T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4. MERTEBEDEN REKÜRANS BAĞINTILARINI İÇEREN CIRCULANT MATRİSLERİN NORMU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tevfik YETİŞ

HAZİRAN

TEVFİK YETİŞ	**MATEMATİK ANABİLİM DALI**	**HAZİRAN 2019**

4. MERTEBEDEN REKÜRANS BAĞINTILARINI İÇEREN CIRCULANT MATRİSLERİN NORMU ÜZERİNE

Tevfik YETİŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fatma YEŞİL BARAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2019

TEZ KABUL VE ONAYI

Tevfik YETİŞ tarafından hazırlanan "4. Mertebeden Rekürans Bağıntılarını İçeren Circulant Matrislerin Normu Üzerine" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma YEŞİL BARAN

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ………………..............................

Başkan: Prof. Dr. Naim TUĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………………………...

Üye: Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………….. ……………………

Tez Savunma Tarihi: 17/06/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları getirdiğini onaylıyorum.

………………………..

Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

……………..

Tevfik YETİŞ

17/06/2019

4. MERTEBEDEN REKÜRANS BAĞINTILARINI İÇEREN CIRCULANT MATRİSLERİN NORMU ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Tevfik YETİŞ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Bu çalışmada başlangıç değerleri $\mathcal{T}_0 = a, \mathcal{T}_1 = b, \mathcal{T}_2 = c,\ \mathcal{T}_3 = d$ olan ve $n \geq 4$ için,

$$\mathcal{T}_n = p\mathcal{T}_{n-1} + q\mathcal{T}_{n-2} + r\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_{n-4}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Genelleştirilmiş Tetranacci Dizisi için Binet formülü elde edilerek, bu dizinin ilk n teriminin toplamı formülüze edilmiştir. Genelleştirilmiş Tetranacci sayı dizisi için üreteç fonksiyonuna ulaşılmıştır. Ayrıca elemanları genelleştirilmiş Tetranacci sayı dizisinin elemanlarından oluşan circulant matrisler için bazı matris normları hesaplanmıştır.

Sayfa Adedi :34

Anahtar Kelimeler :Circulant Matris, Tribonacci Sayı Dizisi, Tetranacci Sayı Dizisi, Norm, Genelleştirilmiş Tetranacci Dizisi

Danışman :Dr. Öğr. Üyesi Fatma YEŞİL BARAN

ON THE NORM OF CIRCULANT MATRICES CONTAINING 4TH ORDER RECURRENCE RELATIONS

(M. Sc. Thesis)

Tevfik YETİŞ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

In this study, the sum of first n terms of this series is formulated by obtaining the Binet formula for the generalized Tetranacci sequence $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, whose initial values are $\mathcal{T}_0 = a, \mathcal{T}_1 = b, \mathcal{T}_2 = c$, $\mathcal{T}_3 = d$ and defined by the

$$\mathcal{T}_n = p\mathcal{T}_{n-1} + q\mathcal{T}_{n-2} + r\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_{n-4}$$

recurrence relation for $n \geq 4$. The generating function was obtained for generalized Tetranacci number sequence. In addition, some matrix norms were calculated for the circulant matrices consisting of elements of the generalized Tetranacci number sequence.

PageNumber	:34
KeyWords	:Circulant Matrix, Tribonacci Number Sequence, Tetranacci Number Sequence, Norm, Generalized Tetranacci Sequence
Supervisor	:Asst. Prof. Fatma YEŞİL BARAN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Amasya Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü öğretim üyesi Fatma YEŞİL BARAN yönetiminde hazırlanmış ve Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, literatür hakkında bilgi verilerek çalışmamızın amaç ve kapsamı açıklanmıştır. İkinci bölümde, çalışmada ihtiyaç duyacağımız bazı tanımlar, özel sayı dizilerinin tanımları ve özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde elemanları 3. mertebeden lineer rekürans bağıntısıyla tanımlı Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinden oluşan circulant matrislerin normlarından bahsedilmiştir.

Çalışmamızın esas kısmı olan dördüncü bölümde ise Tetranacci sayı dizisi genelleştirilmiş ve elemanları genelleştirilmiş Tetranacci dizisinden oluşan circulant matrislerin normları elde edilmiştir. Son bölümde de sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Fatma YEŞİL BARAN' a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca hayatım boyunca emeklerini benden esirgemeyen aileme ve Gülçin TOSUN' a, tez dönemi boyunca hep yanımda olan kardeşim Özlem KANIK ve eşi Polat KANIK ile sevgili eşimin kardeşi Burçin ALKOÇ' a, desteğini her zaman hissettiğim ve her zaman yanımda olan eşim Yasemin YETİŞ' e, hayat ve mutluluk kaynağım çocuklarım Hüseyin Erkal YETİŞ ile Melinay Ege YETİŞ' e sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\|\|\boldsymbol{A}\|\|_F$	A matrisinin Euclidean (Frobenius) normu
$\|\|\boldsymbol{A}\|\|_2$	A matrisinin spektral normu
$\|\|\boldsymbol{A}\|\|_1$	A matrisinin maksimum sütun toplam normu
$\|\|\boldsymbol{A}\|\|_\infty$	A matrisinin maksimum satır toplam normu
$\boldsymbol{\lambda_n}$	A_n matrisinin n. özdeğeri
$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{c})$	Circulant matris
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{G_{k,n}}$	Genelleştirilmiş k −Fibonacci dizisi
$\boldsymbol{L_{k,n}}$	k −Lucas dizisi
$\boldsymbol{F_n}$	n. Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{\mathcal{T}_n}$	n. Genelleştirilmiş Tetranacci sayısı
$\boldsymbol{H_n}$	n. Horadam sayısı
$\boldsymbol{J_n}$	n. Jacobsthal sayısı
$\boldsymbol{j_n}$	n. Jacobsthal-Lucas sayısı
$\boldsymbol{L_n}$	n. Lucas sayısı
$\boldsymbol{P_n}$	n. Pell sayısı
$\boldsymbol{Q_n}$	n. Pell-Lucas sayısı
$\boldsymbol{M_n}$	n. Tetranacci sayısı
$\mathbb{N}^+$	Pozitif doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{C_r}(\boldsymbol{c})$	r − Circulant matris
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\boldsymbol{T_n}$	Toeplitz matrisi

1. GİRİŞ

Geçmişte ve günümüzde Fibonacci Sayıları matematiğin temel inceleme ve araştırma konularından biri olmuştur. Bu konu üzerine yapılan çalışmalarda ve her yeni araştırmada da bu sayı dizisi ve bu dizinin oluşturduğu yeni sayı dizilerinin yeni özelliklerinin olduğu görülmüştür. Bu sayı dizisinin tarih boyunca birçok defa keşfedilip bulunmuş olma olasılığı kuvvetlidir fakat İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci bu sayı dizisini geliştirip günümüzde kendi adı ile anılan Fibonacci serisini oluşturmuştur. Bu seride, bir sayı kendinden önceki iki sayının toplamıdır ve $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ şeklinde devam eder. Bu seri içinden bir sayı alınarak bir önceki sayı ile oranlanırsa değeri $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803 \ldots$ olan ve altın ortalama, altın bölüm, altın kesit, ilahi (kutsal) orantı, Fibonacci sayısı ve Phidias ortalaması şeklinde isimlendirilen "*Altın Oran*" formülü elde edilmiştir. Bu oran en eski zamanlardan beri birçok kişinin ilgilendiği bir konu olmuştur. Bu oran bize yaşadığımız dünyada hayranlık uyandıracak şekilde matematiğin güzelliğini ve estetiğini göstermektedir. Öyle ki evrene baktığımızda bu oranı kar tanelerinde, tavus kuşunun kuyruğunda veya çam kozalaklarında, arıların yaptıkları peteklerdeki geometrik yapılarda görebiliriz. Buralarda bulunan perspektifi, orantıyı veya simetriyi hesapladığımızda karşımıza yine altın oran çıkmaktadır.

Tetranacci sayı dizisi her bir terim kendisinden önceki dört terim toplanarak bir sonraki terim elde edilerek devam eden bir sayı dizisidir. Bu dizi Latincede "Quadranacci" , Yunanca' da Tetranacci olarak isimlendirilmektedir. Tetranacci dizisini ilk kez 1963' de Feinberg tanımlamıştır. Waddill ise 1992' de yaptığı "The Tetranacci Sequence and Generalizations" isimli çalışmasında Tetranacci dizisini daha kapsamlı incelemiştir.

Gerolamo Cardano (Girolamo Cardano) 1545' te; o zamanın matematikçilerinin yaptıkları çalışmalardan da yararlanarak üçüncü dereceden denklemlerin "Kardan Çözümü" nü veren, cebir alanındaki ilk Latince eseri "Ars Magna" yı (Büyük Sanat) yayımlamıştır. Bu eserinde, Cardano' nun öğrencisi olan Lodovico Ferrari'nin (1522-1565) bulduğu dördüncü dereceden denklemlerin çözümü de bulunmaktadır.

