T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİM DAİREDE HOLOMORFİK FONKSİYONLARIN SINIR DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BATUHAN ÇATAL

MAYIS

BİRİM DAİREDE HOLOMORFİK FONKSİYONLARIN SINIR DAVRANIŞI

BATUHAN ÇATAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Doç. Dr. BÜLENT NAFİ ÖRNEK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2019

Yüksek Lisans Tezi kabul ve onay sayfası

Batuhan ÇATAL tarafından hazırlanan "Birim Dairede Holomorfik Fonksiyonların Sınır Davranışı" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Bülent Nafi Örnek

Matematik Anabilim Dalı Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

…………………

Başkan : Doç. Dr. Öznur KULAK

Matematik Anabilim Dalı Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

…………………

Üye : Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı Giresun Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

…………………

Tez Savunma Tarihi: …/…/…

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

………………………………….

Doç. Dr. Meryem Evecen

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Batuhan ÇATAL

03.05.2019

BİRİM DAİREDE HOLOMORFİK FONKSİYONLARIN SINIR DAVRANIŞI
(Yüksek Lisans Tezi)

BATUHAN ÇATAL

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs-2019

ÖZET

Bu çalışmada, Schwarz Lemması'nın birim diskin sınırındaki türevi incelenmiştir. Bu incelemede fonksiyonun türevinin modülü için bazı değerlendirmeler elde edilmiştir. Bu değerlendirmelerde fonksiyonun Taylor açılımındaki katsayıların bazıları da hesaba katılarak sonuçlar kuvvetlendirilmiştir. Elde edilen eşitsizliklerin kesinlik hali de incelenmiş ve bunu sağlayacak fonksiyonlar bulunmuştur.

Sayafa Adedi : 28
Anahtar Kelimeler : Holomorfik fonksiyon, Schwarz lemma, Açısal limit, Açısal türev
Danışman : Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

BOUNDARY BEHAVIOUR OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN UNIT DISC

(M. Sc. Thesis)

BATUHAN ÇATAL

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE

May-2019

ABSTRACT

In this study, the derivative of the Schwarz lemma at the boundary of the unit disc has been considered. Here, some considerations have been obtained for the modulus of the derivative of the function. In these considerations, the results have been strengthened by taking into account some coefficients of the Taylor expansion of the function. The equality case of the obtained inequalities has also been examined and the corresponding functions have also been obtained.

Page Number	: 28
Key Words	: Holomorphic functions, Schwarz lemma, Angular limit, Angular derivative.
Supervisor	: Assoc. Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Amasya Üniversitesinde Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bilgisi, tecrübesi, akademik kişiliği ve güler yüzüyle bana yön veren saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e ve ders aşamasında bilgilerinden ve fikirlerinden istifade ettiğim Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR ve Dr. Öğ. Üyesi Süleyman DİRİK'e teşekkürlerimi sunarım.

Sonsuz sabırlarını, güvenlerini, maddi ve manevi desteklerini her daim hissettiğim beni her zaman, her konuda destekleyen değerli anneme ve kız kardeşime sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Kompleks fonksiyonlar teorisinin önemli konularından biri *Schwarz Lemması*'dır. Schwarz Lemması, kompleks düzlemdeki birim daire üzerinde tanımlı ve değer kümesi yine birim daire olan analitik fonksiyonların aldığı değerlerin üzerine tahminler veren önemli bir sonuçtur. İsmi lemma olarak verilmiş olsa da önemli bir teoremdir. İspatı diğer sonuçlara göre daha basit ve daha kolay bir sonuç olmasına rağmen, Schwarz lemması yine de kompleks analizin önemli bir uygulama aracı haline gelmiştir. Bunun nedeni ise, Riemann tasvir teoremi gibi önemli teoremlerin kanıtlanmasında ve yine kompleks analizin geliştirilmesinde sıkça kullanılan bir sonuç olmasıdır. Ayrıca, Mühendislik alanında özellikle Elektrik-Elektronik mühendisliğinde devre analizi ile ilgili konularda önemli rol oynamaktadır (Ahlfors, 1979, Ahlfors, 1938, Dineen, 1989, Goluzin, 1969, Markushevich, 1965, Dubinin, 2007, Dubinin, 2000, Dubinin, 2002, Dubinin, 2005, Dubinin ve Olesov, 2004, Mercer, 1997, Reza, 1962, Örnek ve Düzenli, 2018, Carathéodory, 1954). Schwarz Lemması, maksimum modül prensibinin doğrudan uygulamasıdır. Bununla beraber Schwarz Lemması anlaşılabilir ve ulaşılabilir olarak aşağıdaki şekilde ifadelenir.

Schwarz Lemması. $\mathbb{C}$ kompleks düzlem ve $E=\{\lambda:|\lambda|<1\}$ birim disk olsun. $f:E\to E$ holomorfik fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Bu durumda $\forall\lambda\in E$ için $|f(\lambda)|\le|\lambda|$ ve $|f'(0)|\le 1$ olur. Bu eşitsizliklerde (herhangi bir $\lambda\neq 0$ noktası için) eşitlik durumu yalnızca $|\gamma|=1$ olmak üzere, $f(\lambda)=\gamma\lambda$ olduğunda mümkündür (Goluzin, 1969).

Schwarz lemmasının daha kesin bir versiyonu *Rogosinski's Lemma* olarak bilinen

$$|f(z)-c_1|\le r_1, \forall z\in E$$

eşitsizliğidir. Burada

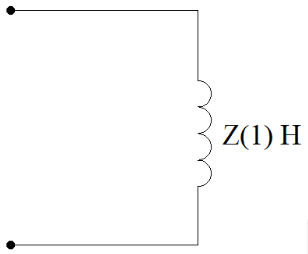
$$c_1=\frac{zf'(0)\left(1-|z|^2\right)}{1-|z|^2|f'(0)|^2},\quad r_1=\frac{|z|^2\left(1-|f'(0)|^2\right)}{1-|z|^2|f'(0)|^2}$$

şeklindedir (Mercer, 1997, Duren 1983).

Schwarz Lemması'nın bir uygulaması olarak Liouville Teoremi gösterilebilir. Ayrıca, pozitif reel fonksiyonlar için Schwarz Lemması'nın bir uygulaması devre analizini içermektedir. Şöyleki pozitif reel fonksiyonlar için elde edilen empedans fonksiyonları bir devreye karşılık gelmektedir. Bu devreleri L ve LC şeklinde gösterebiliriz. Örneğin, $Z(s) = Z(1) + c_1(s-1) + c_2(s-1)^2 + \ldots$ pozitif reel fonksiyonu için, Schwarz Lemma'dan

$$\left|Z'(1)\right| \leq Z(1)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin eşitlik hali $Z(s) = sZ(1)$ fonksiyonu ile sağlanır. Bulunan bu $Z(s)$ fonksiyon elektronik alanında bobine karşılık gelmektedir (Örnek ve Düzenli, 2018, Reza, 1962, Örnek ve Düzenli, 2019, Richards, 1947).



Şekil1. Pozitif reel $Z(s) = sZ(1)$ fonksiyonu için devre modeli

Birim diskin kendisine

$$\varphi(\lambda) = e^{i\theta} \frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \overline{\lambda_0}\lambda}$$

şeklinde konform dönüşümüne *Möbius dönüşümü* denir, burada θ reel sayı ve $\left|\lambda_0\right| < 1$ 'dir. Schwarz Lemması'nın ilk genellemesi Pick tarafından verilen Schwarz-Pick Lemması'dır ve aşağıdaki şekilde ifade olunur:

Schwarz-Pick Lemması. $f : E \to E$ analitik, $\lambda \in E$ için $\left|f(\lambda)\right| \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{1 - f(\lambda)\overline{f(\lambda_0)}}\right| \leq \left|\frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \lambda\overline{\lambda_0}}\right|$$

ve

$$\frac{\left|f'(\lambda)\right|}{1 - \left|f(\lambda)\right|^2} \leq \frac{1}{1 - \left|\lambda\right|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik halleri yalnızca $f(\lambda)$ fonksiyonunun birim dairenin kendi kendine konform tasvir olması durumunda mümkündür (Goluzin, 1969). Bu lemma ile alakalı farklı çalışmalarda mevcuttur (Beardon ve Minda, 2004, Beardon ve Carne, 1992, Osserman, 1999, Mercer, 2006).

