(1, \int \kappa_g \sin adx + \sin a, \int \kappa_g \cos adx + \cos a \right),$$

$$\gamma_{\mathbf{TB}}^c = \left(1, \int \kappa_g \sin adx - \cos a, \int \kappa_g \cos adx + \sin a \right), \quad (4.4.1)$$

$$\gamma_{\mathbf{TNB}}^c = \left(1, \int \kappa_g \sin adx + \sin a - \cos a, \int \kappa_g \cos adx + \cos a + \sin a \right)$$

şeklindedir.

4.4. İspat

G_3 uzayında eğrilik çizgisi ailesinin $\gamma^c(x)$ konum vektörü

$$\gamma^c(x) = (x, \int(\int \kappa_g \sin adx)dx, \int(\int \kappa_g \cos adx)dx) \quad (4.4.2)$$

şeklindedir. G_3 uzayında eğrilik çizgisi ailesinin $\gamma^c(x)$ konum vektörü (4.1.2) genel konum vektöründe $\tau_g \equiv 0$ yazılarak elde edilmiştir (Şahin ve Dirişen, 2017).

Şimdi bu $\gamma^c(x)$ eğrisinin Smarandache eğrilerini elde edebilmek için Frenet vektörlerini bulmalıyız. Bu nedenle $\gamma^c(x)$ eğrisinin sırasıyla türevleri alınırsa;

$$\gamma^c(x)' = (1, \int \kappa_g \sin adx, \int \kappa_g \cos adx),$$

$$\gamma^c(x)'' = (0, \kappa_g \sin a, \kappa_g \cos a)$$

şeklinde elde edilir.

G_3 uzayında eğrilik çizgisi ailesinin $\gamma^c(x)$ konum vektörünün Frenet vektör alanları Teorem 2.1 kullanılarak elde edilmiştir. Burada $T(x)$ birim teğet vektörü

$$T = \gamma^c(x)' = (1, \int \kappa_g \sin adx, \int \kappa_g \cos adx)$$

şeklindedir.

$N(x)$ birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\gamma^c(x)''}{\|\gamma^c(x)''\|}$$

şeklinde tanımlı olup, gerekli işlemler yapıldığında;

$$N = (0, \sin a, \cos a)$$

şeklinde elde edilir.

$B(x)$ binormal vektör alanı olup

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times_G \mathbf{N}$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\mathbf{B} = (0 , -\cos a , \sin a)$$

şeklinde elde edilir.

Buradan hareketle Frenet vektör alanları yardımıyla $\gamma^c(x)$ eğrilik çizgisi eğrisinin Smarandache eğrilerini elde edebiliriz.

$\gamma^c(x)$ eğrilik çizgisi eğrisinin Smarandache eğrilerini bulmak için \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} Frenet elemanları kullanılır. O halde

$$\gamma_{\mathbf{TN}}^c(x) = \mathbf{T} + \mathbf{N}$$

şeklinde olup $\gamma_{\mathbf{TN}}^c(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörü

$$\gamma_{\mathbf{TN}}^c(x) = (1 , \int \kappa_g \sin a dx + \sin a , \int \kappa_g \cos a dx + \cos a)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde;

$$\gamma_{\mathbf{TB}}^c(x) = \mathbf{T} + \mathbf{B}$$

şeklinde olup $\gamma_{\mathbf{TB}}^c(x)$ Smarandache eğrisinin konum vektörleri;

$$\gamma_{\mathbf{TB}}^c(x) = (1 , \int \kappa_g \sin a dx - \cos a , \int \kappa_g \cos a dx + \sin a)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak;

$$\gamma_{\mathbf{TNB}}^c(x) = \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{B}$$

şeklinde olup $\gamma_{\mathbf{TNB}}^c(x)$ Smarandache eğrisi

$$\gamma_{\mathbf{TNB}}^c(x) = (1 , \int \kappa_g \sin a dx + \sin a - \cos a , \int \kappa_g \cos a dx + \cos a + \sin a)$$

şeklinde elde edilir.

4.4.1. Sonuç

Başka bir yöntem olarak G_3 uzayında $\gamma^c(x)$ eğrilik çizgisi ailesinin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri Teorem 4.4 ile verilen (4.4.1) denklemlerinde $\tau_g \equiv 0$ yazılarak da elde edilebilir.