Günümüzde, matematik ile diğer bilimler arasındaki ilişki artık yadsınamaz bir gerçek olmuştur. Bu ilişkiyi de en iyi mühendislik bilimi ile matematik arasında görmekteyiz. Özellikle circulant matrisler, birçok problemi modellemek için bilimsel çalışmalarda ve mühendislikte çoğu uygulamada karşımıza çıkmaktadır. Circulant matrisler, bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerinde, dijital filtrelerde, haberleşmede, görüntü işlemede, sinyalizasyonda, şifrelemede ve Toeplitz matrislerin çözümünde önemli bir yere sahiptir.

Horadam yaptığı çalışmalarda Horadam dizisini tanımlamıştır (Horadam, 1965).
Lind elemanları Fibonacci sayılarından oluşan circulant matrisleri tanımlamış ve bu matrislerin determinantlarının n. dereceden primitif kökünü hesaplamıştır (Lind, 1970).
Davis, circulant matrislerin çeşitlerini ve özelliklerini vermiştir (Davis, 1979).
Mansour, Horadam sayılarının kuvvetlerinin üreteç fonksiyonları için bir formül elde etmiştir (Mansour, 2004).
Öcal, Tuğlu ve Altınışık genelleştirilmiş $k-$Fibonacci ve Lucas sayılarının kararlılık ve sürekliliğini inceleyip bu diziler için Binet formülünü elde etmişlerdir (Öcal, Tuğlu ve Altınışık, 2005).
Alptekin, E. G., elemanları Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları olan circulant matrislerin özdeğerlerini, determinantlarını ve normlarını hesaplamış ayrıca elemanları bu sayılar olan semicirculant matrislerin Euclid normunu hesaplamıştır (Alptekin, E. G., 2005).
Solak, çalışmalarında elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral ve Euclidean normları için üst ve alt sınırları hesaplamıştır (Solak, 2005).
Alptekin, Mansour ve Tuğlu elemanları Horadam sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral norm ve özdeğerlerini hesaplamışlar ayrıca elemanları bu sayılardan oluşan semicirculant matrislerin Euclidean normunu hesaplamışlardır (Alptekin, Mansour ve Tuğlu, 2007).
Shen ve Cen çalışmalarında, elemanları Fibonacci ve Lucas olan $r-$circulant matrislerin spektral normları için sınırlar elde etmişlerdir (Shen ve Cen, 2010).
Bahşi ve Solak elemanları hyper-Fibonacci ve hyper-Lucas sayıları olan circulant ve $r-$circulant matrislerin spektral normlarını hesaplamıştır (Bahşi ve Solak, 2014).
Tuğlu ve Kızılateş, elemanları genelleştirilmiş $k-$Horadam sayılarını içeren geometrik circulant matrisin spektral normları için üst ve alt sınır problemlerini incelemişler ayrıca elemanları genelleştirilmiş $k-$Horadam sayılarından oluşan $r-$circulant matrisin normlarını hesaplamışlardır (Tuğlu ve Kızılateş, 2015).
Bahşi, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının başlangıç koşullarını değiştirerek Tribonacci dizisinin elemanlarından oluşan circulant matrislerin matris normlarını hesaplamıştır (Bahşi, 2015).
Özkoç ve Ardıyok, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tetranacci dizisi ile bunun tamamlayıcısı olan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tetranacci dizisinin elemanlarından oluşan circulant ve Negacyclic matrislerin spektral ve Euclidean normlarını hesaplamışlardır (Özkoç ve Ardıyok, 2016).

Taşçı ve Acar, başlangıç değerleri Gauss tamsayıları olmak üzere Gaussian Tetranacci sayılarını tanımlamışlardır (Taşçı ve Acar, 2017).

Bu çalışmanın amacı, başlangıç koşulları $M_0 = M_1 = M_2 = 0\ ve\ M_3 = 1$ olan ve $n \geq 0$ için rekürans bağıntısı

$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}$

olan $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tetranacci dizisini, başlangıç değerlerini

$\mathcal{T}_0 = a, \mathcal{T}_1 = b, \mathcal{T}_2 = c, \mathcal{T}_3 = d$

olacak şekilde genelleştirerek rekürans bağıntısı

$\mathcal{T}_n = p\mathcal{T}_{n-1} + q\mathcal{T}_{n-2} + r\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_{n-4}$

şeklinde olan genelleştirilmiş Tetranacci dizisini tanımlamak ve bu dizinin Binet formülünü ve seri açılımını bulup elemanları genelleştirilmiş Tetranacci dizisinden oluşan circulant matrislerin normlarını hesaplamaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmanın temel sonuçlarıyla ilgili ileride verilecek bölümlerde yararlanılacak temel kavramlar verilecektir.

2.1 Dizi

$X \subset \mathbb{R}$, $f: \mathbb{N}^+ \to X$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ sayısı için $f(n) = x_n$ şeklinde tanımlı f fonksiyonuna, X kümesi için bir *dizi* denir.

2.2 Rekürans (İndirgeme) Bağıntısı

(a_n) bir dizi, $k\epsilon\mathbb{N}$ ve $f: \mathbb{N}x\mathbb{Z}^k \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Başlangıç değerleri a_0, a_1, … , a_{k-1} olan ve her $n \geq k$ için;

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $k.$ *dereceden indirgeme bağıntısı* denir. Dizinin bütün elemanları

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$$

ve $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ değerleri ile belirlenir.

2.2.1. Tanım $k\epsilon\mathbb{N}$, $f_0, f_1, \dots, f_k$, $\mathbb{N}$' den $\mathbb{R}$' ye tanımlı fonksiyonlar ve $f_k(n) \neq 0$ olmak üzere her $n \geq k$ için,

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + \cdots + f_k(n)a_{n-k} + f_0(n)$$

biçimindeki rekürans bağıntısına $k.$ *mertebeden lineer rekürans bağıntısı* denir. Eğer $f_1, f_2, \dots, f_k$ fonksiyonları $f_i(n) = b_i$ $(1 \leq i \leq k)$ biçiminde sabit fonksiyonlar ise

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} + f_0(n)$$

şeklindeki rekürans bağıntısına *sabit katsayılı rekürans bağıntısı* denir.

2.2.2. Tanım $I_0 = 0, I_1 = 1, I_2 = 2^0 = 1, I_3 = 2^1 = 2, I_4 = 2^2 = 4, \dots, I_{k-1} = 2^{k-3}$ olmak üzere, $I_n = \sum_{i=0}^{k} I_{n-i-1}$ bağıntısına $k.$ *mertebeden rekürans bağıntısı* denir ve bu bağıntıyla üretilen dizi (I_n) dizisidir. Bu tanımda özel olarak $k = 2$ alındığı zaman Fibonacci dizisi, $k = 3$ alındığında *Tribonacci dizisi* elde edilir.

2.2.3. Tanım (a_k) reel terimli bir dizi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

fonksiyonuna (a_k) dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir.

2.3 Sayı Dizileri

Bu bölümde sayı dizileri, sayı dizilerinin başlangıç değerleri, mertebeleri ve rekürans bağıntıları verilecektir.

Başlangıç değerleri ve rekürans bağıntısındaki katsayıları sabit olan ve $II.$ dereceden rekürans bağıntısına sahip sayı dizilerinden birkaç tanesi aşağıda verilmiştir.

2.3.1. Tanım $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ olmak üzere,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{1}$$

şeklinde tanımlı $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Fibonacci dizisi* ve bu dizinin elemanlarına *Fibonacci sayıları* denir (Vajda, 1989).

(1) ile verilen denklem, sabit katsayılı 2. mertebeden bir denklemdir. Karakteristik denklemi $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$' dir. Karakteristik denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dır.

2.3.1. Özellik Fibonacci sayılarının Binet formülü,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir.

2.3.2. Özellik Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

olarak tanımlıdır.

2.3.2. Tanım $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ olmak üzere; $n \geq 2$ için $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ şeklinde tanımlı $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Lucas dizisi* denir.

2.3.3. Özellik Lucas sayılarına ait Binet formülü $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olmak üzere

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dır.

2.3.4. Özellik Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bağıntılardan bazıları,

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1},$$
$$F_{2n} = F_n L_n,$$
$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$$

şeklindedir.

2.3.3. Tanım $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ olmak üzere,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklinde tanımlanan $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Pell dizisi* denir.

2.3.5. Özellik Pell sayısının ardışık iki sayısının birbiri ile oranı alınırsa

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \sqrt{2} \cong 2{,}414$$

değeri elde edilir ki bu orana, *Gümüş oran* denir.