Schwarz-Pick Lemması, Schwarz Lemması'ndaki $f(0)=0$ kısıtlamasının kaldırılabileceğini göstermektedir.

1.1. Sınırda Schwarz Lemması'nın Bir Versiyonu

Schwarz Lemması'nın uygulama alanı çok geniş olduğundan dolayı bir çok bilimsel çalışmaya konu olmuştur. Son zamanlada Schwarz Lemması ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiş. Bu sonuçlarda Schwarz Lemması'nın sınır versiyonu hakkında olan önemli çalışmalar mevcuttur. Bunlardan bazıları fonksiyonun türevinin modülü hakkında olan değerlendirmelerdir. (Azeroğlu ve Örnek, 2013, Örnek, 2013, Örnek ve Akyel, 2016, Boas, 2010, Burns ve Krantz, 1994, Dubinin, 2004, Krantz, 2011, Osserman, 2000, Mateljević, 2015, Mateljević, 2016, Mateljević, 2016, Çatal ve Örnek, 2019, Jeong, 2011, Jeong, 2014, Aydınoğlu and Örnek, 2018, Akyel ve Örnek, 2015, Gök ve Örnek, 2017, Akyel ve Örnek, 2017).

Schwarz Lemması'nın birim diskin sınırındaki türevinin değerlendirmesi aşağıdaki şekilde verilir:

f, E diskinde analitik, $f(0)=0$ ve $|\lambda|<1$ için $|f(\lambda)|<1$ olsun. Ayrıca varsayalım ki, f fonksiyonu bir $c\in\partial E$ noktasına sürekli devam ediliyor, $|f(c)|=1$ ve $f'(c)$ mevcuttur. Bu takdirde klasik Schwarz Lemması'ndan, sınırda Shwarz Lemması olarak bilinen

$$|f'(c)|\geq 1 \tag{1.1}$$

eşitsizliği elde edilir. (1.1)'da eşitlik hali sadece $f(\lambda)=\lambda e^{i\alpha}$, $\alpha\in R$ olduğunda mümkündür. Bunlara ilave olarak, eğer $f(\lambda)$ fonksiyonu $|f(c)|=1$ olmak üzere $c\in\partial E$ noktasına sürekli devam ettiriliyorsa ve $f'(c)$ mevcutsa, o zaman

$$|f'(c)|\geq \frac{2}{1+|f'(0)|} \tag{1.2}$$

alınır. (1.2) eşitsizliğinde eşitlik hali ($c=1$ olduğunda) $f(\lambda)=\lambda\dfrac{\lambda+a}{1+a\lambda}$, $0\leq a\leq 1$ fonksiyonu için gerçeklenir (Osserman, 2000).

Eğer $f(\lambda)=c_p\lambda^p+c_{p+1}\lambda^{p+1}+....$ fonksiyonu $|f(c)|=1$ olmak üzere $c\in\partial E$ noktasına sürekli devam ettiriliyorsa ve $f'(c)$ mevcutsa, o zaman

$$\left|f'(c)\right| \geq p + \frac{1-\left|c_p\right|}{1+\left|c_p\right|} \tag{1.3}$$

ve

$$\left|f'(c)\right| \geq p$$

eşitsizliği elde edilir (Osserman, 2000).

Dubinin, f fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırlarınıda hesaba katarak yukarıda verilen (1.1) ve (1.2) ilişkilerinden daha kuvvetli eşitsizlikler elde etmiştir (Dubinin, 2004).

Örnek ve Düzenli tarafından yapılan çalışmada Schwarz Lemması'nın sınırda analizi incelenmiş ve bu analizde elde edilen empedans fonksiyonlarına karşılık gelen devreler araştırılmıştır. Çalışmada sunulan teoremde, $Z(0)=0$ koşulu dikkate alınarak empedans fonksiyonunun türevinin modülünün aşağıdan sınır analizi yapılmıştır ve kesin sonuç elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizliğin eşitlik hali için $Z(s)$ fonksiyonu verilmiştir. Sınırda Schwarz Lemması'nın bir uygulaması olarak verilen bu eşitsizlik şu şekildedir:

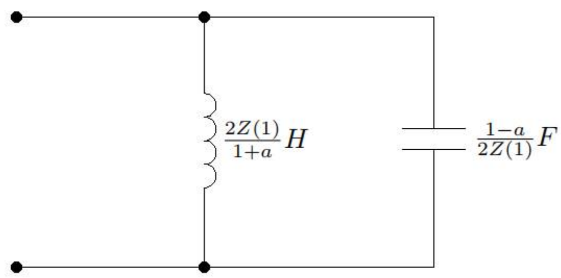
$Z(s)=Z(1)+c_1(s-1)+c_2(s-1)^2+....$ ve $Z(s)$ fonksiyonu $Z(0)=0$ ve sanal eksenin $s=0$ noktasında analitik olsun. Bu taktirde

$$\left|Z'(0)\right| \geq \frac{2\left(Z(1)\right)^2}{Z(1)+Z'(1)}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada keyfi $a=\dfrac{\left|Z'(1)\right|}{Z(1)} \in \left[0,1\right]$ olmak üzere

$$Z(s)=\frac{2Z(1)s}{(1-a)s^2+1+a},$$

fonksiyonu için eşitlik vardır. Bu fonksiyon aşağıda verilen şekildeki gibi bir devreye karşılık gelmektedir (Örnek ve Düzenli, 2018, Örnek ve Düzenli, 2019).



Şekil2. $Z(s)$ empedans fonksiyonu için eşdeğer devre modeli

Bizim çalışmamızda yukarıda Osserman tarafından verilen hipotezler yerine daha genel olan açısal limit ve açısal türev kavramları kullanılacaktır. Dolayısıyla teoremlerimizde açısal türevle ilgili değerlendirmeler yapılacaktır. Elde edilen değerlendirmelerde, f fonksiyonun açısal türevinin modülü ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Şimdi çalışmamız için gerekli olan tanım ve lemmaları verelim.

Tanım 1.1. $c \in T$ noktası için $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \rho < 2\cos\alpha$ olmak üzere

$$\Delta = \left\{ \lambda \in E : \left| \arg\left(1 - \overline{c}\lambda\right) \right| < \alpha, \left| \lambda - c \right| < \rho \right\}$$

kümesine *Stolz Açısı* denir. $f : E \to \widehat{\mathbb{C}}$ şeklinde bir fonksiyon olsun. $\lambda \in \Delta$, c noktasındaki herhangi Stolz açısının içinde c noktasına yaklaştığında, $f(\lambda)$ fonksiyonu da a sayısına yaklaşıyorsa, f fonksiyonu $c \in \partial E$ noktasında a açısal limitine sahiptir denir. Δ açısının genişliği olan 2α sayısı, π'den küçük herhangi bir sayı olabilir. Limiti olan fonksiyonun açısal limiti mevcuttur. Ancak tersi doğru değildir.

$f : E \to E$ fonksiyonu c noktasında α açısal limitine sahip olsun. Eğer c noktasındaki her Δ Stolz açısı için

$$\lim_{\varsigma \to c, \varsigma \in \Delta} \frac{f(\varsigma) - \alpha}{\varsigma - c} = \beta$$

olacak şekilde bir β sayısı mevcut ise, β'ya f fonksiyonunun c noktasında açısal türevi denir ve $f'(c)$ ile işaretlenir (Pommerenke, 1992).

Bizim çalışmamızda Ossserman ve Dubinin tarafından elde edilen eşitsizlikleri farklı sınıflar için yapılmış olup f fonksiyonunun açısal türevinin modülünün değerlendirmesi incelenmiştir. Bu değerlendirmede fonksiyonun Taylor açılımındaki katsayıları yardımıyla elde edilen eşitsizlikler kuvvetlendirilmiştir. Teoremlerimizde açısal limit kavramını kullandığımız için Julia-Wolff teorisinin kullanılması zorunlu hale gelmiştir (Pommerenke, 1992):

Lemma 1.3 (Julia-Wolff). $f: E \rightarrow E$ fonksiyonu $c \in \partial E$ noktasında $f(c) \in \partial E$ açısal limitine sahip olsun. Bu taktirde $f'(c)$ açısal türevi mevcuttur ve $1 \leq |f'(c)| \leq \infty$ olur.

