T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOBOLEV UZAYLARINDA İKİ ARALIKLI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YASEMİN YILMAZ

OCAK

SOBOLEV UZAYLARINDA İKİ ARALIKLI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Yasemin YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2019

Yasemin YILMAZ tarafından hazırlanan "SOBOLEV UZAYLARINDA İKİ ARALIKLI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Yadigar ŞEKERCİ FIRAT
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye: Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye: Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ
Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Tez Savunma Tarihi: 28/01/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....
Doç. Dr. Meryem EVECEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Yasemin YILMAZ
28/01/2019

SOBOLEV UZAYLARINDA İKİ ARALIKLI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Yasemin YILMAZ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2019

ÖZET

Bu çalışmada Sobolev uzaylarının direkt toplamında çok noktalı geçiş şartlarına sahip olan süreksiz bir sınır değer problemi incelendi. Lineer spektral parametre içeren bu ikinci mertebeden adi lineer diferansiyel denklemin çözümü çok noktalı geçiş şartlarıyla birlikte iki ayrık aralıkta araştırıldı. Öncelikle temel kavramların incelenmesi açısından ölçüm teorisi ve bazı fonksiyon uzayları üzerinde duruldu. Bu anlamda çalışmamız için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Sayfa Adedi : 94

Anahtar Kelimeler : Sobolev uzayları, sınır değer problemleri, geçiş şartları.

Danışman : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

SOLVABILITY OF TWO-INTERVAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN SOBOLEV SPACES

(M. Sc. Thesis)

Yasemin YILMAZ

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

Ocak 2019

ABSTRACT

In this study, a discontinuous boundary value problem with so-called multi-point-transmission conditions was exemined in the direct sum of Sobolev spaces. The solution of this second order linear differential equation containing linear spectral parameter was investigated in two disjoint intervals with multi-point transition conditions. First, it was focused on measurement theory and some function spaces in terms of examining the basic concepts. In this sense, some basic definitions and theorems were given.

Page Number : 94
Key Words : Sobolev space, boundary value problems, tranmission conditions.
Supervisor : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca bilgisinden faydalandığım, insani değerleri ile de örnek edindiğim, birlikte çalışmaktan onur duyduğum, ayrıca göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam sayın Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR' e, yardımlarını esirgemeyen tezime katkı sağlayan sayın Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bana eşlik eden arkadaşlarıma, bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$	Ölçülebilir küme
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\mu})$	Ölçü uzayı
$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\Omega})$	Sürekli fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C_B}(\boldsymbol{\Omega})$	Sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C^m}(\boldsymbol{\Omega})$	m. mertebeye kadar türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C_B^m}(\boldsymbol{\Omega})$	m. mertebeye kadar türevli, sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C_0^\infty}(\boldsymbol{\Omega})$	Kompakt destekli fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{L^p}(\boldsymbol{\Omega})$	p. kuvvetten Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{L^\infty}(\boldsymbol{\Omega})$	Esas sınırlı fonksiyonların Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{L_{loc}^p}(\boldsymbol{\Omega})$	p. kuvvetten Lokal integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{W^{k,p}}(\boldsymbol{\Omega})$	Sobolev uzayı
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$	İnterpolasyon çifti
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{p}}$	Reel interpolasyon uzayı
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})_{\boldsymbol{\theta}}$	Sürekli interpolasyon uzayı

Kısaltmalar	Açıklama
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	n- boyutlu reel vektör uzayı
$\boldsymbol{W_0^{k,p}(\Omega)}$	$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{k,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı
$\boldsymbol{H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)}$	Karesi integrallenebilen fonksiyonların Sobolev uzayı
$\boldsymbol{W^{k,p}(-1,0) \dotplus W^{k,p}(0,1)}$	Sobolev uzaylarının direkt toplamı

1. GİRİŞ

Sınır değer probleminin klasik teorisinde genellikle sürekli katsayılı ve sınır şartlarında sadece tanım aralığının uç noktalarında sınır değer ifadeleri içeren problemler ele alınır. Bu tip sınır değer problemlerine S. Yakubov ve Ya. Yakubov' un çalışmalarında rastlanır.

Sınır değer problemlerinin önemli bir özel durumu çok noktalı geçiş şartları içeren sınır değer problemleridir. Standart olmayan sınır değer problemi olarak da adlandırılan bu tip problemlerinin O. Sh. Mukhtarov ve arkadaşları tarafından çalışıldığı görülür.

Geçiş şartları eklenmiş sınır değer problemleri fiziksel problemlerin çeşitliliğine yani; ısı kütle aktarım problemlerinde, titreşim problemlerinde, çubuğun noktasal yüklerle yüklenmesi vb. problemlerinde değişkenlerine ayırma yönteminin uygulanmasından sonra ortaya çıkmaktadır. Örneğin; elektrostatikte ve manyetik statikte sonsuz iletken bir tabaka boyunca ısı transferleri tanımlayan model problemler bir geçiş problemidir.

Bu bölümde

$$L(\lambda)u := -a(x)u''(x) + \lambda u(x) = f(x), x \in [-1,0) \cup (0,1] \qquad (1)$$

$$L_k u := \sum_{j=1}^{4} \alpha_{kj} u^{(m_k)}(y_j) + \sum_{i=1}^{n_k} \delta_{ki} u^{(m_k)}(x_{ki}) = f_k, k = 1,2,3,4, \qquad (2)$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemi (2) deki çok noktalı geçiş şartlarıyla birlikte lineer spektral parametre içeren (1) denklemi iki ayrı aralıkta göz önüne alındı. Bu çalışmada dikkate alınan sınır değer probleminin çözülebilirliği ve bu probleme karşılık gelen diferansiyel operatörün Fredholm operatörü olma özelliği incelendi.

Burada

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & x \in [-1,0) \\ a_2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ olarak tanımlanan parçalı sabit fonksiyon; λ-kompleks parametre; α_{kj} ler $(j = k = 1,2,3,4)$ kompleks sayılar; $\sum_{j=1}^{4} |\alpha_{kj}| \neq 0$ $(k = 1,2,3,4)$; x_{ki} iç noktalar, $m_k \geq 0$ $(k = 1,2,3,4)$ herhangi tamsayılar; y_j ler $(y_1 = -1, y_2 = -0, y_3 = +0, y_4 = +1)$ sınır geçiş şartlarıdır.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Sınır değer problemleriyle ilgili çeşitli çalışmalar mevcuttur. Aşağıda bu çalışmalardan bazılarına kısaca değinilmiştir.

Matematiksel fizik, hidrodinamik, elektrodinamik gibi birçok fiziksel sürecin çalışmasında önemli bir rol oynamaktadır. Matematiksel fizik tarafından ele alınan muazzam çeşitlilikteki problemler nedeniyle kısmi diferansiyel denklemlere yol açan problemler incelenmektedir.

Tikhonov ve Samarskii, (1990) tanınmış iki Rus matematikçi, tipik fiziksel süreçlere ve bunlarla ilgilenen temel denklemlere odaklanmışlardır. Matematiksel formülasyona ve elde edilen sonuçların fiziksel olarak yorumlanmasına önem vermişlerdir.

Diferansiyel-operatör denklemleri teorisi, mekanik ve teorik fizikte çok sayıda uygulama ile hem adi hem de kısmi diferansiyel denklemler üzerindeki çalışmalar için modern teorilerden biridir.

S. Yakubov ve Ya. Yakubov, (1999) diferansiyel operatör denklemlerinde, kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları ile yüksek mertebeden diferansiyel-operatör denklemleri teorisine sistematik bir çözüm sunmuşlardır. Hem düzenli hem de düzensiz diferansiyel problemlere uygulamaya izin veren bir teori inşa etmişlerdir. Özellikle, tek bir konuyu inceleyen yazılarda, ele alınmayan bilinen yöntemlerle çözülemeyen problemler üzerinde çalışmışlardır.

Mukhtarov ve Yakubov, (2002) Ağırlıklı Sobolev uzaylarında, adi diferansiyel-operatör denklemi için geçiş şartları içeren bir sınır fonksiyonel problemini araştırmışlardır. Problemin kök fonksiyonları sisteminin Abel bazı olma özelliğini spektral parametreye göre koersitivliğini ve izomorfizmliğini ispatlamışlardır.

Kandemir, Mukhtarov ve Yakubov, (2009) çalışmalarında süreksiz katsayılı ve spektral parametre içeren adi diferansiyel denklemler için Birkhoff-düzensiz sınır değer problemini ele almışlardır. Bu probleme süreksizlik noktasında, sınır koşullarına ek olarak geçiş şartı olarak adlandırılan sınır şartları eklemişlerdir. Özdeğer parametresi, diferansiyel denklemde ikinci dereceden ve sınır şartlarında birinci dereceden oluşmaktadır. Bu problem için izomorfizm, koersitivlik özelliklerini ispatlamışlardır ve Bharmonik denklemin durumu ayrıca incelemişlerdir.

Aliev, (2010) makalesinde ikinci mertebeden eliptik diferansiyel operatör için hem denkleminde hem de sınır şartlarında spektral parametre içeren sınır değer probleminin çözülebilirliğini incelemiştir. Ayrıca klasik sınır değer problemine karşılık gelen özdeğerlerin asimptotik davranışlarını analiz etmiştir.

Kandemir ve Yakubov, (2010) yayımladıkları makalelerinde ana diferansiyel denklemde parçalı sabit katsayılı soyut bir lineer operatör ve lineer fonksiyonlar içeren çok noktalı sınır geçiş şartlarıyla verilen bir lineer diferansiyel denklemi incelemişlerdir. Çalıştıkları problemin denkleminde ve sınır geçiş şartlarında spektral parametre mevcuttur. Spektral parametreye ve farklı uzaylara göre problemin izomorfizmliğini ve koersitivliğini ispatlamışlardır.

Kandemir, (2012) makalesinde bir Hilbert uzayında ikinci mertebeden eliptik diferansiyel operatör denkleminden ve sınırsız operatörler içeren çok noktalı sınır geçiş şartlarından oluşan düzensiz bir sınır değer problemini araştırmıştır. Bu problemde, operatörler sıfır noktasında süreksizdir ve diferensiyel denklemler bir spektral parametre içerir. Geçiş şartlı ve çok noktalı sınır şartlarıyla sınır değer problemlerinin koersitivliği ve Fredholmness olduğunu ispatlamıştır.

Aydemir ve Mukhtarov, (2014) makalesinde esas olarak integral denklemlerin yöntemine dayanan iki aralıklı Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarının seriye açılımını araştırmışlardır. Ele aldıkları Sturm-Liouville problemi bir iç noktada iki geçiş şartından oluşmaktadır. Probleme göre inşa edilen Hilbert uzayında çalışılan problemin spektral analizi için Green fonksiyonu metodunu geliştirmişlerdir.

İmanbaev ve Saydbekov, (2014) çalışmalarında adi diferansiyel ifadeyle sınır yüklü ve genel formun kuvvetli reguler sınır şartları ile oluşturulan bir lineer operatör ele almışlardır. Spektral problemin karakteristik determinantını oluşturma olasılığını ispatlamışlardır.

Allahverdiev ve Uğurlu, (2015) çalışmalarında iki aralıklı singuler diferansiyel operatörün genişlemesi, saçılması ve spektral teorisi üzerine çalışmışlardır.

Aydemir ve Mukhtarov, (2016) yaptıkları çalışmalarında ayrık sınır şartlarından oluşan ve sonlu iç noktada süreksizliğe sahip olan ve bu noktalarda geçiş şartlarıyla verilen süreksiz bir Sturm-Liouville problemini incelemişlerdir. Klasik Sturm-Liouville probleminde kullanılan teknikleri geliştirerek ve kendi yaklaşımlarını kullanarak çalıştıkları problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller bulmuşlardır.

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin klasik teorisinde genellikle sürekli katsayılı denklemler ve dikkate alınan aralığın sadece sınır uç noktalarını içeren sınır şartları düşünülür.

Kandemir ve Mukhtarov, (2017) çalışmalarında göz önüne alınan aralığın sadece sınır uç noktalarında değil aynı zamanda iç noktalarda ve aralığın süreksizlik noktalarında da klasik olmayan geçiş şatlarından oluşan süreksiz katsayılı sınır değer problemini incelemişlerdir. Mukhtarov' un yöntemleri ile spektral parametreye göre Fredholmess, koersitivlik ve izomorfizm gibi özellikleri ispatlamışlardır.

Aşağıda bu tez kapsamında kullanılan bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

2.1. Tanım

A ve B herhangi iki küme olsun. A dan B ye birebir ve örten olacak şekilde en az bir f fonksiyonu varsa bu iki kümeye eş güçlü kümeler denir. A nın B ye eş güçlü olması

$$A \sim B$$

şeklinde gösterilir. Bu tanım başka bir ifadeyle

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B, \text{ birebir ve örten}$$

demektir.

2.2. Tanım

Kümelerin eş güçlü olması yardımıyla, herhangi $\mathcal{A}$ kümeler ailesi üzerinde tanımlanan

$$\beta = \{ (A, B) |\ A \sim B \ ; A, B \ \in \mathcal{A} \}$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

2.3. Tanım

Bir özalt kümesi ile eş güçlü olan kümeye sonsuz küme denir.

Kardinal sayılar veya kısaca kardinaller bir kümenin kardinalitesi olarak bilinen büyüklüğü göstermek için kullanılan sayılardır.

2.4. Tanım

Kardinal sayısı bir doğal sayı olan kümelere sonlu küme denilir.

2.5. Tanım

Sonlu bir kümenin eleman sayısına bu kümenin kardinal sayısı denir. ‘eleman sayısı’ kavramı sonlu kümeler için geçerli olan bir kavramdır. Sonsuz kümeler için güçlülük (cardinality) kavramı kullanılır. Buna göre sonsuz kümelerin kardinal sayısını tanımlamak için transfinite kardinal sayılar vardır.

2.6. Tanım

Doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi ile eş güçlü olan kümeye sayılabilir küme denir.

2.7. Tanım

Bir A kümesi ile $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi arasında bire bir ve örten olacak şekilde f fonksiyonu varsa ($|A| = |\mathbb{N}|$) A kümesine sayılabilir sonsuz küme adı verilir.
Buna göre $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi kendisi ile eş güçlü olduğundan sayılabilir sonsuz kümedir.

2.8. Tanım

A sonsuz bir küme ve $|A| \neq |\mathbb{N}|$ ise A kümesine sayılamaz küme denir.

2.9. Tanım

I herhangi boş olmayan bir küme, $\forall i \in I$ için bir A_i kümesi varsa I kümesine indis kümesi, A_i kümelerinin her birine de indislenmiş küme denir.

2.10. Tanım

I indis kümesi ve bu kümenin her bir i elemanı için bir A_i kümesi bulunsun. A_i kümelerinin $\mathcal{A} = \{A_i |\ i \in I\}$ topluluğuna kümeler ailesi denir. Bu aile $\{A_i\}_{i \in I}$ şeklinde de gösterilir.

2.11. Tanım

$\mathcal{A} = \{A_i |\ i \in I\}$ ailesi verilmiş olsun. $J \subset I$ olmak üzere $\mathcal{B} = \{A_i |\ i \in J\}$ ailesine $\mathcal{A}$ ailesinin alt ailesi denir ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ şeklinde gösterilir.

2.12. Tanım (Bir Kümenin Örtüsü)

$\mathbb{R}$ nin bazı alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesini göz önüne alalım. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, $A_\lambda \in \mathcal{A}$ yazılabiliyorsa $\mathcal{A}$ ailesine A kümesinin bir örtüsü adı verilir. Bu durumda A kümesinin her noktası $\mathcal{A}$ ailesindeki bir kümenin içinde bulunur. $\mathcal{A}$ daki bütün kümeler açıksa bu aile açık örtü adını alır. $\mathcal{A}$ ailesi $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ gibi kümelerin oluşturduğu sayılabilir bir ailesi ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ yazılabiliyorsa $\mathcal{A}$ ailesine A kümesinin bir sayılabilir örtüsü denir (Şuhubi, 2001: 147).

2.13. Tanım (Alt Örtü)

$\mathcal{A}$ ailesi bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir örtüsü olsun. $\mathcal{B}$ her üyesi $\mathcal{A}$ nın içinde olan bir alt kümeler ailesi ve $\mathcal{B}$ ailesi de A kümesinin bir örtüsü ise $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ alt ailesi A kümesinın bir alt örtüsü adını alır (Şuhubi, 2001: 147).

2.14. Tanım

Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine bir kompakt küme denir. Yani A kümesi kompakt ise her $\mathcal{A}$ açık örtüsünün sonlu sayıda, örneğin k tane açık kümeden oluşan bir $\{A_j \in \mathcal{A}: j = 1, \dots, k\}$ alt ailesi vardır ve $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ yazılır (Şuhubi, 2001: 148).

2.15. Tanım

$B \subset A$ ve B nin ölçümü sıfır $(\mu(B) = 0)$ olsun. Bu durumda $A \backslash B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özelik A kümesinin hemen hemen her yerinde sağlanıyor denir.

2.16. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $u: \Omega \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\overline{\{x \in \Omega |\ u(x) \neq 0\}}$$

kümesine u fonksiyonunun supportu (desteği) denir ve $suppu$ şeklinde gösterilir. u fonksiyonunun support kümesi Ω da kompakt ise bu fonksiyona supportu kompakt fonksiyon denir.

2.17. Tanım

Ω da supportu kompakt olan ve her mertebeden türevlenebilen fonksiyonlara test fonksiyonu denir ve bu fonksiyonların uzayı

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) | \, suppu \; kompakt\}$$

ile gösterilir.

2.18. Tanım

Ω ve Ψ, $\Psi \subset \Omega$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de iki bölge olsun. $\overline{\Psi} \subset \Omega$ ve $\overline{\Psi}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ nin kompakt bir alt kümesi ise bu durum $\Psi \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. u, Ψ de tanımlı bir fonksiyon ve u fonksiyonunun desteği $suppu = \overline{\{x \in \Psi | \, u(x) \neq 0\}}$ olsun. Eğer $suppu \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω da kompakt desteğe sahiptir denir.

2.19. Tanım

X ve Y Banach uzayları olmak üzere $J: X \to Y$ dönüşümü, birebir ve cebirsel işlemleri koruyorsa X uzayı Y uzayına gömülmüştür denir. J operatörüne gömülme operatörü denir. Eğer J gömülme operatörü sürekli ise X in Y uzayına gömülüşü süreklidir.

2.20. Tanım

X ve Y reel veya kompleks iki Banach uzayı olsun. $X = Y$ olması X ve Y uzayının aynı elemanlara ve eşdeğer normlara sahip olduğu anlamına gelir. $X \subset Y$ ise X uzayının Y uzayında sürekli gömülebilir olduğunu ifade eder.

2.21. Tanım

Bir topolojik uzaya ait farklı iki elemanın ayrık komşulukları mevcut ise bu uzaya Hausdorff uzayı denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez kapsamında yer verilen temel tanım ve teoremler, kaynaklar kısmında belirtilen yayımlanmış metaryellerden yararlanılarak yazılmıştır. Bu çalışmada göz önüne alınan klasik olmayan geçiş şatlarından oluşan süreksiz katsayılı sınır değer problemin çözülebilirliği için literatürde var olan yöntemler kullanılmıştır. Öncelikli olarak klasik olmayan sınır değer problemlerinin oluşumu ve çözümü üzerine farklı yöntemler geliştiren Oktay Sh. Mukhtarov ve arkadaşlarının çalışmaları dikkate alınmıştır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Ölçüm Teorisi

4.1.1. Ölçülebilir uzay

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $I = (a, b)$, $I = [a, b)$, $I = (a, b]$ ve $I = [a, b]$ aralıkların uzunluğu

$$d(I) = |b - a|$$

şeklinde ifade edilir.

(a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ ve $(-\infty, b)$ şeklindeki aralıkların uzunlukları ∞ olarak tanımlanır. $a = b$ olması halinde tek bir noktadan oluşan aralığın uzunluğu sıfır olarak kabul edilir. Ayrıca, ayrık aralıkların birleşimi bu aralıkların uzunlukları toplamına eşittir. Diğer bir ifadeyle,

$$I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

olmak üzere

$$d(I) = \sum_{k=1}^{n} d(I_k) = d(I_1) + d(I_2) + \cdots + d(I_n)$$

şeklinde tanımlanır.

$I, J \subset \mathbb{R}$ olsun. I ve J aralıklarının

$$A = I \times J = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \in I \ ve \ b \in J\}$$

kartezyen çarpımı düzlemde dikdörtgensel bir bölge oluşturur. Bu bölgenin alanı I ve J aralıklarının uzunlukları çarpımına eşittir. Yani,

$$alan(A) = d(I).d(J)$$

olur. Eğer A dikdörtgensel bölgesi sonlu ayrık dikdörtgensel bölgelerin birleşimi ise A bölgesinin alanı dikdörtgensel bölgelerin alanları toplamına eşittir. Diğer bir ifadeyle,

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

olmak üzere

$$alan(A) = \sum_{k=1}^{n} alan(A_k) = alan(A_1) + alan(A_2) + \cdots + alan(A_n)$$

şeklindedir.

$I_1, I_2, I_3 \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu aralıkların

$$V = I_1 \times I_2 \times I_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in I_1, y \in I_2 \ ve \ z \in I_3\}$$

kartezyen çarpımı $\mathbb{R}^3$ te dikdörtgenler prizması tarafından sınırlanan bir cisim oluşturur. Bu cismin hacmi I_1, I_2, I_3 aralıklarının uzunlukları çarpımına eşittir. Yani,

$$hacim(V) = d(I_1).\, d(I_2).\, d(I_3)$$

olur. Eğer V cismi ayrık cisimlerin sonlu birleşimi ise V cisminin hacmi cisimlerin hacimleri toplamına eşittir. Başka bir ifadeyle,

$$V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$$

olmak üzere

$hacim(V) = \sum_{k=1}^{n} hacim(V_k) = hacim(V_1) + hacim(V_2) + \cdots + hacim(V_n)$

şeklinde yazılır.

Bu açıklamalara göre ölçü, $\mathbb{R}$ de uzunluk, $\mathbb{R}^2$ de alan, $\mathbb{R}^3$ de hacim kavramıdır. Şimdi ölçü kavramını daha geniş olarak ele alalım.

4.1.1. Tanım

$\mathcal{F}, X$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile, $P(X)$ kuvvet kümesi ve $\mathcal{F} \subset P(X)$ olsun. $\mathcal{F}$ ailesi üzerinde

i. $\emptyset \in \mathcal{F}$,

ii. $A \in \mathcal{F}$ için $A' \in \mathcal{F}$,

iii. $A_k \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

özellikleri sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine X üzerinde $\sigma -$cebir denir.