2.3.4. Tanım $J_0 = 0, J_1 = 1$ olmak üzere,

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

şeklinde tanımlanan $(J_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Jacobsthal dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Jacobsthal sayıları* denir.

Yukarıda tanımlı sayı dizileri aşağıda tanımı verilen Horadam dizisinin özel halleridir.

2.3.5. Tanım $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$ ve $H_0 = a$, $H_1 = b$ olmak üzere

$$H_{n+2} = pH_{n+1} + qH_n \tag{2}$$

şeklinde tanımlanan $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Horadam dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Horadam sayıları* denir (Horadam, 1965).

2.3.6. Özellik Horadam sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \frac{a + x(b - pa)}{1 - px - qx^2} \tag{3}$$

şeklindedir.

2.3.7. Özellik Horadam sayılarının Binet formülü,

$$\Psi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

ve

$$\Gamma = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

olmak üzere

$$A = \frac{b-a\Gamma}{\Psi-\Gamma}$$

ve

$$B = \frac{b-a\Psi}{\Psi-\Gamma}$$

için

$$H_n = A\Psi^n + B\Gamma^n$$

şeklindedir.

Aşağıda verilen çizelgede, Horadam dizisinde p, q, H_0 ve H_1 için alınan bazı özel değerlere karşılık elde edilen sayı dizileri verilmiştir.

Çizelge 2. 1. p, q, H_0 *ve* H_1 değerleri için oluşan özel sayı dizileri

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{H_0}$	$\boldsymbol{H_1}$	**Oluşan Dizi**
1	1	0	1	$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{0,1,1,2,3,\ldots\}$ Fibonacci dizisi
1	1	2	1	$(L_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{2,1,3,4,7,\ldots\}$ Lucas dizisi
2	1	0	1	$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{0,1,2,5,12,\ldots\}$ Pell dizisi
2	1	2	2	$(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{2,2,6,14,34,\ldots\}$ Pell-Lucas dizisi
1	2	0	1	$(J_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{0,1,1,3,5,\ldots\}$ Jacobsthal dizisi
1	2	2	1	$(J_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{2,1,5,7,17,\ldots\}$ Jacobsthal-Lucas dizisi
k	1	0	1	$(F_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$=$\{0,1,k,k^2+1,k^3+3k,\ldots\}$ k-Fibonacci dizisi
k	1	a	b	$(G_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ genelleştirilmiş k-Fibonacci dizisi
k	1	2	k	$(L_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$=$\{2,k,k^2+2,k^3+3k,\ldots\}$ k-Lucas dizisi

Eşitlik (3) de $p, q,$ a ve b ye uygun değerler verilirse, diğer sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları elde edilir. Aşağıdaki çizelgede bu fonksiyonların üreteç fonksiyonları verilmiştir.

Çizelge 2. 2. p, q, a ve b değerleri için oluşan özel sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları

p	q	a	b	**Oluşan Üreteç Fonksiyonu**
1	1	0	1	Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$
1	1	2	1	Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$
2	1	0	1	Pell dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x) = \frac{x}{1-2x-x^2}$
1	2	0	1	Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x) = \frac{x}{1-x-2x^2}$
k	1	0	1	k −Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x) = \frac{x}{1-kx-x^2}$
k	1	2	k	k −Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x) = \frac{2-kx}{1-kx-x^2}$

2.4 Norm

Gerçel sayılarda mutlak değer fonksiyonu olarak tanımlanan norm kavramını, dizilerin yakınsaklığının hesaplanmasında, fonksiyonların sürekliliğini ve limit değerlerini bulmada veya yaklaşım sorularının çözümünde kullanabiliriz. Önce vektör normunun tanımı, daha sonra da matris normunun tanımı ve bununla ilgili bazı temel kavramlar verilecektir.

2.4.1 Vektör normu ve normlu uzay

V, F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı olsun. Eğer $\|.\|: VxV \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

- **i.** $\forall x \in V$ için $\|x\| \geq 0$
- **ii.** $x \in V$ olmak üzere $\|x\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.
- **iii.** $\alpha \in F$ ve $x \in V$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
- **iv.** $x, y \in V$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ dönüşümüne *vektör normu*, üzerinde norm tanımlanmış bir vektör uzayına da *normlu uzay* denir (Horn ve Johnson, 1985).

Vektör normu ile x vektörü pozitif bir sayıya dönüştürülür.

2.4.2 Matris normu

$M_{mxn}(F)$, elemanları F cisminden alınan mxn tipindeki matrislerin kümesi ve $A, B \in M_{mxn}(F)$, $\alpha \in F$ olmak üzere,

i. $0 \leq \|A\|$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
ii. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, $(\alpha \in F)$,
iii. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
iv. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

şartlarını sağlayan $\|.\|: M_{mxn} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ dönüşümüne *matris normu* denir. Bir A matrisinin, normu $\|A\|$ ile gösterilir. Eğer bu aksiyomlardan ilk üçü sağlanıyorsa, norma *genelleştirilmiş matris normu* denir (Horn ve Johnson, 1985).

2.4.3 Norm çeşitleri

A, nxn tipinde bir matris olmak üzere,

i. $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ ifadesine A matrisinin Euclidean (Frobenius) normu,
ii. $A^* = |\bar{A}|^T$ için, $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)} = \sigma_{max}(A)$ ifadesine ise A matrisinin spektral normu,
iii. $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ ifadesine A matrisinin maksimum sütun toplam normu,
iv. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ ifadesine A matrisinin maksimum satır toplam normu,

vardır.

2.4.1. Özellik A, nxn tipinde bir matris olmak üzere yukarıda verilen normlar arasında aşağıdaki özellikler vardır.

i. $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F$
ii. $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$
iii. $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$
iv. $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$

2.5 r −Circulant ve Circulant Matrisler

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız circulant ve r −circulant matrislerin tanımları ve bunlarla ilgili literatür bilgisi verilecektir.

2.5.1 Toeplitz matrisi

Toeplitz matrisi, $T_n = [t_{k,j}; k, j = 0, 1, \dots, n-1]$ için $t_{k,j} = t_{k-j}$ şartını sağlayan nxn tipinden matristir.

Yani,

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & \vdots \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

biçimindeki matrisleri ifade eder. Toeplitz matrisler diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünde, salınım fonksiyonlarında, matematik, fizik ve istatistikte ki birçok problemin çözümünde kullanılır.

$C(c)$ circulant matrisi Toeplitz matrisinin özel bir hali olup tanımı aşağıda yazıldığı gibidir.

2.5.1. Tanım $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T$ olsun. $j - i \equiv k \ (modn)$ olan nxn tipindeki $C(c)$ matrisine *circulant matris* denir. nxn tipindeki $C(c)$ circulant matris,

$$C(c) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir (Davis, 1979).

Karner, Schneid ve Ueberhuber sağ ve sol circulant matrisleri tanımlamışlardır (Karner, Schneid ve Ueberhuber, 2003).

Pollock, circulant matrislerin spektral ayrışımını elde etmiştir ayrıca simetrik circulant matrisleri tanımlamış ve bu matrisin Fourier dönüşümlerini incelemiştir (Pollock, 2002).

Bu matrislerin sayısal analizde, optimizasyonda, sayısal görüntü işlemede, matematiksel istatistik de ve modern teknoloji alanlarında birçok uygulamaları vardır.

2x2, 3x3 ve 4x4 boyutundaki genel circulant matrisleri aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$C=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_4 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_1 \end{bmatrix}$$

2.5.2. Tanım $c=(c_0,c_1,\dots,c_{n-1})^r$ ve $i,j=1,2,\dots,n$ için

$$C_{ij}=\begin{cases} c_{j-i} & , \quad j\geq i \\ r.c_{n+j-i}, & \quad j<i \end{cases}$$

olmak üzere nxn tipindeki $C_r(c)=[C_{ij}]$ matrisine r −*circulant matris* denir ve

$$C_r(c)=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ rc_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rc_1 & rc_2 & rc_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. r −circulant matrislerde $r=1$ alınırsa; circulant matrisler elde edilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN CIRCULANT MATRİSLERİN NORMU

3.1 3. Mertebeden Fibonacci ve Lucas Sayıları

Feinberg, Tribonacci sayıları ile ilk çalışan kişidir ve çalışmasında, Tribonacci dizisinin rekürans bağıntısı üzerinden yeni bir bağıntı oluşturmuştur (Feinberg, 1963).

Spickerman ise Tribonacci dizisinin üreteç fonksiyonu yardımıyla Tribonacci sayılarının Binet benzeri formülünü elde etmiştir (Spickerman, 1982).