Ayrıca bizim ana sonuçlarımızı göstermek için gerekli olan lemma aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz (Jack, 1971):

Lemma 1.4 (Jack's Lemma). $f(\lambda)$ analitik, sabit olmayan bir fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Eğer $|f(\lambda)|$, λ_0 noktasında, $|\lambda|=r$ dairesi üzerinde maksimum değer alıyorsa, o zaman

$$\frac{\lambda_0 f'(\lambda_0)}{f(\lambda_0)} = k$$

eşitliği sağlanır. Burada $k \geq 1$ bir reel sayıdır.

2. SINIRDA ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI SINIFLARI İÇİN SONUÇLAR

Bu bölümde birim diskin sınırında farklı analitik fonksiyon sınıfları için Schwarz Lemması'nın yeni bir şeklini elde edeceğiz. f fonksiyonunun açısal türevinin modülü için yeni eşitsizlikler elde edeceğiz. Elde edilen bu eşitsizlikler için f fonksiyonunun Taylor açılındaki katsayılardan bazıları hesaba katılarak eşitsizlikler kuvvetlendirilecektir. Ayrıca Taylor açılımlarının sıfırdan farklı ilk katsayıları kullanılacaktır. Elde edilen eşitsizliklerin eşitlik durumu için fonksiyonlar verilecektir. Bulduğumuz sonuçlar yenidir (Çatal ve Örnek, 2017).

M , birim disk E 'de analitik olan $f(\lambda)=1+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\dots$ fonksiyonlar sınıfını göstersin. Ayrıca $K(\alpha)$, $\frac{1}{2}\leq\alpha<1$ olduğu yerde

$$\Re\left(1+\frac{\lambda f'(\lambda)}{f(\lambda)}\right)>\frac{3\alpha-1}{2\alpha},\quad \lambda\in E$$

eşitsizliğini sağlayan tüm $f(\lambda)$ fonksiyonlarının içerdiği M 'nin alt sınıfı olsun.

Aşağıdaki fonksiyona bakalım:

$$\varphi(\lambda)=\frac{f(\lambda)-1}{1-2\alpha+f(\lambda)}.$$

$\varphi(\lambda)$ fonksiyonu E 'de analitik ve $\varphi(0)=0$ 'dır. Gösterelim ki birim diskte $|\varphi(\lambda)|<1$ sağlanır. $\varphi(\lambda)$ 'in tanımından

$$f(\lambda)=\frac{1+(1-2\alpha)\varphi(\lambda)}{1-\varphi(\lambda)}$$

alırız ve her iki tarafın logaritmik türevinden

$$\frac{\lambda f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{(1-2\alpha)\lambda\varphi'(\lambda)}{1+(1-2\alpha)\varphi(\lambda)}+\frac{\lambda\varphi'(\lambda)}{1-\varphi(\lambda)}$$

elde ederiz. Varsayalım ki $\lambda_0\in E$ noktası için

$$\max_{|\lambda|\leq|\lambda_0|}|\varphi(\lambda)|=|\varphi(\lambda_0)|=1$$

ifadesi sağlansın. Jack lemma'dan

$$\varphi(\lambda_0)=e^{i\theta} \ ve \ \frac{\lambda_0\varphi'(\lambda_0)}{\varphi(\lambda_0)}=k$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, aşağıdakine sahip oluruz.

$$1+\frac{\lambda_0 f'(\lambda_0)}{f(\lambda_0)}=1+\frac{(1-2\alpha)\lambda_0\varphi'(\lambda_0)}{1+(1-2\alpha)\varphi(\lambda_0)}+\frac{\lambda_0\varphi'(\lambda_0)}{1-\varphi(\lambda_0)}$$
$$=1+\frac{(1-2\alpha)ke^{i\theta}}{1+(1-2\alpha)e^{i\theta}}+\frac{ke^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

$$\frac{ke^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{-k}{2}+i\frac{k\sin\theta}{2(-\cos\theta)}$$

ve

$$\frac{(1-2\alpha)ke^{i\theta}}{1+(1-2\alpha)e^{i\theta}}=\frac{k(1-2\alpha)^2+k(1-2\alpha)\cos\theta}{(1-2\alpha)^2+2(1-2\alpha)\cos\theta+1}+i\frac{k(1-2\alpha)\cos\theta}{(1-2\alpha)^2+2(1-2\alpha)\cos\theta+1}$$

olduğu için

$$\Re\left(1+\frac{\lambda_0 f'(\lambda_0)}{f(\lambda_0)}\right)=1-\frac{k}{2}+k(1-2\alpha)\frac{1-2\alpha+\cos\theta}{1+2(1-2\alpha)\cos\theta+(1-2\alpha)^2}$$

ifadesini elde ederiz. Bu eşitsizliğinin sağ tarafı minimum değerini $\cos(\theta)=-1$ ve $k\geq 1$ için aldığından

$$\Re\left(1+\frac{\lambda_0 f'(\lambda_0)}{f(\lambda_0)}\right)\leq 1-\frac{1}{2}-\frac{1-2\alpha}{2\alpha}=\frac{3\alpha-1}{2\alpha}$$

ifadesine ulaşırız. Bu $f(\lambda)\in K(\alpha)$ kabulüyle çelişir. Bundan dolayı her $\lambda_0\in E$ için $|\varphi(\lambda_0)|=1$ olacak şekilde $\lambda_0\in E$ noktası yoktur. Bu yüzden $|\lambda|<1$ için $|\varphi(\lambda)|<1$'dir. Schwarz Lemma'dan

$$|f'(0)|\leq 2(1-\alpha)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte eşitlik hali

$$f(\lambda)=\frac{1+\lambda(1-2\alpha)}{1-\lambda}$$

fonksiyonu ile sağlanır.

Böylece $K(\alpha)$ sınıfı için elde ettiğimiz Schwarz Lemma aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Lemma 2.1. $f(\lambda)\in K(\alpha)$ olsun. Bu takdirde

$$\left|f'(0)\right|\leq 2\left(1-\alpha\right) \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.1) ilişkisinde

$$f(\lambda)=\frac{1+\lambda\left(1-2\alpha\right)}{1-\lambda}$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

2.1. Temel Sonuçlar

Bu bölümde, $K\left(\alpha\right)$ sınıfına ait olan $f\left(\lambda\right)$ analitik fonksiyonu için, birim diskte sınır üzerindeki noktalarda açısal türevin modülünün aşağıdan değerlendirilmiştir. Teoremlerde elde edilen sonuçların kesinliği ispat edilmiştir.

Teorem 2.2. $f(\lambda)\in K(\alpha)$ olsun. Farzedelim ki $c\in\partial E$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısal limitine sahiptir ve $f(c)=\alpha$. Bu takdirde

$$\left|f'(c)\right|\geq\frac{1-\alpha}{2} \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.2) eşitsizliğinde

$$f(\lambda)=\frac{1+\lambda\left(1-2\alpha\right)}{1-\lambda}$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat. Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım.

$$\varphi\left(\lambda\right)=\frac{f\left(\lambda\right)-1}{1-2\alpha+f\left(\lambda\right)}.$$

Burada $\varphi\left(\lambda\right)$ fonksiyonu E birim diskte analitik ve $\varphi\left(0\right)=0$ 'dır. Eğer Jack Lemması ve $f\left(\lambda\right)\in K\left(\alpha\right)$ olması kullanılırsa $\left|\lambda\right|<1$ için $\left|\varphi\left(\lambda\right)\right|<1$ alırız. Ayrıca, $c\in\partial E$ için $\left|\varphi\left(c\right)\right|=1$ buluruz.

