T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LP-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİBEL TORUN

AĞUSTOS

LP-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

SİBEL TORUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi SÜLEYMAN DİRİK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2018

Yüksek Lisans Tezi kabul ve onay sayfası

Sibel TORUN tarafından hazırlanan "LP-Kosimplektik Manifoldun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldlarının Geometrisi Üzerine" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tevfik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Tez Savunma Tarihi: 16.08.2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sibel TORUN
16.08.2018

LP-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

SİBEL TORUN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos-2018

ÖZET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatür özeti, konunun güncelliği ve tez konusuyla ilgili yapılmış olan çalışmalar hakkında bilgiler verildi. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü bölümde, parakontak metrik manifoldlar hakkında bilgi verilerek Lorentzian hemen hemen parakontak manifoldlar ve Lorentzian para kosimplektik manifoldlar tanıtıldı. Dördüncü bölümde, bir LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldlarının total geodezik durumları için yeni sonuçlar gösterildi. Ayrıca, bir LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerek ve yeter şartlar verildi. LP-kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldunun kontak pseudo-slant çarpım olması için gerekli ve yeterli şartlar araştırıldı. Son olarak beşinci bölümde, problemimizden ortaya çıkan sonuç ve öneriler tartışıldı.

Sayafa Adedi : 55
Anahtar Kelimeler : LP-kosimplektik manifold, kontak pseudo-slant altmanifold, kontak pseudo-slant çarpım, geodezik altmanifold.
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK

ON THE GEOMETRY OF CONTACT PSEUDO-SLANT SUBMANIFOLDS OF A LP-COSYMPLECTIC MANIFOLD
(M. Sc. Thesis)

SİBEL TORUN

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE

August-2018

ABSTRACT

This study designed as master covers five chapters. In the first chapter, the literature survey, actuality of the subject and information about the subject of thesis are given. In the second chapter, some neccessary definitions and theorems required for the study are given. In the third chapter, information about paracontact metric manifolds is given and Lorentizian almost paracontact and Lorentzian para cosymplectic manifolds are defined. In the fourth chapter, new results are shown for the totally geodesic situations of contact pseudo-slant submanifolds in a LP-cosymplectic manifold. Also, necessary and sufficient conditions for a submanifold to be contact pseudo-slant are given. Necessary and sufficient conditions for contact pseudo-slant submanifold of LP-cosymplectic manifold to be a contact pseudo-slant product are searched. Finally, in the fifth chapter, the conclusıons and suggestions obtained from the problem are argued.

Page Number	: 55
Key Words	: LP-cosymplectic manifold, contact pseudo-slant submanifold, contact pseudo-slant product, geodesic submanifold.
Supervisor	: Asist. Prof. Dr. Süleyman DİRİK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren ve karşılaştığım problemlerin çözümü için bana değerli zamanlarını sunan tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK' e, ders aşamam boyunca engin bilgilerinden istifade ettiğim değerli hocalarım Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR, Prof. Dr. Keziban ORBAY ve Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK' e ayrıca katkılarından dolayı sayın Prof. Dr. Mehmet AKÇEKEN'e en sıkıntılı anlarımda her zaman yanımda olan eşim Murat' a ve sabrından dolayı oğlum Metehan' a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

M. Ö. 428-499 yılları arasında yaşamış olan Eflatun Akademisinin kapısına “Geometri bilmeyen buraya giremez” diye yazarak geometrinin o dönemin düşünce dünyasında ne kadar önemli olduğunu ortaya koymuş ve gelecekte ne kadar önemli olacağı mesajını tüm dünyaya ifade etmiştir.

Antik çağda günümüze kadar uzanan dönemde, değişen ve gelişen düşünce dünyasında, bilim ve teknolojinin içerisinde matematiğin ve geometrinin önemi daima korunmuştur. Bu süreçte geometri, yaşadığımız evrenin anlaşılmasından da öte evrenin yapısının anlaşılmasında, hatta düşünme sisteminin bizzat kendisinin daha iyi tanınmasında önemli bir bilim dalı olmuştur. Özellikle matematiğin, fiziğin, mühendislik ve bilgisayar bilimlerinin geometriye uzak gibi görünen kolları geometriyi kullanır hale gelmişlerdir.

İnsanoğlunun zaman içerisinde oluşan ihtiyaçlarına göre geometri çeşitli dallara ayrılmış ve çalışmalar daha özgün yürütülmüştür. Bu alanlardan birisi diferensiyel hesaplamanın geometriye tatbik edildiği dal olan diferensiyel geometridir. Diferensiyel geometri, matematiğin türev işlemi kullanarak çalışılan geometrinin bir koludur.

B. Y. Chen 1990 yılından bu yana invaryant ve anti-invaryant altmanifoldların bir genellemesi olan slant altmanifoldlar geometrisi üzerine çalışmalar yapmaktadır. Yine B. Y. Chen tarafından bir hemen hemen Hermityen manifoldun slant altmanifoldları kavramı ortaya atılmıştır (Chen, 1990). A. Lotta ise hemen hemen kontak metrik manifoldun, slant altmanifoldlarını ilk tanımlayan ve araştıran kişidir (Lotta, 1996). Aynı zamanda Lotta’ nın K-Kontak manifoldların 3-boyutlu anti-invaryant olmayan slant altmanifoldların geometrisi üzerine çalışmaları da bulunmaktadır (Lotta, 1998). L. Cabrerizo ve arkadaşları bir Sasakian manifoldun slant altmanifoldları üzerine yaptıkları incelemelerde çok sayıda ilginç sonuca ulaşmışlardır (Cabrerizo ve ark., 2000(a); Cabrerizo ve ark., 2000(b)). 2007 ve 2011 yıllarında ise M. Khan ve arkadaşlarının proper slant ve pseudo-slant altmanifoldlarla ilgili çalışmaları literatüre girmiştir. M. Atçeken, S. Dirik ve Ü. Yıldırım manifoldların pseudo-slant altmanifoldları ile ilgili birçok çalışmaları bulunmaktadır.

Bu bilgiler ışığında, (φ,ξ,η,g) kontak metrik yapısıyla verilen $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, $n-$boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ ve bu manifold üzerindeki Levi-

Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olmak üzere, $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu eğer her $X,Y \in \chi(T\tilde{M})$ için

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = 0$$

şartını sağlıyorsa $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifolduna kosimplektik manifold adı verilir. Ayrıca D_θ-total geodezik, $D^\perp$-total geodezik ve mixed-total geodeziklik kavramları verilip kontak pseudo-slant çarpım kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra hemen hemen kontak metrik yapısıyla $\mathbb{R}^{11}$ de 4-boyutlu kontak pseudo-slant altmanifold örneği verilerek konu somutlaştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Temel kavramlar için ayırdığımız bu bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, manifoldların inşasında kullanılan kavramlara yer verilmiş olup ikinci kısımda da altmanifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

2.1. Manifoldlar

Bu kısımda manifoldlarla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1.1. Tanım X bir Hausdorff uzayı olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık cümlesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$$

homeomorfizmine X de tanımlanan $n-$boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık cümlesine de, ϕ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bu harita (U,ϕ) şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Eğer, $x \in U$ ise

$$\phi(x) = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

dir. Buradaki $x_1, ..., x_n$ reel sayılarına ϕ haritasında x noktasının koordinatları denir.

2.1.2. Tanım $\tilde{M}$ bir Hausdorff uzayı olsun. $\tilde{M}$ nin her noktasının E^n e veya E^n in bir U açık alt cümlesine homeomorf olan bir koordinat komşuluğu varsa, $\tilde{M}$ ye $n-$boyutlu topolojik manifold denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.3. Tanım $f, \mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık alt cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun $k.$ mertebeden kısmi türevleri var ve $k \le r$ olmak üzere sürekli ise f fonksiyonu $r.$ mertebeden diferensiyellenebilir denir ve bu $f \in C^r(U,\mathbb{R})$ ile gösterilir. Eğer her $r \in Z^+$ için $f \in C^r(U,\mathbb{R})$ ise f fonksiyonuna diferensiyellenebilir denir ve bu durum $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.4. Tanım $\tilde{M}$ bir topolojik manifold ve $\tilde{M}$ nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle V_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, V_α) haritalarının $S=\{(\psi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ koleksiyonuna bir atlas veya koordinat komşuluğu sistemi denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.5. Tanım $\tilde{M}$ bir $n-$boyutlu topolojik manifold ve $S=\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ de $\tilde{M}$ nin bir atlası olsun. $r\geq 1$ olması durumunda, eğer S atlası için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere her $\alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha o \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta o \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

şeklinde ikişer ikişer homeomorfizmaların bileşkesi olduğundan birer homeomorfizmadır. Tanımlanan $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^r-sınıfından diferensiyellenebilir ise S atlasına C^r-sınıfından diferensiyellenebilirdir denir.

Eğer S atlası $\tilde{M}$ üzerinde C^r-sınıfından ise S ye $\tilde{M}$ üzerinde bir C^r-sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir. Eğer bir $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa $\tilde{M}$ manifolduna r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.6. Tanım $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ manifoldlar ve $\phi : \tilde{M} \to \tilde{N}$ diferensiyellenebilir dönüşümünün tersi var ve tersi de diferensiyellenebilirse ϕ dönüşümüne bir diffeomorfizma denir. $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ manifoldları verildiğinde $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ ye bir diffeomorfizma var ise $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ manifoldlarına diffeomorfiktirler denir.

2.1.7. Tanım $\tilde{M}$ bir topolojik manifold ve $p\in\tilde{M}$ olsun. $\tilde{M}$ nin p noktasındaki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C(p)$ olmak üzere,

$$U_p : C(p) \to \mathbb{R}$$

dönüşümü, her $f, g \in C(p)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$i-)$ Lineerlik

$$U_p\left(af + bg\right) = aU_p\left(f\right) + bU_p\left(g\right)$$

$ii-)$ Leibnitz

$$U_p\left(f.g\right) = U_p\left(f\right)g\left(p\right) + f\left(p\right)U_P\left(g\right)$$

özelliklerini sağlıyorsa U_p ye $\tilde{M}$ nin p noktasındaki tanjant vektörü denir.

$\tilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_{\tilde{M}}(p)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Buna göre $\tilde{M}$ üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^{\infty}(\tilde{M}, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$T_{\tilde{M}}(p) = \{U_p \,\big|\, U_p : C^{\infty}(\tilde{M}, \mathbb{R}) \xrightarrow[leibnitz]{lineer} \mathbb{R}\}$$

ile gösterelim. Bu cümlede $f \in C^{\infty}(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için iç işlem

$$\begin{aligned} \oplus : T_{\tilde{M}}(p) \times T_{\tilde{M}}(p) &\to T_{\tilde{M}}(p) \\ (U_p, W_P) &\to U_p \oplus W_P : C^{\infty}(\tilde{M}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (U_p + W_p)[f] &= U_p[f] + W_p[f] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(T_{\tilde{M}}(p), \oplus)$ ikilisi bir abel grup olur.

Bu cümlede $f \in C^{\infty}(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için dış işlem de

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_{\tilde{M}}(p) &\to T_{\tilde{M}}(p) \\ (\lambda, U_p) &\to \lambda \odot U_p : C^{\infty}(\tilde{M}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (\lambda \odot U_p)[f] &= \lambda U_p[f] \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Bu işlemlere göre $T_{\tilde{M}}(p)$, reel sayılar cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayıdır. Bu uzaya $\tilde{M}$ nın $p-$noktasındaki tanjant uzayı adı verilir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.8. Tanım $f : E^n \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyon ve $\vec{V}_p \in T_{E^n}(p)$ olsun. Bu durumda $\vec{V}_p = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1)),..., f(P_n + t(Q_n - P_n)))_t = 0$$

reel sayısına f nin $\vec{V}_p$ vektörü yönündeki türevi denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.9. Tanım Reel sayılar cismi üzerinde r tane vektör uzayı $V_1, V_2, V_3, ..., V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2, ..., V_r \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $1 \leq i \leq r$ olmak üzere $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(v_1, ..., v_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, ..., v_r) = af(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, ..., v_r) + bf(v_1, ..., v_{i-1}, u_i, ..., v_r)$$

şartını sağlıyorsa f ye $r-$lineer fonksiyon denir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.1.10. Tanım $\tilde{M}$ bir $n-$boyutlu manifoldu diferensiyellenebilir manifold ve $p \in \tilde{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_{\tilde{M}}(p)$ olsun. $T_{\tilde{M}}(p)$ nin dual uzayına $\tilde{M}$ nin p noktasındaki kotanjant uzayı denir. $\tilde{M}$ nin p noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{\tilde{M}}(p)$ ile gösterilir. Buna göre

$$T^*_{\tilde{M}}(p) = \{\omega \mid \omega : T_{\tilde{M}}(p) \xrightarrow{lineer} \mathbb{R}\}$$

dir. $T^*_{\tilde{M}}(p)$ uzayının her bir elemanına da $\tilde{M}$ nin p noktasındaki kotanjant vektörü denir (O'Neill, 1983).