4.1.2. Tanım

$\mathcal{F}$ ailesi X kümesi üzerinde bir $\sigma -$cebir ise $(X, \mathcal{F})$ ikilisine ölçülebilir uzay denir ve $\mathcal{F}$ ailesindeki her bir küme ölçülebilir küme olarak adlandırılır.

4.1.3. Tanım

$(X, \mathcal{F})$ ölçülebilir uzay olsun.

$$\mu: \mathcal{F} \to [0, +\infty]$$

şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu için

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. $\mathcal{F}$ ailesinin ayrık bir (A_n) dizisi için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

özellikleri sağlanıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{F}$ üzerinde bir ölçü denir.

$A \in (A_n)$ olmak üzere $\mu(A)$ sayısı A kümesinin ölçüsü olarak ifade edilir.

4.1.4. Tanım

Ölçünün ikinci özelliğine $\sigma -$toplamsal denir. Bazen bir ölçü $\sigma -$toplamsal ölçü veya $\sigma -$ölçü olarak da adlandırılır.

4.1.5. Tanım

$(X, \mathcal{F})$ ölçülebilir uzay olsun.

$$\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$$

fonksiyonu için

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. İkişer ayrık $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ kümeleri için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{n} A_n\right) = \sum_{n=1}^{n} \mu(A_n)$$

özellikleri sağlanıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{F}$ üzerinde bir sonlu toplamsal ölçü denir.

4.1.6. Tanım

μ fonksiyonu $\mathcal{F}$ üzerinde ölçü olmak üzere $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ölçü uzayı olarak adlandırılır.

4.1.7. Tanım

$\mu(X) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü denir.

4.1.8. Tanım

Bir $A \in \mathcal{F}$ için $\mu(A) = 0$ ise A kümesi ölçüsü sıfır olan küme olarak ifade edilir.

4.1.9. Teorem ($\sigma -$ alt toplamsal özelliği)

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots \in \mathcal{F}$ ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

eşitsizliği sağlanır.

4.1.10. Teorem

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots \in \mathcal{F}$ ve $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ için $A_n \subset A_{n+1}$ ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\lim_{n\to\infty}(A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

eşitliği doğrudur. Yani, (A_n) dizisi artan ve $A_0 \in \mathcal{F}$ olmak üzere

$$(A_n) \to A_0 \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A_0)$$

olur.

4.1.11. Teorem

$A, B \in \mathcal{F}, A \subset B$ ve $\mu(B) < \infty$ ise

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

dır.

4.1.12. Teorem

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k,\dots} \in \mathcal{F}$ ve $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ için $A_n \supset A_{n+1}$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\lim_{n\to\infty}(A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

eşitliği sağlanır. Yani, (A_n) dizisi azalan ve $A_0 \in \mathcal{F}$ ve $\mu(A_1) < \infty$ olmak üzere

$$(A_n) \to A_0 \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A_0)$$

dır.

4.1.13. Tanım

X herhangi bir küme ve $P(X)$, X in kuvvet kümesi olmak üzere

$$\mu^*: \mathcal{F} \to [0, +\infty]$$

şeklinde tanımlanan μ^* fonksiyonu için

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. $A \subseteq B \subseteq X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

iii. X in alt kümelerinin bütün (A_n) dizisi için

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

özellikleri sağlanıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçü denir.

4.1.14. Teorem

Sonlu elemanlı ve sayılabilir elemanlı her reel sayı kümesinin dış ölçüsü sıfırdır.

4.1.14. İspat

$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ için,

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k - \varepsilon_n, x_k + \varepsilon_n)$$

örtüsü tanımlansın. Dış ölçü tanımından

$$0 \leq \mu^*(E) \leq \sum_{k=1}^{n} l\,(x_k - \varepsilon_n, x_k + \varepsilon_n) = \sum_{k=1}^{n} 2\varepsilon_n = \frac{n}{2^n}\varepsilon < \varepsilon$$

bulunur. Bu eşitsizlik takımı her $\varepsilon > 0$ sayısı için doğru olduğundan $\mu^*(E) = 0$ dır. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$ sayılabilir elemanlı olduğunda benzer biçimde her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ için $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(x_k - \varepsilon_n, x_k + \varepsilon_n)$ örtüsü göz önüne alınsın. Dış ölçünün tanımından

$$0 \leq \mu^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. ε, pozitif değerlerle sıfıra giderken $\mu^*(E) = 0$ dır (Dernek, 2013: 8).

4.1.15. Teorem

i. Boş kümenin dış ölçüsü sıfırdır.

ii. Tek noktalı reel sayı kümelerinin dış ölçüsü sıfırdır.

4.1.15. İspat:

i. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\emptyset \subset \left(\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = I_\varepsilon$ açık örtüsü tanımlansın. $\emptyset$ küme hiçbir eleman içermediği için I_ε aralıkları her $\varepsilon > 0$ için tanımlanabilir. $\varepsilon = \frac{1}{n}$ alınsın. Dış ölçü tanımından $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq l(I_\varepsilon) = \varepsilon$, yeterince büyük n ler için $\mu^*(\emptyset) = 0$ olur.

ii. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $E = \{x\} \subset \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right) = I_\varepsilon(x)$ örtüsü tanımlanabilir. Dış ölçü tanımından

$$0 \leq \mu^*(E) \leq l\big(I_\varepsilon(x)\big) = \varepsilon$$

dir. Keyfi ε yeterince küçük alındığında $\mu^*(E) = 0$ olur (Dernek, 2013: 8).

4.1.16. Örnek:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x: \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \right\}$$

kümesinin uzunluğunu bulalım.

4.1.16. Çözüm

$I_k = \left\{ x: \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \right\}$ olsun. Buna göre $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ve $l(I_k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ dır.

$k \neq l$ için $I_k \cap I_l = \emptyset$ dir. Böylece

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l(I_k) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

elde edilir (Dernek, 2013: 29).

4.1.17. Örnek

$I_k = \left(0, \frac{1}{3^k}\right), (k \in \mathbb{N})$ aralıkları ile

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x: 0 < x < \frac{1}{3^k} \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x: 0 < x < \frac{1}{3^k} \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$$

kümeleri tanımlanıyor. A ve B kümelerinin uzunluğunu bulalım.

4.1.17. Çözüm

$I_1 = \left(0, \frac{1}{3}\right), I_2 = \left(0, \frac{1}{3^2}\right), \ldots, I_k = \left(0, \frac{1}{3^k}\right), \ldots$ için

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

dir. $J_1 = I_1 \backslash I_2$, $J_2 = I_2 \backslash I_3, \ldots, J_n = I_n \backslash I_{n+1}, \ldots$ olarak tanımlanırsa

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

olur ve J_k aralıkları ikişer ikişer ayrıktır. Dış ölçünün sayılabilir toplamsallık özelliğinden

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* \left(J_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l(J_k)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) \right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{3}$$

bulunur.

$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu(I_k) < \frac{1}{3} < \infty$ ve $I_k \supset I_{k+1}$ olduğundan

$$\mu^*(B) = \lim_{n\to\infty} l(I_n) = \lim_{n\to\infty} l\left(0, \frac{1}{3^n}\right) = 0$$

dır (Dernek, 2013: 30).

4.1.2. Lebesgue ölçüsü

4.1.18. Tanım

$\mathcal{F}$ ailesi $\mathbb{R}^n$ nin alt kümelerinden oluşan ve aşağıda özelliklere sahip bir σ −cebiri olsun.

i. $\mathbb{R}^n$ deki her açık küme $\mathcal{F}$ ailesinin elemanıdır,

ii. $A \subset B$, $B \in \mathcal{F}$ ve $\mu(B) = 0$ ise, $A \in \mathcal{F}$ ve $\mu(A) = 0$ dır,

iii. $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j , j = 1,2, \ldots , n\}$ ise $A \in \mathcal{F}$ ve $\mu(A) = \prod_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)$,

iv. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \mathcal{F}$ iken $x + A = \{x + y |\ y \in A\} \in \mathcal{F}$ ve $\mu(x + A) = \mu(A)$.

Burada $\mathcal{F}$ ailesi üzerinde bir μ ölçümü vardır ve bu μ ölçümü dördüncü özellik nedeni ile değişmezdir.

Bu özelliklere sahip bir $\mathcal{F}$ ailesinin elemanlarına $\mathbb{R}^n$ nin Lebesgue ölçülebilir altkümeleri, μ ölçüm fonksiyonuna da $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue ölçümü denir (Adams, 1975: 13).

4.1.19. Tanım

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $\forall\, B \subseteq \mathbb{R}$ için,

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A' \cap B)$$

ise, A kümesine Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir.

$\mathbb{R}$ üzerinde açık kümeler, sayılabilir sayıda olmak üzere açık aralıkların birleşimi olarak yazılabilir. Bu sebeple $\mathbb{R}$ üzerindeki açık kümeler için Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir.

4.1.20. Teorem

i. Her sıfır kümesi ölçülebilirdir.

ii. Her aralık ölçülebilirdir.

4.1.20. İspat

i. N kümesi sıfır kümesi olsun. Bu durumda dış ölçüsü sıfırdır ve $\mu^*(N) = 0$ olarak yazılır. $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}$ için $A \cap N \subseteq N$ olduğundan $\mu^*(A \cap N) \leq \mu^*(N) = 0$ yazılır.

Ayrıca $A \cap N' \subseteq A$ olduğundan $\mu^*(A \cap N') \leq \mu^*(A)$ yazabiliriz. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak,

$$\mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \cap N') \leq \mu^*(A) + 0$$

elde edilir. Bu ise Lebesgue ölçülebilirlik için gerek şarttır.

ii. $I = [a, b]$ olarak alalım. $A \subset \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Burada A kümesini örten ve

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

özelliğine sahip bir I_n aralıklar dizisi yada örtüsü bulalım.

Herhangi bir I_n aralığı için $J_n = I_n \cap [a, b]$ aralıkları $A \cap [a, b]$ kümesini örttüğü açıktır. Dış ölçünün tanımından dolayı

$$\mu^*(A \cap [a, b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n)$$

yazabiliriz. Benzer şekilde $K_n = I_n \cap (-\infty, a)$ ve $L_n = I_n \cap (b, \infty)$ aralıkları $A \cap [a, b]'$ kümesini örter. Bu durumda

$$\mu^*(A \cap [a, b]') \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(K_n) + \sum_{n=1}^{\infty} l(L_n)$$

yazabiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$l(I_n) = l(J_n) + l(K_n) + l(L_n)$$

eşitliği doğrudur. Buna göre

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$$

eşitsizliğini yeniden düzenleyelim. Buradan

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) + \sum_{n=1}^{\infty} l(K_n) + \sum_{n=1}^{\infty} l(L_n)$$

ifadesini elde ederiz. $\varepsilon \to 0$ için

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap [a,b]) + \mu^*(A \cap [a,b]')$$

bulunur.

4.1.21. Örnek

$\mu: P(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ aşağıdaki gibi tanımlanmış bir küme fonksiyonu olsun.

$$\mu(E) = sup\{(b-a): (a,b) \subseteq E\}$$

μ nün bir ölçü olup olmadığını araştıralım.

4.1.21. Çözüm

$\mu(\emptyset) = 0,$

$$\mu(E+x) = sup\{(b+x-(a+x)): (a+x, b+x) \subseteq E+x\} = \mu(E)$$

dır. μ, öteleme altında değişmezdir.

$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ olsun. $\mu(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$ bağıntısı her zaman doğru değildir. Örneğin, $E = [0,1]$ olsun. Bu durumda $\mu(E) = 1$ olacaktır.

$E_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right)$, $E_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $E_3 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ olarak alırsak $E = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ yazabiliriz. Buradan

$$1 \neq sup\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

elde ederiz. O halde μ sonlu toplamsallık özelliğine sahip değildir, ölçü tanımlamaz (Dernek, 2013: 19).

4.1.22. Teorem

E_1 ve E_2 ölçülebilir iki reel sayı kümesi olsun. $E_1 \cup E_2$ ve $E_1 \cap E_2$ ölçülebilir kümelerdir.

4.1.22. İspat

E_1 ve E_2 ölçülebilir ve $A \subseteq \mathbb{R}$ herhangi bir küme olsun. Ölçülebilirliğin tanımından,

$$\begin{aligned} \gamma &= \mu^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] + \mu^*[A \cap (E_1 \cup E_2)'] \\ &= \mu^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] + \mu^*[A \cap E_1' \cap E_2'] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada toplamın ilk terimini ele alalım.

$A \cap (E_1 \cup E_2) = B$ olarak tanımlanırsa $B \subset \mathbb{R}$ ve E_1 ölçülebilir olduğundan

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap E_1) + \mu^*(B \cap E_1')$$

eşitliği doğrudur. Buradan

$$B \cap E_1 = [A \cap (E_1 \cup E_2)] \cap E_1 = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1' \cap E_2 \cap E_1) = A \cap E_1$$

$$B \cap E_1{}' = [A \cap (E_1 \cup E_2)] \cap E_1{}' = (A \cap E_1 \cap E_1{}') \cup (A \cap E_1{}' \cap E_2) = A \cap E_1{}' \cap E_2$$

dır. Böylece

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1{}' \cap E_2)$$

elde edilir. Bu değerler ilk bağıntıda yerine yazılırsa ve önce E_2 nin ölçülebilirliği sonra E_1 in ölçülebilirliğinden,

$$\begin{aligned} \gamma &= \mu^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] + \mu^*[A \cap (E_1 \cup E_2)'] \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1{}' \cap E_2) + \mu^*[A \cap E_1{}' \cap E_2{}'] \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1{}') \\ &= \mu^*(A) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde E_1 ve E_2 ölçülebilir iken $E_1 \cup E_2$ de ölçülebilirdir. E_1 ölçülebilir olduğundan $E_1{}'$ ölçülebilirdir ve benzer biçimde E_2 ölçülebilir olduğundan $E_2{}'$ de ölçülebilirdir. Buradan $E_1{}' \cup E_2{}'$ ölçülebilirdir ve böylelikle

$$(E_1{}' \cup E_2{}')' = E_1 \cap E_2$$

ölçülebilirdir (Royden and Fitzpatrick, 2010: 36).

4.1.3. Ölçülebilir fonksiyonlar

4.1.23. Tanım

A ölçülebilir bir küme olsun ve f fonksiyonu $f: A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ şeklinde tanımlansın.
$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in A: f(x) > \alpha\}$$

kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

4.1.24. Teorem

$\mathcal{A}$ ölçülebilir kümeler ailesi olmak üzere $E \in \mathcal{A}$ reel sayı kümesini, genelleştirilmiş reel sayılar kümesine resmeden bir f fonksiyonu ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

i. $\{x \in E:\ f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$

ii. $\{x \in E:\ f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$

iii. $\{x \in E:\ f(x) < \alpha\} = f^{-1}([-\infty, \alpha)) \in \mathcal{A}$

iv. $\{x \in E:\ f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{A}$

ifadeleri birbirine denktir.

4.1.24. İspat:

i. Birinci ifade doğru olsun. O halde

$$f^{-1}([\alpha,\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(\alpha - \frac{1}{n},\infty\right]\right)$$

yazılabilir. $f^{-1}([\alpha,\infty]) \in \mathcal{A}$ dir ve ikinci ifade doğrudur.

ii. İkinci ifade doğru olsun.

$$f^{-1}([-\infty,\alpha)) = E \backslash f^{-1}([\alpha,\infty])$$

bağıntısından ölçülebilir iki kümenin farkına eşit olan $f^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{A}$ dır. Üçüncü ifade doğrudur.

iii. Üçüncü ifade doğru olsun.

$$f^{-1}([-\infty,\alpha]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[-\infty,\alpha + \frac{1}{n}\right)\right)$$

yazılabilir. Buradan $f^{-1}([-\infty,\alpha]) \in \mathcal{A}$ dır ve dördündü ifade doğrudur.

iv. Dördüncü ifade doğru olsun.

$$f^{-1}((\alpha,\infty]) = E \backslash f^{-1}([-\infty,\alpha])$$

dır. Ölçülebilen iki kümenin farkına eşit olan $f^{-1}((\alpha,\infty]) \in \mathcal{A}$ dir. Birinci ifade doğru olur. Böylece dört ifade birbirine denktir (Dernek, 2013: 155).

4.1.25. Teorem

E bir reel sayı kümesi olsun. f, E de tanımlı reel değerli ve hemen hemen her yerde sürekli bir fonksiyon ise, f ölçülebilirdir.

4.1.25. İspat

f, E de hemen hemen her yerde sürekli ise süreksiz olduğu noktalar topluluğu sıfır ölçülü bir alt kümedir. Sıfır ölçülü reel sayı kümeleri ölçülebilirdir. Bu küme $D \subset E$ ise $D \in \mathcal{A}$ dır. $E \backslash D$ ise ölçülebilir bir kümenin tümleyeni olduğu için ölçülebilirdir. O halde $\mathcal{A}$ bir σ-cebiri olduğu için f in tanım kümesi

$$E = D \cup (E \backslash D) \in \mathcal{A}$$

dır. Diğer taraftan f, E de sürekli reel değerli bir fonksiyon olarak verildiğinden her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\big((\alpha,\infty)\big)$ kümesi açıktır. Açık kümeler ölçülebilirdir. Böylece

$$f^{-1}\big((\alpha,\infty)\big) \in \mathcal{A}$$

olur. f fonksiyonu ölçülebilirdir (Dernek, 2013: 157).

4.1.26. Örnek

E ölçülebilir bir küme, α genişletilmiş bir reel sayı ve f E de tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Buna göre

$$\{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

kümesi ölçülebilirdir.

4.1.26. Çözüm

$\alpha < \infty$ olsun.

$$\{x \in E : f(x) = \alpha\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$$

iki ölçülebilir kümenin kesişimi olarak ifade edilebildiğinden $f^{-1}(\{\alpha\})$ ölçülebilirdir.

$\alpha = \infty$ olsun.

$$\{x \in E : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > n\}$$

sayılabilir sayıda ölçülebilen kümenin kesişimi olduğundan $f^{-1}(\{\infty\})$ ölçülebilirdir (Dernek, 2013: 158).

4.1.27. Örnek

λ, bir reel sayı f ölçülebilir bir E kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli ölçülebilir fonksiyon ise $f + \lambda$ ve $\lambda . f$ fonksiyonları da ölçülebilirdir.

4.1.27. Çözüm

i. $f : E \to \mathbb{R}$ tanımlı ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $g = f + \lambda, g : E \to \mathbb{R}$ dir.

$$\begin{aligned} g^{-1}\big((\alpha, \infty)\big) &= \{x \in E : g(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in E : f(x) + \lambda > \alpha\} \\ &= \{x \in E : f(x) > \alpha - \lambda\} \end{aligned}$$

f ölçülebilir olduğu için $g^{-1}\big((\alpha, \infty)\big)$ ölçülebilir ve buradan da $f + \lambda$ ölçülebilirdir.

ii. $h = \lambda . f$ ise $h : E \to \mathbb{R}$ dır.

$\lambda = 0$ ise $h = 0$ sabit fonksiyonu ölçülebilirdir.

α nın ve λ nın sıfırdan farklı olması halinde bu reel sayıların işaretine göre

$$\begin{aligned} h^{-1}\big((\alpha, \infty)\big) &= \{x \in E : h(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in E : \lambda . f(x) > \alpha\} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \lambda > 0, \left\{x \in E : f(x) > \frac{\alpha}{\lambda}\right\} = f^{-1}\left(\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \infty\right)\right) \\ \lambda < 0, \left\{x \in E : f(x) < \frac{\alpha}{\lambda}\right\} = f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right) \end{cases}$$

kümelerine eşittir. Sağ yandaki kümelerin ölçülebilir olması, h fonksiyonunun ölçülebilir olmasını gerektirir. O halde λ nın işareti nasıl olursa olsun $\lambda.f$ ölçülebilirdir (Dernek, 2013: 158).

4.1.28. Örnek

f ve g, E ölçülebilir reel sayı kümesi üzerinde tanımlı genişletilmiş reel sayılar kümesinde değer alan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $h = f + g, k = f - g$ ile tanımlanan fonksiyonlar ölçülebilirdir.

4.1.28. Çözüm

f ve g, E de tanımlı $\mathbb{R}^*$ da değer alan fonksiyonlar olsun. $h: E \to \mathbb{R}^*$ bir fonksiyondur. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in E$ için $f(x) + g(x) < \alpha$ ve buradan $f(x) < \alpha - g(x)$ dir. Archimedes ilkesine göre

$$f(x) < q < \alpha - g(x)$$

eşitsizliği gerçekleşmek üzere en az bir q rasyonel sayısı vardır. Buna göre

$$\{x \in E: f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_{q \in Q} \{x \in E: f(x) < q < \alpha - g(x)\}$$

$$= \bigcup_{q \in Q} [\{x \in E: f(x) < q\} \cap \{x \in E: g(x) < \alpha - q\}]$$

yazılabilir. Q rasyonel sayılar kümesi sayılabilir elemanlı ve ölçülebilir kümeler ailesi bir σ-cebiri olduğundan

$$\{x \in E: f(x) + g(x) < \alpha\}$$

ölçülebilirdir. Buradan da $h = f + g$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

$k = f - g$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Farklı olarak $k = f + (-1)g$ yazılışından yararlanılarak da kanıtlanabilir. Her $a \in \mathbb{R}$ için $a.g$ ölçülebilir olduğunu biliyoruz. Burada $a = -1$ alınırsa g ölçülebilirken $-g$ de ölçülebilir olur. O halde $k = f - g$ ölçülebilirdir (Dernek, 2013: 159).

4.1.4. Lebesgue integrali

4.1.29. Tanım

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sınırlı ve ölçülebilir olsun. $\alpha < f(x) < \beta$ olacak şekilde α, β gerçel sayıları verilsin. $[a, b]$ kapalı aralığını $\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta$ olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ noktalarıyla n tane alt aralığa bölünmek üzere bu noktalar, geometrik olarak y ekseni üzerindedir. $[a, b]$ kapalı aralığını bu biçimde bölerek elde edilen noktaların kümesine bu aralığın parçalanışı denir. P_k kümesi, $k = 1,2, \ldots, n$ sayıları için $P_k = \{x | y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ şeklinde tanımlansın. $f(x)$ fonksiyonu ölçülebilir olduğundan, P_k kümelerinin her biri ölçülebilirdir ve ayrıktır.

$$U = \sum_{k=1}^{n} y_k . \mu(P_k) \, , A = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} . \mu(P_k)$$

ifadeleri sırasıyla üst ve alt toplamlar olarak tanımlansın. Mümkün olan bütün parçalanmalar için $I = \inf(U)$ ve $J = \sup(A)$ dır. Her zaman var olan bu değerler sırasıyla $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki üst ve alt Lebesgue integralleri olarak tanımlanır ve

$$I = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx, J = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

ile gösterilir. Eğer $I = J$ ise f(x) fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında Lebesgue integrallenebilirdir denir ve

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

ile gösterilir.

