T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4 BOYUTLU GALİLE UZAYINDA BAZI FONKSİYONLARIN SİNGÜLERLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MÜCAHİT SEYFULLAH KARAMAN

HAZİRAN

MÜCAHİT SEYFULLAH KARAMAN	**MATEMATİK ANABİLİM DALI**	**HAZİRAN 2019**

4 BOYUTLU GALİLE UZAYINDA BAZI FONKSİYONLARIN SİNGÜLERLİKLERİ

Mücahit Seyfullah KARAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Tevfik ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2019

Mücahit Seyfullah Karaman tarafından hazırlanan “4 Boyutlu Galile Uzayında Bazı Fonksiyonların Singülerlikleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tevfik ŞAHİN

Matematik, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Matematik, Tokat Gazi Osman Paşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye : Prof. Dr. Keziban ORBAY

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK

İstatistik (13b-4) Mimarlık, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Zehra ÖZDEMİR

Matematik, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Tez Savunma Tarihi: 13/06/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….……

Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Saygılarımla…

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mücahit Seyfullah KARAMAN
13/06/2019

4 BOYUTLU GALİLE UZAYINDA BAZI FONKSİYONLARIN SİNGÜLERLİKLERİ

(Yüksek Lisans)

Mücahit Seyfullah KARAMAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm olan giriş bölümünde Galile geometrisi ve 4-Boyutlu Galile uzayı hakkında kısa bir literatür özeti verildi. İkinci bölüm olan genel bilgiler bölümünde bu tezde kullanılan bazı temel teoremler ve kavramlar verildi. Üçüncü bölüm olan materyal ve metot bölümünde tekillik teorisi kısaca tanıtıldı. Dördüncü bölüm olan bulgular ve tartışma bölümü ise üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci ve ikinci kısımda 4- Boyutlu Galile uzayında tekillik teorisini uygulamak için dayanak ve uzaklık fonksiyonları tanımlandı. Bu fonksiyonların tekil noktalarının tekillik derecesi bulmak için fonksiyonların gerekli türevleri hesaplandı. Üçüncü kısımda tekillik teorisinde önemli rolleri olan versal ve p- versal dallanma durumları bu fonksiyonlar için ifade edildi. Beşinci bölüm olan sonuç ve öneriler bölümünde kısa değerlendirmeler verildi. Sonuç ve öneriler bölümünün sonunda sırasıyla kaynakların bir listesi ve kısa bir özgeçmiş verildi.

Sayfa Adedi	: 63
Anahtar Kelimeler	: 4- Boyutlu Galile uzayı, Galile dayanak fonksiyonu, Galile uzaklık fonksiyonu A_k-Tekilliği,
Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Tevfik ŞAHİN

SINGULARITIES OF SOME FUNCTİONS'S IN 4 – DIMENSIONAL GALILEAN SPACE

(M. Sc. Thesis)

Mücahit Seyfullah KARAMAN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, a short summary of literature about the Galilean Geometry and 4-dimensional Galilean space is given. Secondly, fundemental knowledge and some theorems which are used in this thesis are given as general information chapter. In the third chapter, material and method, the singularities theory is met shortly. The fourth chapter, findings chapter, consists of three sections. In the First and second section, height function and distance function in the 4-dimensional Galilean space are defined for applying singularity theory. Necessary derivatives are computed to find singularity order of singular points of these functions. Thirdly, being versal unfolding and (p)-versal unfolding situations which have important roles in singularity theory are expressed for these functions. In the results and suggestions chapter, short evaluations are given. The last the results and suggestions chapter chapters contain a list of references and short autobiograpy of the author, respectively.

PageNumber : 63

KeyWords : 4-dimensional Galilean space, Galilean height function, Galilean distance function and A_k -singularity

Supervisor : Asist. Prof. Tevfik ŞAHİN

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Tevfik ŞAHİN'e teşekkürü bir borç bilirim. Değerli zamanlarını ayırarak tez savunma sınavımda bulunan ve önerileriyle tezimize katkılar sağlayan Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN, Prof. Dr. Keziban ORBAY, Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK ve Dr. Öğr. Üyesi Zehra ÖZDEMİR hocalarıma teşekkür ederim. Ayrıca tez dönemi boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim eşim, annem ve babama teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$	n-boyutlu Reel vektör uzayı
G^{n}	n-boyutlu Galile uzayı
α	Galile uzayında birim hızlı eğri
$\boldsymbol{T}$	Galile uzayında verilmiş bir eğrinin birim teğet vektör alanı
$\boldsymbol{N}$	Galile uzayında verilmiş bir eğrinin birim normal vektör alanı
$\boldsymbol{B}$	Galile uzayında verilmiş bir eğrinin ikinci birim normal vektör alanı
$\boldsymbol{E}$	Galile uzayında verilmiş bir eğrinin üçüncü birim normal vektör alanı
$\boldsymbol{V} \times_G \boldsymbol{W}$	V ve W vektörlerinin Galile vektörel çarpımı
$\lVert x \rVert_G$	$\vec{x}$ vektörünün Galile normu
A_k	k. dereceden tekillik
S_G^2	Galile birim küre
f_d	Bir değişkenli uzaklık fonksiyonu
f_h	Bir değişkenli dayanak fonksiyonu
F_d	Galile uzayında uzaklık fonksiyonu
F_h	Galile uzayında dayanak fonksiyonu
S_F	F fonksiyonlar ailesinin tekil (singüler) kümesi
$f', f'', \dots, f^n$	f fonksiyonunun türevleri
$J^k\alpha(t)$	α eğrisinin k. dereceden jeti

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
BS	Kelebek yüzeyi (Butterfly surface)
SW	Kırlangıç kuyruğu yüzeyi (Swallowtail surface)
C	Köşeli eğri (Cuspidal curve)

1. GİRİŞ

Geometri çok eski çağlardan beri vardır. Ancak geometri ismi bu ilmin ilk sistematik hale gelmeye başladığı eski Yunanlılardan bu yana kullanılmaktadır. Geometri başlangıçta, düzlemdeki ve uzaydaki şekillerin incelenmesini konu edindi. Söz konusu şekiller somut nesnelerden türetilmesine rağmen, geometri deneysel yöntemlerin kullanılmasını çok erken terk etti. Bunun tersine şekilleri, gerçek nesnelerin ideal biçimleri olarak indirgemeye çalıştı. Öte yandan geometri gözlemi de ölçmeyi de kullanmayan postulatlar ve sonuçlarla işleyen bir kanıtlama biçimine başvurdu.

İlk çağlardan beri hiperbolik geometri keşfedilene kadar Öklid geometrisinin evrenselliği hüküm sürdü. 19. yüzyılın ilk yarısında Öklid geometrisinde bir boşluk olabileceği düşüncesiyle yola çıkan Gauss (1816), Lobachevsky (1829) ve Bolyai (1832) matematik tarihinde, bin yılın düşüncesini yıkıp önemli bir buluş yaparak; Öklidyen geometri kadar geçerli yeni bir geometrik sistem olan hiperbolik geometrinin varlığını ortaya koydular.

Öklid geometrisinin tek olmadığı dikkate alınırsa, hiperbolik geometrinin de Öklidyen olmayan tek geometri olmadığı gözden kaçırılmamalıdır. Gerçekten Öklidyen ve hiperbolik geometrinin yanı sıra birçok geometrik sistem vardır.

1870 yılında ise Cayley-Klein'in yaptığı çalışmalar sonucunda, düzlemde Öklid geometrisini de içeren 9 farklı geometrik sistemin olduğu gösterildi. Bu geometriler, açıların ve uzunlukların; eliptik, parabolik ve hiperbolik ölçülmesine göre adlandırıldı. Örneğin; Öklid geometrisi açının eliptik ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle, Minkowski geometrisi açının hiperbolik ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle ve Galile geometrisi ise açı ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle adlandırılmıştır.

Çizelge 1.1. Açı ve Uzunluk Ölçülerine Göre Geometriler

GEOMETRİLER		**UZUNLUKLARIN ÖLÇÜSÜ**		
		ELİPTİK	PARABOLİK	HİPERBOLİK
AÇILARIN ÖLÇÜSÜ	ELİPTİK	Eliptik Geometri	Öklid Geometri	Hiperbolik Geometri
	PARABOLİK	Co-Eliptik Geometri	Galile Geometri	Co-Minkowski Geometri
	HİPERBOLİK	Co-Hiperbolik Geometri	Minkowski Geometri	Doubly Hiperbolik Geometri

Öklidyen olmayan geometri denildiğinde bugün bile ilk olarak akla hiperbolik geometri ve nadiren de eliptik geometri gelmektedir. Bu durum büyük ölçüde fiziksel uzayın doğası hakkındaki eski tartışmaların etkisinden kaynaklanmaktadır. Bundan dolayı hiperbolik geometri ve eliptik geometri dışındaki diğer Öklidyen olmayan geometrilerin sadece özel olarak bilinmesine yol açmıştır. Bunun sonucu olarak, diğer Öklidyen olmayan geometrilere hiperbolik geometriyle kıyaslanamayacak kadar az ilgi gösterilmiştir. Bu yüzden, Öklidyen olmayan bir geometri olarak Galile geometrisi güncel bir çalışma alanıdır.

Galile geometrisinin daha doğru adı, Galile rölativite prensipleriyle birlesen geometridir. Bu ifade uzun olduğundan kısaca Galile geometrisi adı verilmiştir. Galile geometrisi ile ilgili ilk kitap Yaglom (1979)'a aittir. Galile geometrisinin fiziksel temellerinin anlatıldığı bu kitapta Galile geometrisiyle ilgili temel bilgiler bulunabilir. Galile uzayında yüzeylerle ilgili bazı temel kavramlar Röschel (1984), Divjak (2003), Divjak ve Sipus (2003) ve Sipus (2008)' un çalışmalarında vardır. Pavkovic ve Kamenarovic (1987) çalışmasında Galile uzayında eğrilerle ilgili bazı temel kavramlar bulunabilir.

Ayrıca Galile geometrisinde vektör çarpımının lineer olmaması, burada yapılacak işlemlerde diğer geometrilere göre daha dikkatli olmamıza ve işlemlerin daha da uzamasına yol açarken bu durum bazen de bazı basitliklere yol açmaktadır. Bu nedenle Öklid geometrisinde genel durumlar için çözülemeyen bazı problemler Galile geometrisinde kolaylıkla çözülebilir. Örneğin; bir eğrinin eğrilik fonksiyonlarına göre genel konum vektörünün belirlenmesi problemi Öklid geometrisinde genel durumlarda çözülemezken Galile geometrisinde eğrinin türüne bağlı olmaksızın çözülebilir (Ali, 2012).

Matematik ve diğer bilim dallarında yeterince ilgi çeken tekillik (singülerlik) teorisi; 1960 yılında R. Thom'un ortaya koyduğu; genel bir eğrinin veya yüzeylerin bir takım karakterizasyonlarını verdiği gibi onların şekilleri hakkında da bilgi veren önemli bir teoridir.

Öklid uzayında tekillik teorisiyle ilgili temel kavramlar Arnold (1986), Bruce ve Giblin (1992) çalışmalarında bulunabilir. Öklid uzayında tekillik teorisiyle ilgili birçok çalışma vardır. Temel olarak eğrilerin tekilliğiyle ilgili bazı kavramlar, Bruce ve ark. (1981), Bruce (1981), Bruce ve Giblin (1983), Fidal (1984), Fidal ve Giblin (1984) çalışmaların da bulunabilir. Galile uzayında ise tekillikle ilgili çalışmalar Şahin ve Yılmaz (2010) çalışmalarında bulunabilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Bu tezin birinci bölümünde literatür taraması yapılmış, geometri hakkında genel bilgiler verilmiş ve tez hakkında bilgiler verilmiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde Galile düzleminde ve uzayında hareket dönüşümleri anlatıldıktan sonra Galile düzleminde uzaklık gibi bazı geometrik kavramlar tanıtıldı. Galile düzleminde ve uzayında eğrilerle ilgili temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölüm olan materyal ve metot bölümünde tekillik teorisinin temel tanım ve teoremleri verildi.

Bu tezdeki dördüncü bölüm olan bulgular bölümü üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, 4-boyutlu Galile dayanak fonksiyonu ve 4-boyutlu Galile uzaklık fonksiyonu tanımlanarak, bu fonksiyonların tekillik derecelerini belirlemek için gerekli türevler hesaplandı. Bu fonksiyonların tekillik dereceleriyle eğrinin değişmezleri arasında bir ilişki kuruldu. İkinci kısımda tekillik teorisinde önemli bir araç olan versal dallanma ve (p)-versal dallanma durumları Galile dayanak fonksiyonu ve Galile uzaklık fonksiyonu için ifade edildi. Son kısımda ise birinci ve ikinci kısmın bir sonucu olarak bazı eğri ve yüzeyler için önemli bazı geometrik karekterizasyonlar elde edildi.

Beşinci bölüm olan sonuç ve tartışma bölümünde bu tez ile ilgile genel sonuçlar verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Galile geometrisine ait temel işlemler tanımlanmıştır.

2.1. Afin Dönüşümü

Düzlemin kendi kendine en genel afin dönüşümü

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= cx + dy + n \end{aligned}\right\} a, b, c, d, m, n \in R \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı 6 paremetreli bir dönüşümdür. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır $(ad - bc = 0)$ ise bu dönüşüme tekil afin dönüşüm, sıfır değil $(ad - bc \neq 0)$ ise regüler afin dönüşüm denir. Regüler afin dönüşümler bileşke işlemine göre grup oluştururlar. Bu guruba afin grup denir (Hacısalihoğlu, 1998).