2.1.11. Tanım Reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı V ve V^*, V nin dual uzayı olmak üzere

$$L(V^r + V^{s^*} : \mathbb{R}) = \{ f \,|\, f : V^r \times V^{s^*} \xrightarrow{(r+s)-lineer} \mathbb{R} \}$$

uzayında iç ve dış işlemler sırasıyla

$$(f \oplus g)(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s) = f(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s) + g(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s)$$

ve

$$(\lambda f)(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s) = \lambda f(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s)$$

şeklinde tanımlanan uzaya s. mertebeden kontravaryant ve r. mertebeden kovaryant tensör uzayı denir. Bu uzayın her bir elemanına da $(r,s)-$tipinde bir tensör denir (Boothby, 1986).

2.1.12. Not Manifoldlar üzerindeki tanjant vektör kavramından faydalanarak vektör alanı tanımlanabilir. $\tilde{M}$ bir manifold ve $T_{\tilde{M}}(p)$ manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in \tilde{M}$ noktasına $T_{\tilde{M}}(p)$ uzayında bir tanjant vektörü karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı dediğimiz gibi aşağıdaki şekilde de tanımlayabiliriz.

2.1.13. Tanım $\tilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve $\tilde{M}$ üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$ olsun. Her $f,g \in C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$ ve $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$Y : C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R}) \to C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$$

dönüşümü

$i-)$ $Y(af + bg) = aY(f) + bY(g)$

$ii-)$ $Y(fg) = Y(f)g + fY(g)$

özelliklerini sağlıyorsa Y e $\tilde{M}$ üzerinde bir vektör alanı denir. $\tilde{M}$ üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(\tilde{M})$ ile gösterilir (Boothby, 1986).

Buna göre bir manifold üzerinde bir vektör alanı, manifoldun her bir noktasına bir tanjant uzayı karşılık gelir.

2.1.14. Tanım $\tilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifoldu üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(\tilde{M})$ olmak üzere $X,Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned} [,]: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) &\to \chi(\tilde{M}) \\ (X,Y) &\to [X,Y] \end{aligned}$$

dönüşümü

$i-)$ $2-$lineerdir, yani her $a,b \in \mathbb{R}$, $X,Y,Z \in \chi(\tilde{M})$ için

$$[aX+bY,Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \;, \quad [X,aY+bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$$

$ii-)$ Anti-simetriktir yani her $X,Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

$iii-)$ Her $X,Y,Z \in \chi(\tilde{M})$ için

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ ye $\tilde{M}-$üzerinde bir Lie operatörü denir (Boothby, 1986).

Örnek

E^n üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(E^n)$ olmak üzere $X,Y \in \chi(E^n)$ için

$$\begin{aligned} [,]: \chi(E^n) \times \chi(E^n) &\to \chi(E^n) \\ (X,Y) &\to [X,Y] \end{aligned}$$

dönüşümü her $f \in C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[X,Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanıyor. $[,]$, $\chi(E^n)$ üzerinde bir Lie operatörüdür.

2.1.15. Teorem $\tilde{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda her $X,Y \in \chi(\tilde{M})$ ve $f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

$$[fX,gY] = (fg)[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X \tag{2.2}$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

2.1.16. Tanım m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar sırasıyla $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ olsunlar. p noktasında diferensiyellenebilir bir fonksiyon $f:\tilde{M}\to\tilde{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_*: T_{\tilde{M}}(p) &\to T_{\tilde{N}}(f(p)) \\ V_p &\to f_*\big|_p(V_p) = (\overrightarrow{V_p}[f_1]\big|_{f(p)},\ldots,\overrightarrow{V_p}[f_n]\big|_{f(p)}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f_* dönüşümüne f ' nin türev dönüşümü denir. Eğer $g\in C(\tilde{M},\mathbb{R})$, $f(p)$ nin komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$(f_*(V_p))g = V_p(gof)$$

şeklinde verilir (Yano ve Kon, 1984).

2.1.17. Teorem $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f:\tilde{M}\to\tilde{N}$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda f_* türev dönüşümü lineerdir ve $\tilde{M}$ de seçilen eğriden bağımsızdır (Yano ve Kon, 1984).

2.1.18. Tanım $\tilde{M}$ bir diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki $C^\infty-$vektör alanlarının cümlesi $\chi(\tilde{M})$ ve $\tilde{M}$ den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonlarının cümlesi de $C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$ olsun. Her $X,Y,Z\in\chi(\tilde{M})$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$g:\chi(\tilde{M})\times\chi(\tilde{M})\to C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$$

dönüşümü

$i-)$ Simetrik, yani

$g(X,Y)=g(Y,X)$,

$ii-)$ Pozitif tanımlılık

$X\neq 0$ için $g(X,X)\geq 0$, ve $g(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$,

$iii-)$ Bilineer,

$g(aX+bY,Z)=ag(X,Z)+bg(Y,Z)$

şartlarını sağlıyorsa g ye $\tilde{M}$ üzerinde Riemann metriği veya $(2,0)-$mertebeli metrik tensör ve $(\tilde{M},g)$ ikilisine de Riemann manifoldu denir (O' Neill, 1983).

2.1.19. Tanım $\tilde{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold ve $\tilde{M}$ üzerindeki $C^{\infty}-$vektör alanları cümlesi $\chi(\tilde{M})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}:\chi(\tilde{M})\times\chi(\tilde{M})&\to\chi(\tilde{M})\\ (X,Y)&\to\tilde{\nabla}(X,Y)=\tilde{\nabla}_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü her $X,Y,Z\in\chi(\tilde{M})$ ve $f,g\in C^{\infty}(\tilde{M},\mathbb{R})$ için

$i-)$ $\tilde{\nabla}_Y(X+Z)=\tilde{\nabla}_Y X+\tilde{\nabla}_Y Z$

$ii-)$ $\tilde{\nabla}_{fY+gX}Z=f\tilde{\nabla}_Y Z+g\tilde{\nabla}_X Z$

$iii-)$ $\tilde{\nabla}_Y(fX)=f\tilde{\nabla}_Y X+Y(f)X$

özelliklerini sağlıyorsa $\tilde{\nabla}$ ya $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve $\tilde{\nabla}_Y$ e de Y göre kovaryant türev operatörü denir (Yano ve Kon, 1979).

2.1.20. Tanım $\tilde{M}$, $n-$boyutlu bir manifold ve $\tilde{M}$ üzerindeki konneksiyon $\tilde{\nabla}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}T:\chi(\tilde{M})\times\chi(\tilde{M})&\to\chi(\tilde{M})\\ (X,Y)&\to \mathrm{T}(X,Y)=\tilde{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}_Y X-[X,Y]\end{aligned}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun torsiyon tensörü denir. Kolayca görülebilir ki torsiyon tensörü anti-simetriktir.

2.1.21. Tanım $(\tilde{M},g)$ bir Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$ da $\tilde{M}$ üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyon olsun. O zaman her $X,Y,Z\in\chi(\tilde{M})$ olmak üzere $\tilde{\nabla}$ dönüşümü

$i-)$ $\tilde{\nabla}_Y X-\tilde{\nabla}_X Y=[Y,X]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)

$ii-)$ $Yg(X,Z)=g(\tilde{\nabla}_Y X,Z)+g(X,\tilde{\nabla}_Y Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği) özellikleri sağlıyorsa, $\tilde{\nabla}$ ya $\tilde{M}$ üzerinde Riemann konneksiyonu (Sıfır torsiyonlu konneksiyon) veya Levi-Civita konneksiyonu denir (Yano ve Kon, 1979).

$n-$boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve $\tilde{\nabla}$ da $\tilde{M}$ üzerinde tanımlanan Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere her $X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned} 2g(\tilde{\nabla}_Y X, Z) &= Yg(X, Z) + Xg(Z, Y) - Zg(Y, X) \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) + g(Z, [Y, X]) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ile tanınmlanan ifadeye Kozsul formülü denir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.1.22. Tanım $(\tilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu $Y \in \chi(\tilde{M})$ için L_Y , keyfi $(r,s)-$tipinde tensör alanını yine $(r,s)-$tipinde tensör alanına götürür ve Y vektör alanına göre Lie türev operetörü olarak adlandırılır. $Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$L_Y X = [Y, X] \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $f \in C(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için $L_Y f = Y(f)$ dir. Her $Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ için $g-$Riemann metrik tensörün $Y-$vektör alanına göre Lie- türevi de

$$\begin{aligned} (L_Y g)(X, Z) &= L_Y g(X, Z) - g(L_Y X, Z) - g(X, L_Y Z) \\ &= Y(g(X, Z)) - g([Y, X], Z) - g(X, [Y, Z]) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) - g(\nabla_Y X, Z) \\ &\quad + g(\nabla_X Y, Z) - g(X, \nabla_Y Z) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $L_Y g = 0$ ise X vektör alanına Killing vektör alanı denir (Chen, 1973).

2.2. Altmanifoldlar

Bu kısımda, yüzeyler teorisinin genelleştirilmişi olarak bir Riemann manifoldun altmanifoldu tanımlanmakta ve temel özellikleri incelenmektedir.

2.2.1. Tanım m ve n boyutlu Riemann manifold sırasıyla M ve $\tilde{M}$ olsunlar.

$$f : M \to \tilde{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşümü için, $boy(f_*(T_M(p))) = q \leq \min\{boyM, boy\tilde{M}\}$ ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı q olup, $rank_p(f) = q$ ile gösterilir.

Eğer $rank(f) = boy(M)$ ise f ye immersiyon (daldırma) adı verilir. Bu halde $f(M)$ ye de $\tilde{M}$ nin immersed (gömülmüş) altmanifoldu adı verilir.

Eğer f immersiyonu bire-bir ise f ye imbeding (gömme), $f(M)$ ye de $\tilde{M}$ nin gömülen altmanifoldu ya da sadece altmanifold adı verilir (Chen, 1973).

2.2.2. Tanım m ve n boyutlu Riemann manifoldları sırasıyla (M, g) ve $(\tilde{M}, \tilde{g})$ olsunlar. $f : M \to \tilde{M}$ bir immersiyon olmak üzere her $Y, X \in T_M(p)$ için

$$\tilde{g}(f_{*_p}Y, f_{*_p}X) = g(Y, X) \tag{2.5}$$

ise f ye izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) adı verilir (Chen, 1973).

2.2.3. Tanım $\tilde{M}$, bir $m-$boyutlu manifold ve $\tilde{M}$ nin bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_{\tilde{M}}(p)$ olsun. $\tilde{M}$ üzerinde bir $r-$boyutlu D distribüsyon, $\tilde{M}$ nin her bir p noktasını $r-$boyutlu altuzayına götüren dönüşümdür. Yani,

$$\begin{aligned} D : \tilde{M} &\to T_{\tilde{M}}(p) \\ p &\to D_p \subset T_{\tilde{M}}(p) \end{aligned}$$

ile tanımlı D dönüşümüne bir distribüsyon adı verilir. Her $Y \in \chi(\tilde{M})$ için $Y_p \in D_p$ ise Y vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için D ye ait bir r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör var ise D ye diferensiyellenebilir distribüsyon denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2.4. Tanım $\tilde{M}$ bir $C^\infty-$manifold ve D, M üzerinde $q-$boyutlu bir $C^\infty-$distribüsyon ve M, $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer her $p \in M$ için, $T_M(p)$ ile D_p aynı ise M ye D nin integral manifoldu denir. Bu durumda

$$f : M \to \tilde{M}$$

bir imbedding (gömme) olmak üzere her $p \in M$ için

$$f_*(T_M(p)) = D_p$$

dir. Eğer D nin M yi içne alan başka bir integral manifoldu yoksa M ye D nin bir maksimal integral manifoldu denir.

$\tilde{M}$ bir diferensiyellenebilir manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Eğer her $p \in M$ için D distribüsyonunun p noktasını içine alan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonuna integrallenebilirdir denir.

$\tilde{M}$ bir manifold $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer $X, Y \in D$ için $\tilde{\nabla}_Y X \in D$ için D distribüsyonuna paraleldir denir (Yano ve Kon, 1984).