Ayrıca $f\left(c\right)=\alpha$ olduğundan,

$$\varphi'(c)=\frac{2(1-\alpha)f'(c)}{\left(1-2\alpha+f(c)\right)^{2}}$$

ve

$$\varphi'(c)=\frac{2(1-\alpha)f'(c)}{(1-2\alpha+\alpha)^{2}}=\frac{2(1-\alpha)f'(c)}{(1-\alpha)^{2}}=2\frac{f'(c)}{1-\alpha}$$

ifadelerini kolayca elde ederiz. Bu takdirde, (1.1) ifadesinden

$$1\leq\left|\varphi'(c)\right|=2\frac{\left|f'(c)\right|}{1-\alpha}$$

ve

$$\left|f'(c)\right|\geq\frac{1-\alpha}{2}$$

elde edilir. Şimdi, (2.1) eşitsizliğinin kesinliğini gösterelim.

$$f(\lambda)=\frac{1+\lambda(1-2\alpha)}{1-\lambda}$$

olsun. Bu takdirde,

$$f'(\lambda)=\frac{(1-2\alpha)(1-\lambda)+1+\lambda(1-2\alpha)}{(1-\lambda)^{2}}$$

ve

$$\left|f'(-1)\right|=\frac{1-\alpha}{2}$$

elde edilir.

Teorem 2.3. $f(\lambda)\in K(\alpha)$ olsun. Kabul edelim ki $c\in\partial E$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısal limitine sahiptir ve $f(c)=\alpha$. Bu taktirde

$$\left|f'(c)\right|\geq\frac{2(1-\alpha)^{2}}{2(1-\alpha)+\left|f'(0)\right|} \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan (2.3) eşitsizliğinde

$$f(\lambda)=\frac{1+\lambda(1-2\alpha)}{1-\lambda}$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat. $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu Teorem 2.2'nin ispatındaki gibi verilsin. Rogosinski's Lemma'dan

$$|\varphi(\lambda)-c_1|\leq r_1$$

eşitsizliği yazılır. Burada

$$c_1=\frac{\lambda\varphi'(0)\left(1-|\lambda|^2\right)}{1-|\lambda|^2|\varphi'(0)|^2},\quad r_1=\frac{|\lambda|^2\left(1-|\varphi'(0)|^2\right)}{1-|\lambda|^2|\varphi'(0)|^2}$$

biçiminde ifade edilir. Genelliği bozmadan, $c=1$ olarak alabiliriz. Böylece

$$\left|\frac{\varphi(\lambda)-1}{\lambda-1}\right|\geq\frac{1-|c_1|-r_1}{1-|\lambda|}=\frac{1-\frac{|\lambda||\varphi'(0)|\left(1-|\lambda|^2\right)}{1-|\lambda|^2|\varphi'(0)|^2}-\frac{|\lambda|^2\left(1-|\varphi'(0)|^2\right)}{1-|\lambda|^2|\varphi'(0)|^2}}{1-|\lambda|},$$

$$\left|\frac{\varphi(\lambda)-1}{\lambda-1}\right|\geq\frac{1-|\lambda|^2|\varphi'(0)|^2-|\lambda||\varphi'(0)|\left(1-|\lambda|^2\right)-|\lambda|^2\left(1-|\varphi'(0)|^2\right)}{\left(1-|\lambda|\right)\left(1-|\lambda|^2|\varphi'(0)|^2\right)}$$

ve

$$\left|\frac{\varphi(\lambda)-1}{\lambda-1}\right|\geq\frac{1+|\lambda|}{1+|\lambda||\varphi'(0)|}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Son eşitsizlikte açısal limite geçersek

$$|\varphi'(1)|\geq\frac{2}{1+|\varphi'(0)|}$$

olur ve

$$|\varphi'(0)|=\frac{|f'(0)|}{2(1-\alpha)},\ |\varphi'(1)|=2\frac{|f'(1)|}{1-\alpha}$$

olduğundan dolayı (2.3) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi, (2.3) eşitsizliğinin kesinliğini gösterelim. O zaman

$$f(\lambda)=\frac{1+\lambda(1-2\alpha)}{1-\lambda}$$

olsun. Buradan

$$f'(\lambda)=2\frac{1-\alpha}{(\lambda-1)^2}$$

ve

$$f'(-1)=\frac{1-\alpha}{2}$$

elde edilir. Diğer yandan $|f'(0)|=2(1-\alpha)$ olduğundan, (2.3) eşitsizliğinin eşitlik hali sağlanır. Yani;

$$\frac{2(1-\alpha)^2}{2(1-\alpha)+|f'(0)|}=\frac{2(1-\alpha)^2}{2(1-\alpha)+2(1-\alpha)}=\frac{2(1-\alpha)^2}{4(1-\alpha)}=\frac{1-\alpha}{2}$$

bulunur.

(2.3) eşitsizliği aşağıdaki gibi $f(\lambda)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki ikinci katsayı olan c_2 hesaba katılarak kuvvetlendirilebilir.

Teorem 2.4. $f(\lambda)\in K(\alpha)$ olsun. Farzedelim ki $c\in\partial E$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısal limitine sahiptir ve $f(c)=\alpha$. Bu takdirde

$$|f'(c)|\geq\frac{1-\alpha}{2}\left(1+\frac{2\left(2(1-\alpha)-|c_1|\right)^2}{4(1-\alpha)^2-|c_1|^2+\left|2(1-\alpha)c_2-c_1^2\right|}\right) \tag{2.4}$$

bulunur. (2.4) eşitsizliğinde

$$f(\lambda)=\frac{1+\lambda^2(1-2\alpha)}{1-\lambda^2}$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat. $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu Teorem 2.2'nin ispatındaki gibi olsun. Bu durumda

$$\mu(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{B(\lambda)}$$

fonksiyonunu dikkate alalım. Burada $B(\lambda)=\lambda$ olup $\mu(\lambda)$ fonksiyonu E 'de analitiktir. O halde Maksimum prensibine bağlı olarak, her $\lambda\in E$ için $|\mu(\lambda)|<1$ bulunur.

Özel olarak,

$$|\mu(0)|=\frac{|c_1|}{2(1-\alpha)}\leq 1 \tag{2.5}$$

ve

$$\left|\mu'(0)\right| = \frac{\left|2(1-\alpha)c_2 - c_1^2\right|}{4(1-\alpha)^2}$$

elde edilir. Buna ek olarak,

$$\frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)} = \left|\varphi'(c)\right| \geq \left|B'(\mathrm{c})\right| = \frac{cB'(\mathrm{c})}{B(\mathrm{c})}$$

olduğu açıktır.

$$\psi(\lambda) = \frac{\mu(\lambda) - \mu(0)}{1 - \overline{\mu(0)}\mu(\lambda)}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon E ’de analitik olup, $|\lambda| < 1$ için $|\psi(\lambda)| \leq 1$, $\psi(0) = 0$, ve $c \in \partial E$ için $|\psi(c)| = 1$ olur. Diğer yandan (1.2) ifadesinden

$$\frac{2}{1+\psi'(0)} \leq \left|\psi'(c)\right| = \frac{1-\left|\mu(0)\right|^2}{\left|1-\overline{\mu(0)}\mu(c)\right|^2}\left|\mu'(c)\right|$$

$$\leq \frac{1+\left|\mu(0)\right|}{1-\left|\mu(0)\right|}\left\{\left|\varphi'(c)\right| - \left|B'(c)\right|\right\}$$

bulunur. Ayrıca

$$\psi'(\lambda) = \frac{1-\left|\mu(0)\right|^2}{\left(1-\overline{\mu(0)}\mu(\lambda)\right)^2}\mu'(\lambda),$$

$$\psi'(0) = \frac{\mu'(\lambda)}{1-\left|\mu(0)\right|^2}$$

ve

$$\left|\psi'(0)\right| = \frac{\dfrac{\left|2(1-\alpha)c_2 - c_1^2\right|}{4(1-\alpha)^2}}{1-\left(\dfrac{|c_1|}{2(1-\alpha)}\right)^2} = \frac{\left|2(1-\alpha)c_2 - c_1^2\right|}{4(1-\alpha)^2 - |c_1|^2}$$