Şimdi eğrilik fonksiyonları yardımıyla eğrilik çizgisi için daha özel sonuçlar vereceğiz.

4.4.2. Sonuç

G_3 uzayında dairesel helis olan eğrilik çizgisi eğrisinin Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\begin{aligned}\gamma_{ch}^c \mathbf{TN} &= (1, -a_1 \cos a + \sin a, a_1 \sin a + \cos a), \\ \gamma_{ch}^c \mathbf{TB} &= (1, -a_1 \cos a - \cos a, a_1 \sin a + \sin a), \\ \gamma_{ch}^c \mathbf{TNB} &= (1, (-a_1 - 1) \cos a + \sin a, (a_1 + 1) \sin a + \cos a)\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

şeklindedir.

4.4.2. İspat

Tanım 2.15 de ifade edilen dairesel helis eğrisi tanımından, (yani κ sabit fonksiyon ve τ sabit fonksiyon) ve (4.2.6) denklemden $\kappa = a_1$ sabit fonksiyon olarak elde edilir. O halde eğrilik çizgisi eğrilerinin genel Smarandache eğri denklemlerinde; yani (4.4.1) denklemlerinde bu koşul uygulanırsa, eğrilik çizgisi olan dairesel helis eğrisinin Darboux elemanlı Smarandache eğrilerinin konum vektörleri;

$$\begin{aligned}\gamma_{ch}^c \mathbf{TN} &= (1, -a_1 \cos a + \sin a, a_1 \sin a + \cos a), \\ \gamma_{ch}^c \mathbf{TB} &= (1, -a_1 \cos a - \cos a, a_1 \sin a + \sin a), \\ \gamma_{ch}^c \mathbf{TNB} &= (1, (-a_1 - 1) \cos a + \sin a, (a_1 + 1) \sin a + \cos a)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

5. UYGULAMALAR

5.1. Örnek

Bir eğrinin Darboux elemanlarına göre verilmiş konum vektöründe yani (4.1.2) ifadesinde

$\kappa_g = \sin x$, $\kappa_n = \cos x$ ve $\tau_g = x$ olarak alınırsa $\gamma(x)$ eğrisi

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x, \\ \sqrt{\pi}(x\cos(1/2) - \cos(1/2))\text{FresnelC}\left(\frac{x-1}{\sqrt{\pi}}\right) + \\ \sqrt{\pi}(x\sin(1/2) - \sin(1/2))\text{FresnelS}\left(\frac{x-1}{\sqrt{\pi}}\right) \\ -\cos(1/2)\sin(1/2(x-1)^2) + \sin(1/2)\cos(1/2(x-1)^2) \\ -\sqrt{\pi}(\sin(1/2) - x\sin(1/2))\text{FresnelC}\left(\frac{x-1}{\sqrt{\pi}}\right) \\ -\sqrt{\pi}(x\cos(1/2) - \cos(1/2))\text{FresnelS}\left(\frac{x-1}{\sqrt{\pi}}\right) \\ -\cos(1/2(x-1)^2)\cos(1/2) - \sin(1/2(x-1)^2)\sin(1/2) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada eğrinin konum vektöründeki fonksiyonlar

$$\text{FresnelS}(x) = \int \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx, \quad \text{FresnelC}(x) = \int \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

şeklindedir.

$\gamma(x)$ eğrisinin Smarandache eğrileri Teorem (4.1) ile verilen (4.1.1) ifadelerinde κ_g , κ_n ve τ_g yerine sırasıyla $\sin x$, $\cos x$ ve x yazılarak

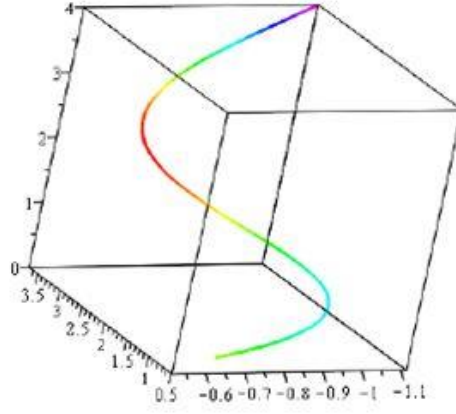
$$\gamma_{\text{TN}}(x) = \left(1, \int \cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx + \cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right), \int \sin\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx + \sin\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right),$$

$$r_{\text{TB}}(x) = \left(1, \int \cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx - \sin\left(x - \frac{x^2}{2}\right), \int \sin\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx - \cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right),$$