$n-$boyutlu $\tilde{M}$ Riemann manifoldu üzerinde bir distribüsyon D olsun. $X,Y \in D$ için $[Y, X] \in D$ oluyorsa D distribüsyonuna involutive distribüsyon adı verilir. Ayrıca M üzerinde bir distribüsyonun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart D distribüsyonunun involute olmasıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2.5. Tanım $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\tilde{M}$ nin bir altmanifoldu da M olsun. Her $p \in M$ için

$$T^{\perp}M = \{V_p \in T_{\tilde{M}}(p) : \tilde{g}(U_p, V_p) = 0, \forall U_p \in T_M(p)\}$$

tanımlanan altuzayına $\tilde{M}$ nin normal uzayı denir. V_p vektörüne M nin normal vektörü ve V_p nin birim vektör olması halinde bu vektöre M nin birim normal vektörüadı verilir. M nin oluşturduğu bütün normal vektörlerini içeren $T^{\perp}M$ uzayına da M nin normal demeti adı verilir.

2.2.6. Not $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu M olmak üzere TM, M altmanifoldunun tanjant demetini ve $T^{\perp}M$ de M altmanifoldunun bütün normal vektörlerin vektör demetini göstersin. Bu durumda, $\tilde{M}$ manifoldunun tanjant demetini

$$T\tilde{M} = TM \oplus T^{\perp}M$$

şeklinde yazabiliriz.

2.2.7. Tanım $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve $\tilde{M}$ üzerindeki Riemann konneksiyonlar olmak üzere her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\sigma : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$
$$(X,Y) \to \sigma(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

ile tanımlı σ simetrik bilineer forma M nin ikinci temel formu denir. Eğer $\sigma = 0$ ise M ye total geodezik altmanifold adı verilir.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X,Y) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe de Gauss formülü denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $\sigma(X,Y)$, $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir. M altmanifoldunun ikinci temel formu σ nun kovaryant türevi $\nabla\sigma$ da her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \sigma)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \sigma(Y,Z) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) \tag{2.7}$$

şeklinde verilir. Burada σ nun kovaryant türevi olan $\nabla\sigma$ ya da M nin üçüncü temel formu denir. Ayrıca $\nabla_X \sigma = 0$ ise ikinci temel forma paraleldir denir (Chen, 1973).

Boyutu n olan bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M üzerindeki bir $p \in M$ için $T_M(p)$ nin lokal ortanormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere M nin ikinci temel formu σ nun normu

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(\sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j)) \tag{2.8}$$

ile tanımlanır.

2.2.8. Tanım Boyutu n olan bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M nin ikinci temel formu σ olmak üzere M üzerindeki bir $p \in M$ için $T_M(p)$ nin lokal ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun.

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma(e_i, e_i) \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanan vektöre M nin ortalama eğrilik vektörü adı verilir. Eğer $H = 0$ ise minimal altmanifold denir (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.9. Tanım Boyutu n olan bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M nin ikinci temel formu σ ve ortalama eğrilik vektörü H olmak üzere her $Y, X \in \chi(M)$ için

$$\sigma(Y, X) = g(Y, X)H \tag{2.10}$$

ise M ye $\tilde{M}$ nin total umbilik altmanifoldu denir. Eğer

$$g\left(\sigma(Y, X), H\right) = \lambda g(Y, X), \qquad \lambda \in C(M, R) \tag{2.11}$$

şartı sağlanıyorsa M ye $\tilde{M}$ nin pseudo-umbilik altmanifoldu denir. Kolayca görülebilir ki her total umbilik altmanifold pseudo-umbilik altmanifolddur. Fakat tersi doğru değildir (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.10. Tanım $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M nin normal demetindeki konneksiyon $\nabla^{\perp}$ olmak üzere her $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\begin{aligned} A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (V, X) &\to A(V, X) = A_V X = \nabla^{\perp}_X V - \tilde{\nabla}_X V \end{aligned}$$

ile tanımlanan bilineer dönüşümüne M nin şekil operatörü denir (Chen, 1973).

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{2.12}$$

ifadesine de Weingarten formülü denir. M nin bu durumda şekil operatörü A_V nin kovaryant türevi de

$$(\nabla_X A)_V Y = \nabla_X A_V Y - A_{\nabla_X^\perp V} Y - A_V \nabla_X Y \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır.

Her $Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için $g(Y,V)=0$ ifadesinin $X \in \chi(M)$ e göre kovaryant türevi alınırsa

$$Xg(Y,V) = g(\tilde{\nabla}_X Y, V) + g(Y, \tilde{\nabla}_X V) = 0 \tag{2.14}$$

olur. Burada Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, V) = g(\sigma(X,Y),V) - g(Y, A_V X) + g(Y, \nabla_X^\perp V) = 0$$

dir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g(A_V Y, X) = g(\sigma(X,Y),V) \tag{2.15}$$

olduğu görülür. Bu son eşitlik M nin ikinci temel formu σ ile A_V şekil oparatörü arasındaki bağıntıyı verir (Chen, 1973).

3. PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda hemen hemen parakontak manifoldlar tanımlanarak, hemen hemen Lorentzian parakontak manifoldların bazı özellikleri gösterilmiştir. İkinci kısımda ise Lorentzian parakosimplektik manifoldun altmanifoldu üzerine indirgenen tensörler ile ilgili bağıntı ve sonuçlara yer verilmiştir.

3.1. Lorentzian Hemen Hemen Parakontak Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen parakontak manifoldlar tanıtılarak en temel özellikleri incelenecektir ve hemen hemen Lorentzian parakontak manifoldların bazı tanım ve teoremleri verilecektir.

3.1.1. Tanım $\tilde{M}$ bir $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer $\tilde{M}$ üzerinde φ, (1,1) tipinde bir tensör alanı , ξ bir vektör alanı ve η da bir $1-$form olmak üzere

$$\eta(\xi) = -1 \tag{3.1}$$

$$\varphi^2 = I + \eta \otimes \xi \tag{3.2}$$

şartlarını sağlayan bir (φ, ξ, η) üçlüsüne hemen hemen parakontak yapı, parakontak yapıya sahip manifolda da $\tilde{M}$ hemen hemen parakontak manifold denir (Matsumuto, 1989).

3.1.2. Önerme $\tilde{M}$ bir (φ, ξ, η) hemen hemen parakontak yapısına sahip $n-$boyutlu hemen hemen parakontak manifold olsun. Bu durumda

$$\varphi\xi = 0 \tag{3.3}$$

$$\eta \circ \varphi = 0 \tag{3.4}$$

$$rank(\varphi) = n-1 \tag{3.5}$$

dir (Matsumuto, 1989).

İspat Eş. 3.1 ve Eş. 3.2’ den

$$\varphi^2\xi = \xi + \eta(\xi)\xi = \xi - \xi = 0 \tag{3.6}$$

olur. Böylece ya $\varphi\xi = 0$ veya $\varphi\xi$, φ nin 0 karakteristik değerine karşılık gelen aşikar olmayan karakteristik vektördür. Eş. 3.2 ve Eş 3.6' dan

$$0 = \varphi^2\varphi\xi = \varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

yani

$$\varphi\xi = -\eta(\varphi\xi)\xi \tag{3.7}$$

elde edilir. Eğer $\varphi\xi$, φ nin 0 karakteristik değerine karşılık gelen aşikar olmayan karakteristik vektör ise

$$\eta(\varphi\xi) \neq 0$$

dır. Eş 3.7' nin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$0 = \varphi^2\xi = -\eta(\varphi\xi)\varphi\xi = (\eta(\varphi\xi))^2\xi \neq 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\varphi\xi = 0$ olmak zorundadır. $\varphi\xi = 0$ olduğu için Eş. 3.2' den herhangi bir $X \in \chi(\tilde{M})$ vektör alanı için

$$\eta(\varphi X)\xi = -\varphi^2\varphi X + \varphi X = -\varphi(\varphi^2 X) + \varphi X = -\varphi(X + \eta(X)\xi) + \varphi X = -\eta(X)\varphi\xi = 0$$

dir. Buradan,

$$\eta(\varphi X)\xi = 0 \tag{3.8}$$

elde edilir. Eş. 3.8' den, $\eta \circ \varphi = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\tilde{M}$ üzerinde $\varphi\xi = 0$ ve $\xi \neq 0$ olduğundan $rank(\varphi) < n$ dir. Eğer bir $\xi' = 0$ şartını sağlayan bir diğer vektör alanı ise Eş. 3.2 kullanılırsa

$$0 = \xi' + \eta(\xi')\xi$$

dir. Böylece $\xi' = -\eta(\xi')\xi$ olarak yazılır. Yani ξ', ξ doğrultusundadır. Dolayısıyla $rank(\varphi) = n - 1$ olur.

3.1.3. Lemma $\tilde{M}$, bir diferensiyellenebilir manifold ξ ve η da $\eta(\xi)=-1$ şartını sağlayan sırasıyla bir kontravaryant ve bir kovaryant vektör alanı olsun. Eğer $\tilde{M}$ üzerinde ξ vektör alanını timelike yapacak bir Lorentz metrik varsa bu durumda

$$\eta(X)=h(X,\xi) \tag{3.9}$$

olacak şekilde bir h Lorentz metriği vardır (Matsumuto, 1989).

İspat Bir $\tilde{M}$ bir diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $\eta(\xi)=-1$ olacak şekilde ξ vektör alanını ve η, $1-$formunu alalım. f nin $f(\xi,\xi)=-1$ şartını sağlayan Lorentz metriği olduğunu düşünelim. Bu metriği kullanarak herhangi $X,Y\in\chi(\tilde{M})$ vektör alanları için

$$h(Y,X)=f(Y+\eta(Y)\xi,X+\eta(X)\xi)-\eta(X)\eta(Y) \tag{3.10}$$

şeklinde yeni bir h metriği tanımlayalım. Bu durumda eğer X ve Y vektör alanları f metriğine göre ξ ye dik ise X ve Y vektör alanları f metriğine göre spacelike vektörlerdir. Böylece $h(Y,X)=f(Y,X)$ olur. Bu da Eş. 3.10 ile tanımlanan h metriğinin Eş. 3.9 şartını sağlayan bir Lorentz metrik olduğunu gösterir.

3.1.4. Tanım $\tilde{M}$, bir (φ,ξ,η) hemen hemen parakontak yapısı ile birlikte $n-$boyutlu bir hemen hemen parakontak manifold olsun. Eğer $\tilde{M}$ her $X,Y\in\chi(\tilde{M})$ vektör alanları için

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir g Lorentz metriğine sahipse $\tilde{M}$ ye bir Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifold ve (φ,ξ,η,g) dörtlüsüne de $\tilde{M}$ üzerinde bir Lorentzian hemen hemen parakontak metrik yapı denir.

Eğer Eş. 3.11'de Y yerine ξ alınırsa

$$0=g(\varphi X,\varphi\xi)=g(x,\xi)+\eta(X)\eta(\xi)$$

yazılır. Buradan Eş. 3.1 ve Eş. 3.3 göz önüne alınarak

$$g(X,\xi)=\eta(X) \tag{3.12}$$

elde edilir.

Bilindiği gibi bir g Riemann metriği $(+,+,+,...,+)$ şeklinde pozitif işaretlere sahiptir. Semi-Riemann metriği $(-,-,-,...,+,+,+,...,+)$ şeklinde keyfi işaretlere sahiptir. Lorentzian metriği ise metrik işaretinin $(-,+,+,+,...,+)$ olduğu özel bir durumdur. Üzerinde g Lorentzian metriği ile tanımlanmış diferensiyellenebilir manifolda Lorentzian manifoldu denir.

3.1.5. Sonuç $n-$boyutlu $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldu verilmiş olsun. Her $X,Y\in\chi(\tilde{M})$ için $\varphi:\chi(\tilde{M})\to\chi(\tilde{M})$ olmak üzere

$$g(\varphi X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{3.13}$$

dir. Bu eşitlik bize φ nin g ye göre *simetrik* bir tensör alanı olduğunu gösterir.

Gerçekten Eş. 3.11' de Y yerine φY yazılırsa Eş. 3.4' den

$$g(\varphi X,\varphi^2 Y)=g(X,\varphi Y) \tag{3.14}$$

elde edilir. Eş. 3.14' de Eş. 3.2 kullanılırsa,

$$g(\varphi X,Y+\eta(Y)\xi)=g(X,\varphi Y) \tag{3.15}$$

olur. Eş. 3.15' de gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$g(\varphi X,Y)+\eta(Y)g(\varphi X,\xi)=g(X,\varphi Y) \tag{3.16}$$

yazılır. Böylece, Eş. 3.16' da Eş. 3.4 uygulanırsa $\forall X,Y\in\chi(\tilde{M})$ için,

$$g\left(\varphi X,Y\right)=g\left(X,\varphi Y\right)$$

olduğu görülür.