4.1.30. Örnek

f: $[0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \cap [0,1] \\ 0, & x \in I \cap [0,1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f in Riemann ve Lebesgue integrallerinin varlığını araştıralım.

4.1.30. Çözüm

[0,1] aralığının bir parçalanışı,

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

noktaları ile yapılırsa $I_k = [x_{k-1}, x_k)$ ve $x \in I_k$ için $M_k = 1, m_k = 0$ dır. $\mathbb{R}$ de I ve Q yoğun alt kümeler olduğundan üst ve alt Riemann toplamları sırasıyla,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = 1$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = 0$$

ve buradan

$$sups_n \neq infS_n$$

olur. Bu durumda $f(x)$ Riemann anlamında integrallenemez.

[0,1] aralığı,

$$y_0 \leq 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < 1 \leq y_n$$

olmak üzere değer kümesi, y_k $(0 \leq k \leq n)$ noktaları ile alt aralıklara ayrılsın. Bu parçalanışa karşılık gelen tanım aralığının parçalanışı ise,

$$E_k = \{x \in [0,1]: y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}, (k = 1,2, \ldots, n)$$

alt kümeleri ile yapılır. Burada

$$E_1 = \{x \in [0,1]: y_0 \leq f(x) < y_1\} = I \cap [0,1]$$
$$E_2 = \{x \in [0,1]: y_1 \leq f(x) < y_2\} = \emptyset$$
$$\vdots$$
$$E_{n-1} = \{x \in [0,1]: y_{n-2} \leq f(x) < y_{n-1}\} = \emptyset$$
$$E_n = \{x \in [0,1]: y_{n-1} \leq f(x) < y_n\} = Q \cap [0,1]$$

dır. $\mu(\emptyset) = 0$ ve Q, sayılabilir elemanlı olduğu için

$$\mu(E_2) = \cdots = \mu(E_{n-1}) = 0, \mu(E_n) = 0$$

dır. O halde bu parçalanış için $[0,1] = E_1 \cup E_n$ ve buradan $\mu(E_1) = 1$ dir. Böylece her $x \in [0,1]$ için

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mathcal{X}_{E_k}(x)$$

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mathcal{X}_{E_k}(x)$$

basit fonksiyonları,

$$I_{[0,1]}(\varphi_n) \leq \int_{[0,1]} f dx \leq I_{[0,1]}(\psi_n)$$

gerçekler. Buradan

$$I_{[0,1]}(\varphi_n) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\, \mu(E_k) = y_0\mu(E_1) = y_0 \leq 0$$

$$I_{[0,1]}(\psi_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k\, \mu(E_k) = y_1\mu(E_1) = y_1 > 0$$

tüm parçalanışlar için

$$sup\left(I_{[0,1]}(\varphi_n)\right) = 0 = inf\left(I_{[0,1]}(\psi_n)\right) = \int_{[0,1]} f dx$$

bulunur. O halde f Lebesgue integrallenebilirdir (Dernek, 2013: 227).

4.2. Vektör uzayları

4.2.1. Tanım

$(X,\oplus)$ değişmeli grup $(K,+,\cdot)$ bir cisim olsun.

$$\odot : K \times X \to X,$$

$$\odot\,(m,x) \to m \odot x$$

dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X uzayına $(K,+,\cdot)$ cismi üzerinde vektör uzayı denir.

i. $\forall\, m \in K$ ve $\forall\, x \in X$ için $m \odot x \in X$ dir.

ii. $\forall\, m \in K$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $m \odot (x \oplus y) = (m \odot x) \oplus (m \odot x)$ dir.

iii. $\forall\, m, n \in K$ ve $\forall\, x \in X$ için $(m+n) \odot x = (m \odot x) \oplus (n \odot x)$ dir.

iv. $\forall\, m, n \in K$ ve $\forall\, x \in X$ için $(m.n) \odot x = m \odot (n \odot x)$ dir.

v. $1 \in K\ ve\ \forall\, x \in X$ için $1 \odot x = x$ dir.

$(K,+,\cdot)$ cismi üzerindeki X vektör uzayı $((X,\oplus),(K,+,\cdot),\odot)$ şeklinde gösterilir. Burada $K = \mathbb{R}$ ise X uzayı reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ ise kompleks vektör uzayı olarak adlandırılır.

4.2.2. Tanım

X bir vektör uzayı olmak üzere $\emptyset \neq A \subset X$ olarak verilsin. A, X üzerindeki vektör uzayı işlemlerine göre bir vektör uzayı belirtiyorsa A uzayına X in alt vektör uzayı denir.

4.2.1. Normlu uzay

4.2.3. Tanım

Bir X vektör uzayı (lineer uzayı) üzerinde tanımlanan $\|.\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

i. Her $x \in X$ için $\|x\| > 0$

ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii. Her $x \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

iv. Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona norm denir.

4.2.4. Tanım

X lineer uzayı üzerinde tanımlanan $\|.\|$ fonksiyonu normun özelliklerini sağlarsa $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu lineer uzay veya normlu uzay adı verilir (Kreyszig, 1978: 59).

4.2.5. Örnek

Bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli olan reel değerli bütün fonksiyonların kümesi $C([a, b], \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\|.\|: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|f\| = sup\{|f(x)|: x \in [a, b]\}$$

olarak tarif edilen dönüşüm bir normdur.

i. $\|f\| = sup\{|f(x)|: x \in [a, b]\}$ >0

ii.
$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\Leftrightarrow sup\{|f(x)|: x \in [a, b] = 0\} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \; için \; |f(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \; için \; f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

iii.
$$\begin{aligned} \|\lambda. f\| &= sup\{|\lambda. f(x)|: x \in [a, b]\} \\ &= sup\{|\lambda|. |f(x)|: x \in [a, b]\} \\ &= |\lambda|. sup\{|f(x)|: x \in [a, b]\} \\ &= |\lambda|. \|f\| \end{aligned}$$

iv. Reel sayılardaki üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= sup\{|(f + g)(x)|: x \in [a, b]\} \\ &= sup\{|f(x) + g(x)|: x \in [a, b]\} \\ &\leq sup\{|f(x)| + |g(x)|: x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

$= sup\{|f(x)|: x \in [a,b]\} + sup\{|g(x)|: x \in [a,b]\}$

$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

4.2.6. Örnek

$0 < p < 1, n \ge 2$ olsun ve $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ olsun. $\|.\|$ nin $\mathbb{F}^n$ üzerinde norm tanımlamaz.

$n \ge 2$ ise üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığını göstereceğiz.

Örneğin; $x = (1,0,0, \dots,0)$, $y = (0,1,0, \dots,0)$ olsun. Bu durumda $x + y = (1,1,0, \dots,0)$ olur. Ayrıca,

$$\|x\|_p = (1^p)^{1/p} = 1 = \|y\|_p,$$

$$\|x+y\|_p = (1^p + 1^p)^{1/p} = 2^{1/p}$$

dir. Böylece $1/p > 1$ olduğundan

$$\|x\|_p + \|y\|_p = 2 < 2^{1/p} = \|x+y\|_p$$

bulunur.

4.2.7. Örnek

$(X, \|.\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun.

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

ile tanımlı $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar.

$x, y, z \in X$ olsun.

i. $d(x,y) = \|x-y\| \ge 0;$

ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0$

$\Leftrightarrow x = y$;

iii. $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1).(y-x)\|$

$= |-1|\|y-x\|$

$= d(y,x)$;

iv. $d(x,z) = \|x-z\|$

$= \|(x-y)+(y-z)\|$

$\le \|x-y\| + \|y-z\|$

$= d(x,y) + d(y,z)$

elde edilir. O halde d metrik uzay aksiyomlarını sağlar.

Örnek 4.2.7 den her normlu vektör uzayın kendi normuyla indirgenen metrik altında bir metrik uzay olduğu sonucu elde edilir. Her normun bir metrik üretmesine karşılık her metrikten bir norm üretilemez.

Örneğin $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik olmasına rağmen, her $x \in \mathbb{R}$ için $\|x\| = d(x, 0) = \frac{|x|}{1+|x|}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir norm değildir.

$\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$ ve $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için

$\|\lambda x\| = \frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|} = \frac{|\lambda|.|x|}{1+|\lambda|.|x|}$ ve $|\lambda|. \|x\| = |\lambda|. \frac{|x|}{1+|x|}$ olup $\|\lambda. x\| \neq |\lambda|. \|x\|$ olur. Sonuç olarak, mutlak homojenliği sağlamaz.

4.2.8. Lemma

(X, d) bir lineer metrik uzay olsun. d-nin $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde bir norm üretebilmesi için gerek ve yeter koşul

i. $\forall\, x, y, a \in X$ için $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ (d-nin öteleme özelliği)

ii. $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \forall\, x, y \in X$ için $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (d-nin mutlak homojenlik özelliği)

özelliklerinin sağlanmasıdır (Kreyszig, 1978: 63).

4.2.8. İspat

($\Rightarrow$) $\forall\, x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ olmak üzere d bir norm üretsin. O zaman $\forall\, x, y, a \in X$ ve $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$d(x + a, y + a) = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

ve

$$d(\lambda x - \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|. \|x - y\| = |\lambda| d(x, y)$$

bulunur.

($\Leftarrow$) (i) ve (ii) sağlansın. $N: X \to \mathbb{R}$, $N(x) = d(x, 0)$ fonksiyonunun bir norm olduğunu gösterelim.

$(N1)$ $x = 0 \Rightarrow N(x) = N(0) = d(0,0) = 0$

$N(x) = 0 \Rightarrow d(x, 0) = 0 \Rightarrow x = 0$

$(N2)$ $N(\lambda x) = d(\lambda x, 0) = |\lambda|. d(x, 0) = |\lambda|. N(x)$

$(N3)$ $N(x + y) = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0)$

$= N(x) + N(y)$

olduğundan (i) ve (ii) sağlandığında $d(x, 0) = \|x\|$ bir norm olur.

4.2.9. Tanım

$(X, \|.\|)$ normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\forall\, n, m > n_\varepsilon$ için

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısına bağlı n_ε sayısı varsa (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir.

4.2.10. Lemma

(X, d) bir metrik vektör uzayı, d metriği öteleme ve mutlak homojenlik özelliklerine sahip olsun. $\forall\, x \in X$ için $\|x\| = d(x, \theta)$ olmak üzere (X, d) ve $(X, \|.\|)$ uzaylarının topolojik yapısı aynıdır. (X, d) içinde her yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi $(X, \|.\|)$ içinde sırası ile yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisidir (Musayev ve Alp, 2000: 77).

4.2.11. Önerme

i. Normlu uzayda yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir.

ii. Normlu uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

iii. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir (x_n) cauchy dizisi, $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x e yakınsaktır.

iv. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayında (x_n) ve (y_n) iki Cauchy dizisi ise $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir.

4.2.11. İspat

i. $(X, \|.\|)$ normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. $x_n \to x$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $n > N$ ve

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır. Buna göre üçgen eşitsizliğinden $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir. Buradan x_n dizisi bir Cauchy dizisidir. Lemma 4.2.10 dan önermenin doğruluğu görülür.

ii. Lemma 4.2.10' dan açıktır.

iii. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ tanımı ile (X, d) nin bir metrik uzay olduğunu biliyoruz. $(X, \|.\|)$ normlu uzayında (x_n) Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip olsun. O halde Lemma 4.2.10 dan dolayı (x_n), (X, d) uzayında bir cauchy dizisidir ve

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x\| = 0$$

dır. Demek ki (x_n), (X,d) metrik uzayında bir $x \in X$ noktasına yakınsayan $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisine sahip olan bir Cauchy dizisidir. Bir (X,d) metrik uzayında (x_n) Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir $\left(x_{n_k}\right)$ altdizisine sahip ise (x_n) dizisinin kendisi de x e yakınsaktır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

dır.

iv. (x_n) ve (y_n), $(X,\|.\|)$ normlu uzayında iki Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_\varepsilon \in N$ vardır öyle ki $\forall\, n,m > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\|y_n - y_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $\forall\, x,y \in X$ için $d(x,y) = \|x-y\|$ biçiminde tanımlanan d metriği öteleme özelliğine sahip olduğundan Lemma 4.2.8 den $\forall\, n,m > \varepsilon$ için

$$\begin{aligned} d(x_n + y_n, x_m + y_m) &\le d(x_n + y_n, x_m + y_n) + d(x_m + y_n, x_m + y_m) \\ &= d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \\ &= \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Buradan $(x_n + y_n)$ dizisinin (X,d) uzayında bir Cauchy dizisi olduğu görülür. O halde Lemma 4.2.10 dan dolayı $(x_n + y_n)$ dizisi $(X,\|.\|)$ uzayında bir Cauchy dizisidir.

4.2.12. Tanım

X normlu lineer uzayında $d(x,y) = \|x-y\|$ metriğine göre verilen her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına tam lineer uzay adı verilir.

4.2.2. Banach uzayları

4.2.13. Tanım

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise o uzaya Normlu Tam Uzay veya Banach Uzayı denir.

4.2.14. Lemma

Bir X normlu vektör uzayının tam olması için gerek ve yeter şart normlu yakınsak her serinin yakınsak olmasıdır.

4.2.15. Örnek

$X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere bu uzaylar,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|x\|_\infty = max\{|x_i| : i = 1,2,\ldots,n\}$$

normlarına göre birer Banach uzayıdır (Musayev ve Alp, 2000: 82).

4.2.16. Örnek

$K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall\, n = 1,2,\ldots$ $x_n \in K$ olan $x = (x_n)$ şeklindeki bütün dizilerin kümesi K^∞ olsun. $x = (x_n), y = (y_n) \in K^\infty$ ve $a \in K$ için

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n),$$

$$a(x_n) = (ax_n)$$

işlemleri tanımlansın.

$$l_\infty = \{x = (x_n) \in K^\infty : (x_n)\ sınırlı\},$$

$$c = \{x = (x_n) \in K^\infty : (x_n)\ yakınsak\},$$

$$c_0 = \left\{x = (x_n) \in K^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\},$$

$$l_p = \left\{x = (x_n) \in K^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\ \ yakınsak\right\}, 1 \leq p < \infty$$

kümelerini gözönüne alalım. Buna göre l_∞, c ve c_0 vektör uzayları

$$\|x\| = sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

normuna göre birer Banach uzayıdır. l_p $(1 \leq p < \infty)$ vektör uzayı

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (Musayev ve Alp, 2000: 87).

4.2.17. Örnek

$1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

ile tanımlı $\|.\|$ normu ile $C[a, b]$ bir Banach uzayı değildir.

4.2.17. Çözüm

Öncelikle $\|.\|_p$ fonksiyonunun $C[a,b]$ üzerinde bir norm olduğunu gösterelim.

i. Her $f \in C[a,b]$ için $\|f\|_p \geq 0$;

ii. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

iii. $f \in C[a,b]$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_a^b |\alpha f(x)|^p dx\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

olur.

iv. Minkowski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p &= \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_p + \|g\|_p\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $C[a,b]$ içinde bir Cauchy dizisi oluşturacağız ve bu dizinin yakınsadığı fonksiyonun $C[a,b]$ içinde olmadığını göstereceğiz.

$a < c < b$ olsun ve N yeterince büyük bir tamsayı olsun öyleki $a < c - \frac{1}{N}$ sağlansın.

$j = 1, \dots, N-1$ için

$$f_j(x) = 0, \;\; x \in [a,b]$$

ve her $n \in N$ için

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \;\; a \leq x \leq c - \dfrac{1}{n} \text{ ise} \\ nx - nc + 1 & , \;\; c - \dfrac{1}{n} < x \leq c \text{ ise} \\ 1 & , \;\; c < x \leq b \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Her n için f_n fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_p^p &= \left(\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^p dx\right) \\ &\leq \int_{c-\frac{1}{n}}^c (f_n(x))^p dx + \int_{c-\frac{1}{m}}^c (f_m(x))^p dx \\ &= \int_{c-\frac{1}{n}}^c (nx - nc + 1)^p dx + \int_{c-\frac{1}{m}}^c (mx - mc + 1)^p dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{y^n}{n} dy + \int_0^1 \frac{y^m}{m} dy \text{ (} y = nx - nc + 1 \text{ alınırsa)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(m+1)m}$$

olduğundan $\{f_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Fakat $\{f_n\}$ herhangi bir $f \in C[a,b]$ ye yakınsamaz. Şimdi bunu ispatlayalım.

$\|f_n - f\|_p \to 0$ olacak şekilde sürekli bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim.

$$g(x) = \begin{cases} 0 &, \quad x \in [a,c] \text{ ise} \\ 1 &, \quad x \in (c,b] \text{ ise} \end{cases}$$

alarak $n \to \infty$ için

$$\int_a^b |f_n(x) - g(x)|^p dx \to 0$$

olduğunu görürüz (burada g fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde süreksizdir). $[a,b]$ içindeki herhangi Riemann integrallenebilir h fonksiyonu için $v_p(h) = \left(\int_a^b |h(x)|^p\right)^{1/p}$ yazalım. Minkowski eşitsizliğinden

$$v_p(f-g) \leq v_p(f-f_n) + v_p(f_n - g)$$

bulunur. $n \to \infty$ için $v_p(f-f_n) \to 0$ ve $v_p(f_n - g) \to 0$ olduğundan

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx = 0$$

elde edilir. Özellikle,

$$\int_a^c |f(x) - g(x)|^p dx = 0, \int_c^b |f(x) - g(x)|^p dx = 0$$

dır. f ve g nin her ikisi de $[a,c) \cup (c,b]$ içinde sürekli olduğundan her

$$f(x) = g(x), \forall\, x \in [a,c) \cup (c,b], \forall\, n \in \mathbb{N}$$

bulunur. Bu f nin sürekli oluşu ile çelişir. O halde $\{f_n\} \subset C[a,b]$ Cauchy dizisi $C[a,b]$ içinde yakınsak değildir. Sonuç olarak uzay tam değildir (Soykan, 2008: 115).

4.2.3. İç çarpım uzayları

4.2.18. Tanım

$K = \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$<\cdot>: X \times X \to K$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir iç çarpım ve $(X, <\cdot>)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

i_1) Her $x \in X$ için $< x, x > \geq 0$ ve $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = \theta$ dır.

i_2) Her $x, y \in X$ için $< x, y >= \overline{< x, y >}$ dır.

i_3) Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$ dir.

i_4) Her $x, y, z \in X$ için $< x + y, z >=< x, z > +< y, z >$ dır.

i_3 ve i_4 şartları birinci değişkene göre iç çarpım fonksiyonunun lineer olduğunu gösterir. i_2 eşitliğinin sağındaki çizgi kompleks eşleniği göstermekte olup X reel lineer uzaysa yani $K = \mathbb{R}$ ise $< x, y >=< y, x >$ dir.

4.2.19. Örnek

$f, g \in (C[a, b], K)$ ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) olmak üzere,

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

olarak tanımlanırsa $<\cdot>$ bir iç çarpım ve dolayısıyla $(C[a, b], K)$ da bir iç çarpım uzayıdır.

i_1)

$$< f, f >= \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\, dx \geq 0$$

$$< f, f >= 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

i_2)

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_a^b \overline{g(x)} f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \overline{g(x)\overline{f(x)}}\, dx$$

$$=< \overline{g, f} >$$

i_3)

$$< \alpha f, g >= \int_a^b (\alpha f(x))\overline{g(x)}\, dx$$
$$= \int_a^b \alpha f(x)\overline{g(x)}\, dx$$
$$= \alpha \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$
$$= \alpha < f, g >$$

i_4)

$$< f + g, h >= \int_a^b [f(x) + g(x)]\overline{h(x)}\, dx$$
$$= \int_a^b (f(x)\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)})dx$$
$$= \int_a^b f(x)\overline{h(x)}\, dx + \int_a^b g(x)\overline{h(x)}\, dx$$
$$=< f, h > +< g, h >$$

4.2.20. Teorem (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği)

$(X, <\cdot>)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ için,

$$|< x, y >|^2 \leq< x, x >\cdot< y, y >$$

dir.

$(X, <\cdot>)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. $x \in X$ vektörünün normu,

$$\|x\| =< x, x >^{1/2}= \sqrt{< x, x >}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımın norm aksiyomlarını sağladığı gösterilebilir. O halde, $(X, <\cdot>)$ iç çarpım uzayı bu tanımla birlikte bir normlu uzay oluşturur. Buna bağlı olarak Cauchy-Schwartz eşitsizliği,

$$|< x, y >|^2 \leq< x, x >\cdot< y, y >\Rightarrow |< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >}\cdot \sqrt{< y, y >}= \|x\|. \|y\|$$

olarak yazılır.

4.2.21. Lemma

$(X, <\cdot>)$ bir iç çarpım uzayı ve $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ için,

1) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2)$ (Paralelkenar Kuralı)

ve

2) $< x, y >= \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2]$ (Kutupsal Özdeşlik) eşitlikleri sağlanır.

4.2.22. Teorem

$(X, <\cdot>)$ bir normlu uzay olsun. Bu uzayın bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ elemanlarının paralelkenar kuralını sağlamasıdır.

4.2.23. Örnek

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayı üzerindeki $< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ çarpımıyla $\mathbb{R}^n$ bir iç çarpım uzayıdır. Bu uzay üzerindeki $\|.\|_p, 1 \leq p < \infty$ normunu düşünelim. $\|.\|_p$ normunun iç çarpım yardımıyla tanımlanabilmesi için paralelkenar kuralını sağlaması gerekir. $\mathbb{R}^n$, $\|.\|_2$ normu ile paralelkenar kuralını sağlarken $p \neq 2$ için $\|.\|_p$ normu ile paralelkenar kuralını sağlamaz. Yukarıdaki teoremden dolayı $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ bir iç çarpım uzayı iken $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ $p \neq 2$ bir iç çarpım uzayı değildir. Gerçekten,

$x = (1,1,0,0, \dots, 0), y = (1, -1,0,0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\|x\|_p = 2^{1/p} = \|y\|_p$$

ve

$$x + y = (2,0,0, \dots, 0) \Rightarrow \|x+y\|_p = (2^p)^{1/p} = 2,$$

$$x - y = (0,2,0, \dots, 0) \Rightarrow \|x-y\|_p = (2^p)^{1/p} = 2$$

olup

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 4 + 4 = 8$$

$$2\left(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\right) = 2\left(2^{2/p} + 2^{2/p}\right) = 4.2^{2/p}$$

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 \neq 2\left(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\right)$$

dır.

4.2.24. Tanım (Hilbert Uzayı)

$(X, <\cdot>)$ iç çarpım uzayı $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ normuna göre (iç çarpım yardımıyla tanımlanan norm metriğine göre) tam ise ($(X, <\cdot>)$ uzayı içindeki her Cauchy dizisi yakınsar ise) bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir (Musayev ve Alp, 2000: 101).

