T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL SONLU I-RAD-$\oplus$-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURCU TAŞ

Danışmanın Adı: DOÇ. DR. BURCU NİŞANCI TÜRKMEN

OCAK 2019

DUAL SONLU I-RAD-⊕-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Burcu TAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2019
AMASYA

Burcu TAŞ tarafından hazırlanan " Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modüller" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Burcu Nişancı TÜRKMEN
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Başkan : Doç. Dr. Öznur KULAK
Matematik Anabilim Dalı, Giresun Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Tez Savunma Tarihi: …/…/…

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………..…….
Doç. Dr. Meryem EVECEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

....

Burcu TAŞ

.../.../...

DUAL SONLU I-RAD-⊕-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Burcu TAŞ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2019

ÖZET

Bu tez çalışmasında, herhangi bir halkanın idealleri yardımıyla tümleyene sahip modüller sınıfının genişletilmesi ve araştırılması yapılmıştır. $Cgs^{\oplus}$-modüllerin bir kuvvetlenişi olarak dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüller kavramı tanımlanmış, temel özelliklerine yer verilmiş ve Dedekind bölgeleri üzerinde bu modüller çalışılmıştır.

Sayfa Adedi : 58

Anahtar Kelimeler : $cgs^{\oplus}$-modül, dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modül

Danışman : Doç. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

COFINITELY I-RAD-$\oplus$-SUPPLEMENTED MODULES

(M. Sc. Thesis)

Burcu TAŞ

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2019

ABSTRACT

In this study, it has been made research and generalization of the class of modules having supplements by means of ideals in any ring. Notion of cofinitely I-Rad-$\oplus$-supplemented modules has been defined as a strong notion of $cgs^{\oplus}$-modules. It has been given play to basic properties and has been studied these modules over Dedekind domains.

PageNumber : 58

KeyWords : $cgs^{\oplus}$-module, cofinitely I-Rad-$\oplus$-supplemented module

Supervisor : Assoc. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen, kütüphanesinden yararlanmamı sağlayan, çalışmaya teşvik eden ve tez yazımım sürecinde de hep yanımda olan tez danışmanım Doç. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN' e şükranlarımı sunarım. Ayrıca tez dönemi boyunca bana destek veren sayın hocam Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN' e teşekkür ederim. Sadece tez yazım dönemimde değil her an yanımda olan, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim annem, babam, ağabeylerim ve ablama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Tez çalışmasında kullanılmış olduğumuz simgeler, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	asal sayılar kümesi
$\subseteq$	alt küme
$\subset$	öz alt küme
$\supseteq$	kapsama
$\cap$	kümelerde kesişim işlemi
0_R	$(R,+,\cdot)$ halkasında $(R,+)$ abel grubunun birimi
1_R	$(R,+,\cdot)$ halkasında $(R,\cdot)$ cebirsel yapısının birimi
$J = RadR$	R Halkasının Jacobson Radikali
$\leq$	alt modül
$M/_N$	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\ll$	küçük alt modül
$M \cong N$	izomorf modüller
$Hom(A,B)$	A modülünden B modülüne tüm homomorfizmaların kümesi
$End(M)$	M modülünün endomorfizmalarının kümesi
$Gör(f)$	f homomorfizmasının görüntüsü
$Çek(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\prod_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt çarpımı
$\sum_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin toplamı
$\bigoplus_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt toplamı
$\langle X \rangle$	X kümesi tarafından üretilen modül
Rm	m elemanı tarafından üretilen devirli modül
$RadM$	M modülünün radikali

Kısaltmalar	**Açıklama**
$cgs^{\oplus}$	direkt dual sonlu radikal tümlenmiş modül
DTT	direkt toplam terimleri toplamı özelliği
(D3)	modülün keyfi iki direkt toplam teriminin toplamın modüle eşit iken bu iki modülün kesişiminin yine bir direkt toplam terimi olması
KSK	kısmen sıralı küme
$Loc^{\oplus}M$	direkt toplam terimi olan tüm lokal alt modüllerin toplamı
$wLoc^{\oplus}M$	direkt toplam terimi olan tüm zayıf lokal alt modüllerin toplamı

1.GİRİŞ

Bu tezde R halkası denildiğinde birimli halka alınacak ve tüm modüller üniter sol R-modül olarak çalışılacaktır. M modülünün K alt modülü $K \leq M$ şeklinde gösterilir. Bölüm modülü sonlu üretilmiş olan modülün alt modülüne **dual sonlu alt modül** denir. Sonlu üretilmiş bir modülün her alt modülünün dual sonlu alt modül olduğu aşikar bir sonuçtur. Bir M modülünün $U \leq M$ alt modülü verilsin. M modülünün her $V < M$ öz alt modülü için $U + V \neq M$ oluyorsa U ya M nin **küçük alt modülü** denir. $U \ll M$ ile gösterilir. M modülünün her U öz alt modülü için $U \ll M$ ise M modülüne **oyuk modül** denir. M modülünün tüm öz alt modüllerini kapsayan bir en geniş öz alt modülü varsa M ye **lokal modül** denir. Direkt toplam terimlerinin bir genelleştirmesi olarak tümleyen alt modül ve tümlenmiş modül kavramları Kasch ve Mares tarafından tanımlanmıştır. Buna göre M nin U alt modülü için $M = U + V$ ve $U \cap V$ nin V de küçük alt modülü varsa V ye $\boldsymbol{U}$ **nun** $\boldsymbol{M}$ **modülünde tümleyeni** denir. Her alt modülü tümleyene sahip olan modüllere **tümlenmiş modül** adı verilir [11]. Mohamed ve Müller, tümlenmiş modül kavramını kuvvetlendirerek ⊕-tümlenmiş modülleri tanımlamışlardır. Her alt modülü modülde direkt toplam terimi olacak şekilde tümleyene sahip modüllere **⊕-tümlenmiş modül** denir. Oyuk modüller ⊕-tümlenmiştir [14]. Çalışıcı ve Pancar, ⊕-dual sonlu tümlenmiş modül kavramını ⊕-tümlenmiş modülleri genelleştirerek tanımlamışlardır ve bu kavramın sağlamış olduğu tüm temel özellikleri çalışmışlardır. Bir M modülünün her dual sonlu U alt modülü için $M = U + V$ ve $U \cap V$, V de küçük olacak şekilde M nin bir V direkt toplam terimi varsa M ye **⊕-dual sonlu tümlenmiş modül** adı verilir [6]. Nişancı ve Pancar ise, bu kavramı genelleştirerek direkt dual sonlu radikal tümlenmiş ($cgs^{\oplus}$-) modül kavramını çalışmışlardır. M modülünün her U dual sonlu alt modülü için $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq RadV$ olacak şekilde M nin V direkt toplam terimi varsa M ye **direkt dual sonlu radikal tümlenmiş** denir [17].

Bu çalışmada, $cgs^{\oplus}$-modüller kuvvetlendirilerek dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modül kavramı tanımlandı. Örneklerle, tanımlanan modül kavramının $cgs^{\oplus}$-modüllerden daha kuvvetli bir cebirsel yapı olduğu ispatlanarak bu kavramla ilgili temel özellikler ifade edildi. Ayrıca dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modüller Dedekind Bölgeleri üzerinde incelendi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Halkalar

2.1.1 Tanım $(R,+)$ abel grup olsun. '**.**' R üzerinde ikili işlem olmak üzere aşağıdaki iki koşulu sağlayan $(R,+,.)$ cebirsel yapısına **halka** denir. $\forall\ a,b,c \in R$ için;
i) $(ab)c = a(bc)$ sağlanır,
ii) $a(b+c) = ab + ac$ ve $(a+b)c = ac + bc$ dir [9] .

2.1.2 Tanım $(R,+,.)$ halkasında $\forall a \in R$ için $ae = ea = a$ olacak şekilde $e \in R$ mevcutsa, $e \in R$ elemanına R halkasının **birim elemanı** denir ve $e = 1_R$ yazılışı ile gösterilir. Birim elemanlı bir halkaya **birimli halka** adı verilir. Halkada birim eleman tek türlü belirlidir. Ayrıca birimli bir halkanın her alt halkası birimli olmak zorunda değildir.

Örneğin $(\mathbb{Z},+,.)$ halkası birimli bir halka iken, alt halkası olan $(2\mathbb{Z},+,.)$ birimli olmayan bir halkadır.
' **.** ' işlemine göre değişmeli olan $(R,+,.)$ halkasına **değişmeli halka** denir. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ halkaları değişmeli halkalara ve $M(n,\mathbb{Z})$ matris halkası da değişmeli olmayan halkalara örnektir [9].

Bu tez çalışmasında $(R,+,.)$ halkası birimli halka olarak alınacak ve kısaca R yazılışı ile gösterilecektir.

2.1.3 Tanım R halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, $(R,+)$ abel grubunun alt grubu ve her $a,b \in I$ için $ab \in I$ ise, I alt grubuna R nin **alt halkası** denir. Ayrıca $\forall r \in R,\ \forall a \in I$ için $ra \in I$ $(ar \in I)$ ise , I alt grubuna R nin **sol (sağ) ideali** denir. Eğer I, R nin hem sol ideali hem de sağ ideali ise, I ya R halkasının **iki yanlı ideali** veya kısaca **ideali** adı verilir.

Her sol (sağ) ideal bir alt halka olmasına karşın her alt halkasının sol (sağ) ideal olması gerekmez. Örneğin;

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} n & r \\ 0 & r' \end{pmatrix} \middle|\, n \in \mathbb{Z};\quad r, r' \in \mathbb{Q} \right\}$$

kümesi $M(2,\mathbb{R})$ halkasının alt halkasıdır, fakat sol ya da sağ ideali değildir.

R ve 0, R halkasının aşikar idealleridir. R halkasının kendisi hariç diğer tüm ideallerine **öz ideal** denir. I, R halkasının ideali olsun. R nin $AB \subseteq I$ olan A ve B idealleri için $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ oluyorsa I idealine R halkasının **asal ideali** adı verilir [9].

2.1.4 Tanım R halka $0_R \neq a \in R$ olsun. $ab = 0_R$ olacak şekilde bir $0_R \neq b \in R$ elemanı bulunuyorsa, a elemanına **sıfır bölen eleman** adı verilir.

Sıfır bölen elemanı olmayan birimli ve değişmeli R halkasına **değişmeli bölge** denir. Örneğin $(\mathbb{Z}, +, .)$ tamsayılar halkası değişmeli bölgedir.

Kendisinden farklı her ideali sonlu sayıda asal idealinin çarpımı şeklinde yazılabilen değişmeli bölgeye **Dedekind bölgesi** denir.

Örneğin $(\mathbb{Z}, +, .)$ değişmeli bölgesi bir Dedekind bölgesidir [9].

2.1.5 Tanım R halka olsun.

i) $a \in R$ elemanı için $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde $b \in R$ elemanı mevcutsa b ye $\boldsymbol{a \in R}$ **elemanının tersi** denir. Bu durumda a ya R halkasının **terslenebilir elemanı** denir.

ii) $c \in R$ elemanı için $c^2 = c$ oluyorsa c ye R halkasının **idempotent elemanı** denir [9].

2.1.6 Tanım Birimli ve değişmeli olan R halkasının her elemanının tersi varsa, R ye **cisim** denir. Her terslenebilir eleman sıfır bölen olmayan eleman olduğundan her cisim değişmeli bölgedir [9].

2.1.7 Tanım R değişmeli bölge ve S, R üzerinde sıfırdan farklı elemanların kümesi olmak üzere $S^{-1}R = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in R, b \in S\right\}$ bir cisimdir. Bu takdirde $S^{-1}R$ cismine R değişmeli bölgesi üzerinde **kesir cismi** denir [9].

Örneğin; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ in kesir cismidir.

2.2 Modüller

2.2.1 Tanım R halkası ve $(M, +)$ abel grubu için $(r, m) \longmapsto f(r, m) = rm$ ile tanımlı $f : R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için;

i) $r(m + n) = rm + rn$

ii) $(r + s)m = rm + sm$

iii) $(rs)m = r(sm)$

koşulları sağlanıyorsa M ye **sol $\boldsymbol{R}$-modül** denir ve $_RM$ ile gösterilir. Eğer R birimli halka ve $\forall\, m \in M$ için $1_R m = m$ oluyorsa M ye **üniter sol $\boldsymbol{R}$-modül** denir. Benzer tanım sağ R-modül için de yapılabilir [9].

Her abel grup bir üniter sol (sağ) $\mathbb{Z}$-modüldür. Her R halkası kendi üzerinde sol R-modüldür ve $_RR$ ile gösterilir. Eğer R birimli halka ise $_RR$ üniter sol modüldür. Her vektör uzayı, üniter sol modül yapısına sahiptir.

Bu çalışmada tüm modülleri üniter sol R-modül olarak alacağız. Fakat kısaca R-modül yazılışını kullanacağız.

2.2.2 Tanım R halka olmak üzere M R-modül ve N, M abel grubunun alt grubu olsun. Bu takdirde $\forall r \in R$ ve $\forall n \in N$ için $rn \in N$ oluyorsa N ye M modülünün **alt modülü** denir ve $N \leq M$ ile gösterilir.

0 ve M, M modülünün aşikar alt modülleridir. M modülünün aşikar alt modülleri dışındaki alt modüllerine **öz alt modül** denir. R halkasının I öz sol ideali aynı zamanda bir öz alt modülüdür. Üstelik M modülünün keyfi sayıdaki alt modüllerinin kesişimi de M nin alt modülüdür [9].

2.2.3 Tanım M R-modül ve X, M nin alt kümesi olsun. M nin X i kapsayan tüm alt modüllerinin kesişimine **X kümesi tarafından üretilmiş alt modül** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer X sonlu elemanlı ise, $\langle X \rangle$ alt modülüne **sonlu üretilmiştir** denir. Özel olarak $X = \{ a \}$ şeklinde tek elemanlı ise, $\langle X \rangle = \langle a \rangle$ alt modülüne **devirli alt modül** denir. Burada $\langle a \rangle = Ra = \{ ra \mid r \in R \}$ şeklindedir. Ayrıca $\{ K_i \mid i \in I \}$, M nin alt modüllerinin ailesi ise, $X = \bigcup_{i\in I} K_i$ kümesinin ürettiği alt modüle K_i **modüllerinin toplamı** denir. $\langle X \rangle = \langle \bigcup_{i\in I} K_i \rangle = \sum_{i\in I} K_i$ ile gösterilir [9].

2.2.4 Tanım M R-modül ve U, $(M, +)$ abel grubunun alt grubu olsun. Abel grubun her alt grubu normal alt grup olduğundan $U \trianglelefteq M$ dir. Böylece M/U bölüm grubu anlamlıdır. Her $r \in R$ ve $m + U \in M/U$ için $\cdot\,(r, m + U) = rm + U$ ile tanımlı $\cdot : R \times M/U \longrightarrow M/U$ fonksiyonuna göre M/U bir R-modüldür. Burada M/U R-modülüne ***M* nin *U* ya göre bölüm modülü** denir [9].

2.2.5 Teorem Sonlu üretilmiş modülün her bölüm modülü de sonlu üretilmiştir [9].

İspat M sonlu üretilmiş R-modül ve $U \leq M$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan $M = <\{m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n\}>$ ve her $m \in M$ için $\forall\, 1 \leq i \leq n$ için $m_i \in M$ ve $r_i \in R$ olmak üzere $m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n$ dir. Her $m + U \in M/_U$ elemanı için $m + U = (r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n) + U = r_1(m_1 + U) + \cdots + r_n(m_n + U)$ olduğundan $M/_U = <\{m_1 + U, m_2 + U, \ldots\ldots\ldots, m_n + U\}>$ bulunur. Dolayısıyla $M/_U$ sonlu üretilmiştir.

2.2.6 Tanım M R-modülünün ve U alt modülü verilsin. Eğer $M/_U$ sonlu üretilmiş ise, U ya ***M* nin dual sonlu alt modülü** denir [9].

2.2.7 Tanım Boştan farklı I indis kümesi için $\{M_i\}_{i\in I}$ sol R-modüllerin bir ailesi olsun. Her $i \in I$ için $\varphi(i) \in M_i$ şeklinde tanımlı tüm φ fonksiyonlarının kümesine $\{\boldsymbol{M_i}\}_{\boldsymbol{i\in I}}$ **modüller ailesinin direkt çarpımı** adı verilir ve $\prod_{i\in I} M_i = \{\varphi \mid \varphi: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i$, her $i \in I$ için $\varphi(i) \in M_i\}$ yazılışı ile gösterilir. $\prod_{i\in I} M_i$ nin sadece sonlu sayıda bileşeni sıfırdan farklı olan elemanların kümesi $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ile gösterilirse $\bigoplus_{i\in I} M_i = \{\, (m_i)_{i\in I} \mid$ en çok sonlu sayıda $i \in I$ için $m_i \neq 0 \,\}$ kümesine $\{\, \boldsymbol{M_i} \,\}_{\boldsymbol{i\in I}}$ **modüller ailesinin dış direkt toplamı** denir. Buradan $\bigoplus_{i\in I} M_i \leq \prod_{i\in I} M_i$ elde edilir [1].

2.2.8 Tanım M R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin ailesi olsun.

i) $M = \sum_{i\in I} M_i$ ve

ii) $\forall i \in I$ için $M_i \cap \sum_{i\neq j} M_j = 0$

koşullarını sağlayan M modülüne $\{\boldsymbol{M_i}\}_{\boldsymbol{i\in I}}$ **alt modüller ailesinin iç direkt toplamı** ya da kısaca **direkt toplamı** denir. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ile gösterilir. Her bir M_i alt modülüne ***M* modülünün direkt toplam terimi** denir.

M modülünün M_1 ve M_2 alt modülleri verilsin. $M = M_1 \oplus M_2$ ancak ve ancak $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ dır [9].

2.2.9 Tanım M nin her N, K, L alt modülleri için $(N + K) \cap L = (N \cap L) + (K \cap L)$ (veya $(N \cap K) + L = (N + L) \cap (K + L)$) ise M ye **dağılımlı modül** denir [3].

2.2.10 Teorem (Modüler Kural) M R-modül, K, N ve L de M nin alt modülleri ve $L \leq N$ olsun. Bu takdirde $(L+K) \cap N = L + (K \cap N)$ dir [1].

İspat Her $a \in (L+K) \cap N$ için $a \in (L+K)$ ve $a \in N$ olduğundan $a = l + k$ olacak şekilde $l \in L$ ve $k \in K$ vardır. $L \leq N$ olduğundan $l \in N$ olur. Bu durumda $k = a - l$ dir. $N \leq M$ olduğundan $a \in N$, $l \in N$ iken $k \in N$ olup $k \in K \cap N$ bulunur. Böylece $a \in L + (K \cap N)$ olur. Tersine $L + (K \cap N)$, hem $L + K$ nın hem de N nin alt modülü iken $L + (K \cap N) \leq (L+K) \cap N$ dir. Dolayısıyla istenen eşitlik elde edilir.

2.3 Homomorfizmalar

2.3.1 Tanım M ve N R-modülleri verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi: M \longrightarrow N$ fonksiyonuna **sol R-modül homomorfizması** denir.

i) Her $a, b \in M$ için $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ dir.

ii) Her $a \in M$ ve her $r \in R$ için $\varphi(ra) = r\varphi(a)$ dir.