2.2. Hareket Dönüşümü

Eğer (2.1) ile verilen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $ad - bc = 1$ ise bu durumda afin dönüşümüne hareket dönüşümü veya kısaca bir hareket denir. Dolayısıyla bu dönüşümlerde bir grup oluştururlar. Bu gruba hareketler grubu denir. Bu dönüşümler uzaklığı koruyan dönüşümlerdir. Eğer genel hareket dönüşümlerinde $a = d\,, b = -c$ yazılırsa, katsayılar determinantı $a^2 + b^2 = 1$ şeklinde olur. Buna göre Öklid düzleminde genel hareket dönüşümleri;

$$\left.\begin{aligned} x' &= \ ax \ + \ by \ + \ m \\ y' &= \pm(-bx + ay + n) \end{aligned}\right\} a, b, m, n \in R \tag{2.2}$$

3- parametreli bir dönüşüm olarak elde edilir (Hacısalihoğlu, 1998).

2.3. Galile Düzleminde Hareket Dönüşümleri

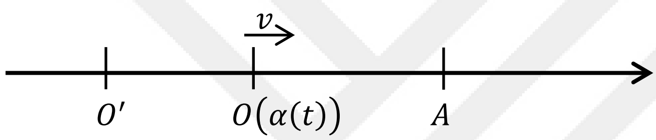
Afin düzlemin kendi kendine en genel regüler dönüşümünü ifade eden (2.1) denkleminde $a = d = 1,\ b = 0$ alınırsa;

$$\left.\begin{aligned} x' &= \ \ x \ + \ m \\ y' &= cx + y + n \end{aligned}\right\} c, m, n \in R \tag{2.3}$$

şeklinde 3- paremetreli afin alt grubu elde edilir. Bu dönüşümün katsayılar determinantı $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1$ olduğundan, (2.3) denklemiyle verilen dönüşümde bir hareket dönüşümüdür. Bu dönüşüme Galile düzlemindeki hareket dönüşümü denir. O halde Galile düzlemsel geometrisi bu hareket dönüşümleri altında değişmezlerin teorisidir (Yaglom, 1979).

2.4. Doğrusal Hareket

Bir l doğrusu verilsin. Bu doğru üzerinde hareketli bir $A = A(x)$ noktası alınırsa, x koordinatı her bir anda $x = x(t)$ şeklinde t zamanının bir fonksiyonu olur. Bu doğru üzerinde O' merkezli sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemi ve O merkezli hareketli $\{O; x\}$ koordinat sistemini göz önüne alınsın. Hareketli $\{O; x\}$ koordinat sisteminin O başlangıç noktası, $\{O'; x'\}$ koordinat sistemine göre v hızıyla hareket etsin.



Bu durumda hareketli O noktasının, sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemine göre koordinatı $\alpha(t)$ ise;

$$\alpha(t) = a + vt \tag{2.4}$$

şeklinde olur. Burada t zaman parametresi ve α ise O noktasının $t = 0$ anındaki koordinatıdır. O halde hareketli bir A noktasının sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemi ve hareketli $\{O; x\}$ koordinat sistemine göre koordinatı sırasıyla x' ve x ise bu koordinatlar arasında;

$$x' = x + \alpha(t) \tag{2.5}$$

bağıntısı vardır. (2.4) eşitliği (2.5) denkleminde yazılırsa;

$$x' = x + vt + a \tag{2.6}$$

bulunur. Eğer $t = 0$ noktasındaki zaman b ise bitiş zamanı da t' ise zamanlar arasında;

$$t' = t + b \tag{2.7}$$

bağıntısı vardır. Sonuç olarak koordinatlar ve zamanlar arasında;

$$\left.\begin{array}{l} x' = x + vt + a \\ t' = \ \ t \ + \ b \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

bağıntıları elde edilir.

2.5. Galile Dönüşümleri

(2.8) denklemiyle verilen dönüşümlere doğrusal harekete karşılık gelen **Galile Dönüşümleri** denir (Yaglom, 1979).

Eğer l doğrusu üzerindeki A noktasının koordinatı y ile ve zaman paremetreside x ile gösterilirse; Galile düzleminde hareket dönüşümleri;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + b \\ y' &= vx + y + a \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

denklemleriyle bellidir. (2.9) denklemleri doğrusal bir harekete karşılık gelir, fakat Galile düzlemindeki hareket dönüşümlerini belirtir.

2.6. Galile Düzleminde Uzaklık

Galile düzleminde $A(x,y)$ ve $A_1(x_1,y_1)$ noktaları verilsin. $A(x,y)$ noktasının x ekseni üzerine izdüşümü $P(x,0)$ ve $A_1(x_1,y_1)$ noktasının x ekseni üzerine izdüşümü $P_1(x_1,0)$ ise $\overline{PP_1}$ işaretli uzunluğuna $A(x,y)$ noktasıyla $A_1(x_1,y_1)$ noktası arasındaki uzaklık denir. Yani iki nokta arasındaki işaretli uzaklık;

$$d\big(A(x,y),A_1(x_1,y_1)\big) = d\big(P(x,0),P_1(x_1,0)\big) = x_1 - x \tag{2.10}$$

şeklindedir. Eğer $x = x_1$ ise bu durumda $A(x,y)$ ve $A_1(x_1,y_1)$ noktaları arasındaki uzaklık;

$$\delta_{AA_1} = y_1 - y \tag{2.11}$$

şeklinde bellidir. Bu uzaklığa özel uzaklık denir (Yaglom, 1979).

Sonuç

a) Galile düzleminde $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık,

$$d(A,B) = \begin{cases} |x_2 - x_1| & x_2 \neq x_1 \\ |y_2 - y_1| & x_2 = x_1 \end{cases}, \tag{2.12}$$

b) Galile uzayında $A(x_1,y_1,z_1)$ ve $B(x_2,y_2,z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık,

$$d(A,B) = \begin{cases} |x_2 - x_1| & x_2 \neq x_1 \\ \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} & x_2 = x_1 \end{cases}, \tag{2.13}$$

c) Galile 4-boyutlu uzayında $A(x_1,y_1,z_1,w_1)$ ve $B(x_2,y_2,z_2,w_2)$ noktaları arasındaki uzaklık,

$$d(A,B)=\begin{cases}|x_2-x_1| & x_2\neq x_1\\ \sqrt{(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(w_2-w_1)^2} & x_2=x_1\end{cases}, \tag{2.14}$$

şeklindedir.

2.7. Galile Skaler Çarpımı

4- boyutlu Galile uzayında $A=(x_1,y_1,z_1,w_1)$ ve $B=(x_2,y_2,z_2,w_2)$ vektörleri verilsin. Bu durumda bu vektörlerin Galile skaler çarpımı

$$\langle A,B\rangle_G=\begin{cases}x_1x_2 & , \ x_1\neq 0 \ \vee \ x_2\neq 0\\ y_1y_2+z_1z_2+w_1w_2 & , \ x_1=0 \ \wedge \ x_2=0\end{cases} \tag{2.15}$$

şeklindedir.

2.8. Galile Normu

$A=(x,y,z,w)$ vektörünün Galile normu

$$\|A\|_G=\begin{cases}|x| & , \quad x\neq 0\\ \sqrt{x^2+y^2+w^2} & , \quad x=0\end{cases} \tag{2.16}$$

şeklindedir.

2.9. Galile Koordinat Fonksiyonları

$I\subseteq\mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I\to G^4\ ,\alpha(x)=(x,y(x),z(x),w(x)) \tag{2.17}$$

eğrisi verilsin. Bu durumda $y,z,w: I\to\mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlara α eğrisinin Galile koordinat fonksiyonları denir. (2.17) eşitliğinden türev alınırsa

$$\alpha'(x)=(1,y'(x),z'(x),w'(x)) \tag{2.18}$$

olur. (2.16) eşitliğiyle belli norm tanımından dolayı $\|\alpha'(x)\|=1$ olur. Bu ise α eğrisinin Galile uzayında birim hızlı bir eğri olduğunu gösterir.

2.10. 4- Boyutlu Galile Uzayında Birim Hızlı Eğriler İçin Frenet-Serret Çatısı

$I\subseteq\mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere en az C^4 sınıfından $\alpha: I\to G_4\ ,\alpha(x)=(x,y(x),z(x),w(x))$ eğrisi verilsin. Bu durumda α eğrisinin ardışık iki türevi alınırsa;

$$\alpha'(x)=\big(1,y'(x),z'(x),w'(x)\big)$$

$$\alpha''(x)=\big(0,y''(x),z''(x),w''(x)\big) \tag{2.19}$$

denklemleri elde edilir. $\alpha'(x)$ vektörü birim vektör olduğundan dolayı;

$T(x) = \big(1, y'(x), z'(x), w'(x)\big) = (1, T_1, T_2, T_3)$ (2.20)

vektörü eğrinin teğet vektörü olarak tanımlanır.(2.19) denklemlerinden $\langle \alpha'(x), \alpha''(x) \rangle = 0$ elde edilir. O halde $\alpha''(x)$ vektörü (2.20) denklemiyle belli olan birim teğet vektörüne diktir. Bu durumda eğrinin normal vektörü; $\alpha''(x)$ vektörü yönündedir. Bundan dolayı eğriliğin $N(x)$ birim normal vektörü;

$N(x) = \frac{\alpha''(x)}{\|\alpha''(x)\|_G}$ (2.21)

şeklinde olup, (2.16) ve (2.19) denklemlerinden

$N(x) = \frac{1}{\sqrt{y''(x)^2 + z''(x)^2 + w''(x)^2}} \big(0, y''(x), z''(x), w''(x)\big)$ (2.22)

$\kappa(x) = \sqrt{y''(x)^2 + z''(x)^2 + w''(x)^2}$ (2.23)

olarak elde edilir. Burada $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonudur. $N(x)$ vektörüne (2.15) ile verilen Galile skaler çarpım kullanılırsa;

$\langle N(x), N(x) \rangle_G = 1$ (2.24)

olur. (2.24) ile verilen eşitlikte türev alınırsa;

$2\langle N'(x), N(x) \rangle_G = 0$

(2.25)

olarak elde edilir. $B(x)$ ikinci birim normal vektörü $N(x)$ birim normal vektörüne dik bir birim vektör olacağından;

$B(x) = \frac{N'(x)}{\|N'(x)\|_G}$ (2.26)

$\tau(x) = \|N'(x)\|_G$ (2.27)

şeklinde seçilebilir. Burada $\tau(x)$ eğrinin ikinci eğrilik fonksiyonudur. $E(x)$ üçüncü birim normal vektörü; $T(x)$ teğet vektörüne, $N(x)$ normal vektörüne ve $B(x)$ ikinci birim normal vektörüne dik olacağından $T(x), N(x), B(x)$ vektörlerinin vektörel çarpımı yapıldığında;

$$E(x) = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & y' & z' & w' \\ 0 & N_1 & N_2 & N_3 \\ 0 & \frac{1}{\tau}N_1' & \frac{1}{\tau}N_2' & \frac{1}{\tau}N_3' \end{vmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$N(x) = \left(0, \frac{y''(x)}{\kappa}, \frac{z''(x)}{\kappa}, \frac{w''(x)}{\kappa}\right) = (0, N_1, N_2, N_3)$ (2.28)

$B(x) = \left(0, \frac{1}{\tau}N_1', \frac{1}{\tau}N_2', \frac{1}{\tau}N_3'\right) = (0, B_1, B_2, B_3)$ (2.29)

şeklindedir. Yukarıdaki determinant 1. sütuna göre açılırsa;

$$= -1 \begin{vmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ \frac{1}{\tau}N_1' & \frac{1}{\tau}N_2' & \frac{1}{\tau}N_3' \end{vmatrix}$$

determinantı elde edilir. Elde edilen ifadenin 1. satıra göre determinantı alınırsa;

$$E(x) = -1\left[e_2\left(N_2\frac{1}{\tau}N_3' - N_3\frac{1}{\tau}N_2'\right) - e_3\left(N_1\frac{1}{\tau}N_3' - N_3\frac{1}{\tau}N_1'\right) + e_4\left(N_1\frac{1}{\tau}N_2' - N_2\frac{1}{\tau}N_1'\right)\right]$$

olarak bulunur. Bulunan ifade vektör olarak yazıldığında;

$$E(x) = \left(0\,, -\frac{1}{\tau}\left(N_2N_3' - N_3N_2'\right), \frac{1}{\tau}\left(N_1N_3' - N_3N_1'\right), -\frac{1}{\tau}\left(N_1N_2' - N_2N_1'\right)\right)$$

şeklindedir. Bundan sonra $E(x)$ vektörü

$$E(x) = (0, E_1, E_2, E_3) \tag{2.30}$$

şeklinde gösterilecektir. Bu şekilde seçilen $\{T(x), N(x), B(x), E(x)\}$ çatısına 4-boyutlu Galile uzayında birim hızlı eğriler için Frenet-Serret çatısı denir.

2.11. Önerme

(2.17) denklemiyle 4-boyutlu Galile uzayında verilmiş birim hızlı α eğrisinin Frenet-Serret elemanları $T, N, B, E, \kappa, \tau, \sigma$ olmak üzere, vektör alanlarının türevleriyle kendileri arasındaki ilişki;

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \\ E \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \\ E \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

şeklindedir. Burada κ birinci eğrilik, τ ikinci eğrilik ve σ üçüncü eğrilik fonksiyonları,

$$\kappa = \sqrt{y''^2 + z''^2 + w''^2}\,, \qquad \tau = \|N'(x)\|_G\,, \qquad \sigma = \frac{det\left(\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{(\iota v)}\right)}{\kappa^2\tau^2} \tag{2.32}$$

olarak elde edilir (Yılmaz, 2010).

