T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SS-RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER VE GÜÇLÜ SS-RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İRFAN SOYDAN

HAZİRAN 2019

SS-RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER VE GÜÇLÜ SS-RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

İrfan SOYDAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2019

Yüksek Lisans Tezi kabul ve onay sayfası

İrfan SOYDAN tarafından hazırlanan " SS-Radikal Tümlenmiş Modüller ve Güçlü SS-Radikal Tümlenmiş Modüller" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Başkan : Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Üye : Dr. Öğretim Üyesi Yılmaz Mehmet DEMİRCİ
Matematik Anabilim Dalı, Abdullah Gül Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Tez Savunma Tarihi:19/06/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………………..
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

....

İrfan SOYDAN

.../.../...

SS-RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER VE GÜÇLÜ SS-RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

(Yüksek Lisans Tezi)

İrfan SOYDAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Bu tez çalışmasında, ss-radikal tümlenmiş modüller ve güçlü ss-radikal tümlenmiş modüller tanımlandı. N, M nin bir alt modülü olmak üzere N güçlü ss-radikal tümlenmiş modül ve $Rad(M/N) = M/N$ ise, M güçlü ss-radikal tümlenmiş modüldür. R sol iyi halka olmak üzere, $Rad(R) \subseteq Des({}_RR)$ olması için gerek ve yeter koşulun her sol R-modülün ss-radikal tümlenmiş modül olduğu gösterildi. R sol WV-halka ise, her sol R-modül ss-radikal tümlenmiştir. Tüm modülleri güçlü ss-radikal tümlenmiş olan halkalar karakterize edildi. Bununla birlikte lokal Dedekind bölgeleri üzerinde (güçlü) ss-radikal tümlenmiş modüllerin yapısı belirlendi.

Sayfa Adedi : 58

Anahtar Kelimeler : ss-radikal tümlenmiş modül, güçlü ss-radikal tümlenmiş modül

Danışman : Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN

SS-RADICAL SUPPLEMENTED MODULES AND STRONGLY SS-RADICAL SUPPLEMENTED MODULES

(M. Sc. Thesis)

İrfan SOYDAN

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

In this study, are introduced *ss-radical supplemented modules* and *strongly ss-radical supplemented modules*. We prove that, if a submodule N of M is strongly ss-radical supplemented and $Rad\left({}^{M}/_{N}\right) = {}^{M}/_{N}$, then M is strongly ss-radical supplemented. For a left good ring R, we prove that $Rad(R) \subseteq Des({}_{R}R)$ if and only if every left R-module is ss-radical supplemented. If R is a left WV-ring, then every left R-module is ss-radical supplemented. We have characterized the rings over which all modules are strongly ss-radical supplemented. Moreover, we determine the structure of (strongly) ss-radical supplemented modules over a local Dedekind domain.

PageNumber : 58

KeyWords : ss-radical supplemented module, strongly ss-radical supplemented module

Supervisor : Assoc. Dr. Ergül TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen, kütüphanesinden yararlanmamı sağlayan, çalışmaya teşvik eden ve tez yazımım sürecinde de hep yanımda olan tez danışmanım Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN' e şükranlarımı sunarım. Ayrıca ders dönemi boyunca bana destek veren sayın hocam Doç. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN' e çok teşekkür ederim. Her daim yanımda olan, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim annem, babam ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Tez çalışmasında kullanmış olduğumuz simgeler, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	asal sayılar kümesi
$\subseteq$	alt küme
$\subset$	öz alt küme
$\cap$	kümelerde kesişim işlemi
0_R	$(R,+,\cdot)$ halkasında $(R,+)$ abel grubunun birimi
1_R	$(R,+,\cdot)$ halkasında $(R,\cdot)$ cebirsel yapısının birimi
$J = Rad(R)$	R Halkasının Jacobson Radikali
$\leq$	alt modül
$<$	öz alt modül
$M/_N$	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\ll$	küçük alt modül
$M \cong N$	izomorf modüller
$\prod_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt çarpımı
$\sum_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin toplamı
$\oplus_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt toplamı
$\langle X \rangle$	X kümesi tarafından üretilen modül
Rm	m elemanı tarafından üretilen devirli modül

Kısaltmalar	**Açıklama**
$Rad(M)$	M modülünün radikali
$Des(M)$	M modülünün desteği
$E(M)$	M modülünün injektif bürümü

$P(M)$	M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı
$Gör(f)$	Bir f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$End(M)$	M modülünün endomorfizmalarının kümesi
$Hom_R(A,B)$	A modülünden B modülüne tüm R-modül hom. kümesi

1.GİRİŞ

Bu tezde, R halkası denildiğinde birimli halka alınacak ve tüm modüller üniter sol R-modül olarak çalışılacaktır.

R halka ve M bir R-modül olsun. $Rad(M)$ ve $Des(M)$, sırasıyla M modülünün "radikalini" ve "desteğini" göstermektedir. M modülünün N alt modülü (öz alt modülü) $N \leq M$ $(N < M)$ şeklinde gösterilir. M modül ve $N < M$ olsun. M nin her K öz alt modülü için $M \neq N + K$ ise, N ye M nin **küçük alt modülü** denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. D. X. Zhou ve X. R. Zhang 2011 de yayınlamış oldukları "Small-Essential Submodules and Morita Duality" adlı makalede M modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı olarak $Des_s(M) \subseteq M$ alt modülünü tanımlamışlardır. Özellikle, $Des_s(M) \subseteq Rad(M)$ ve $Des_s(M) \subseteq Des(M)$ dir. Direkt toplam terimlerinin bir genelleştirmesi olarak tümleyen alt modül kavramı Kasch ve Mares tarafından tanımlanmıştır. Buna göre M nin N alt modülü için $M = N + K$ ve $N \cap K \ll K$ olacak şekilde $K \leq M$ alt modülü mevcut ise K ya N **nin** $\boldsymbol{M}$ **modülünde tümleyeni** denir. Her alt modülü tümleyene sahip olan modüle **tümlenmiş modül** denir. Her direkt toplam terimi bir tümleyen olduğundan tümlenmiş modüller yarı-basit modüllerin genellemesidir. Eğer $Rad(M)$, M de bir tümleyene sahipse M ye **radikal tümlenmiş modül** denir. Bu tanımlama [24]'te Zöschinger tarafından yapılmıştır. Aynı çalışmasında ve [25]'te verilen çalışmasında radikal tümlenmiş modüllerin yapısını belirledi. [5]'te Büyükaşık ve Türkmen radikal tümlenmiş modül kavramını kuvvetlendirerek güçlü radikal tümlenmiş modülleri tanımlamışlardır. Eğer $Rad(M) \subseteq N \subseteq M$ ile verilen radikali kapsayan her N alt modülü tümleyene sahipse M ye **güçlü radikal tümlenmiş modül** denir. [7]'de Türkmen, Kaynar ve Çalışıcı tümleyen kavramından daha özel ss-tümleyen ve ss-tümlenmiş modül tanımını vermişlerdir. M modül $K, N \leq M$ olmak üzere $M = N + K$ ve $N \cap K \ll K$ ve $N \cap K$ yarı-basit ise, K ya N nin **ss-tümleyeni** denir. M modül olsun. Eğer M nin her alt modülü ss-tümleyene sahipse, M modülüne **ss-tümlenmiş modül** denir**.** Ss tümlenmiş modüllerin sınıfı, yarı-basit ve tümlenmiş modül sınıflarının arasındadır.

Bütün bu sonuçlardan hareketle bu çalışmada, (güçlü) ss-radikal tümlenmiş modül kavramları tanımlandı. Bu kavramlarla ilgili temel özellikler ifade edildi ve bazı örnekler verildi. Tüm modülleri güçlü ss-radikal tümlenmiş olan halkalar karakterize edildi. Bunlara ilave olarak lokal Dedekind bölgeleri üzerinde (güçlü) ss-radikal tümlenmiş modüllerin yapısı belirlendi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Halkalar

2.1.1. Tanım Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(R,+,.)$ cebirsel yapısına **halka** denir.
i) $(R,+)$ abel gruptur,
i) $\forall\, a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ dir,
ii) $\forall\, a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab + ac$ ve $(a+b)c = ac + bc$ dir [9] .

2.1.2. Tanım $(R,+,.)$ halka olsun. $e \in R$ olmak üzere $\forall a \in R$ için $ae = ea = a$ ise, $e \in R$ elemanına R halkasının **birim elemanı** denir. $e = 1_R$ yazılışı ile gösterilir. Birim elemanlı bir halkaya **birimli halka** adı verilir. Halkada birim eleman tek türlü belirlidir.
Bu çalışmada tüm halkalar birimli halka olarak alınacak ve R ile $(R,+,.)$ halkası kastedilecektir.
"**.**" işlemine göre değişmeli olan $(R,+,.)$ halkasına **değişmeli halka** denir. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ değişmeli halkalardır ve $n > 1$ olmak üzere $M_n(\mathbb{Z})$ değişmeli olmayan halkadır [9].

2.1.3. Tanım R halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, $(R,+)$ abel grubunun alt grubu ve keyfi $a,b \in I$ için $ab \in I$ ise, I alt grubuna R nin **alt halkası** denir. Ayrıca $\forall r \in R$, $\forall a \in I$ için $ar \in I$ $(ra \in I)$ ise , I ya R nin **sağ (sol) ideali** denir. Burada I, R nin hem sağ ideali hem de sol ideali oluyor ise, I ya R nin **ideali** denir. Her sağ (sol) ideal bir alt halkadır ancak tersinin doğruluğu her zaman geçerli değildir. Örneğin,

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} n & r \\ 0 & r' \end{pmatrix} \middle|\, n \in \mathbb{Z}; \quad r, r' \in \mathbb{Q} \right\}$$

kümesi $M_2(\mathbb{R})$ halkasının alt halkası olmasına rağmen sol (sağ) ideali değildir.

0 ve R ideallerine R halkasının **aşikar idealleri** denir. R halkasının kendisi dışındaki tüm ideallerine **öz ideal** denir [9].

2.1.4. Tanım R halka ve $0_R \neq r \in R$ olsun. $rs = 0_R$ olacak şekilde bir $0_R \neq s \in R$ elemanı bulunuyorsa, r elemanına R halkasının **sıfır bölen elemanı** denir. Sıfır bölensiz birimli ve değişmeli R halkasına **tamlık bölgesi** denir [9].

2.1.5. Tanım R halka olsun. $a \in R$ elemanı için $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde $b \in R$ elemanı mevcutsa, b ye $a \in R$ elemanının **tersi** denir. Burada a ya R halkasının **terslenebilir elemanı** denir [9].

2.1.6. Tanım R birimli halka olsun. R nin sıfırdan farklı her elemanı çarpmaya göre terslenebilirse R ye **bölme halkası** denir [9].

2.1.7. Tanım Değişmeli bölme halkasına **cisim** denir [9].

2.1.8. Tanım R tamlık bölgesi ve S, R nin sıfırdan farklı tüm elemanların oluşturduğu küme olsun. $\left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in R,\ n \in S\right\}$ kümesi üzerinde $\frac{m}{n} \equiv \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = m'n$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının verdiği denklik sınıflarından oluşan $S^{-1}R = \left\{\frac{\overline{m}}{n} \,\middle|\, m \in R, n \in S\right\}$ kümesi, $\frac{\overline{m}}{n} + \frac{\overline{a}}{b} = \frac{\overline{mb+na}}{nb}$ ve $\frac{\overline{m}}{n}\frac{\overline{a}}{b} = \frac{\overline{ma}}{nb}$ ile tanımlı "+" ve "." işlemleri altında cisim yapısına sahiptir. $S^{-1}R$ cismine R tamlık bölgesinin **kesir cismi** denir ve $K(R)$ ile gösterilir [9].

$\mathbb{Z}$ tamlık bölgesinin kesir cismi $\mathbb{Q}$ dur.

2.2. Modüller

2.2.1. Tanım R halkası ve $(M, +)$ abel grubu için $(r, m) \longmapsto f(r, m) = rm$ ile tanımlı $f : R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için;

i) $r(m+n) = rm + rn$;

ii) $(r+s)m = rm + sm$;

iii) $(rs)m = r(sm)$

koşulları sağlanıyorsa M ye **sol R-modül** denir ve ${}_RM$ ile gösterilir. R birimi 1_R olan bir halka olmak üzere $m \in M$ keyfi elemanı için $1_Rm = m$ eşitliği sağlanıyorsa M modülüne **üniter sol R-modül** denir. Bu tanıma benzer olarak sağ R-modül tanımı da yapılabilir [9].

G abel grup olmak üzere, G bir üniter sol (sağ) $\mathbb{Z}$-modüldür. Dolayısıyla ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$-modüldür. Her R halkası kendi üzerinde üniter sol R-modüldür ve ${}_RR$ ile gösterilir. Burada $R = \mathbb{Z}_n$ alınırsa, $\mathbb{Z}_n$ sol $\mathbb{Z}_n$-modüldür. Her vektör uzayı, bir üniter sol modüldür. Bu çalışmada tüm modüller üniter sol R-modül olarak alınacaktır ve kısaca R-modül yazılışı kullanılacaktır.

2.2.2. Tanım R halka, M bir R-modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ alt küme olsun. Eğer N, $(M,+)$ abel grubunun alt grubu ve her $m \in N$, her $r \in R$ için $rm \in N$ oluyorsa, N alt kümesine M modülünün bir **alt modülü** denir ve $N \leq M$ yazılışı ile gösterilir. Bu tanıma göre 0 ve M, M modülünün aşikar alt modülleridir. M modülünün kendisinden farklı alt modüllerine **öz alt modül** denir. N, M nin öz alt modülü ise, $N < M$ ile gösterilir. R halkasının I öz sol ideali aynı zamanda $_RR$ nin öz alt modülüdür. M modülünün keyfi sayıdaki alt modüllerinin kesişimi M nin alt modülüdür. M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. $Rm = \{rm \mid r \in R\} \leq M$ alt modüldür [9].

2.2.3. Tanım M bir R-modül ve $X \subseteq M$ alt küme olsun. M modülünün X alt kümesini kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine M modülünün X **alt kümesi tarafından üretilen alt modülü** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X kümesine $\langle X \rangle$ alt modülünün **üreteç kümesi** denir. Eğer X sonlu küme ise, $\langle X \rangle$ alt modülüne **sonlu üretilmiş alt modül**, $X = \{m\}$ şeklinde tek elemana sahipse $\langle X \rangle = \langle m \rangle$ alt modülüne **devirli alt modül** denir. Eğer $M = \langle X \rangle$ olacak şekilde M nin sonlu bir X alt kümesi varsa M ye s**onlu üretilmiş modül** ve özel olarak $M = \langle m \rangle$ olacak şekilde $m \in M$ elemanı varsa M ye $\boldsymbol{m}$ **tarafından üretilen devirli modül** denir. Burada $\langle m \rangle = Rm = \{ rm \mid r \in R \}$ şeklindedir. Ayrıca $\{ N_i \mid i \in I \}$, M nin alt modüllerinin ailesi ise, $X = \bigcup_{i \in I} N_i$ kümesinin ürettiği alt modüle N_i **modüllerinin toplamı** denir. $\langle X \rangle = \langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle = \sum_{i \in I} N_i$ şeklinde gösterilir [9].

2.2.4. Tanım M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. M/N bölüm grubu, $r \in R$ ve $m + N \in M/N$ elemanları için, $r(m+N) = rm + N$ ile tanımlı $\bullet : R \times M/N \longrightarrow M/N$ dış işlemine göre bir R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle M modülünün N alt modülüne göre **bölüm modülü** denir [9].

2.2.5. Teorem M sonlu üretilmiş modül olsun**.** M nin her bölüm modülü de sonlu üretilmiştir [9].

İspat M sonlu üretilmiş R-modül ve $L \leq M$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan, her $v \in M$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $v_i \in M$ ve $r_i \in R$ olmak üzere $M = <\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}>$ ve $v = r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n$ dir. Her $v + L \in M/L$ elemanı için $v + L = (r_1v_1 + \cdots + r_nv_n) + L = r_1(v_1 + L) + \cdots + r_n(v_n + L)$ olduğundan $M/L =< \{v_1 + L, v_2 + L, \ldots\ldots\ldots, v_n + L\} >$ bulunur. Dolayısıyla M/L sonlu üretilmiştir.

2.2.6. Tanım M bir R-modül ve $\{N_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin ailesi olsun.
i) $M = \sum_{i\in I} N_i$,
ii) $\forall i \in I$ için $N_i \cap \sum_{i\neq j} N_j = \{0\}$
şartlarını sağlayan M modülüne $\{N_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin **iç direkt toplamı** ya da **direkt toplamı** denir. $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$ ile gösterilir. Her bir N_i alt modülüne M modülünün **direkt toplam terimi** denir.

M modülünün N_1 ve N_2 alt modüllerini aldığımızda $M = N_1 \oplus N_2$ olması için gerek ve yeter koşulun $M = N_1 + N_2$ ve $N_1 \cap N_2 = 0$ olduğu açıktır.
$M = M \oplus \{0\}$ şeklinde yazılabildiğinden $M = M + 0$ ve $M = M \cap \{0\} = \{0\}$ olup M ve $\{0\}$, M modülünün direkt toplam terimleridir. Burada M ve $\{0\}$ alt modüllerine M modülünün **aşikar direkt toplam terimleri** denir [19].

2.2.7. Tanım R halka ve I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{N_i\}_{i\in I}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\{\, \alpha \mid \alpha: I \to \bigcup_{i\in I} N_i,\ \forall\, i \in I\ için\ \alpha(i) \in N_i \,\}$ dönüşümlerin kümesine $\{\boldsymbol{N_i}\}_{\boldsymbol{i\in I}}$ **modüller ailesinin çarpımı** denir ve bu küme $\prod_{i\in I} N_i$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) = \alpha_i$ ve $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ ile gösterelim. Burada α_i ye α **dönüşümünün $\boldsymbol{i}$. bileşeni** denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots .)$ şeklindedir.
$\alpha, \beta \in \prod_{i\in I} N_i$ olmak üzere
(i) $\alpha = \beta \iff$ her $i \in I$ için $\alpha_i = \beta_i$
(ii) $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i\in I}$
(iii) $-\alpha = (-\alpha_i)_{i\in I}$
(iv) $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (r\alpha_i)_{i\in I}$ ile tanımlı cebirsel işlemlerine göre $\prod_{i\in I} N_i$ bir R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{N_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt çarpımı** denir.
$\bigoplus_{i\in I}^{w} N_i = \{\, (\alpha_i)_{i\in I} \mid sonlu\ sayıda\ i \in I\ için\ \alpha_i \neq 0 \,\}$ kümesi $\prod_{i\in I} N_i$ modülünün bir alt modülüdür. $\bigoplus_{i\in I}^{w} N_i$ alt modülüne $\{N_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt toplamı** denir. I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I}^{w} N_i$ dir. İç direkt toplam ile dış direkt toplam izomorftur ve bu nedenle iç direkt toplam ve dış direkt toplam yerine sadece direkt toplam ifadesi kullanılır [1].
M bir R-modül olmak üzere, yukarıda dış direkt toplam tanımında her bir $i \in I$ için $N_i = M$ alınırsa $\bigoplus_{i\in I} N_i$ direkt toplamına, M nin **kopyalarının toplamı** denir ve $M^{(I)}$ ile gösterilir [19].