Bu çalışmada sol R-modüller üzerinde durulacağı için herhangi bir sol R-modül homomorfizmasını kısaca homomorfizma olarak adlandırılacaktır. Birebir olan φ homomorfizmasına **monomorfizma**, örten olan φ homomorfizmasına **epimorfizma**, hem birebir hem örten olan φ homomorfizmasına **izomorfizma** denir. $\varphi: M \longrightarrow N$ izomorfizma ise, M ve N modüllerine **izomorf modüller** denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

M modülünden N modülüne tanımlı tüm homomorfizmaların kümesi $Hom(M, N)$ ile gösterilir. $Hom(M, N) = \{\varphi \mid \varphi : M \longrightarrow N$ modül homomorfizması$\}$ şeklindedir. Burada $M = N$ ise φ ye **endomorfizma** adı verilir. Tüm endomorfizmaların kümesi $End(M)$ ile gösterilir.

M R-modül ve $N \leq M$ olsun. Her $a \in N$ için $\varphi(a) = a$ ile tanımlı $\varphi: N \longrightarrow M$ dönüşümü R-modül monomorfizması olup φ monomorfizmasına **içerme homomorfizması** denir ve i yazılışı ile gösterilir. $\pi: M \longrightarrow M/N$, $\pi(m) = m + N$ ile tanımlı dönüşümü epimorfizmadır. Bu π epimorfizmasına **doğal (kanonik) homomorfizma** denir.

M R-modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin ailesi olsun. $M = \oplus_{i \in I} M_i$ iken $\forall (m_i)_{i \in I} \in M$ için $\psi_k((m_i)_{i \in I}) = m_k$ ile tanımlı $\psi_k: M \longrightarrow M_k$ epimorfizmasına ***k*. izdüşüm homomorfizması** adı verilir [25].

M R-modül olmak üzere $g(m) = m$ ile tanımlı $g: M \longrightarrow M$ fonksiyonu R-modül izomorfizmasıdır. Bu izomorfizmaya **birim (idantik) homomorfizma** adı verilir. M den M ye birim homomorfizması I_M yazılışı ile gösterilir [9].

2.3.2 Teorem $f : M \longrightarrow N$ ve $g : N \longrightarrow K$ birer R-modül homomorfizması iken $g \circ f : M \longrightarrow K$ bileşke fonksiyonu R-modül homomorfizmasıdır [12].

2.3.3 Tanım $f : M \longrightarrow N$ R-modül homomorfizması olsun. $\{a \in M \mid f(a) = 0\}$ kümesine f nin **çekirdeği** denir ve $Çek(f) = f^{-1}(0)$ yazılışı ile gösterilir. $\{f(a) \mid a \in M\}$ kümesine $\boldsymbol{M}$ **modülünün** $\boldsymbol{f}$ **altındaki homomorfik görüntüsü** denir ve $Gör(f)$ yazılışı ile gösterilir. Ayrıca $Çek(f) \leq M$ ve $Gör(f) \leq N$ dir [9].

2.3.4 Teorem $\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal (kanonik) homomorfizma olsun. Bu takdirde $Çek(\pi) = N$ dir [9].

2.3.5 Tanım M R-modülünde $\forall f \in End(M)$ için $f(U) \leq U$ oluyorsa U ya M nin **karakteristik alt modülü** denir [25].

2.3.6 Tanım Her alt modülü karakteristik alt modül olan modüle **eş modül** denir [15].

2.3.7 Yardımcı Teorem $M = \oplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ modülü M_λ alt modüllerinin direkt toplamı ve N, M modülünün karakteristik alt modülü olsun. Bu takdirde $N = \oplus_{\lambda \in \Lambda} (N \cap M_\lambda)$ dir [25].

2.3.8 Tanım Aşikar alt modüllerinden farklı direkt toplam terimi olmayan sıfırdan farklı bir modüle **parçalanamaz modül** denir. Ayrıca parçalanamaz modüle izomorf olan tüm modüller parçalanamaz modüldür [20].

2.3.9 Teorem (Homomorfizma Teoremi) $f: M \rightarrow N$ R-modül homomorfizması olsun. Bu takdirde $M/_{Çek(f)} \cong Gör(f)$ dir. Özellikle f epimorfizma ise, $M/_{Çek(f)} \cong N$ dir [7].

İspat $m + Çek(f) \longmapsto \varphi(m + Çek(f)) = f(m)$ ile tanımlı $\varphi: M/_{Çek(f)} \longrightarrow Gör(f)$ dönüşümünü alalım. $m_1 + Çek(f) = m_2 + Çek(f)$ olan $\forall m_1 + Çek(f), m_2 + Çek(f) \in M/_{Çek(f)}$ için $m_1 - m_2 \in Çek(f)$ dir. Buradan $f(m_1 - m_2) = 0$ elde edilir. f

homomorfizma olduğundan $f(m_1)=f(m_2)$ olup $\varphi\big(m_1+Çek(f)\big)=\ \varphi\big(m_2+Çek(f)\big)$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla φ dönüşümü fonksiyondur.

Her $m_1+Çek(f), m_2+Çek(f)\in {}^{M}/_{Çek(f)}$ için

$$\begin{aligned}\varphi\big((m_1+Çek(f))+(m_2+Çek(f)\big)&=\varphi\big(m_1+m_2+Çek(f)\big)\\&=f(m_1+m_2)\\&=f(m_1)+f(m_2)\\&=\varphi\big(m_1+Çek(f)\big)+\varphi(m_2+Çek(f))\end{aligned}$$

elde edilir.

Her $m+Çek(f)\in {}^{M}/_{Çek(f)}$ ve $\forall r\in R$ için $\varphi(r\big(m+Çek(f)\big)=\varphi(rm+Çek(f))$

$$\begin{aligned}&=f(rm)\\&=rf(m)\\&=r\varphi(m+Çek(f))\end{aligned}$$

olduğundan φ homomorfizmadır.

$$\begin{aligned}Çek(\varphi)&=\left\{m+Çek(f)\in {}^{M}/_{Çek(f)}\,\middle|\,\varphi\big(m+Çek(f)\big)=f(m)=0\right\}\\&=\left\{m+Çek(f)\in {}^{M}/_{Çek(f)}\,\middle|\,m\in Çek(f)\right\}=\{Çek(f)\}\end{aligned}$$

olduğundan φ birebirdir. φ nin örtenliği açıktır. Dolayısıyla φ izomorfizma olup ${}^{M}/_{Çek(f)}\cong Gör(f)$ bulunur.

2.3.10 Teorem (I. İzomorfizma Teoremi) M R-modülünün H ve K alt modülleri için ${}^{(H+K)}/_{K}$, ${}^{M}/_{K}$ modülünün alt modülü olup ${}^{(H+K)}/_{K}\cong {}^{H}/_{(H\cap K)}$ dır [8].

İspat Her $h\in H$ için $\varphi(h)=h+k+K=h+K$ ile tanımlı $\varphi\colon H\longrightarrow {}^{(H+K)}/_{K}$ dönüşümünü alalım. $\forall h_1,h_2\in H$ için $h_1=h_2$ iken $\varphi(h_1)=h_1+K=h_2+K=\varphi(h_2)$ olduğundan φ fonksiyondur. Her $h_1,h_2\in H$ için $\varphi(h_1+h_2)=h_1+h_2+K=(h_1+K)+(h_2+K)=\varphi(h_1)+\varphi(h_2)$ elde edilir. Ayrıca $\forall h\in H,\forall r\in R$ için $\varphi(rh)=rh+K=r(h+K)=r\varphi(h)$ olduğundan φ R-modül homomorfizmasıdır.

Her $h+k+K=h+K\in {}^{(H+K)}/_{K}$ elemanı için $\varphi(h)=h+K$ olacak şekilde $h\in H$ elemanı olduğundan φ örtendir. $h\in Çek(\varphi)$ keyfi elemanı için $\varphi(h)=h+K=K$ olup $h\in H\cap K$ bulunur. Tersine $h\in H\cap K$ için $\varphi(h)=K$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $Çek(\varphi)=H\cap K$ olup Teorem 2.3.9 dan istenen elde edilir.

2.3.11 Teorem (II. İzomorfizma Teoremi) M R-modül ve $K\leq N\leq M$ olsun. Bu durumda ${}^{(M/K)}/_{(N/K)}\cong {}^{M}/_{N}$ dir [9].

İspat ${}^{(M/K)}/_{(N/K)}$ bölüm modülünün anlamlı olduğunu göstermek için ${}^{N}/_{K}$ nın ${}^{M}/_{K}$ nın bir alt modülü olduğunu gösterelim. $N\leq M$ olduğundan $0_N+K\in {}^{N}/_{K}$ olup ${}^{N}/_{K}\neq\emptyset$ dır. Her $n_1+K,n_2+K\in {}^{N}/_{K}$ için $(n_1+K)-(n_2+K)=(n_1-n_2)+K\in {}^{N}/_{K}$ elde edilir. Ayrıca $\forall r\in \forall n+K\in {}^{N}/_{K}$ için $r(n+K)=rn+K\in {}^{N}/_{K}$ dır.

Her $m+K\in {}^{M}/_{K}$ için $f(m+K)=m+N\in {}^{M}/_{N}$ ile tanımlı $f\colon {}^{M}/_{K}\longrightarrow {}^{M}/_{N}$ dönüşümünü alalım. Her $m+K,m'+K\in {}^{M}/_{K}$ için $m+K=m'+K$ olsun. Buradan $m-m'\in K\leq N$ olup $m-m'\in N$ iken $m-m'+N=N$ dir. Böylece $m+N=m'+N$ eşitliğinden $f(m+K)=f(m'+K)$ bulunur. Dolayısıyla $f\colon {}^{M}/_{K}\longrightarrow {}^{M}/_{N}$ dönüşümü bir fonksiyondur.

Her $m_1+K,m_2+K\in {}^{M}/_{K}$ için
$$\begin{aligned} f\big((m_1+K)+(m_2+K)\big) &= f(m_1+m_2+K)\\ &= m_1+m_2+N\\ &= (m_1+N)+(m_2+N)\\ &= f(m_1+K)+f(m_2+K)\end{aligned}$$
elde edilir. Ayrıca $\forall r\in R,\forall m+K\in {}^{M}/_{K}$ için $f(r(m+K))=f(rm+K)=rm+N$ $=rf(m+K)$ olup f bir R-modül homomorfizmasıdır. Her $m+K\in Çek(f)$ için $f(m+K)=m+N=N$ olup $m\in N$ bulunur. Böylece $m+K\in {}^{M}/_{K}$ dır. Her $n+K\in {}^{N}/_{K}$ için $n\in N$ olup $f(n+K)=n+N=N$ eşitliğinden $n+K\in Çek(f)$ elde edilir. Dolayısıyla $Çek(f)={}^{N}/_{K}$ dir. Her $m+N=f(m+K)$ olacak şekilde $m+K\in {}^{M}/_{K}$ bulunur. Buradan f örtendir. Teorem 2.3.9 dan istenen izomorfizma görülür.

2.3.12 Tanım $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ modüller ailesinden ve bunların $f_n\colon M_n \longrightarrow M_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan $\ldots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots$ dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $Gör(f_n) = Çek(f_{n-1})$ oluyorsa bu diziye **tam dizi** adı verilir. $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ şeklindeki tam diziye ise **kısa tam dizi** adı verilir [1].

2.3.13 Teorem $0 \longrightarrow A \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{k}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $h \circ f = I_A$ olacak şekilde bir $h\colon B \longrightarrow A$ homomorfizması vardır.

ii) $Görf,\ B$ modülünün direkt toplam terimidir.

iii) $g \circ k = I_C$ olacak şekilde $k\colon C \longrightarrow B$ R-modül homomorfizması vardır ve $B \cong A \oplus C$ dir [1].

Teorem 2.3.13 deki denk koşullarından birini sağlayan kısa tam diziye **parçalanabilir kısa tam dizi** denir [1].

2.3.14 Tanım M R-modül ve N, M nin öz alt modülü olsun. M nin N yi kapsayan N den farklı öz alt modülü mevcut değilse N öz alt modülüne M modülünün **maksimal alt modülü** denir. Örneğin $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $< p >= p\mathbb{Z}$, ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ modülünün maksimal alt modülüdür [9].

2.3.15 Yardımcı Teorem (Zorn Yardımcı Teoremi) X boş olmayan KSK olsun. X in her tam sıralı alt kümesinin (zincirinin) üst sınırı varsa X maksimal bir eleman içerir [18].

2.3.16 Önerme Sonlu üretilmiş bir modülün her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanır [9].

İspat M sonlu üretilmiş bir modül ve M', M modülünün keyfi alt modülü olsun. M nin M' alt modülünü kapsayan tüm öz alt modüllerinin kümesini Γ ile gösterelim. $M' \in \Gamma$ olup $\Gamma \neq \emptyset$ dır. Γ, $\subseteq$ bağıntısına göre bir KSK dır. Λ, Γ nın boştan farklı bir tam sıralı alt kümesi olsun. Λ nın tüm elemanlarının birleşimini M_0 alalım. Λ tam sıralı olduğundan M_0, M nin alt modülüdür. Üstelik M_0, M nin öz alt modülüdür. Eğer M_0, M nin öz alt modülü olmasa, M sonlu üretilmiş olduğundan sonlu bir $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ üreteç kümesine sahip olup m_i, Λ ya ait olur. Λ tam sıralı olduğundan Λ nın tüm m_i leri kapsayan bir K elemanı vardır. Buradan $M \subseteq K$ bulunur. Dolayısıyla $M \in \Lambda$ dır. Ancak bu Λ tam sıralı kümesinin seçimiyle çelişir. O halde M_0, M nin öz alt modülüdür. Ayrıca $M_0 \subseteq M$ olduğu açıktır. Buradan $M_0 \in \Gamma$ ve M_0 , Λ nın bir üst sınırıdır. Yardımcı Teorem 2.3.15 gereğince Γ bir L maksimal elemanına sahiptir. L , M nin maksimal elemanı olup M nin M' öz alt modülü L maksimal alt modülünde kapsanır.

2.3.17 Teorem R halka, M R-modül ve U, M nin alt modülü olsun. Bu takdirde M nin U yu içeren tüm alt modüllerinin kümesi ile $M/_U$ nun tüm alt modüllerinin kümesi arasında birebir eşleme vardır. Burada V, M nin U alt modülünü içeren alt modülü ise $M/_U$ nun alt modülleri $V/_U$ formundadır [1].

İspat $U \leq M$ olduğundan $\pi: M \longrightarrow M/_U$ doğal homomorfizması kullanılarak $U \subseteq V \leq M$ için $\pi(V) = V/_U \leq M/_U$ elde edilir. Tersine $K \leq M/_U$ ise, $V = \pi^{-1}(K)$ için $U = Çek(\pi) = \pi^{-1}(0) \leq V \leq M$ ve $\pi(V) = V/_U = K$ olduğundan $M/_U$ nun her alt modülü $U \leq V \leq M$ olmak üzere $V/_U$ şeklindedir.

2.3.18 Teorem $\{M_i\}_{i\in I}$ R-modüllerinin ailesi ve her $i\in I$ için $N_i \leq M_i$ olsun. Bu takdirde $\oplus_{i\in I} M_i/_{\oplus_{i\in I} N_i} \cong \oplus_{i\in I}\left(M_i/_{N_i}\right)$ izomorfizması vardır [9].

İspat Her $(m_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M_i$ için $f((m_i)_{i\in I}) = (m_i + N_i)_{i\in I}$ şeklinde tanımlı $f: \oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i/_{N_i}$ dönüşümü verilsin. Her $(m_i)_{i\in I}, (m_i')_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M_i$ için

$(m_i)_{i\in I} = (m_i')_{i\in I}$ olsun. Bu takdirde her $i\in I$ için $m_i = m_i'$ dir. Buradan $\forall\, i\in I$ için $m_i + N_i = m_i' + N_i$ olup $(m_i + N_i)_{i\in I} = (m_i' + N_i)_{i\in I}$ elde edilir. Dolayısıyla $f((m_i)_{i\in I}) = f((m_i')_{i\in I})$ bulunur. Her $(m_i)_{i\in I}$, $(m_i')_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M_i$ için

$$\begin{aligned}
f((m_i)_{i\in I} + (m_i')_{i\in I}) &= f((m_i + k_\mathrm{i})_{i\in I}) \\
&= (m_i + k_\mathrm{i} + N_i)_{i\in I} \\
&= ((m_i + N_i) + (k_\mathrm{i} + N_i))_{i\in I} \\
&= (m_i + N_i)_{i\in I} + (k_\mathrm{i} + N_i)_{i\in I} \\
&= f((m_i)_{i\in I}) + f((k_\mathrm{i})_{i\in I}) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Ayrıca $\forall r \in R$ için $f(r(m_i)_{i\in I}) = f((rm_i)_{i\in I}) = (rm_i + N_i)_{i\in I} = r(m_i + N_i)_{i\in I}$ $= rf((m_i)_{i\in I})$ olduğundan f bir R-modül homomorfizmasıdır.

Her $(x_i + N_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} \left({M_i}/{N_i} \right)$ için $x_i \in M_i$ dir. Böylece $f((x_i)_{i\in I}) = (x_i + N_i)_{i\in I}$ olacak şekilde $(x_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M_i$ mevcut olduğundan f R-modül epimorfizmasıdır.

Her $(y_i)_{i\in I} \in Çek(f)$ için $f((y_i)_{i\in I}) = (y_i + N_i)_{i\in I} = (N_i)_{i\in I}$ olup $\forall i \in I$ için $y_i \in N_i$ bulunur. Dolayısıyla $(y_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} N_i$ dir. Tersine her $(z_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} N_i$ için $f((z_i)_{i\in I}) = (z_i + N_i)_{i\in I} = (N_i)_{i\in I}$ olduğundan $(z_i)_{i\in I} \in Çek(f)$ dir. Böylece $Çek(f) = \oplus_{i\in I} N_i$ bulunur. Teorem 2.3.9 dan ilgili izomorfizma elde edilir.

2.4 Basit ve Yarı-Basit Modüller

2.4.1 Tanım Sıfır ve kendisinden farklı alt modülü mevcut olmayan sıfırdan farklı modüle **basit modül** denir [12].

2.4.2 Teorem M basit modül olsun. 0, M nin maksimal alt modülüdür ve her $m \in M$ için $M = Rm$ dir [1].

İspat M basit modül olduğundan 0 modülünü kapsayan bir öz alt modülü mevcut değildir. Dolayısıyla 0, M nin maksimal alt modülüdür. Her $0 \neq m \in M$ elemanı için $Rm \leq M$ dir. M basit modül ve $0 \neq Rm$ olduğundan $Rm = M$ dir. Sonuç olarak M devirlidir.

2.4.3 Teorem M modülünün U alt modülünün maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul ${M}/{U}$ bölüm modülünün basit olmasıdır [12].

İspat ($\Longrightarrow$) ${K}/{U}$, ${M}/{U}$ nun bir alt modülü olsun. Burada $U \leq K$ dır. Hipotez gereği U, M nin maksimal alt modülü olduğundan $U = K$ veya $K = M$ dir. O halde ${M}/{U}$ nun alt modülleri ${U}/{U}$ veya ${M}/{U}$ dur. Dolayısıyla ${M}/{U}$ bölüm modülü basittir.

($\Longleftarrow$) ${M}/{U}$ bölüm modülü basit olsun. $U < V \leq M$ olan M nin V alt modülünü alalım. Buradan ${U}/{U} < {V}/{U} \leq {M}/{U}$ olur. ${M}/{U}$ basit modül olduğundan ${V}/{U} = {M}/{U}$ olup $V = M$ dir. Dolayısıyla $U \leq M$ maksimal alt modüldür.

2.4.4 Teorem M modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M nin her alt modülü basit alt modüllerin bir toplamıdır.

ii) M basit alt modüllerin toplamıdır.

iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır [18].