3.1.6. Tanım $n-$boyutlu $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldu verilmiş olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$$

şeklinde tanımlanan Φ, $2-$formuna (φ,ξ,η,g) Lorentzian hemen hemen parakontak metrik yapısının temel $2-$formu denir (Matsumuto, 1989).

3.2. Lorentzian Parakosimplektik Manifoldlar

Bu kısımda Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldlar yardımıyla Lorentzian parakosimplektik manifoldu tanımlanarak bir Lorentzian parakosimplektik manifoldun altmanifoldu üzerine indirgenen tensörler ile ilgili bağıntı ve sonuçlara yer verilmiştir.

3.2.1. Tanım $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, $n-$boyutlu Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifold olsun. Eğer $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldu üzerinde $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu göstermek üzere her $X,Y\in\chi(\tilde{M})$ için

$$(\tilde{\nabla}_X\varphi)Y=0 \tag{3.17}$$

şartı sağlanıyorsa $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ ye Lorentzian parakosimplektik manifoldu adı verilir. Bundan sonra Lorentzian parakosimplektik manifold ifadesini kısaca LP-kosimplektik manifold olarak göstereceğiz. Burada $\tilde{\nabla}$ kovaryant türev operatörü ve $\chi(\tilde{M})$ de vektör alanları cümlesini gösteriyor. Böylece Eş. 3.17' de $Y=\xi$ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_X\xi=0 \tag{3.18}$$

durumuna dönüşür (Uddin, 2010).

3.2.2. Tanım $\tilde{M}$, g metriği üzerinde LP-kosimplektik manifoldunun altmanifoldu M olsun. M nin normal demeti $T^{\perp}M$ deki konneksiyonu $\nabla^{\perp}$ ve tanjant demeti TM deki konneksiyonu ∇ olmak üzere Eş. 2.6 ve Eş. 2.12 den $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve $V\in\chi^{\perp}(M)$ için ikinci temel form σ ve şekil operatörü A_V ye ilişkin Eş. 2.15' i göstermiştik. Eğer $X,Y\in\chi(M)$ için

$$\sigma(X,Y)=0 \tag{3.19}$$

ise M total geodezik altmanifolddur.

3.2.3. Tanım $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen parakontak metrik manifold ve bunun bir altmanifoldu M olmak üzere $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ üzerinde g Riemann metriği M üzerine indirgenmiş olur. Böylece (M,g) de bir Riemann manifoldu olur. Her $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\varphi X = PX + FX \tag{3.20}$$

ve

$$\varphi V = BV + CV \tag{3.21}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada PX ve FX sırasıyla φX in teğet ve normal bileşenlerini, BV ve CV de sırasıyla φV nin teğet ve normal bileşenlerini göstermektedir. Böylece altmanifold üzerine indirgenen tensörler

$$P:\chi(M)\to\chi(M), \qquad F:\chi(M)\to\chi^{\perp}(M)$$

ve

$$B:\chi^{\perp}(M)\to\chi(M) \qquad C:\chi^{\perp}(M)\to\chi^{\perp}(M)$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşümlerdir.

Burada $F=0$ ise M ye invaryant, $P=0$ ise M ye $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin anti-invaryant altmanifoldu denir.

3.2.4. Sonuç $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun altmanifoldu M olsun. Bu durumda her $X \in \chi(M)$ için altmanifolda indirgenen bu tensörler arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi verilir.

$$P^2X + BFX = X + \eta(X)\xi \tag{3.22}$$

$$FPX + CFX = 0 \tag{3.23}$$

İspat Her $X \in \chi(M)$ için Eş. 3.20' e φ uygulanırsa

$$\varphi^2X = \varphi(\varphi X) = \varphi(PX + FX)$$

yazılır. Burada Eş. 3.2 kullanılırsa

$$X+\eta(X)\xi=\varphi(PX)+\varphi(FX)=PPX+FPX+BFX+CFX$$

olduğu görülür. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X+\eta(X)\xi=P^2X+FPX+BFX+CFX \tag{3.24}$$

yazılır. Eş. 3.24' ün teğet bileşenlerinden

$$P^2X+BFX=X+\eta(X)\xi$$

elde edilir.

Şimdi Eş. 3.24' ün normal bileşenlerinden

$$FPX+CFX=0$$

yazılır.

3.2.5. Sonuç $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun altmanifoldu M olsun. Bu durumda her $V\in\chi^{\perp}(M)$ için altmanifolda indirgenen bu tensörler arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi verilir.

$$C^2V=V-FBV \tag{3.25}$$

$$PBV+BCV=0 \tag{3.26}$$

İspat Her $V\in\chi^{\perp}(M)$ için Eş. 3.2' den,

$$\varphi^2V=V+\eta(V)\xi$$

yazılır. Burada Eş. 3.21 ve $\eta(V)=0$ olduğu kullanılırsa

$$V=PBV+FBV+BCV+C^2V \tag{3.27}$$

elde edilir böylece Eş. 3.27' nin teğet bileşenlerinden

$$PBV+BCV=0$$

elde edilir.

Şimdi Eş. 3.27' nin normal bileşenlerinden

$$C^2V = V - FBV$$

yazılır.

3.2.6. Sonuç $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun altmanifoldu M olsun. Bu durumda her $X,Y \in \chi(M)$ ve $V,W \in \chi^{\perp}(M)$ için altmanifolda indirgenen tensörler arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi verilir.

$$g(PX,Y) = g(X,PY) \tag{3.28}$$

$$g(V,CW) = g(CV,W) \tag{3.29}$$

$$g(FX,V) = g(X,BV) \tag{3.30}$$

İspat Her $X,Y \in \chi(M)$ için, Eş. 3.13' te Eş. 3.20 kullanılırsa

$$g(PX + FX,Y) = g(X,PY + FY)$$

elde edilir. Buradan

$$g(PX,Y) = g(X,PY)$$

dir.

Aynı şekilde $V,W \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 3.13' ten

$$g(\varphi V,W) = g(V,\varphi W)$$

yazılır. Buradan Eş. 3.21 kullanılırsa

$$g(BV + CV,W) = g(V,BW + CW)$$

elde edilir. Buradan

$$g(V,CW) = g(CV,W)$$

dir.

Bunlar da bize P ve C nin simetrik tensör alanları olduğunu gösterir.

Aynı biçimde her $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 3.13' ten

$$g(\varphi X, V) = g(X, \varphi V)$$

yazılır. Böylece Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 kullanılırsa

$$g(PX + FX, V) = g(X, BV + CV)$$

denkleminden gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(FX, V) = g(X, BV)$$

eşitliği elde edilir. Bu da bize F ve B arasındaki ilişkiyi verir.

Ayrıca $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, hemen hemen parakontak metrik manifoldu üzerinde $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu göstermek üzere her $X, Y \in \chi(\tilde{M})$ için φ tensörünün kovaryant türevi

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = \tilde{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \tilde{\nabla}_X Y \tag{3.31}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada altmanifolda indirgenen tensörlerin kovaryant türevleri de her $X, Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$(\nabla_X P)Y = \nabla_X PY - P\nabla_X Y \tag{3.32}$$

$$(\nabla_X F)Y = \nabla_X^{\perp} FY - F\nabla_X Y \tag{3.33}$$

$$(\nabla_X B)V = \nabla_X BV - B\nabla_X^{\perp} V \tag{3.34}$$

$$(\nabla_X C)V = \nabla_X^{\perp} CV - C\nabla_X^{\perp} V \tag{3.35}$$

şeklinde tanımlanır (Pandey ve Gupta, 2008).

3.2.7. Sonuç $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Her $X,Y\in\chi(M)$ için $(\tilde{\nabla}_X\varphi)Y$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\nabla_X P)Y = A_{FY}X + B\sigma(X,Y) \tag{3.36}$$

$$(\nabla_X F)Y = C\sigma(X,Y) - \sigma(X,PY) \tag{3.37}$$

dir.

İspat Her $X,Y\in\chi(M)$ için Eş. 3.17' de, Eş. 2.6, Eş. 3.21 ve Eş. 3.31 denklemleri uygulanırsa

$$(\tilde{\nabla}_X\varphi)Y = \tilde{\nabla}_X PY + \tilde{\nabla}_X FY - \varphi(\nabla_X Y + \sigma(X,Y))$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde Eş. 2.6 ve Eş. 2.12 tekrar kullanılırsa

$$(\tilde{\nabla}_X\varphi)Y = \nabla_X PY + \sigma(X,PY) - A_{FY}X + \nabla_X^{\perp}FY - \varphi\nabla_X Y - \varphi\sigma(X,Y) \tag{3.38}$$

dir. Buradan da Eş. 3.38'de Eş. 3.20 ve Eş. 3.21' den

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X\varphi)Y &= \nabla_X PY + \sigma(X,PY) - A_{FY}X + \nabla_X^{\perp}FY \\ &\quad - P\nabla_X Y - F\nabla_X Y - B\sigma(X,Y) - C\sigma(X,Y) \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.39}$$

olduğu görülür. Eş. 3.39'un teğet bileşenlerinden

$$\nabla_X PY - P\nabla_X Y - A_{FY}X - B\sigma(X,Y) = 0$$

yazılır. Buradan Eş. 3.32 kullanılırsa

$$(\nabla_X P)Y = A_{FY}X + B\sigma(X,Y)$$

elde edilir. Şimdi Eş. 3.39'un normal bileşenlerinden

$$\nabla_X^{\perp}FY - F\nabla_X Y + \sigma(X,PY) - C\sigma(X,Y) = 0$$

dır. Böylece Eş. 3.33 kullanılırsa

$$(\nabla_X F)Y = C\sigma(X,Y) - \sigma(X,PY)$$

eşitliği elde edilir.

3.2.8. Sonuç Her $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için $(\tilde{\nabla}_X \varphi)V$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\nabla_X B)V = A_{CV}X - PA_V X \tag{3.40}$$

$$(\nabla_X C)V = -\sigma(BV, X) - FA_V X \tag{3.41}$$

ifadelerine sahip oluruz.

İspat Her $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 3.17' de Eş. 2.12, Eş. 3.21 ve Eş. 3.31 uygulanırsa

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)V = \tilde{\nabla}_X BV + \tilde{\nabla}_X CV - \varphi(-A_V X + \nabla_X^{\perp} V)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde Eş. 2.6 ve Eş. 2.12 tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \varphi)V &= \nabla_X BV + \sigma(X, BV) - A_{CV}X + \nabla_X^{\perp} CV \\ &\quad + \varphi A_V X - \varphi \nabla_X^{\perp} V\end{aligned} \tag{3.42}$$

olduğu görülür. Buradan da Eş. 3.42' de Eş. 3.20 ve Eş. 3.21' den

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \varphi)V &= \nabla_X BV + \sigma(X, BV) - A_{CV}X + \nabla_X^{\perp} CV \\ &\quad + PA_V X + FA_V X - B\nabla_X^{\perp} V - C\nabla_X^{\perp} V \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. Eş. 3.43' ün teğet bileşenleri

$$\nabla_X BV - B\nabla_X^{\perp} V - A_{CV}X + PA_V X = 0$$

yazılır. Buradan Eş. 3.34 kullanılırsa

$$(\nabla_X B)V = A_{CV}X - PA_V X$$

olduğu görülür. Şimdi Eş. 3.43' ün normal bileşenlerinden

$$\nabla_X^{\perp} CV - C\nabla_X^{\perp} V + \sigma(X, BV) + FA_V X = 0$$

dir. Böylece Eş. 3.35 kullanılırsa

$$(\nabla_X C)V = -\sigma(BV, X) - FA_V X$$

elde edilir.

3.2.9. Sonuç $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, LP-kosimplektik manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda her $X \in \chi(M)$, $\xi \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\nabla_X \xi = 0 \tag{3.44}$$

$$\sigma(X, \xi) = 0 \tag{3.45}$$

$$A_V \xi = 0 \tag{3.46}$$

dir.