3.1.1. Tanım Başlangıç koşulları $T_0 = 0,\ T_1 = T_2 = 1$ olan ve

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

rekürans bağıntısını sağlayan $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Tribonacci dizisi* denir.
Karakteristik denklemi $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ şeklinde olan denklemin kökleri γ_1, γ_2 ve γ_3 olmak üzere T_n dizisinin Binet formülü,

$$T_n = \frac{\gamma_1^{n+1}}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)} + \frac{\gamma_2^{n+1}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma_3)} + \frac{\gamma_3^{n+1}}{(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)}$$

şeklindedir (Spickerman, 1982).
Burada, γ_1, γ_2 ve γ_3 değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\gamma_1 = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$\gamma_2 = \frac{1 + w\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$\gamma_3 = \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w^3\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$\mathrm{w} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

dir.
(T_n) Tribonacci dizisinin ilk $n+1$ teriminin toplamı,

$$\sum_{i=0}^{n} T_i = \frac{T_{n+2} + T_n - 1}{2}$$

şeklindedir.

3.1.1. Teorem $T = C(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$ matrisinin spektral normu,

$$\|T\|_2 = \frac{T_{n+1} + T_{n-1} - 1}{2}$$

dir (Bahşi, 2015).

$p, q \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere başlangıç koşulları $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ olan

$$U_{n+1} = pU_n + qU_{n-1}$$

şeklindeki (U_n) dizisi ile başlangıç koşulları $V_0 = 2$ $V_1 = p$ olan

$$V_{n+1} = pV_n + qV_{n-1}$$

(V_n) dizisi tanımlansın.

3.1.2. Teorem $U = C(U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$ matrisinin spektral normu,

$$\|U\|_2 = \frac{1 - U_n - qU_{n-1}}{1 - p - q}$$

şeklindedir (Bahşi, 2015).

3.1.3. Teorem $V = C(V_0, V_1, \dots, V_{n-1})$ circulant matrisinin spektral normu,

$$\|V\|_2 = \frac{1 - p - V_n - qV_{n-1}}{1 - p - q}$$

şeklindedir (Bahşi, 2015).

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TETRANACCI SAYI DİZİSİ

4.1 Cardano Formülü

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin diskriminantı,

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

olmak üzere,

$$D = Q^3 + R^2$$

şeklinde tanımlıdır.

Buradan denklemin kökleri,

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

olarak elde edilir ki bu formül *Cardano Formülü* olarak bilinir (Cardano, 1545).

4.2 Quartic Denklemlerin Kökünün Bulunması

Quartic formül Lodovici Ferrari (1522-1565) tarafından 1540 yılında kübik denklemlerin çözümünün hemen ardından keşfedilmiştir. Quartic denklem;

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$

şeklinde tanımlı denklemlere denir. Bu denklemin çözümü yapılırken, $x = y - \frac{p}{4}$ dönüşümü yapılarak x^3 lü terimi yok edilir.

$$a = q - \frac{3p^2}{8}$$

$$b = r + \frac{p^3}{8} - \frac{pq}{2}$$

$$c = s - \frac{3p^4}{256} + \frac{p^2q}{16} - \frac{pr}{2}$$

için,

$y^4 + ay^2 + by + c = 0$ şekline dönüşür.

p, q, r ve s değerleri $z^3 - qz^2 + (pr - 4s)z + (4qs - r^2 - p^2 s) = 0$ denkleminde yerine yazılarak 3. dereceden bir denklem elde edilir.

Denklemin z_1 reel kökü *Cardano Formülü* ile çözülür. z_1 reel kökü için Quartic denklemin 4 tane kökü vardır. Bunlar,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{p}{4} + \frac{1}{2}(R + D) \\
x_2 &= -\frac{p}{4} + \frac{1}{2}(R - D) \\
x_3 &= -\frac{p}{4} - \frac{1}{2}(R - E) \\
x_4 &= -\frac{p}{4} - \frac{1}{2}(R + E)
\end{aligned}
$$

olup burada,

$$
R = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q + z_1}
$$

$$
D = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4}p^2 - R^2 - 2q + \frac{1}{4}(4pq - 8r - p^3)R^{-1}} & R \neq 0 \; ise \\ \sqrt{\frac{3}{4}p^2 - 2q + 2\sqrt{z_1^2 - 4s}} & R = 0 \; ise \end{cases}
$$

$$
E = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4}p^2 - R^2 - 2q - \frac{1}{4}(4pq - 8r - p^3)R^{-1}} & R \neq 0 \; ise \\ \sqrt{\frac{3}{4}p^2 - 2q - 2\sqrt{z_1^2 - 4s}} & R = 0 \; ise \end{cases}
$$

dır.

4.3 Tetranacci Sayıları için Binet Formülü

4.3.1. Tanım Başlangıç koşulları $M_0 = M_1 = M_2 = 0 \; ve \; M_3 = 1$ olan ve $n \geq 4$ için

$$M_n \;=\; M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}$$

şeklinde tanımlanan $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Tetranacci Dizisi* denir ve bu dizinin elemanlarına da *Tetranacci Sayıları* denir (Waddill, 1992).

Tetranacci sayıları $0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, \ldots$ şeklindedir.

4.3.2. Tanım $n \geq 4$ olmak üzere $M_0 = M_1 = M_2 = 0,\; M_3 = 1$ başlangıç değerleri ile tanımlı,

$$M_n \;=\; M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}$$

rekürans bağıntısına sahip $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tetranacci dizisi için Binet formülü,

$$M_n \;=\; \frac{\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \frac{\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} + \frac{\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)} + \frac{\delta^n}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

şeklindedir (Zavari, 2015).

Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ karakteristik denklemin kökleridir.

$$R \;=\; \sqrt{\frac{11}{12} + \left(-\frac{65}{54} + \sqrt{\frac{563}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{65}{54} - \sqrt{\frac{563}{108}}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\alpha \;=\; \frac{1}{4} + \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - R^2 + \frac{13}{4}R^{-1}}$$

$$\beta \;=\; \frac{1}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - R^2 + \frac{13}{4}R^{-1}}$$

$$\gamma \;=\; \frac{1}{4} - \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - R^2 - \frac{13}{4}R^{-1}}$$

$$\delta \;=\; \frac{1}{4} - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - R^2 - \frac{13}{4}R^{-1}}$$

dir.

4.3.3. Tanım $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tetranacci dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$M(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n = \frac{x^3}{1 - x - x^2 - x^3 - x^4}$$

şeklindedir (Waddill, 1992).

Bu tez çalışmasının amacı, literatürde var olan başlangıç koşulları

$M_0 = M_1 = M_2 = 0 \; ve \; M_3 = 1$ olan ve rekürans bağıntısı $n \geq 4$ için

$$M_n \;=\; M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}$$

şeklinde tanımlı $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tetranacci Dizisini, başlangıç koşulları $\mathcal{T}_0 = a,\; \mathcal{T}_1 = b,\; \mathcal{T}_2 = c,$ $\mathcal{T}_3 = d$ olan ve $n \geq 4$ için rekürans bağıntısını

$$\mathcal{T}_n = p\mathcal{T}_{n-1} + q\mathcal{T}_{n-2} + r\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_{n-4}$$

şeklinde genelleştirerek yeni bir $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genelleştirilmiş Tetranacci dizisi oluşturmak ve bu diziye ait birtakım özellikler elde etmektir.

4.4 Genelleştirilmiş Tetranacci Sayıları için Binet Formülü

4.4.1. Tanım Başlangıç değerleri $\mathcal{T}_0 = a,\ \mathcal{T}_1 = b,\ \mathcal{T}_2 = c,\ \mathcal{T}_3 = d$ olan ve $n \geq 4$ için $1 - p - q - r - s \neq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{T}_n = p\mathcal{T}_{n-1} + q\mathcal{T}_{n-2} + r\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_{n-4} \tag{4}$$

şeklinde tanımlanan $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine Genelleştirilmiş Tetranacci dizisi denir.

4.4.1. Teorem $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Genelleştirilmiş Tetranacci sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\mathcal{T}(x) = \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4}$$

şeklindedir.