2.4.5 Tanım Teorem 2.4.4 te verilen denk koşullardan birini sağlayan M modülüne **yarı-basit modül** denir.

$0 \neq n$ kare çarpansız bir tamsayı olduğunda $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ yarı-basit $\mathbb{Z}$-modüldür [12].

2.4.6 *Sonuç* Yarı-basit bir M modülü için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) M nin her alt modülü yarı-basittir.

ii) M nin homomorfik görüntüsü yarı-basittir [12].

2.4.7 *Sonuç* Yarı-basit modüllerin toplamı yarı-basittir [12].

2.5 Küçük Alt Modüller

2.5.1 Tanım R halka ve M R-modül olmak üzere $K,\ M$ modülünün öz alt modülü olsun. Eğer $K + L = M$ koşulunu sağlayan M modülünün L öz alt modülü yoksa K alt modülüne M modülünde **küçüktür** denir ve $K \ll M$ şeklinde gösterilir.

Sıfırdan farklı her modülün sıfır alt modülünün modülün kendisinde küçük olduğu aşikardır. Küçük alt modüle bir örnek teşkil etmesi açısından $\mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}-$modülünün $K = \langle \bar{4} \rangle$ alt modülü alınarak K nın $\mathbb{Z}_8$ in bir küçük alt modülü olduğu kontrol edilebilir [25].

2.5.2 Önerme (Küçük Alt Modülün Özellikleri)

i) M modül ve $U < V \leq M$ olsun. Eğer $V \ll M$ ise $U \ll M$ dir.

ii) M modül ve $U < V \leq M$ olsun. Eğer $U \ll V$ ise, U ve U nun alt modülleri V alt modülünü kapsayan M modülünün alt modüllerinde küçüktür.

iii) M modül, $K_1, K_2, \dots, K_n$, $M_1, M_2, \dots, M_n$, M modülünün alt modülleri ve her $i = 1,2,\dots,n$ için $K_i \ll M_i$ olsun. Bu takdirde $K_1 + K_2 + \dots + K_n \ll M_1 + M_2 + \dots + M_n$ dir.

iv) M, K birer R-modül ve $f: M \longrightarrow K$ bir homomorfizma olsun. $N \ll M$ ise, $f(N) \ll f(M)$ dir.

v) M modül, $L \leq M$, $N \leq L$ ve L , M nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $N \ll L$ olması için gerek ve yeter koşul $N \ll M$ olmasıdır.

vi) $K \leq M$ alt modülü M de hem küçük hem de direkt toplam terimi ise $K = 0$ dır.

vii) M/N sonlu üretilmiş ve $N \ll M$ ise, M modülü sonlu üretilmiştir [24].

İspat i) $U+L=M$ olacak şekilde $L \leq M$ verilsin. $U<V$ olduğundan $V+L=M$ yazılır. Hipotez gereğince $V \ll M$ iken $L=M$ olup $U \ll M$ elde edilir.

ii) L, M nin V alt modülünü kapsayan bir alt modülü olsun. $U+K=L$ koşulunu gerçekleyen $K \leq L$ alt modülü verilsin. Bu eşitliğinin V ile kesişimi alınırsa $(U+K) \cap V=V$ olup $U \leq V$ ve Teorem 2.2.10 dan $U+(V \cap K)=V$ bulunur. $U \ll V$ olduğundan $V \cap K=V$ eşitliği sağlanır. Buradan $V \leq K$ dır. $U<V \leq K$ ve $U+K=L$ iken $K=L$ elde edilir. Dolayısıyla $U \ll L$ bulunur.

iii) İspatı $n=2$ için yapalım. $K_1+K_2+L=M_1+M_2$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülünü alalım. $K_1 \ll M_1$ olduğundan (i) şıkkından $K_1 \ll M_1+M_2$ olur. Buradan $K_2+L=M_1+M_2$ olur. Benzer şekilde $K_2 \ll M_2$ olduğundan (i) şıkkından $K_2 \ll M_1+M_2$ olup $L=M_1+M_2$ elde edilir. Böylece $K_1+K_2 \ll M_1+M_2$ bulunur. Sonlu sayıdaki K_i alt modülleri için de ispat benzer şekilde yapılır.

iv) $f(N)+U=f(M)$ olacak şekilde $U \leq f(M)$ alt modülü verilsin. Bu takdirde $f^{-1}(f(N)+U)=M$ dir. Buradan $N+f^{-1}(U)=M$ elde edilir. $N \ll M$ iken $f^{-1}(U)=M$ buradan da $U=f(M)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $f(N) \ll f(M)$ olup (i) şıkkından $f(N) \ll K$ bulunur.

v) $N \ll L$ ise (i) şıkkından $N \ll M$ dir. Tersine; $N \ll M$ olsun. $N+V=M$ olacak şekilde herhangi $V \leq M$ alt modülünü alalım. L, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M=L \oplus U$ olacak şekilde $U \leq M$ vardır. Bu durumda $N+V+U=M$ ve $N \ll M$ olduğundan $V+U=M$ dir. Son eşitliğin L ile kesişimi alınırsa, Teorem 2.2.10 dan $L=V+(U \cap L)=V$ olur. O halde $N \ll L$ dir.

vi) K, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M=K \oplus L$ olacak şekilde $L \leq M$ vardır. Buradan $M=K+L$ ve $K \ll M$ olduğundan $L=M$ dir. Ayrıca $K \cap L=0$ ve $L=M$ olduğundan $K=K \cap M=0$ eşitliği elde edilir.

vii) M/N sonlu üretilmiş olsun. Bu takdirde $M=N+K$ olacak şekilde sonlu üretilmiş $K \leq M$ alt modülü vardır. $N \ll M$ olduğundan $K=M$ bulunur. Dolayısıyla M sonlu üretilmiştir.

2.6 Bir Modülün Radikali

2.6.1 Tanım R halka ve M R-modül olsun. M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin kesişimine M modülünün **radikali** denir ve $RadM$ ile gösterilir. Eğer M modülünün maksimal alt modülü yoksa $RadM=M$ dir. $RadM=M$ ise, M modülüne **radikal modül** denir. R R-modül olduğundan $RadR$, R nin radikali olup kısaca J ile gösterilir. J ye R halkasının **Jacobson radikali** adı verilir. Ayrıca M nin tüm radikal alt modüllerinin toplamı $P(M)$ ile gösterilir. $P(M) = \sum_{\substack{L \leq M \\ L = RadL}} L$ dir. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ modülü maksimal alt modüle sahip olmadığından $Rad\ {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ dur. Dolayısıyla radikal modül örneği olarak ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ modülü verilebilir. Üstelik $P({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ dir [25].

2.6.2 Yardımcı Teorem M modül olsun. $m \in M$ olmak üzere Rm devirli modülünün M nin küçük alt modülü olmaması için gerek ve yeter koşul $m \notin U$ olacak şekilde $U < M$ maksimal alt modülünün olmasıdır [20].

İspat ($\Leftarrow$) $m \notin U$ olacak şekilde M nin U alt modülü verilsin. Kabul edelim ki $Rm \ll M$ olsun. Hipotez gereğince $U + Rm = M$ olmalıdır. $Rm \ll M$ iken $U = M$ çelişkisi elde edilir. O halde Rm devirli alt modülü M de küçük alt modül olamaz.

($\Rightarrow$) Rm devirli alt modülünün M modülünün küçük alt modülü ve $X = \{N < M \mid N + Rm = M\}$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden $X \neq \emptyset$ dir. X kapsama bağıntısına göre KSK dır. Y, X kümesinin bir zinciri olsun. $Y_0 = \bigcup_{K \in Y} K$, Y kümesinin bir üst sınırı olup $m \notin Y_0$ dır. Şayet $m \in Y_0$ olsa bir $K \in Y$ için $m \in K$ olup $K = K + Rm = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $Y_0 < M$ dir. Ayrıca her $K \in Y$ için $K + Rm = M$ olduğundan $Y_0 + Rm = M$ olup $Y_0 \in X$ bulunur. Buradan da Y, X kümesinde üst sınıra sahip olup Yardımcı Teorem 2.3.15 gereğince X kümesi bir U maksimal elemanını içerir. $U < V \leq M$ keyfi olsun. Buradan $U + Rm = M$ olduğundan $V + Rm = M$ bulunur. Diğer taraftan U, X kümesinin maksimal elemanı olduğundan $V \notin X$ dir. Dolayısıyla X kümesinin tanımından dolayı $V = M$ olup U alt modülü M modülünün maksimal alt modülü bulunur.

2.6.3 *Sonuç* M modül ve $m \in M$ olsun. $Rm \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $m \in RadM$ olmasıdır [25].

2.6.4 Teorem Bir M modülü için $RadM = \sum_{K \ll M} K$ dır [25].

İspat $m \in RadM$ keyfi elemanı verilsin. Sonuç 2.6.3 den $Rm \ll M$ olup $m \in Rm \leq \sum_{K \ll M} K$ dir. Tersine $m \in \sum_{K \ll M} K$ keyfi elemanı verilsin. Kabul edelim ki; N, M nin maksimal alt modülü olmak üzere $m \notin N$ olsun. Bu durumda $M = Rm + N$ dir. $m \in \sum_{K \ll M} K$ olduğundan $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ olacak şekilde $K_i \ll M$ $(i = 1,2, \dots n)$ olan $K_i \leq M$ alt modülleri vardır. Buradan $Rm = R(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = Rk_1 + Rk_2 +$

$\cdots + Rk_n \leq K_1 + K_2 + \cdots + K_n$ bulunur. Ayrıca Önerme 2.5.2 (i) ve (iii) den $K_1 + K_2 + \cdots + K_n$ ve Rm, M nin küçük alt modülleridir. $M = Rm + N$ ve $Rm \ll M$ olduğundan $M = N$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\sum_{K \ll M} K \subseteq RadM$ olup $RadM = \sum_{K \ll M} K$ eşitliği vardır.

2.6.5 Yardımcı Teorem M R-modül olsun. I indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için K_i R-modülleri M nin K alt modülünü kapsayan alt modülleri olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i \in I} (K_i/K) = (\bigcap_{i \in I} K_i)/K$ dir [12].
İspat $m + K \in \bigcap_{i \in I} (K_i/K)$ keyfi elemanı verilsin. Bu takdirde $\forall i \in I$ için $m + K \in K_i/K$ olup $m \in K_i$ dir. Böylece $m \in \bigcap_{i \in I} K_i$ olur ki buradan $m + K \in (\bigcap_{i \in I} K_i)/K$ bulunur. Dolayısıyla $\bigcap_{i \in I} (K_i/K) \leq (\bigcap_{i \in I} K_i)/K$ dir. Ters kapsama benzer işlemlerle görülür.

2.6.6 Teorem (Radikalin Özellikleri) M modül olsun. Bu takdirde;
i) $Rad(M/RadM) = 0$ dır.
ii) $N \leq M$ ise, $RadN \leq RadM$ dir.
iii) K R-modül olmak üzere her $f \in Hom(M, K)$ için $f(RadM) \leq RadK$ dır. Eğer $Çek(f) \leq RadM$ ise, $f(RadM) = Radf(M)$dir. Özel olarak her $f \in End(M)$ için $f(RadM) \leq RadM$ dir.
iv) $K \leq M$ iken $(K + RadM)/K \leq Rad(M/K)$ ve $K \leq RadM$ ise $Rad(M/K) = (RadM)/K$ dir.
v) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise, $RadM = \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ ve $M/RadM \cong \bigoplus_{i \in I}(M_i/RadM_i)$ dir.
vi) M modülünün radikal modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her sonlu üretilmiş N öz alt modülü için $N \ll M$ olmasıdır,
vii) M sonlu üretilmiş ise, $RadM \ll M$ dir.
viii) $N \leq K \leq M$ için $N \subseteq RadM$ ve K, M nin direkt toplam terimi ise, $N \subseteq RadK$ dır [25].
İspat i) Teorem 2.3.17 gereğince M modülünün maksimal alt modülleri ile $M/RadM$ bölüm modülünün maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. X, M nin tüm maksimal alt modüllerinin kümesi olmak üzere $M/RadM = \bigcap_{U \in X}(U/RadM) = (\bigcap_{U \in X} U)/RadM = RadM/RadM = 0$ elde edilir.

ii) $N \leq M$ ve $m \in RadN$ olsun. Bu takdirde Sonuç 2.6.3 den $Rm \ll N$ olup Önerme 2.5.2 (ii) den $Rm \ll M$ elde edilir. Tekrar Sonuç 2.6.3 den $m \in RadM$ olup $RadN \leq RadM$ bulunur.

iii) $m \in RadM$ ise Sonuç 2.6.3 den $Rm \ll M$ olup Önerme 2.5.2 (iii) den $f(Rm) = Rf(m) \ll f(M)$ bulunur. Dolayısıyla $f(m) \in Radf(M)$ olup $f(RadM) \leq Radf(M)$ elde edilir. $Çek(f) \leq RadM$ olsun. $f(m) \in Radf(M)$ keyfi elemanı verilsin. Tekrar Sonuç 2.6.3 uygulanırsa $Rf(m) \ll f(M)$ olduğu görülür. Kabul edelim ki $m \notin RadM$ olsun. Bu takdirde Yardımcı Teorem 2.6.2 den dolayı $Rm + K = M$ olacak şekilde M modülünün bir K maksimal alt modülü vardır. Buradan $f(M) = Rf(m) + f(K)$ iken $Rf(m) \ll f(M)$ olduğundan $f(M) = f(K)$ dır. Böylece $M = K + Çek(f)$ eşitliğinden $Çek(f) \leq RadM \leq K$ olduğundan $M = K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $m \in RadM$ den $f(m) \in f(RadM)$ dir. Sonuç olarak $f(RadM) = Radf(M)$ bulunur.

iv) $\pi: M \longrightarrow M/K$ doğal homomorfizması verilsin. Buradan $Çek(\pi) = K$ dir. (iii) den $Çek(\pi) \leq RadM$ olup tekrar (iii) uygulanırsa $\pi(RadM) = {}^{(RadM)}/_{K} = Rad(\pi(M)) = Rad({}^{M}/_{K})$ bulunur.

v) Her $i \in I$ için $M_i \leq M$ olmak üzere (ii) den $RadM_i \leq RadM$ olup $\bigoplus_{i\in I} RadM_i \leq RadM$ dir. Tersine, $m \in RadM$ keyfi elemanı için Sonuç 2.6.3 den $Rm \ll M$ olup $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k}$ olacak şekilde $j \in \{1,2,\dots,k\}$ olmak üzere $m_{i_j} \in M_{i_j}$ elemanları vardır. Buradan $Rm_{i_j} \leq Rm$ olup Önerme 2.5.2 (i) şıkkından $Rm_{i_j} \ll M$ dir. M_{i_j} modülleri M modülünün direkt toplam terimi olduğundan Önerme 2.5.2 (v) gereğince $Rm_{i_j} \ll M_{i_j}$ elde edilir. Teorem 2.6.4 den $m_{i_j} \in Rad(M_{i_j})$ olup $m \in \bigoplus_{i\in I} RadM_i$ dir. Sonuç olarak $\bigoplus_{i\in I} RadM_i = RadM$ dir. Ayrıca her $(x_i)_{i\in I} \in M$ için $f((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} (x_i + RadM_i)$ ile tanımlı $f: M \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} (M_i/RadM_i)$ dönüşümü epimorfizmadır ve $Çek(f) = RadM$ dir. Teorem 2.3.9 dan $M/RadM \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i/RadM_i)$ bulunur.

vi) $M = RadM$ ise Yardımcı Teorem 2.6.2 gereğince her $m \in M$ için $Rm \ll M$ olur. Buradan Önerme 2.5.2 (iii) den M modülünün sonlu üretilmiş her N öz alt modülü için $N \ll M$ dir. İspatın tersi Teorem 2.6.4 den açıktır.

vii) $RadM,\ M$ de küçük olmasın. Bu durumda $M = RadM + K$ olacak şekilde M nin K öz alt modülü vardır. M sonlu üretilmiş olduğundan M nin her öz alt modülü maksimal alt modülde kapsanır ve bu maksimal alt modül U olsun. Böylece $RadM \leq U$ ve $K \leq U$ olup $M = RadM + K = U$ çelişkisi elde edilir. Böylece $RadM \ll M$ dir.

viii) $n \in N$ keyfi olsun. $N \subseteq RadM$ olduğundan $Rn \ll M$ dir. K, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus T$ olacak şekilde $T \leq M$ vardır. $Rn \leq N \leq K$ olduğundan Önerme 2.5.2 (v) den $Rn \ll K$ dır. Teorem 2.6.4 den $N \subseteq RadK$ bulunur.

2.6.7 Tanım Her M R-modülü için $RadM = JM$ ise R halkasına **sol iyi halka** denir [3].

2.6.8 Önerme M modül olsun. Eğer M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyorsa, $RadM \ll M$ dir [25].

İspat $M = RadM + L$ olacak şekildeki keyfi $L < M$ öz alt modülü için, hipotez gereği $L \leq U$ olacak şekilde M modülünün bir U maksimal alt modülü vardır. $L \leq U$ ve $RadM \leq U$ olduğundan $M = RadM + L \leq U$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $L = M$ olup $RadM \ll M$ dir.

2.7 Serbest, Projektif ve İnjektif Modüller

2.7.1 Teorem F modül $X = \{x_k |\, k \in K\}$ de F nin alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki koşul denktir:

i) Her $a \in F$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfırdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak $\sum_{k \in K} r_k x_k$ şeklinde yazılabilir.

ii) Her $k \in K$ için $f_k(r) = rx_k$ şeklinde tanımlanan $f_k : R \longrightarrow Rx_k$ fonksiyonu bir izomorfizma olup $F = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$ dır [1].

2.7.2 Tanım Bir önceki teoremdeki denk koşullardan birini sağlayan F modülüne **serbest modül,** $X = \{\, x_k \mid k \in K \,\}$ kümesine de F modülünün **serbest üretenler kümesi** veya kısaca **tabanı** denir [9].

2.7.3 Tanım M, N ve P R-modülleri verilsin. Satır tam dizi olmak üzere eğer aşağıdaki diyagram değişmeli ise P modülüne ***M*-projektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bir başka deyişle yukarıdaki diyagramda f epimorfizma olmak üzere f, g homomorfizmaları için $g = f \circ h$ olacak şekilde bir $h: P \longrightarrow M$ homomorfizması bulunursa, P ye $\boldsymbol{M}$**-projektiftir** denir. Eğer bu diyagramdaki $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ satır tam dizisi keyfi alınırsa P ye **projektiftir** denir [1].

2.7.4 Teorem $\{P_k \mid k \in K\}$ bir modüller topluluğu olsun. $P = \oplus_{k \in K} P_k$ direkt toplam teriminin projektif olması için gerek ve yeter koşul her $k \in K$ için P_k nın projektif olmasıdır [9].

İspat $(\Rightarrow)$ $P = \oplus_{k \in K} P_k$ projektif olsun. Keyfi $f: A \longrightarrow B$ epimorfizmasını ve $t: P_k \longrightarrow B$ homomorfizmasını alalım. $\psi_k: P \longrightarrow P_k$ $k.$ izdüşüm ve $i_k: P_k \longrightarrow P$ içerme homomorfizması olsun. P projektif olduğundan $t \circ \psi_k: P \longrightarrow B$ homomorfizması için $t \circ \psi_k = f \circ h$ olacak şekilde bir $h: P \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur. $s: P_k \longrightarrow A$ homomorfizması $s = h \circ i_k$ olarak tanımlanırsa,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P_k \arrow[u, "t"'] \arrow[ul, dashed, "s"] & \\ & P \arrow[u, "\psi_k"'] \arrow[uul, dashed, "h"] & \end{tikzcd}$$

$f \circ s = f \circ h \circ i_k = t \circ \psi_k \circ i_k = t \circ I_{P_k} = t$ dir. Böylece P_k projektiftir.