İspat Her $X \in \chi(M)$, $\xi \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 2.6' da Y yerine ξ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + \sigma(X, \xi) = 0$$

olur. Yukarıdaki denklemin teğet ve normal parçaları

$$\nabla_X \xi = 0, \qquad \sigma(X, \xi) = 0$$

dir. Diğer taraftan Eş. 2.15' de Y yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned} g(A_V X, \xi) &= g(\sigma(X, \xi), V) \\ g(A_V \xi, X) &= 0 \\ A_V \xi &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.10. Tanım $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldunun bir altmanifoldu M ve $p \in M$ için ξ_p ile lineer bağımlı olmayan sıfırdan farklı bir vektör

X olsun. $T_M(p)$ ile φX arasındaki açıya slant açısı denir. Bu açıyı $\theta(p)$ ile gösterelim. $\forall p \in M$ noktası ve her $X \in T_M(p) - \{\xi_P\}$ için $\theta(p)$ slant açısı sabitse M ye $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin kontak slant altmanifoldu denir. Ayrıca $\theta(p) \in (0, \frac{\pi}{2})$ dir.

Buna göre bir Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldunun

$i-$) Anti-invaryant altmanifoldları özel olarak $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant açılı kontak slant altmanifoldlardır.

$ii-$) İnvaryant altmanifoldları ise $\theta = 0$ slant açılı kontak slant altmanifoldlardır.

Bir slant altmanifold ne invaryant ne de anti-invaryant altmanifold ise proper kontak slant altmanifold olarak adlandırılır.

3.2.11. Teorem $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, LP-kosimplektik manifoldunun, ξ ye teğet altmanifoldu M olsun. O zaman M nin slant altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$P^2 = \lambda(I + \eta \otimes \xi) \tag{3.47}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1]$ sabiti vardır. M nin slant açısı θ ise $\lambda = \cos^2\theta$ dir (Cabrerizo ve ark., 2000a).

İspat M slant altmanifold olsun. Bu durumda her $X \in \chi(M)$ için PX ile φX arasındaki açı θ ise

$$\cos\theta = \frac{\|PX\|}{\|\varphi X\|} \tag{3.48}$$

dir. Ayrıca

$$\cos\theta = \frac{g(PX, \varphi X)}{\|\varphi X\|\|PX\|} = \frac{g(\varphi PX, X)}{\|\varphi X\|\|PX\|} \tag{3.49}$$

yazılabilir. Buradan Eş. 3.20' de her tarafı P ile çarparsak $\varphi PX = P^2X + FPX$ elde edilir. Bu denklemi Eş. 3.49' da yerine yazarsak

$$\cos\theta = \frac{g(P^2X, X)}{\|\varphi X\|\|PX\|}$$
$$\cos\theta\|\varphi X\|\|PX\| = g(P^2X, X)$$

olur. Burada $\|PX\| = \cos\theta\|\varphi X\|$ kullanılırsa

$$\cos^2\theta\|\varphi X\|^2 = g(P^2X, X)$$
$$\cos^2\theta g(\varphi X, \varphi X) = g(P^2X, X)$$
$$\cos^2\theta g(\varphi^2X, X) = g(P^2X, X)$$

dir. Buradan da Eş. 3.2' den

$$\cos^2\theta g(X + \eta(X)\xi, X) = g(P^2X, X)$$

yazılır. Böylece

$$P^2X = \cos^2\theta(X + \eta(X)\xi) \tag{3.50}$$

yani $P^2 = \cos^2\theta(I + \eta\otimes\xi)$ bulunur. $\cos^2\theta = \lambda$ alınırsa

$$P^2 = \lambda(I + \eta\otimes\xi)$$

elde edilir**.**

Tersine her $X \in \chi(M)$ için,

$$P^2X = \lambda(X + \eta(X)\xi)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1]$ sabiti olsun. M nin slant altmanifold olduğunu gösterelim.

$$\cos\theta = \frac{g(PX,\varphi X)}{\|PX\|\|\varphi X\|} = \frac{g(PX,PX)}{\|PX\|\|\varphi X\|} = \frac{g(P^2X,X)}{\|PX\|\|\varphi X\|}$$
$$= \frac{\lambda g(X+\eta(X)\xi,X)}{\|PX\|\|\varphi X\|}$$
$$= \frac{\lambda g(\varphi^2X,X)}{\|PX\|\|\varphi X\|}$$
$$= \frac{\lambda g(\varphi X,\varphi X)}{\|PX\|\|\varphi X\|}$$
$$= \frac{\lambda\|\varphi X\|^2}{\|PX\|\|\varphi X\|}$$

Böylece

$$\cos\theta = \lambda\frac{\|\varphi X\|}{\|PX\|} = \lambda\frac{1}{\cos\theta}$$

olur. Dolayısıyla

$$\lambda = \cos^2\theta$$

elde edilir. Bu durumda λ sabit olduğundan θ sabit M de slant altmanifold olur.

3.2.12. Sonuç $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, bir LP-kosimplektik manifoldunun θ slant açılı bir altmanifoldu M olmak üzere, her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(PX,PY) = \cos^2\theta\{g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\} \tag{3.51}$$

ve

$$g(FX,FY) = \sin^2\theta\{g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\} \tag{3.52}$$

verilir.

İspat Her $X,Y \in \chi(M)$ için Eş. 3.28' de X yerine PX alınır ve Eş. 3.47 kullanılırsa

$$g(PX,PY) = g(P^2X,Y)$$
$$= g(\cos^2\theta(X+\eta(X)\xi),Y)$$
$$= \cos^2\theta\{g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\}$$

bulunur. Böylece Eş. 3.51 ispatlanmış olur.

Şimdi Eş. 3.52’ nin ispatı için Eş. 3.11 ve Eş. 3.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\varphi X,\varphi Y) &= g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \\ g(PX+FX,PY+FY) &= g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \\ g(PX,PY)+g(FX,FY) &= g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

burada, Eş. 3.51 kullanılırsa

$$\cos^2\theta\left\{g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\right\}+g(FX,FY)=g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)$$

$$g(FX,FY)=(1-\cos^2\theta)\left\{g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\right\}$$

$$g(FX,FY)=\sin^2\theta\left\{g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\right\}$$

böylece Eş. 3.52 elde edilir.

4. LP-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldlarının geodeziklik durumlarını inceleyeceğiz.

4.1. LP-Kosimplektik Manifoldun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldlarının Geodeziklik Durumları

Bu kısımda LP-kosimplektik manifoldunun, kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerekli ve yeterli şartlar verilmiş olup $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldunda integrallenebilirlik durumları araştırılmıştır. Ardından $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldun total umbilik kontak pseudo-slant olması durumunda bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, D_θ-total geodezik, $D^\perp$-total geodezik ve mixed-total geodeziklik kavramları verilip kontak pseudo-slant çarpım kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra hemen hemen kontak metrik yapısıyla $\mathbb{R}^{11}$ de 4-boyutlu kontak pseudo-slant altmanifold örneği kurulmuştur.

4.1.1. Tanım $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldun altmanifoldu M olsun. Bu durumda

$i-)$ $TM = D^\perp \oplus D_\theta, \quad \xi \in D_\theta$

$ii-)$ $D^\perp$ distribüsyonu, anti-invaryant (total reel) distribüsyon yani,

$$\varphi D^\perp \subset (T^\perp M)$$

$iii-)$ $M-$üzerinde D_θ, $\theta-$slant açılı slant distribüsyon

şartlarını sağlayan iki ortagonal distribüsyon $D^\perp, D_\theta$ varsa M ye $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin kontak pseudo-slant altmanifoldu denir. Bu tanıma göre eğer, $\theta = 0$ ise kontak pseudo-slant altmanifold semi-invaryant altmanifoldu adını alır. Böylece kontak pseudo-slant altmanifold semi-invaryant altmanifoldların bir genellemesidir.

Diğer taraftan eğer, $boy\left(D^\perp\right) = d_1$ ve $boy\left(D_\theta\right) = d_2$ ile gösterirsek aşağıdaki koşulları elde ederiz.

$i-)$ Eğer $d_2 = 0$ ise M, bir anti-invaryant altmanifolddur.

$ii-)$ Eğer $d_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M, bir invaryant altmanifolddur.

$iii-)$ Eğer $d_1 = 0$ ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise M, bir proper-slant altmanifolddur.

$iv-)$ Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M, bir anti-invaryant altmanifolddur.

$v-)$ Eğer $d_2 d_1 \neq 0$ ve $\theta = 0$ ise M, bir semi-invaryant altmanifolddur.

$vi-)$ Eğer $d_2 d_1 \neq 0$ ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise M, bir proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

Bir LP-kosimplektik manifoldu $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun.

$$\omega_1 : \chi(M) \to \chi(D^{\perp}) \ , \qquad \omega_2 : \chi(M) \to \chi(D_\theta)$$

ortogonal projeksiyonları göstersinler. Her $X \in \chi(M)$ için

$$X = \omega_1 X + \omega_2 X + \eta(X)\xi \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer μ, $\varphi(TM)$ nin $T^{\perp}M$ deki ortogonal tümleyeni olmak üzere $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, LP-kosimplektik manifoldun bir kontak pseudo-slant altmanifoldu M nin $T^{\perp}M$ -normal uzayını, $\varphi(D^{\perp}) \perp F(D_\theta)$ olduğundan,

$$T^{\perp}M = \varphi(D^{\perp}) \oplus F(D_\theta) \oplus \mu \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

4.1.2. Teorem $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda

$i-)$ Her bir $X \in D_\theta$ için

$P^2 X = \lambda(X + \eta(X)\xi)$, burada $\lambda = \cos^2\theta$ dir.

$ii-)$ D_θ ya ortogonal her $X \in \chi(M)$ için $PX = 0$ şartları sağlanır.

İspat

$i-)$ Teorem 3.2.11' den $TM = D_\theta \oplus D^\perp$ olduğundan $D_\theta \subset TM$ dir. Ayrıca $\forall X \in D_\theta$ ise $X \in \chi(M)$ dir. Buradan da teoremin ifadesi açıktır.

$ii-)$ Tanım 4.1.1 ve teorem 3.2.11' den $TM = D_\theta \oplus D^\perp$ olduğundan $\forall X \in D_\theta$ için D_θ ya ortogonal olan $\forall X \in D^\perp$ dir. Böylece $\varphi X = FX$ yazılabilir. Buradan $PX = 0$ olduğu açıktır.

Şimdi, her $Y, Z \in D^\perp$, $U \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
g(A_{FZ}Y - A_{FY}Z, U) &= g(A_{FZ}Y, U) - g(A_{FY}Z, U) \\
&= g(\sigma(Y,U), FZ) - g(\sigma(Z,U), FY) \\
&= g(\sigma(Y,U), FZ) - g(\tilde{\nabla}_U Z, \varphi Y) \\
&= g(\sigma(Y,U), FZ) - g(\varphi\tilde{\nabla}_U Z, Y) \\
&= g(\sigma(Y,U), FZ) + g((\tilde{\nabla}_U \varphi)Z, Y) \\
&\quad - g(\tilde{\nabla}_U \varphi Z, Y) \\
&= g(\sigma(Y,U), FZ) + g(\tilde{\nabla}_U Y, \varphi Z) \\
&= g(\sigma(Y,U), FZ) + g(\tilde{\nabla}_U Y, FZ) \\
&= 2g(\sigma(Y,U), FZ) \\
&= 2g(A_{FZ}Y, U)
\end{aligned}$$

dir. Buradan da birinci terimlerin eşitliğinden

$$A_{FZ}Y = -A_{FY}Z \tag{4.3}$$

yazılır.

4.1.3. Teorem $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D^\perp$ nın integrallenebilmesi için gerek ve yeter şartlardan biri

$$A_{FD^\perp} D^\perp = 0 \tag{4.4}$$

dır.

İspat Her $Y,Z \in D^{\perp}$ için, Eş. 3.17 kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_Z \varphi Y = \varphi \tilde{\nabla}_Z Y$$

denkleminde Eş. 2.6 ve Eş. 2.12 kullanılırsa

$$-A_{FY}Z + \nabla_Z^{\perp} FY = \varphi(\nabla_Z Y + \sigma(Z,Y))$$

elde edilir. Buradan

$$-A_{FY}Z + \nabla_Z^{\perp} FY = \varphi(\nabla_Z Y) + \varphi\sigma(Z,Y) \tag{4.5}$$

yazılır. Eş. 4.5'te Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 kullanılırsa

$$-A_{FY}Z + \nabla_Z^{\perp} FY = P\nabla_Z Y + F\nabla_Z Y + B\sigma(Z,Y) + C(Z,Y) \tag{4.6}$$

olur. Eş. 4.6' nın teğet bileşenlerinden

$$-A_{FY}Z = P\nabla_Z Y + B\sigma(Z,Y) \tag{4.7}$$

yazılır. Bu denklemde Y ile Z nin yer değiştirmesiyle

$$-A_{FZ}Y = P\nabla_Y Z + B\sigma(Y,Z) \tag{4.8}$$

denklemi elde edilir. Buradan Eş. 4.8 den Eş. 4.7 çıkartılırsa

$$P\nabla_Y Z - P\nabla_Y Z = A_{FZ}Y - A_{FY}Z \tag{4.9}$$

olur. Buradan

$$P[Y,Z] = A_{FZ}Y - A_{FY}Z \tag{4.10}$$

elde edilir. Eş. 4.3 ve Eş. 4.10 dan

$$P[Y,Z] = 2A_{FZ}Y$$

sonucuna ulaşılır. Buradan her $Y,Z \in D^{\perp}$ için $P[Y,Z] = 0$ dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.1.4. Teorem $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, bir LP-kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu halde slant distribüsyon D_θ nın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri,

$$\omega_1\left\{\nabla_X PY - P\nabla_Y X - A_{FY}X - B\sigma(X,Y)\right\} = 0 \tag{4.11}$$

olmasıdır.