İspat

(2.20), (2.22), (2.26) ve (2.30) eşitliklerinden türev alınarak gerekli işlemler yapıldığında; Frenet-Serret formülleri yukarıda verildiği gibi elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde tekillik (singülerlik) teoremi hakkında bazı tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Sağ-Eşdeğerlik

$U_i, i = 1{,}2$ reel sayılar kümesinde iki açık altküme olmak üzere;

$f_i: U_i, t_i \to \mathbb{R}$

diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Burada U_i, t_i sembolü; bu fonksiyonların t_i noktalarının bir komşuluğunda tanımlandığını gösterir. Eğer

$h: V_1 \to V_2$

fonksiyonu bir diffeomorfizm (parametre değişimi) ve $\forall t \in V_1$ için

$h(t_1) = t_2, f_1(t) = f_2\big(h(t)\big) - c$

olacak şekilde $\forall t_i \in V_i$ olan $V_i \subset U_i$ açık komşulukları ve bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı varsa; t_1 noktası komşuluğunda f_1 fonksiyonu, t_2 noktası komşuluğunda f_2 fonksiyonuna **eşdeğerler** (veya **sağ-eşdeğer**) denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.2. A_k-Tekilliği

$f: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu $\pm t^{k+1}$ fonksiyonuna sağ-eşdeğer olsun. $1 \leq p \leq k$ olan tüm p sayıları için;

$f^{(p)}(t_0) = 0$ ve $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ olur. Bu durumda $k \geq 0$ için f fonksiyonu t_0 noktasında A_k-tekilliğine sahiptir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.3. Bir Fonksiyonun Jetleri

$f: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$ düzgün (diferansiyellenebilir) fonksiyonun bir t_0 noktası komşuluğundaki Taylor serisi;

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}f''(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}f^{(n)}(t_0) + \cdots$$

şeklindedir. Burada t yerine $t + t_0$ yazıldığında, fonksiyonun Taylor serisi;

$$f(t + t_0) = f(t_0) + tf'(t_0) + \frac{t^2}{2!}f''(t_0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(t_0) + \cdots$$

elde edilir. Bu durumda $k \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere;

$$J^k f(t_0) = tf'(t_0) + \frac{t^2}{2!}f''(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}f^{(k)}(t_0) \tag{3.1}$$

polinomuna f fonksiyonunun t_0 noktasındaki k-jet denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.4. Dallanmalar – Unfoldings

Bir f fonksiyonunu içeren fonksiyonların ailesine, f fonksiyonun dallanmaları denir(Bruce ve Giblin, 1992). Örneğin;

$f(t) = t^5$ fonksiyonun en genel dallanması

$$F(t, x_1, x_2, x_3) = t^5 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_1 t \tag{3.2}$$

şeklindedir. Burada t^4 terimi uygun bir dönüşümle yok edilebileceğinden yazılmamıştır.

$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}', (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$

şeklinde düzgün bir fonksiyon olsun. Bu F fonksiyonunu aşağıdaki gibi iki fonksiyon ailesi belirtir.

i. Buna göre ilk fonksiyon ailesi;

$$F_x: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}, F_x(t) = f(t, x_1, \dots, x_r) \tag{3.3}$$

şeklinde olup r – parametreli, 1 – değişkenli bir fonksiyon ailesidir.

ii. İkinci fonksiyon ailesi de;

$$F_t: \mathbb{R}', x_0 \to \mathbb{R}, F_t(x) = f(t, x_1, \dots, x_r) \tag{3.4}$$

şeklinde olup 1 – parametreli, r – değişkenli bir fonksiyon ailesidir. Eğer

$$F_x: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}, f(t) = F_x(t) = f(t, x_1, \dots, x_r) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılırsa F fonksiyonuna, f fonksiyonunun 1-değişkenli r–parametreli dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.5. Sonuç

Bir t_0 noktasında A_k singülerliğine sahip olan her $f: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, bu t_0 noktasının komşuluğunda $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonlarından birine indirgenebilir (eşdeğerdir).

İspat

3.1. A_k-tekilliği tanımından açıktır.

3.6. (p)-Versal Dallanma

$G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_{k-1} t^{k-1} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon ailesine; t_0 noktasında $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992).

F fonksiyonunun (p)-versal dallanma olmasıyla ilgili kriterlerden biri matris kriteridir.

3.7. Önerme ((p)-Versallik İçin Matris Kriteri)

(3.3) eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu, bir t_0 noktası komşuluğunda A_k – tekilliğine sahip bir f fonksiyonunun bir dallanması olsun $(k \geq 1)$. Bu durumda $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının $(k-1)$. dereceden jetlerinin (3.1) eşitliğinden;

$$J^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(t_0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \cdots + \alpha_{(k-1)i}t^{(k-1)}\ ,\ i = 1, \ldots, r \tag{3.7}$$

şeklinde olmak üzere; F fonksiyon ailesinin, f fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının (3.7) eşitliğiyle verilen $(k-1)$. dereceden jetlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin, $\big((k-1) \times r\big)$ tipindeki $\alpha = \left(\alpha_{ji}\right)$ katsayılar matrisinin rankı $(k-1)$ sayısına eşit olmalıdır (Bruce ve Giblin, 1992).

3.8. Versal Dallanma

$G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_1 + x_2 t + \cdots + x_k t^{k-1} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon ailesine; t_0 noktasında $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonunun bir versal dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992).

f fonksiyonunun versal dallanma olmasıyla ilgili kriterlerden birisi matris kriteridir.

3.9. Önerme (Versallik İçin Matris Kriteri)

F fonksiyonu, bir t_0 noktası komşuluğunda A_k – tekilliğine sahip bir f fonksiyonunun bir dallanması olsun $(k \geq 1)$. Bu durumda $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının t_0 noktasındaki sabit ile birlikte $(k-1)$. dereceden jetlerinin (3.1) eşitliğinden;

$$J^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \cdots + \alpha_{(k-1)i}t^{(k-1)}\ ,\ i = 1, \ldots, r \tag{3.9}$$

şeklinde olmak üzere; F fonksiyon ailesinin, f fonksiyonunun bir versal dallanması olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının (3.9) eşitliğiyle verilen $(k-1)$. dereceden jetlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin, $(k \times r)$ tipindeki $\alpha = (\alpha_{ji})$ katsayılar matrisinin rankının k sayısına eşit olmasıdır (Bruce ve Giblin, 1992).

3.10. Tanım

(3.3) denklemiyle tanımlanan 1- değişkenli, r – parametreli F fonksiyon ailesi ele alınsın:

i. $D_F = \left\{x \in \mathbb{R}' : F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0, t \in \mathbb{R}\right\}$ (3.10)

kümesine F fonksiyonlar ailesinin zarfı veya diskriminantı denir.

ii. $R_F = \left\{x \in \mathbb{R}' : F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 t} = 0, t \in \mathbb{R}\right\}$ (3.11)

kümesine F fonksiyonlar ailesinin sırt (regrasyon) denir.

iii. $S_F = \left\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}' : \frac{\partial F}{\partial t} = 0\right\}$ (3.12)

kümesine F fonksiyonlar ailesinin (t, x) noktasındaki tekil kümesi denir.

iv. $B_F = \left\{x \in \mathbb{R}' : \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, t \in \mathbb{R}\right\}$ (3.13)

kümesine F fonksiyonlar ailesinin ayrışım (bifurcation) kümesi denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.11. Teorem

(3.5) eşitliğiyle tanımlanan $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}', (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyon ailesi, bir t_0 noktasında A_k – tekilliğine sahip olan bir f fonksiyonunun r – paremetreli bir dallanması olsun $(k \geq 1)$. Bu durumda;

(1) F fonksiyon ailesi bir (p) – versal dallanma iken;

(a) $k = 2$ için, B_F ayrışım kümesi; $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(b) $k = 3$ için, B_F ayrışım kümesi; $C \times \mathbb{R}^{r-2}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(c) $k = 4$ için, B_F ayrışım kümesi; $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(d) $k = 5$ için, B_F ayrışım kümesi; $BS \times \mathbb{R}^{r-4}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(2) F fonksiyon ailesi bir versal dallanma iken;

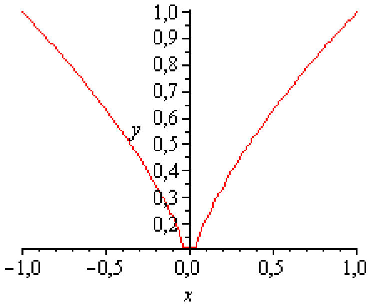
(a) $k = 1$ için, D_F diskriminant kümesi; $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(b) $k = 2$ için,D_F diskriminant kümesi; $C \times \mathbb{R}^{r-2}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

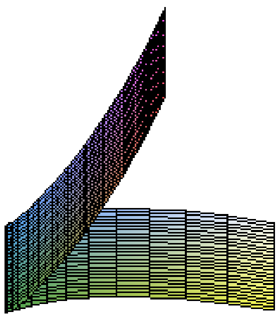
(c) $k = 3$ için, D_F diskriminant kümesi; $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(d) $k = 4$ için, D_F diskriminant kümesi; $BS \times \mathbb{R}^{r-4}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

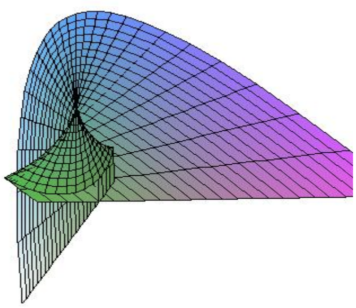
Burada $C = \{(x_1, x_2): x_1^2 = x_2^3\}$ köşeli (ordinary cusp) eğri, $SW = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = 3u^4 + u^2 v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$ parametrik denklemiyle belli olan kırlangıç kuyruğu (swallowtail) yüzeyi, $BS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 = 4u^5 + 2u^2 v + 3wu^3, x_2 = -5u^3 - 2uv - 3wu^2, x_3 = v, x_4 = w\}$ parametrik denklemi ile belli olan kelebek (butterfly) yüzeyidir.



Şekil 3.1. C köşeli eğrisi (cuspidal curve)



Şekil 3.2. $C \times \mathbb{R}$ köşeli (cuspidal edge) yüzeyi



Şekil 3.3. SW kırlangıç kuyruğu yüzeyi (swallowtail surface)

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm tezimizin en önemli bölümüdür. Bu bölümde Galile dayanak fonksiyonu ve Galile uzaklık fonksiyonu tanımlandı. Tekillik için gerekli türevler alınıp versal dallanmalar ve p-versal dallanmalar için gerekli hesaplamalar yapıldı.

4.1. Galile Dayanak Fonksiyonu

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere
$\alpha: I \to G^4$, $\alpha(x) = (x, y(x), z(x), w(x))$
regüler birim hızlı eğrisi verilsin. Bu durumda
$F_h: I \times S_G^2 \to \mathbb{R}$
$(x, U) \to F_h(x, U)$
olmak üzere

$$F_h(x, U) = |\boldsymbol{T}(x) \quad \boldsymbol{N}(x) \quad \boldsymbol{B}(x) \quad \boldsymbol{U}(x)| \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı düzgün fonksiyonların iki parametreli bir ailesi olarak F_h fonksiyonuna, birim hızlı α eğrisi üzerinde Galile dayanak fonksiyonu denir. Burada $\boldsymbol{T}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$ ve $\boldsymbol{B}(x)$ vektörleri α eğrisinin (2.23), (2.27) denklemleriyle verilen birim teğet, birim normal ve ikinci birim normal vektörleridir. S_G^2 kümesi ise Galile uzayında birim vektörlerin kümesidir.

Bu F_h fonksiyon ailesinin belirlediği bir değişkenli fonksiyon $f_{hU}(x)$ fonksiyonu ise $f_{hU}(x) = F_h(x, U)$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda F_h fonksiyonu $f_{hU}(x)$ fonksiyonunun bir dallanması olur.

4.1.1. Teorem

$\alpha: I \to G_4$ eğrisi $\forall x \in I$ için $\kappa(x) \neq 0$, $\tau(x) \neq 0$ ve $\sigma(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğri için $\forall x \in I$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\boldsymbol{T}(x), \boldsymbol{N}(x), \boldsymbol{B}(x), \boldsymbol{E}(x)\}$olmak üzere;

(1) $f'_{hU}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_4\boldsymbol{E}$, $c_2, c_4 \epsilon \mathbb{R}$

(2) $f'_{hU}(x_0) = f''_{hU}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_2\frac{\tau}{\sigma}\boldsymbol{E}$, $c_2 \epsilon \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$

(3) $f'_{hU}(x_0) = f''_{hU}(x_0) = f'''_{hU}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N} + \frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E}, \quad \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \neq 0, \sigma \neq 0$$

(4) $f'_{hU}(x_0) = f''_{hU}(x_0) = f'''_{hU}(x_0) = f^{(4)}_{hU}(x_0) = 0 \iff$ (4.2)

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N} + \frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E}\,, \quad \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \neq 0,\ \sigma \neq 0,\ \left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)' = 0$$

olarak bulunur.