$(\Leftarrow)$ Keyfi $f: A \longrightarrow B$ epimorfizmasını ve keyfi $g: P \longrightarrow B$ homomorfizması verilsin. Her $k \in K$ için P_k projektif olduğundan $g \circ i_k: P_k \longrightarrow B$ homomorfizması için $g \circ i_k = f \circ h_k$ olacak şekilde bir $h_k: P_k \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] & \\ & P_k \arrow[u, "i_k"'] \arrow[uul, dashed, "h_k"] & \end{tikzcd}$$

Her $k \in K$ için $h_k = h \circ i_k$ olacak şekilde bir $h: P \longrightarrow A$ homorfizması vardır. Bu durumda her $k \in K$ için $g \circ i_k = f \circ h_k = f \circ h \circ i_k$ eşitliği elde edilir. Buradan $g = f \circ h$ bulunur. Böylece $P = \oplus_{k \in K} P_k$ projektif modüldür.

2.7.5 Teorem Bir P modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) P projektiftir.

ii) P bir serbest modülün direkt toplam terimine izomorftur.

iii) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$ şeklinde olan her tam dizi parçalanabilir [1].

2.7.6 Tanım i) $f: P \longrightarrow M$ epimorfizması için $Çek(f) \ll P$ ise f epimorfizmasına **küçük epimorfizma** denir [1].

ii) P projektif R-modül olmak üzere $f: P \longrightarrow M$ küçük epimorfizmasına M modülünün **projektif örtüsü** denir [1].

iii) P projektif R-modül olmak üzere $Çek(f) \subseteq RadP$ olan $f: P \longrightarrow M$ R-modül epimorfizmasına M modülünün **genelleştirilmiş projektif örtüsü** denir [24].

2.7.7 Teorem Bir M R-modülünün projektif örtüsü varsa bu örtü izomorfizma hariç tektir [1].

İspat $f: P \longrightarrow M$ ve $g: Q \longrightarrow M$ iki projektif örtü olsun. P projektif olduğundan $g \circ h = f$ olacak şekilde $h: P \longrightarrow Q$ homomorfizması vardır. f küçük epimorfizma ve h küçük epimorfizma yapısına sahiptir. Q projektif olduğundan $0 \longrightarrow Çekh \xrightarrow{i} P \xrightarrow{h} Q \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanabilirdir ve $P \cong Çekh \oplus Q$ dur. Diğer taraftan $Çekh \ll P$ olduğundan $Çekh = 0$ olup $P \cong Q$ dur.

2.7.8 Tanım M, N ve K R-modül olsun. Bu takdirde her $g: K \longrightarrow N$ monomorfizması ve her $f: K \longrightarrow M$ homomorfizması için $f = h \circ g$ olacak şekilde bir $h: N \longrightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse M modülüne ***N*-injektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diyagramda $0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} N$ satır tam dizisi keyfi alınırsa M ye **injektif modül** denir.

2.8 Lokal ve Oyuk Modüller

2.8.1 Tanım i) M sıfırdan farklı R-modül olsun. M modülünün her N öz alt modülü için $N \ll M$ ise, M R-modülüne **oyuk modül** denir.
ii) M modülünün tüm öz alt modüllerini içeren bir öz alt modülü varsa M R-modülüne **lokal modül** denir.

Lokal modüller oyuktur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $p \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ $\mathbb{Z}$-modülü oyuk modül olup lokal değildir [25].

2.8.2 Tanım Tek maksimal alt modüle sahip modüle **zayıf lokal modül** denir [17].

2.8.3 Teorem Sıfırdan farklı M modülünün lokal olması için gerek ve yeter koşul M nin sonlu üretilmiş ve bir tek maksimal alt modüle sahip olmasıdır. Bu durumda M nin maksimal alt modülü $Rad(M)$ olup $Rad(M) \ll M$ dir [25].
İspat **(⇒)** M lokal modül ve M nin öz alt modüllerinin toplamı K olsun. $K \neq M$ olduğundan en az bir $m \in M$ vardır öyle ki $m \notin K$ ve $Rm \nleq K$ dır. K, M nin öz alt modüllerin toplamı olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir. K nın maksimal alt modül olduğu ise, tanımdan açıktır.
(⇐) M sonlu üretilmiş ve M tek K maksimal alt modülüne sahip olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan M nin kendisinden farklı her alt modülü K tarafından kapsanır. Dolayısıyla M nin kendisinden farklı tüm alt modüllerinin toplamı K olup M lokal modüldür. Radikalin tanımı gereği $RadM = K$ olup M sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 2.6.6 (vii) şıkkından dolayı $RadM \ll M$ elde edilir.

2.8.4 Önerme M lokal modül olsun. Bu takdirde; M zayıf lokaldir [17].
İspat M lokal modül olduğundan M nin tüm öz alt modüllerini içeren M de bir en geniş öz alt modül vardır. Üstelik bu özelliğe sahip öz alt modülü $RadM$ dir. Buradan $RadM$, M nin tek maksimal alt modülü olup M zayıf lokaldir.

2.8.5 Önerme M sıfırdan farklı R-modül olsun.
i) M nin oyuk olması için gerek ve yeter koşul M nin boştan farklı her bölüm modülü parçalanamaz olmasıdır.

ii) Aşağıdaki ifadeler denktir:

a) M oyuktur ve $Rad\ M \neq M$ dir.

b) M oyuktur ve devirlidir (veya sonlu üretilmiştir).

c) M lokaldir [25].

2.8.6 Tanım R birimli halka olsun. R tek sol maksimal ideale sahipse R ye **lokal halka** denir [25].

$p \in \mathbb{Z}$ asal ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^n}$ halkası lokaldir. Ayrıca her cisim aynı zamanda lokal halkadır.

2.8.7 Önerme R halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R lokaldir.

ii) R tek maksimal sol ideale sahiptir.

iii) R nin küçük olan tek maksimal sol ideali vardır.

iv) R nin terslenebilir olmayan iki elemanının toplamı terslenebilir değildir [25].

2.8.8 Tanım R değişmeli bölge olmak üzere M R-modül olsun. Sıfırdan farklı her $r \in R$ elemanı için $rM = M$ ise, M ye **bölünebilir modül** denir. Örnek olarak $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modülü bölünebilirdir [18].

İnjektif modüller bölünebilir modüldür.

2.8.9 Tanım R halka ve M R-modül olsun. ${M}/{Rad(M)}$ yarı-basit ise, M modülüne **yarı-lokal modül** ve ${}_RR$ (R_R) yarı-lokal ise, R halkasına **yarı-lokal halka** denir [25].

2.8.10 Önerme R lokal olmayan Dedekind bölgesi, P R nin maksimal ideali ve $0 \neq i \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde;

i) $I + P = P$ olması için gerek ve yeter koşul $I \subseteq P$ olmasıdır.

ii) $I + P^i = P$ olması için gerek ve yeter koşul $I \nsubseteq P$ olmasıdır.

iii) $i \geq 2,\ I + P^i = P$ olması için gerek ve yeter koşul $I \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P^2$ olmasıdır [24].

İspat: i) açıktır.

ii) $(\Rightarrow)$ $I + P^i = P$ iken $I = P$ olsa $R \subseteq P + P^i = P$ olup bu ise P nin R nin maksimal ideali olması ile çelişir. Dolayısıyla $I \nsubseteq P$ dir.

(⇐) $I \nsubseteq P$ olsun. $a \notin P$ olan $a \in I$ için P, R nin maksimal ideali olduğundan $Ra + P = R$ eşitliği sağlanır. $R = Ra + P \subseteq I + P$ olduğundan $R = I + P$ elde edilir. Dolayısıyla $i = 1$ olmak üzere $R = I + P^i$ eşitliği doğrulanır. Kabul edelim ki $i < n$ olan her i için iddia doğru olsun. n için iddianın doğru olduğunu gösterelim. Böylece $R/_{P^n}$ bölüm halkasının $0 \subset P^{n-1}/_{P^n} \subset \cdots \subset P/_{P^n} \subset R/_{P^n}$ ideallerinin zincirinin tek türlülüğü kullanılarak $R = I + P^{n-1}$ olmak üzere $I/_{P^n} + P^{n-1}/_{P^n} = R/_{P^n}$ eşitliğinden $I = R$ dir. Böylece $I + P^n = R$ olduğu açıktır.

iii) (⇒) $i \geq 2$ için $I + P^i = P$ olsun. $I \subseteq I + P^i = P$ olduğundan $I \subseteq P$ dir. Kabul edelim ki $I \subseteq P^2$ olsun. $P = I + P^i \subseteq P^2 + P^i = P^2 \subseteq P$ olup $P = P^2$ çelişkisi elde edilir. Oysa ki $R/_P$ basit olup $R/_P$ nin ideallerinin zinciri $0 = P/_P \subset R/_P$ dir. Ancak $R/_{P^2}$ halkasının ideallerinin zinciri $0 = P^2/_{P^2} \subset P/_{P^2} \subset R/_{P^2}$ dir. Sonuç olarak $I + P^i = P$ iken $I \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P^2$ dir.

(⇐) $I \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P^2$ olsun. [[23] , Teorem 6.14] gereğince I' , R nin P de kapsanmayan bir ideali olmak üzere $I = PI'$ formundadır. (ii) den $I' \nsubseteq P$ olması kullanılarak $I' + P^{i-1} = R$ yazılır. Eşitliğin her iki tarafı P ideali ile çarpılırsa $PI' + P^i = PR = P$ olup $I + P^i = P$ bulunur.

2.8.11 Tanım R değişmeli halka ve M R-modül olsun. $m \in M$ için $T_m = \{r \in R | rm = 0\}$ R nin bir idealidir. Eğer $T_m \neq 0$ ise m ye M nin **burulma elemanı** denir. R, değişmeli bir bölge ise M nin tüm burulma elemanlarının kümesi $T(M)$, M nin alt modülüdür. Bu alt modüle **burulma alt modül** denir [9].

R Dedekind bölgesi ve M, R-modül olsun. P, R nin sıfırdan farklı asal ideali olsun. $\{x \in M | n \geq 0 \text{ için } P^n x = 0\}$ kümesi M_p ile gösterilir. M_p ye M R-modülünün ***P*-asıl bileşeni** denir. Eğer M burulma R-modül ise M P-asıl bileşenlerinin bir direkt toplamıdır. K, R nin kesir cismi olsun. $R(P^\infty)$ ile $K/_R$ burulma R-modülünün P-asıl bileşenini göstereceğiz. Ayrıca, $R(P^\infty)$ oyuk modüldür.

$B_p(1, \ldots, n)$ ile $R/_P, \ldots, R/_{P^n}$ bölüm modüllerinin kopyalarının toplamını gösterelim.

2.8.12 Teorem R Dedekind bölgesi olsun. Bu takdirde;

i) Sıfırdan farklı her asal ideal R nin maksimal idealdir.

ii) R deki her ideal bir takım asal ideallerin çarpımıdır.

iii) R den farklı her I ideali, P_i asal idealler ve $k_i \in \mathbb{N}$ için $R/_I \cong \prod_{i\leq n} R/_{P_i^{k_i}}$ dir.

iv) $P \subset R$ koşulunu sağlayan P asal ideali ve $k \in \mathbb{N}$ için $R/_{P^k}$ bölüm halkasında tek türlü $0 \subset P^{k-1}/_{P^k} \subset \cdots \subset P/_{P^k} \subset R/_{P^k}$ zinciri vardır [24].

İspat i) Q, R nin kesir cismi, I sıfırdan farklı asal ideal ve M, $I \subset M \subset R$ olan maksimal ideal olsun. R Dedekind bölgesi olduğundan her ideali projektiftir. $\sum a_i q_i = 1_R$, $Mq_i \subset R$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_n \in M$, $q_1, \dots, q_n \in Q$ elemanları mevcuttur. Böylece $\sum Ra_i = M$ dir. $M' = \sum Rq_i$ den $M'M = (\sum Rq_i)(\sum Ra_i) = \sum Ra_i q_i = R$ dir. Buradan $M'M = R$ elde edilir. $I(M'M) = IR = I$ olup $(IM')M = I$ dır. $I \subset M \subset R$ olduğundan $IM' \subset M'M \subset R$ kapsaması sağlanır. I, R nin asal ideali olduğundan $IM' \subset I$ veya $M \subset I$ dır.

$IM' \subset I$ olsun. Bu takdirde $(IM')M \subset IM$ olup $I(M'M) \subset IM$ dır. Dolayısıyla $I < IM$ ... (1) kapsaması elde edilir. Diğer taraftan $IM \subset IR = I$ ... (2) kapsaması açıktır.

(1) ve (2) den $I = IM$ dir. [[24],18.9 (1)] den $(1_R - r)I = 0$ olacak şekilde $r \in M$ elemanı vardır. Bu ise $I \subset M$ oluşu ile çelişeceğinden kabulümüz yanlıştır. O halde $M \subset I$ olmalıdır. Bu ise $I \subset M$ olması ile çelişir. R de I idealini kapsayan bir M öz ideali bulunmadığından I maksimaldir.

ii) R nin maksimal ideallerinin çarpımı olarak yazılamayan ideallerin boştan farklı kümesi Γ olsun. Γ KSK dır. K nın her tam sıralı alt kümesi (zinciri) bir üst sınıra sahip olacağından Yardımcı Teorem 2.3.15 gereğince Γ nın bir J maksimal ideali vardır. Burada J nin R nin maksimal ideali olması gerekmez. J, R nin bir öz ideali olduğundan bu ideal bir M maksimal idealinde kapsanır. (i) nin ispatında uyguladığımız yöntem ile $J \subset M$ iken $R \subset M'$ olduğundan $J \subset M'J$ bulunur ve $J \neq M'J$ dir. Şayet $J = M'J$ olsa $M'M = R$ olduğundan $JM = J$ bulunur. $JM = J$ olması ise (i) ile çelişir. $J \subset M'J$ olması J elemanının Γ için maksimal elemanı olması ile çelişir. Bu çelişki Γ kümesinin boştan farklı bir küme olduğunu kabul etmemizden kaynaklandığından R nin her idealinin bir takım maksimal ideallerinin çarpımı formunda olduğu görülür. Değişmeli bir halkada her maksimal ideal bir takım asal ideallerin çarpımıdır.

iii) (ii) den P_i ler R nin farklı asal idealleri ve $k_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I = {P_1}^{k_1} \dots {P_n}^{k_n}$ dir. $P_1, \dots, P_n$ R nin maksimal idealleridir. $1 \leq i \leq n$ olan her $i \neq j$ için $R = P_i + P_j$ sağlanır. Benzer işlemler tekrar edilerek $j > 1$ olmak üzere ${P_1}^{k_1} + {P_j}^{k_j} = R$ elde edileceğinden R birimli ve değişmeli halka olduğundan ve $R = {P_1}^{k_1} + {P_2}^{k_2} \dots {P_n}^{k_n}$ yazıldığından ${P_1}^{k_1} \cap \left({P_2}^{k_2} \dots {P_n}^{k_n}\right) = {P_1}^{k_1}{P_2}^{k_2} \dots {P_n}^{k_n}$ olup ${P_1}^{k_1} \cap {P_2}^{k_2} \cap \dots \cap {P_n}^{k_n} = {P_1}^{k_1}{P_2}^{k_2} \dots {P_n}^{k_n}$ $= I$ eşitliği sağlanır.

$$\Pi : R \longrightarrow \prod_{i \leq n} ({}^{R}\!/_{{P_i}^{k_i}})$$

$r \longmapsto \Pi(r) = \left(r + {P_1}^{k_1}, r + {P_2}^{k_2}, \dots, r + {P_n}^{k_n}\right)$ ile tanımlı Π dönüşümü bir epimorfizmadır.

$$\begin{aligned} Çek(\Pi) &= \left\{r \in R \middle| \Pi(r) = \left({P_1}^{k_1}, {P_2}^{k_2}, \dots, {P_n}^{k_n}\right)\right\} \\ &= \left\{r \in R \middle| \forall 1 \leq i \leq n \text{ için } r + {P_i}^{k_i} = {P_i}^{k_i}\right\} \\ &= \left\{r \in R \middle| \forall 1 \leq i \leq n \text{ için } r \in {P_i}^{k_i}\right\} \\ &= \left\{r \in R \middle| \forall 1 \leq i \leq n \text{ için } r \in {P_1}^{k_1} \cap \dots \cap {P_n}^{k_n}\right\} \\ &= {P_1}^{k_1} \dots {P_n}^{k_n} \\ &= I \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.3.9 gereğince ${}^{R}\!/_{I} \cong \prod_{i \leq n} ({}^{R}\!/_{{P_i}^{k_i}})$ bulunur.

iv) $\Psi : R \longrightarrow {}^{R}\!/_{P^k}$, $r \longmapsto r + P^k$ doğal homomorfizması kullanılarak ${}^{R}\!/_{P^k}$ nın her bir ideali $P^k \subset I$ olan R nin I idealleri için ${}^{I}\!/_{P^k}$ formundadır. I, (ii) gereğince R nin P^k yı kapsayan bir takım asal ideallerin çarpımı şeklindedir. Şayet $P^k \subset Q$, $P \neq Q$ koşulunu sağlayan R nin bir Q öz ideali olsa (ii) den $R = P^k + Q < Q$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla R de P^k yı kapsayan ideallerin $P, P^2, \dots, P^{k-1}$ oldukları görülür. Buradan ${}^{R}\!/_{P^k}$ bölüm halkasının ideallerinin zinciri $0 \subset {}^{P^{k-1}}\!/_{P^k} \subset \cdots \subset {}^{P}\!/_{P^k} \subset {}^{R}\!/_{P^k}$ olarak tek türlü şekilde belirlidir.

2.9 Tümleyen ve Rad-Tümleyen Alt Modüllerin Özellikleri

2.9.1 Tanım i) U, M modülünün alt modülü olsun. $U + L = M$ eşitliğini sağlayan $L \leq M$ alt modüllerinin kümesinin minimal elemanı M nin V alt modülüne U nun M de **tümleyeni** denir.
ii) $M = U + V$ koşulunu sağlayan her $V \leq M$ alt modülü U nun M modülünde bir tümleyenini kapsıyor ise U ya M **bol tümleyene sahiptir** denir[24].

Bir M modülünün her direkt toplam terimi tümleyendir.

2.9.2 Yardımcı Teorem M R-modül ve K ile N, M nin alt modülleri olsun. Bu takdirde; N nin K nın tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = K + N$ ve $K \cap N \ll N$ olmasıdır [24].
İspat ($\Longrightarrow$) N, K nın M de tümleyeni olsun. Bu takdirde N, $M = K + L$ eşitliğini sağlayan $L < M$ öz alt modüllerinin kümesinin minimal elemanıdır. Böylece $M = K + N$ olur. Şimdi $(K \cap N) + X = N$ koşulunu sağlayan $X \leq N$ için $X = N$ olduğunu gösterelim.
$M = K + (K \cap N) + X = K + X$ eşitliğinden $X \leq N$ dir. Bu ise N nin minimalliği ile çelişeceğinden $X = N$ olmalıdır.
($\Longleftarrow$) $M = K + N$ ve $K \cap N \ll N$ olsun. $Y < N$ iken $M = K + Y$ eşitliğinin her iki tarafının N ile kesişimi alınırsa $M \cap N = (K + Y) \cap N$ olup $N = (K \cap N) + Y$ elde edilir. $K \cap N \ll N$ olduğundan $N = Y$ dir. Böylece N, K nın M de tümleyenidir.