olduğundan,

$$\frac{2}{1+\frac{\left|2(1-\alpha)c_2-c_1^2\right|}{4(1-\alpha)^2-\left|c_1\right|^2}}\leq\frac{1+\frac{\left|c_1\right|}{2(1-\alpha)}}{1-\frac{\left|c_1\right|}{2(1-\alpha)}}\left\{\frac{2\left|f'(c)\right|}{1-\alpha}-1\right\}$$

$$\frac{2\left(4(1-\alpha)^2-\left|c_1\right|^2\right)}{4(1-\alpha)^2-\left|c_1\right|^2+\left|2(1-\alpha)c_2-c_1^2\right|}\leq\frac{2(1-\alpha)+\left|c_1\right|}{2(1-\alpha)-\left|c_1\right|}\left\{\frac{2\left|f'(c)\right|}{1-\alpha}-1\right\}$$

$$\frac{2\left(2(1-\alpha)-\left|c_1\right|\right)^2}{4(1-\alpha)^2-\left|c_1\right|^2+\left|2(1-\alpha)c_2-c_1^2\right|}\leq\frac{2\left|f'(c)\right|}{1-\alpha}-1$$

ve

$$\left|f'(c)\right|\geq\frac{1-\alpha}{2}\left(1+\frac{2\left(2(1-\alpha)-\left|c_1\right|\right)^2}{4(1-\alpha)^2-\left|c_1\right|^2+\left|2(1-\alpha)c_2-c_1^2\right|}\right)$$

elde edilir.

Şimdi, (2.4) eşitsizliğinin kesinliğini gösterelim. Bunun için $f(\lambda)=\dfrac{1+\lambda^2(1-2\alpha)}{1-\lambda^2}$ olsun.

Buradan

$$\left|f'(i)\right|=1-\alpha$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$1+c_1\lambda+c_2\lambda^2+.....=\frac{1+\lambda^2(1-2\alpha)}{1-\lambda^2},$$

$$c_1\lambda+c_2\lambda^2+.....=\frac{1+\lambda^2(1-2\alpha)}{1-\lambda^2}-1=\frac{2\lambda^2(1-\alpha)}{1-\lambda^2},$$

$$c_1+c_2\lambda+.....=\frac{2\lambda(1-\alpha)}{1-\lambda^2}$$

olduğundan $c_1=0$ ve $c_2=2(1-\alpha)$ olur. Böylece

$$\frac{1-\alpha}{2}\left(1+\frac{2\left(2(1-\alpha)-\left|c_1\right|\right)^2}{4(1-\alpha)^2-\left|c_1\right|^2+\left|2(1-\alpha)c_2-c_1^2\right|}\right)=1-\alpha$$

eşitliği elde edilir.

$f(\lambda)-1$ fonksiyonunun Teorem 2.4'te sıfırdan başka sıfırları yoksa, aşağıdaki değerlendirmeyi elde ederiz.

Teorem 2.5. $f(\lambda)\in K(\alpha)$, $f(\lambda)-1$ fonksiyonunun E 'de $\lambda=0$ 'dan başka sıfırları yok ve $c_1>0$ olsun. Varsayalım ki $c\in\partial E$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısal limitine sahiptir ve $f(c)=\alpha$. Bu takdirde

$$\left|f'(c)\right|\geq\frac{1-\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{2}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}\right) \tag{2.6}$$

eşitsizliği bulunur. (2.6) ilişkisinde

$$f(\lambda)=\frac{1+(1-2\alpha)\lambda e^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}}{1-\lambda e^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}}$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır. Burada $c_1>0$ ve $\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}<0$ 'dır.

İspat. $c_1>0$ olsun ve $\mu(\lambda)$ Teorem 2.4'deki gibi olsun. (2.5) eşitliği göz önünde bulundurulduğunda, $\ln\mu(\lambda)$ fonksiyonunun analitik olduğu bir dalı seçilirse

$$\ln\mu(0)=\ln\left(\frac{|c_1|}{2(1-\alpha)}\right)<0$$

olur. Diğer yandan

$$\phi(\lambda)=\frac{\ln\mu(\lambda)-\ln\mu(0)}{\ln\mu(\lambda)+\ln\mu(0)}$$

yardımcı fonksiyonunu ele alalım. Açıktır ki, $\phi(\lambda)$ fonksiyonu E 'de analitik bir fonksiyon, $\phi(0)=0$, $|\lambda|<1$ için $|\phi(\lambda)|\leq 1$, ve ayrıca $c\in\partial E$ için $|\phi(c)|=1$ 'dir. Bu yüzden $\phi(\lambda)$ fonksiyonunu (1.1) eşitsizliğine uygulayabiliriz.

$$\phi'(\lambda)=2\ln\mu(0)\frac{\mu'(\lambda)}{\mu(\lambda)\left(\ln\mu(\lambda)+\ln\mu(0)\right)^2},$$

ve

$$\phi'(c) = 2\ln\mu(0)\frac{\mu'(c)}{\mu(c)\left(\ln\mu(c)+\ln\mu(0)\right)^2}$$

olduğu için,

$$\begin{aligned}
1 \leq |\phi'(c)| &= \frac{2|\ln\mu(0)|}{|\ln\mu(c)+\ln\mu(0)|^2}\left|\frac{\mu'(c)}{\mu(c)}\right| \\
&= \frac{-2\ln\mu(0)}{\ln^2\mu(0)+\arg^2\mu(c)}\left|\frac{\varphi'(c)}{B(c)} - \frac{\varphi(c)B'(c)}{B(c)^2}\right| \\
&= \frac{-2\ln\mu(0)}{\ln^2\mu(0)+\arg^2\mu(c)}\left|\frac{\varphi(c)}{c^2}\right|\left|\frac{b\varphi'(c)}{\varphi(c)} - \frac{cB'(c)}{B(c)}\right| \\
&= \frac{-2\ln\mu(0)}{\ln^2\mu(0)+\arg^2\mu(c)}\left\{|\varphi'(c)| - |B'(c)|\right\} \\
&\leq \frac{-2\ln\mu(0)}{\ln^2\mu(0)}\left\{2\frac{|f'(c)|}{1-\alpha} - 1\right\} = \frac{-2}{\ln\mu(0)}\left\{2\frac{|f'(c)|}{1-\alpha} - 1\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$1 \leq \frac{-2}{\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}\left\{\frac{2|f'(c)|}{1-\alpha} - 1\right\}$$

ve

$$|f'(c)| \geq \frac{1-\alpha}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}\right)$$

elde ederiz. Şimdi, (2.6) eşitsizliğinin kesinliğini gösterelim.

$$f(\lambda) = \frac{1+(1-2\alpha)\lambda e^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}}{1-\lambda e^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Basit hesaplamalar ile

$$f'(z)=\frac{(1-2\alpha)\left[e^{\frac{1+z}{1-z}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}+\frac{2}{(1-z)^2}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}e^{\frac{1+z}{1-z}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}z\right]\left(1-ze^{\frac{1+z}{1-z}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}\right)}{\left(1-ze^{\frac{1+z}{1-z}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}\right)^2}$$

$$+\frac{\left[e^{\frac{1+z}{1-z}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}+\frac{2}{(1-z)^2}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}e^{\frac{1+z}{1-z}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}z\right]\left(1+(1-2\alpha)ze^{\frac{1+z}{1-z}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}\right)}{\left(1-ze^{\frac{1+z}{1-z}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}}\right)^2}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$|f'(-1)|=\frac{1-\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{2}\ln\frac{c_1}{2(1-\alpha)}\right)$$

eşitlik hali gösterilmiş olur.

Aşağıdaki teoremde, f fonksiyonunun biri $\lambda=0$ diğeri $\lambda_1\neq 0$ olmak üzere Taylor açılımlarının sıfırdan farklı ilk katsayıları kullanılarak $f'(c)$ açısal türevinin modülü aşağıdan değerlendirilmiştir.