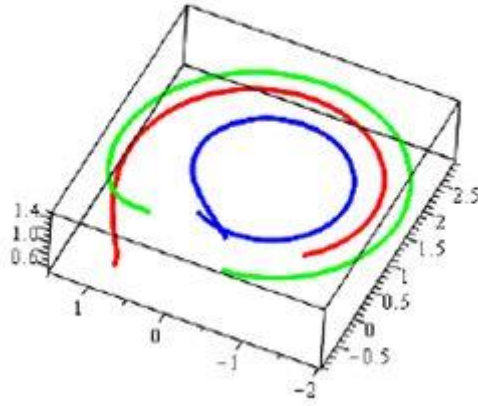
$$r_{\text{TNB}}(x) = \left(1, \int \cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx + \cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{x^2}{2}\right), \int \sin\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx + \sin\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right)$$

şeklinde elde edilir.

Bu durumda, $\gamma(x)$ eğrisinin TN, TB, TNB Smarandache eğrilerinin grafikleri Şekil 1-deki gibi verilir.



Şekil 1 : $\gamma(x)$ eğrisinin grafiği



Şekil 2 : $\gamma(x)$ eğrisinin sırasıyla $\gamma_{TN}, \gamma_{TB}, \gamma_{TNB}$ Smarandache eğrileri

5.2.Örnek

Bir φ yüzeyi;

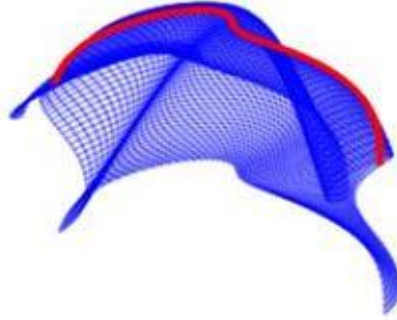
$$\varphi(u,v) = \left(u + v, \frac{u - \sin(u+v)\cos(u+v)}{4}, \frac{\sin^2(u+v) - u^2}{4} \right)$$

şeklinde ve φ yüzeyi üzerinde bir $\gamma(x)$ eğrisi de

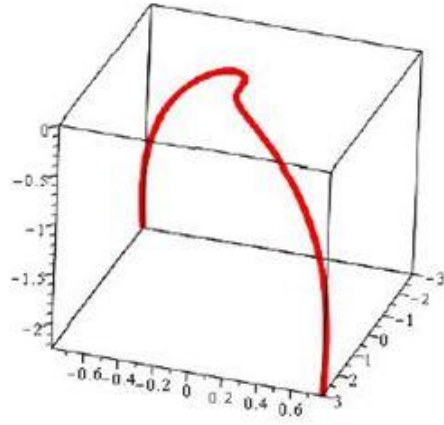
$$\gamma(x) = \left(x, \frac{x - \sin x \cos x}{4}, \frac{\sin^2 x - x^2}{4} \right)$$

olarak tanımlansın.

Burada $\gamma(x)$ eğrisi, G_3 uzayında φ yüzeyi üzerinde $\kappa = \sin x$ ve $\tau = 1$ olan bir jeodezik eğridir. Ayrıca jeodezik eğriler için elde edilen κ_n, τ_g eğrilik fonksiyonları jeodezik eğrilerin Smarandache eğrilerinin konum vektörlerinde yerine yazılarak $\gamma(x)$ eğrisinin Smarandache eğrileri elde edilmiştir. Aşağıda bu yüzeyin ve eğrinin grafiği verilmiştir.