İspat Her $X,Y \in D_\theta$ için Eş. 3.17' ten

$$\tilde{\nabla}_X \varphi Y - \varphi\tilde{\nabla}_X Y = 0$$

yazılır. Buradan Eş. 2.6 ve Eş. 3.20' den

$$\tilde{\nabla}_X PY + \tilde{\nabla}_X FY - \varphi(\nabla_X Y + \sigma(X,Y)) = 0 \tag{4.12}$$

elde edilir. Eş. 4.12' de Eş. 2.6 ve Eş. 2.12 kullanılarak

$$\nabla_X PY + \sigma(X,PY) - A_{FY}X + \nabla_X^{\perp} FY - \varphi(\nabla_X Y) - \varphi\sigma(X,Y) = 0$$

olduğu görülür. Böylece Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 den

$$\nabla_X PY + \sigma(X,PY) - A_{FY}X + \nabla_X^{\perp} FY - P\nabla_X Y - F\nabla_X Y - B\sigma(X,Y) - C\sigma(X,Y) = 0 \tag{4.13}$$

dir. Bu durumda Eş. 4.13' ün teğet bileşenleri

$$\nabla_X PY - A_{FY}X - P\nabla_X Y - B\sigma(X,Y) = 0 \tag{4.14}$$

yazılır. Bu denkleme $P\nabla_Y X$ ekleyip çıkarırsak,

$$\nabla_X PY - A_{FY}X - P\nabla_X Y + P\nabla_Y X - P\nabla_Y X - B\sigma(X,Y) = 0$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P\nabla_X Y - P\nabla_Y X = \nabla_X PY - P\nabla_Y X - A_{FY}X - B\sigma(X,Y)$$

olur. Böylece

$$P[X,Y]=\nabla_X PY-P\nabla_Y X-A_{FY}X-B\sigma(X,Y) \qquad (4.15)$$

denklemi yazılır. Eş. 4.15' e ω_1 uygulanırsa,

$$\omega_1\{\nabla_X PY-P\nabla_Y X-A_{FY}X-B\sigma(X,Y)\}=0$$

olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.1.5. Teorem $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O halde slant distribüsyonu D_θ nın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $Z,W\in D_\theta$ için

$$\nabla^\perp_Z FW-\nabla^\perp_W FZ+\sigma(Z,PW)-\sigma(W,PZ)\in\mu\oplus FD_\theta$$

olmasıdır.

İspat Her $Z,W\in D_\theta$ ve $X\in D^\perp$ için Eş. 3.11' den

$$\begin{aligned}g([Z,W],X)&=g(\tilde{\nabla}_Z W,X)-g(\tilde{\nabla}_W Z,X)\\&=g(\varphi\tilde{\nabla}_Z W,\varphi X)-\eta(\tilde{\nabla}_Z W)\eta(X)\\&\quad-g(\varphi\tilde{\nabla}_W Z,\varphi X)+\eta(\tilde{\nabla}_W Z)\eta(X)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, Eş. 3.17' den

$$g([Z,W],X)=g(\varphi\tilde{\nabla}_Z W,\varphi X)-g(\varphi\tilde{\nabla}_W Z,\varphi X) \qquad (4.16)$$

olur. Böylece Eş. 4.16' da Eş. 3.31 kullanılırsa

$$g([Z,W],X)=g(\tilde{\nabla}_Z\varphi W,\varphi X)-g((\tilde{\nabla}_Z\varphi)W,\varphi X)-g(\tilde{\nabla}_W\varphi Z,\varphi X)+g((\tilde{\nabla}_W\varphi)Z,\varphi X)$$

bulunur. Yine Eş. 3.17' den

$$g([Z,W],X)=g(\tilde{\nabla}_Z\varphi W,\varphi X)-g(\tilde{\nabla}_W\varphi Z,\varphi X) \qquad (4.17)$$

yazılabilir. O halde Eş. 4.17' de Eş. 3.20 kullanılırsa

$$g([Z,W],X)=g(\tilde{\nabla}_Z PW,\varphi X)+g(\tilde{\nabla}_Z FW,\varphi X)-g(\tilde{\nabla}_W PZ,\varphi X)-g(\tilde{\nabla}_W FZ,\varphi X)$$

olduğu görülür. Burada Eş. 2.6, Eş. 2.12 ve Eş 3.11 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g([Z,W],X) &= g(\nabla_Z PW,\varphi X)+g(\sigma(Z,PW),\varphi X)-g(A_{FW}Z,\varphi X)+g(\nabla^{\perp}_Z FW,\varphi X) \\ &\quad - g(\nabla_W PZ,\varphi X)-g(\sigma(W,PZ),\varphi X)+g(A_{FZ}W,\varphi X)-g(\nabla^{\perp}_W FZ,\varphi X) \end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur. Burada $X \in D^{\perp}$ için $\varphi X \in \varphi(D^{\perp}) \subseteq T^{\perp}M$ olduğundan Eş. 4.18,

$$g([Z,W],X) = g(\nabla^{\perp}_Z FW - \nabla^{\perp}_W FZ - \sigma(W,PZ)+\sigma(Z,PW),\varphi X)$$

formuna indirgenir. $[Z,W] \in D_{\theta}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla^{\perp}_Z FW - \nabla^{\perp}_W FZ + \sigma(Z,PW) - \sigma(W,PZ) \in \mu \oplus F(D_{\theta})$$

olmasıdır.

4.1.6. Teorem $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun total umbilik kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur.

$i-)$ $boy(D^{\perp})=1$

$ii-)$ $H \in \mu$

$iii-)$ $M-$proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

İspat Her $X,Y \in D^{\perp}$ için Eş. 3.17 ve Eş. 3.31 kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \varphi Y = \varphi \tilde{\nabla}_X Y$$

yazılır. Burada $Y \in D^{\perp}$ olduğundan $\varphi X = FY$ eşitliği ve Eş. 2.6 kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X FY = \varphi(\nabla_X Y + \sigma(X,Y))$$

elde edilir. Buradan Eş. 2.12, Eş. 3.20 ve Eş. 3.21’ den

$$-A_{FY}X + \nabla^{\perp}_X FY = P\nabla_X Y + F\nabla_X Y + B\sigma(X,Y) + C\sigma(X,Y) \tag{4.19}$$

olduğu görülür. Burada Eş. 4.19’ un teğet bileşenleri alınırsa

$$-A_{FY}X = P\nabla_X Y + B\sigma(X,Y) \tag{4.20}$$

dir. O halde Eş. 4.20, $W \in D^{\perp}$ ile çarpılırsa

$$g(P\nabla_X Y,W) = -g(A_{FY}X + B\sigma(X,Y),W)$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$g(\nabla_X Y,PW) = -g(A_{FY}X + B\sigma(X,Y),W) \tag{4.21}$$

yazılır. M pseudo-slant altmanifold olduğundan $W \in D^{\perp}$ için $PW = 0$ dır. Böylece

$$g(A_{FY}X + B\sigma(X,Y),W) = 0 \tag{4.22}$$

dir. Bu halde Eş. 4.22'de Eş. 2.15 kullanılırsa

$$g(\sigma(X,W),FY) + g(B\sigma(X,Y),W) = 0$$

elde edilir. M total umbilik altmanifold olduğundan Eş. 2.10' dan

$$\begin{aligned}
0 &= g(g(X,W)H,FY) + g(Bg(X,Y)H,W)\\
&= g(X,W)g(H,FY) + g(g(X,Y)BH,W)\\
&= g(X,W)g(H,FY) + g(X,Y)g(BH,W)\\
&= g(X,g(H,FY)W + g(BH,W)Y
\end{aligned}$$

olur. Buradan da Eş. 3.30' dan

$$g(BH,Y)W + g(BH,W)Y = 0 \tag{4.23}$$

olduğu görülür. Burada ya $BH = 0$ ya da W ile Y lineer bağımlıdır. Eğer $BH = 0$ ise bu $H \in \mu$ demektir. Eğer W ile Y lineer bağımlı ise bu da anti invaryant distribüsyon $D^{\perp}$ nın bir boyutlu olduğunu gösterir. Dolayısıyla $boy(D^{\perp}) = 1$ dir. M pseudo-slant altmanifold olduğundan $boy(D_{\theta}) \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ dir. $d_1.d_2 \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ olduğundan $M -$proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

4.1.7. Tanım $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda,

$i-)$ Her $X,Y \in D^{\perp}$ için $\sigma(X,Y) = 0$ ise M ye $D^{\perp}$-total geodezik, *ii*−) Her $X, Y \in D_\theta$ için $\sigma(X,Y)=0$ ise M ye D_θ -total geodezik,

iii−) $X \in D_\theta$ ve $Y \in D^\perp$ için $\sigma(X,Y)=0$ ise M ye mixed-total geodezik altmanifold denir.

4.1.8. Teorem $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda, M anti-invaryant veya mixed-total geodezik altmanifolddur.

İspat Her $X \in D_\theta$, $Y \in D^\perp$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için Eş. 2.15, Eş. 2.6 ve Eş. 3.11 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_V X, Y) &= g(\sigma(X,Y),V) = g(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, V) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X Y, V) = -g(\tilde{\nabla}_X V, Y) \\ &= -g(\varphi\tilde{\nabla}_X V, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= -g(\varphi\tilde{\nabla}_X V, \varphi Y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada Eş. 3.31 kullanılırsa

$$g(A_V X, Y) = g((\tilde{\nabla}_X \varphi)V - \tilde{\nabla}_X \varphi V, \varphi Y) \tag{4.24}$$

olur. Böylece Eş. 4.24'e Eş. 3.17 uygulanırsa

$$g(A_V X, Y) = -g(\tilde{\nabla}_X \varphi V, \varphi Y)$$

yazılır. Buradan $Y \in D^\perp$ olduğundan,

$$g(A_V X, Y) = -g(\tilde{\nabla}_X \varphi V, FY) \tag{4.25}$$

elde edilir. Şimdi Eş. 4.25' te Eş. 3.21, Eş. 2.6 ve Eş. 2.12 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} g(A_V X, Y) &= -g(\tilde{\nabla}_X BV + \tilde{\nabla}_X CV, FY) \\ &= -g(\nabla_X BV + \sigma(X, BV), FY) \\ &\quad - g(-A_{CV} X + \nabla_X^\perp CV, FY) \end{aligned}$$

olur. Böylece gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(A_V X, Y) = -g(\sigma(X, BV), FY) - g(\nabla_X^\perp CV, FY) \tag{4.26}$$

olduğu görülür. O halde Eş. 4.26' da Eş. 3.35 kullanılırsa

$$g(A_V X, Y) = -g(\sigma(X, BV), FY) - g((\nabla_X C)V + C\nabla_X^{\perp} V, FY)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem Eş. 3.41' den gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} g(A_V X, Y) &= -g(\sigma(X, BV), FY) - g(-\sigma(X, BV) - FA_V X, FY) \\ &= -g(\sigma(X, BV), FY) + g(\sigma(X, BV), FY) + g(FA_V X, FY) \\ &= g(FA_V X, FY) \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Buradan

$$g(A_V X, Y) = g(BFA_V X, Y) \tag{4.27}$$

dir. O halde Eş. 4.27' ye Eş. 3.22 uygulanırsa

$$\begin{aligned} g(A_V X, Y) &= g(A_V X + \eta(A_V X)\xi - P^2 A_V X, Y) \\ &= g(A_V X, Y) + \eta(A_V X)\eta(Y) - g(P^2 A_V X, Y) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(P^2 A_V X, Y) = 0$$

elde edilir. Bu denkleme Eş. 3.47 kullanılırsa

$$\cos^2\theta g(A_V X + \eta(A_V X)\xi, Y) = 0$$

dir. Buradan da

$$\cos^2\theta g(A_V X, Y) = 0 \tag{4.28}$$

şekline dönüşür. Böylece Eş. 4.28' de $\cos^2\theta = 0$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ olur. Bu durum M nin anti-invaryant olduğunu gösterir. Ayrıca Eş. 4.28' de Eş. 2.15 kullanılırsa eşitlik

$$\cos^2\theta g(\sigma(X, Y), V) = 0$$

şekline dönüşür. Eğer $g(\sigma(X, Y), V) = 0$ ise $\sigma(X, Y) = 0$ olur. Bu da M nin mixed-total geodezik olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.9. Teorem $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda, M anti-invaryant veya $D^{\perp}-$total geodezik altmanifolddur.