2.2.8. Teorem (Modüler Kural) M modül, K, N ve U da M nin alt modülleri ve $U \leq N$ olsun. Bu takdirde, $(U + K) \cap N = U + (K \cap N)$ dir [1].

İspat Keyfi $m \in (U + K) \cap N$ için $m \in (U + K)$ ve $m \in N$ olduğundan $m = u + k$ olacak şekilde $u \in U$ ve $k \in K$ vardır. $U \leq N$ verildiğinden $u \in N$ olur. Bu durumda $k = m - u$ dur. $N \leq M$ olduğundan $m \in N$, $u \in N$ iken $k \in N$ olup $k \in K \cap N$ bulunur. Dolayısıyla $m \in U + (K \cap N)$ olur. Tersine; $U + (K \cap N) \leq (U + K) \cap N$ olduğu açıktır. Buradan istenen elde edilir.

2.3. Homomorfizmalar

2.3.1. Tanım R halka olmak üzere M ve N R-modülleri verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\psi: M \longrightarrow N$ fonksiyonuna **sol R-modül homomorfizması** denir.

i) Her $a, b \in M$ için $\psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b)$ dir,

ii) Her $a \in M$ ve her $r \in R$ için $\psi(ra) = r\psi(a)$ dir.

Burada herhangi bir sol R-modül homomorfizması kısaca homomorfizma olarak adlandırılacaktır. $\psi: M \longrightarrow N$ homomorfizma olsun. Eğer ψ bire-bir ise ψ homomorfizmasına bir **monomorfizma**, ψ örten ise ψ homomorfizmasına bir **epimorfizma** ve ψ hem bire-bir hem de örten ise ψ homomorfizmasına bir **izomorfizma** denir. M ve N modülleri arasında bir izomorfizma varsa, M ile N modüllerine **izomorf modüller** denir ve bu $M \cong N$ ile gösterilir. M modülünden N modülüne tanımlanan tüm homomorfizmaların kümesi $Hom(M, N) = \{\psi \mid \psi : M \longrightarrow N$ modül homomorfizması$\}$ ile gösterilir. Burada $\psi : M \longrightarrow M$ homomorfizmasına **endomorfizma** adı verilir. M modülünün tüm endomorfizmalarının kümesi $End(M)$ ile gösterilir [9].

2.3.2. Tanım M modül ve $N \leq M$ olsun. Her $n \in N$ için $i(n) = n$ ile tanımlı $i: N \longrightarrow M$ dönüşümü monomorfizma olup i monomorfizmasına **içerme monomorfizması** denir. $\pi: M \longrightarrow M/N$, $\pi(m) = m + N$ ile tanımlı dönüşümü epimorfizmadır. Bu π epimorfizmasına **doğal (kanonik) homomorfizma** denir [9].

2.3.3. Tanım M modül olmak üzere $g(m) = m$ ile tanımlı $g: M \longrightarrow M$ fonksiyonu R-modül izomorfizmasıdır. Bu izomorfizmaya **birim (idantik) homomorfizma** adı verilir. M den M ye birim homomorfizması I_M yazılışı ile gösterilir [9].

2.3.4. Teorem $\psi : M \longrightarrow N$ ve $\phi : N \longrightarrow K$ birer homomorfizma olsun. $\phi\,\psi : M \longrightarrow K$ bileşke fonksiyonu homomorfizmadır [11].

2.3.5. Tanım $\psi: M \longrightarrow N$ homomorfizma olmak üzere, $\{ m \in M \mid \psi(m) = 0\}$ kümesine ψ homomorfizmasının **çekirdeği** denir ve $\boldsymbol{Çek}\ (\boldsymbol{\psi})$ ile gösterilir. $Çek\ (\psi) \leq M$ alt modüldür [9].

2.3.6. Tanım $\psi: M \longrightarrow N$ homomorfizma olmak üzere, $\{ \psi(m) \mid m \in M \}$ kümesine, $\boldsymbol{M}$ **modülünün** $\boldsymbol{\psi}$ **altındaki homomorfik görüntüsü** denir ve $Gör(\psi)$ yazılışı ile gösterilir. $Gör(\psi) \leq N$ alt modüldür [9].
$\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal homomorfizması için $Çek(\pi) = N$ olduğu açıktır.

2.3.7. Tanım M modülünün aşikar direkt toplam terimlerinden başka direkt toplam terimi yoksa M modülüne **parçalanamaz modül**, M nin aşikar direkt toplam terimleri dışında direkt toplam terimi mevcut ise, M modülüne **parçalanabilir modül** denir [9].

Örneğin $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ parçalanamaz modüldür. Gerçekten $\mathbb{Z} = M_1 \oplus M_2$ olduğunda $M_1 = n\mathbb{Z}$ ve $M_2 = m\mathbb{Z}$ şeklinde olup $\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathbb{Z} = n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = ebob(n,m)\mathbb{Z}$ ve $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = 0 = ekok(n,m)\mathbb{Z} = 0\ \mathbb{Z}$ dir. Buradan $n = 0$ veya $m = 0$ olur. Dolayısıyla $M_1 = 0$ iken $M_2 = \mathbb{Z}$ veya $M_1 = \mathbb{Z}$ iken $M_2 = 0$ olup ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ parçalanamaz modüldür. Bunun yanında $M = \mathbb{Z}_6$ olarak alınırsa M modülü parçalanabilirdir. Çünkü $M = \mathbb{Z}_6 = <\bar{2}> \oplus <\bar{3}>$ ve $<\bar{2}> \cap <\bar{3}> = \bar{0}$ dır.

2.3.8. Teorem (Homomorfizma Teoremi) $f: M \rightarrow N$ homomorfizma olsun. Bu takdirde, $M/_{Çek(f)} \cong Gör(f)$ dir. f epimorfizma ise, $M/_{Çek(f)} \cong N$ dir [19].

2.3.9. Teorem (1. İzomorfizma Teoremi) M modülünün H ve K alt modülleri için $(H+K)/_K \leq M/_K$ alt modülü olup $(H+K)/_K \cong H/_{(H \cap K)}$ dır [19].

2.3.10. Teorem (2. İzomorfizma Teoremi) $K \leq N \leq M$ modüller olsun. Bu durumda $(M/K)/_{(N/K)} \cong M/_N$ dir [19].

2.3.11. Tanım M modül ve $N < M$ öz alt modül olsun. M nin N alt modülünü kapsayan N den başka öz alt modülü yoksa, N öz alt modülüne M modülünün **maksimal alt modülü** denir. Örneğin $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $<p>= p\mathbb{Z} <\ _{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ maksimal alt modüldür [11].

2.3.12. Teorem M sonlu üretilmiş modül olsun. Bu takdirde M nin her öz alt modülü M nin bir maksimal alt modülünde kapsanır [11].

İspat. $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $N < M$ öz alt modül olsun. N yi içeren M nin öz alt modülleri kümesini Δ ile gösterelim. Bu takdirde N öz alt modül olduğundan $N \in \Delta \neq \emptyset$ dır. Δ kümesi kapsama bağıntısına göre sıralı kümedir. Γ, Δ kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. C ile Γ kümesinin elemanlarının birleşimini gösterirsek $N \leq C$ ve Γ tam sıralı olduğundan $C \leq M$ dir. Üstelik C, M nin öz alt modülüdür. Eğer C, M nin öz alt modülü olmasa M sonlu üretilmiş olduğundan sonlu bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ üreteç kümesine sahip olup Γ tam sıralı olduğundan Γ nın tüm x_i leri kapsayan bir elemanı vardır. Bu elemana K diyelim. Buradan $M \subseteq K$ olur. Dolayısıyla $M \in \Gamma$ bulunur. Bu ise, Γ nın seçimi ile çelişir. Dolayısıyla C bir öz alt modül olup $C \in \Delta$ dir ve C, Γ nın bir üst sınırıdır. Zorn Lemmasına göre Δ kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

2.3.13. Teorem M modül ve $N \leq M$ alt modül olsun. Bu takdirde M nin N yi içeren tüm alt modüllerinin kümesi ile M/N nin tüm alt modüllerinin kümesi arasında bire-bir eşleme vardır. M/N nin alt modülleri $N \subseteq U \subseteq M$ olmak üzere U/N şeklindedir [1].

İspat $N \leq M$ olduğundan $\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal homomorfizması kullanılarak $N \subseteq U \leq M$ için $\pi(U) = U/N \leq M/N$ elde edilir. Tersine $K \leq M/N$ ise, $U = \pi^{-1}(K)$ için $N = Çek(\pi) = \pi^{-1}(0) \leq U \leq M$ ve $\pi(U) = U/N = K$ olduğundan M/N nin her alt modülü $N \leq U \leq M$ olmak üzere U/N şeklinde olur.

2.3.14. Önerme R halka olmak üzere M bir R-modül ve $U < M$ öz alt modül olsun. U alt modülünün M de maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M \setminus U$ için $U + Rm = M$ olmasıdır [11].

İspat. ($\Longrightarrow$) Keyfi $m \in M \setminus U$ için $U \subsetneq U + Rm$ ve U nun maksimalliğinden, $U + Rm = M$ dir.

($\Longleftarrow$) V, M nin $U \subsetneq V$ şartını sağlayan bir alt modülü olsun. Burada $V = M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $U \neq V$ olduğundan $m \in V \setminus U$ elemanı vardır. Bu takdirde

$m \in M \setminus U$ olup hipotez gereği $U + Rm = M$ dir. Aynı zamanda $m \in V$ olduğundan $Rm \leq V$ dir ve buradan $M = U + Rm \leq V$ olup $V = M$ dir.

2.3.15 Tanım $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ modüller ailesinden ve bunların $f_n: M_n \longrightarrow M_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan

$$\dots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $Gör(f_n) = Çek(f_{n-1})$ oluyorsa, bu diziye **tam dizi** adı verilir. $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ şeklindeki tam diziye ise, **kısa tam dizi** adı verilir [1].

2.3.16. Teorem $0 \longrightarrow A \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{k}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $hf = I_A$ olacak şekilde bir $h: B \longrightarrow A$ homomorfizması vardır;
ii) $Gör(f),\ B$ modülünün direkt toplam terimidir;
iii) $gk = I_C$ olacak şekilde $k: C \longrightarrow B$ R-modül homomorfizması vardır ve $B \cong A \oplus C$ dir

Teorem 2.3.16 daki denk koşulları sağlayan kısa tam diziye **parçalanabilir kısa tam dizi** denir [1].

2.4. Noether ve Artin Modülleri

2.4.1. Tanım M modül olsun. M modülünün alt modüllerinin her

$$M_1 \leq M_2 \leq \cdots \leq M_r \leq \cdots$$

artan zinciri verildiğinde her $r \geq s$ için $M_r = M_s$ olacak şekilde bir s pozitif tam sayısı varsa M modülüne **Noether modül** denir. R halkası sol R-modül olarak Noether ise, R halkasına **sol Noether halka** denir [9].

${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ Noether modüldür. Fakat ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ Noether modül değildir. Çünkü $\left(\frac{1}{3}\right) \subset \left(\frac{1}{9}\right) \subset \left(\frac{1}{27}\right) \subset \cdots \subset \left(\frac{1}{3^n}\right) \subset \cdots$ bir sonsuz zincir oluşturur. $\mathbb{Z}_m$ $\mathbb{Z}$-modülü sonlu olduğundan Noether'dir.

2.4.2. Tanım M modül olsun. M modülünün alt modüllerinin her

$$M_1 \geq M_2 \geq \cdots \geq M_r \geq \cdots$$

azalan zinciri verildiğinde her $r \geq s$ için $M_r = M_s$ olacak şekilde bir s pozitif tam sayısı varsa M modülüne **Artin modül** denir. R halkası sol R-modül olarak Artin ise, R halkasına **sol Artin halka** denir [9].

$\mathbb{Z}_m$ $\mathbb{Z}$-modülü sonlu olduğundan Artin'dir. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ Artin modül değildir. Çünkü $(3) \supset (9) \supset (27) \supset \cdots \supset (3^n) \supset \cdots$ bir sonsuz azalan zincirdir.
R bölme halkası ise, idealleri 0 (sıfır) ve kendisi olduğundan hem sol (sağ) Noether hem de sol (sağ) Artin halkadır.

2.4.3. Teorem M modül olmak üzere aşağıdakiler denktir.
i) M Noether'dir;
ii) M modülünün alt modüllerinin boştan farklı her kümesi bir maksimal elemana sahiptir;
iii) M nin her alt modülü sonlu üretilmiştir [21].
İspat (i) $\Longrightarrow$ (iii) U, M nin keyfi bir alt modülü olsun. U alt modülünün sonlu üretilmiş olmadığını varsayalım. Bu takdirde $U \neq < v_1 >$ olacak şekilde bir $v_1 \in U$ ve $U \neq < v_1, v_2 >$ olacak şekilde bir $v_2 \in U \setminus < v_1 >$ elemanları vardır. Bu şekilde devam edilirse, $v_{k+1} \in U \setminus < v_1, v_2, \dots, v_k >$ elde edilir. Böylece M nin alt modüllerinin $< v_1 > \subset < v_1, v_2 > \subset \cdots \subset < v_1, v_2, \dots, v_k > \subset \cdots$ artan sonsuz zinciri elde edilir. Bu ise, M nin Noether olması ile çelişir. O halde U sonlu üretilmiştir.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Γ, M modülünün alt modüllerinin boştan farklı keyfi bir ailesi ve $M_0 \in \Gamma$ olsun. M_0, Γ nın maksimal elemanı değilse, $M_0 \subset M_1$ olacak şekilde $M_1 \in \Gamma$ elemanı vardır. M_1, Γ nın maksimal elemanı değilse, $M_1 \subset M_2$ olacak şekilde $M_2 \in \Gamma$ elemanı vardır. Burada Γ ailesinin maksimali yoksa, $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_s \subset \cdots$ sonsuz zinciri yazılır. $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ olsun. K, M modülünün alt modülüdür ve hipotez gereği $K = < k_1, k_2, \dots, k_s >$ olacak şekilde $k_1, k_2, \dots, k_s \in M$ vardır. Dolayısıyla burada $k_1, k_2, \dots, k_s$ elemanlarını içeren M nin bir K_j alt modülünü bulabiliriz. Buradan $K_j = K_{j+1} = \cdots$ bulunur. O halde Γ nın maksimal elemanı vardır.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) M nin alt modüllerinin keyfi bir $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_s \subset \cdots$ artan zincirini alalım. Bu durumda $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ modüller ailesinin bir M_j maksimali vardır. Böylece $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_j = M_{j+1} = \cdots$ elde edilir. Dolayısıyla M Noether'dir.

2.4.4. Teorem M modül olsun. Aşağıdaki durumlar denktir.

i) M Artin'dir;

ii) M nin alt modüllerinin boştan farklı her kümesi minimal elemana sahiptir [3].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) A, M nin alt modüllerinin boştan farklı bir kümesi olsun. $A \neq \emptyset$ olduğundan $M_1 \in A$ olacak şekilde $M_1 \leq M$ vardır. $|A| = 1$ ise, M_1 istenendir. $|A| \geq 2$ olsun. $M_1, M_2 \in A$ karşılaştırılabilirse, $M_2 \subseteq M_1$ yazılabilir. Bu yöntemle ... $\subseteq M_n \subseteq \cdots \subseteq M_2 \subseteq M_1$ zinciri elde edilir. M Artin olduğundan en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki; her $k \in \mathbb{N}$ için $M_{n_0} = M_{n_0+k}$ olup M_{n_0}, A nın minimal elemanıdır.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) M nin $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ olacak şekilde herhangi bir azalan zincirini göz önüne alalım. (ii) den $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ailesinin bir M_j minimal elemanı vardır. O halde $M_j = M_{j+1}$ olup M Artin'dir.

2.4.5. Teorem $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. N modülünün Artin (Noether) olması için gerek ve yeter koşul M ve K nın Artin (Noether) olmasıdır [17].

İspat Genelliği bozmadan $i: M \longrightarrow N$ yi içerme monomorfizması olarak alalım. Bu takdirde $i(M) = Gör(i) = M$ olup dizi tam olduğundan $N/_M \cong K$ izomorfizması mevcuttur. İzomorfizma farkı gözetmeden $N/_M = K$ olsun. N modülünün Artin olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Teorem 2.4.4 ten N modülünün alt modüllerinin boştan farklı her kümesi bir minimal elemana sahip olup M alt modülünün de alt modüllerinin boştan farklı her kümesi bir minimal elemana sahiptir. Tekrar Teorem 2.4.4 uygulanırsa M alt modülünün Artin olduğu görülür. Şimdi $N/_M$ nin alt modüllerinin bir $E_1{}' \supseteq E_2{}' \supseteq E_3{}' \supseteq \cdots$ azalan zincirini alalım. Teorem 2.3.13 gereğince bu dizi ile eşlenen N nin M yi içeren alt modüllerinin bir $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ azalan zinciri vardır. N Artin olduğundan öyle bir s pozitif tam sayısı vardır ki her $r \geq s$ için $E_r = E_s$ dir. Buradan $N/_M$ deki alt modüllerin zinciri dikkate alınırsa öyle bir s pozitif tam sayısı vardır ki her $r \geq s$ için $E_r{}' = E_s{}'$ olur. Buradan $N/_M$ bölüm modülünün Artin olduğu görülür. $N/_M = K$ olduğundan K Artin'dir. Tersine; M ve $N/_M$ modüllerinin Artin olduğunu varsayalım. N modülünün alt modüllerinin bir azalan zinciri $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ olsun. Şimdi

$$E_1 \cap M \supseteq E_2 \cap M \supseteq E_3 \cap M \ldots$$

ve

$$\left.(E_1 + M)\middle/M\right. \supseteq \left.(E_2 + M)\middle/M\right. \supseteq \left.(E_3 + M)\middle/M\right. \supseteq \cdots$$

azalan zincirleri yazılır. M Artin olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $E_r \cap M = E_{r+n} \cap M$ olacak şekilde $r \in \mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayısı ve N/M Artin olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $(E_k + M)/M = (E_{k+n} + M)/M$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayısı vardır. $\mathbb{Z}^+$ iyi sıralı olduğundan $r \geq k$ seçimini yapabiliriz. $r \geq k$ olduğundan $E_k \supseteq E_r$, $E_k \cap M \supseteq E_r \cap M$ ve $(E_k + M)/M = (E_r + M)/M$ dir. Buradan $E_k + M = E_r + M$ eşitliği elde edilir. Şimdi

$E_r = E_r \cap (E_r + M) = E_r \cap (E_{k+r} + M) = E_{k+r} + E_r \cap M = E_{k+r} + E_{k+r} \cap M = E_{k+r}$

olup N azalan zincir koşulunu sağlar. Dolayısıyla N Artin'dir. Benzer ispat yöntemi ile Noether koşulunun gerçeklendiği görülür.

2.4.6. *Sonuç* R halka ve $M_1, M_2, \dots, M_n$ R-modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ nin Noether (Artin) olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1,2,\dots,n$ için M_i nin Noether (Artin) olmasıdır [19].

İspat n üzerine tümevarımla gösterelim. $n = 2$ için doğruluğunu gösterelim. $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için Teorem 2.4.5 uygulanırsa istenen elde edilir.