2.9.3 Teorem U, V M R-modülünün alt modülleri ve V, U nun tümleyeni olsun. Bu takdirde;
i) W , U nun öz alt modülü iken $W + V = M$ ise V, W nın tümleyenidir.
ii) M sonlu üretilmiş ise V de sonlu üretilmiştir.
iii) U, M nin maksimal alt modülü ise V devirli ve $U \cap V = RadV, V$ nin tek maksimal alt modülüdür.
iv) $K \ll M$ ise $V, U + K$ nın bir tümleyenidir.
v) $K \ll M$ iken $K \cap V \ll V$ ve buradan $RadV = V \cap RadM$ dir.
vi) $RadM \ll M$ ise U, M nin maksimal alt modülünde içerilir.
vii) L , U öz alt modülü iken $(V + L)/_L$, $U/_L$ bölüm modülünün $M/_L$ de tümleyenidir.

viii) $RadM \ll M$ ya da $RadM \subset U$ ve $\pi: M \longrightarrow M/_{RadM}$ doğal homomorfizma ise $M/_{RadM} = \pi(U) + \pi(V)$ dir [25].

İspat i) V, U nun M de tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. $W < U$ olduğundan $W + V = M$ ise $W \cap V \leq U \cap V \ll V$ dir. Önerme 2.5.2 (i) den $W \cap V \ll V$ elde edilir. Dolayısıyla V, W nın tümleyenidir.

ii) M sonlu üretilmiş olsun. $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Teorem 2.2.5 ten $M/_U$ sonlu üretilmiştir. O halde $M/_U = {}^{(U+V)}/_U \cong V/_{(U \cap V)}$ sonlu üretilmiştir. $U \cap V \ll V$ olduğundan Önerme 2.5.2 (vii) den V sonlu üretilmiştir.

iii) U, M nin maksimal alt modülü ise $M/_U$ basittir. O halde $M/_U = {}^{(U+V)}/_U \cong V/_{(U \cap V)}$ basit yani devirlidir. $U \cap V \ll V$ olduğundan Önerme 2.5.2 (vii) den V devirlidir. $V/_{(U \cap V)}$ basit olduğundan Teorem 2.4.3 ten $U \cap V, V$ nin maksimal alt modülüdür. $RadV \leq U \cap V$ olduğu açıktır. Ayrıca $U \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 2.6.4 den $U \cap V \leq RadV$ dir. Dolayısıyla $RadV = U \cap V$ olup $U \cap V, V$ nin tek maksimal alt modülüdür.

iv) $(U + K) + X = M$ eşitliğini sağlayan $X < V$ olsa $K \ll M$ olduğundan $U + X = M$ olur. Bu eşitlik V nin minimalliği ile çelişir. Dolayısıyla $X = V$ olmalıdır. V, $U + K$ nın M de tümleyenidir.

v) $K \ll M$ ve $X \leq V$ için $(K \cap V) + X = V$ olsun. $M = U + V$ den $M = U + (K \cap V) + X$ olup $K \cap V \leq K \ll M$ iken $K \cap V \ll M$ dir. Buradan $M = U + X$ elde edilir. V nin minimalliğinden $X = V$ olur. Yani $K \cap V \ll V$ dir. $K \ll M$ ve $K \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 2.6.4 den $RadM \cap V \subseteq RadV$ dir.

Ters kapsamayı göstermek için $a \in RadV$ keyfi elemanını alalım. Buradan Sonuç 2.6.3 gereğince $RadV \ll V$ dir. $Ra \ll M$ ve böylece $a \in RadM$ olur. $a \in V \cap RadM$ dir. Dolayısıyla $RadV \subseteq V \cap RadM$ elde edilir. Sonuç olarak $RadV = V \cap RadM$ dir.

vi) $RadM \ll M$ olsun. Bu takdirde $RadM \neq M$ dir. Eğer $U \subset RadM$ ise U, M nin bir maksimal alt modülünde kapsanır. $U \not\subset RadM$ ise (v) den $RadV = V \cap RadM \neq V$ dir. O halde V nin V' maksimal alt modülü vardır. Teorem 2.3.17 den $V/_{V'} \cong M/_{(U + V')}$ olup $U + V'$, M nin maksimal alt modülüdür. Sonuç olarak U, M nin $U + V'$ maksimal alt modülünde kapsanır.

vii) $\pi: M \longrightarrow M/_L$ doğal homomorfizmasını alalım. Hipotez gereğince $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ dir. $L < U$ iken $M/_L = U/_L + (V+L)/_L$ olduğu açıktır. $U/_L \cap (V+L)/_L = [U \cap (V+L)]/_L = [(U \cap V) + L]/_L$ bölüm modülünün $(V+L)/_L$ de küçük alt modül olduğunu gösterelim.

$[U \cap (V+L)]/_L + T/_L = (V+L)/_L$ olacak şekilde $T/_L \leq (V+L)/_L$ alt modülü verilsin. Buradan $[U \cap (V+L) + T]/_L = (V+L)/_L$ olup $U \cap (V+L) + T = V + L$ dir. Böylece $L + (U \cap V) + T = V + L$ olur. $U \cap V \ll V$ iken $U \cap V \ll V + L$ dir. $T = L + T = V + L$ elde edilir. Sonuç olarak $T/_L = (V+L)/_L$ dir. Yani $(V+L)/_L$, $U/_L$ nin $M/_L$ de tümleyenidir.

viii) Eğer $RadM \subset U$ ise $\pi(U) = (U + RadM)/_{RadM} = U/_{RadM}$ ve $\pi(V) = (V + RadM)/_{RadM}$ biçimindedir. $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ olduğundan $M/_{RadM} = U/_{RadM} + (V + RadM)/_{RadM}$ bulunur. Üstelik

$$U/_{RadM} \cap (V + RadM)/_{RadM} = [U \cap (V + RadM)]/_{RadM}$$

$$= [(U \cap V) + RadM]/_{RadM} \text{ olur.}$$

Eğer $RadM \ll M$ ise (iv) den V, $U + RadM$ in tümleyenidir. $M = (U + RadM) + V$, $(U + RadM) \cap V \ll V$ dir.

$$M/_{RadM} = [(U + RadM) + V]/_{RadM} = (U + RadM)/_{RadM} + (V + RadM)/_{RadM}$$

dir. $(U + RadM)/_{RadM} \cap (V + RadM)/_{RadM} = [(U + RadM) \cap (V + RadM)]/_{RadM}$ $\subseteq [(U \cap V) + RadM]/_{RadM}$ olur. $U \cap V \ll V$ olduğundan $U \cap V \ll M$ dir. Dolayısıyla $U \cap V \ll RadM$ elde edilir. Böylece $U \cap V + RadM = RadM$ eşitliği elde edilir. Buradan

$[(U \cap V) + RadM]/_{RadM} = {}^{RadM}/_{RadM}$ bulunur. ${}^{M}/_{RadM} = {}^{U}/_{RadM} \oplus$ $(V + RadM)/_{RadM}$ dir.

2.9.4 Tanım U, M modülünün alt modülü olsun. Eğer $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq RadV$ olacak şekilde M modülünün bir V alt modülü varsa bu V alt modülüne U nun $\boldsymbol{Rad}$**-tümleyeni** denir [20].

Her tümleyen aynı zamanda Rad-tümleyendir. Buna göre alt modüllerde aşağıdaki diyagram geçerlidir:
Direkt toplam terimi $\Longrightarrow$ Tümleyen $\Longrightarrow$ Rad-tümleyen

2.9.5 Önerme U ve V, M R-modülünün alt modülleri olsun. V nin U alt modülünün Rad-tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve her $m \in U \cap V$ için $Rm \ll V$ olmasıdır [20].
İspat ($\Longrightarrow$) V, U nun Rad-tümleyeni olsun. Bu takdirde $U + V = M$ ve $U \cap V \subseteq RadV$ dir. Keyfi bir $m \in U \cap V$ elemanını alalım. $RadV, V$ nin küçük alt modüllerinin toplamı olarak yazılabileceğinden $i = 1,2, \dots, n$ için $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ olacak şekilde $m_i \in V_i \ll V$ alt modülleri mevcuttur. $i = 1,2, \dots, n$ için $V_i \ll V$olduğundan $Rm_i \ll V$ dir. Buradan $Rm \leq Rm_1 + Rm_2 + \dots + Rm_n$ ve toplam sonlu olduğundan $Rm \ll V$ olduğu görülür.
($\Longleftarrow$)$U + V = M$ ve her $m \in U \cap V$ için $Rm \ll V$ olsun. $RadV = \sum_{L \ll V} L$ olduğundan her $m \in U \cap V$ için $m \in Rm \subseteq RadV$ olup $U \cap V \subseteq RadV$ dir.

2.9.6 Yardımcı Teorem U ve V, M R-modülünün alt modülleri ve V , U nun radikal olmayan Rad-tümleyeni olsun. Bu takdirde U, M nin bir maksimal alt modülünde kapsanır [21].

2.9.7 Önerme U ve V, M R-modülünün alt modülleri olmak üzere V, U alt modülünün Rad-tümleyeni olsun. Bu takdirde ${}^{M}/_{U}$ radikal ise V de radikal modüldür [21].
İspat Kabul edelim ki $RadV \neq V$ olsun. Bu takdirde; V Rad-tümleyeninin bir K maksimal alt modülü vardır. Yardımcı Teorem 2.9.6 dan $U + K, M$ modülünün maksimal alt

modülüdür. Dolayısıyla ${(U+K)}/_{U}$, ${M}/_{U}$ nun maksimal alt modülüdür. Bu durum hipotezle çelişir. O halde V radikal modüldür.

2.9.8 Teorem U ve V, M R-modülünün alt modülleri olmak üzere V, U alt modülünün Rad-tümleyeni olsun. Bu takdirde $U \cap V, U$ da tümleyen ise V tümleyendir [21].

İspat Hipotezden $M = U + V$ ve $U \cap V \leq RadV$ dir. Varsayalım ki $U \cap V, U$ modülünde $X \leq U$ alt modülünün tümleyeni olsun. Bu durumda $U = X + (U \cap V)$ ve $X \cap (U \cap V) = X \cap V \ll U \cap V$ olur. Böylece $M = U + V = X + (U \cap V) + V = X + V$ dir. Diğer taraftan $X \cap V \ll U \cap V$ olduğundan Önerme 2.5.2 (ii) den $X \cap V \ll V$ elde edilir. Dolayısıyla V, X in tümleyenidir.

2.9.9 Teorem M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M nin her alt modülü Rad-tümleyendir.

ii) M nin her alt modülü tümleyendir.

iii) M yarı-basittir [21].

İspat (iii)⟹(ii)⟹(i) Açıktır.

(i)⟹(iii) Kabul edelim ki M nin her alt modülü Rad-tümleyen olsun. M nin keyfi bir V alt modülü için $M = U + V$ ve $U \cap V \leq RadV$ koşullarını sağlayan $U \leq M$ alt modülü vardır. $m \in U \cap V$ alalım. Önerme 2.9.5 ten $Rm \ll V$ olup Önerme 2.5.2 (ii) gereğince $Rm \ll M$ elde edilir. Ayrıca hipotezden Rm, M modülünde Rad-tümleyendir. Böylece $m = 0$ olup $U \cap V = 0$ bulunur. Dolayısıyla V, M nin direkt toplam terimidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 ⊕-Tümlenmiş ve Yarı-Mükemmel Modüllerin Bazı Özellikleri

3.1.1 Tanım i) M R-modül olsun. M modülünün her N alt modülü için M/N bölüm modülü projektif örtüye sahip ise, M ye **yarı-mükemmel modül** denir.
ii) Her sonlu üretilmiş R-modülü projektif örtüye sahip olan R halkasına **yarı- mükemmel halka,** her R-modülü projektif örtüye sahip olan R halkasına da **sol mükemmel halka** denir.
iii) M R-modül olsun. M nin her alt modülü M de (bol) tümleyen(lere) sahip ise M ye **(bol) tümlenmiş modül** denir [25].
iv) M R-modül olsun. M nin her alt modülü M de direkt toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahip ise M ye **⊕-tümlenmiş modül** denir [14].

3.1.2 Teorem Projektif M R-modülünün yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul M nin tümlenmiş olmasıdır [25].

3.1.3 Teorem M R-modülü yarı-mükemmel olsun. Bu takdirde; M nin her bölüm modülü yarı-mükemmeldir [25].
İspat $K \leq M$ olmak üzere M/K bölüm modülünü alalım. $L/K \leq M/K$ olmak üzere $\left. {M/K} \middle/ {L/K} \right. \cong M/L$ izomorfizması vardır. M yarı-mükemmel olduğundan M/L bölüm modülü projektif örtüye sahiptir. $M/L\,'$ ye izomorf olan $\left. {M/K} \middle/ {L/K} \right.$ bölüm modülü de projektif örtüye sahip olduğundan M/K yarı-mükemmel modüldür.

3.1.4 Teorem M R-modülü yarı-mükemmel olsun. Bu takdirde; M nin her küçük örtüsü yarı-mükemmeldir [25].
İspat $f: P \longrightarrow M$ bir küçük epimorfizma olsun. $U \leq P$ olmak üzere g: $P/U \longrightarrow M/f(U)$ dönüşümünü $p + U \in P/U$ için $g(p + U) = f(p) + f(U)$ olarak tanımlayalım. g bir epimorfizma yapısına sahiptir.

$Çek(f) \ll P$ olduğundan $\pi(Çek(f)) \ll P/_U$ elde edilir. $x + U \in Çek(f)$ keyfi elemanı verilsin. $x + U \in Çek(f)$ için $g(x + U) = f(x) + f(U) = f(U)$ olduğundan $f(x) \in f(U)$ dur. Buradan $f(x) = f(x')$ olacak şekilde $x' \in U$ elemanı vardır. $x - x' \in Çek(f)$ olup $\pi(x - x') = (x - x') + U = x + U$ eşitliği elde edilir. $x + U \in \pi(Çek(f))$ olduğundan $Çek(g) \leq \pi(Çek(f)) \ll P/_U$ yani $Çek(g) \ll P/_U$ bulunur. Dolayısıyla g bir küçük epimorfizmadır. Diğer taraftan M yarı-mükemmel olduğundan en az bir $\pi' : P' \longrightarrow M/_{f(U)}$ projektif örtüsü vardır. P' projektif olduğundan

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\pi'"] & \\
P/_U \arrow[r, "g"'] & M/_{f(U)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$gh = \pi'$ olacak şekilde $h: P' \longrightarrow P/_U$ homomorfizması vardır. π' küçük epimorfizma olduğundan h da küçük epimorfizma yapısına sahiptir. Dolayısıyla P yarı-mükemmeldir.

3.1.5 Teorem M R-modül olsun. Bu takdirde;

i) M bol tümlenmiştir.

ii) M nin her K alt modülü X tümlenmiş ve $Y \ll M$ olmak üzere $K = X + Y$ dir.

iii) M nin her K alt modülü için $K/_X \ll M/_X$ olacak şekilde $X \leq K$ tümlenmiş alt modülü vardır.

iv) M nin her maksimal alt modülü bol tümleyene sahiptir [25].

İspat (i) ⇔ (ii) ⇔ (iii) ⟹ (iv) denkliği vardır. Eğer M sonlu üretilmiş ise (i) ≡ (iv) dir.

(i) ⟹ (ii) M bol tümlenmiş ise M deki her tümleyen alt modül bol tümlenmiş olacağından tümlenmiş alt modül yapısına sahiptir. N, K nın M de tümleyeni ve X de V nin K da kapsanan alt modülü olsun. $M = K + N$, $K \cap N \ll N$ ve $M = X + N, X \cap N \ll X$ dir. $X \leq K$ olduğundan $K = X + K \cap N$ olup istenen elde edilir.

(ii) ⟹ (iii) $K/_X + L/_X = M/_X$ eşitliğinden $X + Y + L = M$, $X + L = M$ olup $L = M$ dir.

(iii) ⟹ (i) K, $N \leq M$ olmak üzere $M = K + N$ olsun. $X \leq N$ tümlenmiş ise $N/_X \ll M/_X$ şeklinde yazılabilir. Yani $K + X = M$ dir.

$K \cap X + L = X$ ve $K \cap L \ll L$ olacak şekilde $L \leq X$ alt modülü vardır. $M = K + X = K + K \cap X + L = K + L$ olup L, K nın N de tümleyenidir.

M, sonlu üretilmiş iken (i) ≡ (iv) olduğu açıktır.

3.1.6 Teorem M R-modül ve $U \leq M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $X \leq U,\ L \cap U \ll L$ olacak şekilde $M = X \oplus L$ eşitliği vardır.

ii) e idempotent eleman olmak üzere $e(M) < U,\ (1-e)(U) \ll (1-e)(M)$ koşullarını sağlayan bir $e \in End(M)$ vardır.

iii) $U = X + Y$ ve $Y \ll M$ olmak üzere $X < U < M$ koşullarını sağlayan X direkt toplam terimi vardır.

iv) $U/_X \ll M/_X$ olacak şekilde $X \leq M$ direkt toplam terimi vardır.

v) $U \cap L,\ U$ da direkt toplam terimi olacak şekilde U nun M de L tümleyeni vardır [25].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) $M = X \oplus L$ eşitliğinde $e(M) = X,\ (1-e)(M) = L$ özelliklerini sağlayan $e = \pi, \in End(M)$ homomorfizmalarını alalım. $X \leq U$ olduğundan $e(M) \leq U$ dir.

$(1-e)(U) = U \cap (1-e)(M)$ yani $(1-e)(U) = U \cap L$ olduğunu gösterelim.

$a \in U \cap L$ olsun. Bu takdirde $(1-e)(b) = a$ yani $b - e(b) = a$ koşullarını sağlayan en az bir $b \in M$ elemanı için $b \in U$ olur.

$a \in (1-e)(U)$ olsun. Bu takdirde $(1-e)(b) = a$ yani $b - e(b) = a$ koşullarını sağlayan en az bir $b \in U$ elemanı için $a \in U$ olup $a \in U \cap L$ elde edilir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $X = e(M),\ L = (1-e)(M)$ olarak alalım. $M = X + L$ olduğu açıktır. Ayrıca $e(M) \cap (1-e)(M) = 0$ olduğunu biliyoruz. O halde $M = X \oplus L$ dir.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) $M = X \oplus L$ olduğundan $U = X + (U \cap L)$ ve $U \cap L \ll M$ dir.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $U/_X + K/_X = M/_X$ olduğundan $X + Y + K = M$ olup $X = M$ dir.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) $M = X \oplus L$ olsun. $U = X \oplus (U \cap L)$ olduğundan $U \cap L \cong U/_X \ll M/_X \cong L$ dir. Böylece istenen elde edilir.

iii) $\Longrightarrow$ i) L, X in M de tümleyeni olsun. $Y \ll M$ olduğundan $L,\ U = X + Y$ nin M de tümleyenidir.

i) $\Longrightarrow$ v) $U = X \oplus (U \cap L)$ olduğu açıktır. $U + L = X \oplus (U \cap L) + L = X \oplus L = M$ ve $U \cap L \ll L$ olup $L,\ U$ nun M de tümleyenidir.

v) $\Longrightarrow$ i) $L,\ U$ nun M de tümleyeni ve $(U \cap L) \oplus X = U$ olsun. Bu takdirde; $X \leq U$ için $L \cap U \ll L$ ve $M = X \oplus L$ dir.