İspat

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^n$$

olacak şekilde $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\mathcal{T}(x)$ olsun.

$$\begin{aligned}
(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^n &= \sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^n - p\sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^{n+1} - q\sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^{n+2} \\
&\quad -q\sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^{n+2} - r\sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^{n+3} - s\sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^{n+4} \\
&= \sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathcal{T}_n x^n - p\sum_{n\geq 1}^{\infty} \mathcal{T}_{n-1} x^n - q\sum_{n\geq 2}^{\infty} \mathcal{T}_{n-2} x^n \\
&\quad - r\sum_{n\geq 3}^{\infty} \mathcal{T}_{n-3} x^n - s\sum_{n\geq 4}^{\infty} \mathcal{T}_{n-4} x^n \\
&= \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 x + \mathcal{T}_2 x^2 + \mathcal{T}_3 x^3 - p[\mathcal{T}_0 x + \mathcal{T}_1 x^2 + \mathcal{T}_2 x^3] \\
&\quad -q[\mathcal{T}_0 x^2 + \mathcal{T}_1 x^3] - r\mathcal{T}_0 x^3 \\
&\quad -\sum_{n\geq 4}^{\infty} \{\mathcal{T}_n - p\mathcal{T}_{n-1} - q\mathcal{T}_{n-2} - r\mathcal{T}_{n-3} - s\mathcal{T}_{n-4}\} x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. (4) den

$\mathcal{T}_n - p\mathcal{T}_{n-1} - q\mathcal{T}_{n-2} - r\mathcal{T}_{n-3} - s\mathcal{T}_{n-4} = 0$ olup,

$\mathcal{T}_0 = a,\ \mathcal{T}_1 = b,\ \mathcal{T}_2 = c,\ \mathcal{T}_3 = d$ başlangıç değerleri yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{T}_n x^n &= a + bx + cx^2 + dx^3 - p(ax + bx^2 + cx^3) \\
&\quad -q(ax^2 + bx^3) - rax^3 \\
&= a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) \\
&\quad -x^3(d - cp - bq - ar)
\end{aligned}
$$

olur ki; bu

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{T}_n x^n = \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4}
$$

demektir.

O halde $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$
\mathcal{T}(x) = \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4}
$$

şeklinde elde edilir.

$\mathcal{T}(x)$ fonksiyonunda başlangıç koşulları ve katsayılar için alınan bazı özel değerlere karşılık elde edilen sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları verilmiştir.

$a = 0,\ b = c = 1,\ d = 2$ ve $p = q = 1,\ r = s = 0$ alınırsa Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu,

$a = 2,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 4$ ve $p = q = 1,\ r = s = 0$ alınırsa Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu,

$a = 0,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 6$ ve $p = 2,\ q = 1,\ r = s = 0$ alınırsa Pell dizisinin üreteç fonksiyonu,

$a = 0,\ b = c = 1,\ d = 3$ ve $p = 1,\ q = 2,\ r = s = 0$ alınırsa Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu,

$a = 0,\ b = 1,\ c = k,\ d = k^2 + 1$ ve $p = k,\ q = 1,\ r = s = 0$ alınırsa

$k -$Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu,

$a = b = c = 0$ ve $d = 1$ ve $p = q = r = s = 1$ alınırsa Tetranacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu,

elde edilir.

4.4.2. Teorem α, β, γ ve δ; $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere Binet formülü,

$$\mathcal{T}_n = \frac{A\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \frac{B\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} + \frac{C\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)} + \frac{D\delta^n}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned}
D &= d - cp - bq - ar \\
C &= (\gamma-\delta)[c - bp - aq] + D \\
B &= -\frac{(b-ap)[(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)] - C(\delta-\beta)(\delta-\gamma) - D(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}{(\gamma-\delta)^2} \\
A &= \frac{a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta) + B(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\delta) - C(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta) + D(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat

$1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4 = 0$ denkleminin kökleri α, β, γ ve δ olmak üzere

$$\mathcal{T}(x) = \frac{K}{(1-\alpha x)} + \frac{L}{(1-\beta x)} + \frac{M}{(1-\gamma x)} + \frac{N}{(1-\delta x)}$$

şeklinde basit kesirlere ayırma yöntemi uygulanırsa,

$$\mathcal{T}(x) = \frac{\overbrace{K(1-\beta x)(1-\gamma x)(1-\delta x)}^{(i)} + \overbrace{L(1-\alpha x)(1-\gamma x)(1-\delta x)}^{(ii)} + \overbrace{M(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\delta x)}^{(iii)} + \overbrace{N(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)}^{(iv)}}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)(1-\delta x)}$$

olur ki

$$\begin{array}{lll}
(i) & K[1-\gamma x-\beta x+\beta\gamma x^2-\delta x+\gamma\delta x^2-\beta\delta x^2-\beta\gamma\delta x^3] = & K - Kx(\beta+\gamma+\delta) + Kx^2(\beta\gamma+\gamma\delta+\beta\delta) - Kx^3\beta\gamma\delta \\
(ii) & L[1-\gamma x-\alpha x+\alpha\gamma x^2-\delta x+\gamma\delta x^2+\alpha\delta x^2-\alpha\gamma\delta x^3] = & L - Lx(\alpha+\gamma+\delta) + Lx^2(\alpha\gamma+\gamma\delta+\alpha\delta) - Lx^3\alpha\gamma\delta \\
(iii) & M[1-\alpha x-\beta x+\alpha\beta x^2-\delta x+\alpha\delta x^2+\beta\delta x^2-\alpha\beta\delta x^3] = & M - Mx(\alpha+\beta+\gamma) + Mx^2(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta) - Mx^3\alpha\beta\delta \\
(iv) & N[1-\alpha x-\beta x+\alpha\beta x^2-\gamma x+\alpha\gamma x^2+\beta\gamma x^2-\alpha\beta\gamma x^3] = & N - Nx(\alpha+\beta+\gamma) + Nx^2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) - Nx^3\alpha\beta\gamma
\end{array}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x) &= \frac{a + x(b-ap) + x^2(c-bp-aq) + x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4} \\
&= \frac{K(1-\beta x)(1-\gamma x)(1-\delta x) + L(1-\alpha x)(1-\gamma x)(1-\delta x) + M(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\delta x) + N(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)(1-\delta x)}
\end{aligned}$$

olduğundan aynı dereceli terimlerin eşitliğinden,

$$\begin{cases}
K + L + M + N = a \\
-K(\beta+\gamma+\delta) - L(\alpha+\gamma+\delta) - M(\alpha+\beta+\delta) - N(\alpha+\beta+\gamma) = b - ap \\
K(\beta\gamma+\gamma\delta+\beta\delta) + L(\alpha\gamma+\gamma\delta+\alpha\delta) + M(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta) + N(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = c - bp - aq \\
-K\beta\gamma\delta - L\alpha\gamma\delta - M\alpha\beta\delta - N\alpha\beta\gamma = d - cp - bq - ar
\end{cases}$$

şeklinde lineer denklem sistemine ulaşılır. Bilinmeyenler K, L, M, N olmak üzere

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
-(\beta+\gamma+\delta) & -(\alpha+\gamma+\delta) & -(\alpha+\beta+\delta) & -(\alpha+\beta+\gamma) \\
\beta\gamma+\gamma\delta+\beta\delta & \alpha\gamma+\chi\delta+\alpha\delta & \alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta & \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \\
-\beta\gamma\delta & -\alpha\gamma\delta & -\alpha\beta\delta & -\alpha\beta\gamma
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} K \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a \\ b-ap \\ c-bp-aq \\ d-cp-bq-ar \end{bmatrix}$$

matris sistemi elde edilir. Matris, Gauss-Eliminasyon yöntemi ile eşelon hale indirgenirse

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \delta-\alpha \\ 0 & 0 & \gamma^2+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma & \delta^2+\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta^3-\alpha\delta^2-\beta\delta^2-\gamma\delta^2-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \delta-\alpha \\ 0 & 0 & \gamma^2+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma & \delta^2+\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta^3-\alpha\delta^2-\beta\delta^2-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b-ap \\ c-bp-aq \\ d-cp-bq-ar \end{bmatrix}$$

ifadesine ulaşılır.

$$N(\delta^3-\alpha\delta^2-\beta\delta^2-\gamma\delta^2-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta) \quad = \quad d-cp-bq-ar$$

elde edilir.

$$\delta^3-\alpha\delta^2-\beta\delta^2-\gamma\delta^2-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta \quad = \quad (\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)$$

olduğundan

$$N \quad = \quad \frac{d-cp-bq-ar}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

elde edilmiş olur.

$$D \quad = \quad d-cp-bq-ar$$

olmak üzere,

$$N \quad = \quad \frac{D}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde

$$M[\gamma^2+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma]+N[\delta^2+\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\delta] \quad = \quad c-bp-aq$$

olur.

$$\gamma^2+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma \quad = \quad (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$$

ve

$$N \quad = \quad \frac{D}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

olduğundan

$$M[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]+\frac{D[\delta^2+\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\delta]}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)} \quad = \quad c-bp-aq$$

elde edilir. Burada;

$$\frac{[\delta^2+\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\delta]}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)} = -\frac{1}{(\gamma-\delta)}$$

olup

$$M[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)] = c-bp-aq+\frac{D}{\gamma-\delta}=\frac{(\gamma-\delta)[c-bp-aq]+D}{(\gamma-\delta)}$$

$$M = \frac{(\gamma-\delta)[c-bp-aq]+D}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$

olarak elde edilir.

$$C = (\gamma-\delta)[c-bp-aq]+D$$

olmak üzere,

$$M = \frac{C}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$

şeklinde olur.