2.5. Projektif, İnjektif ve Serbest Modüller

2.5.1. Tanım M, N ve P modül olsun. Satır tam dizi olmak üzere eğer aşağıdaki diyagram değişmeli ise, P modülüne ***M*-projektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bir başka deyişle; yukarıdaki diyagramda f keyfi bir epimorfizma olmak üzere f, g homomorfizmaları için $g = fh$ olacak şekilde bir $h: P \longrightarrow M$ homomorfizması bulunursa, P ye ***M*-projektiftir** denir. Eğer bu diyagramdaki $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ satır tam dizisi keyfi alınırsa P ye **projektif modül** denir [1].

2.5.2. Tanım M, N ve K modül olsun. Verilen her $g: K \longrightarrow N$ monomorfizması ve her $f: K \longrightarrow M$ homomorfizması için $f = hg$ olacak şekilde bir $h: N \longrightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse, M modülüne ***N*-injektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diyagramda $0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} N$ satır tam dizisi keyfi alınırsa M ye **injektif modül** denir [1].

2.5.3. Tanım M bir modül ve $N \leq M$ olsun. M modülünün sıfırdan farklı her alt modülüyle N alt modülünün kesişimi sıfırdan farklı ise, N alt modülüne M modülünün **büyük alt modülü** denir. Ayrıca bir monomorfizmanın görüntüsü büyük ise, bu monomorfizmaya **büyük monomorfizma** adı verilir. E injektif bir modül ve $f: M \hookrightarrow E$ büyük monomorfizma ise, E injektif modülüne M modülünün **injektif bürümü** denir ve bu durum $E(M)$ ile gösterilir [1].

2.5.4. Teorem F modül olmak üzere $X = \{x_k | \, k \in K\}$ de F nin alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki koşul denktir:

i) Her $a \in F$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfırdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak $\sum_{k \in K} r_k x_k$ şeklinde yazılabilir.

ii) Her $k \in K$ için $f_k(r) = r x_k$ şeklinde tanımlanan $f_k: R \longrightarrow R x_k$ fonksiyonu bir izomorfizma olup $F = \bigoplus_{k \in K} R x_k$ dır [1].

2.5.5. Tanım Bir önceki teoremdeki denk koşullardan birini sağlayan F modülüne **serbest modül,** $X = \{\, x_k \mid k \in K \,\}$ kümesine de F modülünün **serbest üretenler kümesi** veya kısaca **tabanı** denir [9].

Her R halkası kendisi üzerinde serbest modüldür. Çünkü taban olarak $\{1_R\}$ alınabilir. Her vektör uzayı bir tabana sahip olduğundan, vektör uzayları birer serbest modüldür.

2.5.6. Tanım U modül ve $M \leq U$ olsun. Bu takdirde U modülüne M nin **genişlemesi** denir [24].

2.5.7. Teorem (Baer Kriteri) R halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her $I \subseteq R$ sol ideali için $f: I \longrightarrow M$ homomorfizmasının $g: R \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir [1].

2.5.8. Yardımcı Teorem M injektif modül ise, M modülünün her direkt toplam terimi injektiftir [1].

2.5.9. Teorem (Gömülme Teoremi) R herhangi bir birimli halka olsun. Her R-modül bir injektif R-modül içine gömülebilirdir [11].

2.5.10. Teorem M modül olsun. M nin injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin kendisini kapsayan her modülde direkt toplam terimi olmasıdır [19].
İspat ($\Longrightarrow$) M injektif modül ve $M \leq U$ olsun. Bu takdirde i içerme fonksiyonu ve I_M birim dönüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I_M"'] & U \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$m \in U$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde $g(m) \in M$ olup $gi = I_M$ olduğundan $g(m) = g\big(g(m)\big)$ olur. Buradan $m - g(m) \in Çek(g)$ olur. Bu durumda $m = g(m) + \big(m - g(m)\big) \in M + Çek(g)$ olup $U \leq M + Çek(g) \leq U$ dan $U = M + Çek(g)$ elde edilir. $m \in M \cap Çek(g)$ keyfi elemanını alalım. $gi = I_M$ olduğundan $m = g(m) = 0$ olup $m = 0$ bulunur. Dolayısıyla $U = M \oplus Çek(g)$ dir.
($\Longleftarrow$) Teorem 2.5.9 gereğince M modülü injektif bir U R-modülü içine gömülebilirdir (M, bir injektif modülün alt modülüdür). Hipotezden ve Yardımcı Teorem 2.5.8 den M, injektiftir.

2.5.11. Teorem R herhangi bir birimli halka olsun. Her R-modül bir serbest R-modülün homomorfik görüntüsüdür [11].

2.6. Basit ve Yarı-Basit Modüller

2.6.1. Tanım R halka ve M sıfırdan farklı R-modül olsun. M modülünün aşikar alt modüllerinden başka alt modülü yoksa M ye **basit modül** denir [12].

Örneğin $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$-modülü basittir. K cisim olmak üzere ${}_KK$ nın alt modüllleri sadece 0 ve K olduğundan ${}_KK$ basittir.

2.6.2. Önerme R halka olmak üzere M basit R-modül olsun. $\{0\}$, M modülünün maksimal alt modülüdür ve sıfırdan farklı her $m \in M$ elemanı için $Rm = M$ olup M devirlidir [11].

İspat. M basit modül olduğundan $\{0\}$ alt modülünü kapsayan M nin kendisinden başka alt modülü yoktur. Buradan maksimal alt modül tanımı gereği $\{0\}$, M nin maksimal alt modülüdür. Keyfi $0 \neq m \in M$ elemanı için Rm, M nin bir alt modülüdür ve $m \in Rm$ dir. Böylece $\{0\} \neq Rm$ ve M basit olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir.

2.6.3. Teorem R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R bölme halkasıdır;

ii) ${}_RR$ basit modüldür;

iii) R_R basit sağ R-modüldür.

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) $0 \neq I \subseteq R$ sol idealini alalım. $0 \neq a \in I$ elemanı vardır ve I sol ideal olduğundan $a \in R$ ve R bölme halkası olduğundan $a^{-1}a = 1_R \in I = R$ elde edilir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $0 \neq a \in R$ alalım. $0 \neq Ra \subseteq R$ sol ideal ve ${}_RR$ basit modül olduğundan $Ra = I = R$ olup $Ra = R$ dir. $1_R \in R = Ra$ için $1_R = ba$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. $0 \neq Rb = R$, $1_R = cb$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Buradan $c = c1_R = c(ba) = (cb)a = 1_Ra = a$ olup buradan $ba = 1_R = ab$ olduğu görülür. O halde R nin sıfırdan farklı her elemanının tersi mevcut olup, R bölme halkasıdır.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Benzer şekilde yapılır.

2.6.4. Teorem M modül ve $N \leq M$ olsun. M nin N alt modülünün maksimal olması için gerek ve yeter koşul M/N bölüm modülünün basit olmasıdır [21].

İspat $(\Longrightarrow)$ N, M nin bir maksimal alt modülü ve $K/N \leq M/N$ olsun. Burada $N \leq K$ dır. N, M nin maksimal alt modülü olduğundan $N = K$ veya $M = K$ dır. O halde M/N nin alt modülleri N/N veya M/N dir. O halde M/N bölüm modülü basittir.

$(\Longleftarrow)$ M/N basit olsun. $N < K \leq M$ olacak şekilde K alt modülünü alalım. Buradan $N/N < K/N \leq M/N$ olur. M/N basit olduğundan $K/N = M/N$ olup $K = M$ veya $K = N$ dir. O halde N, M nin maksimal alt modülüdür.

2.6.5. Tanım R halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün her alt modülü M de bir direkt toplam terimi ise, M ye **yarı-basit modül** denir [12].

$\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$-modülünü alalım. $N = \{\bar{0}, \bar{2}\} \leq \mathbb{Z}_4$ alt modülü, direkt toplam terimi olmadığından $\mathbb{Z}_4$ yarı-basit değildir.
$\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$-modülünü alalım.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_6 & \\ \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\} \arrow[ur] & & \{\bar{0},\bar{3}\} \arrow[ul] \\ & \{\bar{0}\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ve $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{3}\}$ olduğundan $\mathbb{Z}_6$ yarı-basittir.

M modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamına M nin **desteği** denir ve $\boldsymbol{Des}(\boldsymbol{M})$ ile gösterilir. M nin basit alt modülü yoksa, $Des(M) = 0$ dır [21].
Tanım 2.6.1 ve Tanım 2.6.5 e dikkat edilirse 0 alt modülü yarı-basittir fakat basit değildir.

2.6.6. Yardımcı Teorem M sıfırdan farklı herhangi bir yarı-basit modül ise, basit bir alt modül içerir [12].
İspat m, M nin sıfırdan farklı sabit bir elemanı olsun. Zorn Lemmasından $m \notin N$ olacak şekilde M nin bir maksimal N alt modülü vardır. Hipotez gereği N, M nin direkt toplam terimidir ve $M = N \oplus K$ olacak şekilde K alt modülü mevcuttur. Teorem 2.6.4 gereği $M/_N$ basittir. Teorem 2.3.13 ten K basit modüldür.

2.6.7. Yardımcı Teorem $M = Des(M)$ olsun. Bu takdirde,
i) M yarı-basittir,
ii) M nin her alt modülü basit alt modüllerin direkt toplamıdır [1].
İspat $M = Des(M)$ olduğundan $M = \sum_{i \in K} M_i$ basit modüllerin toplamı şeklinde yazılabilir.
i) U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. $\Gamma = \left\{L \subseteq K \,\middle|\, U + \left(\sum_{l \in L} M_l\right) = U \oplus \left(\bigoplus_{l \in L} M_l\right)\right\}$ kümesini " $\subseteq$ " alt küme olma bağıntısıyla alarak bir kısmi sıralı küme elde ederiz. $\emptyset \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \emptyset$ dur. Zorn Lemmasını uygulamak için herhangi bir $\Lambda \subseteq \Gamma$ zincirini alalım. $L_0 = \bigcup_{L \in \Lambda} L \in \Gamma$ olduğunu gösterelim.

$$u + m_{i_1} + \cdots + m_{i_n} = 0$$

olacak şekilde $i_1, i_2, \dots, i_n \in L_0$; $u \in U$, $m_{i_t} \in M_{i_t}$ $(t = 1,2,\dots,n)$ bulunursa, Λ zincir olduğundan $i_1, i_2, \dots, i_n$ indislerini içeren bir $L \in \Gamma$ vardır. O halde

$$u = m_{i_1} = \cdots = m_{i_n} = 0$$

dır. Dolayısıyla $L_0 \in \Gamma$ dır. L_0 ın Λ nın üst sınırı olduğu açıktır. Zorn Lemmasından Γ nın bir J maksimal elemanı bulunur. $N = U \oplus (\bigoplus_{j\in J} M_j)$ olsun. Keyfi $k \in K$ alalım. J nin maksimal olmasından dolayı $N + M_k = N \oplus M_k$ olamaz. Dolayısıyla $N \cap M_k \neq 0$ dır. M_k basit olduğundan $N \cap M_k = M_k$, yani $M_k \subseteq N$ dir. Böylece

$$M = \sum_{k\in K} M_k = N$$

dir.

ii) U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. (i) den dolayı $M = U \oplus (\bigoplus_{j\in J} M_j)$ olacak şekilde $J \subseteq K$ alt kümesi bulunur. (i) yi $\bigoplus_{j\in J} M_j$ alt modülüne (U nun yerine) uygulayarak $M = (\bigoplus_{i\in I} M_i) \oplus (\bigoplus_{j\in J} M_j)$ elde ederiz. O halde $U \cong M/(\bigoplus_{j\in J} M_j) \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$ dir.

2.6.8. Teorem Bir M sol R-modülü için aşağıdaki özellikler denktir.
i) Her $U \leq M$ için $U = Des(U)$ dur;
ii) $M = Des(M)$ dir;
iii) M basit alt modüllerinin direkt toplamına eşittir;
iv) M yarı-basit modüldür [1].
İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Yardımcı Teorem 2.6.7 (i) nin ispatında $U = 0$ alınarak $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$ elde edilir.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Yardımcı Teorem 2.6.7 (i) den istenen elde edilir.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Keyfi bir $U \leq M$ alt modülü için $Des(U) \leq U$ olduğu açıktır. (iv) den dolayı $M = Des(U) \oplus N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ alt modülü bulunur. Modüler kuraldan $U = (Des(U) + N) \cap U = Des(U) + (N \cap U)$ elde ederiz. İki durum olabilir:

1.durum. $N \cap U = 0$ dır. O halde $U = Des(U)$ dur.

2.durum. $N \cap U \neq 0$ dır. Bu durumda $0 \neq n \in N \cap U$ elemanını alalım. $Rn \leq N \cap U$ devirli alt modülünün n yi içermeyen tüm alt modülleri kümesini Γ ile gösterelim: $\Gamma = \{V \leq Rn \mid n \notin V\}$. $\leq$ alt modül olma bağıntısıyla, Γ kısmi sıralı kümeye dönüşür. $0 \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \emptyset$ dır. Zorn Lemmasını uygulamak için Γ da bir $\{V_t\}_{t \in T}$ zinciri alalım. O halde $V_0 = \bigcup_{t \in T} V_t \leq Rn$ dir ve $n \notin V_0$ olduğundan $V_0 \in \Gamma$ dır. Zorn Lemmasından Γ da bir W maksimal elemanı bulunur. Aslında W, Rn nin de maksimal alt modülüdür. Çünkü, $W \leq W^* \leq Rn$ olacak şekilde bir W^* alt modülü aldığımızda, W nın Γ da maksimal olmasından dolayı $W^* \notin \Gamma$ dır. Böylece $n \in W^*$ gerçekleşir. O halde $W^* = Rn$ elde edilir.

Şimdi (iv) den dolayı W, M de dolayısıyla Rn de direkt toplam terimidir. Yani $Rn = W \oplus X$ olacak şekilde bir $X \leq Rn \leq N \cap U$ alt modülü vardır. W, Rn de maksimal alt modül olduğundan Teorem 2.6.4 gereği $Rn/_{W} \neq 0$ bölüm modülü basittir. O halde buna izomorf olan $X \neq 0$ alt modülü de basittir. Dolayısıyla $X \subseteq Des(U) \cap (N \cap U) = 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece sadece 1. durum olabilir.

Bu teoreme dikkat edilirse, yarı-basit modüller basit modüllerin direkt toplamı olduğundan, bir basit modülün aynı zamanda yarı-basit olduğu söylenebilir.

Tanımdan $Des(M)$, basit alt modüllerin toplamı olarak yarı-basittir. N, M nin yarı-basit alt modülü olsun. Bu takdirde N, $i: N \longrightarrow M$ içerme dönüşümünün görüntüsü olarak $Des(M)$ de içerilir. Yani $Des(M)$, M nin en büyük yarı-basit alt modülüdür [11].

$0 \neq n$ kare çarpansız bir tamsayı iken $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ yarı-basit $\mathbb{Z}$-modüldür

$n = 0$ ve $n = 1$ için $Des(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}) = 0$ dır.

$n = p$ asal alınırsa, $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$-modül olarak basittir. O halde $Des\left(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}\right) = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ dir. Eğer n nin $1 < q < n$ olacak şekilde en az bir q tamsayı böleni varsa $q\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ in sıfırdan farklı öz alt modülüdür. $i = 1,2, \ldots . n$ olmak üzere $\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{p_i\mathbb{Z}}$ olduğundan $\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ bölüm modülü $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ nin basit alt modülüdür. O halde

$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \frac{\mathrm{n}}{p_i}\mathbb{Z} \Big/ {n\mathbb{Z}} = \left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \frac{\mathrm{n}}{p_i}\mathbb{Z}\right) \Big/ {n\mathbb{Z}} = \frac{\mathrm{n}}{p_1 \dots p_k}\mathbb{Z} \Big/ {n\mathbb{Z}} \leq Des\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)$ olur. Diğer taraftan $n = qn_1$ olacak şekilde q böleni için $q\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ bölüm modülünün $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ nin basit alt modülü olması için n_1 sayısı $p_1, p_2, \dots, p_k$ asal sayılarından biri olmalıdır. Aksi halde $q\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ nin mertebesi asal olmaz ve buradan $q\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ basit olamaz. O halde $Des\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right) = \frac{n}{p_1p_2\dots p_k}\mathbb{Z} \Big/ {n\mathbb{Z}}$ dir. Özel olarak $Des\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right) = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ olması için gerek ve yeter koşul $n = p_1p_2 \dots p_k$ olmasıdır.

2.6.9. *Sonuç* Aşağıdakiler sağlanır.
i) Yarı-basit modülün her homomorfik görüntüsü yarı-basit modüldür.
ii) Yarı-basit modüllerin toplamı yarı-basittir [11].
İspat. (i) M yarı-basit modül ve $f: M \longrightarrow N$ epimorfizma olsun. Teorem 2.6.8 den M nin her alt modülü bir direkt toplam terimidir. O halde $Çek(f)$, M nin bir direkt toplam terimidir. Bu durumda $M = Çek(f) \oplus K$ olacak şekilde M nin bir K direkt toplam terimi mevcuttur. Bu takdirde, $M/_{Çek(f)} \cong K$ yazılır. $f: M \longrightarrow N$ bir epimorfizma olduğundan $M/_{Çek(f)} \cong N$ olup buradan $N \cong K$ olur. Yardımcı Teorem 2.6.7 den M yarı-basit modülünün K alt modülü de yarı-basittir. Dolayısıyla buna izomorf olan N R-modülü de yarı-basittir.

(ii) Teorem 2.6.8 den her yarı-basit modül basit modüllerin toplamı olduğundan yarı basit modüllerin toplamı da yine basit modüllerin toplamıdır. Dolayısıyla yarı-basit modüllerin toplamı yarı-basittir.
Şimdi sol yarı-basit halka kavramını verebiliriz.

2.6.10. Teorem Bir R halkası için aşağıdaki durumlar denktir.
(i) Her sol R-modül yarı-basittir;
(ii) Her sonlu üretilmiş sol R-modül yarı-basittir;
(iii) Her devirli sol R-modül yarı-basittir;
(iv) ${}_R R$ yarı-basittir [12].
İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) Açıktır.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) M keyfi bir R-modül $m \in M$ olsun. Her $r \in R$ için $f(r) = rm$ ile tanımlı $f: R \longrightarrow Rm$ dönüşümü epimorfizmadır ve Homomorfizma teoremi gereği $R/_{Çek(f)} \cong Rm$ dir. Sonuç 2.6.9 (ii) gereği Rm yarı-basit R-modül olup Sonuç 2.6.9 (ii) gereği $M = \sum_{m \in M} Rm$ olduğundan M yarı-basittir.

Bu teoremde verilen denk koşullardan herhangi birini sağlayan R halkasına **sol yarı-basit halka** denir [12].

2.6.11. Önerme Herhangi bir R halkası üzerindeki yarı-basit M modülü için aşağıdakiler denktir.

i) M basit alt modüllerinin sonlu bir ailesinin direkt toplamıdır;
ii) M Noether'dir;
iii) M Artin'dir;
iv) M sonlu üretilmiştir [17,19].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) ve (i) $\Longrightarrow$ (iii) Basit modüller Noether (Artin) dir. Sonuç 2.4.6 gereğince Noether (Artin) modüllerin (iç) direkt toplamı da Noether (Artin) dir.