İspat

Determinant özelliklerinden yararlanarak $f_{hU}(x) = |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}|$ şeklinde tanımlı fonksiyonun türevi alınırsa:

$$f'_{hU}(x) = |\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| + |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N}' \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| + |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B}' \quad \boldsymbol{U}| \tag{4.3}$$

elde edilir. (2.31) eşitliği ile belli Frenet denklemleri (4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$f'_{hU}(x) = |\kappa\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| + |\boldsymbol{T} \quad \tau\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| + |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \sigma\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$$

denklemi elde edilir. Burada determinant özelliğinden gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$f'_{hU}(x) = \sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| \tag{4.4}$$

bulunur. (4.4) eşitliğinden bir kez daha türev alınırsa;

$$f''_{hU}(x) = \sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma|\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N}' \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$+\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{U}|$$

elde edilir. (2.31) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılarak, determinant özelliklerinden;

$$f''_{hU}(x) = \sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| - \sigma^2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| \tag{4.5}$$

bulunur. (4.5) eşitliğinden bir kez daha türev alınırsa;

$$f'''_{hU}(x) = \sigma''|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma'|\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N}' \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$+\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{U}| + \sigma'\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma\tau'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma\tau|\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$+\sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B}' \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{U}| - 2\sigma\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| - \sigma^2|\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$-\sigma^2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N}' \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| - \sigma^2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B}' \quad \boldsymbol{U}|$$

elde edilir. (2.31) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılarak, determinant özelliklerinden;

$$f'''_{hU}(x) = (\sigma'' - \sigma\tau^2 + \sigma^3)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + (2\sigma'\tau + \sigma\tau')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$-3\sigma\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| \tag{4.6}$$

bulunur. (4.6) eşitliğinden bir kez daha türev alınıp (2.31) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$f^{(\iota v)}_{hU}(x) = (\sigma''' - \sigma'\tau^2 - 2\sigma\tau\tau' - 3\sigma^2\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$+(\sigma'' - \sigma\tau^3 - \sigma^3)(\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| - \sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}|)$$

$+(2\sigma''\tau + 2\sigma'\tau' + \tau''\sigma + \tau'\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$

$+(2\sigma'\tau + \tau'\sigma)(\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| - \tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|)$

$+\left(-3\sigma'^2 - 3\sigma\sigma''\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| - 3\sigma\sigma'(\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|)$

$+(\sigma'\tau\kappa + \sigma\tau'\kappa + \sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$

elde edilir. Elde edilen denklemde düzenleme yapıldığında;

$f_{hU}^{(iv)}(x) = (\sigma''' - 3\sigma'\tau^2 - 3\sigma\tau\tau' - 6\sigma^2\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$

$+(3\sigma''\tau + 3\sigma'\tau' + \tau''\sigma - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$

$+\left(-4\sigma\sigma'' + \sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3\sigma'^2\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}|$

$+(3\sigma'\tau\kappa + 2\sigma\tau'\kappa + \sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| \qquad (4.7)$

bulunur. (4.4), (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemlerinden yararlanarak 4.1.1.Teorem ispatlanabilir.

(1) $(\Longrightarrow)$ $f'_{hU}(x) = 0$ olsun. Bu durumda (4.4) eşitliğinden;

$\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| = 0 \qquad (4.8)$

olur. Burada $\sigma \neq 0$ olduğundan $\boldsymbol{U} = c_1\boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_3\boldsymbol{B} + c_4\boldsymbol{E}$ olacak şekilde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ vardır. Ayrıca burada $\boldsymbol{U}$ birim vektör olduğundan (2,16) ile verilen Galile norm tanımından dolayı $c_1 = 1$ olur. Bu durumda $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_3\boldsymbol{B} + c_4\boldsymbol{E}$ olur. Bulunan $\boldsymbol{U}$ vektörünü (4.8) ile verilen denklemde yerine yazılıp determinant özellikleri kullanılarak gerekli işlemler yapıldığında;

$c_3\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B}| = 0$

olarak bulunur. Burada $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B}| = -1$ olduğundan $-c_3\sigma = 0$ olur. $\sigma \neq 0$ olduğundan $c_3 = 0$ bulunur. Bulunan bu ifadeler $\boldsymbol{U}$ vektöründe yerine yazılırsa;

$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_4\boldsymbol{E}, \;\; c_2, c_4 \epsilon \mathbb{R} \qquad (4.9)$

olur.

$(\Longleftarrow)$ $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_4\boldsymbol{E}$ olsun. $\boldsymbol{U}$ vektörünü $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$ da yazılırsa;

$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_4\boldsymbol{E}\ |$

şeklinde bulunur. Determinant özelliklerinden $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| = 0$ olur. Dolayısıyla $\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| = 0$ olduğu açıktır. Bu durumda $f'_{hU}(x) = 0$ eşitliği sağlanır.

(2) $(\Longrightarrow)$ $f'_{hU}(x_0) = f''_{hU}(x_0) = 0$ olsun. (4.5) eşitliğinden;

$\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| - \sigma^2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| = 0$

olur. (4.9) eşitliğiyle verilen $\boldsymbol{U}$ vektörü yerine yazılıp determinant özelliklerinden düzenleme yapılırsa;

$\sigma\tau c_2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| - \sigma^2 c_4|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 0$

bulunur. Burada $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$ ve $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$ olduğundan denklemde yerine yazılırsa;

$\sigma\tau c_2 - \sigma^2 c_4 = 0$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede c_4 eşitlikte yalnız bırakılırsa;

$c_4 = \frac{\tau}{\sigma} c_2$

bulunur. Bulunan bu ifade (4.9) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_2\frac{\tau}{\sigma}\boldsymbol{E} \quad , \quad c_2 \epsilon \mathbb{R}, \ \sigma \neq 0 \tag{4.10}$$

olur.

$(\Leftarrow)$ $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N} + c_2\frac{\tau}{\sigma}\boldsymbol{E}$ olsun. (4.5) ile verilen denklemde (4.10) ile verilen $\boldsymbol{U}$ vektörü yerine yazılıp determinant özellikleri kullanılarak düzenleme yapıldığında;

$f''_{hU}(x_0) = c_2\sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| - c_2\sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|$

elde edilir. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$ ve $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$ eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa $f''_{hU}(x_0) = 0$ olur.

(3) $(\Longrightarrow)$ $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = 0$ olsun. (4.6) eşitliğinden;

$(\sigma'' - \sigma\tau^2 + \sigma^3)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| + (2\sigma'\tau + \sigma\tau')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| -$
$3\sigma\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}| + \sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| = 0$

olur. (4.10) eşitliğinden $\boldsymbol{U}$ vektörü yerine yazılıp determinant özelliklerinden düzenleme yapılırsa;

$(2\sigma'\tau + \sigma\tau')c_2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| - 3\sigma\sigma'\frac{\tau}{\sigma}c_2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| + \sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \mathbf{T}| = 0$

elde edilir. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$ ve $|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \mathbf{T}| = -1$ olduğundan denkleme yazılırsa;

$(2\sigma'\tau + \sigma\tau')c_2 - 3\sigma\sigma'\frac{\tau}{\sigma}c_2 - \sigma\tau\kappa = 0$

olur. Bu denklem c_2 parantezine alınırsa;

$(\sigma\tau' - \sigma'\tau)c_2 = \sigma\tau\kappa$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı σ^2 ye bölünürse;

$c_2\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' = \frac{\tau\kappa}{\sigma}$

olur. Eşitlikte c_2 yalnız bırakılırsa;

$c_2 = \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}$

bulunur. Bulunan bu ifade (4.10) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N} + \frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E}, \quad \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \neq 0, \sigma \neq 0 \tag{4.11}$$

bulunur.

($\Leftarrow$) Tersine $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} + \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N} + \frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E}$ vektörünü (4.6) denkleminde yerine yazılıp determinant özelliklerinden gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$f_{hU}'''(x_0) = (2\sigma'\tau + \sigma\tau')\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| - 3\sigma\sigma'\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|$$

$$+\sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \mathbf{T}| \tag{4.12}$$

elde edilir. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$ ve $|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \mathbf{T}| = -1$ eşitlikleri (4.12) ile bulunan denklemde yerine yazılırsa;

$$f_{hU}'''(x_0) = (2\sigma'\tau + \sigma\tau')\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma} - 3\sigma\sigma'\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2} - \sigma\tau\kappa$$

bulunur. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$f_{hU}'''(x_0) = (2\sigma'\tau + \sigma\tau')\frac{\sigma\tau\kappa}{\tau'\sigma-\sigma'\tau} - \frac{3\sigma\sigma'\tau^2\kappa}{\tau'\sigma-\sigma'\tau} - \frac{\sigma\tau\kappa(\tau'\sigma-\sigma'\tau)}{\tau'\sigma-\sigma'\tau}$$

elde edilir. $\frac{\sigma\tau\kappa}{\tau'\sigma-\sigma'\tau}$ ortak paranteze alındığında;

$$f_{hU}'''(x_0) = (2\sigma'\tau + \sigma\tau' - 3\sigma'\tau - \sigma\tau' + \sigma'\tau)\frac{\sigma\tau\kappa}{\tau'\sigma-\sigma'\tau}$$

olur. Buradan $f_{hU}'''(x_0) = 0$ olarak bulunur.

(4) ($\Rightarrow$) $f_{hu}'(x_0) = f_{hu}''(x_0) = f_{hu}'''(x_0) = f_{hu}^{(\iota v)}(x_0) = 0$ olsun. (4.7) eşitliğinden;

$$(\sigma''' - 3\sigma'\tau^2 - 3\sigma\tau\tau' - 6\sigma^2\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$+(3\sigma''\tau + 3\sigma'\tau' + \tau''\sigma - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$+\left(-4\sigma\sigma'' + \sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3\sigma'^2\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{U}|$$
$$+(3\sigma'\tau\kappa + 2\sigma\tau'\kappa + \sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{U}| = 0$$

olur. (4.11) eşitliğiyle verilen $\boldsymbol{U}$ vektörü yerine yazılıp determinant özelliklerinden gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(3\sigma''\tau + 3\sigma'\tau' + \tau''\sigma - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau)\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}|$$

$$+\left(-4\sigma\sigma'' + \sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3\sigma'^2\right)\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|$$

$$+(3\sigma'\tau\kappa + 2\sigma\tau'\kappa + \sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade de $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$ ve $|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \mathbf{T}| = -1$ eşitlikleri yazılıp düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\left(3\sigma''\tau+3\sigma'\tau'+\tau''\sigma-\sigma\tau^3-\sigma^3\tau-4\tau\sigma''+\sigma\tau^3+\sigma^3\tau-\frac{3\sigma'^2\tau}{\sigma}\right)$$
$$=3\sigma'\tau\kappa+2\sigma\tau'\kappa+\sigma\tau\kappa'$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı $\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma$ ile çarpılıp ortak parantezlere alınırsa;

$$\tau\kappa\left(\tau''\sigma-\sigma''\tau+\frac{3\sigma'(\sigma\tau'-\sigma'\tau)}{\sigma}\right)=\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma(3\sigma'\tau\kappa+2\sigma\tau'\kappa+\sigma\tau\kappa')$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem de $\sigma\tau'-\sigma'\tau=\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2$ ve $\tau''\sigma-\sigma''\tau=(\sigma\tau'-\sigma'\tau)'$ eşitlikleri yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)'=0$$

eşitliği bulunur. Bulunan bu ifade (4.11) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T}+\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N}+\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E},\quad\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\neq0,\sigma\neq0,\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)'=0\tag{4.13}$$

bulunur.

($\Leftarrow$) $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T}+\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N}+\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E}$ ve $\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)'=0$ olsun. (4.7) ile verilen denklemde $\boldsymbol{U}$ vektörü yazılıp determinant özelliklerinden gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$f_{hu}^{(\iota v)}(x_0)=(3\sigma''\tau+3\sigma'\tau'+\tau''\sigma-\sigma\tau^3-\sigma^3\tau)\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}|\boldsymbol{T}\quad\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{N}|$$
$$+\left(-4\sigma\sigma''+\sigma^2\tau^2+\sigma^4-3\sigma'^2\right)\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}|\boldsymbol{T}\quad\boldsymbol{N}\quad\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{E}|$$
$$+(3\sigma'\tau\kappa+2\sigma\tau'\kappa+\sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N}\quad\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{T}|$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade de $|\boldsymbol{T}\quad\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{N}|=1$, $|\boldsymbol{T}\quad\boldsymbol{N}\quad\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{E}|=1$ ve $|\boldsymbol{N}\quad\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{E}\quad\mathbf{T}|=-1$ eşitlikleri yazılıp düzenlemeler yapılırsa;

$$f_{hu}^{(\iota v)}(x_0)=(3\sigma''\tau+3\sigma'\tau'+\tau''\sigma-\sigma\tau^3-\sigma^3\tau)\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}$$
$$+\left(-4\sigma\sigma''+\sigma^2\tau^2+\sigma^4-3\sigma'^2\right)\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}-(3\sigma'\tau\kappa+2\sigma\tau'\kappa+\sigma\tau\kappa')$$

olur. Elde edilen ifade de gerekli sadeleştirmeler ve işlemler yapıldığında;

$$f_{hu}^{(\iota v)}(x_0)=-\frac{\tau}{\sigma}\left(\frac{(\tau^2\kappa)'(\sigma\tau'-\sigma'\tau)-\tau^2\kappa(\sigma\tau'-\sigma'\tau)'}{\sigma\tau'-\sigma'\tau}\right)\tag{4.14}$$

elde edilir. şimdi (4.13) ile verilen ifadenin türevi açılırsa;

$$\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)'=\frac{(\tau^2\kappa)'(\tau'\sigma-\sigma'\tau)-\tau^2\kappa(\tau'\sigma-\sigma'\tau)'}{(\tau'\sigma-\sigma'\tau)^2}=0$$

olduğundan (4.14) ile verilen denklem sıfır olur yani $f_{hu}^{(\iota v)}(x_0) = 0$ dır.

4.2. Galile Uzaklık Fonksiyonu

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$\alpha: I \to G_4\,, \alpha(x) = (x, y(x), z(x), w(x))$

regüler birim hızlı eğrisi verilsin. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde düzgün fonksiyonların bir ailesi;

$F_d: I \times S_G^2 \to \mathbb{R}$

$\quad (x, V) \to F_d(x, V)$

olmak üzere

$$F_d(x, V) = |\boldsymbol{T}(x)\ \ \boldsymbol{N}(x)\ \ \boldsymbol{B}(x)\ \ \alpha(x) - V(x)| \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlı F_d fonksiyon ailesine α eğrisi üzerinde Galile uzaklık fonksiyonu denir. Burada $T(x)$, $N(x)$ ve $B(x)$ vektörleri α eğrisinin (2.23), (2.27) denklemleriyle verilen birim teğet, birim normal ve ikinci birim normal vektörleridir.