3.1.7 Teorem M R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) M bol tümlenmiştir ve her tümleyen alt modül bir direkt toplam terimidir.

ii) M nin her U alt modülü için $M = X \oplus X'$ ve $U \cap X' \ll X'$ koşullarını sağlayan $X \leq U$ alt modülü vardır.

iii) M nin küçük olmayan her alt modülü sıfırdan farklı bir direkt toplam terimi içerir ve M nin her alt modülü M nin bir maksimal direkt toplam terimini içerir [25].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) $V,\ U$ nun tümleyeni ve $X \leq U$ alt modülü de V nin M de tümleyeni olsun. V ve X direkt toplam terimi olduğundan $M = X \oplus X'$ olacak şekilde $X' \leq M$ vardır. Burada $M = U + X'$ dir. Ayrıca $U = X + (U \cap V)$ dir. $X',\ X$ in M de tümleyeni ve $U \cap V \ll M$ olduğundan $X',\ U$ alt modülünün de tümleyenidir. Dolayısıyla $U \cap X' \ll X'$ olur.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Hipotez gereğince M tümlenmiştir. Ayrıca$U \leq M$ alt modülü için $X \leq U$ direkt toplam terimi olmak üzere $U = X + Y$ koşulunu sağlayan $Y \ll M$ vardır. X tümlenmiş bir modüldür. M nin bol tümlenmiş olduğu açıktır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $U,\ M$ de küçük olmayan bir alt modül ise hipotez gereğince $M = X \oplus X',\ U \cap X' \ll X'$ koşullarını sağlayan $X < U$ olup $X' \neq M$ ve $X \neq 0$ dır. X_1 , M nin $X < X_1 < U$ koşulunu sağlayan bir direkt toplam terimi olmak üzere $X_1 = X \oplus (X_1 \cap X')$ dir. $X_1 \cap X' \leq U \cap X' \ll M$ ve $X < X_1 < U$ olduğundan $X_1 \cap X' = 0$ eşitliğinden $X = X_1$ elde edilir.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $U \leq M$ olmak üzere $X < U,\ M$ nin bir maksimal direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $X' \leq M$ için $M = X \oplus X'$ dir. Eğer $U \cap X' \ll X'$ değil ise kabulümüz gereği M nin sıfırdan farklı $N < U \cap X'$ koşulunu sağlayan N direkt toplam terimi vardır. $N \oplus X$, M nin bir direkt toplam terimidir. Bu ise X in seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $U \cap X' \ll X'$ olur.

3.1.8 Teorem M yarı-mükemmel R-modül ise $RadM \ll M$ dir [25].

İspat $P,\ M$ nin projektif örtüsü olsun. Teorem 3.1.4 den P yarı-mükemmeldir. P nin her tümleyen alt modülü direkt toplam terimidir. Dolayısıyla P nin küçük olmayan her alt modülü sıfırdan farklı bir direkt toplam terimi içerir. $RadP \ll P$ değil ise $P = P_1 \oplus P_2$ ve $P_2 \leq RadP$ koşullarını sağlayan $P_1, P_2 \leq M$ alt modülleri vardır. Bu ise ancak $P_2 = 0$ olması ile mümkündür. Yani $RadP \ll P$ dir. $RadM = Radf(P) = f(RadP) \ll f(P) = M$ olup istenen elde edilir.

3.1.9 Teorem M R-modülünün yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul M nin yarı-mükemmel bir projektif örtüye sahip olmasıdır [25].

3.1.10 Teorem M projektif R-modülünün yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul $\forall i \in I$ için M_i basit modüllerin projektif örtüleri olmak üzere $M = \oplus_{i \in I} M_i$ ve $RadM \ll M$ olmasıdır [25].

İspat M yarı-mükemmel ise $RadM \ll M$ açıktır. M tümlenmiş ve $RadM \ll M$ olduğundan $M = \oplus_{i \in I} M_i$ dir. Dolayısıyla M_i basit modüllerin projektif örtüsüdür.
Tersine $RadM \ll M$ ve M_i ler lokal alt modüller olmak üzere $M = \oplus_{i \in I} M_i$ olsun. Ayrıca $U \leq M$ olmak üzere $U' = U + RadM$ alalım. ${M}/{RadM} \cong \oplus_{i \in I} {M_i}/{RadM_i}$ olup ${M}/{RadM}$ yarı-basit ve böylece ${M}/{U'}$ bölüm modülü de yarı-basittir. Bu takdirde $\pi: \oplus_{i \in I'} M_i \longrightarrow {M}/{U'}$ koşulunu sağlayan $I' \subseteq I$ vardır. $\forall i \in I$ için ${M_i}/{RadM_i}$ bölüm modülü basit olduğundan $Çek\pi = Rad(\oplus_{i \in I'} M_i) \ll \oplus_{i \in I'} M_i$ dir. Bu durumda ${P}/{U'}$ bir projektif örtüye sahiptir. Dolayısıyla U' alt modülünün M de bir tümleyeni vardır. $RadM \ll M$ olduğundan U alt modülünün de M de bir tümleyeni vardır. Sonuç olarak M yarı-mükemmeldir.

3.1.11 Teorem $\forall i \in I$ için M_i projektif olmak üzere $\oplus_{i \in I} M_i$ nin yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul $Rad(\oplus_{i \in I} M_i) \ll \oplus_{i \in I} M_i$ ve M_i nin yarı-mükemmel olmasıdır [25].
İspat $M = \oplus_{i \in I} M_i$ yarı-mükemmel olsun. $RadM \ll M$ ve $\forall i \in I$ için M_i lerin yarı-mükemmel olduğu açıktır.
Diğer taraftan $RadM \ll M$ ve $\forall i \in I$ için M_i ler yarı-mükemmel olsun. Teorem 3.1.10 dan M yarı-mükemmeldir.

3.1.12 Teorem $M = \oplus_{i \in I} M_i$ nin yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul $\forall i \in I$ için M_i lerin yarı-mükemmel ve M projektif örtüye sahip olacak şekilde $RadM \ll M$ olmasıdır [25].
İspat $\forall i \in I$ için M_i lerin yarı-mükemmel ve M projektif örtüye sahip olmak üzere $RadM \ll M$ olsun. Bu taktirde P projektif olmak üzere $\varphi: P \longrightarrow M$ projektif örtüsü vardır.
Diğer taraftan $\forall i \in I$ için M_i ler yarı-mükemmel olduğundan $\pi_i: P_i \longrightarrow M_i$ projektif örtüleri vardır. Dolayısıyla $P \cong \oplus_{i \in I} P_i$ dir. Bu durumda $P \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\pi} {M}/{RadM}$ diyagramında $\pi \circ \varphi$ küçük epimorfizma yapısına sahiptir. $RadM \ll M$ ve $\pi \circ \varphi$ küçük epimorfizma yapısına sahip olduğundan $RadP \subseteq Çek\varphi$ olup $RadP \ll P$ dir.

3.1.13 Teorem M yarı-basit ve P , M nin projektif örtüsü olsun. Bu takdirde P nin yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul M nin her direkt toplam teriminin bir projektif örtüye sahip olmasıdır [25].

İspat P yarı-mükemmel olsun. M yarı-basit olduğundan $M = \oplus_{i\in I} M_i$ koşulunu sağlayan M_i basit alt modülleri vardır. K, M nin direkt toplam terimi ise $I' \subseteq I$ olmak üzere $M = K \oplus (\oplus_{i\in I} M_i)$ dir. Dolayısıyla M yarı-mükemmel olduğundan K da yarı-mükemmel olup bir projektif örtüye sahiptir. Tersi açıktır.

3.1.14 Teorem M projektif R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) M yarı-mükemmeldir.

ii) M (bol) tümlenmiştir.

iii) Her sonlu üretilmiş modül yarı-mükemmeldir.

iv) Her sonlu üretilmiş modül projektif örtüye sahiptir.

v) Sonlu üretilmiş modüller (bol) tümlenmiştir [25].

3.1.15 Teorem Dedekind bölgesi üzerindeki her tümlenmiş modül $\oplus$-tümlenmiştir [14].

3.1.16 Teorem M projektif modül olsun. M modülünün Rad-$\oplus$-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M modülünün $\oplus$-tümlenmiş olmasıdır [20].

3.1.17 Sonuç R halkasının sol mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her projektif sol R-modülün Rad-$\oplus$-tümlenmiş olmasıdır [20].

3.1.18 Tanım R bir halka ve X, R nin alt kümesi olsun. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $x_1, x_2, \ldots \in X$ elemanı için $x_1 x_2 \ldots x_k = 0$ ise X e **sağ t-nilpotent** denir [25].

3.1.19 Teorem R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) ${}_R R$ mükemmeldir.

ii) $R/_J$ yarı-basit ve J sağ t-nilpotenttir [25].

3.1.20 Önerme N projektif modül olsun. Bu takdirde $N/_K$ nın projektif örtüye sahip olması için gerek ve yeter koşul N nin $K + T = N$ ve $K \cap T \ll T$ olacak şekilde T direkt toplam teriminin olmasıdır [25].

3.2 ⊕-Dual Sonlu Tümlenmiş Modüller

3.2.1 Tanım M nin her N dual sonlu alt modülü M de direkt toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahip ise, M ye **⊕-dual sonlu tümlenmiş modül** denir [6].

Örnek $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$-modül olarak ⊕-dual sonlu tümlenmiştir.

3.2.2 Yardımcı Teorem R halka olsun. R sol R-modülün ⊕-dual sonlu tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her serbest R-modülün ⊕-dual sonlu tümlenmiş olmasıdır [6].

3.2.3 Teorem R birimli bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.
i) R yarı-mükemmeldir.
ii) Her sonlu üretilmiş serbest R-modül ⊕-tümlenmiş modüldür.
iii) $_RR$ modülü ⊕-tümlenmiştir.
iv) $_RR$ modülü ⊕-dual sonlu tümlenmiştir.
v) Her serbest R-modül ⊕-dual sonlu tümlenmiştir [6].

3.2.4 Tanım $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ her biri M de direkt toplam terimi olan M nin lokal alt modüllerinin ailesi olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için L_λ ların toplamını $\boldsymbol{Loc^{\oplus}M}$ ile gösterelim. Yani $Loc^{\oplus}M = \sum_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$ dır. 0, M nin lokal alt modülüdür [6].

3.2.5 Yardımcı Teorem R halka ve M R-modül olsun. Bu takdirde M nin her maksimal alt modülünün M de direkt toplam terimine sahip olması için gerek ve yeter koşul $M/_{Loc^{\oplus}M}$ bölüm modülünün maksimal alt modül içermemesidir [6].

İspat (⟹) Kabul edelim ki $M/_{Loc^{\oplus}M}$, $Q/_{Loc^{\oplus}M}$ maksimal alt modülünü içersin. Bu takdirde Q, M nin maksimal alt modülüdür. Hipotezden $M = Q + L$, $Q \cap L \ll L$ ve $M = L \oplus K$ koşullarını sağlayan L , $K \leq M$ alt modülleri vardır. Buradan L lokal modüldür. Böylece $L \leq Loc^{\oplus}M \leq Q$ çelişkisi elde edilir.
(⟸) P, M nin maksimal alt modülü olsun. Hipotezden $P, Loc^{\oplus}M$ yi içermez. Böylece M nin direkt toplam terimi olan P nin alt modülü olmayan bir lokal alt modülü vardır. P maksimal olduğundan $P + L = M$ ve $P \cap L \neq L$ den $P \cap L \ll L$ dir.

3.2.6 Tanım i) M_1 ve M_2 , M nin $M = M_1 + M_2$ koşulunu sağlayan direkt toplam terimleri olsun. Eğer $M_1 \cap M_2$, M nin direkt toplam terimi oluyorsa M ye **(D3) özelliğine sahip modül** denir.

ii) M modülünün herhangi iki direkt toplam teriminin toplamı da M de direkt toplam terimi oluyorsa M modülüne **DTT özelliğine sahiptir** denir[6].

3.2.7 Teorem R keyfi halka ve M DTT özelliğine sahip R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler denktir:

i) M, $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiştir.

ii) M nin her maksimal alt modülü M nin direkt toplam terimi olan bir tümleyene sahiptir.

iii) ${}^{M}/_{Loc^{\oplus}M}$ maksimal alt modül içermez [6].

İspat (ii) ⇔ (iii) Yardımcı Teorem 3.2.5 ten açıktır.

(i) ⇔ (ii) P, M nin maksimal alt modülü ise ${}^{M}/_{P}$ basit olup devirlidir.

(iii) ⇔ (i) N, M nin dual sonlu alt modülü olsun. Bu takdirde $N + Loc^{\oplus}M$, M nin dual sonlu alt modülüdür ve (iii) den $M = N + Loc^{\oplus}M$ dir. $M = N + L_{\lambda_1} + \cdots + L_{\lambda_n}$ koşulunu sağlayan $L_{\lambda_i} \in \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ lokal alt modülleri vardır. Açık olarak $N + L_{\lambda_1} + \cdots + L_{\lambda_n}$, M de 0 tümleyene sahiptir. $\sum_{j\in J} L_j$, N nin M de tümleyeni olacak şekilde $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ J alt kümesi vardır. Hipotezden $\sum_{j\in J} L_j$, M nin direkt toplam terimidir. Böylece M, $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiştir.

3.2.8 Önerme M (D3) özelliğine sahip $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiş olsun. Bu takdirde M nin her dual sonlu direkt toplam terimi $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiştir [6].

İspat A, M nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde M nin $M = A \oplus A'$ ve A' sonlu üretilmiş olan A' alt modülü vardır. B, A nın dual sonlu alt modülü olsun. ${}^{M}/_{B} = {}^{(A \oplus A')}/_{B} \cong {}^{A}/_{B} \oplus A'$ sonlu üretilmiş olup B, M nin dual sonlu alt modülüdür. M $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiş olduğundan M nin $M = B + C$ ve $B \cap C \ll C$ koşulunu sağlayan C direkt toplam terimi vardır. Ayrıca A, M nin direkt toplam terimi olduğundan $C \cap A$, A nın direkt toplam terimidir. Bu takdirde $B \cap (A \cup C) = B \cap C$, $C \cap A \ll A$ dır. Böylece A $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiştir.

3.2.9 Yardımcı Teorem M R-modül ve V dual sonlu tümlenmiş, U dual sonlu, $V+U$ da M de X tümleyenine sahip olacak şekilde M nin U, V alt modülleri olsun. Bu takdirde $V \cap (U+X), V$ de Y tümleyenine ve $X+Y$, M de U tümleyenine sahiptir [6].

İspat X, $V+U$ nun M de tümleyeni olsun. Bu durumda $M=(V+U)+X$ ve $(V+U) \cap X \ll X$ tir. O halde

$$V/[V \cap (U+X)] \cong (V+U+X)/(U+X) = M/(U+X) \cong \frac{M/U}{(U+X)/U} \quad \text{olur.}$$

U, M de dual sonlu olduğundan $V \cap (U+X), V$ nin dual sonlu alt modülüdür. V dual sonlu tümlenmiş olduğundan $V \cap (U+X), V$ de Y tümleyene sahiptir. $(U+X) \cap Y \ll Y$ olduğunu biliyoruz. Bu takdirde $M=(V+U)+X=U+X+Y$ ve $U \cap (X+Y) \leq X \cap (U+Y) + Y \cap (U+X) \leq X \cap (V+U) + Y \cap (U+X) \ll X+Y$ dir. Buradan $X+Y, U$ nun M de bir tümleyenidir.

3.2.10 Teorem Herhangi bir R halkası için $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiş R-modüllerin keyfi toplamı da $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiştir [6].

İspat R halka ve M_i $(i \in I)$ $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiş R-modüllerin keyfi ailesi olsun. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ve N, M nin dual sonlu alt modülü olmak üzere M/N , $\{x_1+N, \ldots, x_k+N\}$ sonlu kümesi tarafından üretilmiştir ve buradan $M = Rx_1 + \cdots + Rx_k + N$ dir. Her bir x_i , I nın F_i sonlu alt kümesi için $M = \bigoplus_{j \in F_i} M_j$ direkt toplamında kapsandığından I nın $F=\{i_1, \ldots, i_r\}$ sonlu alt kümesi için $Rx_1 + \cdots + Rx_k \leq \bigoplus_{j \in F} M_j$ dir. Açık olarak $M = M_{i_1} + \left(\bigoplus_{t=2}^{r} M_{i_t} + N\right), M$ de 0 tümleyenine sahiptir. M_{i_1} $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiş olduğundan S_{i_1}, M_{i_1} in direkt toplam terimi olmak üzere $M_{i_1} \cap \left(\bigoplus_{t=2}^{r} M_{i_t} + N\right)$, M_{i_1} de S_{i_1} tümleyenine sahiptir. Yardımcı Teorem 3.2.9 dan S_{i_1} $\bigoplus_{t=2}^{r} M_{i_t} + N$ nin M de tümleyenidir. M_{i_1} M nin direkt toplam terimi olduğundan S_{i_1} de M nin direkt toplam terimidir. Bu şekilde devam ederek J sonlu kümesi için her S_{i_t} $(1 \leq t \leq r)$, M_{i_t} nin direkt toplam terimi olmak üzere N, M de $S_{i_1} + S_{i_2} + \cdots + S_{i_r}$ tümleyenine sahiptir. M_{i_t} M nin direkt toplam terimi olduğu için $\sum_{t=1}^{r} S_{i_t} = \bigoplus_{t=1}^{r} S_{i_t}$, M nin direkt toplam terimidir.

3.2.11 *Sonuç* $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiş modüllerin keyfi toplamı da $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiştir [6].

Lokal (oyuk) modüllerin keyfi toplamı $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiştir.

3.2.12 Yardımcı Teorem R birimli halka olsun. Bu takdirde ${}_RR$ R-modülünün $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her serbest R-modülün $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş olmasıdır [6].

İspat ($\Leftarrow$) Açıktır.

($\Rightarrow$) M serbest R-modül ve $A = \{a_i\}_{i\in I}$, M nin bir tabanı olsun. Bu durumda $M = \oplus_{i\in I} Ra_i$ ve her $i \in I$ için $R \cong Ra_i$ dir. Hipotezden her devirli Ra_i $(i \in I)$ R-modülü $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş ve Teorem 3.2.10 dan M $\oplus$-dual sonlu tümlenmiştir.

3.3 Rad-⊕- Tümlenmiş Modüller

3.3.1 Tanım M nin her alt modülü M de direkt toplam terimi olacak şekilde Rad-tümleyene sahip ise M ye **Rad-⊕-tümlenmiş modül** denir [7].

Örnek R lokal olmayan Dedekind bölgesi ve K , R nin kesir cismi olsun. Bu takdirde K R-modül olarak Rad-$\oplus$-tümlenmiştir [20].

3.3.2 Yardımcı Teorem M nin N ve K alt modülleri; $N + K$, M de X Rad-tümleyenine ve $N \cap (K + X)$, N de Y Rad-tümleyenine sahip olsun. Bu takdirde $X + Y, K$ nın M de Rad-tümleyenidir [20].

İspat X, $N + K$ nın M de Rad-tümleyenidir. Buradan $M = (N + K) + X$ ve $(N + K) \cap X \subseteq RadX$ tir. $N \cap (K + X)$, N de Y Rad-tümleyene sahip olduğu için $N = N \cap (K + X) + Y$ ve $(K + X) \cap Y \subseteq RadY$ dir. Bu durumda $M = N + K + X = [N \cap (K + X) + Y] + K + X = K + (X + Y)$ ve $K \cap (X + Y) \leq X \cap (K + Y) + Y \cap (K + X) \leq X \cap (K + N) + Y \cap (K + X) \subseteq RadX + RadY \subseteq Rad(X + Y)$ elde edilir. Böylece $X + Y$, M de K Rad-tümleyene sahiptir.