(i) $\Longrightarrow$ (iv) Önerme 2.6.2 gereği basit modüller devirlidir. M basit alt modüllerinin sonlu bir ailesinin direkt toplamı olduğundan M sonlu üretilmiştir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) ve (iii) $\Longrightarrow$ (i) (i) koşulunun sağlanmadığını kabul edelim. Bu taktirde, M basit alt modüllerinin sonlu bir ailesinin direkt toplamı olarak yazılamaz. M yarı-basit olduğundan M basit alt modüllerinin bir (direkt) toplamıdır. O halde M basit alt modüllerinin sonlu olmayan bir ailesinin direkt toplamı olarak yazılır. $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ olsun. $S_1 \subset S_1 + S_2 \subset \cdots (\ldots \supset S_1 + S_2 \supset S_1)$ M nin artan (azalan) sonsuz zinciridir. O halde M Noether (Artin) değildir. Dolayısıyla (ii) ve (iii) sağlanmaz.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) M sonlu üretilmiş olsun. Bu takdirde $M = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_n$ koşulunu sağlayacak şekilde $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ elemanları vardır. M yarı-basit olduğundan $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ koşulunu sağlayan S_λ yarı-basit alt modülleri vardır. M sonlu üretilmiş olduğundan M sonlu sayıda basit alt modüllerin toplamı formunda yazılır. Dolayısıyla her $1 \leq i \leq r$ için $m_i \in {S_{\lambda_i}}^1 + {S_{\lambda_i}}^2 + \cdots + {S_{\lambda_i}}^{r_i}$ olacak şekilde Λ nın sonlu sayıda λ_i elemanları vardır. Buradan her $1 \leq i \leq r$ için $Rm_i \subseteq {S_{\lambda_i}}^1 + {S_{\lambda_i}}^2 + \cdots + {S_{\lambda_i}}^{r_i}$ bulunur. $M = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_r = \left({S_{\lambda_1}}^1 + {S_{\lambda_1}}^2 + \cdots + {S_{\lambda_1}}^r\right) + \cdots + ({S_{\lambda_n}}^1 + {S_{\lambda_n}}^2 + \cdots + {S_{\lambda_n}}^r)$ yazılır. $\left({S_{\lambda_1}}^1 + {S_{\lambda_1}}^2 + \cdots + {S_{\lambda_1}}^r\right) + \cdots + ({S_{\lambda_n}}^1 + {S_{\lambda_n}}^2 + \cdots + {S_{\lambda_n}}^r) =$

$S_{\lambda_1} + S_{\lambda_2} + \cdots + S_{\lambda_r}$ diyelim. Buradan $M = S_{\lambda_1} + S_{\lambda_2} + \cdots + S_{\lambda_r}$ dir. Her $\lambda \in \Lambda$ için $S_\lambda \cap (\sum_{\lambda \neq \beta \in \Lambda} S_\beta) = 0$ olduğundan her $1 \leq i \leq r$ için $S_{\lambda_i} \cap (\sum_{i \neq j, \lambda_j \in \Lambda} S_{\lambda_j}) = 0$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $M = S_{\lambda_1} + S_{\lambda_2} + \cdots + S_{\lambda_r}$ direkt toplamı elde edilir.

2.6.12. *Sonuç* Bir sol yarı-basit halka hem sol Noether'dir hem de sol Artin'dir [12].

İspat R sol yarı-basit halka olsun. Bu takdirde, ${}_RR$ yarı-basit olup ${}_RR$ sonlu üretilmiş olduğundan Önerme 2.6.11 gereği ${}_RR$ Artin ve Noether'dir.

2.6.13. Önerme Bir P sol R-modülünün projektif olması için gerek ve yeter koşul bir serbest sol R-modülün direkt toplam terimi olmasıdır [12].

Bu önermeyi kullanarak şimdi (sol) yarı-basit halka sınıfının homolojik karakterizasyonunu verebiliriz.

2.6.14. Teorem Bir R halkası üzerinde aşağıdaki durumlar denktir.

i) R sol yarı-basittir;

ii) Her sol R-modül projektiftir;

iii) Her sonlu üretilmiş sol R-modül projektiftir;

iv) Her devirli sol R-modül projektiftir [12].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) M keyfi bir sol R-modül olsun. Λ bir indis kümesi olmak üzere bir $\psi: R^{(\Lambda)} \longrightarrow M$ epimorfizması mevcuttur. $R^{(\Lambda)}$ projektif ve hipotez gereği yarı-basit olup $R^{(\Lambda)} = Çek(\psi) \oplus K$ olacak şekilde $K \leq R^{(\Lambda)}$ alt modülü vardır. Önerme 2.6.13 gereği K projektif olup $K \cong R^{(\Lambda)}/_{Çek(\psi)} \cong M$ projektiftir.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) Açıktır.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Keyfi $I \subseteq R$ sol idealini alalım. (iv) den $R/_I$ sol R-modülü projektiftir.

$$\begin{tikzcd}
 & R/_I \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "I_{R/_I}\ \text{(birim dönüşümü)}"] & \\
R \arrow[r, "\pi"'] & R/_I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\pi\alpha = I_{R/I}$ olacak şekilde $\alpha: R/I \longrightarrow R$ homomorfizması vardır. Bu ise, Teorem 2.3.16 gereği

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinin parçalanabilir olması demektir. Dolayısıyla $I \oplus K = {}_RR$ olacak şekilde $K \leq R$ sol ideali mevcuttur. Sonuç olarak ${}_RR$ yarı-basittir.

2.6.15. Teorem Bir R halkası üzerinde aşağıdaki durumlar denktir.
i) R sol yarı-basittir;
ii) Her sol R-modül injektiftir [12].
İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) Teorem 2.6.10 gereği tüm sol R-modüller yarı-basittir. M herhangi bir modül ve $M \subseteq N$ olsun. Teorem 2.6.10 gereği N yarı-basit olup $M \oplus K = N$ olacak şekilde $K \leq N$ alt modülü vardır. Teorem 2.5.10 gereği M injektiftir.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) $I \subseteq R$ sol ideal olsun. (ii) gereği I injektif R-modül olup Yardımcı Teorem 2.5.8 den ${}_RR = I \oplus K$ olacak şekilde $K \leq R$ sol ideali vardır. Dolayısıyla ${}_RR$ sol yarı-basittir.

2.6.16. Teorem (Osofsky) R herhangi bir halka olsun. R nin sol yarı-basit olması için gerek ve yeter koşul her devirli sol R-modülün injektif olmasıdır [10].

Buraya kadar sol yarı-basit halkaların bazı karakterizasyonları verildi. Şimdi çalışmamız için önemli olan bu halka sınıfının tüm yapısını veren kısımlar verilecektir. Bu yapıyı verenler Wedderburn ve Artin'dir. Weddernburn-Artin Teoremi olarak bilinen teorem (sol) yarı-basit halkalar sınıfının tamamen belirlenmesini sağlar. Wedderburn-Artin Teoremi'nin formülasyonuna geçmeden, önce sol yarı-basit halkalardan bazı örnekler oluşturmak yararlı olacaktır. D bir bölme halkası ise, sol modüller D üzerinde sol vektör uzaylarıdır. Burada daha fazla örnek üretmek için (sonlu) matris halkaları kullanılacaktır. Öncelikle, tam bir matris halkasında ideallerin sınıflandırılmasında aşağıdaki temel sonucu verelim.

2.6.17. Teorem Birimli R halkasından katsayılı $n \times n$ tipindeki matrislerin halkası $M_n(R)$ olsun. $M \subseteq M_n(R)$ nin bir ideali ise, $M = M_n(I)$ olacak şekilde bir $I \subseteq R$ ideali vardır [12].
İspat $I = \{a \in R \,|\, en\ az\ bir\ (a_{ij}) \in M\ için\ a = a_{11}\}$ kümesini alalım. $0 \in M$ olduğundan $0 \in I \neq \emptyset$ dır. Keyfi $a, b \in I$ elemanları için $a - b \in I$ olduğu açıktır. $a \in I$ ve $r \in R$

olsun. Bu takdirde, en az bir $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} \in M$ elemanı için $a = a_{11}$ dir. M bir ideal olduğundan $arE_{11} = E_{11}(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij})rE_{11} \in M$ dir. O halde $ar \in I$ dır. Benzer şekilde $raE_{11} = rE_{11}(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij})E_{11} \in M$ olduğundan $ra \in I$ dır. Dolayısıyla I, R nin idealidir. Şimdi $M = M_n(I)$ olduğunu gösterelim. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} \in M$ ve $1 \leq k,\ l \leq n$ olsun. $a_{kl}E_{11} = E_{1k}(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij})E_{l1} \in M$ dir. Bundan dolayı $1 \leq k,\ l \leq n$ için $a_{kl} \in I$ dır. Buradan $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} \in M_n(I)$ olup $M \subseteq M_n(I)$ kapsaması elde edilir. Tersine; $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}E_{ij} \in M_n(I)$ ve $1 \leq k,\ l \leq n$ olsun. Bu takdirde, $\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}E_{ij} \in M$ elemanı için $b_{k-l} = c_{11}$ dir. M bir ideal olduğundan; $b_{kl}E_{kl} = c_{11}E_{kl} = E_{k1}(\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}E_{ij})E_{1l} \in M$ olup $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}E_{ij} \in M$ dir. Buradan da $M_n(I) \subseteq M$ kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $M = M_n(I)$ dır.

Aşağıda verilen teoremde bir bölme halkası üzerindeki bir matris halkasının özellikleri detaylı olarak ifade edilmiştir.

2.6.18. Yardımcı Teorem (Jordan-Hölder Teoremi) Bir M modülünün, bir kompozisyon (bileşke) serisi varsa tüm kompozisyon (bileşke) serileri ona denktir [3].

2.6.19. Teorem D bölme halkası ve $R = \mathbb{M}_n(D)$ olsun. Bu takdirde;
i) R sol yarı-basittir, sol Artiniandır ve sol Noetheriandır;
ii) R izomorfizma farkı ile bir tek V sol basit modülüne sahiptir ve ${}_RR \cong V^{(n)}$ dir;
iii) $D \cong End({}_RV)$ halka izomorfizması vardır [12].
İspat Burada $R = \mathbb{M}_n(D)$, sol D-vektör uzayı olarak görülebilir. $boy\left({}_RD\right) = n^2$ olduğu açıktır. D alt vektör uzayları R nin sol idealleri olduğundan, Teorem 2.6.10 ve Önerme 2.6.11 gereği ${}_RR$ Artinian ve Noetheriandır. V, sağ D-vektör uzayı olarak görülen, n-li sütun uzayı D^n olsun. $R = \mathbb{M}_n(D)$ halkası matrislerde çarpmaya göre V üzerine soldan çarpım olarak etki eder. Bundan dolayı V yi bir sol R-modül olarak alabiliriz. Burada aslında R yi, lineer dönüşümlerin matris gösterimini kullanarak $End(V_D)$ ile tanımlayabiliriz. Dolayısıyla ${}_RV$ basit R-modüldür
Şimdi $\mathfrak{B}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ i. sütun hariç diğer sütunlarının tamamı sıfır olan matrislerden oluşan R nin sol idealleri olmak üzere $R = \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{B}_n$ direkt toplam ayrışımını göz önüne alalım. Bir sol R-modül olarak $\mathfrak{B}_i$ nin ${}_RV$ ye izomorf olduğu açıktır ve böylece ${}_RR \cong \oplus_{i=1}^{n} V$ yarı-basittir. Bu ise R halkasının sol yarı-basit olduğu anlamına gelir. Şimdi V nin tekliğini gösterelim. Diğer basit sol R-modül W olsun. $W \cong R/m$ olduğundan bazı

maksimal sol idealler için $m \subset R$ dir. W, ${}_RR$ nin bölüm bileşenidir. Jordan- Hölder Teoreminden $W \cong V$ dir.

Son olarak $E = End({}_RV)$ yi bulalım. $v \in V, d \in D$ olmak üzere $v.\Delta(d) = v.d$ ile tanımlı $\Delta: D \longrightarrow E$ doğal halka homomorfizmasını alalım. Burada eğer Δ nın bir izomorfizma olduğu gösterilirse istenen elde edilir. D, V_D üzerinde birebir olduğundan Δ nın birebir olduğu açıktır. Δ nın örten olduğunu göstermek için $f \in E$ elemanını alalım.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} d \\ * \\ . \\ . \\ . \\ * \end{pmatrix} \qquad (d \in D),$$

yazılışından aşağıdaki eşitliğe sahibiz.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} f = \left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) f = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d \\ \vdots \\ a_n d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Delta(d)$$

Buradan $f = \Delta(d)$ elde edilir.

Daha fazla yarı-basit halka örneği üretebilmek için halkaların sonlu direkt çarpımlarında aşağıdaki önerme verilebilir.

2.6.20. Önerme $R_1, R_2, \dots, R_r$ sol yarı-basit halkalar olsunlar. Bu takdirde $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_r$ direkt çarpımı sol yarı-basit halkadır [12].

İspat Her $\mathfrak{B}_{ij}$, R_i nin bir minimal sol ideali olmak üzere $R_i = \mathfrak{B}_{i1} \oplus \mathfrak{B}_{i2} \oplus \dots \oplus \mathfrak{B}_{im_i}$ olsun. R_i, R nin bir idealidir, ayrıca $\mathfrak{B}_{ij}$ R nin bir minimal sol idealidir.

${}_RR = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_r = \oplus_{i,j} \mathfrak{B}_{ij}$ yazılışından R nin yarı-basit olduğu görülür. $D_1, D_2, \dots, D_r$ bölme halkaları olmak üzere keyfi $n_1, n_2, \dots, n_r$ doğal sayıları için

$$\mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \mathbb{M}_{n_2}(D_2) \times \dots \times \mathbb{M}_{n_r}(D_r)$$

Teorem 2.6.19 ve Önerme 2.6.20 gereği bir sol yarı-basit halkadır. Bu bize sol yarı-basit halkaların iyi bir örnek topluluğunu verir.

2.6.21. Yardımcı Teorem (Schur'un Yardımcı teoremi) R herhangi bir halka ve ${}_RV$ basit sol R-modül olsun. Bu takdirde, $End\ ({}_RV)$ bölme halkasıdır [12].

İspat $0 \neq f \in End\ ({}_RV)$ olsun. Bu takdirde, $Gör(f) \neq 0$ ve $Çek(f) \neq V$ dir. $Gör(f)$ ve $Çek(f)$ in her ikisi de V nin alt modülleri olduğundan $Gör(f) = V$ ve $Çek(f) = 0$ olup f

$End\ ({}_R V)$ de terslenebilir elemandır. Bu ise, $End\ ({}_R V)$ nin bölme halkası olduğu anlamına gelir.

2.6.22. Önerme M bir R-modül ve M nin endomorfizmalarının halkası $E = End_R(M)$ olsun. $End_R(\ M^{(n)}) \cong M_n(E)$ dir [13].

İspat $\varepsilon_j : M \longrightarrow M^{(n)}$ $j.$ içerme dönüşümünü ve $\pi_i : M^{(n)} \longrightarrow M$ $i.$ projeksiyonunu alalım. Keyfi $F: M^{(n)} \longrightarrow M^{(n)}$ endomorfizması için $f_{ij} = \pi_i F \varepsilon_j \in E$ olsun. $\alpha(F) = (f_{ij})$ ile tanımlı $\alpha: End_R(\ M^{(n)}) \longrightarrow M_n(E)$ dönüşümü halka izomorfizmasıdır.

2.6.23. Teorem (Wedderburn-Artin Teoremi) R herhangi bir sol yarı-basit halka olsun. Bu takdirde $n_1, n_2, \dots, n_r$ pozitif tam sayıları ve $D_1, D_2, \dots, D_r$ bölme halkaları için $R \cong \mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \mathbb{M}_{n_2}(D_2) \times \dots \times \mathbb{M}_{n_r}(D_r)$ dir. Burada r sayısı $(n_1, D_1), \dots, (n_r, D_r)$ çiftleri gibi teklikle belirlidir. R üzerinde tam r tane karşılıklı izomorf olmayan sol basit modüller vardır [12].

İspat R sol yarı-basit halka olsun. ${}_R R$ yi minimal sol ideallerin (veya basit alt modüllerin) sonlu direkt toplamları olarak yazalım. Bu yazılışı izomorfizmanın türlerine göre sol modüller olarak gruplandırıp, $V_1, V_2, \dots, V_r$ karşılıklı olarak birbirine izomorf olmayan basit sol R-modüller olmak üzere

$$ {}_R R \cong {V_1}^{(n_1)} \oplus \dots \oplus {V_r}^{(n_r)} \qquad (1)$$

şeklinde yazabiliriz. V keyfi bir basit sol R-modül ise, V ${}_R R$ nin bir bölümüne izomorftur ve bundan dolayı (Jordan-Hölder Teoreminden) bazı V_i lerle izomorfiktir. O halde $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ kümesi karşılıklı izomorf olmayan bütün basit sol R-modüllerin kümesidir.

Şimdi (1) deki iki modülün, sol modüllerin endomorfizmlerinin sağda yazılı olduğu şeklini kullanarak R-endomorfizma halkalarını bulalım. ${}_R R$ için R-endomorfizmaları R nin elemanları tarafından sağdan çarpımı ile verilir. Böylece $End(\ {}_R R) \cong R$ dir. $End({V_1}^{(n_1)} \oplus \dots \oplus {V_r}^{(n_r)})$ yi bulmak için $D_i = End(V_i)$ olsun. Yardımcı Teorem 2.6.21 den her D_i bir bölme halkasıdır ve Önerme 2.6.22 den , $End({V_i}^{(n_i)}) \cong M_{n_i}(D_i)$ dir. $i \neq j$ için V_i den V_j ye sıfırdan farklı homomorfizma olmadığından;

$End({V_1}^{(n_1)} \oplus \dots \oplus {V_r}^{(n_r)}) \cong End({V_1}^{(n_1)}) \times \dots \times End({V_r}^{(n_r)}) \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_r}(D_r)$ izomorfizmalarını yazabiliriz. Buradan $R \cong \mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \mathbb{M}_{n_2}(D_2) \times \dots \times \mathbb{M}_{n_r}(D_r)$ dir.

Şimdi bu ayrışımın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki diğer izomorfizma, $F_1, F_2, \dots, F_s$ bölme halkaları olmak üzere $R \cong \mathbb{M}_{m_1}(F_1) \times \mathbb{M}_{m_2}(F_2) \times \dots \times \mathbb{M}_{m_s}(F_s)$ şeklinde olsun. $\mathbb{M}_{m_i}(F_i)$ üzerinde teklikle belirli basit sol R-modül W_i olsun. Ayrıca W_i yi R üzerinde bir basit sol R-modül olarak görebiliriz. Her $i \neq j$ için R-modüller olarak $W_i \ncong W_j$ olduğu açıktır. Teorem 2.6.19 ve Önerme 2.6.22 gereği

$$ {}_R R \cong {W_1}^{(m_1)} \oplus \dots \oplus {W_s}^{(m_s)} \qquad (2) $$

yazabiliriz. Jordan-Hölder Teoreminden (1) ve (2) den $r = s$ ve her i için $n_i = m_i$ ve $V_i \cong W_i$ dir. $R_i = \mathbb{M}_{n_i}(F_i)$ yazarak Teorem 2.6.19 (iii) den her i için

$$ F_i \cong End_{R_i}(W_i) \cong End_R(W_i) \cong End_R(V_i) = D_i $$

elde edilir.