4.2.25. Örnek

$<\cdot>: l_2 \times l_2 \to K,$

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

fonksiyonu l_2 üzerinde bir iç çarpım ve l_2 bir Hilbert uzayıdır (Musayev ve Alp, 2000: 101).

4.2.26. Örnek

$(C[a,b], \|.\|_\infty)$ normlu uzayı bir Hilbert uzayı değildir. Çünkü

$$\|f\|_\infty = max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

olarak tanımlanan $\|.\|_\infty$ normu iç çarpım yardımıyla tanımlanamaz.

4.2.27. Örnek

$C[a,b]$ üzerinde

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

ve

$$\|f\|_{L^2}^2 =< f, f >$$

olarak tanımlanırsa $C[a,b]$ bir iç çarpım uzayıdır. Ancak Hilbert uzayı değildir.

4.2.4. $L^p(\Omega)$ uzayları

4.2.28. Tanım

Ω, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir küme ve u ölçülebilir fonksiyon olsun. $1 \le p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

sağlanıyor ise $u(x)$ fonksiyonları p. kuvvetten integrallebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \mid u \text{ ölçülebilir fonksiyon}, \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

şeklinde gösterilir. Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p \ dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2.29. Teorem

$L^p(\Omega)$ lineer bir uzaydır.

4.2.29. İspat

$u\,, v \ \in L^p(\Omega)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

i.

$$\int_{\Omega} |\alpha u(x)|^p \ dx = \ |\alpha|^p \int_{\Omega} |u(x)|^p \ dx < \infty,$$

ii.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |u(x) + v(x)|^p \ dx \ &\leq \ \int_{\Omega} (|u| + |v|)^p \ dx \\ &\leq \int_{\Omega} [2.\,max\{|u|, |v|\}]^p \ dx \\ &\leq 2^p \int_{\Omega} (|u|^p + |v|^{\mathrm{p}}) \ dx \\ &= 2^p \left(\int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} |v|^{\mathrm{p}}\, dx\right) \\ &< \infty\end{aligned}$$

olduğundan lineer uzaydır (Pişkin, 2017: 25).

4.2.30. Teorem (Riesz-Fischer)

$1 \leq p \leq \infty$ olsun. $L^p(\Omega)$ uzayı Banach uzayıdır.

4.2.31. Örnek

$\Omega = (0,8)$ ve $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ olsun.

i. $u(x) \in L(\Omega)$ olduğunu gösterelim.

ii. $u(x) \notin L^2(\Omega)$ olduğunu gösterelim.

4.2.31. Çözüm

i.

$$\int_{\Omega} |u(x)| \; dx = \int_{0}^{9} \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| dx$$

$$= 2\sqrt{\mathrm{x}+1}\Big|_{0}^{8}$$

$$= 4 < \infty$$

olduğundan u fonksiyonu $L(\Omega) = L(0,8)$ uzayının elemanıdır.

ii.

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx = \int_{0}^{9} \left|\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right|^2 dx$$

$$= \mathrm{In}(\mathrm{x}+1)|_{0}^{9}$$

$$= \infty$$

olduğundan u fonksiyonu $L^2(\Omega) = L^2(0,8)$ uzayının elemanı değildir.

4.2.5. Bazı önemli eşitsizlikler

4.2.32. Teorem

$a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2.33. Teorem (Young Eşitsizliği)

$a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2.34. Teorem (Hölder Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.

4.2.34. İspat

u ve v den biri veya her ikisi sıfır olduğunda eşitsizlik açıktır. $u \neq 0, v \neq 0$ olsun. Bu durumda $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ Young eşitsizliğinde

$$a = \frac{|u|}{\|u\|_p} \text{ ve } b = \frac{|v|}{\|v\|_q}$$

olarak alınırsa

$$\frac{|u|}{\|u\|_p} . \frac{|v|}{\|v\|_q} \leq \frac{\left(\frac{|u|}{\|u\|_p}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|v|}{\|v\|_q}\right)^q}{q}$$

$$= \frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p} + \frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q}$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\int_\Omega \frac{|u|}{\|u\|_p} . \frac{|v|}{\|v\|_q} dx \leq \int_\Omega \left(\frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p} + \frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q}\right) dx$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{\|u\|_p \|v\|_q} \int_\Omega |uv| dx \leq \int_\Omega \frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p} dx + \int_\Omega \frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q} dx$$

$$= \frac{1}{p\|u\|_p^p} \int_\Omega |u|^p \, dx + \frac{1}{q\|v\|_q^q} \int_\Omega |v|^q \, dx$$

ifadesine ulaşılır.

$$\int_\Omega |u|^p \, dx = \|u\|_p^p \text{ ve } \int_\Omega |v|^q \, dx = \|v\|_q^q$$

olduğundan

$$\frac{1}{\|u\|_p \|v\|_q} \int_\Omega |uv| \, dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$= 1$$

dir. Böylece

$$\int_\Omega |uv| \, dx \leq \|u\|_p \|v\|_q,$$

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

bulunur (Pişkin, 2017: 30).

4.2.35. Sonuç

$p, q, r > 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L^r(\Omega)$ olur ve

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.

4.2.36. Teorem (Ters Hölder Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $u \in L^p(\Omega)$ ve $0 < \int_\Omega |v|^q \, dx < \infty$ ise

$$\|uv\|_1 \geq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.

4.2.37. Teorem (Minkowski Eşitsizliği-integral formu)

$1 < p < \infty$ olsun. Eğer $u, v \in L^p(\Omega)$ ise bu durumda $u + v \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

dır.

4.2.37. İspat

$p = 1$ ise

$$\begin{aligned} \|u + v\|_1 &= \int_\Omega |u + v| \, dx \\ &\leq \int_\Omega |u| \, dx + \int_\Omega |v| \, dx \\ &= \|u\|_1 + \|v\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$p > 1$ ise

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u + v|^p \, dx &= \int_\Omega |u + v|^{p-1} \, |u + v| dx \\ &\leq \int_\Omega |u + v|^{p-1} \, |u| dx + \int_\Omega |u + v|^{p-1} \, |v| dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integrallere Hölder Eşitsizliği uygulandığında

$$\int_\Omega |u||u + v|^{p-1} \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u + v|^{(p-1)q} \, dx \right)^{1/q}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ den $(p - 1)q = p$ olduğundan

$$\int_\Omega |u||u+v|^{p-1}\,dx \le \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |u+v|^p\,dx\right)^{1/q}$$
$$= \|u\|_p \|u+v\|_p^{p/q}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_\Omega |v||u+v|^{p-1}\,dx \le \|v\|_p \|u+v\|_p^{p/q}$$

yazılabilir. Bu ifadeler eşitsizlikte yerlerine yazılırsa

$$\int_\Omega |u+v|^p\,dx \le \int_\Omega |u||u+v|^{p-1}\,dx + \int_\Omega |v||u+v|^{p-1}\,dx$$
$$\le \|u\|_p\|u+v\|_p^{p/q} + \|v\|_p\|u+v\|_p^{p/q}$$
$$= (\|u\|_p + \|v\|_p)\,\|u+v\|_p^{p/q}$$
$$\|u+v\|_p^p \le (\|u\|_p + \|v\|_p)\,\|u+v\|_p^{p/q}$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı $\|u+v\|_p^{p/q}$ ile bölünürse

$$\|u+v\|_p^{p-p/q} \le (\|u\|_p + \|v\|_p)$$
$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$$

elde edilir (Pişkin, 2017: 32).

4.2.38. Teorem (Ters Minkowski Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ olsun. Eğer $u, v \in L^p(\Omega)$ ise

$$\||u| + |v|\|_p \ge \|u\|_p + \|v\|_p$$

dır.

4.2.39. Teorem (interpolasyon Eşitsizliği)

$1 \le p < q < r$ ve $0 < \theta < 1$ için $\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r} = \frac{1}{q}$ olsun. $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ ve

$$\|u\|_q \le \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}$$

dir.

4.2.39. İspat

$s = \frac{p}{\theta q}$ ve $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ olsun. Bu durumda $s \ge 1$ ve

$$s' = \frac{s}{s-1}$$

$$= \frac{\frac{p}{\theta q}}{\frac{p}{\theta q} - 1}$$

$$= \frac{p}{p - \theta q}$$

elde edilir. Ayrıca $\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r} = \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{p}{p-\theta q} = \frac{r}{(1-\theta)q}$ olduğundan

$$s' = \frac{s}{s-1} = \frac{p}{p-\theta q}$$

$$s' = \frac{r}{(1-\theta)q}$$

olur. Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\|u\|_q^q = \int_\Omega |u|^q \, dx$$

$$= \int_\Omega |u|^{\theta q} \, |u|^{(1-\theta)q} dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega |u|^{\theta q s} \, dx \right)^{1/s} \left(\int_\Omega |u|^{(1-\theta) q s'} \right)^{1/s'}$$

$$= \|u\|_p^{\theta q} \|u\|_r^{(1-\theta)q}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının $1/q$ uncu kuvveti alınırsa

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}$$

bulunur (Pişkin, 2017: 36).

Not

$0 < \theta < 1$ ve $\forall u \in X$ için

$$\|u\|_Y \leq c \|u\|_X^\theta \|u\|_Z^{1-\theta}$$

şeklindeki eşitsizliklere interpolasyon eşitsizlikleri denir. Bu eşitsizlikler analizde önemli rol oynar. Ayrıca kısmı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlıklarının ispatlarında da kullanılır.

4.2.6. $L^{\infty}(\Omega)$ uzayı

4.2.40. Tanım

Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti bulunabiliyorsa u fonksiyonuna hhh yerde sınırlıdır denir. Bu şekilde tanımlanan K sabitlerinin en büyük alt sınırına $|u|$ nun Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve

$$\underset{x\in\Omega}{ess\sup}|u(x)|$$

ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayına $L^{\infty}(\Omega)$ uzayı denir ve

$L^{\infty}(\Omega) = \{u: \Omega \to R |\ u$ ölçülebilir ve $|u| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti vardır.$\}$

olarak ifade edilir. Bu uzay

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} &= \underset{x\in\Omega}{ess\sup}|u(x)| \\ &= inf\{K: |u| \leq K\}\end{aligned}$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Pişkin, 2017: 49).

4.2.41. Örnek

1. $u(x) = \ln x$ fonksiyonu $L^{\infty}(R)$ uzayının elemanı mıdır?
2. $v(x) = cosx$ fonksiyonu $L^{\infty}(R)$ uzayının elemanı mıdır?

4.2.41. Çözüm

1. $u(x) = \ln x$ fonksiyonu sınırlı olmadığından $u \notin L^{\infty}(R)$ dir.
2. $|v(x)| = |cosx| \leq 1$ olduğundan $v \in L^{\infty}(R)$ dir.

4.2.42. Teorem

$u, v \in L^{\infty}(\Omega)$ ise $u + v \in L^{\infty}(\Omega)$ ve

$$\|u + v\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty} + \|v\|_{\infty}$$

dir.

4.2.43. Teorem

$u \in L(\Omega)$ ve $v \in L^{\infty}(\Omega)$ ise

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_{\infty}$$

dır.

4.2.7. $L^p(\Omega)$ uzayında gömülme

4.2.44. Teorem

$vol(\Omega) = \int_\Omega dx < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı) ve $1 \le p \le q \le \infty$ olsun. $u \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \le \big(vol(\Omega)\big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q$$

olur. Yani

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir (Adams, 1975: 25).

4.2.45. Sonuç

Ω bölgesinin ölçümü sonlu ve $1 \le p \le q \le \infty$ ise

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

elde edilir.

Not

Ω bölgesi sonlu değil ise gömülme geçerli değildir.

4.2.8. $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayı

4.2.46. Tanım

$\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $1 \le p < \infty$ olsun. Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayıdır ve

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u |\, u \in L^p(\Psi),\ \ \forall \Psi \subset\subset \Omega\}$$

ile gösterilir.

4.2.47. Tanım

Ω üzerinde hemen hemen her yerde tanımlanmış ve her $\Psi \subset \Omega$ için $u \in L^1(\Psi)$ şeklindeki u fonksiyonuna lokal integrallenebilirdir denir ve $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olarak yazılır.

4.2.48. Sonuç: $1 \le p < \infty$ ve herhangi bir Ω bölgesi için

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

elde edilir. Buna göre $L^1_{loc}(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonların en geniş uzayıdır.

4.2.49. Örnek

$\Omega = (1,2),\ u(x) = \frac{1}{x-1}$ fonksiyonu verilsin. $u \notin L^1(\Omega)$ fakat $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olduğunu gösterelim.

4.2.49. Çözüm

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|\, dx &= \int_1^2 \left|\frac{1}{x-1}\right| dx \\ &= (\ln|x-1|)|_1^2 \\ &= \infty \end{aligned}$$

olduğundan $u \notin L^1(\Omega)$ dir. Şimdi $\Omega = (1,2)$ bölgesinde $1 < a < b < 2$ olacak şekilde (a, b) alt aralığını alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(x)|\, dx &= \int_a^b \left|\frac{1}{x-1}\right| dx \\ &= (\ln|x-1|)|_a^b \\ &= \ln\left|\frac{b-1}{a-1}\right| < \infty \end{aligned}$$

olur. Buradan $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ elde edilir.

4.2.9. Sürekli fonksiyonlar uzayı

4.2.50. Tanım

Ω kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi $C(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}|u(x)|$$

olarak tanımlanır (Pişkin, 2017:58).

4.2.51. Tanım

Ω kümesi üzerinde tanımlı m. mertebeye kadar bütün $D^\alpha u$ türevleri sürekli olan fonksiyonlar $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ dir. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|$$

olarak tanımlanır.

$C^{\infty}(\Omega)$ uzayı ise bütün mertebeden türevli ve sürekli fonksiyonlardır. Başka bir deyişle

$$C^{\infty}(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty} C^{m}(\Omega)$$

şeklinde ifade edilir (Pişkin, 2017: 58).

4.2.52. Tanım

$C_B(\Omega)$, $C(\Omega)$ daki sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzaydır. $C_B^m(\Omega)$ ise m. mertebeye kadar bütün $D^{\alpha}u$ türevleri sürekli ve sınırlı olan fonksiyonlar uzayıdır ve

$$C_B^m(\Omega)=\left\{u\in C^m(\Omega):\|u\|_{C^m(\Omega)}<\infty\right\}$$

olarak gösterilir (Pişkin, 2017: 59).

4.2.10. Zayıf türev

4.2.53. Tanım

$u\in L_{loc}^1(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. $\forall\psi\in C_0^{\infty}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\psi v dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}uD^{\alpha}\,\psi dx$$

ise $v\in L_{loc}^1(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α. zayıf (genelleştirilmiş) türevi denir ve $v=D^{\alpha}u$ şeklinde yazılır (Pişkin, 2017: 63).

4.2.54. Örnek

$\Omega=(0,2)$ olmak üzere

$$u(x)=\begin{cases} x; & 0<x\le 1,\\ 1; & 1<x<2,\end{cases}$$

fonksiyonunun zayıf türevini bulalım.

4.2.54. Çözüm

$\psi\in C_0^{\infty}(0,2)$ ve $Du(x)=v(x)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_0^2 uD\psi dx&=\int_0^1 uD\psi dx+\int_1^2 uD\psi dx\\&=\int_0^1 xD\psi dx+\int_1^2 D\psi dx\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada sağ taraftaki ilk integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^2 uD\psi dx = x\psi|_0^1 - \int_0^1 \psi dx + \psi|_1^2$$
$$= 1.\psi(1) - 0.\psi(0) - \int_0^1 \psi dx + \psi(2) - \psi(1)$$
$$= -\int_0^1 \psi dx + \psi(2)$$

elde edilir. $\psi \in C_0^\infty(0,2)$ olduğundan $\psi(2) = \psi(0) = 0$ dır. Buna göre

$$\int_0^2 uD\psi dx = -\int_0^1 \psi dx$$
$$= -\int_0^1 1.\psi dx - \int_1^2 0.\psi dx$$
$$= -\int_0^2 v\psi dx$$

bulunur. Buradan

$$Du = v = \begin{cases} 1; & 0 < x \leq 1, \\ 0; & 1 < x < 2, \end{cases}$$

olarak elde edilir (Pişkin, 2017: 63).

4.2.55. Teorem

i. Bir fonksiyonun klasik türevi varsa zayıf türevi de vardır. Zayıf türevi olan fonksiyonların klasik türevleri olmak zorunda değildir.

ii. Klasik türev noktasaldır, zayıf türev ise bölgeseldir.

iii. Zayıf türev lineerdir.

$u_1, u_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $c_1, c_2 \in R$ için

$$D^\alpha(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1D^\alpha(u_1) + c_2D^\alpha(u_2)$$

dir.

iv. $D^\alpha u = v$ ve $D^\beta v = w$ ise $D^{\alpha+\beta}u = w$ dir (Pişkin, 2017: 68).

Not

Bir fonksiyonun klasik türevinin olması için sürekli olması gerekir. Zayıf türevin varlığı için sürekliliğe ve klasik türevin varlığına gerek yoktur. İntegralinin olması yeterlidir.

4.2.11. Sobolev uzayları

4.2.56. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $L_p(\Omega)$ uzayında alınan ve k- yıncı mertebeden kısmi türevlere sahip fonksiyonların uzayına sobolev uzayı denir ve

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in L_p(\Omega) \middle| D^\alpha u \in L_p(\Omega),\ \ 0 \leq |\alpha| \leq k\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada,

i. $u: \Omega \to \mathbb{R}$ lokal integrallenebilen fonksiyon,

ii. α bir multi-index olup $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$,

iii. $D^\alpha u = \partial^\alpha u = \partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \dots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$

olarak tanımlıdır.

iv. $D^\alpha u$, u nun α- yıncı mertebeden genelleştirilmiş türevidir.

v. $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı, $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{k,p}}(\Omega) = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty}(\Omega)$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

vi. $p = 2$ için $W^{k,2}(\Omega)$ uzayı

$$\langle u, u \rangle = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

iç çarpımına göre bir hilbert uzayıdır.

4.2.57. Teorem

$W^{k,p}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Not

$W^{k,p}(\Omega)$ uzayında $k = 0$ ise $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ile gösterilir.

$p = 2$ ise $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ olarak ifade edilir.

4.2.58. Tanım

i. $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W^{k,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{k,p}(\Omega)$ sobolev uzayıdır.

ii. $W_0^{k,p}(\Omega)$ uzayı, $W^{k,p}(\Omega)$ uzayında bulunan ve $(m-1)$. mertebeye kadar bütün türevleri Ω nin $\partial\Omega$ sınırında sıfır olan fonksiyonların kümesidir. Diğer bir ifadeyle $W_0^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{k,p}(\Omega)\colon\ u|_{\partial\Omega} = u'|_{\partial\Omega} = \cdots = u^{(m-1)}\big|_{\partial\Omega} = 0\right\}$ şeklinde yazılır. Buradan $W_0^{k,p}(\Omega)$ uzayı $W^{k,p}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olduğu görülür.

Bununla birlikte bu uzaylar arasında herhangi k pozitif tamsayısı için

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömülmesi mevcuttur (Adams, 1975: 45).

4.2.59. Örnek

$\Omega = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ ve $u(x) = u(x_1, x_2) = cosx_1 + sinx_2$

olsun. u fonksiyonunun $W^{1,2}(\Omega)$ uzayının elemanı olduğunu gösterelim.

4.2.59. Çözüm

$u \in W^{1,2}(\Omega)$ olması için u nun ve birinci mertebeden kısmi türevlerinin $L^2(\Omega)$ nin elemanı olması gerekir. Diğer bir ifadeyle,

$$u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$$

olmalıdır. $-1 \leq cosx_1 \leq 1$ ve $-1 \leq sinx_2 \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^2\,dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |cosx_1 + sinx_2|^2\,dx_1dx_2 \\ &\leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+1|^2\,dx_1dx_2 \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 4\,dx_1dx_2 \\ &= 16\pi^2 < \infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |-sinx_1|^2\,dx_1dx_2 \\ &\leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |1|^2\,dx_1dx_2\end{aligned}$$

$$= 4\pi^2 < \infty$$

ve

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2 dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |cosx_2|^2\, dx_1 dx_2$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |1|^2\, dx_1 dx_2$$

$$= 4\pi^2 < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $u \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$ ve $\frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$ olduğundan $u \in W^{1,2}(\Omega)$ dır (Pişkin, 2017: 71).

4.2.60. Örnek

$\Omega = (0,2)$ olsun. $u(x) = \frac{x^2}{2}$ fonksiyonu için $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ ve $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ normlarını hesaplayalım.

4.2.60. Çözüm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^2 \left|\frac{x^2}{2}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{10}}{10},$$

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^2 \left|\frac{x^2}{2}\right|^2 + |x|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

olarak elde edilir.

Sobolev uzaylarının direkt toplamı

$k \geq 0$ sayısı ve $q > 1$ reel sayısı için Sobolev uzaylarının $W^{k,q}(-1,0) \dotplus W^{k,q}(0,1)$ direkt toplamı,

$$\|u\|_{q,k} = \|u\|_{W^{k,q}(-1,0)} + \|u\|_{W^{k,q}(0,1)}$$

normu ile verilen sırasıyla $(-1,0)$ ve $(0,1)$ aralıkları üzerinde $W^{k,q}(-1,0)$ ve $W^{k,q}(0,1)$ uzaylarına ait olan $[-1,0) \cup (0,1]$ aralığında tanımlanmış $u = u(x)$ kompleks değerli fonksiyonların Banach uzayı olarak tanımlanır.

4.2.12. İnterpolasyon uzayları

4.2.61. Tanım

X, Y Banach uzayı ve $\mathcal{V}$ Hausdorff topolojik vektör uzayı olsun. (X, Y) Banach uzayları çiftinin her ikiside Hausdorff topolojik vektör uzayı $\mathcal{V}$ ye sürekli gömülebilir $(X, Y \subset \mathcal{V})$ olması durumunda (X, Y) çiftine interpolasyon çifti denir.

Bu durumda $X \cap Y$ kesişimi $\mathcal{V}$ nin lineer altuzayıdır ve

$$\|u\|_{X\cap Y} = max\{\|u\|_X, \|u\|_Y\}, u \in X \cap Y$$

normuna göre bir banach uzayıdır.

Ayrıca $X + Y = \{x + y\colon\ x \in X,\ y \in Y\}$ uzayı $\mathcal{V}$ nin lineer alt uzayıdır ve

$$\|u\|_{X+Y} = \inf_{x\in X, y\in Y, x+y=u} \{\|x\|_X + \|y\|_Y\},\ \ u \in X + Y$$

normuna sahiptir.

Not

$j = 0,1$ için $T \in \mathcal{L}(X_j, Y_j)$ olmak üzere

$$T\colon X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$$

lineer operatörünün X_j uzayına kısıtlanışı $T|_{X_j}$ de lineer bir operatördür.