3.3.3 Teorem R herhangi bir halka olmak üzere; Rad-$\oplus$-tümlenmiş R-modüllerin sonlu direkt toplamı Rad-$\oplus$-tümlenmiştir [7].

İspat n pozitif tamsayı, M_i $(1 \leq i \leq n)$ Rad-$\oplus$-tümlenmiş R-modüllerin sonlu ailesi ve $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ olsun. Genelliği bozmadan $n = 2$ yani $M = M_1 \oplus M_2$ olduğunu kabul edelim. K, M nin alt modülü olmak üzere $M = M_1 + M_2 + K$ ve buradan $M_1 + M_2 + K$, M de 0 Rad-tümleyene sahiptir. M_1 Rad-$\oplus$-tümlenmiş olduğundan X, M_1 in direkt toplam terimi olmak üzere $M_1 \cap (M_2 + K)$, M_1 de X Rad-tümleyene sahiptir.

Yardımcı Teorem 3.3.2 den X, $M_2 + K$ nın M de Rad-tümleyenidir. M_2 Rad-$\oplus$-tümlenmiş olduğundan Y, M_2 nin direkt toplam terimi olmak üzere $M_2 \cap (K + X)$, M_2 de Y Rad-tümleyene sahiptir. Tekrar Yardımcı Teorem 3.3.2 kullanılarak $X + Y, K$ nın M de Rad-tümleyenidir. X, M_1 in ve Y, M_2 nin direkt toplam terimi olduğundan $X \oplus Y$ de M nin direkt toplam terimidir.

3.3.4 Yardımcı Teorem M bir R-modül ve N de M nin alt modülü olsun. U, N nin M modülünde Rad-tümleyeni ise N nin L alt modülü için $(U + L)/L$, M/L de N/L bölüm modülünün Rad-tümleyenidir [20].

İspat Hipotezden $M = N + U$ ve $U \cap N \subseteq RadU$ dir. Böylece N nin keyfi L alt modülü için $M/L = N/L + (U + L)/L$ dir. $\varphi: N \longrightarrow N/L$ doğal homomorfizması için $\varphi(RadU) \subseteq Rad(U + L/L)$ dir. Ayrıca $U \cap N \subseteq RadU$ olduğundan $N/L \cap (U + L)/L = [L + (N \cap U)]/L = \varphi(N \cap U) \subseteq \varphi(RadU) \subseteq Rad\left((U + L)/L\right)$ dir. Böylece $(U + L)/L$, M/L de N/L bölüm modülünün Rad-tümleyenidir.

3.3.5 Önerme Sıfırdan farklı M R-modülü Rad-$\oplus$-tümlenmiş olsun. U, M nin $f \in End_R(M)$ için $f(U) \leq U$ koşulunu sağlayan bir alt modülü olsun. Bu takdirde;

i) M/U Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

ii) U, M nin direkt toplam terimi ise, U Rad-$\oplus$-tümlenmiştir [7].

İspat i) L/U , M/U bölüm modülünün keyfi alt modülü olsun. M Rad-$\oplus$-tümlenmiş olduğundan M nin $M = L + N, L \cap N \subseteq RadN$ ve $M = N \oplus N'$ koşullarını sağlayan N, N' alt modülleri vardır. Yardımcı Teorem 3.3.4 ten $(N + U)/U$, M/U da L/U bölüm modülünün Rad-tümleyenidir. Her bir $f \in End_R(M)$ için $f(U) \leq U$ olduğundan $U = (U \cap N) \oplus (U \cap N')$ dır. Böylece $(N + U) \cap (N' + U) \leq U$ olup $(N + U)/U \cap (N' + U)/U = 0$, yani $(N + U)/U$, M/U nun direkt toplam terimidir. M/U Rad-$\oplus$-tümlenmiştir [14].

3.3.6 Önerme M, (D3) özelliğine sahip Rad-$\oplus$-tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde M nin her direkt toplam terimi Rad-$\oplus$-tümlenmiştir [7].

İspat N, M nin direkt toplam terimi ve U, N nin alt modülü olsun. Bu takdirde M nin $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq RadV$ koşullarını sağlayan V direkt toplam terimi vardır. Buradan $N = U + (N \cap V)$ dir. M, (D3) özelliğine sahip olduğundan $N \cap V, M$ nin direkt toplam terimi ve böylece N nin de direkt toplam terimidir. $U \cap (N \cap V) = U \cap V \subseteq RadV$ dir. $N \cap V, M$ nin direkt toplam terimi olduğundan $U \cap V \subseteq Rad(N \cap V)$ dir. Böylece N Rad-$\oplus$-tümlenmiştir

3.3.7 Önerme M projektif modül olsun. M Rad-$\oplus$-tümlenmiş olduğundan $RadM \ll M$ dir [7].

İspat M nin N alt modülü için $M = RadM + N$ olsun. M Rad-$\oplus$-tümlenmiş olduğundan M nin $M = N + V$ ve $V \cap N \leq RadV$ koşulunu sağlayan V direkt toplam terimi vardır. Buradan V projektiftir. Her $v \in V$ için $\varphi: V \longrightarrow M/N$, $\varphi(v) = v + N$ olarak tanımlı φ epimorfizması için $Çek(\varphi) = N \cap V$ dir. $Çek(\varphi) = N \cap V \leq RadV$ dir. $M = RadM + N$ eşitliğinden $Rad(M/N) = M/N$ dir. M/N genelleştirilmiş projektif örtüye sahip olduğundan $M/N = 0$ dır. Yani, $M = N$ dir. Böylece $RadM \ll M$ olduğu elde edilir.

3.3.8 Teorem M projektif modül olsun. M nin Rad-$\oplus$-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul $\oplus$-tümlenmiş olmasıdır [7].

İspat M Rad-$\oplus$-tümlenmiş olsun. M projektif modül olduğundan Önerme 3.3.7 den $RadM \ll M$ dir. Bu durumda M $\oplus$-tümlenmiştir. Tersi açıktır.

3.3.9 Teorem R halkasının sol mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her projektif sol R-modülün Rad-$\oplus$-tümlenmiş olmasıdır [20].

3.3.10 Önerme M Rad-$\oplus$-tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde $M/P(M)$ $\oplus$-tümlenmiştir [20].

3.4 Direkt Dual sonlu Radikal Tümlenmiş Modüller

3.4.1 Tanım M modülünün her dual sonlu alt modülü M de direkt toplam terimi olan Rad-tümleyene sahipse, M modülüne **direkt dual sonlu radikal tümlenmiş modül** denir. Direkt dual sonlu radikal tümlenmiş modüller kısaca $\boldsymbol{cgs}^{\oplus}$ ile gösterilir [17].

$RadM = \sum\{U \leq M | U \ll M\}$ ve M nin bir U direkt toplam terimi için $U \cap RadM \subseteq RadU$ olduğundan her ⊕-tümlenmiş modül ⊕-dual sonlu tümlenmiştir ve her ⊕-dual sonlu tümlenmiş modül $cgs^{\oplus}$-modüldür.

3.4.2 Yardımcı Teorem M R-modül ve V dual sonlu tümlenmiş, U dual sonlu, $V + U$ da M de X Rad-tümleyene sahip olacak şekilde M nin U, V alt modülleri olsun. Bu takdirde $V \cap (U + X), V$ de Y tümleyene ve $X + Y$, M de U Rad-tümleyene sahiptir [17].
İspat X, $V + U$ nun M de Rad-tümleyeni olsun. Bu durumda $M = (V + U) + X$ ve $(V + U) \cap X \ll X$ tir. O halde

$$V/[V \cap (U + X)] \cong (V + U + X)/(U + X) = M/(U + X) \cong \frac{M/U}{(U + X)/U} \quad \text{olur.}$$

U, M de dual sonlu olduğundan $V \cap (U + X), V$ nin dual sonlu alt modülüdür. V dual sonlu tümlenmiş olduğundan $V \cap (U + X), V$ de Y Rad-tümleyene sahiptir. $(U + X) \cap Y \ll Y$ olduğunu biliyoruz. Bu takdirde $M = (V + U) + X = U + X + Y$ ve $U \cap (X + Y) \leq X \cap (U + Y) + Y \cap (U + X) \leq X \cap (V + U) + Y \cap (U + X) \ll X + Y$ dir. Buradan $X + Y, U$ nun M de bir Rad-tümleyenidir.

3.4.3 Önerme M zayıf lokal bir R-modül olsun. Bu takdirde; M $cgs^{\oplus}$-modüldür [17].

3.4.4 Tanım M nin direkt toplam terimi olan tüm zayıf lokal alt modüllerinin toplamı $\boldsymbol{wLoc^{\oplus}M}$ ile gösterilir [17].

3.4.5 Teorem R halka ve M DTT özelliğini sağlayan bir R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.
i) M $cgs^{\oplus}$-modüldür.
ii) M nin her maksimal alt modülü bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir Rad-tümleyene sahiptir.

iii) ${}^{M}/_{wLoc^{\oplus}M}$ bir maksimal alt modül içermez [17].

3.4.6 Teorem M $cgs^{\oplus}$-modül , U, M nin karakteristik alt modülü olsun. Bu takdirde ${}^{M}/_{U}$ $cgs^{\oplus}$-modüldür [17].

3.4.7 *Sonuç* M $cgs^{\oplus}$-modül ise ${}^{M}/_{RadM}$ $cgs^{\oplus}$-modüldür [17].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modüller

4.1.1 Tanım M R-modül ve I, R nin ideali olsun. M modülünün her N dual sonlu alt modülü için $M = N + K, N \cap K \leq IK$ ve $N \cap K \subseteq RadK$ olacak şekilde M nin bir K direkt toplam terimi varsa M modülüne **dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modül** denir.

4.1.2 Yardımcı Teorem Dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modüller $cgs^{\oplus}$-modüldür.

İspat M dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modül olsun. M modülünün her N dual sonlu alt modülü için $M = N + K,\ N \cap K \leq IK$ ve $N \cap K \subseteq RadK$ olacak şekilde M nin K direkt toplam terimi vardır. Dolayısıyla M $cgs^{\oplus}$-modüldür.

R nin I ideali için dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modül olmayıp $cgs^{\oplus}$-modül olan bir örnek verelim.

Örnek p ve q iki farklı asal sayı olmak üzere $M = \mathbb{Z}/_{p^3\mathbb{Z}}$ lokal $\mathbb{Z}$-modülünü alalım. $RadM = {}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}$ dir. Teorem 2.6.6 (vii) den $RadM \ll M$ dir. $\mathbb{Z}$ nin $I_1 = p\mathbb{Z},\ I_2 = q\mathbb{Z}$

ve $I_3 = p^2\mathbb{Z}$ idealleri için

$I_1M = p\mathbb{Z}\left(\mathbb{Z}/_{p^3\mathbb{Z}}\right) = {}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} = RadM,$

$I_2M = q\mathbb{Z}\left(\mathbb{Z}/_{p^3\mathbb{Z}}\right) = {}^{(q\mathbb{Z} + p^3\mathbb{Z})}/_{p^3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/_{p^3\mathbb{Z}} = M,$

$I_3M = p^2\mathbb{Z}\left(\mathbb{Z}/_{p^3\mathbb{Z}}\right) = {}^{p^2\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}$ dir. [[16], Örnek 3.8]] kullanılarak M nin her N dual sonlu alt modülü için $M = N + K, N \cap K \leq I_1K,\ N \cap K \leq I_2K$ ve $N \cap K \ll K$ koşullarını sağlayan $K \leq M$ direkt toplam terimi vardır. $N \cap K \ll K$ olduğundan $N \cap K \subseteq RadK$ kapsaması sağlanır. Ayrıca M sonlu üretilmiş olduğundan M nin her alt modülü dual sonludur. Dolayısıyla M hem dual sonlu I_1-Rad-⊕-tümlenmiş hem de I_2-Rad-⊕-tümlenmiş modüldür. Şimdi M modülünün dual sonlu I_3-Rad-⊕-tümlenmiş modül olmadığını gösterelim. $M = \mathbb{Z}/_{p^3\mathbb{Z}}$ modülünün ${}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}$ alt modülü için

$\mathbb{Z}/_{p^3\mathbb{Z}} = {}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} + {}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}$ ve ${}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} \cap {}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} = {}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}$ dir. $Rad\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}\right) = {}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}$ olduğundan ${}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} \cap {}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} \subseteq Rad\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}\right)$ kapsaması vardır. Üstelik ${}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}$, ${}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}$ ün direkt toplam terimidir. Ancak $I_3\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}}\right) = I_3M = {}^{p^2\mathbb{Z}}\big/_{p^3\mathbb{Z}}$ olduğundan ${}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} \cap {}^{\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} = {}^{p\mathbb{Z}}/_{p^3\mathbb{Z}} \not\subset {}^{p^2\mathbb{Z}}\big/_{p^3\ \mathbb{Z}}$ olur. Dolayısıyla M dual sonlu I_3-Rad-⊕-tümlenmiş modül değildir. M lokal olduğundan Önerme 2.8.4 gereğince M zayıf lokaldir. Önerme 3.4.3 den M nin $cgs^{\oplus}$-modül olduğu açıktır.

4.1.3 Yardımcı Teorem M R-modül ve I, R nin bir ideali olsun. K, M nin direkt toplam terimi ise $IK = K \cap IM$ dir.

İspat K, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ vardır. Buradan $IM = IK \oplus IK'$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin K alt modülü ile kesişimi alınıp modüler kural uygulanarak $K \cap IM = K \cap (IK \oplus IK') = IK + (K \cap IK') = IK$ bulunur.

4.1.4 Önerme M R-modül ve I, R nin $RadM \leq IM$ koşulunu sağlayan ideali olsun. Bu takdirde M modülünün dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $cgs^{\oplus}$-modül olmasıdır.

İspat (⟹) Açıktır.

(⟸) Kabul edelim ki M $cgs^{\oplus}$-modül ve N, M nin dual sonlu alt modülü olsun. M nin $M = N + K$ ve $N \cap K \subseteq RadK$ koşulunu sağlayan bir K direkt toplam terimi vardır. Buradan $N \cap K \subseteq RadK \subseteq RadM \leq IM$ dir. $N \cap K \leq IM$ ve $K \cap (N \cap K) \leq K \cap IM$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.3 gereğince $N \cap K \leq IK$ dır. Böylece M dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modüldür.

4.1.5 Yardımcı Teorem M R-modül ve I, R nin $IM = 0$ koşulunu sağlayan ideali olsun. Bu takdirde; M nin dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her dual sonlu alt modülünün M de bir direkt toplam terimi olmasıdır.

İspat ($\Longrightarrow$) N, M nin dual sonlu alt modülü olsun. Hipotezden M modülünün $M = N + K$, $N \cap K \leq IK$, $N \cap K \subseteq RadK$ ve koşulunu sağlayan bir K direkt toplam terimi vardır. $IK \leq IM = 0$ olduğundan $M = N \oplus K$ dır. Buradan N, M nin bir direkt toplam terimidir.
($\Longleftarrow$) N, M nin dual sonlu direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde M nin $M = N \oplus N'$ koşulunu sağlayan N' alt modülü vardır. $M = N + N'$, $N \cap N' = 0 \leq I\,N'$ ve $N \cap N' = 0 \subseteq RadN'$ dir. Böylece M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüldür.

4.1.6 Önerme M R-modül ve I, R nin ideali olsun. M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş R-modül ise $M/_{IM}$ in her dual sonlu alt modülü direkt toplam terimidir.
İspat N, M nin $IM \leq N$ koşulunu sağlayan dual sonlu alt modülü olsun. $M/_N$ sonlu üretilmiş olduğundan $(M/_{IM})/_{(N/_{IM})} \cong M/_N$ sonlu üretilmiştir. Bu nedenle $N/_{IM}$, $M/_{IM}$ in dual sonlu alt modülüdür. M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş R-modül olduğundan M nin $M = N + K$, $N \cap K \leq IK$ ve $N \cap K \subseteq RadK$ koşulunu sağlayan K direkt toplam terimi vardır. Bu takdirde; $N/_{IM} + (K+IM)/_{IM} = M/_{IM}$ dir. Açık olarak $N \cap (K + IM) = IM + (N \cap K) = IM$ dir. Böylece $N/_{IM} \cap (K+IM)/_{IM} = IM/_{IM}$ olduğundan $M/_{IM} = N/_{IM} \oplus (K+IM)/_{IM}$ dir.

4.1.7 *Sonuç* M R-modül ve I, R nin ideali olsun. M $cgs^{\oplus}$-modül ve $IM = M$ ise, M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüldür.
İspat N, M nin dual sonlu alt modülü olsun. $N \cap K \leq IK$ olduğunu göstermek yeterlidir. M $cgs^{\oplus}$-modül olduğundan $M = N + K$, $N \cap K \subseteq RadK$ olacak şekilde M nin bir K direkt toplam terimi vardır. Yardımcı Teorem 4.1.3 den $IK = K \cap IM = K \cap M = K$ dır. $N \cap K \leq K$ olduğundan $N \cap K \leq IK$ bulunur. Dolayısıyla M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüldür.

4.1.8 *Sonuç* P, R değişmeli halkasının maksimal ideali ve M R-modül olsun. I, R nin $IM = PM$ eşitliğini sağlayan ideali ve M $cgs^{\oplus}$-modül ise M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüldür.

İspat [[16], Yardımcı Teorem 3] ten $RadM \leq PM$ dir. $IM = PM$ olduğundan $RadM \leq IM$ dir. Önerme 4.1.4 gereğince M $cgs^{\oplus}$-modül iken M dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modüldür.

4.1.9 *Sonuç* R cisim olmayan değişmeli bölge olmak üzere M bölünebilir R-modül olsun. M $cgs^{\oplus}$-modül ise R nin sıfırdan farklı her I ideali için M dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiştir.

İspat M cisim olmayan bir R değişmeli bölgesi üzerinde bölünebilir R-modül olsun. $RadM \neq M$ olsa M en az bir maksimal alt modül içerir. M nin maksimal alt modülleri P, R nin ideali olmak üzere PM formundadır. Dolayısıyla PM M nin öz alt modülüdür. Ancak M bölünebilir olduğundan $0 \neq a \in P$ için $aM = M$ olup $PM = M$ bulunur. Bu ise PM alt modülünün M nin öz alt modülü olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. $RadM = M$ olmalıdır. $RadM = M = PM$ dir. I, R nin keyfi sıfırdan farklı ideali olsun. M bölünebilir olduğundan $0 \neq b \in I$ için $bM = M$ olup $IM = M$ bulunur. Böylece $PM = IM$ olup Sonuç 4.1.8 gereğince M dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modüldür.

4.1.10 *Sonuç* M bir R-modül olsun.

i) R sol iyi halka

veya

ii) M projektif modül olsun.

Bu takdirde M nin $cgs^{\oplus}$-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu J-Rad-⊕-tümlenmiş modül olmasıdır.

İspat R sol iyi halka veya M projektif modül iken [[24], 23.7] ve [[16], Önerme 17.10] gereğince $RadM = JM$dir. Önerme 4.1.4 den M nin $cgs^{\oplus}$-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu J-Rad-⊕-tümlenmiş modül olmasıdır.

4.1.11 Teorem I, R nin ideali olsun. Bu takdirde dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş R-modüllerin sonlu sayıdaki direkt toplamı dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiştir.