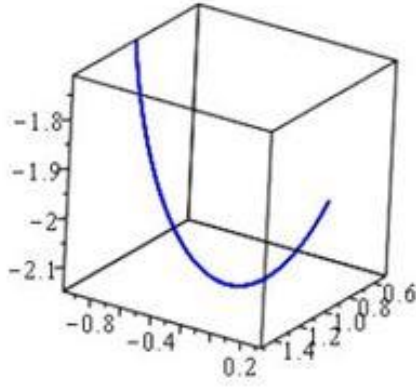


Şekil 3 : $\varphi(u,v)$ yüzeyi

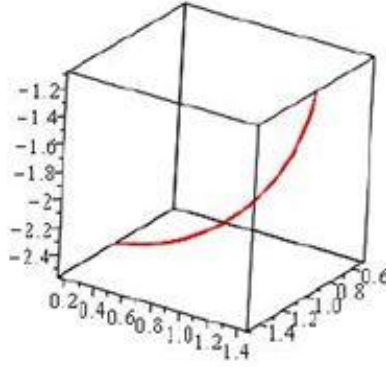


Şekil 4 : $\gamma(x)$ eğrisi

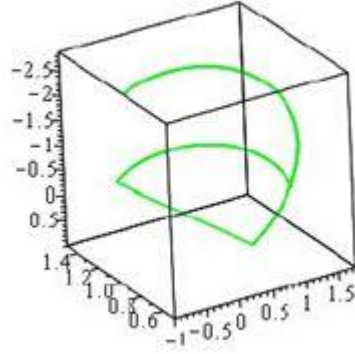
Bu $\gamma(x)$ eğrisinin Smarandache eğrilerinin grafikleri ise



Şekil 5 : γ_{TNB} Smarandache eğrisi

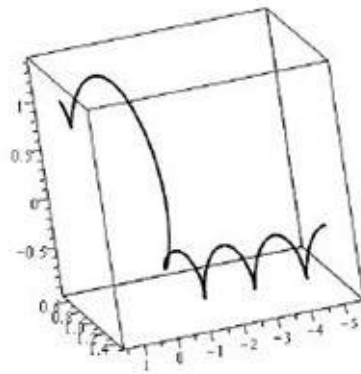


Şekil 6 : γ_{TB} Smarandache eğrisi

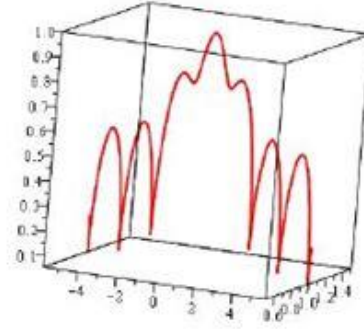


Şekil 7 : γ_{TN} Smarandache eğrisi

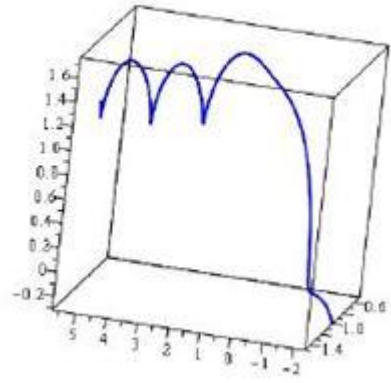
şeklindedir. Ayrıca bu $\gamma(x)$ eğrisinin Darboux çatı alanına göre de Smarandache eğrileri elde edilmiş, bu eğrilerin grafikleri



Şekil 8 : γ_{Tn} Smarandache eğrisi



Şekil 9 : γ_{TQ} Smarandache eğrisi



Şekil 10: γ_{TQn} Smarandache eğrisi

şeklinde verilmiştir.

5.2. İspat

Verilen $\gamma(x)$ eğrisinin Smrandache eğrilerini elde edebilmek için eğrinin Frenet vektör alanları bulunmalıdır.

$$\gamma(x) = \left(x, \frac{x - \sin x \cos x}{4}, \frac{\sin^2 x - x^2}{4} \right)$$

eğrisinin Frenet elemanlarını bulmak için türevleri hesaplanırsa;

$$\gamma'(x) = \left(1, \frac{2\sin^2 x}{4}, \frac{\sin 2x - 2x}{4} \right),$$

$$\gamma''(x) = \left(0, \sin x \cos x, \frac{\cos 2x - 1}{2} \right)$$

şeklinde elde edilir. $\gamma(x)$ eğrisinin Frenet elemanları

$$\mathbf{T} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2}, \frac{\sin 2x - 2x}{4} \right),$$

$$\mathbf{N} = (0, \cos x, -\sin x),$$

$$\mathbf{B} = (0, \sin x, \cos x)$$

şeklindedir.

Burada $\mathbf{T}(x)$, birim teğet vektör alanı olduğundan eğrinin birinci türevine eşittir.

$$\mathbf{T} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2}, \frac{\sin 2x - 2x}{4} \right)$$

şeklinde bulunur.

$\mathbf{N}(x)$, birim normal vektör alanı olup

$$\mathbf{N} = \frac{\gamma''(x)}{\|\gamma''(x)\|}$$

şeklinde tanımlıdır.