İspat Her $Z,W \in D^{\perp}$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ olmak üzere, Eş. 2.15, Eş. 2.12, Eş. 3.11 ve Eş. 3.31 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g(\sigma(W,Z),V) &= g(\tilde{\nabla}_W Z - \nabla_W Z, V) \\
&= g(\tilde{\nabla}_W Z, V) = -g(\tilde{\nabla}_W V, Z) \\
&= -g(\varphi\tilde{\nabla}_W V, \varphi Z + \eta(W)\eta(Z)) \\
&= -g(\varphi\tilde{\nabla}_W V, \varphi Z) \\
&= g((\tilde{\nabla}_W \varphi)V - \tilde{\nabla}_W \varphi V, \varphi Z)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece Eş. 3.17' den

$$g(\sigma(W,Z),V) = -g(\tilde{\nabla}_W \varphi V, \varphi Z) \tag{4.29}$$

denklemi elde edilir. Burada $Z \in D^{\perp}$ olduğundan, Eş. 4.29

$$g(\sigma(W,Z),V) = -g(\tilde{\nabla}_W \varphi V, FZ)$$

dir. Buradan Eş. 3.21 kullanılırsa,

$$g(\sigma(W,Z),V) = -g(\tilde{\nabla}_W BV + \tilde{\nabla}_W CV, FZ)$$

olur. Böylece Eş. 2.6 ve Eş. 2.12' den

$$\begin{aligned}
g(\sigma(W,Z),V) &= -g(\nabla_W BV + \sigma(W,BV), FZ) - g(-A_{CV}V + \nabla_W^{\perp} CV, FZ) \\
&= -g(\sigma(W,BV), FZ) - g(\nabla_W^{\perp} CV, FZ)
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan Eş. 3.35 ve Eş. 3.41 kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
g(\sigma(W,Z),V) &= -g(\sigma(W,BV), FZ) - g((\nabla_W C)V + C\nabla_W^{\perp} V, FZ) \\
&= -g((W,BV), FZ) - g(\sigma(BV,W) - FA_V W, FZ) \\
&= -g(\sigma(W,BV), FZ) + g(\sigma(BV,W), FZ) \\
&\quad + g(FA_V W, FZ) \\
&= g(FA_V W, FZ)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g(\sigma(W,Z),V)=g(BFA_V W,Z) \tag{4.30}$$

şeklinde yazılır. O halde Eş. 4.30' da Eş. 3.22 kullanılırsa

$$g(\sigma(W,Z),V)=g(A_V W+\eta(A_V W)\xi-P^2A_V W,Z)$$

denklemi elde edilir. Buradan, $Z\in D^{\perp}$ olduğundan,

$$g(\sigma(W,Z),V)=g(A_V W,Z)+g(P^2A_V W,Z)$$

elde edilir. Şimdi bu denkleme Eş. 2.15 uygulanırsa

$$g(P^2A_V W,Z)=0 \tag{4.31}$$

yazılır. Böylece Eş. 4.31' de Eş. 3.47 kullanılırsa

$$\cos^2\theta g(A_V W+\eta(A_V W)\xi,Z)=0$$

denklemi oluşur. Buradan da

$$\cos^2\theta g(A_V W,Z)=0 \tag{4.32}$$

olduğu görülür. Eğer $\cos^2\theta=0$ ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ olur. Bu durum M nin anti-invaryant olduğunu gösterir. Şimdi Eş. 4.32 ve Eş. 2.15' ten,

$$\cos^2\theta g(\sigma(W,Z),V)=0 \tag{4.33}$$

olur. Eğer $g(\sigma(W,Z),V)=0$ ise $\sigma(W,Z)=0$ olduğundan M, $D^{\perp}-$total geodezik altmanifolddur.

4.1.10. Tanım $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer M nin D_θ ve $D^{\perp}-$distribüsyonları M de total geodezik iseler M ye kontak pseudo-slant çarpım denir (Chen, 1990).

4.1.11. Teorem $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman M bir kontak pseudo-slant çarpımdır gerek ve yeter şart σ ikinci temel form olmak üzere her $X \in D_\theta$ ve $Z \in \chi(M)$ için

$$B\sigma(X,Z)=0 \tag{4.34}$$

olmasıdır.

İspat Her $X,Y \in D_\theta$ ve $U,V \in D^\perp$ için

$$g(\nabla_X Y,U)=-g(\nabla_X U,Y)=-g(\tilde{\nabla}_X U,Y) \tag{4.35}$$

dir. Burada Eş. 4.35' te Eş. 3.11 kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y,U)=-g(\varphi\tilde{\nabla}_X U,\varphi Y) \tag{4.36}$$

olur. Eş. 4.36' da Eş. 2.6, Eş. 3.31 ve Eş. 3.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y,U) &= g((\tilde{\nabla}_X\varphi)U-\tilde{\nabla}_X\varphi U,\varphi Y) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_X\varphi U,\varphi Y) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_X PU,\varphi Y)-g(\tilde{\nabla}_X FU,\varphi Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$g(\nabla_X Y,U)=g(\tilde{\nabla}_X FU,\varphi Y) \tag{4.37}$$

yazılabilir. Böylece Eş. 4.37' de Eş. 2.12, Eş. 2.15, Eş. 3.20, Eş. 3.33 ve Eş. 3.37 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y,U) &= g(A_{FU}X,PY)-g(\nabla_X^\perp FU,FY) \\ &= g(\sigma(X,PY),FU)-g((\nabla_X F)U+F\nabla_X U,FY) \\ &= g(\sigma(X,PY),FU)-g((\nabla_X F)U,FY)-g(F\nabla_X U,FY) \\ &= g(\sigma(X,PY),FU)-g(C\sigma(X,U)-\sigma(X,PU),FY)-g(F\nabla_X U,FY) \\ &= g(\sigma(X,PY),FU)-g(F\nabla_X U,FY) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada Eş. 3.18 ve Eş. 3.52 göz önüne alınırsa

$$g(\nabla_X Y,U) = g(\sigma(X,PY),FU) - \sin^2\{g(\nabla_X U,Y) + \eta(\nabla_X U)\eta(Y)\}$$
$$= g(\sigma(X,PY),FU) + \sin^2 g(\nabla_X Y,U)$$

olur. Böylece Eş. 3.30 kullanılırsa

$$\cos^2 g(\nabla_X Y,U) = g(\sigma(X,PY),FU) = g(B\sigma(X,PY),U) \tag{4.38}$$

bulunur. Benzer düşünceyle Eş. 3.11, Eş. 3.17 ve Eş. 3.31 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V U,X) &= g(\tilde{\nabla}_V U,X) = -g(\tilde{\nabla}_V X,U) \\ &= -g(\varphi\tilde{\nabla}_V X,\varphi U) + \eta(\tilde{\nabla}_V X)\eta(U) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_V \varphi X - (\tilde{\nabla}_V \varphi)X,\varphi U) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_V \varphi X,\varphi U) + g((\tilde{\nabla}_V \varphi)X,\varphi U) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_V \varphi X,\varphi U) \end{aligned}$$

olur. Her $U,V \in D^{\perp}$ için $\varphi U = FU$ olduğundan,

$$g(\nabla_V U,X) = -g(\tilde{\nabla}_V \varphi X,FU) \tag{4.39}$$

dir. Burada Eş. 4.39' da Eş. 3.20 kullanılırsa,

$$g(\nabla_V U,X) = -g(\tilde{\nabla}_V PX,FU) - g(\tilde{\nabla}_V FX,FU) \tag{4.40}$$

yazılabilir. Burada Eş. 4.40' da Eş. 2.6 ve Eş. 2.12 kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(\nabla_V U,X) = -g(\sigma(V,PX),FU) - g(\nabla_V^{\perp} FX,FU) \tag{4.41}$$

dir. Burada Eş. 4.41' de Eş. 3.33 ve Eş. 3.37 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V U,X) &= -g(\sigma(V,PX),FU) - g((\nabla_V F)X,FU) - g(F\nabla_V X,FU) \\ &= -g(\sigma(V,PX),FU) - g(F\nabla_V X,FU) \\ &\quad + g(\sigma(V,PX),FU) - g(C\sigma(V,X),FU) \end{aligned}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g(\nabla_V U,X) = -g(C\sigma(V,X),FU) - g(F\nabla_V X,FU)$$

olduğu görülür. Bu durumda Eş. 3.52 kullanılırsa

$$g(\nabla_V U, X) = -g(C\sigma(V, X), FU) - \sin^2\theta g(\nabla_V X, U)$$
$$= -g(C\sigma(V, X), FU) + \sin^2\theta g(\nabla_V U, X)$$

yazılabilir. Buradan da Eş. 3.30 kullanılırsa

$$\cos^2\theta g(\nabla_V U, X) = -g(C\sigma(V, X), FU) = g(B\sigma(V, X), U) \tag{4.42}$$

elde edilir. Böylece Eş. 4.38 ve Eş. 4.42' den teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.1.12. Teorem $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, LP-kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer F tensörü, D_θ slant distribüsyon üzerinde paralel ise M, ya $D_\theta -$geodeziktir ya da σ, D_θ üzerinde $\cos^2\theta$ karakteristik değeri ile C^2 nin bir karakteristik vektörüne sahiptir.

İspat F tensörü D_θ slant distribüsyon üzerinde paralel ise her $X, Y \in D_\theta$ için

$$(\nabla_X F)Y = 0$$

dir. Eş. 3.37' den

$$C\sigma(X, Y) - \sigma(X, PY) = 0$$

dir. Burada bu denklemde Y yerine $Y - \eta(Y)\xi \in D_\theta$ alınırsa,

$$C\sigma(X, Y + \eta(Y)\xi) - \sigma(X, P(Y + \eta(Y)\xi)) = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$C\sigma(X, Y + \eta(Y)\xi) = \sigma(X, PY)$$

yazılır. Şimdi bu denkleme C uygulanırsa

$$C^2\sigma(X, Y + \eta(Y)\xi) = C\sigma(X, PY) \tag{4.43}$$

olur. O halde Eş. 4.43' te Y yerine PY alınırsa

$$C\sigma(X,PY)=\sigma(X,P^2Y) \tag{4.44}$$

denklemine dönüşür. Böylece Eş. 4.43 ve Eş. 4.44' ten

$$C^2\sigma(X,Y+\eta(Y)\xi)=C\sigma(X,PY)=\sigma(X,P^2Y)=\cos^2\theta\sigma\left(X,Y+\eta\left(Y\right)\xi\right)$$

olduğu görülür. Burada ya $\sigma=0$ dir. Bu da M nin $D_\theta-$geodezik ya da σ, $\cos^2\theta$ karakteristik değerli C^2 nin bir karakteristik vektörüdür.