Bu F_d fonksiyon ailesinin belirlediği bir değişkenli fonksiyon $f_{dV}(x)$ ise $f_{dV}(x) = F_d(x, V)$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda F_d fonksiyonu $f_{dV}(x)$ fonksiyonunun bir dallanması olur.

4.2.1. Teorem

α eğrisi $\forall x \in I$ için $\kappa(x) \neq 0$, $\tau(x) \neq 0$ ve $\sigma(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğri için $\forall x \in I$ noktasındaki Frenet çatisi $\{\boldsymbol{T}(x), \boldsymbol{N}(x), \boldsymbol{B}(x), \boldsymbol{E}(x)\}$ olmak üzere;

(1) $f'_{dV}(x_0) = 0 \iff \alpha - V = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N} + a_4\boldsymbol{E}\quad,\quad a_1, a_2, a_4 \epsilon \mathbb{R}\ ,$

(2) $f'_{dV}(x_0) = f''_{dV}(x_0) = 0 \iff \alpha - V = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N} + a_2\frac{\tau}{\sigma}\boldsymbol{E}\quad,\quad a_1, a_2 \epsilon \mathbb{R}\,,\ \ \sigma \neq 0\,,$

(3) $f'_{dV}(x_0) = f''_{dV}(x_0) = f'''_{dV}(x_0) = 0 \iff$

$$\alpha - V = a_1\boldsymbol{T} + \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N} + \frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E}\,,\quad \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \neq 0, \sigma \neq 0, a_1 \epsilon \mathbb{R}\,, \tag{4.16}$$

(4) $f'_{dV}(x_0) = f''_{dV}(x_0) = f'''_{dV}(x_0) = f^{(4)}_{dV}(x_0) = 0 \iff$

$$\alpha - V = a_1\boldsymbol{T} + \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N} + \frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E}\,,\quad \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \neq 0,\ \sigma \neq 0,\ \left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)' \neq 0,\ a_1 \epsilon \mathbb{R}$$

olarak bulunur.

İspat

Determinant özelliklerinden yararlanarak $f_{dV}(x) = |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V|$ şeklinde tanımlı fonksiyonun türevi alınırsa:

$$f'_{dV}(x) = |\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| + |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N}' \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| + |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B}' \quad \alpha - V| \tag{4.17}$$

elde edilir. (2.31) eşitliği ile belli Frenet denklemleri (4.17) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$f'_{dV}(x) = |\kappa\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| + |\boldsymbol{T} \quad \tau\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| + |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \sigma\boldsymbol{E} \quad \alpha - V| \tag{4.18}$$

denklemi elde edilir. Burada determinant özelliğinden dolayı,

$$f'_{dV}(x) = \sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| \tag{4.19}$$

bulunur. (4.19) eşitliğinden bir kez daha türev alınırsa,

$$f''_{dV}(x) = \sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma|\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N}' \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$+\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E}' \quad \alpha - V| \tag{4.20}$$

elde edilir. (2.31) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılarak,

$$f''_{dV}(x) = \sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma|\kappa\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma|\boldsymbol{T} \quad \tau\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$+\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad -\sigma\boldsymbol{B} \quad \alpha - V|$$

olur. Determinant özelliklerinden gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$f''_{dV}(x) = \sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$-\sigma^2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) eşitliğinden bir kez daha türev alınırsa,

$$f'''_{dV}(x) = \sigma''|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma'|\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N}' \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$+\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E}' \quad \alpha - V| + \sigma'\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma\tau'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$+\sigma\tau|\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B}' \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}' \quad \alpha - V|$$
$$-2\sigma\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| - \sigma^2|\boldsymbol{T}' \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| - \sigma^2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N}' \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V|$$
$$-\sigma^2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B}' \quad \alpha - V| \tag{4.22}$$

bulunur. (2.31) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılarak, determinant özelliklerinden,

$$f'''_{dV}(x) = (\sigma'' - \sigma\tau^2 + \sigma^3)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + (2\sigma'\tau + \sigma\tau')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$-3\sigma\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| + \sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.23) eşitliğinden bir kez daha türev alınıp (2.31) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$f^{(\iota v)}_{dV}(x) = (\sigma''' - \sigma'\tau^2 - 2\sigma\tau\tau' - 3\sigma^2\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$+(\sigma'' - \sigma\tau^3 - \sigma^3)(\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| - \sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V|)$$
$$+(2\sigma''\tau + 2\sigma'\tau' + \tau''\sigma + \tau'\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$

$+(2\sigma'\tau+\tau'\sigma)(\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|-\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|)$

$+\left(-3\sigma'^2-3\sigma\sigma''\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha-V|-3\sigma\sigma'(\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|)$

$+(\sigma'\tau\kappa+\sigma\tau'\kappa+\sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|+\sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| \qquad (4.24)$

elde edilir. Determinant özelliğinden düzenleme yapıldığında,

$f_{hV}^{(\iota v)}(x)=(\sigma'''-3\sigma'\tau^2-3\sigma\tau\tau'-6\sigma^2\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|$

$+(3\sigma''\tau+3\sigma'\tau'+\tau''\sigma-\sigma\tau^3-\sigma^3\tau)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|$

$+\left(-4\sigma\sigma''+\sigma^2\tau^2+\sigma^4-3\sigma'^2\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha-V|$

$+(3\sigma'\tau\kappa+2\sigma\tau'\kappa+\sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|+\sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| \qquad (4.25)$

elde edilir.(4.19), (4.21), (4.23) ve (4.25) denklemlerinden yararlanarak 4.2.1. Teorem ispatlanabilir.

(1) $(\Longrightarrow)$ $f'_{dV}(x)=0$ olsun. Bu durumda (3.19) eşitliğinden $\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|=0$ olur. Burada $\sigma\neq0$ olduğundan $\alpha-V=a_1\boldsymbol{T}+a_2\boldsymbol{N}+a_3\boldsymbol{B}+a_4\boldsymbol{E}$ olacak şekilde $a_1,a_2,a_3,a_4\in R$ sayıları vardır. Buradan,

$a_3\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B}|=0$

elde edilir. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B}|=-1$ olduğundan,

$-a_3\sigma=0$

olur. Dolayısıyla,

$a_3=0\,,\quad \sigma\neq0$

bulunur. Bulunan bu ifadeler $\alpha-V$ eğrisinde yerine yazılırsa,

$\alpha-V=a_1\boldsymbol{T}+a_2\boldsymbol{N}+a_4\boldsymbol{E}\;,\;\; a_2,a_4\epsilon\mathbb{R} \qquad (4.26)$

olur.

$(\Longleftarrow)$ $\alpha-V=\boldsymbol{T}+a_2\boldsymbol{N}+a_4\boldsymbol{E}$ olsun. $\alpha-V$ vektörünü $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|$ da yazılırsa,

$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad a_1\boldsymbol{T}+a_2\boldsymbol{N}+a_4\boldsymbol{E}\,|$

şeklinde bulunur. Determinant özelliklerinden $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|=0$ olur. Dolayısıyla $\sigma|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|=0$ olduğu açıktır. Bu durumda $f'_{dV}(x)=0$ eşitliği sağlanır.

(2) $(\Longrightarrow)$ $f'_{dV}(x_0)=f''_{dV}(x_0)=0$ olsun. (4.21) eşitliğinden,

$\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|+\sigma\tau|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha-V|-\sigma^2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha-V|=0$

olur. (4.26) eşitliğinden $\alpha-V$ eğrisinde yerine yazılırsa,

$\sigma\tau a_2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}|-\sigma^2a_4|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|=0$

elde edilir. Elde edilen ifade de $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}|=1$ ve $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|=1$ olduğundan,

$\sigma\tau a_2-\sigma^2a_4=0$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$a_4 = \frac{\tau}{\sigma} a_2$

bulunur. Bulunan bu ifade (4.26) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\alpha - V = a_1 \boldsymbol{T} + a_2 \boldsymbol{N} + a_2 \frac{\tau}{\sigma} \boldsymbol{E} \quad , \quad a_2 \epsilon \mathbb{R}\,, \ \ \sigma \neq 0 \tag{4.27}$$

bulunur.

($\Longleftarrow$) $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{V} = a_1 \boldsymbol{T} + a_2 \boldsymbol{N} + a_2 \frac{\tau}{\sigma} \boldsymbol{E}$ olsun. (4.20) ile verilen denklemde (4.27) ile verilen $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{V}$ eğrisinde yerine yazılıp determinant özellikleri kullanılarak düzenleme yapıldığında;

$f''_{dV}(x_0) = a_2 \sigma \tau |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| - a_2 \sigma \tau |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|$

elde edilir. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$ ve $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$ eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa $f''_{dV}(x_0) = 0$ olur.

(3) ($\Longrightarrow$) $f'_{dV}(x_0) = f''_{dV}(x_0) = f'''_{dV}(x_0) = 0$ olsun. (3.23) eşitliğinden,

$(\sigma'' - \sigma\tau^2 + \sigma^3)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + (2\sigma'\tau + \sigma\tau')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| -$

$\sigma\sigma'|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V| + \sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| = 0$

olur. (4.27) eşitliğinden $\alpha - V$ eğrisi yerine yazılırsa,

$(2\sigma'\tau + \sigma\tau')a_2|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| - 3\sigma\sigma' \frac{\tau}{\sigma} a_2 |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| + \sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| = 0$

elde edilir. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$ ve $|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| = -1$ olduğundan ifade de yerine yazılırsa,

$(2\sigma'\tau + \sigma\tau')a_2 - 3\sigma\sigma' \frac{\tau}{\sigma} a_2 - \sigma\tau\kappa = 0$

olarak bulunur. Bulunan ifade a_2 ortak paranteze alınırsa,

$(\sigma\tau' - \sigma'\tau)a_2 = \sigma\tau\kappa$

olur. Her iki taraf σ^2 bölünürse bölümün türevinden,

$a_2 = \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \sigma}$

elde edilir. Bulunan bu ifade (4.27) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\alpha - V = a_1 \boldsymbol{T} + \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \sigma} \boldsymbol{N} + \frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \sigma^2} \boldsymbol{E}\,, \quad \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \neq 0, \sigma \neq 0 \tag{4.28}$$

bulunur.

($\Longleftarrow$) Tersine $\alpha - V = \boldsymbol{T} + \frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \sigma} \boldsymbol{N} + \frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \sigma^2} \boldsymbol{E}$ vektörünü (4.23) denkleminde yerine yazılıp determinant özelliklerinden gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$f_{dV}'''(x_0) = (2\sigma'\tau + \sigma\tau')\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| - 3\sigma\sigma'\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|$$

$$+\sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \mathbf{T}|$$

elde edilir. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$ ve $|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \mathbf{T}| = -1$ eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa,

$$f_{dV}'''(x_0) = (2\sigma'\tau + \sigma\tau')\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma} - 3\sigma\sigma'\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2} - \sigma\tau\kappa$$

bulunur. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$f_{dV}'''(x_0) = (2\sigma'\tau + \sigma\tau' - 3\sigma'\tau - \sigma\tau' + \sigma'\tau)\frac{\sigma\tau\kappa}{\tau'\sigma - \sigma'\tau}$$

olur. Buradan $f_{dV}'''(x_0) = 0$ olarak bulunur.

(4) $(\Longrightarrow)$ $f_{dV}'(x_0) = f_{dV}''(x_0) = f_{dV}'''(x_0) = f_{dV}^{(\iota v)}(x_0) = 0$ olsun. (4.25) eşitliğinden,

$$(\sigma''' - 3\sigma'\tau^2 - 3\sigma\tau\tau' - 6\sigma^2\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$+(3\sigma''\tau + 3\sigma'\tau' + \tau''\sigma - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V|$$
$$+\left(-4\sigma\sigma'' + \sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3{\sigma'}^2\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \alpha - V|$$
$$+(3\sigma'\tau\kappa + 2\sigma\tau'\kappa + \sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \alpha - V| + \sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| = 0$$

olur. (4.28) eşitliğinden $\alpha - V$ eğrisi yerine yazılırsa,

$$(3\sigma''\tau + 3\sigma'\tau' + \tau''\sigma - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau)\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}|$$

$$+\left(-4\sigma\sigma'' + \sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3{\sigma'}^2\right)\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|$$

$$+(3\sigma'\tau\kappa + 2\sigma\tau'\kappa + \sigma\tau\kappa')|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| + \sigma\tau\kappa|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| = 0$$

elde edilir. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$, $|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| = -1$ ve $|\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{T}| = -1$ olduğundan ifade de yerine yazılırsa,

$$\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\left(3\sigma''\tau + 3\sigma'\tau' + \tau''\sigma - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau - 4\tau\sigma'' + \sigma\tau^3 + \sigma^3\tau - \frac{3{\sigma'}^2\tau}{\sigma}\right)$$
$$= 3\sigma'\tau\kappa + 2\sigma\tau'\kappa + \sigma\tau\kappa' + \sigma\tau\kappa$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)' = \frac{-\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)' \neq 0$ olur. Bulunan bu ifade (4.28) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T}+\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N}+\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E},\quad \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\neq 0,\sigma\neq 0,\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)'\neq 0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) $\alpha-V=a_1\boldsymbol{T}+\frac{\tau\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma}\boldsymbol{N}+\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\boldsymbol{E}$ ve $\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)'\neq 0$ olsun. (4.25) ile verilen denklemde $\alpha-V$ yerine yazılıp determinant özelliklerinden gerekli düzenlemeler yapıldığında $f_{hu}^{(\iota v)}(x_0)=0$ olduğu görülür.

4.3. Galile Dayanak ve Galile Uzaklık Fonksiyonların Dallanmaları

Bu kısımda, yukarıda tanımlanan Galile uzaklık ve Galile dayanak fonksiyonlarının, bir değişkenli bir f fonksiyonunun versal dallanma ve (p)-versal dallanma olma durumları incelendi.