$\mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \mathbb{M}_{n_2}(D_2) \times \dots \times \mathbb{M}_{n_r}(D_r)$ hem sol hem de sağ yarı-basit olduğundan Teorem 2.6.23 den aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

2.6.24. *Sonuç* Bir sol yarı-basit R halkası daima sağ yarı-basittir ve bir sağ yarı-basit halka sol yarı-basittir [12].

Bundan böyle sağ veya sol kavramlarını kullanmadan direkt "yarı-basit halkalar" ifadesini kullanabiliriz.

2.7. Küçük Alt Modüller

2.7.1. Tanım R halka, M bir R-modül ve $N < M$ öz alt modül olsun. $K \leq M$ olmak üzere $M = N + K$ olduğunda $K = M$ ise, N ye M nin **küçük alt modülü** denir ve $N \ll M$ ile gösterilir [21].
$M \neq 0$ olmak üzere $0 \ll M$ olduğu açıktır.

2.7.2. Önerme (Küçük Alt Modülün Özellikleri)
i) M modül ve $K < L \leq M$ olsun. Eğer $L \ll M$ ise, $K \ll M$ dir,
ii) M modül ve $A < B \leq M$ olsun. Eğer $A \ll B$ ise, A ve A nın alt modülleri B alt modülünü kapsayan M modülünün alt modüllerinde küçüktür,
iii) M modül, $K_1, K_2, \dots, K_n$, $M_1, M_2, \dots, M_n$, M modülünün alt modülleri ve her $i = 1,2,\dots,n$ için $K_i \ll M_i$ olsun. Bu takdirde $K_1 + K_2 + \dots + K_n \ll M_1 + M_2 + \dots + M_n$ dir,
iv) M, K birer R-modül ve $\psi: M \longrightarrow K$ bir homomorfizma olsun. $U \ll M$ ise, $\psi(U) \ll K$ dır,

v) M modül, $L \leq M$, $K \leq L$ ve L , M nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $K \ll L$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ olmasıdır,
vi) $U \leq M$ alt modülü M de hem küçük hem de direkt toplam terimi ise, $U = 0$ dır.
vii) $M/_V$ sonlu üretilmiş ve $V \ll M$ ise, M modülü sonlu üretilmiştir [20].

Önerme 2.7.2 (vi) gereği yarı-basit modüllerin sıfır alt modülünden başka küçük alt modülü mevcut değildir. $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ olacak şekilde $m\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ öz ideali mevcut olduğundan $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ nin sıfırından başka küçük alt modülü yoktur.

$\mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$-modülünü alalım. $\{\bar{0}\} \longrightarrow \{\bar{0}, \bar{4}\} \longrightarrow \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \longrightarrow \mathbb{Z}_8$ olduğundan $\mathbb{Z}_8$ in tüm öz alt modülleri küçüktür.

2.8. Bir Modülün Radikali

2.8.1. Tanım R halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin arakesitine M modülünün **radikali** denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir. M modülünün maksimal alt modülü yoksa, $Rad(M) = M$ ile tanımlıdır. Bu takdirde, M modülüne **radikal modül** denir [6].

M nin tüm radikal alt modüllerinin toplamı $P(M)$ ile gösterilir. $P(M) = \sum_{\substack{N \leq M \\ N = Rad(N)}} N$ dir.
Eğer $P(M) = 0$ ise, M modülüne **indirgenmiş modül** denir [24].

$_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ modülü maksimal alt modüle sahip olmadığından $Rad(_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) = {_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}}$ dur. $\cap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$ olduğundan $Rad(_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = \cap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$ dır. Diğer taraftan $Rad(_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dır.

2.8.2. Yardımcı Teorem R halka ve M bir R-modül olsun. $m \in M$ olmak üzere Rm devirli modülünün M nin küçük alt modülü olmaması için gerek ve yeter koşul $m \notin U$ olacak şekilde $U < M$ maksimal alt modülünün olmasıdır [11].
İspat ($\Longleftarrow$) $m \notin U$ olacak şekilde $U < M$ maksimal alt modülünü alalım. U maksimal olduğundan Önerme 2.3.14 ten $U + Rm = M$ olup Rm, M modülünde küçük olamaz.
($\Longrightarrow$) Rm, M de küçük olmasın. $X = \{A | A \subsetneqq M, Rm + A = M\}$ kümesini tanımlayalım. Varsayımdan $A \in X$ olup $X \neq \emptyset$ dir. X, kapsama bağıntısına göre sıralı bir kümedir. W, X kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde, $A_0 = \cup_{A \in W} A$, W tam sıralı kümesinin bir üst sınırı olup $m \notin A_0$ dır. $m \in A_0$ olsa $m \in A$ olacak şekilde bir $A \in W$

vardır ve $Rm \leq A$ dır. Bu ise, $A = Rm + A = M$ çelişkisini doğurur. O halde $A_0 < M$ öz alt modüldür. $A \in W$ için $A \leq A_0$ olduğundan $Rm + A_0 = M$ dir. Sonuç olarak $A_0 \in$ X tir. Buradan W, X kümesinde bir üst sınıra sahip olup Zorn Lemması gereği X kümesi bir U maksimal elemanını içerir. Şimdi U nun M de maksimal alt modül olduğunu gösterelim. $U \subsetneqq K \leq M$ olsun. Bu takdirde U, X te maksimal olduğundan $K \notin$ X tir. $M = Rm + U \leq Rm + K \leq M$ olduğundan $Rm + K = M$ ve $K \notin$ X olduğundan $K = M$ eşitliği elde edilir. Böylece U maksimal alt modüldür.

2.8.3. *Sonuç* R halka, M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. $Rm \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $m \in Rad(M)$ olmasıdır [21].

2.8.4. Teorem M modül olsun. M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyorsa, $Rad(M) \ll M$ dir [21].
İspat $Rad(M) + V = M$ şartını sağlayan bir V alt modülü için $V \neq M$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden V, M nin bir N maksimal alt modülü tarafından kapsanır. Buradan da $V \leq N$ ve $Rad(M) \leq N$ olduğundan $M = Rad(M) + V \leq N$ olur. Buradan $M = N$ çelişkisi elde edilir. O halde $V = M$ olup $Rad(M) \ll M$ dir.

2.8.5. *Sonuç* M sonlu üretilmiş modül ise, $Rad(M) \ll M$ dir [21].
İspat M sonlu üretilmiş modül olduğundan Teorem 2.3.12 gereği M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanır. Dolayısıyla Teorem 2.8.4 gereği $Rad(M) \ll M$ dir.

2.8.6. Teorem R halka ve M bir R-modül olsun. Bu takdirde, $Rad(M) = \sum_{L \ll M} L$ dır [21].
İspat Keyfi $a \in Rad(M)$ elemanı verilsin. Sonuç 2.8.3 den $Ra \ll M$ olup $a \in Ra \leq \sum_{L \ll M} L$ dir. Buradan $Rad(M) \subseteq \sum_{L \ll M} L$ elde edilir. Tersine; $a \in \sum_{L \ll M} L$ keyfi elemanı verilsin. N, M nin maksimal alt modülü olmak üzere $a \notin N$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $M = Ra + N$ dir. $a \in \sum_{L \ll M} L$ olduğundan $a = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ olacak şekilde $l \in L_i \ll M$ $(i = 1,2, \dots n)$ olan $L_i \leq M$ alt modülleri vardır. Buradan $Ra \subseteq Rl_1 + Rl_2 + \cdots + Rl_n \leq L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ bulunur. Ayrıca Önerme 2.7.2 (i) ve (iii) den $L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ ve Ra , M nin küçük alt modülleridir. $M = Ra + N$ ve $Ra \ll M$ olduğundan $M = N$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\sum_{L \ll M} L \subseteq Rad(M)$ olup $Rad(M) = \sum_{L \ll M} L$ eşitliği vardır.

2.8.7. Önerme Herhangi bir M modülü için $Rad(P(M)) = P(M)$ dir [24].

İspat $Rad(P(M)) \leq P(M)$ olduğu açıktır. $a \in P(M)$ olsun. Bu durumda $a = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ ve $i = 1,2, \ldots n$ için $k_i \in K_i$ olacak şekilde M nin K_i radikal alt modülleri vardır. Burada her $1 \leq i \leq n$ için $Rk_i \ll K_i$ dır. Önerme 2.7.2 (iii) gereğince $Ra \ll K_1 + K_2 + \cdots + K_n$ olup Önerme 2.7.2 (ii) gereğince, $Ra \ll P(M)$ dir. Sonuç 2.8.3 den $a \in Rad(P(M))$ bulunur. Buradan $P(M) \leq Rad(P(M))$ olup $Rad(P(M)) = P(M)$ dir.

2.8.8. Teorem (Radikalin Özellikleri) R halka ve M bir R-modül olsun. Bu takdirde;

i) $Rad(M/Rad(M)) = 0$ dır,

ii) $N \leq M$ ise, $Rad(N) \leq Rad(M)$ dir,

iii) K bir R-modül olmak üzere her $f \in Hom\,(M, K)$ için $f(Rad(M)) \leq Rad(K)$ dır. Eğer $Çek(f) \leq Rad(M)$ ise, $f(Rad(M)) = Rad(f(M))$dir. Özel olarak her $f \in End(M)$ için $f(Rad(M)) \leq Rad(M)$ dir,

iv) $K \leq M$ iken $(K + Rad(M))/K \leq Rad(M/K)$ ve $K \leq Rad(M)$ ise $Rad(M/K) = Rad(M)/K$ dır,

v) $M = \oplus_{i \in I} M_i$ ise, $Rad(M) = \oplus_{i \in I} Rad(M_i)$ ve $M/Rad(M) \cong \oplus_{i \in I}(M_i/Rad(M_i))$ dir,

vi) M modülünün radikal modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her sonlu üretilmiş N öz alt modülü için $N \ll M$ olmasıdır,

vii) $N \leq K \leq M$ için $N \subseteq Rad(M)$ ve K, M nin direkt toplam terimi ise, $N \subseteq Rad(K)$ dır,

viii) M modülü yarı-basit modül ise $Rad(M) = 0$ dır [21].

İspat i) Teorem 2.3.13 gereğince M modülünün maksimal alt modülleri ile $M/Rad(M)$ bölüm modülünün maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. X, M nin tüm maksimal alt modüllerinin kümesi olmak üzere $M/Rad(M) = \cap_{U \in X}(U/Rad(M))$ $= (\cap_{U \in X} U)/Rad(M) = Rad(M)/Rad(M) = 0$ elde edilir.

ii) $N \leq M$ ve $m \in Rad(N)$ olsun. Bu takdirde Sonuç 2.8.3 den $Rm \ll N$ olup Önerme 2.7.2 (ii) den $Rm \ll M$ elde edilir. Tekrar Sonuç 2.8.3 den $m \in Rad(M)$ olup $Rad(N) \leq Rad(M)$ bulunur.

iii) $f: M \longrightarrow K$ homomorfizma olsun. $m \in Rad(M)$ ise, Sonuç 2.8.3 den $Rm \ll M$ olup Önerme 2.7.2 (iii) den $f(Rm) = Rf(m) \ll f(M) \subseteq K$ bulunur. Dolayısıyla $f(m) \in Rad(f(M))$ olup $f(Rad(M)) \leq Rad(f(M)) \subseteq Rad(K)$ elde edilir. $Çek(f) \leq Rad(M)$ olsun. $f(m) \in Rad(f(M))$ keyfi elemanı verilsin. Tekrar Sonuç 2.8.3 uygulanırsa $Rf(m) \ll f(M)$ olduğu görülür. $m \notin Rad(M)$ olsun. Bu takdirde Yardımcı Teorem 2.8.2 den dolayı $Rm + K = M$ olacak şekilde M modülünün bir K maksimal alt modülü vardır. Buradan $f(M) = Rf(m) + f(K)$ iken $Rf(m) \ll f(M)$ olduğundan $f(M) = f(K)$ dır. Böylece $M = K + Çek(f)$ eşitliğinden $Çek(f) \leq Rad(M) \leq K$ olup $M = K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $m \in Rad(M)$ den $f(m) \in f(Rad(M))$ dir. Sonuç olarak $f(Rad(M)) = Rad(f(M))$ bulunur.

iv) $\pi: M \longrightarrow {}^{M}/_{K}$ doğal homomorfizması verilsin. Buradan $Çek(\pi) = K$ dır. (iii) den $Çek(\pi) \leq Rad(M)$ olup tekrar (iii) gereği $\pi(Rad(M)) = {}^{Rad(M)}/_{K} = Rad\big(\pi(M)\big) = Rad({}^{M}/_{K})$ elde edilir.

v) Her $i \in I$ için $M_i \leq M$ olmak üzere (ii) den $Rad(M_i) \leq Rad(M)$ olup $\bigoplus_{i\in I} Rad(M_i) \leq Rad(M)$ dir. Tersine, $m \in Rad(M)$ keyfi elemanı için Sonuç 2.8.3 ten $Rm \ll M$ olup $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k}$ olacak şekilde $j \in \{1,2,\dots,k\}$ olmak üzere $m_{i_j} \in M_{i_j}$ elemanları vardır. Buradan $Rm_{i_j} \leq Rm$ olup Önerme 2.7.2 (i) şıkkından $Rm_{i_j} \ll M$ dir. M_{i_j} modülleri M modülünün direkt toplam terimi olduğundan Önerme 2.7.2 (v) gereğince $Rm_{i_j} \ll M_{i_j}$ elde edilir. Teorem 2.8.6 dan $m_{i_j} \in Rad(M_{i_j})$ olup $m \in \bigoplus_{i\in I} Rad(M_i)$ dir. Sonuç olarak $\bigoplus_{i\in I} Rad(M_i) = Rad(M)$ dir. Ayrıca her $(x_i)_{i\in I} \in M$ için $f(\,(x_i)_{i\in I}\,) = \sum_{i\in I} (x_i + Rad(M_i)\,)$ ile tanımlı $f: M \longrightarrow \oplus_{i\in I} ({}^{M_i}/_{Rad(M_i)})$ dönüşümü epimorfizmadır ve $Çek(f) = Rad(M)$ dir. Teorem 2.3.8 den ${}^{M}/_{Rad(M)} \cong \oplus_{i\in I}({}^{M_i}/_{Rad(M_i)})$ bulunur.

vi) $M = Rad(M)$ ise Yardımcı Teorem 2.8.2 gereğince her $m \in M$ için $Rm \ll M$ olur. Buradan Önerme 2.7.2 (iii) den M modülünün sonlu üretilmiş her N öz alt modülü için $N \ll M$ dir. İspatın tersi Teorem 2.8.6 dan açıktır.

vii) $n \in N$ keyfi olsun. $N \subseteq Rad(M)$ olduğundan $Rn \ll M$ dir. K, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus T$ olacak şekilde $T \leq M$ vardır. $Rn \leq N \leq K$ olduğundan Önerme 2.7.2 (v) den $Rn \ll K$ dır. Teorem 2.8.6 dan $N \subseteq Rad(K)$ bulunur.

viii) Sonuç 2.8.3 gereğince keyfi bir $m \in Rad(M)$ için $Rm \ll M$ olduğunu biliyoruz. Hipotezden M yarı-basit olduğundan Rm alt modülü M nin direkt toplam terimidir. O halde Önerme 2.7.2 (vi) den $Rm = 0$ olup buradan $m = 0$ dır. Böylece $Rad(M) = 0$ olduğu görülür.

2.8.9. Teorem R halka olsun. $Rad({}_RR) = Rad(R_R)$ ve $Rad({}_RR)$ R nin idealidir [11].

Yukarıdaki Teorem 2.8.9 gereği $Rad(R) \coloneqq Rad({}_RR) = Rad(R_R)$ ile tanımlanır ve R nin **Jacobson Radikali** denir.

2.8.10. Önerme P projektif R-modül olsun. Bu takdirde $Rad(P) = Rad(R)P$ ve $Des(P) = Des({}_RR)P$ dir [21].

2.8.11. Tanım M modül olsun. M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyor ise, M modülüne **eş-atomik** modül denir [11].

2.8.12. Teorem Aşağıdaki ifadeler vardır.
i) Her sonlu üretilmiş modül eş-atomiktir,
ii) Eş-atomik modüllerin bölüm modülleri eş-atomiktir,
iii) M eş-atomik modül ise, $Rad(M) \ll M$ dir,
iv) M modül olmak üzere $V \leq Rad(M)$ iken V eş-atomik ise, $V \ll M$ dir [11].
İspat i) Teorem 2.3.12 den açıktır.

ii) M eş-atomik modül olmak üzere M/U bölüm modülünün herhangi bir N/U öz alt modülünü aldığımızda $U \leq N < M$ yazabiliriz. M eş-atomik olduğundan $N \leq V$ olacak şekilde M nin V maksimal alt modülü mevcuttur. Teorem 2.3.13 gereğince M modülü ile M/U bölüm modülünün maksimal alt modülleri arasında bire-bir eşleme olup V/U bölüm modülü M/U da maksimal alt modüldür. Dolayısıyla $N/U \leq V/U$ olup M/U bölüm modülü eş-atomiktir.

iii) Teorem 2.8.4 ten görülür.

iv) $V \ll M$ olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $M = V + N$ olacak şekilde M nin N öz alt modülü mevcuttur. $V \cap N \neq V$ olduğu açıktır. Hipotezden V eş-atomik olduğundan V nin $V \cap N$ öz alt modülü $S < V$ maksimal alt modülünde içerilir. Buradan Teorem 2.6.4 gereği $V/_S$ basittir. 1.İzomorfizma teoremi gereğince $M/_{N+S} = {V+N}/_{N+S} \cong V/_S$ olup $N + S$ alt modülü M de maksimaldir. $V \leq Rad(M) \leq N + S$ olduğundan $M = N + S$ çelişkisi elde edilir. O halde $V \ll M$ olmalıdır.

2.8.13. Teorem M modül ve $N \leq M$ olsun. N ve $M/_N$ eş-atom ise, M eş-atomiktir.

İspat K, M nin bir öz alt modülü olsun. Bu takdirde $\pi(K) = {(K+N)}/_N$ ile tanımlı π doğal homomorfizma olmak üzere ${(K+N)}/_N = M/_N$ ise, $K + N = M$ dir. N eş-atomik modül olduğundan $N \cap K$ öz alt modülü için $N \cap K \leq X \leq N$ olacak şekilde X maksimal alt modülü vardır. Buradan $M/_{K+X} = {(K+N)}/_{K+X} = {(K+N+X)}/_{K+X} = N/_{N \cap (K+X)} \cong N/_{(N \cap K)+X} = N/_X$ olur. $N/_X$ basit modül olduğundan $K + X$ modülü M nin K yı kapsayan maksimal alt modülüdür. Eğer ${(K+N)}/_N$ modülü $M/_N$ nin öz alt modülü ise, $M/_N$ eş-atomik olduğundan ${(K+N)}/_N \leq {(U+N)}/_N$ olacak şekilde M nin K yı kapsayan bir U maksimal alt modülü vardır. Dolayısıyla M eş-atomiktir.

2.9. Lokal ve Bölünebilir Modüller

2.9.1. Tanım M modül olsun. M modülünün tüm öz alt modüllerinin toplamı öz alt modül ise, M modülüne **lokal modül** denir.

$p \in \mathbb{P}$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ lokal $\mathbb{Z}$-modüldür.