Örnek

M, $\mathbb{R}^{11}$ de $4-$boyutlu

$\chi(u,v,w,t)=(v\cos u, w\cos u, v+w, -w\cos u, -v\cos u, v\sin u, w\sin u, v+w, w\sin u, v\sin u, t)$

şeklinde tanımlanan altmanifoldu olsun. M nin tanjant demeti

$$\begin{aligned} e_1 &= -v\sin u\frac{\partial}{\partial x_1}-w\sin u\frac{\partial}{\partial x_2}+w\sin u\frac{\partial}{\partial x_4}+v\sin u\frac{\partial}{\partial x_5} \\ &\quad +v\cos u\frac{\partial}{\partial y_1}+w\cos u\frac{\partial}{\partial y_2}+w\cos u\frac{\partial}{\partial y_4}+v\cos u\frac{\partial}{\partial y_5} \end{aligned}$$

$$e_2=\cos u\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}-\cos u\frac{\partial}{\partial x_5}+\sin u\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_3}+\sin u\frac{\partial}{\partial y_5}$$

$$e_3=\cos u\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}-\cos u\frac{\partial}{\partial x_4}+\sin u\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}+\sin u\frac{\partial}{\partial y_4}$$

ve

$$e_4=\frac{\partial}{\partial t}$$

yukarıda verilen tanjant vektörleri tarafından oluşturduğu kolayca görülebilir. $\mathbb{R}^{11}$ in koordinat sistemi $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,z)$ şeklinde seçilirse, $\mathbb{R}^{11}$ in φ hemen hemen kontak yapısını

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{5}\left\{X_i\frac{\partial}{\partial x_i}+Y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}+Z\frac{\partial}{\partial z}\right)=\sum_{i=1}^{5}\left(Y_i\frac{\partial}{\partial x_i}+X_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

$$\xi=\frac{\partial}{\partial z},\qquad \eta=dz,\qquad g=\eta\otimes\eta+\sum_{i=1}^{5}(dx_i^2+dy_i^2)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda

$$U=\mu_i\frac{\partial}{\partial x_i}+v_i\frac{\partial}{\partial y_i}+\lambda\frac{\partial}{\partial z}\in T(\mathbb{R}^{11})$$

olmak üzere

$$\varphi U=\mu_i\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i})+v_i\varphi(\frac{\partial}{\partial y_i})+\lambda\varphi(\frac{\partial}{\partial z})=\mu_i\frac{\partial}{\partial y_i}+v_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$g(\varphi U,\varphi U)=\mu_i^2+v_i^2,\qquad g(U,U)=\mu_i^2+v_i^2-\lambda^2,\qquad \eta(U)=g(U,\xi)=\lambda,\qquad \eta(\xi)=-1$ olur.

Bu durumda

$$\varphi^2U=\mu_i\frac{\partial}{\partial x_i}+v_i\frac{\partial}{\partial y_i}=U+\eta(U)\xi,$$

$$g(\varphi U,\varphi U)=g(U,U)+\eta^2(U).$$

şartları sağlanmış olur. Böylece (φ,ξ,η,g), $\mathbb{R}^{11}$in hemen hemen para kontak metrik yapısıdır. Yukarıdaki baz vektörüne φ uygulanırsa

$$\begin{aligned}\varphi e_1=&-v\sin u\frac{\partial}{\partial y_1}-w\sin u\frac{\partial}{\partial y_2}+w\sin u\frac{\partial}{\partial y_4}+v\sin u\frac{\partial}{\partial y_5}\\&+v\cos u\frac{\partial}{\partial x_1}+w\cos u\frac{\partial}{\partial x_2}+w\cos u\frac{\partial}{\partial x_4}+v\cos u\frac{\partial}{\partial x_5}\end{aligned}$$

$$\varphi e_2=\cos u\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_3}-\cos u\frac{\partial}{\partial y_5}+\sin u\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}+\sin u\frac{\partial}{\partial x_5}$$

$$\varphi e_3=\cos u\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}-\cos u\frac{\partial}{\partial y_4}+\sin u\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}+\sin u\frac{\partial}{\partial x_4}$$

olduğu görülür. Buradan da gerekli işlemler yapılırsa

$\cos\theta = \frac{g(\varphi e_2, e_2)}{\|\varphi e_2\|\|e_2\|} = \frac{g(\varphi e_3, e_3)}{\|\varphi e_3\|\|e_3\|} = \frac{g(\varphi e_3, e_2)}{\|\varphi e_3\|\|e_2\|} = \frac{g(\varphi e_2, e_3)}{\|\varphi e_2\|\|e_3\|} = \frac{1}{2},\ \theta = 60^\circ$ sonucuna ulaşırız. Bu sonuç yorumlanırsa $D_\theta = span\{e_2, e_3\}$ slant açısına sahip bir slant distribüsyondur diyebiliriz. Diğer taraftan $i = 2,3,4$ için $g(e_1, \varphi e_i) = g(e_4, \varphi e_i) = 0$ olduğundan e_1, e_4 M ye ortogonaldir. Böylece $D^\perp = span\{e_1, e_4\}$ total reel (anti-invaryant) distribüsyondur. Bu halde $M, \mathbb{R}^{11}$ de hemen hemen para kontak metrik yapısıyla $4-$boyutlu proper kontak pseudo-slant altmanifoldu olur (Dirik ve ark., 2018).

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

1–) $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosipmlektik manifoldunun kontak pseudo-slant bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda

a–) $D^{\perp}$ nın integrallenebilmesi için gerek ve yeter şartlardan biri

$$A_{FD^{\perp}}D^{\perp}=0$$

dır.

b–) D_{θ} nın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri,

$$\omega_1\left\{\nabla_X PY-P\nabla_Y X-A_{FY}X-B\sigma(X,Y)\right\}=0$$

olmasıdır.

c–) D_{θ} nın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $Z,W\in D_{\theta}$ için

$$\nabla^{\perp}_{Z}FW-\nabla^{\perp}_{W}FZ+\sigma(Z,PW)-\sigma(W,PZ)\in\mu\oplus FD_{\theta}$$

olmasıdır.

2–) $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosipmlektik manifoldunun total umbilik kontak pseudo-slant bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur.

a–) $boy(D^{\perp})=1$

b–) $H\in\mu$

c–) $M-$proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

3–) $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimplektik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a–) M, mixed total geodezik altmanifolddur

b–) M, $D^{\perp}$- total geodezik altmanifolddur.

c–) M, D_{θ} - total geodezik altmanifolddur.

d–) M, anti-invaryant altmanifolddur.

e–) M, kontak pseudo-slant çarpımdır.

Bu sonuçlar genişletilerek başka manifoldlar için de denenebilir.

KAYNAKLAR

Atçeken, M. and Dirik, S. (2014). On the geometry of pseudo-slant submanifolds of a Kenmotsu manifold, *Gulf joural of mathematics*., 2(2), 51-66.

Atçeken, M. and Hui, S. K. (2013). Slant and pseudo-slant submanifolds in $(LCS)_n$-manifolds, *Czechoslovak M. J*., 63 (138), 177-190.

Atçeken, M., Yıldırım, Ü. and Dirik, S. (2017). Sub-Manifolds of a *Riemannian manifold, manifolds* – Current Research Areas, Prof. Paul Bracken (Ed.), InTech, DOI:10.5772/65948.

Boothby, W. M. (1986). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry.*, Academic Press, Inc., London.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A. L., Fernandez, M. and Fernandez. (2000a). Slant submanifolds in Sasakian manifolds, *Glasgow Math, J*., 42, 125-138.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M and Fernandez, M. (2000b). Structure on a slant submanifolds of a contact Manifold, *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 31(7), 857-864.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A. L., Fernandez, M. and Fernandez. (1999). Slant submanifolds in Sasakian manifolds, *Geomeatriae Dedicata*., 78, 183-199.

Chen, B. Y. (1990). *Geometry of slant submanifolds*, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium. View at Zentralblatt Math.

Chen, B. Y. (1990). Slant immersions, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 41, 135-147.

Chen, B. Y. (1973). Geometry of submanifolds pure and applied mathematics, No.22., *Marcel Dekker, Inc.*, New York.

De, U. C. and Sarkar, A. (2011). On Pseudo-slant submanifolds of trans Sasakian manifolds, *Proceedings of the Estonian*., A.S.60,1-11.2011.doi:10.3176 proc.2011.1.01.

Dirik, S. and Atçeken, M. (2013). Pseudo-slant submanifolds of a nearly Cosymplectic manifold, *Turkish Journal of Mathematics & Computer Science.*, ID 20140035, pp:14.

Dirik, S. (2014). Pseudo-Slant Altmanifoldların Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, *Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Tokat, 1-122.

Dirik, S. and Atçeken, M. (2016). Pseudo-slant submanifold in Cosymplectic space forms. *Acta Universitatis sapientiae mathematica*, 8(1), 53-74.

Dirik, S. and Atçeken, M. (2016). On The Geometry of pseudo-slant submanifolds of a Cosymplectic manifold, *International Electronic Journal of Geometry*, 9(1), 45-56.

Dirik, S., Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2017). On Pseudo-slant submanifolds of a Sasakian space sorm, *Filomat*, 31(19), 5909-5919.

Dirik, S., Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2018). On The Geometry of contact pseudo-slant submanifolds in $(LCS)_n$- manifold, *International Journal of Applied mathematics and Statistics*., 57(2), 96-109.

Duggal, K. L. and Begancu, A. (1996). Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifold and applications. *Kluwer*, Dordrecht.

Hacısalihoğlu, H. H. (1980). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Yayınları.

Khan, V. A. and Khan, M. A. (2007). Pseudo-slant submanifolds of a Sasakian manifold, *Indian J. Prue appl. Mathematics*, 38(1), 31-42.

Kim, J. S., Liu, X. L. and Tripathi, M. M. (2004). On Semi-invariant submanifolds of nearly trans-Sasakian manifolds, *Int. J. Pure and appl. math. sci.*, 1, 15-34.

Lotta, A. (1996). Slant submanifolds in contact geometry, *Bulletin Mathematical Society Roumanie.*, 39, 183-198.

Lotta, A. (1998). Three-dimensional slant submanifolds of K-Contact manifolds, *Balkan J. Geom. Appl.*, 3(1), 37-51.

Matsumuto, K. (1989). On Loretzian paracontact manifolds, *Bull. of Yamagata Univ. Nat. Sci.*, 12, 151-156.

Matsumuto, K., Mihai, I., Rosca, R. (1995). ξ-null geodesic gradient vector fields on a Lorentzian para-Sasakian manifold, *J. Korean Math. Soc.* 32(1), 17-31.

O'Neill B. (1983). Semi-Riemann geometry with applications to Relativit, *Pure and Applied Mathematics, Acedemic Press, Inc.*, Newyork, 103.

Pandey, P. K. and Gupta, R. S. (2008). Characterization of a slant submanifold of a Kenmotsu manifold, *Novi. Sad. J. Math, Vol.*, 38(1), 97-102.

Papaghuic, N. (1994). Semi-slant submanifolds of a Kaehlarian manifold, *An. St. Univ. Al. I. Cuza. Univ. Iası.*, 40, 55-61.

Sarkar, A. and Sen, M. (2012). On Invariant submanifolds of LP-Sasakian manifolds, *Extracta mathematcae*, 21(1), 145-154.

Sular, S. (2009). Kenmotsu Manifoldlar ve Bunların Bazı Altmanifoldları, D. Tezi, Balıkesir.

Torun, S. and Dirik, S. (2018). LP-kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldlarının geodeziklik durumları, *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 8(2), 418-429.

Torun, S. and Dirik, S. (2018). On Contact pseudo-slant submanifolds in a LP-Cosymplectic manifold, 16. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Manisa.

Tripathi, M. M. (2001). On semi-invariant submanifolds of LP-cosymplectic manifolds, *Bulletin of the Malaysian mathematical scences socety*, 24, 69-79.

Uddin, S., Özel, C., Khan, M. A. and Singh, K. (2012). Some classification result on totally umbilical proper slant and hemi slant submanifolds of a nearly Kenmotsu manifold, *International journal of physical scienses*, 7(40), 5538-5544.

Uddin, S. (2010). Warped product CR-submanifolds of LP-cosymplectic manifolds, *Filomat*, 24, 87-95.

Uddin, S., Khan, M. A. and Singh, K. (2011). Totally umbilical proper slant and hemi slant submaniolds of an LP-cosymplectic manifold, *Mathematical Problems in Engineering*, 516238: 9.

Yano, K. and Kon, M. (1984). Structures on manifolds., Series in Pure Mathematics, *3. World Scientific Publishing Co.*, Singapore, 72.

Yano, K. and Kon, M. (1979). Anti-invariant submanifolds of Sasakian space form, *Kodai Math. J. 2*, 171-186.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	: Sibel TORUN
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 20.08.1983 - Amasya
Medeni hali	: Evli
e-posta	: sibelayastorun@gmail.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek lisans	Amasya Üniversitesi / Matematik	-
Pedagojik Form.	Gaziosmanpaşa Üniversitesi / Matematik	2015
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Matematik	2007
Lise	Suluova Süper Lisesi	2001

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
2007-2018	Özel Sektör	Matematik Öğr.

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Torun, S. and Dirik, S. (2018). LP-Kosimplektik Manifoldun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldlarının Geodeziklik Durumları, *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 8(2), 418-429.

2. Torun, S. and Dirik, S. (2018). On Contact Pseudo-Slant Submanifolds in a LP-Cosymplectic Manifold, 16. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Manisa.