4.3.1. Teorem

$F_h: I\times S_G^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu birim hızlı $\alpha: I\to G^4$ eğrisi üzerinde tanımlı (4.1) tanımında verilen dayanak fonksiyonu olsun. Eğer f_{hU_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_i , $(i=2,3,4)$ tekilliğine sahipse, bu durumda F_h fonksiyonu f_{hU_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

İspat

(4.1) eşitliğinden $F_h(x,U)=|\boldsymbol{T}(x)\quad \boldsymbol{N}(x)\quad \boldsymbol{B}(x)\quad \boldsymbol{U}(x)|$ şeklindedir. Birim hızlı $\alpha: I\to G^4$ eğrisi için Frenet çatıları sırasıyla (2.28), (2.29) ve (2.30) eşitliklerinde verilmiştir. Yine $\boldsymbol{U}\in G^4$ olduğundan birim vektör olup $\boldsymbol{U}=(1,U_2,U_3,U_4)$ şeklindedir. O halde verilen ifadeler $F_h(x,U)=|\boldsymbol{T}(x)\quad \boldsymbol{N}(x)\quad \boldsymbol{B}(x)\quad \boldsymbol{U}(x)|$ eşitliğinde yazılırsa,

$$F_h(x,U)=\begin{vmatrix}1 & y' & z' & w'\\ 0 & N_1 & N_2 & N_3\\ 0 & B_1 & B_2 & B_3\\ 1 & U_2 & U_3 & U_4\end{vmatrix}\tag{4.29}$$

şeklinde olur. Bu determinant birinci sütuna göre açılırsa,

$$F_h(x,U)=\begin{vmatrix}N_1 & N_2 & N_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ U_2 & U_3 & U_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}y' & z' & w'\\ N_1 & N_2 & N_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}\tag{4.30}$$

bulunur. Bu determinantlardan birincisi 3. satıra göre açılır ve ikincisi de 1. satıra göre açılırsa,

$$F_h(x,U) = U_2(N_2B_3 - N_3B_2) - U_3(N_1B_3 - N_3B_1) + U_4(N_1B_2 - N_2B_1)$$
$$-y'(N_2B_3 - N_3B_2) + z'(N_1B_3 - N_3B_1) - w'(N_1B_2 - N_2B_1) \tag{4.31}$$

elde edilir. (1.30) de verilen Frenet-Serret formüllerinden,

$$F_h(x,U) = U_2(-E_1) - U_3(E_2) + U_4(-E_3) - y'(-E_1) + z'(E_2) - w'(-E_3)$$
$$F_h(x,U) = E_1(y' - U_2) + E_2(z' - U_3) + E_3(w' - U_4) \tag{4.32}$$

elde edilir.

F_h fonksiyonunun, f_{hU_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olması için 3.7. Önermesi ile verilen (p)-versallik için matris kriterini sağlaması gerekir. Bunun içinde öncelikle $\frac{\partial F_h}{\partial U_i}(x,U_o)$,(i=1,2,3) şeklindeki fonksiyonların 3.3. ile verilen bir fonksiyonun jetleri tanımından yararlanarak jetleri bulunmalıdır. Bu durumda (4.32) eşitliğinden dolayı,

$$J^3\left(\frac{\partial F_h}{\partial U_{i+1}}(x,U_o)\right)(x_0) = x(-E_i)' + \frac{x^2}{2}(-E_i)'' + \frac{x^3}{6}(-E_i)''' \ , \quad (i = 1,2,3) \tag{4.33}$$

denklemi elde edilir.

1.Durum:

$$J^1\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_2}(x,U_o)\right)(x_0) = x(-E_1)'$$

$$J^1\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_3}(x,U_o)\right)(x_0) = x(-E_2)'$$

$$J^1\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_4}(x,U_o)\right)(x_0) = x(-E_3)'$$

olarak bulunur. O halde F_h fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.7. Önermesinden dolayı,

$$A = [-E_1' \quad -E_2' \quad -E_3'] \tag{4.34}$$

matrisi regüler bir matris olmalıdır. A matrisi 1×3 tipinde bir matris olduğundan regüler olması için $RankA = 1$ olmalıdır.

$\boldsymbol{E}' = -\sigma\boldsymbol{B}$ eğrimiz $\sigma \neq 0$ olan birim hızlı eğri olduğundan dolayı $\boldsymbol{E}' \neq 0$ dır. O halde (4.34) eşitliği ile tanımlı A matrisinin $RankA = 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla A matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_h fonksiyonu x_0 noktasında A_2–tekilliğine sahip f_{hU_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

2.Durum:

$$J^2\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_2}(x,u_o)\right)(x_0) = x(-E_1)' + \frac{x^2}{2}(-E_1)''$$

$$J^2\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_3}(x,u_o)\right)(x_0) = x(-E_2)' + \frac{x^2}{2}(-E_2)''$$

$$J^2\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_4}(x,u_o)\right)(x_0) = x(-E_3)' + \frac{x^2}{2}(-E_3)''$$

olarak bulunur. O halde F_h fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.7. Önermesinden dolayı,

$$B = \begin{bmatrix} -E_1' & -E_2' & -E_3' \\ -E_1'' & -E_2'' & -E_3'' \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

matrisinin regüler bir matris olması gerekir. B matrisi 2×3 tipinde bir matris olduğundan regüler olması için $RankB = 2$ olmalıdır.

$RankB = 2$ olabilmesi için $\boldsymbol{E}'$ ile $\boldsymbol{E}''$ vektörleri lineer bağımsız olmalıdır. Bu durumda öncelikle E' vektörleri,

$$\boldsymbol{E}' = -\sigma\boldsymbol{B} \tag{4.36}$$

şeklindedir. (4.36) ile verilen eşitlikten türev alınırsa,

$$\boldsymbol{E}'' = -\sigma\boldsymbol{B}' - \sigma'\boldsymbol{B}$$

olarak bulunur. Bulunan ifadede (2.31) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\boldsymbol{E}'' = -\sigma'\boldsymbol{B} + \sigma\tau\boldsymbol{N} - \sigma^2\boldsymbol{E} \tag{4.37}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\boldsymbol{E}'$ ile $\boldsymbol{E}''$ lineer bağımlı olsun. Bu durumda,

$\lambda\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}''$ olacak şekilde λ vardır. (4.36) ile verilen $\boldsymbol{E}'$ ile (4.37) ile verilen $\boldsymbol{E}''$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$-\lambda\sigma\boldsymbol{E} = -\sigma'\boldsymbol{B} + \sigma\tau\boldsymbol{N} - \sigma'\boldsymbol{E}$$

elde edilir. Elde edilen ifade düzenlenirse,

$$(-\sigma\tau)\boldsymbol{N} + (\sigma' - \lambda\sigma)\boldsymbol{B} + \sigma^2\boldsymbol{E} = 0$$

olup $\{\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}\}$ lineer bağımsız ve $\sigma \neq 0, \tau \neq 0$ olduğundan bu toplam sıfır olamaz. Dolayısıyla $\boldsymbol{E}'$ ile $\boldsymbol{E}''$ linner bağımsızdır. O halde (4.35) eşitliği ile tanımlı B matrisi için $RankB = 2$ olarak bulunur. Dolayısıyla B matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_h fonksiyonu x_0 noktasında A_3-tekilliğine sahip f_{hU_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

3.Durum:

$$J^3\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_2}(x,u_o)\right)(x_0)=x(-E_1)'+\frac{x^2}{2}(-E_1)''+\frac{x^3}{6}(-E_1)'''$$

$$J^3\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_3}(x,u_o)\right)(x_0)=x(-E_2)'+\frac{x^2}{2}(-E_2)''+\frac{x^3}{6}(-E_2)'''$$

$$J^3\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_4}(x,u_o)\right)(x_0)=x(-E_3)'+\frac{x^2}{2}(-E_3)''+\frac{x^3}{6}(-E_3)'''$$

olarak bulunur. O halde F_h fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.7. Önermesinden dolayı,

$$C=\begin{bmatrix}-E_1' & -E_2' & -E_3'\\ -E_1'' & -E_2'' & -E_3''\\ -E_1''' & -E_2''' & -E_3'''\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}E_1' & E_2' & E_3'\\ E_1'' & E_2'' & E_3''\\ E_1''' & E_2''' & E_3'''\end{bmatrix} \tag{4.38}$$

matrisinin regüler bir matris olması gerekir. C matrisi 3×3 tipinde bir matris olduğundan regüler olması için $RankC=3$ olmalıdır. Bunu için ise C matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. Bunun için (4.38) ile verilen C matrisini kapsayan,

$$C_1=-\begin{vmatrix}1 & y' & z' & w'\\ 0 & E_1' & E_2' & E_3'\\ 0 & E_1'' & E_2'' & E_3''\\ 0 & E_1''' & E_2''' & E_3'''\end{vmatrix}=-|T\quad E'\quad E''\quad E'''| \tag{4.39}$$

matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Öncelikle $\boldsymbol{E}'''$ vektörünü bulalım. Bu durumda (4.37) ile verilen $\boldsymbol{E}''$ denklemin tekrar türevi alınırsa,

$$\boldsymbol{E}'''=-\sigma''\boldsymbol{B}-\sigma'\boldsymbol{B}'+\sigma'\tau\boldsymbol{N}+\sigma\tau'\boldsymbol{N}+\sigma\tau\boldsymbol{N}'-2\sigma\sigma'\boldsymbol{E}-\sigma^2\boldsymbol{E}'$$

olur. Bulunan bu ifadede (2.31) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\boldsymbol{E}'''=-\sigma''B-\sigma'(-\tau N+\sigma E)+\sigma'\tau N+\sigma\tau' N+\sigma\tau^2 B-2\sigma\sigma' E+\sigma^3 B$$

bulunur. Gerekli ortak düzenlemeler yapılırsa,

$$\boldsymbol{E}'''=(-\sigma''+\sigma\tau^2+\sigma^3)B+(2\sigma'\tau+\sigma\tau')N+(-3\sigma\sigma')E \tag{4.40}$$

elde edilir. Elde edilen E''' vektörü, (4.36) ile verilen E' vektörü ve (4.37) ile verilen E'' vektörü, (4.39) ile verilen C_1 matrisinde yerine yazılıp determinant alınırsa,

$$C_1=-\big((3\sigma^3\sigma'\tau)|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{E}|+\sigma^3(2\sigma'\tau+\sigma\tau')|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{N}|\big)$$

olarak bulunur. Burada $|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{E}\,|=-1$ ve $|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{N}\,|=1$ olması kullanılırsa, sonuç olarak,

$$C_1=-\sigma^5\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'$$

elde edilir. (4.14) den dolayı $\sigma \neq 0$ ve $\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' \neq 0$ dır. O halde (4.39) ile verilen C_1 determinantı sıfırdan farklıdır. Bu durumdan (4.38) de verilen C matrisinin de determinantı sıfırdan farklıdır, dolayısıyla $RankC = 3$ bulunur. O halde C matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_h fonksiyonu x_0 noktasında A_4–tekilliğine sahip f_{hU_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

4.3.2. Teorem

$$\tilde{F}: I \times S_G^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{F}(x, U, w_1) = F_h(x, U) - w_1 \tag{4.41}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall x \in I$ için $f_{hU_{0},w_0}(x) = \tilde{F}(x, U, w_1)$ olsun. Eğer fonksiyonu f_{hU_{0},w_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_k , $(k = 1,2,3,4)$ tekilliğine sahipse, bu durumda F_h fonksiyonu f_{hU_{0},w_0} fonksiyonunun bir versal dallanması olur.

İspat

(4.32) denklemi ile belirli $F(x, U)$ eşitliği (4.41) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\tilde{F}_h(x, U, U_1) = E_1(y' - U_2) + E_2(z' - U_3) + E_3(w' - U_4) - U_1$$

(3.42) elde edilir. Burada $w \in \mathbb{R}$ her hangi bir sayısı olduğu için w yerine U_1 alınabilir.

F_h fonksiyonunun f_{hU_0} bir versal dallanması olması için 3.9. Önermesi ile verilen versallik için matris kriterini sağlaması gerekmektedir. Bunun içinde öncelikle $\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_i}(x_0, U_o)$, $(i = 1,2,3,4)$ şeklindeki fonksiyonların eşitliği ile verilen jet tanımından yararlanarak, sabit ile birlikte jetleri bulunur. Bu durumda jetler,

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x_0, U_o) + J^3\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x, U_o)\right) = -1 + x0 + \frac{x^2}{2}0 + \frac{x^3}{6}0$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_{i+1}}(x_0, U_o) + J^3\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_{i+1}}(x, U_o)\right) = (-E_i) + x(-E_i)' + \frac{x^2}{2}(-E_i)'' + \frac{x^3}{6}(-E_i)''' ,$$

$$(i = 1,2,3) \tag{4.43}$$

şeklindedir.

1.Durum:

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x_0, U_o) = -1$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x_0, U_o) = -E_1$$

$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_3}(x_0, U_o) = -E_2$

$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_4}(x_0, U_o) = -E_3$

olarak bulunur. $f_{hU_{0,}U_1}$ fonksiyonu x_0 noktası A_1-tekilliğine sahipse, D matrisini 1×4 tipinde aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$D = [-1 \quad -E_1 \quad -E_2 \quad -E_3] \tag{4.44}$$

matrisinin maksimum ranka sahip olması gerekir. *D* matrisinin maksimum ranka sahip olduğu açıktır yani regülerdir.