İspat n pozitif bir tamsayı ve $\{M_i\}_{i=1}^{n}$dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş R-modüllerin sonlu ailesi olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun. $n = 2$ için iddianın doğruluğunu gösterelim. $n = 2$ yani $M = M_1 \oplus M_2$ iken K, M nin keyfi bir dual sonlu alt modülü olsun. $M = M_1 + M_2 + K$ ve buradan $M_1 + M_2 + K$, M de 0 Rad-tümleyene sahiptir. K, M nin dual sonlu alt modülü olduğundan Teorem 2.3.10 ve Teorem 2.3.11 teoremleri kullanılarak;

$$M_1/[M_1 \cap (M_2 + K)] \cong [M_1 + (M_2 + K)]/(M_2 + K) = M/(M_2 + K)$$

$$\cong (M/K)\Big/(M_2 + K)/K$$

sonlu üretilmiş olduğu görülür. Buradan $M_1 \cap (M_2 + K)$, M_1 in dual sonlu alt modülüdür. M_1 dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş olduğundan $M_1 \cap (M_2 + K)$, M_1 modülünde direkt toplam terimi olacak şekilde X Rad-tümleyeni için $M_1 \cap (M_2 + K) \cap X = X \cap (M_2 + K) \leq IX$ dir. X, M de $M_2 + K$ nın Rad-tümleyenidir [[7], Yardımcı Teorem 3.2]. $M = M_1 + M_2 + K = M_1 \cap (M_2 + K) + X + (M_2 + K) = X + (M_2 + K)$ dır.
Teorem 2.3.10 ve Teorem 2.3.11 tekrar uygulanarak;

$$M_2/[M_2 \cap (K + X)] \cong [M_2 + (K + X)]/(K + X) = M/(K + X) \cong (M/K)\Big/[(K + X)/K]$$

izomorfizmaları ve K nın M modülünün dual sonlu alt modülü olması kullanılarak $M_2 \cap (K + X)$ alt modülünün M_2 modülünün dual sonlu alt modülü olduğu görülür. M_2 dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş olduğundan $M_2 \cap (K + X)$, M_2 de direkt toplam terimi olacak şekilde Y Rad-tümleyene sahiptir. Ayrıca, $M_2 \cap (K + X) \cap Y = Y \cap (K + X) \leq IY$ dir. Buradan $X + Y, K$ nın M de Rad-tümleyeni bulunur [[7], Yardımcı Teorem 3.2]. X , M_1 modülünün Y ise M_2 modülünün direkt toplam terimi olduğundan $X \oplus Y$, M de direkt toplam terimidir.

$$\begin{aligned} K \cap (X + Y) &\leq X \cap (Y + K) + Y \cap (K + X) \\ &\leq X \cap (M_2 + K) + Y \cap (K + X) \\ &\leq IX + IY \\ &\leq I(X + Y) \\ &\leq I(X \oplus Y) \end{aligned}$$

elde edilir. M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir. n üzerine tümevarım uygulayarak iddianın doğruluğu görülür.

Direkt toplamı eş modül olan dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüllerin toplamı da dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

4.1.12 Önerme I, R nin ideali ve $M = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ eş modülü M_λ alt modüllerinin direkt toplamı olsun. Her $\lambda\in\Lambda$ için M_λ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş ise M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

İspat N, M nin keyfi dual sonlu alt modülü olsun. M eş modül olduğundan $N \leq M$ karakteristik alt modüldür. Yardımcı Teorem 2.3.7 den $N = \oplus_{\lambda\in\Lambda} (N \cap M_\lambda)$ bulunur. Teorem 2.3.18 den $M/N = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda / \oplus_{\lambda\in\Lambda} (N \cap M_\lambda) \cong \oplus_{\lambda\in\Lambda} (M_\lambda / N \cap M_\lambda)$ izomorfizması yardımıyla $\oplus_{\lambda\in\Lambda} (M_\lambda / N \cap M_\lambda)$ sonlu üretilmiş olduğu görülür. Her $\lambda\in\Lambda$ için $M_\lambda/(N \cap M_\lambda)$, M/N nin homomorfik görüntüsü olduğundan $M_\lambda/(N \cap M_\lambda)$ sonlu üretilmiştir. Böylece her $\lambda\in\Lambda$ için $N \cap M_\lambda$, M_λ nın dual sonlu alt modülüdür. Hipotezden her $\lambda\in\Lambda$ için M_λ nın $M_\lambda = (N \cap M_\lambda) + K_\lambda$, $N \cap K_\lambda \leq IK_\lambda$ ve $N \cap K_\lambda \subseteq Rad(K_\lambda)$ koşulunu sağlayan K_λ direkt toplam terimi vardır. $K = \oplus_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ alalım. Açık olarak K, M nin direkt toplam terimi ve $M = N + K$ dır. Ayrıca $N \cap K = [\oplus_{\lambda\in\Lambda} (N \cap M_\lambda)] \cap [\oplus_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda] = \oplus_{\lambda\in\Lambda} (N \cap M_\lambda \cap K_\lambda) = \oplus_{\lambda\in\Lambda} (N \cap K_\lambda)$ olduğundan $N \cap K = \oplus_{\lambda\in\Lambda} (N \cap K\lambda \leq \oplus\lambda\in\Lambda\ IK\lambda = I\oplus\lambda\in\Lambda\ K\lambda = IK$ ve $N\cap K = \oplus\lambda\in\Lambda\ N\cap K\lambda \subseteq \oplus\lambda\in\Lambda\ RadK\lambda = Rad\oplus\lambda\in\Lambda\ K\lambda = RadK$ dır. Dolayısıyla M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüldür.

4.1.13 Önerme I, R nin ideali ve M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş R-modül olsun.

i) K, M nin direkt toplam terimi ve X, M nin dual sonlu alt modülü iken $X + K/X$, M/X in direkt toplam terimi ise M/X dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

ii) M nin her $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışında alınan her dual sonlu X alt modülü $X = (X \cap M_1) \oplus (X \cap M_2)$ şeklinde ise M/X dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

iii) M nin her X dual sonlu karakteristik alt modülü için M/X dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

iv) M dağılımlı bir modül ise M nin her X dual sonlu alt modülü için M/X dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

İspat i) N, M nin $X \leq N$ koşulunu sağlayan dual sonlu alt modülü olsun. $\dfrac{M/X}{N/X} \cong M/N$ sonlu üretilmiş olduğundan N/X, M/X in dual sonlu alt modülüdür. Hipotezden M nin

$M = N + K$, $N \cap K \leq IK$ ve $N \cap K \subseteq RadK$ koşulunu sağlayan K direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ vardır. $(K+X)/X$, M/X in direkt toplam terimi olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.3 gereğince

$$\begin{aligned} I(K+X)/X &= I(M/X) \cap (K+X)/X \\ &= I((K \oplus K')/X) \cap (K+X)/X \\ &= [(IK \oplus IK') + X]/X \cap (K+X)/X \\ &= [K \cap (IK \oplus IK') + X]/X \\ &= [IK \oplus (K \cap IK') + X]/X \\ &= (IK+X)/X \end{aligned}$$

Böylece $M/X = N/X + (K+X)/X$ ve $N/X \cap (K+X)/X = N \cap (K+X)/X = (N \cap K) + X/X \leq IK + X/X = I(K + X/X)$ dır. $\pi: K \to (K+X)/X$ doğal homomorfizmasını alalım. $N \cap K \subseteq RadK$ kapsaması kullanılarak $N/X \cap (K+X)/X = (N \cap K) + X/X = \pi(N+K) \subseteq Rad((K+X)/X)$ bulunur. Kabul gereğince $(K+X)/X$, M/X in bir direkt toplam terimidir. M/X dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

ii) (i) deki K direkt toplam terimini $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışındaki M_1 alt modülü olarak alalım. $M = M_1 + M_2$ eşitliği kullanılarak

$$(X+M_1)/X + (X+M_2)/X = (X+M_1+M_2)/X = M/X$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} (X+M_1) \cap (X+M_2) &\leq [X \cap (X+M_1+M_2)] + [M_2 \cap (X+M_1+X)] \\ &\leq X + [M_2 \cap (X+M_1)] \\ &\leq X + \big[M_2 \cap [(X \cap M_1) \oplus (X \cap M_2) + M_1]\big] \end{aligned}$$

$$\leq X + \left[M_2 \cap [M_1 \oplus (X \cap M_2)]\right]$$
$$\leq X + [(X \cap M_2) \oplus (M_1 \cap M_2)]$$
$$\leq X$$

ve

$\left[{(X + M_1)}/{X}\right] \cap \left[{(X + M_2)}/{X}\right] = {[(X + M_1) \cap (X + M_2)]}/{X} \leq {X}/{X} = \{X\}$ olduğundan

${M}/{X} = \left[{(X + M_1)}/{X}\right] \oplus \left[{(X + M_2)}/{X}\right]$ bulunur. Dolayısıyla ${(X + M_1)}/{X}, {M}/{X}$ in direkt toplam terimi olup (i) gereğince ${M}/{X}$ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

(iii) ve (iv) nin ispatı (ii) den açıktır.

4.1.14 Teorem M R-modül ve I, R nin ideali olsun. K, M nin dual sonlu karakteristik direkt toplam terimi ise aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

ii) K ve ${M}/{K}$ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $L,\ K$ nın dual sonlu alt modülü olsun. Bu takdirde; $M = K \oplus C$ olan M nin sonlu üretilmiş C alt modülü vardır. ${K}/{L}$ ve ${M}/{K}$ sonlu üretilmiş olduğundan ${{M}/{L}}\Big/{{K}/{L}} \cong {M}/{K}$ izomorfizmasından ${M}/{L}$ sonlu üretilmiştir. Hipotezden M modülünün $M = A \oplus B,\ M = L + A\ ,\ L \cap A\ \leq\ IA$ ve $L \cap A \subseteq RadA$ olan A ve B alt modülleri vardır. $K = K \cap M = K \cap (L + A) = L + (K \cap A)$ olduğu açıktır. K, M de karakteristik alt modül olduğundan $M = A \oplus B$ iken $K = (K \cap A) \oplus (K \cap B)$ dır. Böylece $K \cap A$, K nın direkt toplam terimidir. Yardımcı Teorem 4.1.3 den $I(K \cap A) = (K \cap A) \cap IM$ olur. $(K \cap A) \cap L = L \cap A\ \leq\ IA\ \leq\ IM$ olduğundan $(K \cap A) \cap L\ \leq\ (K \cap A) \cap IM = I(K \cap A)$ bulunur. $K \cap A$, K nın ve K, M nin direkt toplam terimi olduğundan $K \cap A$, M nin $L \cap A\ \leq\ K \cap A$ koşulunu sağlayan direkt toplam terimidir. Üstelik $L \cap A\ \subseteq\ RadA\ \subseteq RadM$ olduğundan $L \cap A \subseteq Rad(K \cap A)$ elde edilir. Böylece K dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş ve K, M nin dual sonlu karaktersitik alt modülü olduğundan Önerme 4.1.13 (iii) gereğince ${M}/{K}$ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $M = K \oplus C$ olan M nin sonlu üretilmiş C alt modülü vardır. ${}^{M}/_{K} \cong C$ olduğu açıktır. Hipotezden K, ${}^{M}/_{K} \cong C$ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir. Teorem 4.1.11 gereğince $K \oplus C = M$ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüldür.

4.2 Dedekind Bölgeleri Üzerinde Dual Sonlu I-Rad-$\oplus$-Tümlenmiş Modüller

4.2.1 Önerme M cisim olmayan R değişmeli bölgesi üzerinde bölünebilir modül olsun. M $cgs^{\oplus}$-modül ise, R nin sıfırdan farklı her I ideali için M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.
İspat Sonuç 4.1.7 den açıktır.

4.2.2 Önerme R cisim olmayan Dedekind bölgesi ve M injektif R-modül olsun. Bu takdirde R nin sıfırdan farklı her I ideali için M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.
İspat M injektif R-modül olduğundan $RadM = M = IM$ dir [[20], Önerme 2.4]. Önerme 4.1.4 den M $cgs^{\oplus}$-modülünün dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş olduğu açıktır.

4.2.3 *Sonuç* R cisim olmayan Dedekind bölgesi, I, R nin ideali ve $M = X \oplus P(M)$ R-modülü verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.
i) M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.
ii) X dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.
İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) M dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modül olsun. $P(M)$, M nin karakteristik alt modülü olduğundan Önerme 4.1.13 (iii) den ${}^{M}/_{P(M)} \cong X$ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) X ve $P(M)$ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüller olduğundan Teorem 4.1.11 den $M = X \oplus P(M)$ dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiştir.

4.2.4 Önerme R lokal olmayan Dedekind bölgesi olsun. I, R nin sıfırdan farklı bir ideali, P R nin sıfırdan farklı asal ideali ve M burulma R-modülü verilsin. $I \subseteq P^2$ iken $n = 1$ olan $a, n \in \mathbb{N}$ için $M_p \cong (R(P^{\infty}))^a \oplus B_p(1, \ldots, n)$ izomorfizması varsa M nin her P-asıl bileşeni dual sonlu I-Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüldür
İspat P, R nin sıfırdan farklı asal ideali olsun. [[14], Önerme A.7 ve Önerme A.8] gereğince M_p ve $(R(P^{\infty}))^a$ $\oplus$-tümlenmiştir. Buradan M_p ve $(R(P^{\infty}))^a$ $cgs^{\oplus}$-modüldür.

I. Durum: $I \subseteq P^2$ olsun. Hipotezden $n = 1$ olur. Bu yüzden $B_p(1, \dots, n) = B_p(1) = \oplus R/P$ yarı-basittir. Böylece $B_p(1, \dots, n)$ dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modüldür. $(R(P^\infty))^a$ bölünebilir R-modül olduğundan Önerme 4.2.1 gereğince dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiş modüldür. Teorem 4.1.11 gereğince $M_p \cong (R(P^\infty))^a \oplus B_p(1)$ dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiştir.

II. Durum: $I \nsubseteq P^2$ ve $I \nsubseteq P$ olsun. Teorem 2.8.12 gereğince (iii) den $IM_p = PM_p$ dir. Sonuç 4.1.8 den M_p dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiştir.

III. Durum: $I \nsubseteq P^2$ ve $I \subseteq P$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.8.12 (iii) gereğince $IM_p = PM_p$ dir. Sonuç 4.1.8 den M_p dual sonlu I-Rad-⊕-tümlenmiştir

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modüllerle ilgili teoremler ve sonuçlar; dördüncü bölümde yer almaktadır. Çalışmamızda $cgs^{\oplus}$-modülleri biraz daha kuvvetlendirerek Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modülleri tanımladık. Ayrıca Dedekind bölgeleri üzerinde Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modülleri değerlendirdik.

Herhangi bir R halkası ve R nin bir I ideali için Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modüllerin sonlu sayıdaki direkt toplamının Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modül olduğu gösterildi. Ne tür halkalar için keyfi sayıda Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modülün direkt toplamının Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş olacağı araştırılabilir.

Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş bir M modülünün karakteristik bir X alt modülü için $M/_X$ bölüm modülünün Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modül olduğu gösterildi. Ne tür halkalar için Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş bir modülün her bölüm modülünün Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş olacağı araştırılabilir. Kendisi Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modül olup bölüm modülü Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş Modül örneği araştırılabilir.

Dedekind bölgesi üzerinde Dual Sonlu I-Rad-⊕-Tümlenmiş modüllerinin özellikleri araştırıldı. Bu modüllerin yapısı değişmeli Noetherian halkalar üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Alizade, R. , Pancar, A. (1999). *Homoloji Cebire Giriş.* Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 177.

[2] Alizade, R. , Bilhan, G. , Smith P.F. (2001) Modules Whose Maximal Submodules Have Supplements. *Communications in Algebra*, 29(6), 2389-2405.

[3] Anderson, F.W. , Fuller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 363.

[4] Büyükaşık, E. , Lomp, C. (2008). On a Recent Generalization of Semiperfect Rings, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 78, 317-325.

[5] Clark, J. , Lomp, C. , Vanaja , N. , Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory*. Frontiers in Mathematics. Basel, 394.

[6] Çalışıcı, H. , Pancar, A. (2004). ⊕-Cofinitely Supplemented Modules. *Czech. Math. J.* , 54(129) , 1083-1088.

[7] Çalışıcı, H. , Türkmen, E. (2010). Generalized ⊕-Supplemented Modules. *Algebra and Discrete Mathematics*, 10(2) , 10-18.

[8] Ecevit, Ş. , Koşan, M. T. , Tribak, R. (2012). Rad-⊕-Supplemented Modules and Cofinitely Rad-⊕-Supplemented Modules. *Algebra Colloquium*, 19(4) , 637-648.

[9] Hungerford, T.W. (1974). *Algebra.* Springer Verlag, 502.

[10] Generalov, A.I. (1983). W-cohigh Purity in the Category of Modules. *Math. Notes*, 33, 402-408.

[11] Kasch, F. , Mares, E. A. (1966). Eine Kennzeichnung Semi-Perfekter Moduln. *Nagoya Mathematical Journal*, 27(2) , 525-529.

[12] Kasch, F. (1978). *Modules and Rings.* Academic Press, 372.

[13] Koşan, M.T.(2009). Generalized Cofinitely Semiperfect Modules. *International Electronic Journal of Algebra*, 5, 58-69.

[14] Mohamed, S.H. , Müller, B.J. (1990). *Continuous and Discrete Modules*. Cambridge; London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge University Press, 123.

[15] Özcan, A.Ç. , Harmancı, A. , Smith, P. F. (2006). Duo Modules. *Glasgow Math. J.* , 48, 533- 545.

[16] Tribak, R. , Talebi, Y. , Hamzekolaee, A.R.M. , Asgari, S. (2016). ⊕-Supplemented Modules Relative to an İdeal. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45(1), 107-120.

[17] Nişancı, B. , Pancar, A. (2010). On Generalization of ⊕-Cofinitely Supplemented Modules. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(2) , 203-209

[18] Nişancı Türkmen, B. , Pancar, A. (2014). *İnjektif Modüllere Giriş.* Pegem Akademi, 217.

[19] Oshiro, K. (1983). Semiperfect Modules and Quasi-semiperfect Modules. *Osaka J. Math*, 20, 337-372.

[20] Türkmen, E. (2013). Rad-⊕-Supplemented Modules. *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, 21(1) , 225-238.

[21] Türkmen, E. (2007). *Radikal Tümlenmiş Modüller*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi,

[22] Türkmen, E. (2007). *Radikal Tümlenmiş ve Eş Sonlu Radikal Tümlenmiş modüllerin Karakterizasyonları.* Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, 107.

[23] Sharpe, D.W. , Vamos, P. (1972). *Injective Modules*,Cambridge at the University Press, 190.

[24] Wang, Y. , Ding, N. (2006). Generalized Supplemented Modules. *Taiwanese J. Math* , 10(6) , 1589-1601.

[25] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach, 606.

[26] Zöschinger, H. (1974). Komplemente Als Direkte Summanden. *Arch. Math (Basel)*, 25, 241-253

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Burcu TAŞ

Doğum Yeri : Amasya

Doğum Tarihi : 14.03.1990

Eğitim Derecesi

Lise : Amasya Oniki Haziran Lisesi (2004-2007)

Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2008-2013)

Çalıştığı Kurum: Göynücek Şehit Erkan Karaçoban Çok Programlı Anadolu Lisesi, Göynücek / AMASYA (2016-)

Yabancı Dili: İngilizce

İletişim Bilgileri

E-posta: burcudrntas@gmail.com

Adres: Şarklı Köyü No:2/2 Göynücek / AMASYA

Yayınlar

Taş B. , Türkmen E. , Nişancı Türkmen B. (2017). Cofınıtely I-Rad-⊕-Supplemented Modules. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*, 22(1), 24-30.