2.9.2. Tanım Tek maksimal alt modüle sahip modüle **zayıf lokal modül** denir [16].

2.9.3. Teorem Sıfırdan farklı M modülünün lokal olması için gerek ve yeter koşul M nin sonlu üretilmiş ve bir tek maksimal alt modüle sahip olmasıdır. Bu durumda M nin maksimal alt modülü $Rad(M)$ olup $Rad(M) \ll M$ dir [21].

İspat ($\Longrightarrow$) M lokal modül ve M nin öz alt modüllerinin toplamı T olsun. $T \neq M$ olduğundan en az bir $m \in M$ vardır öyle ki $m \notin T$ ve $Rm \nsubseteq T$ dir. T, M nin öz alt modüllerin toplamı olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir. T nin maksimal alt modül olduğu ise, tanımdan açıktır.
($\Longleftarrow$) M sonlu üretilmiş ve M tek T maksimal alt modülüne sahip olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 2.3.12 gereği M nin kendisinden farklı her alt modülü T tarafından kapsanır. Dolayısıyla M nin kendisinden farklı tüm alt modüllerinin toplamı T olup M lokal modüldür. Radikalin tanımı gereği $Rad(M) = T$ olup M sonlu üretilmiş olduğundan Sonuç 2.8.5 gereği $Rad(M) \ll M$ dir.

p asal tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^n}$ sol $\mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım. Herhangi n doğal sayısı için $c_n = \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olsun. $pc_1 = 0$, $pc_2 = c_1$,..., $pc_{n+1} = c_n$,... olur. Burada $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots\}$ kümesi $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ modülünü üretir. Yani $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle c_n \rangle$ dir. $\langle c_1 \rangle \subseteq \langle c_2 \rangle \subseteq \cdots$ olup $\langle c_1 \rangle = \langle \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \rangle = Des(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ dır. Ayrıca $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ maksimale sahip değildir. $Rad(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olup $Des(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \neq Rad(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ olur. Teorem 2.9.3 ten $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ $\mathbb{Z}$-modülü lokal değildir [21].

2.9.4. Önerme M lokal modül olsun. Bu takdirde, M zayıf lokaldir [16].
İspat M lokal modül olduğundan M nin tüm öz alt modüllerini içeren M de bir en geniş öz alt modül vardır. Üstelik bu özelliğe sahip öz alt modülü $Rad(M)$ dir. Buradan $Rad(M)$, M nin tek maksimal alt modülü olup M zayıf lokaldir.

2.9.5. Tanım R birimli halka olsun. ${}_R R$ lokal modül ise, R ye **lokal halka** denir [21].

Her cisim lokal halkadır. Çünkü cisimlerde tek maksimal ideal 0 (sıfırdır).
$\mathbb{Z}_6$ halkası lokal değildir. Çünkü $\mathbb{Z}_6$ halkasının bütün idealleri $\mathbb{Z}_6$, $\langle \bar{0} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ olup maksimal idealleri $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ tür. $p \in \mathbb{P}$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ lokal halkadır.

2.9.6. Tanım R tamlık bölgesi, M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. Sıfırdan farklı her $r \in R$ için $m = rn$ olacak şekilde n elemanı varsa $m \in M$ elemanına **bölünebilirdir** denir. Eğer M nin her elemanı bölünebilir ise, M ye **bölünebilir modül** denir. Bir başka deyişle, her $r \in R$ $(r \neq 0)$ için $M = rM$ oluyorsa M ye **bölünebilir modül** denir [19].

Örneğin R tamlık bölgesinin kesir cismi olan $K(R)$ bölünebilir R-modüldür. Gerçekten; $a \in K(R)$ keyfi olmak üzere $a = \frac{x}{y}$ olacak şekilde $x \in R, 0_R \neq y \in R$ elemanları vardır $r \in R \quad (r \neq 0)$ elemanı için $a = r\frac{x}{yr}$ olacak şekilde r elemanı ve $\frac{x}{yr} \in K(R)$ elemanı mevcut olduğundan $K(R)$ bölünebilir R-modüldür. Böylece $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modülü bölünebilirdir [18].

2.9.7. Yardımcı Teorem M bölünebilir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Bu taktirde $M/_N$ bölünebilir R-modüldür [19].

İspat $x + N \in M/_N$ keyfi eleman ve $0 \neq r \in R$ olsun. M bölünebilir R-modül olduğundan $x = ry$ olacak şekilde $y \in M$ vardır.

Buradan $x + N = ry + N = r(y + N)$ olacak şekilde $(y + N) \in M/_N$ elemanı mevcut olduğundan $M/_N$ bölünebilirdir.

2.9.8. Önerme Her injektif R-modül bölünebilirdir [19].

İspat M injektif R-modül, $0 \neq r \in R$ ve $n \in M$ olsun. Her $k \in R$ için $f(kr) = kn$ ile tanımlı $f: Rr \longrightarrow M$ homomorfizmasını alalım. M injektif olduğundan Baer Kriteri gereği $f: Rr \longrightarrow M$ homomorfizması ve $i: Rr \longrightarrow R$ içerme monomorfizması ile kurulan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rr \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ & M & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramından $k = 1_R$ için $n = f(r) = (hi)(r) = h(r) = rh(1_R)$ dir. Böylece M bölünebilirdir.

2.9.9. Tanım R halka ve M bir R-modül olsun. $M/_{Rad(M)}$ yarı-basit ise, M modülüne **yarı-lokal modül** ve ${}_RR$ (veya R_R) yarı-lokal ise, R halkasına **yarı-lokal halka** denir [21].

2.9.10. Teorem R halkasının yarı-lokal olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün yarı-lokal olmasıdır [15].

İspat $(\Longrightarrow)$ R yarı-lokal ve M bir sol R-modül olsun. M R-üretilmiş olduğundan I boş kümeden farklı bir indis kümesi olmak üzere $f: R^{(I)} \longrightarrow M$ epimorfizması vardır. Teorem

2.8.8 (v) gereği $Rad(R^{(I)}) = Rad(R)^{(I)}$ olup Teorem 2.8.8 (iii) den $f(Rad(R^{(I)})) \leq Rad(M)$ yazılır. Bu takdirde her $(r_i + Rad(R))_{i\in I} \in ({}^{R}/_{Rad(R)})^{(I)}$ için $\bar{f}((r_i + Rad(R))_{i\in I} = f((r_i)_{i\in I}) + Rad(M)$ ile tanımlı $\bar{f}: ({}^{R}/_{Rad(R)})^{(I)} \longrightarrow {}^{M}/_{Rad(M)}$ dönüşümü epimorfizmadır. R halkası yarı-lokal olduğundan ${}^{R}/_{Rad(R)}$ yarı-basit olup Sonuç 2.6.9 dan $({}^{R}/_{Rad(R)})^{(I)}$ yarı-basittir. Yine Sonuç 2.6.9 gereği ${}^{M}/_{Rad(M)}$ yarı-basit olup M yarı-lokaldir.
($\Longleftarrow$) Hipotezden R sol R-modülü yarı-lokal olduğundan ispat açıktır.

2.9.11. Tanım R tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. R nin sıfırdan farklı en az bir $r \in R$ elemanı için $rm = 0$ koşulunu sağlayan $m \in M$ elemanına, M nin **burulma elemanı** denir. M nin tüm burulma elemanlarının kümesi $T(M) = \{m \in M | \exists\, r \in R \setminus \{0\} \text{ için } rm = 0\}$ ile ifade edilir.

$0_R \in R$ için $0_R m = 0_M \in T(M)$ olup $T(M) \neq \emptyset$ dir. $m_1, m_2 \in T(M)$ keyfi elemanları için $r_1 m_1 = 0$ ve $r_2 m_2 = 0$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R \setminus \{0\}$ elemanları vardır. R tamlık bölgesi olduğundan $r_1 r_2 \neq 0$ olup $r_1 r_2 (m_1 - m_2) = r_2(r_1 m_1) - r_1(r_2 m_2) = 0$ eşitliği gereği $m_1 - m_2 \in T(M)$ dir. $m \in T(M)$ ve $s \in R$ keyfi elemanlar olsun. $0 \neq r \in R$ için $rm = 0$ olup $r(sm) = s(rm) = 0$ dır. Dolayısıyla $sm \in T(M)$ olup $T(M) \leq M$ alt modüldür.

Burada R nin tamlık bölgesi olma şartı kaldırılırsa $T(M)$, M R-modülünün alt modülü olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{Z}_6$ da $\bar{2}$ ve $\bar{3}$ elemanları burulmalı iken bu elemanların toplamı olan $\bar{5}$ elemanı burulmalı değildir.

Eğer $T(M) = M$ ise M R-modülüne **burulma modül**; $T(M) = 0$ ise, M R-modülüne **burulmasız modül** denir [19].

2.9.12. Önerme R tamlık bölgesi ve M R-modülü bölünebilir ve burulmasız olsun. Bu taktirde, M injektiftir [19].
İspat Bölünebilir ve burulmasız olan bir M modülünü alalım. A, R halkasının herhangi bir ideali ve $\alpha: A \longrightarrow M$ bir homomorfizma olmak üzere

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramını alalım. $0 \neq r \in A$ keyfi bir eleman olsun. M bölünebilir olduğundan $\alpha(r) = rs$ olacak şekilde $s \in M$ elemanı vardır. $t \in A$ keyfi olsun. Bu durumda $r\alpha(t) = \alpha(rt) = \alpha(tr) = t\alpha(r) = trs = rts$ olup M burulmasız olduğundan $\alpha(t) = ts$ dir. Her $k \in R$ için $\beta(k) = ks$ ile tanımlı $\beta: R \longrightarrow M$ dönüşümü bir homomorfizma olup $\beta i = \alpha$ dır. O halde M injektiftir.

R tamlık bölgesi ve $K(R)$, R nin kesir cismi olsun. $K(R)$ burulmasız ve bölünebilir olduğundan Önerme 2.9.12 gereği injektiftir.

2.10. Dedekind Bölgeleri ve Modüller

2.10.1. Tanım R değişmeli ve birimli halka olmak üzere I, R halkasının ideali olsun. I ideali bir tek $m \in R$ elemanı tarafından üretiliyor ise, I idealine **esas ideal** denir. Burada $I = Rm = \{rm \mid m \in R\}$ ile ifade edilir. R nin her ideali esas ideal ise, R halkasına **esas ideal halkası** denir. Esas ideal halkası olan tamlık bölgesine **esas ideal bölgesi** denir [21].

2.10.2. Tanım I, R halkasının ideali olmak üzere R nin $MN \subseteq I$ olan M ve N idealleri için $M \subseteq I$ veya $N \subseteq I$ oluyorsa I idealine R halkasının **asal ideali** adı verilir [9].

2.10.3. Tanım Kendisi dışında her ideali sonlu sayıda asal ideallerinin çarpımı şeklinde yazılabilen tamlık bölgesine **Dedekind bölgesi** denir. $(\mathbb{Z}, +, .)$ tamlık bölgesi bir Dedekind bölgesidir [9].

2.10.4. Önerme Her esas ideal bölgesi Dedekind bölgesidir [19].
İspat R esas ideal bölgesi ve $I \subsetneq R$ ideali olsun. R esas ideal bölgesi olduğundan $I =< a > = Ra$ olacak şekilde $a \in I$ elemanı ve $a = P_1 P_2 \dots P_n$ olacak şekilde $P_i \in R$ asal elemanları mevcuttur. $i = 1,2,\dots,n$ olmak üzere $P_i = Rp_i =< p_i > \subseteq R$ asal idealdir. Dolayısıyla $I = Ra = P_1 P_2 \dots P_n$ R Dedekind bölgesidir.

2.10.5. Teorem R tamlık bölgesi olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.
i) R Dedekind bölgesidir,
ii) R nin sıfırdan farklı her ideali projektif R-modüldür [9].

2.10.6. Önerme R Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M injektiftir.

ii) M bölünebilirdir.

iii) $M = Rad(M)$ dir [2].

2.10.7. Sonuç R Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. Bu taktirde $P(M)$, M modülünün direkt toplam terimidir [19].

İspat $Rad(P(M)) = P(M)$ olduğunu Önerme 2.8.7 den biliyoruz. Önerme 2.10.6 dan $P(M)$ injektif modüldür. Teorem 2.5.10 dan $P(M)$, M nin direkt toplam terimidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri

3.1.1. Tanım M modül ve $N \leq M$ olsun. $M = N + K$ olacak şekilde bir K alt modülü var ve K bu şarta göre minimal ise, yani $N + L = M$ koşulunu gerçekleyen her $L \leq K$ için $L = K$ ise, K ya M de N nin **tümleyeni** ve N ye M de **tümleyene sahiptir** denir [21].
M modül ve $N \ll M$ olsun. Bu takdirde küçük alt modül tanımından görüleceği üzere M, N alt modülünün tümleyenidir. Dolayısıyla modülün kendisi sıfırının tek tümleyenidir.

3.1.2. Önerme M modül ve $U, V \leq M$ olsun. V alt modülünün U nun M de tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır [21].
İspat ($\Longrightarrow$) V, U nun M de bir tümleyeni olsun. Bu takdirde $M = U + V$dir. Bir $N \leq V$ için $V = U \cap V + N$ olsun. Bu durumda $M = U + V = U + U \cap V + N = U + N$ olup, V U nun tümleyeni olduğundan $N = V$ elde edilir. Dolayısıyla $U \cap V \ll V$ dir.
($\Longleftarrow$) $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olsun. Bir $N \leq V$ için $M = U + N$ ise modüler kuraldan $V = U \cap V + N$ olup, $U \cap V \ll V$ olduğundan $N = V$ elde edilir.

M modül ve $U \leq M$ alt modülü M nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $M = U + V$ ve $U \cap V = \{0\}$ olacak şekilde $V \leq M$ alt modülü vardır. $U \cap V = \{0\} \ll U$ ve $U \cap V = \{0\} \ll V$ olduğundan Önerme 3.1.2 gereği U ile V, M modülünün tümleyen alt modülleridir.

3.1.3. Teorem (Tümleyen Alt Modülün Özellikleri) U ile V, M R-modülünün alt modülleri olmak üzere V, U nun tümleyeni olsun. Bu takdirde;
i) M sonlu üretilmiş ise, V de sonlu üretilmiştir,
ii) U, M nin maksimal alt modülü ise, V lokal ve $Rad(V) = U \cap V$ dir,
iii) $K \ll M$ olduğunda $K \cap V \ll V$ olup $Rad(V) = V \cap Rad(M)$ dir,
iv) $L \leq U$ olmak üzere ${}^{(V+L)}/_{L}$, ${}^{M}/_{L}$ de ${}^{U}/_{L}$ bölüm modülünün tümleyenidir [21].

İspat i) M sonlu üretilmiş olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Teorem 2.2.5 ten ${}^{M}/_{U}$ sonlu üretilmiştir. O halde ${}^{M}/_{U} = {}^{(U+V)}/_{U} \cong {}^{V}/_{(U \cap V)}$ sonlu üretilmiştir. $U \cap V \ll V$ olduğundan Önerme 2.7.2 (vii) den V sonlu üretilmiştir.

ii) U, M nin maksimal alt modülü ise $M/_U$ basittir. O halde $M/_U = (U+V)/_U \cong V/_{(U \cap V)}$ basit olup devirlidir. $U \cap V \ll V$ olduğundan Önerme 2.7.2 (vii) den V devirlidir. $V/_{(U \cap V)}$ basit olduğundan Teorem 2.6.4 ten $U \cap V, V$ nin maksimal alt modülüdür. $Rad(V) \leq U \cap V$ olduğu açıktır. Ayrıca $U \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 2.8.6 dan $U \cap V \leq Rad(V)$ dir. Dolayısıyla $Rad(V) = U \cap V$ olup $U \cap V, V$ nin tek maksimal alt modülüdür.

iii) $K \ll M$ ve $X \leq V$ için $(K \cap V) + X = V$ olsun. $M = U + V$ den $M = U + (K \cap V) + X$ olup $K \cap V \leq K \ll M$ iken $K \cap V \ll M$ dir. Buradan $M = U + X$ elde edilir. V nin minimalliğinden $X = V$ olur. Yani $K \cap V \ll V$ dir. $K \ll M$ ve $K \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 2.8.6 dan $Rad(M) \cap V \subseteq Rad(V)$ dir.
Ters kapsamayı göstermek için $m \in Rad(V)$ keyfi elemanını alalım. Buradan Sonuç 2.8.3 gereğince $Rad(V) \ll V$ dir. $Rm \ll M$ ve böylece $m \in Rad(M)$ olur. $m \in V \cap Rad(M)$ dir. Dolayısıyla $Rad(V) \subseteq V \cap Rad(M)$ elde edilir. Sonuç olarak $Rad(V) = V \cap Rad(M)$ dir.

iv) $L \leq U$ iken $M = U + V$ olduğundan $M/_L = U/_L + (V+L)/_L$ eşitliği yazılabilir. Modüler kural gereğince $U \cap (V + L) = (U \cap V) + L$ dir. Dolayısıyla buradan . $U/_L \cap (V+L)/_L = [U \cap (V+L)]/_L = [(U \cap V) + L]/_L$ elde edilir. $U \cap V \ll V$ olduğundan $[(U \cap V) + L]/_L \ll (V+L)/_L$ olup $M/_L$ de $U/_L$ nin tümleyeninin $(V+L)/_L$ olduğu görülür.

3.2. Tümlenmiş Modüller

3.2.1. Tanım M modül olsun. M nin her alt modülü tümleyene sahip ise, M ye **tümlenmiş modül** denir [21].

3.2.2. Teorem Yarı-basit modüller ve Artin modüller tümlenmiştir.

İspat M yarı-basit modül ve $U \leq M$ keyfi bir alt modül olsun. M yarı-basit olduğundan $M = U \oplus V$ olacak şekilde $V \leq M$ alt modülü mevcuttur. $U \cap V = \{0\} \ll V$ olduğundan V, U nun tümleyenidir. Dolayısıyla M tümlenmiştir.
M Artin modül ve $U \leq M$ olsun. $U + M = M$ olduğu açıktır. $M_1 = M$ olsun. M_1, $U + M = M$ koşulunu sağlayan minimal alt modül değil ise $U + M_2 = M$ olacak şekilde $M_2 \subseteq M_1$ alt modülü vardır ve bu yöntem ile devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

ve $U + M_n = M$ olacak şekilde $M_n \leq M$ alt modülleri vardır. M Artin olduğundan $M_k = M_{k+1} = \cdots = M_{k+t} = \cdots$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ olup M_k, U nun tümleyenidir.

3.2.3. Teorem M modül olsun. M tümlenmiş ise, M modülünün her bölüm modülü tümlenmiştir [21].
İspat M tümlenmiş ve $K \leq L \leq M$ olsun. M tümlenmiş olduğundan $L + V = M$ ve $L \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq M$ alt modülü vardır. Teorem 3.1.3 (iv) gereği ${(V+K)}/{K}$, ${L}/{K}$ nın ${M}/{K}$ da tümleyeni olup ${M}/{K}$ tümlenmiştir.

3.2.4. Teorem M tümlenmiş modül ise, ${M}/{Rad(M)}$ yarı-basittir [21].

İspat M tümlenmiş olduğundan Teorem 3.2.3 gereği ${M}/{Rad(M)}$ tümlenmiştir. Teorem 2.8.8 (i) gereği $Rad({M}/{Rad(M)}) = 0$ olduğundan her alt modülü bir direkt toplam terimi olup yarı-basittir.