2.Durum:

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x_0, U_o) + J^1\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x, U_o)\right) = -1 + x0$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x_0, U_o) + J^1\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x, U_o)\right) = (-E_1) + x(-E_1)'$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x_0, U_o) + J^1\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x, U_o)\right) = (-E_2) + x(-E_2)'$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_3}(x_0, U_o) + J^1\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_3}(x, U_o)\right) = (-E_3) + x(-E_3)'$$

$f_{hu_{0,}U_1}$ fonksiyonu x_0 noktasında A_2-tekilliğine sahipse, E matrisini 2×4 tipinde aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$E = \begin{bmatrix} -1 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ 0 & -E_1' & -E_2' & -E_3' \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

matrisinin maksimum ranka sahip olması gerekir. *E* matrisinin ikinci satırı (4.34) ile verilen *A* matrisine eşititir. *A* matrisinin rankı bir olduğundan 2. Satır sıfırdan farklıdır. Bu ise *E* matrisinin maksimum ranka sahip olduğunu gösterir, dolayısıyla *E* matrisi regülerdir.

3.Durum:

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x_0, U_o) + J^2\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x, U_o)\right) = -1 + x0 + \frac{x^2}{2}0$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x_0, U_o) + J^2\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x, U_o)\right) = (-E_1) + x(-E_1)' + \frac{x^2}{2}(-E_1)''$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x_0, U_o) + J^2\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x, U_o)\right) = (-E_2) + x(-E_2)' + \frac{x^2}{2}(-E_2)''$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_3}(x_0, U_o) + J^2\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_3}(x, U_o)\right) = (-E_3) + x(-E_3)' + \frac{x^2}{2}(-E_3)''$$

f_{hU_{0},U_1} fonksiyonu x_0 noktası A_3-tekilliğine sahipse, F matrisini 3×4 tipinde aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$F = \begin{bmatrix} -1 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ 0 & -E_1' & -E_2' & -E_3' \\ 0 & -E_1'' & -E_2'' & -E_3'' \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

matrisinin maksimum ranka sahip olması gerekir. F matrisinin ikinci ve üçüncü satırlarının lineer bağımsız olduğu (4.35) ile verilen B matrisinden bilinmektedir. Bu ise F matrisinin maksimum ranka sahip olduğunu gösterir ve F matrisi regülerdir.

4.Durum:

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x_0, U_o) + J^3\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_1}(x, U_o)\right) = -1 + x0 + \frac{x^2}{2}0 + \frac{x^3}{6}0$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x_0, U_o) + J^3\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x, U_o)\right) = (-E_1) + x(-E_1)' + \frac{x^2}{2}(-E_1)'' + \frac{x^3}{6}(-E_1)'''$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x_0, U_o) + J^3\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_2}(x, U_o)\right) = (-E_2) + x(-E_2)' + \frac{x^2}{2}(-E_2)'' + \frac{x^3}{6}(-E_2)'''$$

$$\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_3}(x_0, U_o) + J^3\left(\frac{\partial \widetilde{F_h}}{\partial U_3}(x, U_o)\right) = (-E_3) + x(-E_3)' + \frac{x^2}{2}(-E_3)'' + \frac{x^3}{6}(-E_3)'''$$

f_{hU_{0},U_1} fonksiyonu x_0 noktasında A_4-tekilliğine sahipse, G matrisini 4×4 tipinde aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$G = \begin{bmatrix} -1 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ 0 & -E_1' & -E_2' & -E_3' \\ 0 & -E_1'' & -E_2'' & -E_3'' \\ 0 & -E_1''' & -E_2''' & -E_3''' \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

matrisinin maksimum ranka sahip olması gerekir. Yani G matrisini, determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. G matrisi birinci sütuna göre açıldığında,

$$|G| = -\begin{vmatrix} -E_1' & -E_2' & -E_3' \\ -E_1'' & -E_2'' & -E_3'' \\ -E_1''' & -E_2''' & -E_3''' \end{vmatrix} \tag{4.48}$$

elde edilir. Bu elde edilen matris (4.38) ile verilen matrisin ters işaretlisidir. Dolayısıyla
$|G| = -|C|$
olur. $detC \neq 0$ olduğundan dolayı G matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. Bu ise G matrisinin maksimum ranka sahip olduğunu gösterir. Dolayısıyla G matrisi regülerdir.

4.3.3. Teorem

$F_d: I \times G^4 \to \mathbb{R}$

$(x, V) \to F_d(x, V)$

fonksiyonu birim hızlı $\alpha: I \to G^4$ eğrisi üzerinde tanımlı (4.15) eşitliği ile verilen Galile uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda $\forall V \in G^4$ için şeklindedir. Eğer f_{dV_0} fonksiyonu x_0 noktasında A$_k$- tekilliğine (k=2,3,4) tekilliğine sahipse, F_d fonksiyonu f_{dV_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

İspat

(4.15) eşitliğinden $F_d(x, u) = |\boldsymbol{T}(x) \quad \boldsymbol{N}(x) \quad \boldsymbol{B}(x) \quad \alpha(x) - V(x)|$ şeklindedir. Birim hızlı $\alpha: I \to G^4$ eğrisi için Frenet çatıları sırasıyla (2.28), (2.29) ve (2.30) eşitliklerinde verilmiştir. Yine $V \in G^4$ olduğundan $V = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ şeklindedir. O halde bunlar $F_d(x, V) = |\boldsymbol{T}(x) \quad \boldsymbol{N}(x) \quad \boldsymbol{B}(x) \quad \alpha(x) - V(x)|$ eşitliğinde yazılırsa,

$$F_h(x, V) = \begin{bmatrix} 1 & y' & z' & w' \\ 0 & N_1 & N_2 & N_3 \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ x - V_1 & y - V_2 & z - V_3 & w - V_4 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

şeklinde bulunur. Bu determinant birinci sütuna göre açılırsa,

$$F_h(x, V) = \begin{vmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ y - V_2 & z - V_3 & w - V_4 \end{vmatrix} - (x - V_1) \begin{vmatrix} y' & z' & w' \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{4.50}$$

şeklinde olur. Bu determinantlardan birincisi 3. satıra göre açılır ve ikincisi de 1. satıra göre açılırsa,

$$F_h(x, V) = (y - V_2)(N_2B_3 - N_3B_2) - (z - V_3)(N_1B_3 - N_3B_1)$$
$$+(w - V_4)(N_1B_2 - N_2B_1)$$
$$-(x - V_1)\big(y'(N_2B_3 - N_3B_2) - z'(N_1B_3 - N_3B_1) + w'(N_1B_2 - N_2B_1)\big) \tag{4.51}$$

elde edilir. (2.30) de verilen Frenet-Serret formüllerinden,

$$F_h(x, V) = (y - V_2)(-E_1) - (Z - V_3)(E_2) + (w - V_4)(-E_3)$$
$$-(x - V_1)\big(y'(-E_1) - z'(E_2) + w'(-E_3)\big) \tag{4.52}$$

şeklindedir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$F_h(x, V) = (x - V_1)(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3) + (V_2 - y)E_1 + (V_3 - z)E_2$$
$$+(V_4 - w)E_3 \tag{4.53}$$

denklemi bulunur.

F_d fonksiyonunun, f_{dV_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olması için 3.7. Önermesi ile verilen (p)-versallik için matris kriterini sağlaması gerekir. Bunun içinde öncelikle $\frac{\partial F_d}{\partial V_i}(x, V_o)$,(i=1,2,3,4) şeklindeki fonksiyonların 3.3. ile verilen bir fonksiyonun jetleri tanımından yararlanarak jetleri bulunmalıdır. Bu durumda (4.53) eşitliğinden dolayı jetler;

$$J^4\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_1}(x, V_o)\right)(x_0) = x\big(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\big)'$$
$$+\frac{x^2}{2}\big(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\big)'' + \frac{x^3}{6}\big(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\big)'''$$
$$+\frac{x^4}{24}\big(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\big)^{(\iota v)} \tag{4.54}$$

$$J^4\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_{i+1}}(x, V_o)\right)(x_0) =$$
$$x(E_i)' + \frac{x^2}{2}(E_i)'' + \frac{x^3}{6}(E_i)''' + \frac{x^4}{24}(E_i)^{(\iota v)} \ ,(i = 1,2,3) \tag{4.55}$$

şeklinde elde edilir.

1.Durum:

$$J^1\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_1}(x, V_o)\right)(x_0) = x\big(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\big)'$$

$$J^1\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_2}(x, V_o)\right)(x_0) = x(E_1)'$$

$$J^1\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_3}(x, V_o)\right)(x_0) = x(E_2)'$$

$$J^1\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_4}(x, V_o)\right)(x_0) = x(E_3)'$$

olarak bulunur. O halde F_d fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.7. Önermesinden dolayı,

$$K = \left[\big(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\big)' \quad E_1' \quad E_2' \quad E_3'\right] \tag{4.56}$$

matrisinin regüler bir matris olması gerekir. K matrisi 1×4 tipinde bir matris olduğundan regüler olması için $RankK = 1$ olmalıdır.

$\boldsymbol{E}' = -\sigma\boldsymbol{B}$ ve eğri $\sigma \neq 0$ birim hızlı eğri olduğundan dolayı $\boldsymbol{E}' \neq 0$ dır. O halde (4.56) eşitliği ile tanımlı K matrisi için $RankK = 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla K matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_d fonksiyonu x_0 noktasında A_2–tekilliğine sahip f_{dV_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

2.Durum:

$$J^2\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_1}(x,V_o)\right)(x_0)=x\big(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\big)'+\frac{x^2}{2}\big(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\big)''$$

$$J^2\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_2}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_1)'+\frac{x^2}{2}(E_1)''$$

$$J^2\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_3}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_2)'+\frac{x^2}{2}(E_2)''$$

$$J^2\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_4}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_3)'+\frac{x^2}{2}(E_3)''$$

olarak bulunur. O halde F_d fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.7. Önermesinden dolayı,

$$L=\begin{bmatrix}\big(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\big)' & E_1' & E_2' & E_3'\\ \big(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\big)'' & E_1'' & E_2'' & E_3''\end{bmatrix} \tag{4.57}$$

matrisinin regüler bir matris olması gerekir. A matrisi 2×4 tipinde bir matris olduğundan regüler olması için $RankL=2$ olmalıdır. (4.35) eşitliği ile tanımlı B matrisini düşünürsek,

$$B=\begin{bmatrix}-E_1' & -E_2' & -E_3'\\ -E_1'' & -E_2'' & -E_3''\end{bmatrix}$$

olup $RankB=2$ dir. O halde L matrisi B matrisini kapsayan bir matris olduğundan $RankL=2$ olur. Dolayısıyla L matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_d fonksiyonu x_0 noktasında A_3–tekilliğine sahip f_{dV_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

3.Durum:

$$J^3\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_1}(x,V_o)\right)(x_0)=x\big(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\big)'+\frac{x^2}{2}\big(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\big)''$$

$$+\frac{x^3}{6}\big(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\big)'''$$

$$J^3\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_2}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_1)'+\frac{x^2}{2}(E_1)''+\frac{x^3}{6}(E_1)'''$$

$$J^3\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_3}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_2)'+\frac{x^2}{2}(E_2)''+\frac{x^3}{6}(E_2)'''$$

$$J^3\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_4}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_3)'+\frac{x^2}{2}(E_3)''+\frac{x^3}{6}(E_3)'''$$

olarak bulunur. O halde F_d fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.7. Önermesinden dolayı,

$$M=\begin{bmatrix} \left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)' & E_1' & E_2' & E_3' \\ \left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)'' & E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ \left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)''' & E_1''' & E_2''' & E_3''' \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

matrisinin regüler bir matris olması gerekir. M matrisi 3×4 tipinde bir matris olduğundan regüler olması için M matrisinde kapsanan 3×3 tipindeki bütün karesel matrislerin en az birinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. M matrisinde kapsanan 3×3 tipindeki alt matrislerden birisi,

$$M_1=\begin{bmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ E_1''' & E_2''' & E_3''' \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

matrisidir. Bu durumda (4.38) eşitliğinden C matrisi kullanılarak,

$M_1=-C$

elde edilir. Bu durumda $|C|\neq 0$ olmasından M_1 matrisinin determinantı da sıfırdan farklıdır. Bundan dolayı M matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_d fonksiyonu x_0 noktasında A$_4$–tekilliğine sahip f_{dV_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