4.2.62. Tanım

(X_0, X_1) ve (Y_0, Y_1) Banach uzayının bir interpolasyon çifti ve X, Y Banach uzayları olsun.

i. Eğer $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ gömülmeleri sürekli ise X uzayına (X_0, X_1) interpolasyon çiftine göre bir ara (intermediate) uzaydır denir.

ii. X uzayı (X_0, X_1) interpolasyon çiftine göre ve Y uzayı (Y_0, Y_1) interpolasyon çiftine göre birer ara uzay olsun. Her $T\colon X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ lineer operatörü için

$$T \in \mathcal{L}(X_j, Y_j), j = 0,1 \Rightarrow T|_X \in \mathcal{L}(X, Y)$$

ise X uzayına (X_0, X_1) interpolasyon çiftine göre Y uzayına (Y_0, Y_1) interpolasyon çiftine göre interpolasyon uzayları denir.

iii. $X = Y$ ve $(X_0, X_1) = (Y_0, Y_1)$ olmak üzere $ii.$ şartı sağlanıyorsa X uzayına (X_0, X_1) interpolasyon çiftine göre interpolasyon uzayı denir.

iv. $\theta \in [0,1]$ olmak üzere her $T \in \mathcal{L}(X_j, Y_j)$ $j = 0,1$ için

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C\|T\|_{\mathcal{L}(X_0,Y_0)}^{1-\theta}\|T\|_{\mathcal{L}(X_1,Y_1)}^{\theta} \tag{1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $C > 0$ sayısı varsa X ve Y uzaylarına sırasıyla (X_0, X_1) ve (Y_0, Y_1) interpolasyon çiftlerine göre interpolasyon uzayları denir. $C = 1$ ise X ve Y uzaylarına tam interpolasyon uzayı denir.

4.2.63. Örnek

i. $0 < \alpha < 1, k \in \mathbb{N}_0$ ve

$$C^0(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} \text{ sürekli ve sınırlı}\}$$

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

$$C^k(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} \text{ k-defa sürekli türevlenebilir: } \partial_x^\alpha f \in C^0(\mathbb{R}^n), \forall|\alpha| \leq k\}$$

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} = \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha f(x)|$$

$$C^\alpha(\mathbb{R}^n) = \left\{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}: \|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}$$

$$\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

olsun. O halde $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ uzayı, $C^0(\mathbb{R}^n)$ ve $C^1(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının bir ara uzayıdır. Daha açık olarak her $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha}\|f\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}^{\alpha}$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır.

ii. $1 \leq p \leq \infty$ için $L^p(U, \mu), (U, \mu)$ ölçü uzayı üzerindeki genel Lebesgue uzayını ifade etsin. Bu durumda $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ olacak şekilde, her $1 \leq p_0, p_1, p \leq \infty$ ve bazı $\theta \in [0,1]$ için $L^p(U, \mu)$ uzayı, $L^{p_0}(U, \mu)$ ve $L^{p_1}(U, \mu)$ uzaylarının bir ara uzayıdır.

Bu, her $f \in L^{p_0}(U, \mu) \cap L^{p_1}(U, \mu)$ için genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğinden

$$\|f\|_{L^p(U,\mu)} \leq \|f\|_{L^{p_0}(U,\mu)}^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_1}(U,\mu)}^{\theta}$$

elde edilir.

4.2.64. Sonuç

Son iki eşitsizlik, $Y_j = \mathbb{K}$ seçilirse (1) eşitsizliğinin özel bir durumudur. Aşağıdaki teorem ikinci örnekteki $L^p(U,\mu)$ uzayının θ kuvveti $(L^{p_0}(U,\mu), L^{p_1}(U,\mu))$ e göre tam interpolasyon uzayı olduğunu gösterir.

4.2.65. Teoerem (Riesz-Thorin)

$1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $\theta \in [0,1]$; (U,μ) ve (V,v) σ-sonlu ölçü uzayları ve $\mathbb{K} \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olmak üzere,

$$T \in \mathcal{L}\big(L^{p_j}(U,\mu), L^{q_j}(V,v)\big), j = 0,1 \;\Rightarrow\; T|_{L^p(U,\mu)} \in \mathcal{L}\big(L^p(U,\mu), L^q(V,v)\big)$$

dır. Ayrıca, her $T \in \mathcal{L}\big(L^{p_j}(U,\mu), L^{q_j}(V,v)\big), j = 0,1$ için

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)} \leq \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(L^{p_0},L^{q_0})} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(L^{p_1},L^{q_1})}$$

eşitsizliği sağlanır.

Riesz-Thorin interpolasyon teoreminin başarısız olduğu bazı durumlarda Marcinkiewicz teoremi uygulanabilir.

4.2.66. Teorem (Marcinkiewicz)

$1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 = q_1$; $\theta \in (0,1)$; (U,μ) ve (V,v) ölçü uzayları olsun. Ayrıca

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olsun ve $p \leq q$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$T \in \mathcal{L}\left(L^{p_j}(U,\mu), L^{q_j}_*(V,v)\right), j = 0,1 \;\Rightarrow\; T|_{L^p(U,\mu)} \in \mathcal{L}\big(L^p(U,\mu), L^q(V,v)\big)$$

dir. Ayrıca, her $T \in \mathcal{L}\left(L^{p_j}(U,\mu), L^{q_j}_*(V,v)\right), j = 0,1$ için

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)} \leq C_\theta \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(L^{p_0},L^{q_0}_*)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(L^{p_1},L^{q_1}_*)}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir C_θ sayısı vardır.

Burada $L^q_*(V,v)$, $1 \leq q < \infty$ ise

$$L^q_*(V,v) = \left\{f\colon V \to \mathbb{K} \text{ ölçülebilir} : m(t;f) \leq \frac{C}{t^q} \text{ her } t > 0 \text{ ve bazı } C > 0\right\}$$

olarak tanımlanan zayıf L^q-uzayıdır.

$t > 0$ için $m(t;f) = v(\{x \in V : |f(x)| > t\})$, f nin genelleştirilmiş fonksiyonunu belirtir.

Ayrıca, $q = \infty$ ise $L^\infty_*(V,v) = L^\infty(V,v)$ olur.

Not

$L_*^q(V,v)$,

$$\|f\|_{L_*^q} = \sup_{t>0} tm(t;f)^{1/q}$$

olarak ifade edilen quasi-norm ile quasi-normlu uzaydır. Burada bir X vektör uzayı üzerindeki $\|.\|$ quasi-normu, bazı $C \geq 1$ ve her $x, y \in X$ için

$$\|x+y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$$

eşitsizliğinin, üçgen eşitsizliği ile değiştirmesi dışında bir norm ile aynı koşulları sağlar. Sınırlı operatörler ve operatörün normu, normlu uzaylarda olduğu gibi quasi-normlu uzaylar için de aynı şekilde tanımlanır.

4.2.67. Sonuç

Ayrıca $L_*^q(V,v) \equiv L^{q,\infty}$ olarak gösterilir.

Genel interpolasyon teorisi, interpolasyon uzaylarında uygun aileleri oluşturmak ve onların özelliklerini çalışmak için kurulmuştur. İnterpolasyon uzaylarının en iyi bilinen ve yararlı aileleri gerçek interpolasyon uzayları ve kompleks interpolasyon uzaylarıdır.

<u>Reel İnterpolasyon</u>

(X,Y) reel interpolasyon çifti olsun. I, $(0,\infty)$ da bulunan herhangi bir aralık ise, $L_*^p(I)$ I da dt/t ölçüsüne göre L^p Lebesgue uzayıdır. Özellikle $L_*^\infty(I) = L^\infty(I)$ dir.

<u>K-Metot</u>

4.2.68. Tanım

$t > 0$ ve her $x \in X + Y$ için

$$K(t,x,X,Y) = \inf_{x=a+b, a\in X, b\in Y} (\|a\|_X + t\|b\|_Y)$$

dir. Burada $K(t,x,X,Y)$ yerine $K(t,x)$ yazabiliriz. Şimdi K fonksiyoneli aracılığıyla Banach uzayının bir ailesini tanımlayalım.

4.2.69. Tanım

$0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun.

$$(X,Y)_{\theta,p} = \{x \in X+Y : t \mapsto t^{-\theta}K(t,x,X,Y) \in L_*^p(0,+\infty)\},$$

$$\|x\|_{(X,Y)_{\theta,p}} = \left\|t^{-\theta}K(t,x,X,Y)\right\|_{L_*^p(0,+\infty)};$$

olarak tanımlanan uzaylara reel interpolasyon uzayı denir.

$$(X,Y)_\theta = \left\{x \in X+Y : \lim_{t\to 0^+} t^{-\theta}K(t,x,X,Y)\right\}$$
$$= \lim_{t\to +\infty} t^{-\theta}K(t,x,X,Y) = 0.$$

$t \mapsto K(t,x)$, her $x \in X+Y$ için $(0,\infty)$ da sürekli oldğundan $(X,Y)_\theta \subset (X,Y)_{\theta,\infty}$ dir. Bu $(X,Y)_\theta$ uzaylarına sürekli interpolasyon uzayları denir.

$x \mapsto \|x\|_{(X,Y)_{\theta,p}}$ dönüşümü $(X,Y)_{\theta,p}$ de bir normdur. $\|x\|_{(X,Y)_{\theta,p}}$ yerine $\|x\|_{\theta,p}$ yazabiliriz.

Not

Her $t > 0$ için $K(t,x,X,Y) = tK(t^{-1},x,Y,X)$ dir. $L_*^p(0,+\infty)$ de $\tau = t^{-1}$ dönüşümü ile

$$(X,Y)_{\theta,p} = (Y,X)_{1-\theta,p}, 0 < \theta < 1, 1 \le p \le \infty$$

ve

$$(X,Y)_\theta = (Y,X)_{1-\theta}$$

alacağız.

Bazı özel durumları düşünelim.

i. $X = Y$ olsun. Öyleyse $X+Y = X$ ve $K(t,x) \le min\{t,1\}\|x\|$ dir. Bu nedenle

$$X \subset (X,X)_{\theta,p}\ , 0 < \theta < 1, 1 \le p \le \infty$$

dir.

Bir sonraki önermede herhangi bir interpolasyon çiftinin $(X,Y)_{\theta,p} \subset X+Y$ olduğunu göreceğiz. Böylece $X = Y$ ise $(X,X)_{\theta,p} = X$ dir.

ii. Eğer $X \cap Y = \{0\}$ ise $x = a+b$ olacak şekilde her $x \in X+Y$ için farklı $a \in X$ ve farklı $b \in Y$ vardır. Bundan dolayı $K(t,x) = \|a\|_X + t\|b\|_Y$ ve $t \mapsto t^{-\theta}K(t,x)$ $x = 0$ olmadıkça $L_*^p(0,+\infty)$ ye ait olamaz. Bu nedenle her $p \in [1,\infty], \theta \in (0,1)$ için $(X,Y)_{\theta,p} = (X,Y)_\theta = \{0\}$ dır.

iii. $Y \subset X$ olduğu özel durumlarda her $x \in X$ için $K(t,x) \le \|x\|_X$ dir. Böylece her $a > 0$ ve $\lim_{t\to+\infty} t^{-\theta}K(t,x) = 0$ için $t \mapsto t^{-\theta}K(t,x) \in L_*^p(a,+\infty)$ dır. Bu nedenle $t^{-\theta}K(t,x)$ nin sadece $t = 0$ civarında $(X,Y)_{\theta,p}$ ve $(X,Y)_\theta$ nin tanımında rol oynar.

4.2.70. Önerme

$0 < \theta < 1,\ 1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ için

$$X \cap Y \subset (X,Y)_{\theta,p_1} \subset (X,Y)_{\theta,p_2} \subset (X,Y)_\theta \subset (X,Y)_{\theta,\infty} \subset X+Y$$

dir. Dahası

$$(X,Y)_{\theta,\infty} \subset \bar{X} \cap \bar{Y}$$

dir. Burada $\bar{X}, \bar{Y}$ $X+Y$ de X, Y nin kapanışıdır.

4.2.71. Önerme

$Y \subset X$ ise $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ için

$$(X,Y)_{\theta_2,\infty} \subset (X,Y)_{\theta_1,1}$$

dir. Bu nedenle her $p, q \in [1,\infty]$ için

$$(X,Y)_{\theta_2,p} \subset (X,Y)_{\theta_1,q}$$

yazılır.

4.2.72. Önerme

$\forall\ \theta \in (0,1)$ ve $p \in [1,\infty]$ için $(X,Y)_{\theta,p}$ bir Banach uzayıdır. $\forall\theta \in (0,1)$ için $(X,Y)_{\theta}$, $(X,Y)_{\theta,\infty}$ nin normu ile verilen bir Banach uzayıdır.

4.2.73. Teorem

$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$ interpolasyon çifti olsun. $\forall\theta \in (0,1)$ ve $p \in [1,\infty]$ için $T \in L(X_1,X_2) \cap L(Y_1,Y_2)$ ise $T \in L\big((X_1,Y_1)_{\theta,p},(X_2,Y_2)_{\theta,p}\big) \cap L((X_1,Y_1)_{\theta},(X_2,Y_2)_{\theta})$ dir. Dahası,

$$\|T\|_{L\left((X_1,Y_1)_{\theta,p},(X_2,Y_2)_{\theta,p}\right)} \leq \left(\|T\|_{L(X_1,X_2)}\right)^{1-\theta}\left(\|T\|_{L(Y_1,Y_2)}\right)^{\theta}$$

dir.

4.2.74. Sonuç

(X,Y) interpolasyon çifti olsun. $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|y\|_{(X,Y)_{\theta,p}} \leq c(\theta,p)\|y\|_X^{1-\theta}\|y\|_Y^{\theta} \quad \forall y \in X \cap Y$$

olacak şekilde $c(\theta,p)$ vardır.

Örnekler

Bazı temel örnekleri inceleyelim. $C_b(\mathbb{R}^n)$, $\|.\|_\infty$ supremum normu ile verilmiş, $\mathbb{R}^n$ de sürekli sınırlı fonksiyonların uzayı; $C_b^1(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_\infty + \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_\infty$ normu ile verilmiş sınırlı türevler ile sürekli türevlenebilir fonksiyonların alt kümesidir.

$\theta \in (0,1)$ için $C_b^{\theta}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{C_b^\theta} = \|f\|_\infty + [f]_{C^\theta} = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\theta}$$

normu ile verilmiş düzgün ve sınırlı Hölder sürekli fonksiyonların kümesidir.

$\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$ için

$$[f]_{W^{\theta,p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{\theta p+n}}dxdy\right)^{1/p} < \infty$$

olacak şekilde tüm $f \in L^P(\mathbb{R}^n)$ nin uzayı $W^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ dır.

Normu $\|.\|_{L^P} + [.]_{W^{\theta,p}}$ dir.

4.2.75. Örnek

$0<\theta<1,\ 1\leq p<\infty$ için

$$\left(C_b(\mathbb{R}^n), C_b^1(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,\infty} = C_b^\theta(\mathbb{R}^n),$$

$$\left(L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,p} = W^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$$

normları eşdeğerdir.

4.2.76. Örnek

(Ω,μ) σ-sonlu ölçülebilir bir uzay olsun. Öyleyse $\left(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)\right)$ bir interpolasyon çiftidir.

$0<\theta<1,\ 1\leq q\leq\infty$ için

$$\left(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)\right)_{\theta,q} = L^{\frac{1}{1-\theta},q}(\Omega)$$

elde ederiz.

<u>İz Metot</u>

Bu bölümde reel interpolasyon uzaylarının bir başka yapısını tanımlayacağız. İz teorisi ve interpolasyon teorisi arasında bağlantı kuracağız.

4.2.77. Tanım

$0<\theta<1,\ 1\leq p\leq\infty$ için $V(p,\theta,Y,X)$ ve her $0<a<b<\infty$ için $u \in W^{1,p}(a,b;X+Y)$ olacak şekilde tüm $u\colon \mathbb{R}_+ \mapsto X+Y$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır.

$$t \mapsto u_\theta(t) = t^\theta u(t) \in L_*^p(0,+\infty;Y),$$

$$t \mapsto v_\theta(t) = t^\theta u'(t) \in L_*^p(0,+\infty;X)$$

dönüşümü ve normu

$$\|u\|_{V(p,\theta,Y,X)} = \|u_\theta\|_{L_*^p(0,+\infty;Y)} + \|v_\theta\|_{L_*^p(0,+\infty;X)}$$

olarak verilmiştir.

Dahası, $p = \pm\infty$ için

$$V_0(\infty,\theta,Y,X) = \left\{u \in V(\infty,\theta,Y,X) \colon \lim_{t\to 0}\left\|t^\theta u(t)\right\|_X = \lim_{t\to 0}\left\|t^\theta u'(t)\right\|_Y = 0\right\}$$

ile $V(\infty,\theta,Y,X)$ nin alt uzayı tanımlanır.

$V(p,\theta,Y,X)$, $\|.\|_{V(p,\theta,Y,X)}$ normuyla verilen bir Banach uzayıdır. Dahası $V(p,\theta,Y,X)$ ye ait her fonksiyon $t = 0$ civarında X-değerli sürekliliğe sahiptir. Gerçekten de $0 < s < t$ için $u(t) - u(s) = \int_s^t u'(\sigma)\, d\sigma$ eşitliğinden $1 < p < \infty$ için

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \left(\int_s^t \left\|\sigma^{\theta-1/p}u'(\sigma)\right\|_X^p d\sigma\right)^{1/p}\left(\int_s^t \sigma^{-(\theta-1/p)p'} d\sigma\right)^{1/p'}$$

$$\leq \|u\|_{V(p,\theta,Y,X)}[p'(1-\theta)]^{-\frac{1}{p'}}\left(t^{p'(1-\theta)} - s^{p'(1-\theta)}\right)^{\frac{1}{p'}}, p' = p/(p-1)$$

elde ederiz. Benzer şekilde $p = 1$ veya $p = \infty$ ise u nun $t = 0$ civarında düzgün sürekli olduğu görülür.

Aşağıdaki sonuç yardımıyla reel interpolasyon uzaylarını iz uzayları olarak karakterize edebiliriz.

4.2.78. Sonuç

$1 \leq p \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ ve $0 < a \leq \infty$ için u, $L_*^P(0,a;X)$ ye ait $t \mapsto u_\theta(t) = t^\theta u(t)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun.

$$v(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u(s)\, ds, t > 0$$

ortalama değer ile aynı özelliklere sahiptir ve $v_\theta(t) = t^\theta v(t)$ için

$$\|v_\theta\|_{L_*^P(0,a;X)} \leq \frac{1}{1-\theta}\|u_\theta\|_{L_*^P(0,a;X)}$$

elde ederiz.

4.2.79. Önerme

$(\theta,p) \in (0,1) \times [1,+\infty]$ için $(X,Y)_{\theta,p}$, $V(p,1-\theta,Y,X)$ de fonksiyonların $t = 0$ da izlerinin kümesidir ve

$$\|x\|_{\theta,p}^{Tr} = inf\left\{\|u\|_{V(p,1-\theta,Y,X)} \colon x = u(0), u \in V(p,1-\theta,Y,X)\right\}$$

$(X,Y)_{\theta,p}$ de eşdeğer normdur. Ayrıca $0 < \theta < 1$ için $(X,Y)_\theta$, $V_0(\infty,1-\theta,Y,X)$ de fonksiyonların $t = 0$ da izlerinin kümesidir.

4.2.80. Alıştırma

$X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $Y = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ve $\theta = 1 - \frac{1}{p}, 1 < p < \infty$ seçelim. Bu durumda $W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^n)$ nin karakterizasyonunu elde ederiz. $W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^n)$,
$(x,t) \mapsto v(x,t) \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ fonksiyonlarının $(x,0)$ daki izlerinin uzayıdır. Nitekim Örnek 4.2.75 sayesinde $W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^n) = \left(L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\right)_{1-\frac{1}{p},p}$ olduğunu biliyoruz. Önerme 4.2.79. dan $W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^n)$, $v \in V\left({}^{1}\!/_{p}, p, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n)\right)$ fonksiyonlarının $t = 0$ da izlerinin uzayıdır. Fakat $v \in V\left({}^{1}\!/_{p}, p, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n)\right)$ ancak ve ancak $v(x,t) = v(t)(x)$ fonksiyonu $W^{1,p}\left((\mathbb{R}_+^{n+1})\right)$ dedir. Nitekim ölçülebilir fonksiyon tanımından $w: (0, +\infty) \mapsto L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ölçülebilirdir ancak ve ancak
$(t,x) \mapsto w(t,x)$ ölçülebilir olduğu görülür. Değerlendirmelere ilişkin olarak
$t \mapsto t^{1/p} v(t) \in L_*^p\left((0,+\infty), W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\right)$ iken

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|v(x,t)|^p + \sum_{i=1}^n \left|v_{x_i}(x,t)\right|^p \right) dxdt < \infty$$

olur.
$t \mapsto t^{1/p} v'(t) \in L_*^p\left((0,+\infty), L^p(\mathbb{R}^n)\right)$ iken v', $L^p(\mathbb{R}^n)$ de ölçülebilirdir ve

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |v_t(x,t)|^p dxdt < \infty$$

anlamına gelir.
Özellikle $p = 2$ seçersek $(x,t) \mapsto v(x,t) \in H^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ fonksiyonunun $(x,0)$ da izlerinin uzayı $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ elde ederiz.
Bu alıştırma interpolasyon teorisi ve iz teorisi arasında önemli bir bağlantı olduğunu gösterir. İz metodu yardımıyla bazı önemli yoğunluk özelliklerini kanıtlamak kolaydır.

4.2.81. Önerme

$0 < \theta < 1$ olsun. $1 \leq p < \infty$ için $X \cap Y$, $(X,Y)_{\theta,p}$ de yoğundur. $p = \infty$ için $(X,Y)_\theta$, $X \cap Y$ nin $(X,Y)_{\theta,\infty}$ da kapanışıdır.

4.3. Bazı Operatörler ve Özellikleri

4.3.1. Tanım

X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subseteq X$ olsun. D deki her bir elemana Y de bir tek eleman karşılık getiren kurala D den Y ye bir dönüşüm denir. Vektör uzaylar ve özellikle normlu uzaylar söz konusu olduğunda bu dönüşümlere operatör adı verilir.

T, D den Y ye bir operatör ise

$$T: D \subseteq X \rightarrow Y$$

şeklinde yazılır. Burada D ye T nın tanım kümesi denir ve $D(T)$ ile gösterilir.

$$R(T) = \{y \in Y : y = T(x), x \in D(T)\}$$

kümesine de T operatörünün değer (veya görüntü) kümesi denir.

4.3.2. Tanım

$T, P: X \rightarrow Y$ operatörleri verilsin.

Eğer $D(T) = D(P) = D$ ve her $x \in D$ için $T(x) = P(x)$ ise T ve P operatörleri eşittir denir ve $T = P$ yazılır. Eğer $D(T) \subset D(P)$ ve her $x \in D(T)$ için $T(x) = P(x)$ ise T operatörüne P nin kısıtlaması denir ve $T = P|_{D(T)}$ ile gösterilir.