Teorem 2.6. $f(\lambda)\in K(\alpha)$ ve $0<|\lambda_1|<1$ için $f(\lambda_1)=1$ olsun. Kabul edelim ki $c\in\partial E$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısal limitine sahiptir ve $f(c)=\alpha$ olsun. Bu takdirde

$$|f'(c)|\geq\frac{1-\alpha}{2}\left(1+\frac{1-|\lambda_1|^2}{|c-\lambda_1|^2}+\frac{2(1-\alpha)|\lambda_1|-|f'(0)|}{2(1-\alpha)|\lambda_1|+|f'(0)|}\right.\tag{2.7}$$
$$\left.\times\left[1+\frac{4(1-\alpha)^2|\lambda_1|^2+|f'(0)||f'(\lambda_1)|\left(1-|\lambda_1|^2\right)-4(1-\alpha)\left(1-|\lambda_1|^2\right)|f'(\lambda_1)|-2(1-\alpha)|f'(0)|}{4(1-\alpha)^2|\lambda_1|^2+|f'(0)||f'(\lambda_1)|\left(1-|\lambda_1|^2\right)+4(1-\alpha)\left(1-|\lambda_1|^2\right)|f'(\lambda_1)|+2(1-\alpha)|f'(0)|}\frac{1-|\lambda_1|^2}{|c-\lambda_1|^2}\right]\right)$$

eşitsizliği bulunur. (2.7) eşitsizliğinin kesinliği; $|f'(0)|$ ve $|f'(\lambda_1)|$ ifadelerinin mümkün her bir değeri için sağlanır.

İspat. $\rho(\lambda)=\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}$ olsun. $\kappa:E\to E$ analitik ve bir $\lambda_1\in E$ olsun. Bu takdirde, Schwarz-Pick Lemma'dan

$$|\kappa(\lambda)|\leq\frac{|\kappa(\lambda_1)|+|\rho(\lambda)|}{1+|\kappa(\lambda_1)||\rho(\lambda)|}\tag{2.8}$$

eşitsizliğini elde edilir.

Eğer $\varpi : E \to E$ analitik fonksiyonu ve $0<\left|\lambda_1\right|<1$ olursa,

$$\kappa(\lambda)=\frac{\varpi(\lambda)-\varpi(0)}{\lambda\left(1-\overline{\varpi(\lambda)}\varpi(\lambda)\right)}$$

fonksiyonu tanımlayabiliriz. (2.7) eşitsizliğinden,

$$\left|\frac{\varpi(\lambda)-\varpi(0)}{1-\overline{\varpi(0)}\varpi(\lambda)}\right|\leq|\lambda|\frac{\left|\dfrac{\varpi(\lambda_1)-\varpi(0)}{\lambda_1\left(1-\overline{\varpi(0)}\varpi(\lambda_1)\right)}\right|+|\rho(\lambda)|}{1+\left|\dfrac{\varpi(\lambda_1)-\varpi(0)}{\lambda_1\left(1-\overline{\varpi(0)}\varpi(\lambda_1)\right)}\right||\rho(\lambda)|}$$

ve

$$|\varpi(\lambda)|\leq\frac{|\varpi(0)|+|\lambda|\dfrac{|K|+|\rho(\lambda)|}{1+|K||\rho(\lambda)|}}{1+|\varpi(0)||\lambda|\dfrac{|K|+|\rho(\lambda)|}{1+|K||\rho(\lambda)|}} \tag{2.9}$$

elde edilir. Burada

$$K=\frac{\varpi(\lambda_1)-\varpi(0)}{\lambda_1\left(1-\overline{\varpi(0)}\varpi(\lambda_1)\right)}$$

şeklindedir.

Genelliği bozmadan, $c=1$ olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\varpi(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}$$

olarak alırsak, o zaman

$$\varpi(0)=\frac{\varphi'(0)}{-\lambda_1},\qquad \varpi(\lambda_1)=\frac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}$$

ve

$$K=\frac{\varphi'(\lambda_1)\dfrac{\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}+\dfrac{\varphi'(0)}{\lambda_1}}{\lambda_1\left(1+\dfrac{\overline{\varphi'(0)}}{\lambda_1}\varphi'(\lambda_1)\dfrac{\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right)}$$

olur. Burada $|K|\leq 1$'dir. $|\varpi(0)|=\gamma$ ve

$$M=\frac{\left|\varphi'(\lambda_1)\frac{\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|+\left|\frac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|}{|\lambda_1|\left(1+\left|\frac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|\left|\varphi'(\lambda_1)\frac{\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|\right)}$$

olarak alalım. (2.9) eşitsizliğinden,

$$|\varphi(\lambda)|\le|\lambda||\rho(\lambda)|\frac{\gamma+|\lambda|\frac{M+|\rho(\lambda)|}{1+M\rho(\lambda)}}{1+\gamma|\lambda|\frac{M+|\rho(\lambda)|}{1+M\rho(\lambda)}}$$

ve

$$\frac{1-|\varphi(\lambda)|}{1-|\lambda|}\ge\frac{1+\gamma|\lambda|\frac{M+|\rho(\lambda)|}{1+M\rho(\lambda)}-\gamma|\lambda||\rho(\lambda)|-|\lambda|^2|\rho(\lambda)|\frac{M+|\rho(\lambda)|}{1+M\rho(\lambda)}}{\left(1-|\lambda|\right)\left(1+\gamma|\lambda|\frac{M+|\rho(\lambda)|}{1+M\rho(\lambda)}\right)}=\Sigma$$

elde edilir.

$$G(\lambda)=1+\gamma|\lambda|\frac{M+|\rho(\lambda)|}{1+M|\rho(\lambda)|}$$

ve

$$H(\lambda)=1+M|\rho(\lambda)|$$

olarak işaretleyelim. Bu taktirde

$$\Sigma=\frac{1-|\lambda|^2|\rho(\lambda)|^2}{\left(1-|\lambda|\right)G(\lambda)H(\lambda)}+M|\rho(\lambda)|\frac{1-|\lambda|^2}{\left(1-|\lambda|^2\right)H(\lambda)G(\lambda)}+M\gamma|\lambda|\frac{1-|\rho(\lambda)|^2}{\left(1-|\lambda|\right)G(\lambda)H(\lambda)}$$

olur. Ayrıca

$$\lim_{x\to1}G(\lambda)=1+\gamma,\lim_{x\to1}H(\lambda)=1+M$$

ve

$$1-|\rho(\lambda)|^2=1-\left|\frac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}\right|^2=\frac{\left(1-|\lambda_1|^2\right)\left(1-|\lambda|^2\right)}{\left|1-\overline{\lambda_1}\lambda\right|^2}$$

olduğundan, (2.10) ’da açısal limit alınırsa,

$$\left|\varphi'(1)\right| \geq \frac{2}{(1+\rho)(1+M)}\left(1+\frac{1-|\lambda_1|^2}{|1-\lambda_1|^2}+M+\gamma M\frac{1-|\lambda_1|^2}{|1-\lambda_1|^2}\right)$$

$$=1+\frac{1-|\lambda_1|^2}{|1-\lambda_1|^2}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\left(1+\frac{1-M\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{1+M|1-\lambda_1|^2}\right)$$

eşitsizliğini elde edilir. Ayrıca

$$\frac{1-\gamma}{1+\gamma}=\frac{1-|\varpi(0)|}{1+|\varpi(0)|}=\frac{1-\dfrac{|\varphi'(0)|}{|\lambda_1|}}{1+\dfrac{|\varphi'(0)|}{|\lambda_1|}}=\frac{|\lambda_1|-|\varphi'0|}{|\lambda_1|+|\varphi'(0)|}=\frac{|\lambda_1|-\dfrac{|f'(0)|}{2(1-\alpha)}}{|\lambda_1|+\dfrac{|f'(0)|}{2(1-\alpha)}}=\frac{2(1-\alpha)|\lambda_1|-|f'(0)|}{2(1-\alpha)|\lambda_1|+|f'(0)|}$$

ve

$$\frac{1-M}{1+M}=\frac{1-\dfrac{\left|\dfrac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|+\left|\dfrac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|}{|\lambda_1|\left(1+\left|\dfrac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|\left|\dfrac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|\right)}}{1+\dfrac{\left|\dfrac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|+\left|\dfrac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|}{|\lambda_0|\left(1+\left|\dfrac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|\left|\dfrac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|\right)}}$$