3.2.5. Tanım R bir halka ve $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. A alt kümesinin elemanlarının her $a_1, a_2, \ldots$ dizisi için $a_1 a_2 \ldots a_k = 0_R$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ mevcut ise A alt kümesine **sağ t-nilpotenttir** denir [21].

3.2.6. Tanım R halka olsun. R yarı-lokal ve $Rad(R)$ sağ t-nilpotent ideal ise, R ye **sol mükemmel halka** denir.
Her sol (sağ) Artin halka sol mükemmel halkadır.

3.2.7. Teorem R halka olsun. R nin sol mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün tümlenmiş olmasıdır [21].

3.3. Radikal ve Güçlü Radikal Tümlenmiş Modüller

3.3.1. Tanım M bir R-modül olsun. $Rad(M)$ M modülünde bir tümleyene sahipse, M modülüne **radikal tümlenmiş modül** denir [23].
3.3.2. Tanım M bir R-modül olsun. M modülünün $Rad(M)$ alt modülünü kapsayan her alt modülü M de bir tümleyene sahipse, M modülüne **güçlü radikal tümlenmiş modül** denir [5].

3.3.3. Önerme Güçlü radikal tümlenmiş modülün homomorfik görüntüsü güçlü radikal tümlenmiştir [5].
İspat M güçlü radikal tümlenmiş modül ve $U \leq M$ olsun. $Rad(M/U) \subseteq K/U$ şartını sağlayan herhangi bir $K/U \leq M/U$ alt modülünü alalım. Buradan $(Rad(M)+U)/U \subseteq Rad(M/U)$ olduğundan $Rad(M) \subseteq K$ dır. Hipotezden K M de bir V tümleyenine sahiptir. Teorem 3.1.3 (iv) den $(V+U)/U$, K/U nun M/U da bir tümleyeni olur. O halde M/U güçlü radikal tümlenmiştir.

3.3.4. *Sonuç* M güçlü radikal tümlenmiş modül ise, $M/Rad(M)$ yarı-basittir [5].
İspat Önerme 3.3.3 ten $M/Rad(M)$ güçlü radikal tümlenmiştir. Teorem 2.8.8 (i) den $Rad\left(M/Rad(M)\right) = 0$ olup $M/Rad(M)$ tümlenmiştir. Ayrıca $M/Rad(M)$ nin her alt modülü direkt toplam terimi olup buradan $M/Rad(M)$ yarı-basittir.

3.3.5. Yardımcı Teorem M bir R-modül, M_1 M nin alt modülü, U da M nin $Rad(M)$ yi kapsayan alt modülü olsun. M_1 güçlü radikal tümlenmiş modül ve $M_1 + U$ M de bir tümleyene sahipse U M de bir tümleyene sahiptir [5].

3.3.6. Önerme M bir R-modül ve $M_1, M_2 \leq M$ olmak üzere $M = M_1 + M_2$ olsun. M_1 ve M_2 güçlü radikal tümlenmiş modüller ise, M de güçlü radikal tümlenmiş modüldür [5].
İspat $Rad(M) \subseteq U$ olacak şekilde M nin herhangi bir U alt modülünü alalım. $M_1 + M_2 + U$ nun M de aşikar 0 tümleyenine sahip olduğunu biliyoruz. Burada M_1 güçlü radikal tümlenmiş olduğundan Yardımcı Teorem 3.3.5 den $M_2 + U$, M de bir tümleyene

sahiptir. Benzer şekilde M_2 güçlü radikal tümlenmiş olduğundan Yardımcı Teorem 3.3.5 dan U, M de bir tümleyene sahiptir. Dolayısıyla M güçlü radikal tümlenmiş modüldür.

3.3.7. *Sonuç* Sonlu sayıda güçlü radikal tümlenmiş modülün toplamı güçlü radikal tümlenmiş modüldür [5].
İspat M bir R-modül ve $1 \leq n \in \mathbb{Z}$, $M_1, M_2, \ldots, M_n \leq M$ olmak üzere $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ olsun. Burada alt modüller ikişer ikişer alınarak Önerme 3.3.6 uygulanırsa istenen elde edilir.

3.3.8. Yardımcı Teorem Her radikal modül güçlü radikal tümlenmiştir [5].
İspat M nin $Rad(M)$ alt modülünü kapsayan tek alt modül M ve $M = Rad(M) + 0$ olup M 0 aşikar tümleyenine sahiptir. Dolayısıyla M güçlü radikal tümlenmiştir.

3.3.9. *Sonuç* M modül olsun. Bu takdirde $P(M)$ güçlü radikal tümlenmiştir [5].
İspat Her M modülü için $Rad(P(M)) = P(M)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.3.8 den ispat açıktır.

3.3.10. Önerme M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde M nin tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin güçlü radikal tümlenmiş olmasıdır [5].
İspat ($\Longrightarrow$) Açıktır.
($\Longleftarrow$) U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. $Rad(M) \subseteq Rad(M) + U \leq M$ olduğundan hipotezden $Rad(M) + U$, M de bir V tümleyenine sahiptir. Buradan $M = Rad(M) + U + V$ ve $(Rad(M) + U) \cap V \ll V$ olup $Rad(M) \ll M$ olduğundan $M = U + V$ dir. Önerme 2.7.2 (i) den $U \cap V \ll V$ dir. Buradan V, U nun M de tümleyeni olup M tümlenmiştir.

3.3.11. Önerme R lokal Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. Bu takdirde M nin güçlü radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin radikal tümlenmiş olmasıdır [5].

3.3.12. Önerme R Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. Bu takdirde M nin güçlü radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul ${}^{M}/_{P(M)}$ in güçlü radikal tümlenmiş olmasıdır [5].
İspat ($\Longrightarrow$) M nin homomorfik görüntüsü olarak ${}^{M}/_{P(M)}$ Önerme 3.3.3 ten güçlü radikal tümlenmiştir.

(⟸) $M/_{P(M)}$ güçlü radikal tümlenmiş modül olsun. Sonuç 2.10.7 gereği $P(M), M$ nin direkt toplam terimidir. O halde $M = P(M) \oplus K$ olacak şekilde M nin K alt modülü vardır. Buradan $K \cong M/_{P(M)}$ yazılır. $M/_{P(M)}$ güçlü radikal tümlenmiş olduğundan K güçlü radikal tümlenmiştir. Önerme 2.8.7 den $Rad(P(M)) = P(M)$ olduğundan ve Yardımcı Teorem 3.3.8 den $P(M)$ güçlü radikal tümlenmiştir. Sonuç 3.3.7 den de M güçlü radikal tümlenmiştir.

3.4. SS-Tümlenmiş Modüller

3.4.1. Tanım M modül ve $K, N \leq M$ olmak üzere $M = N + K$ ve $N \cap K \ll K$ ve $N \cap K$ yarı-basit ise, K ya N nin **ss-tümleyeni** denir [7].

3.4.2. Tanım M modül olsun. Eğer M nin her alt modülü ss-tümleyene sahipse, M modülüne **ss-tümlenmiş modül** denir [7].

3.4.3. Tanım M modül olsun. M modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı $Des_s(M) = \sum\{N \ll M | N, M'nin\ \ basit\ alt\ mod$ülü$\}$ şeklinde tanımlanır [22].

3.4.4. Önerme M ss-tümlenmiş modül ve $K \ll M$ olsun. Bu takdirde, $K \subseteq Des_s(M)$ dir [7].
İspat $K \ll M$ olduğundan K nın M den başka ss-tümleyeni yoktur. Dolayısıyla $K = K \cap M$ yarı-basit olup $K \subseteq Des(M)$ bulunur.

3.4.5. *Sonuç* M ss-tümlenmiş modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde, $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir [7].
İspat M ss-tümlenmiş ve $Rad(M) \ll M$ olduğundan M, $Rad(M)$ in ss-tümleyenidir. Dolayısıyla, $M = M + Rad(M)$, $M \cap Rad(M) = Rad(M) \ll M$ ve $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ yarı basit olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ elde edilir.

3.4.6. Yardımcı Teorem M tümlenmiş modül ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olsun. Bu takdirde, M ss-tümlenmiştir [7].
İspat $U \leq M$ olsun. M tümlenmiş olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq M$ alt modülü vardır. $U \cap V \ll V$ olduğundan $U \cap V \subseteq Rad(V) \subseteq Rad(M) \subseteq Des(M)$ olup $U \cap V$ yarı-basittir. Sonuç olarak, V U nun M de ss-tümleyenidir.

3.4.7. Teorem M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M ss-tümlenmiştir;

(ii) M tümlenmiştir ve $Rad(M)$ ss-tümleyene sahiptir;

(iii) M tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir [7].

İspat (i)⟹(ii) $Rad(M) \ll M$ ve M ss-tümlenmiş olsun. M tümlenmiş ve M, $Rad(M)$ ninde tümleyenidir. $M = M + Rad(M)$, $M \cap Rad(M) = Rad(M) \ll M$ ve M ss-tümlenmiş olduğundan her alt modülü ss-tümleyene sahiptir. $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ ss-tümleyene sahiptir.

(ii)⟹(iii) M tümlenmiş ve $Rad(M)$ ss-tümleyene sahip olsun. $Rad(M)$ in ss-tümleyeni M olduğundan $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ yarı-basit olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olur.

(iii)⟹(i) Yardımcı Teorem 3.4.6 dan istenen elde edilir.

3.4.8. *Sonuç* M sonlu üretilmiş modül olsun. M modülünün ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır [7].

İspat M sonlu üretilmiş olduğundan Sonuç 2.8.5 gereği $Rad(M) \ll M$ olup Teorem 3.4.7 den ispat görülür.

3.4.9. Teorem R halka olsun. ${}_RR$ nin ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün ss-tümlenmiş olmasıdır [7].

3.4.10. Yardımcı Teorem R lokal Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. $Rad(M)$ nin bir U alt modülünün M de bir ss-tümleyene sahip olması için gerek ve yeter koşul S, U nun yarı-basit alt modülü olmak üzere $U = Rad(U) \oplus S$ olmasıdır [7].

3.4.11. Teorem R bir lokal Dedekind bölgesi ve M bir sol R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $E(M)$ M nin injektif bürümü olmak üzere, M $E(M)$ de bir ss-tümleyene sahiptir;

ii) K, R nin kesir cismi, I ve J indis kümeleri ve S yarı-basit R-modül olmak üzere $M \cong K^{(I)} \oplus (\frac{K}{R})^{(J)} \oplus S$ dir;

iii) $S \subseteq M$ yarı-basit olmak üzere $M = Rad(M) \oplus S$ dir [7].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. SS-Radikal ve Güçlü SS-Radikal Tümlenmiş Modüller

4.1.1. Tanım R halka ve M sol R-modül olsun. $Rad(M), M$ de bir ss-tümleyene sahipse M ye **ss-radikal tümlenmiş modül** denir. Yani;
$M = Rad(M) + V,\ Rad(M) \cap V \ll V$ ve $Rad(M) \cap V$ yarı-basit özellikleri sağlanıyosa M ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.2. Tanım R halka ve M sol R-modül olsun. M modülünün radikalini içeren her alt modül M de ss-tümleyene sahipse M ye **güçlü ss-radikal tümlenmiş modül** denir. Yani;
$Rad(M) \leq U \leq M$ için, $M = U + V,\ U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı-basit ise, M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.
Şimdi aşağıda ss-radikal tümlenmiş modüller ve güçlü ss-radikal tümlenmiş modüllere ait bazı özellikler verilecektir.

4.1.3. Önerme M modül ve $Rad(M) = 0$ olsun. Bu takdirde, M ss-radikal tümlenmiştir.
İspat $M = 0 + M = Rad(M) + M,\quad Rad(M) \cap M = \{0\} \ll M$ ve $Rad(M) \cap M = \{0\}$ yarı-basit olduğundan $M,\ Rad(M)$ nin ss-tümleyeni olup M ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.4. Önerme M radikal modül olsun. Bu takdirde; M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.
İspat $M = Rad(M) = Rad(M) + 0$, $Rad(M) \cap \{0\} = \{0\} \ll M$ ve $Rad(M) \cap \{0\} = \{0\}$ yarı-basit olup M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.5. *Sonuç* Her M modülü için $P(M)$ güçlü ss-radikal tümlenmiştir.
İspat Önerme 4.1.4 ve Önerme 2.8.7 den açıktır.

4.1.6. *Örnek*

(1) $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ modülünü alalım. Sonuç 2.8.3 gereği $Rad(\mathbb{Z}) = 0$ olduğundan Önerme 4.1.3 ten ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ ss-radikal tümlenmiştir.

(2) R tamlık bölgesi ve $K(R)$ kesir cismi olsun. $Rad(K(R)) = K(R)$ olduğundan Önerme 4.1.4 gereği $K(R)$ sol R-modül olarak güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.7. Yardımcı Teorem M modül ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olsun. Bu takdirde, M ss-radikal tümlenmiştir.

İspat $M = M + Rad(M)$ ve $M \cap Rad(M) = Rad(M) \subseteq Des(M)$ olduğu açıktır. O halde $Rad(M)$ yarı-basit olup M, $Rad(M)$ nin M de ss-tümleyenidir. Dolayısıyla M ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.8. *Sonuç* M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. M nin ss-radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır.

İspat $(\Longrightarrow)$ M ss-radikal tümlenmiş olduğundan $M = Rad(M) + V$, $Rad(M) \cap V \ll V$ ve $Rad(M) \cap V$ yarı-basit olacak şekilde $V \subseteq M$ vardır. $Rad(M) \ll M$ olduğundan $V = M$ olup $Rad(M) \cap M = Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir.

$(\Longleftarrow)$ Yardımcı Teorem 4.1.7 den görülür.

4.1.9. *Sonuç* M sonlu üretilmiş modül olsun. M nin ss-radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır.

İspat M sonlu üretilmiş R-modül olduğundan Sonuç 2.8.5 gereği $Rad(M) \ll M$ olup Sonuç 4.1.8 den ispat açıktır.

4.1.10. *Örnek* p herhangi bir asal sayı olmak üzere, $M = \mathbb{Z}_{p^3}$ $\mathbb{Z}$ -modülünü alalım. Burada $Rad(M) = <\bar{p}> \ll M$ dir. $Rad(M)$ yarı-basit olmadığından Sonuç 4.1.8 gereği M ss-radikal tümlenmiş değildir. Diğer taraftan M nin radikal tümlenmiş olduğu açıktır.

R halka olsun. Sıfırdan farklı her sol R-modül maksimal alt modüle sahipse, R ye **sol maksimal halka** denir [8].

4.1.11. *Sonuç* R sol maksimal halka ve M bir R-modül olsun. M nin ss-radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır.

İspat $M = Rad(M) + N$ ise, $Rad(M/N) = M/N$ dir. R sol maksimal halka olduğundan $M/N \neq 0$ olsa, maksimal alt modüle sahip olmalıdır. Bu ise, $Rad(M/N) = M/N$ olması ile çelişir. O halde $M/N = 0$ olup $M = N$ dir. Böylece $Rad(M) \ll M$ olup Sonuç 4.1.8 den ispat görülür.

4.1.12. Önerme R yarı-lokal halka ve M ss-radikal tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde, $Rad(M)$ nin her ss-tümleyeni eş-atomiktir.

İspat Eğer $M = Rad(M)$ ise 0, $Rad(M)$ nin M de ss-tümleyeni olup 0 eş-atomiktir. $M \neq Rad(M)$ olduğunu kabul edelim. V, $Rad(M)$ nin M de herhangi bir ss-tümleyeni olsun. Bu takdirde, $Rad(M) \cap V = Rad(V)$ yarı-basit ve böylece $Rad(V)$ eş-atomiktir. R yarı-lokal olduğundan Teorem 2.9.10 gereği $V/_{Rad(V)}$ yarı-basit olup Teorem 2.8.13 ten V eş-atomiktir.

4.1.13. Önerme Güçlü ss-radikal tümlenmiş modüllerin her bölüm modülü güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

İspat M güçlü ss-radikal tümlenmiş modül olmak üzere $L \subseteq N \subseteq M$ ve $Rad(M/_{L}) \subseteq N/_{L}$ olsun. $\pi: M \longrightarrow M/_{L}$ kanonik projeksiyonunu alalım. Buradan $\pi\big(Rad(M)\big) = (Rad(M) + L)/_{L} \subseteq Rad(M/_{L}) \subseteq N/_{L}$ olup $Rad(M) \subseteq N$ dir. Hipotezden N, M de bir K ss-tümleyenine sahiptir. $M/_{L} = N/_{L} + (K + L)/_{L}$ olduğu açıktır. Önerme 2.7.2 (iv) gereği $\pi(N \cap K) = (N \cap K + L)/_{L} = N/_{L} \cap (K + L)/_{L} \ll \pi(K) = (K + L)/_{L}$ dir ve $\pi(N \cap K) = N/_{L} \cap (K + L)/_{L}$ yarı-basittir. Bundan dolayı M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.14. *Sonuç* M güçlü ss-radikal tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde $M/_{Rad(M)}$ yarı-basittir.

İspat Önerme 4.1.13 den, $M/_{Rad(M)}$ güçlü ss-radikal tümlenmiştir. $Rad\left(M/_{Rad(M)}\right) = 0$ olduğundan $M/_{Rad(M)}$ yarı-basittir.

4.1.15. Önerme M güçlü ss-radikal tümlenmiş modül ve $Rad(M) \subseteq U$ olsun. Bu takdirde, U nun her ss-tümleyeni eş-atomiktir.

İspat V, U nun M de bir ss-tümleyeni olsun. O halde $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı-basittir. Yarı-basit modüller eş-atomik olduğundan $U \cap V$ eş-atomiktir.

$${}^{M}\!/_{Rad(M)} \Big/ {}^{U}\!/_{Rad(M)} \cong {}^{M}\!/_{U}$$ izomorfizmasını alalım. Sonuç 4.1.14 gereği ${}^{M}\!/_{U}$ yarı-basit ve ${}^{M}\!/_{U} \cong {}^{V}\!/_{U \cap V}$ yarı-basit olup Teorem 2.8.13 ten V eş-atomiktir.

Aşağıda verilen örnekle, bir ss-radikal tümlenmiş modülün bölüm modülünün genel olarak ss-radikal tümlenmiş olmak zorunda olmadığı gösterilmiştir.

4.1.16. *Örnek* $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ modülünü alalım. M nin ss-radikal tümlenmiş olduğu açıktır. M nin ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{8\mathbb{Z}}$ bölüm modülünü alalım. $Rad({}^{\mathbb{Z}}\!/_{8\mathbb{Z}}) = {}^{2\mathbb{Z}}\!/_{8\mathbb{Z}} \ll {}^{\mathbb{Z}}\!/_{8\mathbb{Z}}$ olup Sonuç 4.1.8 den ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{8\mathbb{Z}}$ ss-radikal tümlenmiş değildir.

4.1.17. Önerme M ss-radikal tümlenmiş modül ve $N \subseteq Rad(M)$ olsun. Bu takdirde, ${}^{M}\!/_{N}$ ss-radikal tümlenmiştir.