4.3.3. Tanım

$T: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $b \in Y$ olmak üzere her $x \in X$ için $T(x) = b$ ise T operatörüne sabit operatör, $T(x) = x$ ise T operatörüne birim operatör denir ve I ile gösterilir.

4.3.4. Tanım

$T: X \rightarrow Y$ bir operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ $T(x) = Y$ ise T operatörüne örten operatör, aksi halde içine operatör denir. Her $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1) \neq T(x_2)$$

durumunda T operatörüne bire bir operatör denir.

4.3.5. Tanım

X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in B(x_0, \delta) \subset D(T)$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa T ye sürekli operatör denir.

4.3.6. Tanım

X ve Y normlu uzaylar ve $T: D(T) \subset X \to R(T) \subset Y$ operatörü verilsin. T operatörü $D(T)$ deki her sınırlı alt kümeyi $R(T)$ nın sınırlı bir alt kümesine götürüyor ise T ya sınırlı operatör adı verilir.

4.3.7. Tanım

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T: X \to Y$ bir operatör olsun. $D(T)$, X in alt vektör uzayı ve $\forall x, y \in D(T)$, $\forall \alpha, \beta \in K$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

ise T ye lineer operatör denir.

4.3.8. Örnek

$X = Y = C[a,b]$, $D(T) = C[a,b]$ ve her $g \in C[a,b]$ için

$$Tg(x) = xg(x)$$

bir lineer operatördür.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in C[a,b]$ için

$$\begin{aligned} T[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= x[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha x f(x) + \beta x g(x) \\ &= \alpha T f(x) + \beta T g(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.3.9. Örnek

$T: L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$, $K(x,t)$ ise $L_2(0,\pi) \times L_2(0,\pi)$ uzayının elemanı olsun.

$\forall f \in L_2(0,\pi)$ için

$$Tf(x) = \int_0^\pi K(x,t)\, f(t) dt$$

bir lineer operatör olduğunu gösterelim.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in L_2(0,\pi)$ için

$$\begin{aligned} T[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \int_0^\pi K(x,t)\, (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^\pi K(x,t)\, f(t) dt + \beta \int_0^\pi K(x,t)\, g(t) dt \\ &= \alpha T f(x) + \beta T g(x) \end{aligned}$$

4.3.10. Tanım

$T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. $\forall x \in D(T)$ için

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı var ise T ye $D(T)$ de sınırlı lineer operatör denir.

4.3.11. Teorem

X ve Y normlu uzaylar $D(T) \subset X$ olmak üzere $T: D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. T operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart sürekli olmasıdır.

4.3.12. Tanım

$T: D(T) \subset X \to Y$ sınırlı bir lineer operatör olsun. Bu durumda $\forall x \in D(T)$ için

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük K sayısına T operatörünün normu denir ve

$$\|T\| = sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq \theta, x \in D(T)\right\}$$

şeklinde gösterilir.

4.3.13. Örnek

Her k için $y_k = \frac{x_k}{k}$ olmak üzere $Tx = y$ ile tanımlı $T: l_\infty \to l_2$ operatörü veriliyor. T operatörünün lineer ve sınırlı olduğunu gösterip $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ eşitliğinden yararlanarak normunu hesaplayalım.

T operatörünün lineerliği açıktır. Keyfi $x \in l_\infty$ alalım. O halde $\|x\|_\infty = sup|x_k|$ olduğundan her k için $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ gerçeklenir. Bu durumda

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Tx)_k^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{k}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \|x\|_\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$$

$$= \|x\|_\infty \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

olup T operatörü sınırlıdır. Şimdi $\|T\|$ sayısını hesaplayalım. Tanım gereği $\|T\| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ olduğu açıktır. Diğer yandan $z = (1,1,1, \dots) \in l_\infty$ dizisi için $\|z\|_\infty = 1$ olup $\|Tz\|_2 \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_2 = \|T\|$ gerçeklenir. Burada $\|Tz\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ olduğundan $\frac{\pi}{\sqrt{6}} \leq \|T\|$ elde edilir. Buradan $\|T\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ elde edilir.

4.3.14. Tanım

$T: D(T) \subset X \to Y$ operatörü verildiğinde özel olarak $Y = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) ise T ye fonksiyonel denir. T lineer ise T ye lineer fonksiyonel denir.

4.3.15. Örnek

$C[-2,1] \to \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı

$$f(x) = \int_{-2}^{1} x(t)\, dt$$

f fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim.

İntegral lineer olduğundan f in linerliği açıktır. Her $x \in C[-2,1]$ için

$$|f(x)| = \left|\int_{-2}^{1} x(t) dt\right| \leq \|x\|_\infty \left|\int_{-2}^{1} dt\right| = 3\|x\|$$

olup $\|f\| \leq 3$ gerçeklenir. Burada $\|x\|_\infty = \sup_{-2 \leq t \leq 1} |x(t)|$ ile verilmektedir. O halde f lineer ve sınırlı olup süreklidir.

4.3.16. Tanım

$T: D(T) \subset X \to Y$ lineer operatörü verilsin.

$$N(T) = \{x \in D(T): Tx = \theta_Y\}$$

kümesine T operatörünün çekirdeği (sıfır uzayı) denir.

4.3.17. Tanım

$T: D(T) \subset X \to R(T) \subset Y$ birebir lineer operatörü verilsin.

$$T^{-1}: R(T) \to D(T),\ \ T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$$

şeklinde tanımlı T^{-1} operatörüne T nın ters operatörü denir.

4.3.18. Teorem

X ve Y aynı cisim üzerinde iki vektör uzayı, $D(T) \subset X$ ve $R(T) \subset Y$ olmak üzere $T: D(T) \rightarrow R(T)$ lineer bir operatör olsun. $T^{-1}: R(T) \rightarrow D(T)$ ters operatörün mevcut olması için gerek ve yeter şart $N(T) = \{x \in D(T): Tx = \theta_Y\}$ ile tanımlanan T nin sıfır uzayı için $N(T) = \{\theta_X\}$ olmasıdır.

4.3.19. Örnek

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, her yerde her mertebeden türevi mevcut olan tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan X vektör uzayı veriliyor. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü,

$$y(t) = Tx(t) = x'(t)$$

ile tanımlanmak üzere T^{-1} operatörünün mevcut olmadığını gösterelim.

$N(T)$ sıfır uzayını belirleyelim. Bunun için $Tx = \theta$ olacak şekilde bir $x \in X$ alalım. O halde her $t \in R$ için $x'(t) = 0$ olur. Bu durum x fonksiyonunun herhangi bir sabit fonksiyon olmasını gerektirir. Yani $N(T) = \{x: x(t) = c,\ c \in \mathbb{R}\}$ gerçeklenir. O halde teorem gereği T^{-1} mevcut değildir.

Fredholm operatörü

4.3.20. Tanım

E ve F birer Banach uzayı olsun. $D(T)$ tanım kümesi, $R(T)$ değer kümesi, F', F nin eşlenik uzayı ve $D(T) \subset E$ olmak üzere $T: E \rightarrow F$ operatörü verilsin.

$$Tu = 0$$

homojen denkleminin çözümlerinin kümesi, T operatörünün çekirdeği olarak adlandırılır ve $\ker T$ ile gösterilir. Yani,

$$\ker T \coloneqq \{u | u \in D(T), Tu = 0\}$$

dır. $R(T)$ üzerinde F' den 0 a eşit gelen fonksiyonların kümesi ise T operatörünün eş çekirdeği olarak adlandırılır ve coker ile gösterilir. Yani,

$$co\ker T \coloneqq \{v' |\, v' \in F', \langle Tu, v' \rangle = 0, u \in D(T)\}$$

dır. Bu tanımlamalardan sonra, E den F ye bir T operatörü,

i. $R(T), F$ de kapalıdır.

ii. $\ker T$ ve $\operatorname{coker} T$ sırasıyla E ve F' nün sonlu boyutlu alt uzaylarıdır.

iii. $\dim\ker T = \dim co\ker T$

şartlarını sağlarsa Fredholm operatörü denir.

<u>İntegral operatörü</u>

4.3.21. Tanım

$f(x)$ sürekli fonksiyonu için

$$Lf(x) = \int_a^b K(x,t)\, f(t)dt$$

şeklinde tanımlanan L operatörüne, çekirdeği $K(x,t)$ olan bir integral operatör denir. Bu tanıma göre

$$L^{-1}f(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)dt$$

olduğundan L^{-1} operatörü, çekirdeği $G(x,t)$ Green fonksiyonu olan bir integral operatörüdür.

<u>Rezolvent operatörü</u>

X, bir Banach uzayı olmak üzere

$$A: D(A) \subset X \to R(A) \subset X$$

lineer operatörünün rezolvent operatörünü bulmak için

$$Af - \lambda f = g, \forall f \in D(A), g \in X$$

homojen olmayan denklemini çözmek gerekir. Bu denklemden

$$(A - \lambda I)f = g, f \in D(A), g \in X$$

$$f = (A - \lambda I)^{-1} g,$$

$$f = R_\lambda(A) g$$

elde edilir. Burada $R_\lambda(A)$ rezolvent operatörü olarak adlandırılır. Diferansiyel operatörlerin rezolvent operatörleri integral operatör olup, bu operatörlerin çekirdeğine Green fonksiyonu adı verilir.

4.3.22. Örnek

L ile $L_2(0,\pi)$ uzayında

$$l(y) = -y'' + q(x)y, 0 \le x \le \pi$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile üretilen operatör gösterilsin. L operatörünün rezolventini bulalım.

4.3.22. Çözüm

$u(x,\lambda)$ ve $v(x,\lambda)$ ile

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, 0 \leq x \leq \pi$$

denkleminin sırasıyla

$$y(0) = 1, y'(0) = h$$

ve

$$y(\pi) = -1, y'(\pi) = H$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümlerini gösterelim.

$$-y'' + q(x)y - \lambda y = f, 0 \leq x \leq \pi$$

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

homojen olmayan sınır değer probleminin çözümü L operatörünün rezolventi olur.

$$\omega(\lambda) = W[u,v]$$

olmak üzere

$$\rho(L) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \omega(\lambda) \neq 0 \}$$

$$\sigma(L) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \omega(\lambda) = 0 \}$$

elde edilir.

$$y = R_\lambda(L)f(x) = \int_0^\pi G(x,t;\lambda) f(t)dt$$

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{u(t,\lambda)v(x,\lambda)}{\omega(\lambda)} & , \ 0 \leq t \leq x \\ \dfrac{u(x,\lambda)v(t,\lambda)}{\omega(\lambda)} & , \ x \leq t \leq \pi \end{cases}$$

L operatörünün rezolventi olur.

Pozitif Operatörler

4.3.23. Tanım

H Hilbert uzayı, her $f,g \in H$ için $< f,g >$ bu uzayda skaler çarpım, A ise tanım kümesi $D(A) \subset H$ olan ve H uzayında tanımlı bir operatör olmak üzere, her $f \in D(A)$ için

$$< Af, f > \geq 0$$

ise A operatörüne pozitif operatör denir.

4.3.24. Örnek

$L_2(0,\pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \qquad 0 \le x \le \pi$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan L_0 operatörünün pozitiftir olduğunu gösterelim.

4.3.24. Çözüm

$$D(L_0) = \left\{ y, y \in L_2(0,\pi) \qquad \begin{array}{l} y'' \text{ mevcut} \\ y'' \in L_2(0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array} \right.$$

ve $\forall f \in D(L_0)$ için

$$< L_0 f, f >= \int_0^\pi [-f''(x)]\overline{f(x)}\, dx = -\int_0^\pi \overline{f(x)}\, df'(x)$$

$$= -f'(x)\overline{f(x)}|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) d\overline{f(x)}$$

$$= -f'(\pi)\overline{f(\pi)} + f'(0)\overline{f(0)} + \int_0^\pi f'(x)\overline{f'(x)}\, dx$$

sınır koşullarını kullanarak

$$< L_0 f, f >= \int_0^\pi |f'(x)|^2\, dx \ge 0$$

elde edilir. Dolayısıyla L_0 operatörü pozitiftir.

<u>Sturm-Liouville operatörü</u>

$L_2(0,\pi)$ uzayında

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \qquad 0 \le x \le \pi$$

Diferansiyel ifadesinin yardımı ile

$$L: L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$$

operatörü tanımlayalım. Burada q reel değerli ve sürekli fonksiyondur.

$D(L) \subset L_2(0,\pi)$ olmak üzere $D(L)$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan uzayı gösterelim.

i. Her $y \in D(L)$ için y fonksiyonu ikinci mertebeden diferansiyellenebilir olsun.

ii. $l(y) \in L_2(0,\pi)$ koşulu $y \in D(L)$ için sağlansın.

iii. h ve H reel sayıları için

$$\begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır koşulları gerçeklensin. Başka bir ifadeyle

$$D(L) = \left\{ y\,, y \in L_2(0,\pi) \quad \begin{array}{c} y'' \text{ mevcut} \\ l(y) \in L_2(0,\pi) \\ y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{array} \right.$$

olsun.

4.3.25. Tanım

Her $y \in D(L)$ için

$$Ly = l(y)$$

olarak tanımlanan operatörlere Sturm-Liouville operatörü denir.

4.3.26. Tanım

X ve Y iki normlu uzay olsun. X den Y ye tanımlı tüm lineer operatörlerin kümesi

$$L(X,Y) = \{A: X \to Y |\ A \text{ lineer}\}$$

ile gösterilir. X den Y ye tanımlı tüm lineer ve sınırlı operatörlerin kümesi

$$B(X,Y) = \{A: X \to Y |\ A \text{ lineer ve sınırlı}\}$$

ile gösterilir.

4.3.27. Tanım

X sonsuz boyutlu banach uzayı olmak üzere T, X normlu uzayında tanımlı lineer bir dönüşüm olsun. X uzayına ait sınırlı herhangi bir x_n dizisi için Tx_n dizisinin yakınsak bir alt dizisi mevcutsa bu durumda T dönüşümüne kompakttır denir.

$K(X,Y)$, X normlu uzayından Y normlu uzayına kompakt operatörlerin ailesi olarak tanımlansın. Buna göre kompakt operatörler aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $T \in K(X,Y)$ ise T sınırlıdır ve dolayısıyla $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$ elde edilir.

ii. $P, T \in K(X,Y)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ise $\alpha P + \beta T$ kompakt operatördür.

iii. $P \in B(X,Y)$ ve $T \in B(X,Y)$ operatörlerinden en az biri kompakt operatör ise $TP \in B(X,Y)$ operatörü de kompakt operatördür.

Gömülme operatörü

4.3.28. Tanım

E Banach uzayından F Banach uzayına giden bire bir ve cebirsel işlemleri koruyan $J: E \to F$ dönüşümü verilmiş ise E, F ye gömülmüştür denir. Bu halde $J(E)$ ile E aynı uzaylar olarak kabul edilir ve bu anlamda $E \subset F$ yazılır. J operatörüne ise gömülme operatörü denir.

İzomorfizm

4.3.29. Tanım

X ve Y lineer uzaylar olsun. $D(T) = X$ ve $R(T) = Y$ olmak üzere $T: X \to Y$ sürekli lineer operatörü verilsin. Bu operatörün tersi olan T^{-1} operatörü var ve sürekli ise X ve Y uzaylarına izomorfiktir denir. T operatörüne X ve Y arasında izomorfik dönüşüm veya izomorfizm denir.

4.4. Sınır Değer Problemleri ve Lineer Diferansiyel Operatörler

Bu kısımda yer alan tanım ve teoremler Prof. Dr. Mustafa Kandemir' in kitabından alınmıştır.

4.4.1 Diferansiyel denklemler

4.4.1. Tanım

$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ kümesini $\mathbb{F}$ ile gösterelim. $\mathbb{F}^m$ üzerindeki norm Euclid normu olmak üzere

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{F}^m)^{n+1} \to \mathbb{F}^m, m \geq 1, n \geq 1 \ (m, n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonu yardımıyla tanımlanan

$$f\big(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^n(x)\big) = 0 \qquad (1)$$

denklemine adi (bayağı veya basit) diferansiyel denklem denir.

Buna göre adi diferansiyel denklem bir bağımlı değişken, bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denklemdir.

$$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{F}^m$$

şeklinde tanımlanan $y(x)$ fonksiyonu n-inci mertebeden türevlere sahip olmak üzere (1) denklemini sağlarsa bu fonksiyona denklemin çözümü adı verilir.

Eğer (1) denkleminden $y^{(n)}$ açık olarak çözülebiliyorsa bu denklem

$$y^{(n)}(x) = \varphi\left(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right) \tag{2}$$

biçiminde yazılabilir. Burada φ

$$\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{F}^m)^n \to \mathbb{F}^m \tag{3}$$

şeklinde tanımlı olan sürekli bir fonksiyondur. $m > 1$ olması halinde $y(x) \in \mathbb{F}^m$ fonksiyonu vektör değerli bir fonksiyon olup y ve türevlerinin $1 \times m$ tipinde bir vektör olduğu görülür. O halde $m > 1$ için (2) denklemi bir diferensiyel denklem sistemini gösterir.

4.4.2. Tanım

(1) denklemi,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

veya

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x), \quad a_n \neq 0$$

şeklinde de gösterilebilir. $a_i (i = 1,2, \dots, n)$ katsayılarının sabit veya x in fonksiyonu olup olmamasına göre bu denklem sabit katsayılı veya değişken katsayılı diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Eğer $f(x) = 0$ ise denkleme homojen (ikinci tarafsız) diferansiyel denklem, $f(x) \neq 0$ ise denkleme homojen olmayan (ikinci taraflı) diferansiyel denklem denir.

4.4.3. Tanım

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ olsun.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}$$

limiti mevcutsa bu limite f fonksiyonunun x_k değişkenine göre $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ noktasındaki kısmi türevi denir ve

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial x_k} \text{ veya } f_{x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

şeklinde gösterilir.

4.4.4. Tanım

Birden çok bağımsız değişkeni, en az bir bağımlı değişkeni ve bu bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeren bir denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

4.4.5. Tanım

Bir diferansiyel denklemde, y bağımlı değişkeni ve y nin x e göre türevleri birinci dereceden ise yani diferansiyel denklem

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x), \;\; a_n \neq 0$$

şeklinde verilmiş ise $a_i (i = 1,2, \dots, n)$ katsayıları reel sayılar olmak üzere böyle bir denkleme sabit katsayılı n-yinci mertebeden lineer diferansiyel denklem denir.

4.4.6. Tanım

$f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$ denklemini sağlayan ve içerisinde n-tane keyfi sabit bulunduran

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$$

bağıntısına, bu diferansiyel denklemin genel çözümü veya genel integrali denir. Bu bağıntıdaki sabitlerin herhangi bir değeri için diferansiyel denklemin sağlanması gerektiğine dikkat edilmelidir.

4.4.7. Tanım

Bir diferansiyel denklemin genel çözümünde, keyfi sabitlere herhangi özel değerler vermek suretiyle elde edilen çözüme özel çözüm denir.

4.4.8. Tanım

Bir diferansiyel denklemin genel çözümündeki keyfi sabitlere özel değerler vermek suretiyle elde edilemeyen çözümleri de bulunabilir. Bu tip çözümlere denklemin tekil (singüler) çözümü veya aykırı çözümü denir.

4.4.9. Tanım

$f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım. x in belli bir x_0 değeri için y nin ve $(n-1)$-inci mertebeye kadar türevlerinin değerleri

$$y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_1,\; y''(x_0) = y_2, \dots,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu şekilde tanımlanan ifadelere başlangıç şartları denir. Başlangıç şartları ile birlikte kurulan

$$f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_1,\; y''(x_0) = y_2, \dots,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

şeklindeki problemlere başlangıç değer problemi adı verilir.

4.4.2. Sınır değer problemleri

$a_1, a_2, \dots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ sabit reel sayılar olmak üzere bir $[a, b]$ aralığında tanımlı

$$L(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada, y fonksiyonu $[a, b]$ aralığında n-yinci mertebeye kadar sürekli türevlenebilen $(y \in C^n)$ bir fonksiyondur. $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları (1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere (1) denkleminin genel çözümünün

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{2}$$

şeklinde yazılır. Bu y fonksiyonu ve $(n-1)$-inci mertebeye kadar türevlerinin $a \leq x \leq b$ aralığının sınır noktalarındaki değerleri

$$y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a);\ y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$$

olmak üzere bu ifadelerin lineer birleşimlerinden oluşan

$$\begin{aligned}
L_1(y) &= \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) + \cdots + \alpha_{1n} y^{(n-1)}(a) + \beta_{11} y(b) + \beta_{12} y'(b) + \cdots + \beta_{1n} y^{(n-1)}(b) = 0 \\
L_2(y) &= \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a) + \cdots + \alpha_{2n} y^{(n-1)}(a) + \beta_{21} y(b) + \beta_{22} y'(b) + \cdots + \beta_{2n} y^{(n-1)}(b) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3) \\
L_m(y) &= \alpha_{m1} y(a) + \alpha_{m2} y'(a) + \cdots + \alpha_{mn} y^{(n-1)}(a) + \beta_{m1} y(b) + \beta_{m2} y'(b) + \cdots + \beta_{mn} y^{(n-1)}(b) = 0
\end{aligned}$$

sistemini göz önüne alalım ve bu sistemi daha sade olarak

$$L_k(y) = 0,\ k = 1,2, \dots, m \tag{4}$$

şeklinde gösterelim.

4.4.10. Tanım

(3) veya (4) sistemine (1) denkleminin sınır şartları denir. Bu sistemdeki her bir denklem bir sınır şartı ve $L_1, L_2, \dots, L_m$ lineer birleşimleri de sınır formları veya sınır değer ifadeleri olarak adlandırılır. (1) homojen denklemi ile bu denkleme ait (4) sınır şartları birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ L_k(y) = 0, k = 1,2, \dots, m \end{cases} \tag{5}$$

şeklinde ifade edilen probleme homojen sınır değer problemi adı verilir.

4.4.11. Tanım

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve f_k sabit sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} L(y) = f(x) \\ L_k(y) = f_k, k = 1,2, \dots, m \end{cases}$$

sistemine homojen olmayan sınır değer problemi denir.

4.4.12. Tanım

Homojen sınır değer probleminin daima bir $y = 0$ çözümü vardır. Bu çözüme problemin aşikâr (trivial) çözümü denir. Problemin sıfırdan farklı çözümlerine aşikâr olmayan çözümleri adı verilir.