$$=\frac{|\lambda_1|\left(1+\left|\frac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|\left|\frac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|\right)-\left|\frac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|-\left|\frac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|}{|\lambda_1|\left(1+\left|\frac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|\left|\frac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|\right)+\left|\frac{\varphi'(\lambda_1)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}\right|+\left|\frac{\varphi'(0)}{\lambda_1}\right|}$$

$$=\frac{|\lambda_1|\left(1+\frac{|f'(0)|}{2(1-\alpha)|\lambda_1|}\frac{\frac{|f'(\lambda_0)|}{2(1-\alpha)}\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{|\lambda_1|}\right)-\frac{\frac{|f''(\lambda_0)|}{2(1-\alpha)}\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{|\lambda_1|}-\frac{|f'(0)|}{2(1-\alpha)|\lambda_1|}}{|\lambda_1|\left(1+\frac{|f'(0)|}{2(1-\alpha)|\lambda_1|}\frac{\frac{|f'(\lambda_0)|}{2(1-\alpha)}\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{|\lambda_1|}\right)+\frac{\frac{|f''(\lambda_1)|}{2(1-\alpha)}\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{|\lambda_1|}+\frac{|f'(0)|}{2(1-\alpha)|\lambda_1|}}$$

$$=\frac{4(1-\alpha)^2|\lambda_1|^2+|f'(0)||f'(\lambda_1)|\left(1-|\lambda_1|^2\right)-4(1-\alpha)\left(1-|\lambda_1|^2\right)|f'(\lambda_1)|-2(1-\alpha)|f'(0)|}{4(1-\alpha)^2|\lambda_1|^2+|f'(0)||f'(\lambda_1)|\left(1-|\lambda_1|^2\right)+4(1-\alpha)\left(1-|\lambda_1|^2\right)|f'(\lambda_1)|+2(1-\alpha)|f'(0)|}$$

olduğundan dolayı

$$|f'(1)|\geq\frac{1-\alpha}{2}\left(1+\frac{1-|\lambda_1|^2}{|1-\lambda_1|^2}+\frac{2(1-\alpha)|\lambda_1|-|f'(0)|}{2(1-\alpha)|\lambda_1|+|f'(0)|}\right.$$

$$\left.\times\left[1+\frac{4(1-\alpha)^2|\lambda_1|^2+|f'(0)||f'(\lambda_1)|\left(1-|\lambda_1|^2\right)-4(1-\alpha)\left(1-|\lambda_1|^2\right)|f'(\lambda_1)|-2(1-\alpha)|f'(0)|}{4(1-\alpha)^2|\lambda_1|^2+|f'(0)||f'(\lambda_1)|\left(1-|\lambda_1|^2\right)+4(1-\alpha)\left(1-|\lambda_1|^2\right)|f'(\lambda_1)|+2(1-\alpha)|f'(0)|}\frac{1-|\lambda_1|^2}{|1-\lambda_1|^2}\right]\right)$$

eşitsizliğini elde edilir.

$\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varphi'(\lambda)=2(1-\alpha)\frac{f'(\lambda)}{\left(1-2\alpha+f(\lambda)\right)^2}$$

ve

$$|\varphi'(1)|=2\frac{|f'(1)|}{1-\alpha}$$

olur. Böylece (2.7) eşitsizliği elde edilir. Şimdi, (2.7) eşitsizliğinin kesinliğini gösterelim.

$$\varpi(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda\frac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}$$

fonksiyonu E birim diskinde analitik ve $|\lambda|<1$ için $|\varpi(\lambda)|\leq 1$ olduğundan $|\varphi'(0)|\leq|\lambda_1|$ ve $|\varphi'(\lambda_1)|\leq\dfrac{|\lambda_1|}{1-|\lambda_1|^2}$ olur. Ayrıca $\lambda_1\in(-1,0)$ olmak üzere keyfi x ve y sayıları için, öyle ki $0\leq x\leq 2(1-\alpha)|\lambda_1|$, $0\leq y\leq 2(1-\alpha)\dfrac{|\lambda_1|}{1-|\lambda_1|^2}$ ifadeleri sağlanır. Şimdi

$$T=\frac{\dfrac{y\left(1-|\lambda_1|^2\right)}{\lambda_1}+\dfrac{x}{\lambda_1}}{\lambda_1\left(1+xy\dfrac{1-|\lambda_1|^2}{\lambda_1^2}\right)}=\frac{1}{\lambda_1^2}\frac{y\left(1-|\lambda_1|^2\right)+x}{1+xy\dfrac{1-|\lambda_1|^2}{\lambda_1^2}}$$

fonksiyonunu ele alınsın;

$$m(\lambda)=\lambda\frac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}\frac{\dfrac{-x}{\lambda_1}+\lambda\dfrac{T+\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}{1+T\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}}{1-\dfrac{x}{\lambda_1}\lambda\dfrac{T+\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}{1+T\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}} \tag{2.11}$$

karmaşık fonksiyonu E'de analitik ve $|\lambda|<1$ için $|m(\lambda)|\leq 1$ olur. Bundan başka

$$\frac{f(\lambda)-1}{1-2\alpha+f(\lambda)}=\lambda\frac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}\frac{\dfrac{-x}{\lambda_1}+\lambda\dfrac{T+\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}{1+T\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}}{1-\dfrac{x}{\lambda_1}\lambda\dfrac{T+\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}{1+T\dfrac{\lambda-\lambda_1}{1-\overline{\lambda_1}\lambda}}}$$

olsun. Buradan, $|f'(0)|=2(1-\alpha)x$,

$$2(1-\alpha)\frac{f'(\lambda)}{\left(1-2\alpha+f(\lambda)\right)^2}=-\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2}\frac{\dfrac{-x}{\lambda_1}+T\lambda_1}{1-\dfrac{x}{\lambda_1}\lambda_1 T}=\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2}\frac{\dfrac{-x}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_1^2}\dfrac{y\left(1-|\lambda_1|^2\right)+x}{1+xy\dfrac{1-|\lambda_1|^2}{\lambda_1^2}}\lambda_1}{1-\dfrac{x}{\lambda_1}\lambda_1\dfrac{1}{\lambda_1^2}\dfrac{y\left(1-|\lambda_1|^2\right)+x}{1+xy\dfrac{1-|\lambda_1|^2}{\lambda_1^2}}}$$

ve $|f'(\lambda_1)|=2(1-\alpha)y$ alınırsa, (2.11)'den basit hesaplamalarla,

$$2\frac{f'(1)}{1-\alpha}=1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}+\frac{\left(1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}\frac{1-T^2}{(1+T)^2}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda_1}\right)+\frac{x}{\lambda_1}\left(1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}\frac{1-T^2}{(1+T)^2}\right)\left(-\frac{x}{\lambda_1}+1\right)}{\left(-\frac{x}{\lambda_1}+1\right)^2}$$

$$=1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}+\frac{1+\frac{x}{\lambda_1}}{1-\frac{x}{\lambda_1}}\left(1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}\frac{1-T}{1+T}\right)$$

$$=1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}+\frac{x+\lambda_1}{-x+\lambda_1}\left(1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}\frac{\lambda_1^2+xy\left(1-\lambda_1^2\right)-y\left(1-\lambda_1^2\right)-x}{\lambda_1^2+xy\left(1-\lambda_1^2\right)+y\left(1-\lambda_1^2\right)+x}\right)$$

ve

$$\left|f'(1)\right|=\frac{1-\alpha}{2}\left[1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}+\frac{x+\lambda_1}{-x+\lambda_1}\left(1+\frac{1-\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}\frac{\lambda_1^2+xy\left(1-\lambda_1^2\right)-y\left(1-\lambda_1^2\right)-x}{\lambda_1^2+xy\left(1-\lambda_1^2\right)+y\left(1-\lambda_1^2\right)+x}\right)\right]$$

elde edilir. Diğer yandan $\lambda_1\in(-1,0)$ olduğundan, son denklem (2.7) eşitsizliğinin kesinliğini gösterir.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada son yıllardaki çalışmaların konusu olan sınırda Schwarz Lemması'nın farklı versiyonları incelenmiştir. M , birim disk E 'de analitik olan $f(\lambda)=1+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\dots$ fonksiyonlar sınıfını göstersin. Ayrıca $K(\alpha)$, $\frac{1}{2}\leq\alpha<1$ olduğu yerde

$$\Re\left(1+\frac{\lambda f'(\lambda)}{f(\lambda)}\right)>\frac{3\alpha-1}{2\alpha}, \lambda\in E$$

eşitsizliğini sağlayan tüm $f(\lambda)$ fonksiyonlarının içerdiği M alt sınıfı olsun. Bu koşulları sağlayan fonksiyonlar sınıfı ele alınmıştır. Bu sınıf için f fonksiyonunun birim diskin sınırındaki bir c noktasında açısal türevinin modülü için alttan değerlendirmeler elde edilmiştir. Bu değerlendirmelerde $f(c)=\alpha$ açısal limitinin mevcutluğu varsayılmıştır.