$$b-ap = L(\beta-\alpha)+M(\gamma-\alpha)+N(\delta-\alpha)$$

olup gerekli düzenlemeler yapılır ve M , N ’ nin değerleri yerlerine yazılırsa

$$L(\beta-\alpha) = b-ap-\frac{C}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}(\gamma-\alpha)-\frac{D}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}(\delta-\alpha)$$

$$= \frac{(b-ap)[(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)]-C(\delta-\beta)(\delta-\gamma)-D(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}{(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

olup

$$L = \frac{(b-ap)[(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)]-C(\delta-\beta)(\delta-\gamma)-D(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

$$= -\frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\left[\frac{(b-ap)[(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)]-C(\delta-\beta)(\delta-\gamma)-D(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\right]$$

elde edilir.

$$B = -\frac{(b-ap)[(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)]-C(\delta-\beta)(\delta-\gamma)-D(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}{(\gamma-\delta)^2}$$

olmak üzere,

$$L = \frac{B}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$

şeklinde yazılabilir.

$$K+L+M+N = a$$

olup;

$$K = a-L-M-N$$

dir. L, M, N değerleri yerlerine yazılıp gerekli düzeltmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
K &= a-\frac{B}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}-\frac{C}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}-\frac{D}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\\
&= a+\frac{B}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}-\frac{C}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)}+\frac{D}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\\
&= \frac{a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)+B(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)-C(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)+D(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ki burada

$$A = \frac{a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)+B(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)-C(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)+D(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}$$

olmak üzere,

$$K = \frac{A}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

olarak bulunmuş olur.

Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x) &= \frac{A}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\frac{1}{(1-\alpha x)}+\frac{B}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\frac{1}{(1-\beta x)}+\frac{C}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\frac{1}{(1-\gamma x)}\\
&\quad+\frac{D}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\frac{1}{(1-\delta x)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n$$

$$\frac{1}{1-\beta x} = \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n$$

$$\frac{1}{1-\gamma x} = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n x^n$$

$$\frac{1}{1-\delta x} = \sum_{n=0}^{\infty}\delta^n x^n$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x) &= \frac{A}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\frac{1}{(1-\alpha x)}+\frac{B}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\frac{1}{(1-\beta x)}+\frac{C}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\frac{1}{(1-\gamma x)}\\
&\quad+\frac{D}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\frac{1}{(1-\delta x)}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x) &= \frac{A}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n+\frac{B}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\\
&\quad+\frac{C}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n x^n+\frac{D}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n x^n
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{A\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \frac{B\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} + \frac{C\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)} + \frac{D\delta^n}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\}x^n$$

elde edilir ki bu ise

$$\mathcal{T}_n = \frac{A\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \frac{B\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} + \frac{C\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)} + \frac{D\delta^n}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

demektir. Bu formül Genelleştirilmiş Tetranacci Dizisinin Binet Formülüdür.

(4) nolu denklemdeki $\mathcal{T}_n$ fonksiyonunda, başlangıç koşulları ve katsayılar için bazı özel değerler seçilirse literatürde var olan sayı dizilerinin Binet formüllerine ulaşılır.

$\mathcal{T}_0 = a = 0, \mathcal{T}_1 = b = 0, \mathcal{T}_2 = c = 0$ ve $\mathcal{T}_3 = d = 1$ ve $p = q = r = s = 1$ seçilirse,

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}$$

rekürans bağıntısına sahip $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tetranacci dizisi elde edilir ve bu dizinin Binet formülü,

$$M_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \frac{\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} + \frac{\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)} + \frac{\delta^n}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

olarak bulunur. Bu eşitlik ise Özkoç ve Ardıyok (2016) makalesinde elde edilmiştir.

$\mathcal{T}_0 = a = 0, \mathcal{T}_1 = b = 0, \mathcal{T}_2 = c = 1$ ve $p = q = r = 1$ ve $s = 0$ seçilirse,

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

rekürans bağıntısına sahip $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tribonacci dizisi elde edilir ve bu dizinin Binet formülü,

$$T_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

olarak bulunur. Bu Binet formülü ise Spickerman (1982) makalesinde elde edilmiştir.

$\mathcal{T}_0 = a = 0,\ \mathcal{T}_1 = b = 1,$ ve $p = q = 1$ ve $r = s = 0$ seçilirse,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

rekürans bağıntısına sahip $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi elde edilir ve bu dizinin Binet formülü,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir ki bu ise Fibonacci sayıları için bilinen Binet formülüdür.

4.5 Genelleştirilmiş Tetranacci Sayılarının Sonlu Toplamı

4.5.1. Teorem $(\mathcal{T}_n)$ dizisi için;

Burada,

$$\theta = p+q+r+s$$

$$\theta - p = q+r+s$$

ve $1-\theta \neq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{i=4}^{n} \mathcal{T}_i = \frac{1}{1-\theta}\{-\theta\mathcal{T}_n - (\theta-p)\mathcal{T}_{n-1} - (r+s)\mathcal{T}_{n-2} - s\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_0 + (r+s)\mathcal{T}_1 + (\theta-p)\mathcal{T}_2 + \theta\mathcal{T}_3\} \quad (5)$$

dır.

İspat

Denklem (4) den,

$$\mathcal{T}_n = p\mathcal{T}_{n-1} + q\mathcal{T}_{n-2} + r\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_{n-4}$$

dir.

$$\mathcal{T}_n - p\,\mathcal{T}_{n-1} = q\mathcal{T}_{n-2} + r\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_{n-4}$$

olup sırasıyla n ifadesine $4, 5, \ldots$ değerleri verildiğinde

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_4 - p\,\mathcal{T}_3 &= q\mathcal{T}_2 + r\mathcal{T}_1 + s\mathcal{T}_0\\
\mathcal{T}_5 - p\,\mathcal{T}_4 &= q\mathcal{T}_3 + r\mathcal{T}_2 + s\mathcal{T}_1\\
\mathcal{T}_6 - p\,\mathcal{T}_5 &= q\mathcal{T}_4 + r\mathcal{T}_3 + s\mathcal{T}_2\\
\mathcal{T}_7 - p\,\mathcal{T}_6 &= q\mathcal{T}_5 + r\mathcal{T}_4 + s\mathcal{T}_3\\
. &\qquad .\\
. &\qquad .\\
. &\qquad .\\
\mathcal{T}_{n-2} - p\,\mathcal{T}_{n-3} &= q\mathcal{T}_{n-4} + r\mathcal{T}_{n-5} + s\mathcal{T}_{n-6}\\
\mathcal{T}_{n-1} - p\,\mathcal{T}_{n-2} &= q\mathcal{T}_{n-3} + r\mathcal{T}_{n-4} + s\mathcal{T}_{n-5}\\
\mathcal{T}_n - p\,\mathcal{T}_{n-1} &= q\mathcal{T}_{n-2} + r\mathcal{T}_{n-3} + s\mathcal{T}_{n-4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafı taraf tarafa toplanırsa;

$$\mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5 + \cdots + \mathcal{T}_n - p(\mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 + \ldots + \mathcal{T}_{n-1}) = (q+r+s)(\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \ldots + \mathcal{T}_{n-4}) + (q+r)\mathcal{T}_{n-3} + q\mathcal{T}_{n-2} + (r+s)\mathcal{T}_1 + s\mathcal{T}_0$$

elde edilir. $\mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5, \ldots, \mathcal{T}_n$ parantezine alınırsa;

$$\mathcal{T}_4(1-p-q-r-s)+\mathcal{T}_5(1-p-q-r-s)+\cdots+\ \mathcal{T}_{n-4}(1-p-q-r-s)$$
$$+\mathcal{T}_{n-3}(1-p-q-r)+\mathcal{T}_{n-2}(1-p-q)+\mathcal{T}_{n-1}(1-p)+\mathcal{T}_n=\mathcal{T}_3(p+q+r+s)$$
$$+\mathcal{T}_2(q+r+s)$$
$$+\mathcal{T}_1(r+s)+\mathcal{T}_0 s$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifadeyi toplam sembolü ile ifade edersek

$$\sum_{i=4}^{n-4}(1-p-q-r-s)\mathcal{T}_i+(1-p-q-r)\mathcal{T}_{n-3}+(1-p-q)\mathcal{T}_{n-2}+(1-p)\mathcal{T}_{n-1}+\mathcal{T}_n$$
$$=s\mathcal{T}_0+(r+s)\mathcal{T}_1+(q+r+s)\mathcal{T}_2+(p+q+r+s)\mathcal{T}_3$$

şekline dönüşür. Buradan, $\sum_{i=4}^{n}\mathcal{T}_i$

toplamını bulmak için son toplamın her iki tarafına

– s tane $\mathcal{T}_{n-3}$

– $(r+s)$ tane $\mathcal{T}_{n-2}$

– $(q+r+s)$ tane $\mathcal{T}_{n-1}$

– $(p+q+r+s)$ tane $\mathcal{T}_n$

eklenirse

$$\sum_{i=4}^{n}(1-p-q-r-s)\mathcal{T}_i = -s\mathcal{T}_{n-3}-(r+s)\mathcal{T}_{n-2}-(q+r+s)\mathcal{T}_{n-1}-(p+q+r+s)\mathcal{T}_n$$
$$+s\mathcal{T}_0+(r+s)\mathcal{T}_1+(q+r+s)\mathcal{T}_2+(p+q+r+s)\mathcal{T}_3$$

olur.