(2) genel çözümü (3) sınır şartlarında yerine yazılırsa $c_1, c_2, \dots, c_n$ bulunması gereken sabitler olmak üzere m-tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} c_1L_1(y_1) + c_2L_1(y_2) + \cdots + c_nL_1(y_n) &= 0 \\ c_1L_2(y_1) + c_2L_2(y_2) + \cdots + c_nL_2(y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1L_m(y_1) + c_2L_m(y_2) + \cdots + c_nL_m(y_n) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

homojen denklem sistemi elde edilir. (6) sisteminin katsayılar matrisinin

$$\Delta = \begin{pmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & \cdots & L_1(y_n) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & \cdots & L_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_m(y_1) & L_m(y_2) & \cdots & L_m(y_n) \end{pmatrix} \tag{7}$$

olduğu görülmektedir.

4.4.13. Tanım

(7) ile verilen Δ matrisinin rankına (5) sınır değer probleminin rankı adı verilir.

Burada $rank\Delta = r$ ve $l(y)$ diferansiyel ifadesinin mertebesi n olmak üzere;

i. (5) sınır değer probleminin $(n - r)$ tane lineer bağımsız çözümü vardır. Yani çözüm uzayının boyutu $(n - r)$ dir.

ii. (5) sınır değer probleminin aşikar olmayan (sıfırdan farklı) çözümünün olması için gerek ve yeter şart $r < n$ $(n - r > 0)$ olmasıdır.

iii. $m < n$ ise (5) sınır değer probleminin daima aşikar olmayan çözümü vardır. O halde denklem sayısının bilinmeyen sayısından az olması durumda problem daima aşikar olmayan çözümlere sahiptir.

iv. $m > n$ ise (5) sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart $r < n$ olmasıdır.

v. $m = n$ olması halinde problemin sıfırdan farklı bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart $det\Delta = 0$ olmasıdır.

Eğer $det\Delta \neq 0$ ise sistemin sadece aşikar çözümü vardır. Çünkü $det\Delta \neq 0$ ise Δ matrisinin Δ^{-1} tersi vardır.

Buna göre $m = n$ olması halinde (5) sınır değer probleminin ya aşikar çözümü vardır ya da sonsuz sayıda aşikar olmayan çözümü vardır.

Burada (4) sınır şartları ve $L(y)$ diferansiyel ifadesinin tanım bölgesindeki her bir y fonksiyonuna $L(y) = u$ olacak şekilde değer bölgesinde bir u değerinin karşılık geldiği kabul edilirse (5) sınır değer problemi $\mathcal{L}$ ile gösterilen bir lineer operatör yardımıyla

$$\mathcal{L}y = u$$

biçiminde yazılabilir. Yani, bu eşitlik

$$\mathcal{L}y = \big(L(y), L_1(y), L_2(y), \dots, L_m(y)\big) = u \tag{8}$$

anlamındadır.

4.4.14. Tanım

(8) şeklinde ifade edilen $\mathcal{L}$ operatörüne, $L(y)$ diferansiyel ifadesi ve (4) sınır şartları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir. Buna göre (5) sınır değer problemi ile $\mathcal{L}$ diferansiyel operatörü eşdeğer olup

$$\mathcal{L}y = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan anlaşılmaktadır ki bir diferansiyel ifade farklı sınır şartları altında farklı diferansiyel operatör üretir. $\mathcal{L}(y)$ diferansiyel ifadesinin ürettiği en geniş lineer diferansiyel operatör sınır şartlarının olmadığı durumdur. O halde bu operatör $\mathcal{L}_1$ ile gösterilen ve

$$\mathcal{L}_1 : C^n[a,b] \to C^n[a,b], D(\mathcal{L}_1) = C^n[a,b], \mathcal{L}_1 y = L(y)$$

şeklinde tanımlanan operatördür. $L(y)$ diferansiyel ifadesinin ürettiği en dar lineer diferansiyel operatör sınır ifadelerinin hepsinin sıfır olduğu yani

$$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0$$

durumda ürettiği operatördür. O halde bu operatör de $\mathcal{L}_0$ ile gösterilen ve

$$\mathcal{L}_0 : C^n[a,b] \to C^n[a,b] + \mathbb{C}^m,$$

$$D(\mathcal{L}_0) = \{y \in C^n[a,b] \mid y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan bir operatördür. Buna göre (5) sınır değer probleminin ürettiği diğer tüm diferansiyel operatörler $\mathcal{L}_0$ ve $\mathcal{L}_1$ operatörleri arasındadır yani

$$\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$$

olmaktadır.

Özdeğer parametreli sınır değer problemi

$$L(y) = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

ve λ reel vaya kompleks bir parametre olmak üzere

$$L(y) = \lambda y \tag{1}$$

$$U_k(y) = 0, k = 1,2, \dots, m \tag{2}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Bu sınır değer probleminin ürettiği $\mathcal{L}$ diferansiyel operatörüne göre (1)-(2) problemi

$$\mathcal{L}y = \lambda y \text{ veya } (\mathcal{L} - \lambda I)y = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $(\mathcal{L} - \lambda I)y = 0$ denkleminin sıfırdan farklı bir çözümünün olmasını sağlayan λ sayısına $\mathcal{L}$ operatörünün öz değeri denir.

4.4.15. Tanım

(1)-(2) sınır değer probleminin ürettiği diferansiyel operatör $\mathcal{L}$ olmak üzere bu operatörün özdeğerine problemin özdeğeri, bu özdeğere karşılık gelen sıfırdan farklı y $(y \neq 0)$ fonksiyonlarına da bu problemin öz fonksiyonları denir.

Operatörün tanımlandığı lineer uzay fonksiyon uzayı olduğunda öz vektör yerine öz fonksiyon kavramı kullanılır.

4.4.16. Tanım

(1)-(2) şeklinde verilen bir sınır değer problemine diferansiyel denkleminde öz değer parametresi bulunan öz değer parametreli homojen sınır değer problemi adı verilir.

Bir λ_1 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar kümesi sonlu boyutlu olan $(boyutu \leq n)$ bir lineer uzay oluşturur. Bu uzayın boyutu, (1)-(2) sınır değer probleminin λ_1 özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır.

4.4.17. Teorem

Aynı bir λ özdeğerine karşılık gelen y_1 ve y_2 özfonksiyonlarının lineer birleşimi de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olur.

4.4.17. İspat

y_1 ve y_2 özfonksiyon ise

$$\mathcal{L}(y_1) = \lambda y_1 \ ve\ \mathcal{L}(y_2) = \lambda y_2$$

olduğundan c_1 ve c_2 herhangi skaler olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) &= \mathcal{L}(c_1y_1) + \mathcal{L}(c_2y_2)\\ &= c_1\mathcal{L}(y_1) + c_2\mathcal{L}(y_2)\\ &= c_1\lambda y_1 + c_2\lambda y_2\\ &= \lambda(c_1y_1 + c_2y_2)\end{aligned}$$

olur ki burada $c_1y_1 + c_2y_2$ ifadesinin özfonksiyon olduğunu gösterir.

Şimdi öz değerlerin belirlenmesi için aşağıdaki durumları inceleyelim.

A. $m \neq n$ olsun.

(1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \dots, y_n(x,\lambda) \tag{3}$$

olsun. Bu çözümler sistemi, (1) denkleminin çözümlerinin temel sistemi (fundamental ststem) şeklinde de adlandırılır. (3) çözümleri λ parametresine göre analitik (tam) fonksiyonlardır. Buna göre (1) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1y_1(x,\lambda) + c_2y_2(x,\lambda) + \cdots + c_ny_n(x,\lambda) \tag{4}$$

şeklindedir. (4) genel çözümü (2) sınır şartlarında yazılırsa

$$L_1\big(y(x,\lambda)\big) = c_1L_1\big(y_1(x,\lambda)\big) + c_2L_1\big(y_2(x,\lambda)\big) + \cdots + c_nL_1\big(y_n(x,\lambda)\big) = 0$$

$$L_2\big(y(x,\lambda)\big) = c_1L_2\big(y_1(x,\lambda)\big) + c_2L_2\big(y_2(x,\lambda)\big) + \cdots + c_nL_2\big(y_n(x,\lambda)\big) = 0$$

……………………………………………………………………………………

$$L_m\big(y(x,\lambda)\big) = c_1L_m\big(y_1(x,\lambda)\big) + c_2L_m\big(y_2(x,\lambda)\big) + \cdots + c_nL_m\big(y_n(x,\lambda)\big) = 0$$

sistemi elde edilir. $c_i(i = 1,2,\dots,n)$ bilinmeyenlerine göre bu sistemin katsayılar matrisi

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1\big(y_1(x,\lambda)\big) & L_1\big(y_2(x,\lambda)\big) & \cdots & L_1\big(y_n(x,\lambda)\big)\\ L_2\big(y_1(x,\lambda)\big) & L_2\big(y_2(x,\lambda)\big) & \cdots & L_2\big(y_n(x,\lambda)\big)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ L_m\big(y_1(x,\lambda)\big) & L_m\big(y_2(x,\lambda)\big) & \cdots & L_m\big(y_n(x,\lambda)\big)\end{pmatrix} \tag{5}$$

şeklindedir. $rank\Delta(\lambda) = r$ olmak üzere:

a) (1)-(2) sınır değer probleminin sıfırdan farklı çözümünün olması için gerek ve yeter şart $r < n$ olmasıdır.

b) $m < n$ ise $r < n$ olacağından (1)-(2) sınır değer problemi λ nin herhangi bir değeri için bir aşikar olmayan çözüme sahiptir. Buna göre $m < n$ olması durumunda λ nın her bir değeri bir özdeğerdir.

c) $m \geq n$ ise $r < n$ olması için gerek ve yeter şart $\Delta(\lambda)$ matrisinin bütün n-yinci mertebeden minörlerinin sıfır olmasıdır. Bu durumda:

i. $\Delta(\lambda)$ matrisinin bütün n-yinci mertebeden minörleri özdeş olarak sıfır ise $r < n$ olacağından λ nın her bir değeri bir özdeğerdir.

ii. $\Delta(\lambda)$ matrisinin en az bir n-yinci mertebeden minörü sıfırdan farklı ise n-yinci mertebeden minörleri sıfır yapan bütün λ değerleri bir özdeğerdir.

B. $m = n$ olsun.

Bu durumda (1)-(2) sınır değer problemi

$$L(y) = \lambda y \qquad (6)$$

$$L_k(y) = 0, k = 1,2, \ldots, n \qquad (7)$$

şeklinde olup (5) matrisi de

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1(y_1(x,\lambda)) & L_1(y_2(x,\lambda)) & \cdots & L_1(y_n(x,\lambda)) \\ L_2(y_1(x,\lambda)) & L_2(y_2(x,\lambda)) & \cdots & L_2(y_n(x,\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_n(y_1(x,\lambda)) & L_n(y_2(x,\lambda)) & \cdots & L_n(y_n(x,\lambda)) \end{pmatrix} \qquad (8)$$

biçimindedir.

4.4.18. Tanım

(6)-(7) sınır değer probleminin ürettiği diferansiyel operatör $\mathcal{L}$ olmak üzere

$$\Delta(\lambda) = \det(M(\lambda)) = \begin{vmatrix} L_1(y_1(x,\lambda)) & L_1(y_2(x,\lambda)) & \cdots & L_1(y_n(x,\lambda)) \\ L_2(y_1(x,\lambda)) & L_2(y_2(x,\lambda)) & \cdots & L_2(y_n(x,\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_n(y_1(x,\lambda)) & L_n(y_2(x,\lambda)) & \cdots & L_n(y_n(x,\lambda)) \end{vmatrix}$$

determinantına $\mathcal{L}$ operatörünün veya $\mathcal{L}y = 0$ sınır değer probleminin karakteristik determinantı denir. $\mathcal{L}$ operatörünün öz değerleri $\Delta(\lambda)$ determinantının sıfırlarıdır ve bir λ özdeğeri $\Delta(\lambda)$ nin katlı bir sıfırı olabilir.

Açıklama:

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \dots, y_n(x,\lambda)$$

fonksiyonları λ ya göre her bir x değeri için analitik fonksiyonlar olduğundan $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ nın bir analitik fonksiyonudur. Özdeş olarak sıfırdan farklı olan yani λ nın bütün değerleri için sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun sonlu ya da sayılabilir sayıda sıfırı vardır. Bu analitik fonksiyonun sıfırları izole noktalar olup hiçbir sonlu yığılma (limit) noktası bulunmaz. Buna göre (6)-(7) sınır değer problemi ($\mathcal{L}$ operatörü) için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

i. $\Delta(\lambda)$ Fonksiyonunun sıfırları problemin öz değerleridir.

ii. $\Delta(\lambda) \equiv 0$ ise her λ kompleks sayısı problemin özdeğeridir.

iii. $\Delta(\lambda) \neq 0$ ise probleme ait özdeğer yoktur.

iv. Problemin sonlu sayıda öz değeri bulunur.

v. Problemin sayılabilir sayıda (λ_n) özdeğerleri bulunur ve

$$\lambda_n \to \infty$$

olur. Yani (λ_n) dizisi yakınsak değildir.

4.4.19. Teorem

Bir λ sayısının $\mathcal{L}$ operatörünün öz değeri olması için gerek ve yeter şart $\Delta(\lambda) = 0$ olmasıdır.

4.4.20. Tanım

λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonun m-yinci dereceden sıfırı ise m sayısına λ_0 özdeğerinin cebirsel katı denir. λ_0 sayısı (6)-(7) probleminin bir özdeğeri olmak üzere bu özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız çözümlerinin sayısına λ_0 özdeğerinin geometrik katı veya öz katı adı verilir.

4.4.21. Teorem

λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırı ve λ_0 ın geometrik katı (özkatı) k ve cebirsel katı l olmak üzere $k \leq l$ dır.

4.4.22. Örnek

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq l \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} L_1(y) &= y'(0) = 0 \\ L_2(y) &= y(l) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

sınır değer probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarını bulalım.

4.4.22. Çözüm

1. $\lambda = 0$ ise denklem $y'' = 0$ olacağından genel çözümü

$$y = c_1x + c_2$$

fonksiyonu ve türevi

$$y' = c_1$$

olur. $y'(0) = 0$ sınır şartlarına göre $c_1 = 0$ ve $y(l) = 0$ sınır şartlarına göre $c_2 = 0$ olduğu için (1)-(2) sınır değer probleminin sadece $y = 0$ aşikar çözümü vardır. Buna göre $\lambda = 0$ sayısı (1)-(2) sınır değer probleminin özdeğeri değildir.

2. $\lambda < 0$ ise $\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ olmak üzere (1) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1e^{-\alpha x} + c_2e^{\alpha x}$$

olduğundan bu çözümün türevi

$$y' = -\alpha c_1e^{-\alpha x} + \alpha c_2e^{\alpha x}$$

olur. $y'(0) = 0$ ve $y(l) = 0$ sınır şartına göre sırasıyla

$$-c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1e^{-\alpha l} + c_2e^{\alpha l} = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ e^{-\alpha l} & e^{\alpha l} \end{vmatrix} = -(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}) \neq 0$$

olduğundan (1)-(2) sınır değer probleminin sadece $y = 0$ aşikar çözümü vardır.

3. $\lambda > 0$ ise $\lambda = \alpha^2$ $(\alpha > 0)$ olmak üzere (1) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1cos\alpha x + c_2sin\alpha x \quad (3)$$

olduğundan bu çözümün türevi

$$y'(x) = -\alpha c_1sin\alpha x + \alpha c_2cos\alpha x$$

olur. Verilen sınır şartlarına göre

$$y'(0) = 0 \; ise \; c_2 = 0$$

$$y(l) = 0 \; ise \; c_1cos\alpha l = 0$$

eşitlikleri bulunur. $c_1cos\alpha l = 0$ eşitliğinde $c_1 = 0$ ise sistemin $y = 0$ aşikar çözümü vardır. $c_1 \neq 0$ ise $cos\alpha l = 0$ olacağından

$$\alpha l = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1,2,3, ...$$

$$\alpha = (2n-1)\frac{\pi}{2l}, n = 1,2,3, ...$$

$$\lambda_n = \alpha^2 = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2}, n = 1,2,3, \dots$$

öz değerleri elde edilir. Bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar, c_n keyfi sabitler olmak üzere (1) denkleminin (3) genel çözümüne göre

$$y(x) = c_n cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x, n = 1,2,3, \dots$$

şeklinde bulunur. y fonksiyonu aynı zamanda λ parametresine de bağlı olduğu için

$$y(x,\lambda) = c_n cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x, n = 1,2,3, \dots$$

biçiminde yazılması daha uygun olur. Burada

$$\lambda_n = \alpha^2 = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}, n = 1,2,3, \dots$$

öz değerleri için

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

olduğu görülür. Buna göre öz değerlerin

$$(\lambda_n) = \left(\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}\right)$$

dizisi pozitif terimli artan ıraksak yani

$$(\lambda_n) \to \infty \left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty\right)$$

şeklinde olan bir dizidir.

Sturm-Liouville sınır değer problemi

4.4.23. Tanım

$p(x), p'(x), q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları bir $[a,b]$ reel aralığında sürekli, $[a,b]$ aralığının her bir noktasında $p(x) > 0, r(x) > 0$ ve λ, x değişkeninden bağımsız bir parametre olmak üzere

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0, a \le x \le b \quad (1)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \quad (2)$$

şeklinde tanımlanan probleme regüler Strum-Liouville sınır değer problemi veya sadece Strum-Liouville sistemi denir. Strum-Liouville diferansiyel denklemi denildiği zaman (1) denkleminin kastedildiği açıktır. Sınır şartlarında bulunan α_1 ve α_2 sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. Buna göre (2) sınır şartları $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve β_2 katsayılarının sıfır veya sıfırdan farklı olmasına göre değişik şekillerde yazılabilir. O halde farklı sınır şartlarına göre farklı Strum-Liouville sınır değer problemi elde etmek mümkündür.

4.4.24. Tanım

Eğer $y(a) = y(b)$ ve $y'(a) = y'(b)$ ise (2) sınır şartlarına periyodik sınır şartları dolayısıyla (1)-(2) problemine de periyodik Strum-Liouville problemi adı verilir.

4.4.25. Tanım

$p(x), q(x)$ veya $r(x)$ fonksiyonlarından birinin bir $x = x_0$ noktasında singüler olması durumunda (1) denklemine bu noktada singüler Strum-Liouville problemi veya Strum-Liouville sistemi denir. O halde aşağıdaki durumlardan en az biri sağlanıyorsa
(1)-(2) problemi bir singüler Strum-Liouville problemidir.

1. Herhangi bir $x \in [a, b]$ için $p(x) = 0$ veya $r(x) = 0$.
2. $p(x), q(x)$ veya $r(x)$ katsayı fonksiyonlarından en az biri, a ve b noktalarının en az birinde ∞.
3. (a, b) aralığı sınırsız, yani $(-\infty, b), (a, \infty)$ veya $(-\infty, \infty)$.

4.4.26. Örnek

p bir sabit olmak üzere p-yinci mertebeden

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - p^2)y = 0, 0 < x \leq a$$

Bessel denklemi

$$xy'' + y' + \alpha^2xy - \frac{p^2}{x}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{p^2}{x}y + \alpha^2xy = 0$$

biçiminde yazılırsa $p(x) = x, q(x) = \frac{p^2}{x}, r(x) = x$ ve $\lambda = \alpha^2$ olan bir Strum-Liouville denklemi şeklini alır. Burada sınır şartları $x = a$ ve $x = +0$ için yazılır. Bessel denklemi $x = 0$ noktasında singülerdir.

4.4.27. Teorem

p_2, p_1, p_0 ve r_0 bir $[a, b]$ aralığında sürekli, $p_2 > 0$ ve $r_0 > 0$ olmak üzere

$$p_2y'' + p_1y' + p_0y + \lambda r_0y = 0 \tag{3}$$

denklemi

$$(p(x)y')' + \big(q(x) + \lambda r(x)\big)y = 0 \tag{4}$$

şeklinde yazılabilir.

4.4.28. Teorem

(1)-(2) reguler Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğerlerinin dizisi (λ_n) olmak üzere bu dizi artan ve ıraksaktır. Yani $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ olur.

Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve β_2 katsayıları negatif değilse (1)-(2) probleminin hiçbir özdeğeri negatif değildir.

4.4.29. Örnek

$$y'' + \lambda y = 0,\ -\pi \le x \le \pi \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} L_1(y) &= y(-\pi) - y(\pi) = 0 \\ L_2(y) &= y'(-\pi) - y'(\pi) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Periyodik sınır şartlı sınır değer probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarını bulalım.

4.4.29. Çözüm

1. $\lambda = 0$ ise denklem $y'' = 0$ olacağından bu denklemin genel çözümü

$$y = c_1 x + c_2$$

ve bu çözümün türevi

$$y' = c_1$$

olur. $y(-\pi) - y(\pi) = 0$ sınır şartlarına göre $c_1 = 0$ ve $y'(-\pi) - y'(\pi) = 0$ sınır şartlarına göre $c_1 - c_1 = 0$ olduğundan bu eşitlikler c_2 ne olursa olsun sağlanmaktadır. Yani sınır şartlarından sadece $c_1 = 0$ olduğu sonucu görülür. Buna göre $\lambda = 0$ sayısı

(1)-(2) probleminin bir öz değeri olup bu öz değere karşılık gelen öz fonksiyon

$$y = c_2.1$$

veya sadece

$$y = 1$$

olur.

2. $\lambda < 0$ ise $\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ olmak üzere (1) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$$

olduğundan bu çözümün türevi

$$y' = -\alpha c_1 e^{-\alpha x} + \alpha c_2 e^{\alpha x}$$

olur. $y(-\pi) - y(\pi) = 0$ sınır şartına göre

$$c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} - c_1 e^{-\alpha\pi} - c_2 e^{\alpha\pi} = 0$$

$$(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})(c_1 - c_2) = 0$$

$$c_1 - c_2 = 0$$

ve $y'(-\pi) - y'(\pi) = 0$ sınır şartına göre

$$-\alpha c_1 e^{\alpha\pi} + \alpha c_2 e^{-\alpha\pi} + \alpha c_1 e^{-\alpha\pi} - \alpha c_2 e^{\alpha\pi} = 0$$

$$\alpha(e^{-\alpha\pi} - \alpha e^{\alpha\pi})c_1 + \alpha(e^{-\alpha\pi} - e^{\alpha\pi})c_2 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

olduğundan

$$\begin{matrix} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{matrix} \qquad (3)$$

sistemi elde edilir. Bu sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan (3) sisteminin $c_1 = c_2 = 0$ aşikar çözümü vardır. Bu yüzden (1)-(2) probleminin sadece $y = 0$ aşikar çözümü olup $\lambda < 0$ olacak şekilde bir özdeğeri yoktur.