Buradan; $\mathbf{N}(x)$ birim normal vektörü;

$$\mathbf{N} = (0, \cos x, -\sin x)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde;

$\mathbf{B}(x)$, binormal vektör alanı

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times_G \mathbf{N}$$

şeklinde tanımlı olup,

$$\mathbf{B} = (0, \sin x, \cos x)$$

olarak bulunur.

O halde Frenet vektör alanları yardımıyla $\gamma(x)$ eğrisinin Smarandache eğrileri

$$\gamma_{TN}(x) = \mathbf{T} + \mathbf{N} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2} + \cos x, \frac{\sin 2x - 2x}{4} - \sin x \right),$$

$$\gamma_{TB}(x) = \mathbf{T} + \mathbf{B} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2} + \sin x, \frac{\sin 2x - 2x}{4} + \cos x \right),$$

$$\gamma_{TNB}(x) = \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{B} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2} + \cos x + \sin x, \frac{\sin 2x - 2x}{4} - \sin x + \cos x \right)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi φ yüzeyinin Darboux çatı elemanları hesaplanırsa; φ yüzeyinin teğet vektörü φ yüzeyi üzerindeki $\gamma(x)$ eğrisinin teğet vektörüdür. Yani φ yüzeyinin teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2}, \frac{\sin 2x - 2x}{4} \right)$$

şeklinde dir. Burada n birim normal vektörü

$$n = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu ifade için öncelikle φ_u ve φ_v vektörleri.

$$\varphi_u = \left(1, \frac{\sin^2(u+v)}{2}, \frac{\sin 2(u+v) - 2u}{4} \right)$$

$$\varphi_v = \left(1, \frac{-\cos 2(u+v)}{4}, \frac{\sin 2(u+v)}{4} \right)$$

şeklinde hesaplanır.

Bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & \frac{\sin^2 x(u+v)}{2} & \frac{\sin 2(u+v)-2u}{4} \\ 1 & \frac{-\cos 2(u+v)}{4} & \frac{\sin 2(u+v)}{4} \end{vmatrix}$$

determinantı yardımıyla hesaplanır. Buradan

$$\varphi_u \times \varphi_v = \left(0, \frac{-u}{2}, \frac{-1}{4} \right)$$

şeklinde bulunur. O halde \mathbf{n} birim normal vektörü

$$\mathbf{n} = \left(0, \frac{-u}{\sqrt{u^2+1}}, \frac{-1}{2\sqrt{u^2+1}} \right)$$

şeklinde elde edilir.

Son olarak eğrinin \mathbf{Q} vektör alanı

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \times_G \mathbf{T}$$

şeklinde tanımlı olup buradan

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & \frac{-u}{\sqrt{u^2+1}} & \frac{-1}{2\sqrt{u^2+1}} \\ 1 & \frac{\sin^2 x}{2} & \frac{\sin 2x-2x}{4} \end{vmatrix}$$

determinantının hesaplanmasıyla \mathbf{Q} vektörü

$$\mathbf{Q} = \left(0, \frac{-1}{2\sqrt{u^2+1}}, \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \right)$$

şeklinde bulunur.

Buradan $\{ \mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n} \}$ Darboux çatısına göre Smarandache eğrileri

$$\gamma_{TQ}(x) = \mathbf{T} + \mathbf{Q} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{u^2+1}}, \frac{\sin 2x - 2x}{4} + \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \right),$$

$$\gamma_{Tn}(x) = \mathbf{T} + \mathbf{n} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}, \frac{\sin 2x - 2x}{4} - \frac{1}{2\sqrt{u^2+1}} \right),$$

$$\gamma_{TQn}(x) = \mathbf{T} + \mathbf{Q} + \mathbf{n} = \left(1, \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{(2u+1)}{\sqrt{u^2+1}}, \frac{\sin 2x - 2x}{4} - \frac{(1-2u)}{\sqrt{u^2+1}} \right)$$

şeklinde elde edilir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada 3-boyutlu Galile uzayında konum vektörü Darboux çatı alanının eğrilik fonksiyonlarına göre verilen bir eğrinin Smarandache eğrileri elde edilmiştir. Sonra bu eğrilerin özel durumları olan jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi eğrilerinin Smarandache eğrileri belirlenmiştir. Ayrıca dairesel helis, genel helis, Salkowski ve Anti-Salkowski eğrileri için de Smarandache eğrileri elde edilmiştir. Son olarak da bu eğrilere örnekler verilip, Smarandache eğrileri elde edilmiş, grafikleri çizilmiştir.