Burada,

$$\theta = p+q+r+s$$
$$\theta-p = q+r+s$$

değerlerini verirsek, $1-\theta\neq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{i=4}^{n}\mathcal{T}_i = \frac{1}{1-\theta}\{-\theta\mathcal{T}_n-(\theta-p)\mathcal{T}_{n-1}-(r+s)\mathcal{T}_{n-2}-s\mathcal{T}_{n-3}+s\mathcal{T}_0+(r+s)\mathcal{T}_1$$
$$+(\theta-p)\mathcal{T}_2+\theta\mathcal{T}_3\}$$

elde edilir.

4.6 Genelleştirilmiş Tetranacci Sayılarını İçeren Circulant Matrislerin Normu

Elemanları $(\mathcal{T}_n)$ dizisinin elemanlarından oluşan $A = circ(\mathcal{T}_n)$ circulant matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_0 & \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 & \cdots & \mathcal{T}_{n-1} \\ \mathcal{T}_{n-1} & \mathcal{T}_0 & \mathcal{T}_1 & \cdots & \mathcal{T}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_3 & \cdots & \mathcal{T}_0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

şeklindedir.

4.6.1. Teorem Elemanları $(\mathcal{T}_n)$ dizisinin elemanlarından oluşan $A = circ(\mathcal{T}_n)$ circulant matrisi için, A matrisinin maksimum sütun toplam normu, $1-\theta \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \tfrac{1}{1-\theta}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1} - (\theta-p)\mathcal{T}_{n-2} - (r+s)\mathcal{T}_{n-3} - s\mathcal{T}_{n-4} + (1-p-q-r)\mathcal{T}_0 \\ &\quad +(1-p-q)\mathcal{T}_1 + (1-p)\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3\} \end{aligned} \tag{6}$$

şeklindedir.

İspat

$A = circ(\mathcal{T}_n)$ olsun.

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \\ &= \max_{1\le j\le n}\{a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}\} \\ &= \max_{1\le j\le n}\{\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_{n-1}\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{T}_i \end{aligned}$$

dir.

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \sum_{i=4}^{n-1}\mathcal{T}_i$$

olup (5) deki eşitlikten; $1-\theta \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i &= \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \frac{1}{1-\theta}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1} - (\theta-p)\mathcal{T}_{n-2} - (r+s)\mathcal{T}_{n-3} - s\mathcal{T}_{n-4} \\ &\quad +s\mathcal{T}_0 + (r+s)\mathcal{T}_1 + (\theta-p)\mathcal{T}_2 + \theta\mathcal{T}_3\} \\ &= \tfrac{1}{1-\theta}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1} - (\theta-p)\mathcal{T}_{n-2} - (r+s)\mathcal{T}_{n-3} - s\mathcal{T}_{n-4}\} \\ &\quad + \left(\frac{r+s}{1-\theta}+1\right)\mathcal{T}_1 + \left(\frac{\theta-p}{1-\theta}+1\right)\mathcal{T}_2 + \left(\frac{\theta}{1-\theta}+1\right)\mathcal{T}_3 \end{aligned}$$

olur ki

$$\|A\|_1 = \frac{1}{1-\theta}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1} - (\theta - p)\mathcal{T}_{n-2} - (r+s)\mathcal{T}_{n-3} - s\mathcal{T}_{n-4} + (1-p-q-r)\mathcal{T}_0$$
$$+(1-p-q)\mathcal{T}_1 + (1-p)\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3\}$$

dır.

4.6.2. Teorem $A = circ(\mathcal{T}_n)$ circulant matrisi için maksimum satır toplam normu $1-\theta \neq 0$ olmak üzere,

$$\|A\|_\infty = \frac{1}{1-\theta}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1} - (\theta - p)\mathcal{T}_{n-2} - (r+s)\mathcal{T}_{n-3} - s\mathcal{T}_{n-4} + (1-p-q-r)\mathcal{T}_0$$
$$+(1-p-q)\mathcal{T}_1 + (1-p)\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3\}$$

şeklindedir.

İspat

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\
&= \max_{1\le i\le n}\{a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}\} \\
&= \max_{1\le i\le n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}_i
\end{aligned}$$

olur ki (5) ve (6) daki eşitliklerden,

$$\|A\|_\infty = \|A\|_1 = \frac{1}{1-\theta}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1} - (\theta - p)\mathcal{T}_{n-2} - (r+s)\mathcal{T}_{n-3} - s\mathcal{T}_{n-4}$$
$$+(1-p-q-r)\mathcal{T}_0 + +(1-p-q)\mathcal{T}_1 + (1-p)\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3\}$$

şeklindedir.

4.6.3. Teorem $A = circ(\mathcal{T}_n)$ circulant matrisinin *Euclidean* normu,

$$\begin{aligned}
\|A\|_F ={}& \frac{A^2}{[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]^2}\left\{\frac{1-(\alpha^2)^n}{1-\alpha^2}\right\} + \frac{B^2}{[(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]^2}\left\{\frac{1-(\beta^2)^n}{1-\beta^2}\right\} \\
&+ \frac{C^2}{[(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)]^2}\left\{\frac{1-(\gamma^2)^n}{1-\gamma^2}\right\} + \frac{D^2}{[(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)]^2}\left\{\frac{1-(\delta^2)^n}{1-\delta^2}\right\} \\
&+ \frac{2AB}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\left\{\frac{1-(\alpha\beta)^n}{1-\alpha\beta}\right\} \\
&+ \frac{2AC}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\left\{\frac{1-(\alpha\gamma)^n}{1-\alpha\gamma}\right\} \\
&+ \frac{2AD}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\left\{\frac{1-(\alpha\delta)^n}{1-\alpha\delta}\right\}
\end{aligned}$$

$$+\frac{2BC}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\left\{\frac{1-(\beta\gamma)^n}{1-\beta\gamma}\right\}$$

$$+\frac{2BD}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\left\{\frac{1-(\beta\delta)^n}{1-\beta\delta}\right\}$$

$$+\frac{2CD}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\left\{\frac{1-(\gamma\delta)^n}{1-\gamma\delta}\right\}$$

şeklindedir.

İspat

$A = circ(\mathcal{T}_n)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\|A\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{|a_{i1}|^2+|a_{i2}|^2+\cdots+|a_{in}|^2\} \\
&= \{|a_{11}|^2+|a_{12}|^2+\cdots+|a_{1n}|^2+|a_{21}|^2+|a_{22}|^2+\cdots+|a_{2n}|^2 \\
&\quad +\ \ldots+|a_{n1}|^2+|a_{n2}|^2+\cdots+|a_{nn}|^2\} \\
&= |\mathcal{T}_0|^2+|\mathcal{T}_1|^2+\cdots+|\mathcal{T}_{n-1}|^2+|\mathcal{T}_0|^2+\cdots+|\mathcal{T}_{n-2}|^2+|\mathcal{T}_1|^2+|\mathcal{T}_2|^2+\cdots+|\mathcal{T}_0|^2 \\
&= n\{|\mathcal{T}_0|^2+|\mathcal{T}_1|^2+\cdots+|\mathcal{T}_{n-1}|^2\} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1}|\mathcal{T}_i|^2
\end{aligned}$$

olur. $(\mathcal{T}_n)$ dizisinin Binet formülünden,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{T}_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\Big\{\frac{A\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\frac{B\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$
$$+\frac{C\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{D\delta^n}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\Big\}^2$$

olup

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{T}_i^2 = \frac{A^2}{[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]^2}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^{2i}+\frac{B^2}{[(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]^2}\sum_{i=0}^{n-1}\beta^{2i}$$
$$+\frac{C^2}{[(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)]^2}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma^{2i}+\frac{D^2}{[(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)]^2}\sum_{i=0}^{n-1}\delta^{2i}$$
$$+\frac{2AB}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha\beta)^i$$

$$+\frac{2AC}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha\gamma)^i$$

$$+\frac{2AD}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha\delta)^i$$

$$+\frac{2BC}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\sum_{i=0}^{n-1}(\beta\gamma)^i$$