3. $\lambda > 0$ ise $\lambda = \alpha^2$ $(\alpha > 0)$ olmak üzere (1) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 cos\alpha x + c_2 sin\alpha x \qquad (4)$$

olduğundan bu çözümün türevi

$$y'(x) = -\alpha c_1 sin\alpha x + \alpha c_2 cos\alpha x$$

olur. $y(-\pi) - y(\pi) = 0$ sınır şartlarına göre

$$c_1 cos\alpha\pi - c_2 sin\alpha\pi - (c_1 cos\alpha\pi + c_2 sin\alpha\pi) = 0$$

$$c_2 sin\alpha\pi = 0 \qquad (5)$$

ve $y'(-\pi) - y'(\pi) = 0$ sınır şartına göre

$$\alpha c_1 sin\alpha\pi + \alpha c_2 cos\alpha\pi - (-\alpha c_1 sin\alpha\pi + \alpha c_2 cos\alpha\pi) = 0$$

$$c_1 sin\alpha\pi = 0 \qquad (6)$$

bulunur. (5)-(6) denkleminden oluşan

$$c_2 sin\alpha\pi = 0$$

$$c_1 sin\alpha\pi = 0$$

sistemi elde edilir. Bu sistem, $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ haricindeki durumlar için sadece aşikar çözüme sahiptir. O halde $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ alınırsa $sin\alpha\pi = 0$ olacağından

$$\alpha\pi = n\pi, n = 1,2,3, \ldots$$

$$\alpha = n, n = 1,2,3, \ldots$$

olur ki $\lambda = \alpha^2$ olduğundan

$$\lambda_n = n^2, n = 1,2,3, \ldots$$

özdeğerleri elde edilir. (4) genel çözümü göz önüne alınırsa bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar da

$$y(x) = c_1 cosnx + c_2 sinnx, n = 1,2,3, \dots$$

veya

$$y(x) = c_n(cosnx + sinnx), n = 1,2,3, \dots$$

şeklinde bulunur. Burada $\lambda_n = n^2$ özdeğerlerinin oluşturduğu $(\lambda_n) = (n^2)$ dizisinin

$$1 < 4 < 9 < 16 < \cdots$$

şeklinde artan ve ıraksak yani $(\lambda_n) \to \infty$ olduğu görülür. Ayrıca (1)-(2) probleminin spektrumu $(\lambda_n) = (n^2)$ dizisinin terimlerinden oluşan

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{1,4,9,16, \dots, n^2, \dots\}$$

kümesidir.

4.5. Çok Noktalı Geçiş Şartları İçeren Bir Sturm-Liouville Probleminin Çözülebilirliği

Bu bölümde

$$L(\lambda)u := -a(x)u''(x) + \lambda u(x) = f(x), x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{1}$$

$$L_k u := \sum_{j=1}^{4} \alpha_{kj} u^{m_k}(y_j) + \sum_{i=1}^{n_k} \delta_{ki} u^{(m_k)}(x_{ki}) = f_k, k = 1,2,3,4, \tag{2}$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemi (2) deki çok noktalı geçiş şartlarıyla birlikte lineer spektral parametre içeren (1) denklemini iki ayrı aralıkta göz önüne alacağız. Bu çalışmada dikkate alınan sınır değer probleminin çözülebilirliği ve bu probleme karşılık gelen diferansiyel operatörün Fredholm operatörü olma özelliği incelendi.

Burada

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & x \in [-1,0) \\ a_2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ olarak tanımlanan parçalı sabit fonksiyon; λ-kompleks parametre; α_{kj} ler $(j = k = 1,2,3,4)$ kompleks sayılar; $\sum_{j=1}^{4} |\alpha_{kj}| \neq 0$ $(k = 1,2,3,4)$; x_{ki} iç noktalar, $m_k \geq 0$ $(k = 1,2,3,4)$ herhangi tamsayılar; y_j ler $(y_1 = -1, y_2 = -0, y_3 = +0, y_4 = +1)$ sınır geçiş şartlarıdır.

4.5.1. Klasik olmayan geçiş şartları içeren homojen denklem

İlk olarak

$$L(\lambda)u := -a(x)u''(x) + \lambda u(x) = 0, \tag{1}$$

homojen diferansiyel denklemini

$$L_{k0}u := \sum_{j=1}^{4} \alpha_{kj} u^{m_k}(y_j) = f_k, k = 1,2,3,4, \tag{2}$$

homojen olmayan sınır geçiş koşullarıyla birlikte iç noktaları olmadan ele alalım.
Bu bölümde kullanacağımız bazı notasyonları verelim.

$$\omega_1 := a_1^{-1/2}, \omega_2 := -a_1^{-1/2}, \omega_3 := a_2^{-1/2}, \omega_4 := -a_2^{-1/2},$$

$$\underline{\omega} := \min\{arga_1, arga_2\},\ \overline{\omega} := \max\{arga_1, arga_2\},$$

$$\theta := \begin{vmatrix} \alpha_{11}\omega_1^{m_1} & \alpha_{12}\omega_2^{m_1} & \alpha_{13}\omega_3^{m_1} & \alpha_{14}\omega_4^{m_1} \\ \alpha_{21}\omega_1^{m_2} & \alpha_{22}\omega_2^{m_2} & \alpha_{23}\omega_3^{m_2} & \alpha_{24}\omega_4^{m_2} \\ \alpha_{31}\omega_1^{m_3} & \alpha_{32}\omega_2^{m_3} & \alpha_{33}\omega_3^{m_3} & \alpha_{34}\omega_4^{m_3} \\ \alpha_{41}\omega_1^{m_4} & \alpha_{42}\omega_2^{m_4} & \alpha_{43}\omega_3^{m_4} & \alpha_{44}\omega_4^{m_4} \end{vmatrix}$$

ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ reel sayısı için λ öz değerlerinin kümesi

$$G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega}) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \pi + \overline{\omega} + \varepsilon < arg\lambda < 3\pi + \underline{\omega} - \varepsilon\}$$

olsun.

4.5.1. Teorem

$\theta \neq 0$ ise her $\varepsilon > 0$ ve tüm $\lambda \in G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega})$ için $|\lambda| > R_\varepsilon$ olacak şekilde $R_\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki keyfi $l \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$ değeri için (1)-(2) probleminin $W^{l,q}(-1,0) \dot{+} W^{l,q}(0,1)$ sobolev direct toplamına ait $u(x, \lambda)$ çözümü tek türlüdür ve λ parametresi için

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{(l-k)/2} \|u\|_{q,k} \leq C(\varepsilon) \sum_{v=0}^{4} |\lambda|^{(l-m_v-\frac{1}{q})/2} |f_v| \tag{3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

4.5.1. İspat

$\lambda = \mu^2$ olsun. (1) denkleminin $u_i = u_i(x,\lambda)$ $(i = 1,2,3,4)$ dört temel çözümünü

$$u_i(x,\lambda) := \begin{cases} e^{w_i\mu(x-b_i)}, & x \in \Omega_i \text{ için} \\ 0 & , x \notin \Omega_i \text{ için} \end{cases} \tag{4}$$

olarak tanımlayalım. Burada $b_1 = -1, b_2 = b_3 = 0, b_4 = 1, \Omega_1 = \Omega_2 = [-1,0), \Omega_3 = \Omega_4 = (0,1]$ dir. Buna göre (1) denkleminin genel çözümünü

$$u(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} C_k u_k(x,\lambda)$$

formunda yazabiliriz.

(4) çözümü (2) deki sınır geçiş şartlarında yerine yazılırsa C_1, C_2, C_3, C_4 değişkenlerine göre

$$\begin{aligned} &(\omega_1\mu)^{m_k}(\alpha_{k1} + \alpha_{k2}e^{\omega_1\mu})C_1 + (\omega_2\mu)^{m_k}(\alpha_{k1}e^{-\omega_2\mu} + \alpha_{k2})C_2 \\ &+(\omega_3\mu)^{m_k}(\alpha_{k3} + \alpha_{k4}e^{\omega_3\mu})C_3 + (\omega_4\mu)^{m_k}(\alpha_{k3}e^{-\omega_4\mu} + \alpha_{k4})C_4 \\ &= f_k, (k = 1,2,3,4.) \end{aligned} \tag{5}$$

lineer homojen olmayan denklem sistemi elde edilir.

$\lambda \in G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega})$ olduğundan

$$\frac{\pi + \varepsilon}{2} < \arg(\omega_i\mu) < \frac{3\pi - \varepsilon}{2}, i = 1,3$$

ve

$$-\frac{\pi - \varepsilon}{2} < \arg(\omega_i\mu) < \frac{\pi - \varepsilon}{2}, i = 2,4.$$

ifadelerini yazabiliriz. Sonuç olarak λ değeri ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$(-1)^{k+1}Re(\omega_k\mu) \le -|\mu||\omega_k|sin\frac{\varepsilon}{2}, k = 1,2,3,4.$$

eşitsizliğine ulaşabiliriz.

Dolayısıyla (5) sisteminin karakteristik determinantını

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_i}\left(\begin{vmatrix} \alpha_{11}\omega_1^{m_1} & \alpha_{12}\omega_2^{m_1} & \alpha_{13}\omega_3^{m_1} & \alpha_{14}\omega_4^{m_1} \\ \alpha_{21}\omega_1^{m_2} & \alpha_{22}\omega_2^{m_2} & \alpha_{23}\omega_3^{m_2} & \alpha_{24}\omega_4^{m_2} \\ \alpha_{31}\omega_1^{m_3} & \alpha_{32}\omega_2^{m_3} & \alpha_{33}\omega_3^{m_3} & \alpha_{34}\omega_4^{m_3} \\ \alpha_{41}\omega_1^{m_4} & \alpha_{42}\omega_2^{m_4} & \alpha_{43}\omega_3^{m_4} & \alpha_{44}\omega_4^{m_4} \end{vmatrix} + e^{\lambda^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}\omega_i}\begin{vmatrix} \alpha_{12}\omega_1^{m_1} & \alpha_{11}\omega_2^{m_1} & \alpha_{13}\omega_3^{m_1} & \alpha_{14}\omega_4^{m_1} \\ \alpha_{22}\omega_1^{m_2} & \alpha_{21}\omega_2^{m_2} & \alpha_{23}\omega_3^{m_2} & \alpha_{24}\omega_4^{m_2} \\ \alpha_{32}\omega_1^{m_3} & \alpha_{31}\omega_2^{m_3} & \alpha_{33}\omega_3^{m_3} & \alpha_{34}\omega_4^{m_3} \\ \alpha_{42}\omega_1^{m_4} & \alpha_{41}\omega_2^{m_4} & \alpha_{43}\omega_3^{m_4} & \alpha_{44}\omega_4^{m_4} \end{vmatrix}\right)$$

$$= \lambda^{\frac{m}{2}}(\theta + r(\lambda))$$

formunda elde ederiz.

Burada $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ ve eğer $\lambda \in G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega})$ ve $|\lambda| \to \infty$ ise $r(\lambda) \to 0$ dir. $\theta \neq 0$ olduğundan $R_\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki $\lambda \in G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega})$ ve $|\lambda| > R_\varepsilon$ değerini sağlayan tüm λ kompleks sayıları için $\Delta(\lambda) \neq 0$ elde ederiz. Böylece λ özdeğeri için (5) sisteminin çözümü

$$C_i(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^{4} \Delta_{ik}(\lambda) f_k, i = 1,2,3,4$$

tek türlüdür.

Burada $\Delta_{ik}(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ determinantının (i,k)-nıncı elemanlarının cebirsel tamamlayıcısıdır. Bu determinant

$$\Delta_{ik}(\lambda) = \left(\theta_{ik} + r_{ik}(\lambda)\right)\lambda^{(m-m_k)/2}$$

şeklindedir. Burada θ_{ik} kompleks sayılar, $\lambda \in G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega})$ ve $|\lambda| \to \infty$ iken $r_{ik} \to 0$ olur.

Bu durumda

$$C_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{4} \lambda^{-m_k/2} \frac{\theta_{ik} + r_{ik}(\lambda)}{\theta + r(\lambda)} f_k, i = 1,2,3,4.$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $(1) - (2)$ sınır değer probleminin çözümü

$$u(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} \lambda^{-m_k/2} \frac{\theta_{ik} + r_{ik}(\lambda)}{\theta + r(\lambda)} f_k u_i(x,\lambda)$$

formundadır.

Buradan her $l \geq 0$ tamsayısı için

$$\left\|u^{(l)}\right\|_{L_q(-1,1)} \leq C \sum_{k=1}^{4} \left(|\lambda|^{(l-m_k)/2} |f_k| \sum_{i=1}^{4} \|u_i(.,\lambda)\|_{L_q(\Omega_i)} \right) \qquad (6)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Ayrıca (4) den $\lambda \in G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega})$ ve $|\lambda| \to \infty$ için

$$\|u_1(.,\lambda)\|_{L_q(-1,0)}^q = \int_{-1}^{0} e^{qRe(\omega_1\mu)(x+1)}\, dx \leq \int_{-1}^{0} e^{-q|\mu||\omega_1| sin(\varepsilon/2)(x+1)}\, dx$$
$$= \left(-q|\mu||\omega_1| sin(\varepsilon/2)(x+1)\right)^{-1}\left(e^{-q|\mu||\omega_1| sin(\varepsilon/2)} - 1\right)$$
$$\leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1/2}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $\lambda \in G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega})$ ve $|\lambda| \to \infty$ için

$$\|u_i(.,\lambda)\|_{L_q(\Omega_i)} \leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1/2}, i = 2,3,4$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikler (6) da yerine yazılırsa

$$\left\|u^{(l)}\right\|_{L_q(-1,1)} \leq C(\varepsilon) \sum_{k=1}^{4} |\lambda|^{(l-m_k-\frac{1}{q})/2} |f_k|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliklerden (3) eşitsizliği bulunur.

4.5.2. Geçiş şartlı homojen olmayan bir Sturm-Liouville problemin Fredholm özelliği

$l \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$ olsun ve

$$\tilde{\mathcal{L}}: W^{l,q}(-1,0) \dotplus W^{l,q}(0,1) \to W^{l-2,q}(-1,0) \dotplus W^{l-2,q}(0,1) \dotplus C_4$$

tanımlı $\tilde{\mathcal{L}}$ lineer diferansiyel operatörü

$$\tilde{\mathcal{L}}u = (-a(x)u'', L_1u, L_2u, L_3u, L_4u)$$

olarak verilsin.

4.5.2. Teorem

$\tilde{\mathcal{L}}$ lineer operatörü sınırlı ve Fredholmdur.

4.5.2. İspat

$$\tilde{\mathcal{L}}_0u = (-a(x)u'' + \lambda_0u, T_1u, T_2u, T_3u, T_4u)$$

ve

$$\tilde{\mathcal{L}}_1u = (-\lambda_0u, (L_1 - T_1)u, (L_2 - T_2)u, (L_3 - T_3)u, (L_4 - T_4)u)$$

lineer operatör ve $T_1u = u(-1), T_2u = u'(-1), T_3u = u(-0) - u(+0), T_4u = u'(-0) - u'(+0)$, $W^{l,q}(-1,0) \dotplus W^{l,q}(0,1)$ Sobolev uzayının direct toplamında lineer fonksiyoneller olsun. Burada $\lambda \in G_\varepsilon(\underline{\omega}, \overline{\omega})$ yeterince büyük kompleks sayıdır. Teorem 4.5.1 tarafından

$$\tilde{\mathcal{L}}_0: W^{l,q}(-1,0) \dotplus W^{l,q}(0,1) \to W^{l-2,q}(-1,0) \dotplus W^{l-2,q}(0,1) \dotplus C_4$$

olarak tanımlı $\tilde{\mathcal{L}}_0$ operatörü izomorfizmdir. Ayrıca

$$\tilde{\mathcal{L}}_1: W^{l,q}(-1,0) \dotplus W^{l,q}(0,1) \to W^{l-2,q}(-1,0) \dotplus W^{l-2,q}(0,1) \dotplus C_4$$

$\tilde{\mathcal{L}}_1$ lineer operatörünün kompakt olduğu görülür. Sonuç olarak, $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_0 + \tilde{\mathcal{L}}_1$ olsun. Buna göre. $\tilde{\mathcal{L}}_0$ operatörü izomorfizm ve $\tilde{\mathcal{L}}_1$ operatörü kompakt olduğundan $\tilde{\mathcal{L}}$ operatörü Fredhom operatörüdür. Ayrıca $\tilde{\mathcal{L}}$ operatörünün sınırlı olduğu (operatörün kompaktlık kriterinden) açıktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Sobolev uzayların direkt toplamında göz önüne alınan klasik olmayan geçiş şatlarından oluşan süreksiz katsayılı sınır değer probleminin çözümü incelenmiştir. Daha sonra bu sınır değer probleminin ürettiği lineer diferansiyel operatörün Fredholm operatörü olma özelliği araştırılmıştır. Ayrıca bu çalışmada uygulanan yöntemlerle daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemler ve farklı sınır şartlarının eklenmesiyle farklı sınır değer problemleri kurulabilir. Buna bağlı olarak bu tip sınır değer probleminin çözümü incelenebilir ve ürettiği diferansiyel operatörün özellikleri benzer şekilde araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Adams, R.A. (1975). *Sobolev Spaces* (First Edition). New York: Academic Press, 10-50.

Adams, R. A. and Fournier J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces* (Second Edition). Canada: Department of Mathematics, The University of British Columbia, Vancouver, 1-35.

Aliev, B. A. (2010). Solvability of a boundary value problem for a second order elliptic differential operatör equation with spectral parameter in the equation and boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(1), 3-14.

Allahverdiev, B. P. and Uğurlu, E. (2015). On dilation, scattering and spectral theory for two-interval singular differential operators. *Bulletin Mathmatiquede la Socit des Sciences Mathmatiques de Roumanie,* 58(4), 383–392.

Amerin, W. O., Hinz, A. M. and Pearson, D. B. (2005). *Sturm-Liouville Theory Past and Present*. Germany: Birkhauser Verlag, 215-235.

Aydemir, K. and Mukhtarov, O. Sh. (2014). Completeness of one two-interval boundary value problem wıth transmıssıon condıtıons. *Miskolc Mathematical Notes,* 15(2), 293-303.

Aydemir, K. and Mukhtarov, O. Sh. (2016). Asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for a multi-point discontinuous Sturm-Liouville problem. *Electronic Journal of Differential Equations,* 2016(131), 1-14.

Belton, A. C. R. (2004). *Functional Analysis* (Revized Edition). Oxford: Lady Margaret Hall, 3-30.

Bergh, J. and Löfström, J. (1976). *Interpolation Spaces* (First Edition). New York: Springer Berlin Heidelberg, 1-85.

Birkhoff, G. (1989). *Ordinary Differential Equations* (Fourth Edition). USA: JohnWiley & Sons. Inc., 1-65.

Boyce, E. W. and Diprima, C. R. (2016). *Elementer Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri*. Muhiddin Uğuz ve Çetin Ürtiş (çev.). Ankara: Palme Yayıncılık, 5-105.

Çakar, Ö. (2007). *Fonksiyonel Analize Giriş 1* (Erwin Kreyszig'den Uyarlanmış Yeniden Düzenlenmiş 7.Baskı). Ankara: A. Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletme Yayınları, 35-85.

Dernek, N. (2013). *Reel Analiz* (Birinci Basım). Ankara: Nobel Yayınları, 5-230.

Imanbaev, N. S. and Sadybekov, M. A. (2014). Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load. *International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014)-AIP Conference Proceedings*, 1611(1), 261-265.

Kandemir, M., Mukhtarov, O. Sh. and Yakubov, Ya. (2009). Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 6(3), 317-338.

Kandemir, M. and Yakubov, Ya. (2010). Regular boundary value problems with a discontinuous coefficient, functional-multipoint conditions, and a linear spectral parameter. *Israel Journal of Mathematics,* 180(1), 255-270.

Kandemir, M. (2012). Irregular boundary value problems for elliptic differential-operator equations with discontinuous coefficients and transmission conditions. *Kuwait journal of science & engineering*, 39(1), 71-97.

Kandemir, M. (2015). *Diferensiyel Denklemler* (Birinci Baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık, 545-624.

Kandemir, M. and Mukhtarov, O. Sh. (2017). Nonlocal Sturm-Liouville problems with integral terms in the boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equa*tions, 2017(11), 1-12.

Kozlov, V. and Maz'ya, V. (1997). *Theory of a Higher Order Sturm-Liouville Equation* (First Edition). Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 125-135.

Krein, S. G. (1971). *Linear Differential Equations in Banach Space* (First Edition). USA: American Mathematical Society Providence, 1-280.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications* (First Edition). USA: JohnWiley & Sons. Inc., 55-65.

Marchenko, V. A. (1986). *Sturm-Liouville Operators and Applications* (First Edition). Almanya: Birkhauser Verlag Basel, 1-37.

Maz'ja, V.G. (1985). *Sobolev Space* (First edition). Berlin: Spinger-Verlağ, 5-250.

Mukhtarov, O. Sh. and Yakubov, S. (2002). Problems for ordinary differential equations with transmission conditions. *Applicable Analysis,* 81(5), 1033-1064.

Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz* (Birinci Baskı). Kütahya: Dumlupınar Ünv. Balcı Yayınları, 75-105.

Naimark, M. A. (1968). *Linear Differential Operators Part II*. Dawson, E.R (trans). Everitt, W. N (eds). U.S.A: Frederic Ungar Publising, 1-45.

Pişkin, E. (2017). *Sobolev Uzayları* (Birinci Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık, 25-75.

Ross, L. S. (1989). *Introduction To Ordinary Differential Equations* (Fourth Edition). USA: John Wiley&Sons, 1-15.

Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real Analysis* (Fourth Edition). China: China Machine Press, 5-175.

Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis* (Third Edition). New York: McGraw-Hill, Book Co., 5-175.

Rudin, W. (1991). *Functional analysis* (second edition). New York: Mc Graw-Hill, Inc., 245-345.

Rynne, B. P. and Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis* (Second Edition). London: Springer Verlag, 1-110.

Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz* (Birinci Baskı). Ankara: Nobel Yayınları, 155-120.

Şuhubi, E.S. (2001). *Fonksiyonel Analiz* (Birinci Baskı). İstanbul: İTÜ Vakfı Yayınları, 145-150.

Tartar, L. (2007). *An İntroduction to Sobolev Spaces and İnterpolation Spaces* (volume 3 of Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana). Berlin: Springer, 1-200.

Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A. (1990). *Equations of Mathematical Physics* (First Edition). New York: Dover Publ., Inc, 503-545.

Yakubov, S. and Yakubov, Ya. (1999). *Differential-Operator Equation Ordinary and Partial Differential Equation* (First Edition). London State New York Washington, State D. C: Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 245-435.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	: Yasemin YILMAZ
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 02.03.1989- Samsun
Medeni hali	: Bekar
e-mail	: yaseminyilmaz7272@gmail.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Mustafa Kemal Üniversitesi	2012
Lisans	Amasya Üniversitesi	2018

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faliyetler

1. International Conference on Mathematicians and Mathematics Education (ICMME-2018).