Smarandache eğrileri bir eğrinin çatı elemanları yardımıyla tanımlandığından farklı uzay ve farklı çatılara göre bu eğriler incelenebilir. Ayrıca önemli bazı eğri çiftlerinin (örneğin; evolüt-involüt, Bertrant eğri çiftleri) Smarandache eğrileri arasındaki ilgi araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Ali, A.T. (2010). Special Smarandache curves in the Euclidean space. *International Journal of Mathematical Combinatorcs.*, (2), 30-36.

Ali, A.T. (2012). Position vectors of curves in the Galilean 3-space, *Mathematical Vesnik.*, (64), 200-210.

Allman E.S. ve Rhodes J.A. (2004). *Mathematical Models in Biology an Introduction* İngiltere: Cambridge University Press.

Aziz, H.S.A. ve Saad, (2015). M. K., Smarandache curves of some special curves in the Galilean 3-space. *Honam Mathematical journal*, (37), 253-264.

Aziz, H.S.A ve Saad, M. K., (2017). Computation of Smarandache curves according to Darboux frame in Minkowski-3space. *Journal of the Egyptain Mathematical Society*, (25), 382-390.

Bektaş, O. ve Yüce, S. (2013). Smarandache curves according to Darboux frame in Euclidean space. *Rom.J.Math.Comput.Sci.* (3), 48-59.Casse, R. (2006). *Projective Geometry:An Introduction*. İngiltere: Oxford Univ.Press.

Dede, M., Ekici, C. ve Çöken, A.C. (2013). On the Parallel Surfaces in Galilean Space., *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 605-615.

Demircan, N. (2015). *Smarandache eğrilerine dair*, (Yüksek lisans tezi, Sinop Üniversitesi, 2015).

Hacısalıhoğlu, H. H. (1982). *Diferensiyel Geometri 1*. Ankara: İnönü Üniv. Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 3-20.

Hacısalıhoğlu, H. H. (1996). *Çözümlü Lineer Cebir Problemleri*. İstanbul: İstanbul Fen-Edebiyat Fakültesi, 70-112.

Hacısalıhoğlu, H. H. (1998). *Dönüřümler ve Geometriler*. Ankara: Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 3-10.

Karacan, M.K. ve Bukcu, B. (2017). Geodesics on rotational surfaces in Pseudo-Galilean Space., *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*.

Kreyszig E. (1991). *Differential Geometry*. New York: Dover Publications.

Kula, L. ve Yaylı, Y., (2005). On Slant Helix and Its Spherical Indicatrix. *Applied Mathematics and Computation*, 169, 600-607.

Pavkovic B. J. ve Kamenarovic I. (1987) The equiform differential geometry of curves in the Galilean space. *Glasnik Matematički*. (22) 449-457.

Şahin, T. (2013). Intrinsic equations for a generalized relaxed elastic line on an oriented surface in the Galilean space. *Acta Mathematica Scientia*, B(33), 701-711.

Şahin, T. And Dirişen, B.C. (2017). Position vectors of with respect to Darboux frame in the Galilean space. *International Journal of Advances Mathematics and Mechanics*. 1-13.

Şahin,T. ve Okur M. (2018). Special Smarandache curves with respect to Darboux frame in Galilean 3-space. *International Journal of Advances Mathematics and Mechanics* 5(3). 1-12.

Taşköprü K. ve Tosun M. (2014). Smarandache curves according to Sabban frame on S^2 . *Boletim da Sociedade Paraneanse de Matematica*, (32). 51-59.

Turgut, M. And Yılmaz S. (2008). Smarandache curves in Minkowski space-time. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, (3), 51-55.

Yaglom, I. M. (1979). *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. New York: Springer-Verlag. 5-250.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Merve OKUR
 Uyuğu : Türkiye Cumhuriyeti
 Doğum tarihi ve yeri : 10.01.1993- Samsun
 Medeni hali : Bekar
 e-mail : okurmerwe869@gmail.com



Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi	2016

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faliyetler

1. Şahin T. ve Okur M. (2018), Special Smarandache curves with respect to Darboux Frame in Galilean 3-space., *International Journal of Advances and Mechanic.*, 5(3). 1-12.
2. International Conference on Mathematicians and Mathematics Education (ICMME-2018).