İspat $\pi: M \longrightarrow M/N$ kanonik projeksiyonunu alalım. $N \subseteq Rad(M)$ olduğundan, Teorem 2.8.8 (iii) gereği $\pi(Rad(M)) = {}^{(Rad(M)+N)}\!/_{N} = Rad(\pi(M)) = Rad({}^{M}\!/_{N})$ dir. Hipotez gereği $M = Rad(M) + V$, $Rad(M) \cap V \ll V$ ve $Rad(M) \cap V$ yarı-basit olacak şekilde $V \subseteq M$ vardır. Önerme 4.1.13 ün ispatına benzer şekilde ${}^{(V+N)}\!/_{N}$, $Rad({}^{M}\!/_{N})$ nin M de bir ss-tümleyeni olup, ${}^{M}\!/_{N}$ ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.18. Önerme M modül ve $N \leq M$ alt modül olsun. N güçlü ss-radikal tümlenmiş modül ve $Rad({}^{M}\!/_{N}) = {}^{M}\!/_{N}$ ise, M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

İspat $Rad(M) \subseteq U \leq M$ olacak şekilde M nin U alt modülünü alalım. $Rad({}^{M}\!/_{N}) = {}^{M}\!/_{N}$ olduğundan $Rad(M) + N = M$ ve böylece $U + N = M$ dir. Ayrıca $Rad(N) \subseteq Rad(M) \subseteq U$ olup $Rad(N) \subseteq U$ ve $Rad(N) \subseteq N$ olduğundan $Rad(N) \subseteq U \cap N$ dir. Hipotez gereği N güçlü ss-radikal tümlenmiş olduğundan $(U \cap N) + V = N$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı-basit olacak şekilde N nin V alt modülü vardır. Buradan $M = U + N = U + (U \cap N) + V = U + V$ eşitliğini yazabiliriz. O halde M güçlü ss-radikal tümlenmiş modüldür.

4.1.19. Yardımcı Teorem M modül, $M_1, N \leq M$ ve $Rad(M) \subseteq N$ olsun. M_1 güçlü ss-radikal tümlenmiş modül ve $M_1 + N$ M de bir ss-tümleyene sahipse N, M de bir ss-tümleyene sahiptir.

İspat L, $M_1 + N$ nin M de bir ss-tümleyeni ve K, $(L + N) \cap M_1$ in M_1 de ss-tümleyeni olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $M = L + K + N$ ve $(L + K) \cap N \ll L + K$ dır. Dolayısıyla $L \cap (K + N)$, $L \cap (M_1 + N)$ yarı-basit modülünün alt modülü olup yarı-basittir. $K \cap [(L + N) \cap M_1] = K \cap (L + N)$ yarı-basittir ve Sonuç 2.6.9 gereği $(L + K) \cap N$ yarı-basittir. O halde $K + L$, N nin M de bir ss-tümleyenidir.

4.1.20. Önerme M_1 ve M_2 bir M modülünün $M = M_1 + M_2$ olacak şekilde herhangi iki alt modülü olsun. Eğer M_1 ve M_2 güçlü ss-radikal tümlenmiş modüller ise M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

İspat $Rad(M) \subseteq N$ olacak şekilde $N \subseteq M$ alt modülünü alalım. $M_1 + M_2 + N$ nin M de aşikar 0 (sıfır) ss-tümleyenine sahip olduğu açıktır. Böylece Yardımcı Teorem 4.1.19 dan $M_1 + N$, M de bir ss-tümleyene sahiptir. Aynı yardımcı teorem bir kez daha uygulanırsa M de N için bir ss-tümleyen elde edilir.

4.1.21. *Sonuç* Güçlü ss-radikal tümlenmiş modüllerin her sonlu toplamı güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.22. Önerme M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. M nin güçlü ss-radikal tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul ss-tümlenmiş olmasıdır.

İspat $(\Longrightarrow)$ U, M nin bir alt modülü olsun. Bu takdirde, $Rad(M) \subseteq Rad(M) + U$ olup $Rad(M) + U$, M de bir V ss-tümleyenine sahiptir. $M = Rad(M) + U + V$, $[Rad(M) + U] \cap V \ll V$ ve $[Rad(M) + U] \cap V$ yarı-basittir. $Rad(M) \ll M$ olduğundan $M = U + V$ ve ayrıca $U \cap V \subseteq [Rad(M) + U] \cap V$ dir. Buradan U, M de V ss-tümleyenine sahiptir. Bundan dolayı M ss-tümlenmiş modüldür.

$(\Longleftarrow)$ Açıktır.

4.1.23. *Sonuç* M eş-atomik modül olsun. Bu takdirde, M nin ss-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul güçlü ss-radikal tümlenmiş modül olmasıdır.

4.1.24. *Sonuç* M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Aşağıdaki durumlar denktir.

i) M ss-tümlenmiştir;

ii) M tümlenmiştir ve M ss-radikal tümlenmiştir;

iii) M güçlü radikal tümlenmiştir ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir;

iv) M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Sonuç 4.1.8 den görülür.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $Rad(M) \subseteq U$ olmak üzere $U \subseteq M$ alt modülünü alalım. M güçlü radikal tümlenmiş olduğundan, $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olacak şekilde V tümleyeni vardır. $U \cap V \subseteq Rad(V) \subseteq Rad(M) \subseteq Des(M)$ olduğundan M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Önerme 4.1.22 den görülür.

Şimdi tüm modülleri güçlü ss-radikal tümlenmiş olan halkaları karakterize edelim.

4.1.25. Önerme Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) Her projektif sol R-modül ss-radikal tümlenmiştir;

ii) Her serbest sol R-modül ss-radikal tümlenmiştir;

iii) Her sonlu üretilmiş serbest sol R-modül ss-radikal tümlenmiştir;

iv) $Rad(R) \subseteq Des({}_RR)$ dir.

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) Her serbest modül projektif olduğundan (i) den istenen elde edilir.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Açıktır.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Hipotez gereği ${}_RR$ ss-radikal tümlenmiştir. Sonuç 4.1.8 den $Rad(R) \subseteq Des({}_RR)$ dir.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) P herhangi bir projektif sol R-modül olsun. Bu takdirde, Önerme 2.8.10 dan $Rad(P) = Rad(R)P \subseteq Des({}_RR)P = Des(P)$ olup $Rad(P) \ll P$ ve yarı-basittir. Sonuç 4.1.8 gereği P ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.26. *Örnek* $\mathbb{Z}$ halkası verilsin. $Rad(\mathbb{Z}) = Des({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = 0$ olduğunu biliyoruz. $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{16}$ $\mathbb{Z}$-modülünü alalım. M projektif değildir. $Rad(M) \ll M$ olduğundan Sonuç 4.1.8 gereği M ss-radikal tümlenmiş değildir.

R bir halka olsun. $R/_I \ncong R$ ve I, R nin keyfi bir ideali olmak üzere eğer her basit R-modül $R/_I$-injektif ise, R halkasına **sol WV-halka** denir. Sol WV-halkalar V-halkaların bir genellemesidir [10].

Radikalin önemli özelliklerinden birisi de Teorem 2.8.8 (iii) den, her $f: M \longrightarrow N$ homomorfizması için, $f(Rad(M)) \subset Rad(f(M))$ olmasıdır. Keyfi bir $f: M \longrightarrow N$ homomorfizması için eğer $f\big(Rad(M)\big) = Rad(f(M))$ oluyor ise, M ye **iyi modül** denir. ${}_RR$ iyi modül ise, R ye **sol iyi halka** denir. Örneğin yarı-lokal halkalar iyi halkalardır.

4.1.27. Teorem R sol iyi halka olsun. Bu takdirde, $Rad(R) \subseteq Des({}_RR)$ olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün ss-radikal tümlenmiş olmasıdır.
İspat M bir R-modül ve $Rad(R) \subseteq Des({}_RR)$ olsun. R sol iyi halka olduğundan, $Rad(M) = Rad(R).M \subseteq Des\big({}_RR\big).M \subseteq Des(M)$ yazılabilir. Bundan dolayı Yardımcı Teorem 4.1.7 den M ss-radikal tümlenmiştir. Tersi Sonuç 4.1.8 den görülür.

4.1.28. Yardımcı Teorem R sol V-halka olmayan sol WV-halka ise, $R/_{Rad(R)}$ sol V-halkadır ve $Rad(R)$ basittir [10].

4.1.29. Yardımcı Teorem R halka olsun. R nin iyi halka olması için gerek ve yeter koşul $R/_{Rad(R)}$ nin sol V-halka olmasıdır [21].

4.1.30. Yardımcı Teorem R sol WV-halka olsun. Bu takdirde, R sol iyi halka ve sol maksimal halkadır.
İspat Eğer R sol V-halka ise, R sol iyi halkadır ve sol maksimal halkadır. R nin sol V-halka olmadığını kabul edelim. Bu takdirde, $R/_{Rad(R)}$ sol V-halkadır. Yardımcı Teorem 4.1.29 gereği R sol iyi halkadır. $0 \neq M$ modül olsun. R sol iyi halka olduğundan, $Rad(M) = Rad(R).M \subseteq Des({}_RR).M \subseteq Des(M)$ olup $Rad(M)$ yarı-basittir. Dolayısıyla $Rad(M) \neq M$ olup R sol maksimal halkadır.

4.1.31. *Sonuç* R sol WV-halka olsun. Bu takdirde, her sol R-modül ss-radikal tümlenmiştir.
İspat R sol V-halka ise, herhangi bir M modülü için $Rad(M) = 0$ olup Önerme 4.1.3 gereği M ss-radikal tümlenmiştir. R sol V-halka olmasın. Yardımcı Teorem 4.1.28 gereği

$Rad(R) \subseteq Des({}_RR)$ olup Yardımcı Teorem 4.1.30 ve Teorem 4.1.27 gereği her sol R-modül ss-radikal tümlenmiştir.

4.1.32. Teorem Bir R halkası için aşağıdaki durumlar denktir.
i) Her sol R-modül güçlü ss-radikal tümlenmiştir;
ii) Her sonlu üretilmiş sol R-modül güçlü ss-radikal tümlenmiştir;
iii) ${}_RR$ güçlü ss-radikal tümlenmiştir;
iv) ${}_RR$ ss-tümlenmiştir;
İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) Açıktır.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Teorem 3.4.9 dan görülür.

Bir sol Artin halka üzerinde her sol R-modül tümlenmiş olup ve böylece her modül güçlü radikal tümlenmiştir. Bununla birlikte bir Artin halkası üzerindeki herhangi bir modül güçlü ss-radikal tümlenmiş olmak zorunda değildir. Örneğin; $R = \mathbb{Z}_8$ halkası için ${}_RR$ güçlü ss-radikal tümlenmiş değildir.

4.2. Dedekind Bölgeleri Üzerinde SS-Radikal ve Güçlü SS-Radikal Tümlenmiş Modüller

Bu kısımda ss-radikal ve güçlü ss-radikal tümlenmiş modülleri Dedekind bölgeleri üzerinde inceleyeceğiz. Aksi belirtilmedikçe her halka, cisim olmayan Dedekind bölgesi olarak alınacaktır.
$P(M)$ in M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı olduğunu biliyoruz. R bir Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. R Dedekind bölgesi olduğundan Önerme 2.10.6 gereği $P(M)$ injektif olup $M = P(M) \oplus N$ olacak şekilde $N \leq M$ alt modülü vardır. N ye M nin **indirgenmiş kısmı** denir.

4.2.1. Önerme R Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. N, M nin indirgenmiş kısmı olmak üzere, M nin güçlü ss-radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul N nin güçlü ss-radikal tümlenmiş olmasıdır.
İspat N, M nin bir homomorfik görüntüsü olarak Önerme 4.1.13 ten güçlü ss-radikal tümlenmiştir. Tersi, Önerme 4.1.20 den açıktır.

4.2.2. Teorem R lokal Dedekind bölgesi ve M R-modül olsun. M, $E(M)$ de ss-tümleyene sahip ise, M nin $Rad(M)$ yi kapsayan her $U \subseteq M$ alt modülü direkt toplam terimidir.
İspat Teorem 3.4.11 den $S \subseteq M$ yarı-basit olmak üzere $M = Rad(M) \oplus S$ yazılabilir. $Rad(M) \subseteq U$ olsun. $M = Rad(M) \oplus S = U + S$ olduğu açıktır. S yarı-basit olduğundan $S = U \cap S \oplus X$ olacak şekilde $X \subseteq S$ yarı-basit alt modülü vardır. $M = U + S = U + (U \cap S \oplus X) = U \oplus X$ olup istenen elde edilir.

4.2.3. *Sonuç* R lokal Dedekind bölgesi ve M R-modül olsun. M, $E(M)$ de ss-tümleyene sahip ise, M güçlü ss-radikal tümlenmiştir.

4.2.4. Yardımcı Teorem R Dedekind bölgesi ve M bir burulmasız R-modül olsun. Aşağıdaki durumlar denktir.
i) M güçlü ss-radikal tümlenmiştir;
ii) M injektiftir.
İspat (i)$\Longrightarrow$ (ii) U, M nin bir maksimal alt modülü olsun. Bu takdirde U, M de bir V ss-tümleyenine sahiptir. Teorem 3.1.3 (ii) gereği V lokal olup $V \subseteq T(M) = 0$ dır. O halde $V = 0$ dır. Bundan dolayı, M maksimal alt modüle sahip değildir Önerme 2.10.6 gereği, M injektiftir.

(ii)$\Longrightarrow$ (i) Önerme 2.10.6 gereği $Rad(M) = M$ ve böylece Önerme 4.1.4 ten M güçlü ss-radikal tümlenmiş modüldür.

4.2.5. *Sonuç* R Dedekind bölgesi ve M güçlü ss-radikal tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde, $M/_{T(M)}$ injektiftir.
İspat M güçlü ss-radikal tümlenmiş olduğundan Önerme 4.1.13 gereği $M/_{T(M)}$ güçlü ss-radikal tümlenmiştir. $M/_{T(M)}$ burulmasız olduğundan Yardımcı Teorem 4.2.4 gereği $M/_{T(M)}$ injektiftir.

4.2.6. Önerme R Dedekind bölgesi, M bir R-modül ve $T(M)$ güçlü ss-radikal tümlenmiş modül olsun. M nin güçlü ss-radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul $M/_{T(M)}$ nin injektif olmasıdır.
İspat $(\Longrightarrow)$ Sonuç 4.2.5 ten açıktır.

($\Leftarrow$) ${}^{M}/_{T(M)}$ injektif olduğundan Önerme 2.10.6 den $Rad\left({}^{M}/_{T(M)}\right) = {}^{M}/_{T(M)}$ dir. Hipotezden ve Önerme 4.1.18 den $N = T(M)$ alınırsa istenen elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, ss-radikal tümlenmiş ve güçlü ss-radikal tümlenmiş modüllerle ilgili önermeler, teoremler ve sonuçlar; dördüncü bölümde yer almaktadır. Bu çalışmada, tüm modülleri güçlü ss-radikal tümlenmiş olan halkalar karakterize edildi. Ayrıca Dedekind bölgeleri üzerinde ss-radikal tümlenmiş ve güçlü ss-radikal tümlenmiş modüller incelendi. Bununla birlikte lokal Dedekind bölgeleri üzerinde (güçlü) ss-radikal tümlenmiş modüllerin yapısı belirlendi. Bu çalışmada tanımlanan modüllerin yapısı, Noether ve Artin halkalar üzerinde incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Alizade, R. , Pancar, A. (1999). *Homoloji Cebire Giriş.* Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 177.

[2] Alizade, R. , Bilhan, G. , Smith P.F. (2001) Modules Whose Maximal Submodules Have Supplements. *Communications in Algebra,* 29(6), 2389-2405.

[3] Anderson, F.W. , Fuller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 363.

[4] Büyükaşık, E. , Lomp, C. (2008). On a Recent Generalization of Semiperfect Rings, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 78, 317-325.

[5] Büyükaşık, E., Türkmen, E. (2011), Strongly Radical Supplemented Modules, *Ukrainian Mathematical Journal,* 63 (8).1140-1146.

[6] Clark, J. , Lomp, C. , Vanaja , N. , Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory*. Frontiers in Mathematics. Basel, 394.

[7] Çalışıcı, H., Kaynar, E. (Sunum Yapan), Türkmen, E. (2017). ss-Supplemented Modules. *Antalya Algebra Days XIX*, Şirince-İzmir-Turkey.

[8] Faith C. (1995). Rings Whose Modules have Maximal Submodules, *Publicacions Matem`atiques,* 39: 201–214.

[9] Hungerford, T.W. (1974). *Algebra.* Springer Verlag, 502.

[10] Jain S. K., Srivastava A. K. and Tuganbaev A. A. *Cyclic modules and the structure of rings*, ser. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2012.

[11] Kasch, F. (1982). *Modules and Rings.* Academic Press, 372.

[12] Lam, T.Y. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings* , Springer-Verlag, 397.

[13] Lam, T.Y. (2003). *Exercises in Classical Ring Theory,* Springer-Verlag, 380s, New-York.

[14] Larsen, M.D., McCarthy, P.J. (1971). *Multiplicative Theory of Ideals*. Pure and Applied Mathematics, 43.

[15] Lomp C. (1999) On semilocal modules and rings // *Communs Algebra*. -27, No 4. –P. 1921-1935.

[16] Nişancı Türkmen, B. , Pancar, A. (2010). On Generalization of ⊕-Cofinitely Supplemented Modules. *Ukrainian Mathematical Journal,* 62(2) , 203-209

[17] Nişancı Türkmen, B. , Pancar, A. (2014). *İnjektif Modüllere Giriş.* Pegem Akademi, 217.

[18] Nişancı Türkmen, B. (2012). *⊕-Radikal Tümlenmiş ve Güçlü ⊕-Radikal Tümlenmiş Modüller.* Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, 86.

[19] Sharpe, D.W. , Vamos, P. (1972). *Injective Modules,* Cambridge at the University Press, 190.

[20] Wang, Y. , Ding, N. (2006). *Generalized Supplemented Modules*. Taiwanese J. Math , 10(6) , 1589- 1601.

[21] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach, 606.

[22] Zhou D. X., Zhang X. R. (2011). Small-Essential Submodules and Morita Duality, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics,* 35: 1051-1062.

[23] Zöschinger, H., 1974c. Modules That Have A Supplement In Every Extension, *Mathematica Scandinavica*, 35, 267-287.

[24] Zöschinger H. Moduln, die in jeder Erveiterung ein Komplement haben // *Math. scand.* -1974. -35. -P. 267-287.

[25] Zöschinger H. Basis-Untermoduln und Quasi-kotorsions-Moduln über diskreten Bewertungsringen // *Bayer.Akad.Wiss. Math-Nat. Kl Sitzungsber*. -1977. –S. 9-16.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : İrfan SOYDAN

Doğum Yeri : Amasya

Doğum Tarihi : 12.01.1985

Eğitim Derecesi

Lise : Amasya Oniki Haziran Lisesi (1999-2002)

Lisans : Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Öğretmenliği (2002-2006)

Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi. Matematik Bölümü, (2015-2017)

Çalıştığı Kurum: Tuğgeneral Hikmet Akıncı Ortaokulu, Merkez / AMASYA (2013-)

Yabancı Dili: İngilizce

İletişim Bilgileri

E-posta: irfansoydan05@hotmail.com

Adres: Şeyhcui Mahallesi, SSK üstü, Çiğdem Sokak No:23 Kat:3 Merkez/ AMASYA