$$+\frac{2BD}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\sum_{i=0}^{n-1}(\beta\delta)^i$$

$$+\frac{2CD}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\sum_{i=0}^{n-1}(\gamma\delta)^i$$

$$= \frac{A^2}{[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]^2}\left\{\frac{1-(\alpha^2)^n}{1-\alpha^2}\right\}+\frac{B^2}{[(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]^2}\left\{\frac{1-(\beta^2)^n}{1-\beta^2}\right\}$$

$$+\frac{C^2}{[(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)]^2}\left\{\frac{1-(\gamma^2)^n}{1-\gamma^2}\right\}+\frac{D^2}{[(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)]^2}\left\{\frac{1-(\delta^2)^n}{1-\delta^2}\right\}$$

$$+\frac{2AB}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\left\{\frac{1-(\alpha\beta)^n}{1-\alpha\beta}\right\}$$

$$+\frac{2AC}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\left\{\frac{1-(\alpha\gamma)^n}{1-\alpha\gamma}\right\}$$

$$+\frac{2AD}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\left\{\frac{1-(\alpha\delta)^n}{1-\alpha\delta}\right\}$$

$$+\frac{2BC}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\left\{\frac{1-(\beta\gamma)^n}{1-\beta\gamma}\right\}$$

$$+\frac{2BD}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\left\{\frac{1-(\beta\delta)^n}{1-\beta\delta}\right\}$$

$$+\frac{2CD}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\left\{\frac{1-(\gamma\delta)^n}{1-\gamma\delta}\right\}$$

elde edilir.

4.6.4. Teorem $A = circ(\mathcal{T}_n)$ circulant matrisi için,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{(1-\theta)}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1}-(\theta-p)\mathcal{T}_{n-2}-(r+s)\mathcal{T}_{n-3}-s\mathcal{T}_{n-4}+(1-p-q-r)\mathcal{T}_0$$

$$+(1-p-q)\mathcal{T}_1+(1-p)\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_3\} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\frac{1}{(1-\theta)}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1}-(\theta-p)\mathcal{T}_{n-2}$$

$$-(r+s)\mathcal{T}_{n-3}-s\mathcal{T}_{n-4}+(1-p-q-r)\mathcal{T}_0+(1-p-q)\mathcal{T}_1+(1-p)\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_3\}$$

dir.

İspat

Özellik (2.4.1) ve (6) daki eşitlikten,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{(1-\theta)}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1}-(\theta-p)\mathcal{T}_{n-2}-(r+s)\mathcal{T}_{n-3}-s\mathcal{T}_{n-4}+(1-p-q-r)\mathcal{T}_0$$

$$+(1-p-q)\mathcal{T}_1+(1-p)\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_3\} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\frac{1}{(1-\theta)}\{-\theta\mathcal{T}_{n-1}-(\theta-p)\mathcal{T}_{n-2}$$

$$-(r+s)\mathcal{T}_{n-3}-s\mathcal{T}_{n-4}+(1-p-q-r)\mathcal{T}_0+(1-p-q)\mathcal{T}_1+(1-p)\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_3\}$$

dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, ilk olarak Fibonacci dizisi ile beraber bazı sayı dizileri tanımlanmış, Binet formülü ve üreteç fonksiyonları incelenmiş, çalışmamız için gerekli olan norm ve circulant matris tanımları verilmiştir. Horadam sayı dizisinin özellikleri incelenmiş ve bu dizide başlangıç değerlerine ve katsayılara bazı özel değerler verildiğinde literatürde var olan özel sayı dizilerinin Binet formülleri ve üreteç fonksiyonlarının oluştuğu görülmüştür. Bunun yanında Tribonacci ve Tetranacci dizisi incelenmiş ve elemanları bu dizinin elemanlarından oluşan circulant matrislerin normları incelenmiştir. Son bölümde Tetranacci dizisinin genellemesi tanımlanarak Binet formülü elde edilmiş ve bu dizinin ilk n teriminin toplamı formülüze edilmiştir. Buradan genelleştirilmiş Tetranacci sayı dizisi için üreteç fonksiyonuna ulaşılmıştır. Ayrıca elemanları genelleştirilmiş Tetranacci sayı dizisinin elemanlarından oluşan circulant matrisler için bazı matris normları hesaplanmıştır.

5.2 Öneriler

Genelleştirilmiş Tetranacci dizisi yardımıyla tanımlanan circulant matrislerin özdeğerleri bulunarak spektral normu hesaplanabilir. Elemanları genelleştirilmiş Tetranacci sayılarından oluşan skew, skew left circulant matrislerin veya Toeplitz matrislerin normları da incelenebilir. Ayrıca Tetranacci sayıları negatif indisli olarak tanımlanıp genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

Alptekin, E. G. (2005). *Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları ile tanımlı circulant ve semicirculant matrisler*. Yayımlanmış Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Alptekin, E. G., Mansour, T., Tuğlu N. (2007). Norms of circulant and semicirculant matrices and Horadam's sequence. *Ars Combinatoria*, 85, 353-360.

Bahşi, M. (2015). On the Norms of Circulant Matrices with the Generalized Fibonacci and Lucas Numbers. *TWMS J. Pure Appl. Math. 6*(1), 84-92.

Bahşi, M., Solak, S. (2014). On the norm of r-circulant matrices with hyper-Fibonacci and Lucas numbers. *J. Math. Inequel*. 8, 693-705.

Cardano, G. (1545). Chapter XXXVII: *Cardano 1993*, 217-221.

Davis, P.J. (1979). *Circulant Matrices*. John Wiley and Sons, New York.

Falcon, S., Plaza, A. (2007). On the Fibonacci k-Numbers. *Chaos, Solitons Fractals*. 32, 1615-1624.

Feinberg, M. (1963). Fibonacci-tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*. *1*(1), 71-74.

Horadam, A. *F.* (1965). Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, *3*, 161-176.

Horn, R. A., Johnson, C. R. (1985). *Matris analysis*.(Second edition). Cambridge:Cambridge University press, 345-347.

Karner, H., Schneid, J., Ueberhuber, C.W. (2003). Spectral Decomposition of Real Circulant Matrices, *Lin. Alg. And Its Applications*. 367: 301-311.

Lind, D. A. (1970). A Fibonacci circulant. *The Fibonacci Quarterly*, *8*(5), 449-455.

Mansour, T., (2004). A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence, *Australasian Journal of Combinatorics* 30, 207-212.

Öcal, A. A., Tuğlu, N., Altınışık, E. (2005). On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers. *Applied mathematics and computation*, *170*(1), 584-596.

Özkoç, A. Ardıyok, E. (2016). Circulant and Negacyclic Matrices Via Tetranacci Numbers. *Honam Mathematical J.* 38(4), 725-738.

Pollock, D. S. G. (2002). Circulant matrices and time-series analysis, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 33(2):213-230.

Shen, S. and Cen, J. (2010). On the spectral norms of r-circulant matrices with the k-Fibonacci and k-Lucas numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, *5*(12), 569-578.

Solak, S. (2005). On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas Numbers. *Applied Mathematics and Compitations* 160, 125-132.

Spickerman, W.R. (1982). Binet's formula for the Tribonacci sequence, *The Fibonacci Quarterly*, 20 (2),118-120.

Taşçı, D., Acar H. (2017). Gaussian Tetranacci Numbers. *Communications in Mathematics and Applications.* 8(3). 379-386.

Tuğlu, N., Kızılateş, C. (2015). On the Norm of Circulant and Circulant Matrices with the Hyperharmonic Fibonacci Numbers, *J. Inequal. Appl.*, 2015:253.

Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section:Theory and Applications*. Ellis Horwood Limited, Chichester. England.

Zaveri M. N. , Patel, J. K. (2015). Patel J. K. Binet's Formula for the Tetranacci Sequence. *International Journal of Science and Research (IJSR).* 78-96.

Waddill, M. E. (1992). The Tetranacci sequence and generalizations. *The Fibonacci Quarterly*. *30*(1), 9-20.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Tevfik YETİŞ

Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti

Doğum tarihi ve yeri : 09.06.1979 - Bozkır

Medeni Hali : Evli

e-mail : mitimat01@gmail.com

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Yüksek lisans	Amasya Üniversitesi	
Lisans	Ege Üniversitesi, Matematik	2004
Lise	Selçuklu Lisesi	1997

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görev
2004-2005	İzmir Final Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2006-2010	Manavgat Sınav Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2010-2011	Manavgat Deniz Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2011-2014	Levent Sınav Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2014-2015	İzmir Ekol Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2016-	Horasan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Yetiş. T., (2019) “4. Mertebeden Rekürans Bağıntılarını İçeren Circulant Matrislerde Norm Hesabı”, Avrasya 3. Uluslararası Multidisipliner Çalışmalar Kongresi, Gaziantep, Türkiye