4. KAYNAKLAR

Akyel, T. and Örnek, B. N. (2015). A Sharp Schwarz lemma at the boundary, *J. Korean Soc. Math. Ser. B: Pure Appl. Math.,* 22(3), 263-273.

Akyel, T. and Örnek, B.N. (2017). Some Remarks on Schwarz lemma at the boundary, *Filomat*, 31(13), 4139-4151.

Aydınoğlu, S. and Örnek, B.N. (2018). Applications of the Jack's lemma for the holomorphic functions, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 48(2), 125-139.

Ahlfors, L. V. (1979). *Complex Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Ahlfors, L. V. (1938). An extension of Schwarz's Lemma. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43, 359-364.

Azeroğlu Aliyev T. and B. N. Örnek. (2013). A refined Schwarz inequality on the Boundary. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 58, 571–577.

Beardon A. F. and Minda D. (2004). A multi-point Schwarz-Pick Lemma. *J. Anal. Math*., 92, 81-104.

Beardon A. F. and Carne T. K. (1992*).* A Strengthening of the Schwarz-Pick Inequality. *The American Mathematicaly Monthly,* 99(3), 216-217.

Boas Harold P., Julius and Julia. (2010). Mastering the art of the Schwarz Lemma. *American Mathematical Monthly,* 117(9), 770-785.

Burns, D.M. and Krantz, S.G. (1994), Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz Lemma at the boundary. *J. Amer. Math. Soc.*, 7(3), 661-676.

Carathéodory, C. (1954). *Theory of Functions* (2). New York: Chelsea.

Çatal, B. and Örnek, B. N. (2018). Some results for classes of holomorphic functions, Some results for classes of holomorphic functions. *Gulf Journal of Mathematics*, 6(1), 46-60.

Çatal, B. and Örnek, B. N. (2019). Applications of Jack's lemma for certain subclasses of holomorphic functions on the unit disc, *Commun. Korean Math. Soc.*, 34(2), 543-555.

Dineen S. (1989). *The Schwarz lemma*. New York: Oxford University Press.

Dubinin, V. N. (2004). The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disc.*, Journal of Mathematical Sciences,* 122(6), 3623-3629.

Dubinin, V. N. (2007). Applications of the Schwarz lemma to inequalities for entirefunctions with constraints on zeros. *Journal of Mathematical Sciences*, 143(3), 3069–3076.

Dubinin V. N. (2000). Distortion theorems for polynomials on a circle. *Sbornik: Mathematics,* 191(12), 1797-1807.

Dubinin V. N. (2002). On an application of conformal maps to inequalities for rational functions. *Izvestiva: Mathematics*, 66(2) 285-297.

Dubinin V. N. (2005). Schwarz's lemma and estimates of coefficients for regular functionswith free domain of definition. *Matem. Sbornik*, 196*,* 53-74; (2005). *English transl. in Sbornik: Mathematics*, 196(11), 1605-1625.

Dubinin V. N. and Olesov A. V. (2004). Applitation of conformal mapping toinequalities for polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 122(6), 3630–3640.

Duren P. L. (1983). Univalent Functions, Springer-Verlag, New York & Berlin.

Goluzin G. M. (1969). G. M. Goluzin. Geometricheskaya teoriya funktsi˘ı kompleksnogo peremennogo. Second edition. Edited by V. I. Smirnov. With a supplement by N. A. Lebedev, G. V. Kuzmina and Ju. E. Alenicyn. Izdat. "Nauka", Moscow, 1966.

Gök, B. and Örnek, B. N. (2017). Estimates for Second non-tangential derivatives at the boundary, *Commun. Korean Math. Soc.*, 32(3), 689-707.

Jack, I. S. (1971). Functions starlike and convex of order alfa. *J. London Math. Soc.*, 3(3),469-474.

Jeong M. (2011). The Schwarz lemma and boundary fixed points. *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math.,* 18(3), 275-284.

Jeong M. (2014). The Schwarz lemma and its application at a boundary point. *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math.,* 21(3):219-227.

Krantz, S. G. (2011). The Schwarz Lemma at the Boundary. *Complex Variables and Elliptic Equations,* 56(5), 455-468.

Markushevich A. I. (1965). *Theory of functions of a complex variable* (I-II-III).Prentice-Hall.

Mateljević, M. (2015). Note on Rigidity of Holomorphic Mappings & Schwarz and Jack Lemma , *ResearchGate*.

Mateljević, M. (2016). Schwarz lemma, the Carathéodory and Kobayashi Metrics and Applications in Complex Analysis. *XIX Geometrical Seminar*, At Zlatibor, Sunday, August 28, 2016 Sunday, September 4, 2016.

Mateljević, M. (2016). Ahlfors-Schwarz lemma, Hyperbolic geometry, the Carathéodory and Kobayashi Metrics, *Symposium Mathematics and Applications*, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, VII(1).

Mercer P. R. (1997). Sharpened Version of the Schwarz Lemma. *Journal of Math. Anal. And Applications,* 205, 508-511.

Mercer P. R. (2006). Schwarz-Pick-Type Estimates for the Hyperbolic Derivative, *Hindawi Publishing Corporation, Journal of In equalities and Applications*, 12(2),1-6.

Osserman R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128, 3513-3517.

Osserman R. (1999). A new variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors Lemma. *Manuscripta math.,* 100, 123-129.

Osserman R. (1999). From Schwarz to Pick to Ahlfors and beyond. *Amer. Math. Soc.*, 46, 868-873.

Örnek, B. N. (2013). Sharpened forms of the Schwarz lemma on the boundary. *Bull. Korean Math. Soc.,* 50(6), 2053-2059.

Örnek B. N. and Akyel T. (2016). Sharpened forms of the Generalized Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 126(1), 69-78.

Örnek B.N. and Düzenli T. (2018). Boundary Analysis for the Derivative of Driving Point Impedance Functions. *IEEE Transactions on circuits and Systems-II: Express Briefs*, 65(9), 1149-1153.

Örnek B.N. and Düzenli T. (2019). On boundary analysis for derivative of driving point impedance functions and its circuit applications, *IET Circuits, Devices & Systems*, 13(2), 145-152.

Reza F.M. (1962). A Bound for the Derivative of Positive Real Functions. *SIAM Review,*4(1), 40-42.

Richards, P. I. (1947). A special class of functions with positive real part in a half-plane, *Duke Math. J.,* 14(3), 777-789.

Pommerenke C. (1992). Boundary behaviour of conformal maps, volume 299 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	: Batuhan ÇATAL
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 03.07.1991 - Amasya
Medeni hali	: Bekar
e-posta	: batuhancatal0591@gmail.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek lisans	Amasya Üniversitesi / Matematik	2019
Pedagojik Form.	Amasya Üniversitesi / Matematik	2015
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Matematik	2013
Lise	Amasya Anadolu Lisesi	2009

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Çatal, B. and Örnek, B. N. (2018). Some results for classes of holomorphic functions, *Gulf Journal of Mathematics*, 6(1), 46-60.

Çatal, B. And Örnek, B. N. (2019). Applications of Jack's lemma for certain subclasses of holomorphic functions on the unit disc, *Commun. Korean Math. Soc.*, 34(2), 543-555.