4.Durum:

$$J^4\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_1}(x,V_o)\right)(x_0)=x\left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)'$$

$$+\frac{x^2}{2}\left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)''+\frac{x^3}{6}\left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)'''$$

$$+\frac{x^4}{24}\left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)^{(\iota v)}$$

$$J^4\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_2}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_1)'+\frac{x^2}{2}(E_1)''+\frac{x^3}{6}(E_1)'''+\frac{x^4}{24}(E_1)^{(\iota v)}$$

$$J^4\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_3}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_2)'+\frac{x^2}{2}(E_2)''+\frac{x^3}{6}(E_2)'''+\frac{x^4}{24}(E_2)^{(\iota v)}$$

$$J^4\left(\frac{\partial F_d}{\partial V_4}(x,V_o)\right)(x_0)=x(E_3)'+\frac{x^2}{2}(E_3)''+\frac{x^3}{6}(E_3)'''+\frac{x^4}{24}(E_3)^{(\iota v)}$$

olarak bulunur. O halde F_d fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.7. Önermesinden dolayı,

$$N=\begin{bmatrix} \left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)' & E_1' & E_2' & E_3' \\ \left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)'' & E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ \left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)''' & E_1''' & E_2''' & E_3''' \\ \left(-(y'E_1+z'E_2+w'E_3)\right)^{(\iota v)} & E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

matrisi regüler bir matris olması gerekir. N matrisi 4×4 tipinde bir matris olduğundan regüler olması için $detN \neq 0$ olmalıdır. N matrisi birinci sütuna göre açıldığında,

$$\det(N) = \left(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\right)' \begin{vmatrix} E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ E_1''' & E_2''' & E_3''' \\ E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix}$$

$$-\left(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\right)'' \begin{vmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ E_1''' & E_2''' & E_3''' \\ E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix}$$

$$+\left(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\right)''' \begin{vmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix}$$

$$-\left(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\right)^{(\iota v)} \begin{vmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ E_1''' & E_2''' & E_3''' \end{vmatrix} \quad (4.61)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadenin ilk önce matrislerin önündeki ifadeleri (2.20) eşitliği kullanılarak düzenlenirse,

$$\left(-(y'E_1 + z'E_2 + w'E_3)\right) = -(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3) \quad (4.62)$$

bulunur. (4.62) bulunan ifadenin türevi alınırsa,

$$-(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3)' = -(T_1'E_1 + T_2'E_2 + T_3'E_3) - (T_1E_1' + T_2E_2' + T_3E_3') \quad (4.63)$$

elde edilir. (4.63) ifadesinde (2.31) de verilen Frenet – Serret formülleri yerine yazılırsa,

$$-(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3)' = -(\kappa N_1E_1 + \kappa N_2E_2 + \kappa N_2E_3) - (T_1(-\sigma)B_1 + T_2(-\sigma)B_2 + T_3(-\sigma)B_3)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$-(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3)' = -\kappa(N_1E_1 + N_2E_2 + N_3E_3) + \sigma(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3) \quad (4.64)$$

elde edilir. $\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{E} \rangle_G = N_1E_1 + N_2E_2 + N_3E_3$ olduğundan ve $\boldsymbol{N}$ vektörü ile $\boldsymbol{E}$ vektörü bir birine dik olduğundan $\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{E} \rangle_G = N_1E_1 + N_2E_2 + N_3E_3 = 0$. Bu durumda (4.64) ile verilen denklem,

$$-(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3)' = \sigma(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3) \quad (4.65)$$

olarak bulunur. (4.65) ile verilen denklemden tekrar türev alınırsa,

$$-(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3)'' = \sigma'(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3)$$
$$+ \sigma(T_1'B_1 + T_2'B_2 + T_3'B_3) + \sigma(T_1B_1' + T_2B_2' + T_3B_3') \quad (4.66)$$

olur. (4.66) ifadesinde (2.31) de verilen Frenet – Serret formülleri yerine yazılırsa,

$$-(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3)'' = \sigma'(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3) + \sigma\kappa(N_1B_1 + N_2B_2 + N_2B_3)$$
$$+\sigma(T_1(-\tau N_1 + \sigma E_1) + T_2(-\tau N_2 + \sigma E_2) + T_3(-\tau N_3 + \sigma E_3))$$

elde edilir. Elde edilen ifade düzenlenirse,

$$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)''=\sigma'(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)+\ \sigma\kappa(N_1B_1+N_2B_2+N_2B_3)$$
$$-\sigma\tau(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)+\sigma^2(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3) \qquad (4.67)$$

bulunur. $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\rangle_G=N_1B_1+N_2B_2+N_3B_3$ olduğundan ve $\boldsymbol{N}$ vektörü ile $\boldsymbol{B}$ vektörü bir birine dik olduğundan $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\rangle_G=N_1B_1+N_2B_2+N_3B_3=0$. Bu durumda (4.67) ile verilen denklem,

$$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)''=\sigma'(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)-\sigma\tau(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)$$
$$+\sigma^2(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3) \qquad (4.68)$$

olarak bulunur. (4.68) ile verilen denklemden tekrar türev alınırsa,

$$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)'''=\sigma''(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)+\sigma'(T_1'B_1+T_2'B_2+T_3'B_3)$$
$$+\sigma'(T_1B_1'+T_2B_2'+T_3B_3')-\sigma'\tau(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)-\sigma\tau'(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)$$
$$-\sigma\tau(T_1'N_1+T_2'N_2+T_3'N_3)-\sigma\tau(T_1N_1'+T_2N_2'+T_3N_3')+2\sigma\sigma'(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)$$
$$+\sigma^2(T_1'E_1+T_2'E_2+T_3'E_3)+\sigma^2(T_1E_1'+T_2E_2'+T_3E_3') \qquad (4.69)$$

elde edilir. (4.69) ifadesinde (2.31) de verilen Frenet – Serret formülleri yerine yazılıp düzenlenirse,

$$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)'''=\sigma''(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)+\sigma'\kappa(N_1B_1+N_2B_2+N_3B_3)$$
$$-\sigma'\tau(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)+\sigma\sigma'(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)-\sigma'\tau(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)$$
$$-\sigma\tau'(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)-\sigma\tau\kappa(N_1N_1+N_2N_2+N_3N_3)-\sigma\tau^2(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)$$
$$+2\sigma\sigma'(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)+\sigma^2\kappa(N_1E_1+N_2E_2+N_3E_3)-\sigma^3(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılıp ortak parantezlere alınırsa,

$$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)'''=(\sigma''-\sigma\tau^2-\sigma^3)(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)$$
$$+\sigma'\kappa(N_1B_1+N_2B_2+N_3B_3)-(2\sigma'\tau+\sigma\tau')(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)$$
$$+3\sigma\sigma'(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)-\sigma\tau\kappa(N_1N_1+N_2N_2+N_3N_3)$$
$$+\sigma^2\kappa(N_1E_1+N_2E_2+N_3E_3) \qquad (4.70)$$

elde edilir. $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\rangle_G=N_1B_1+N_2B_2+N_3B_3$ ve $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{E}\rangle_G=N_1E_1+N_2E_2+N_3E_3$ olduğundan ve $\boldsymbol{N}$ vektörü, $\boldsymbol{B}$ vektörü ve $\boldsymbol{E}$ vektörleri bir birine dik olduğundan $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\rangle_G=N_1B_1+N_2B_2+N_3B_3=0$ ve $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{E}\rangle_G=N_1E_1+N_2E_2+N_3E_3=0$. Ayrıca $\boldsymbol{N}$ vektörü birim normal vektör olduğundan $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{N}\rangle_G=N_1N_1+N_2N_2+N_3N_3=1$dir. Bu durumda (4.70) ile verilen denklem,

$$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)'''=(\sigma''-\sigma\tau^2-\sigma^3)(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)$$
$$-(2\sigma'\tau+\sigma\tau')(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)+3\sigma\sigma'(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)-\sigma\tau\kappa \qquad (4.71)$$

bulunur. (4.71) ile verilen denklemden tekrar türev alınırsa,

$$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)^{(iv)}=(\sigma'''-\sigma'\tau^2-2\sigma\tau\tau'-3\sigma^2\sigma')(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)$$
$$+(\sigma''-\sigma\tau^2-\sigma^3)(T_1'B_1+T_2'B_2+T_3'B_3)+(\sigma''-\sigma\tau^2-\sigma^3)(T_1B_1'+T_2B_2'+T_3B_3')$$

$-(2\sigma''\tau+3\sigma'\tau'+\sigma\tau'')(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)-(2\sigma'\tau+\sigma\tau')(T_1'N_1+T_2'N_2+T_3'N_3)$
$-(2\sigma'\tau+\sigma\tau')(T_1N_1'+T_2N_2'+T_3N_3')+\left(3\sigma'^2+3\sigma\sigma''\right)(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)$
$+3\sigma\sigma'(T_1'E_1+T_2'E_2+T_3'E_3)+3\sigma\sigma'(T_1E_1'+T_2E_2'+T_3E_3')-\sigma'\tau\kappa-\sigma\tau'\kappa-\sigma\tau\kappa'$ (4.72)

elde edilir. (4.72) ifadesinde (2.31) de verilen Frenet – Serret formülleri yerine yazılıp düzenlenirse,

$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)^{(\iota v)}=(\sigma'''-\sigma'\tau^2-2\sigma\tau\tau'-3\sigma^2\sigma')(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)$
$+\kappa(\sigma''-\sigma\tau^2-\sigma^3)(N_1B_1+N_2B_2+N_3B_3)-\tau(\sigma''-\sigma\tau^2-\sigma^3)(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)$
$+\sigma(\sigma''-\sigma\tau^2-\sigma^3)(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)$
$-(2\sigma''\tau+3\sigma'\tau'+\sigma\tau'')(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)-\kappa(2\sigma'\tau+\sigma\tau')(N_1N_1+N_2N_2+N_3N_3)$
$-\tau(2\sigma'\tau+\sigma\tau')(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)+\left(3\sigma'^2+3\sigma\sigma''\right)(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)$
$+3\sigma\sigma'\kappa(N_1E_1+N_2E_2+N_3E_3)-3\sigma^2\sigma'(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)-\sigma'\tau\kappa-\sigma\tau'\kappa-\sigma\tau\kappa'$

bulunur. Bulunan bu ifade de gerekli düzenlemeler yapıp ortak parantezlere alınırsa,

$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)^{(\iota v)}=(\sigma'''-3\sigma\tau\tau'-3\sigma'\tau^2-6\sigma^2\sigma')(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)$
$+(\sigma''\kappa-\sigma\tau^2\kappa-\sigma^3\kappa)(N_1B_1+N_2B_2+N_3B_3)$
$+(\sigma\tau^3+\sigma^3\tau-3\sigma''\tau-3\sigma'\tau'-\sigma\tau'')(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)$
$+\left(-\sigma^2\tau^2-\sigma^4+3\sigma'^2+4\sigma\sigma''\right)(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)$
$-(2\sigma'\tau\kappa+\sigma\tau'\kappa)(N_1N_1+N_2N_2+N_3N_3)+3\sigma\sigma'\kappa(N_1E_1+N_2E_2+N_3E_3)$
$-\sigma'\tau\kappa-\sigma\tau'\kappa-\sigma\tau\kappa'$ (4.73)

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$-(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)^{(\iota v)}=(\sigma'''-3\sigma\tau\tau'-3\sigma'\tau^2-6\sigma^2\sigma')(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)$
$+(\sigma\tau^3+\sigma^3\tau-3\sigma''\tau-3\sigma'\tau'-\sigma\tau'')(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)$
$+\left(-\sigma^2\tau^2-\sigma^4+3\sigma'^2+4\sigma\sigma''\right)(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)$
$-3\sigma'\tau\kappa-2\sigma\tau'\kappa-\sigma\tau\kappa'$ (4.74)

elde edilir. Şimdi (4.61) de verilen matrislerin sırasıyla determinantlarını bulalım. Determinantlarını bulmadan önce ilk olarak (4.40) ile verilen $\boldsymbol{E}'''=(-\sigma''+\sigma\tau^2+\sigma^3)\boldsymbol{B}+(2\sigma'\tau+\sigma\tau')\boldsymbol{N}+(-3\sigma\sigma')\boldsymbol{E}$ denklemden bir kez daha türev alalım,

$\boldsymbol{E}^{(\iota v)}=(-\sigma'''+\sigma'\tau^2+2\sigma\tau\tau'+3\sigma^2\sigma')\boldsymbol{B}+(-\sigma''+\sigma\tau^2+\sigma^3)\boldsymbol{B}'$
$+(2\sigma''\tau+3\sigma'\tau'+\sigma\tau'')\boldsymbol{N}+(2\sigma'\tau+\sigma\tau')\boldsymbol{N}'+\left(-3\sigma'^2-3\sigma\sigma''\right)\boldsymbol{E}+(-3\sigma\sigma')\boldsymbol{E}'$ (4.75)

elde edilir. (4.75) ifadesinde (2.31) de verilen Frenet – Serret formülleri yerine yazılıp düzenlenirse,

$\boldsymbol{E}^{(\iota v)}=(-\sigma'''+\sigma'\tau^2+2\sigma\tau\tau'+3\sigma^2\sigma')\boldsymbol{B}+(-\sigma''+\sigma\tau^2+\sigma^3)(-\tau\boldsymbol{N}+\sigma\boldsymbol{E})$
$+(2\sigma''\tau+3\sigma'\tau'+\sigma\tau'')\boldsymbol{N}+(2\sigma'\tau^2+\sigma\tau\tau')\boldsymbol{B}+\left(-3\sigma'^2-3\sigma\sigma''\right)\boldsymbol{E}+(3\sigma^2\sigma')\boldsymbol{B}$

olarak bulunur. Bulunan bu ifade de ortak parantezlere alınırsa,

$$\boldsymbol{E}^{(\iota v)} = (-\sigma''' + 3\sigma'\tau^2 + 3\sigma\tau\tau' + 6\sigma^2\sigma')\boldsymbol{B} + (3\sigma''\tau - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'')\boldsymbol{N}$$

$$+\left(\sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3\sigma'^2 - 4\sigma\sigma''\right)\boldsymbol{E} \tag{4.76}$$

elde edilir. Şimdi (4.61) de verilen matrislerden birincisi olan,

$$\begin{vmatrix} E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ E_1''' & E_2''' & E_3''' \\ E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix}$$

matrisin determinantını bulalım. Bu matrisin determinantını bulmak için bu matrisi kapsayan,

$$\begin{vmatrix} 1 & y' & z' & w' \\ 0 & E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ 0 & E_1''' & E_2''' & E_3''' \\ 0 & E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}''' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| \tag{4.77}$$

matrisin determinantını bulalım. (4.37), (4.40) ve (4.76) da verilen $\boldsymbol{E}'', \boldsymbol{E}'''$ ve $\boldsymbol{E}^{\iota v}$ vektörleri (4.77) de yerine yazılıp düzenlenirse,

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}''' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| = \left|\boldsymbol{T} \quad -\sigma'\boldsymbol{B} \quad (2\sigma'\tau + \sigma\tau')\boldsymbol{N} \quad \left(\sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3\sigma'^2 - 4\sigma\sigma''\right)\boldsymbol{E}\right|$$

$$+|\boldsymbol{T} \quad -\sigma'\boldsymbol{B} \quad (-3\sigma\sigma')\boldsymbol{E} \quad (3\sigma''\tau - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'')\boldsymbol{N}\,|$$

$$+\left|\boldsymbol{T} \quad \sigma\tau\boldsymbol{N} \quad (-\sigma'' + \sigma\tau^2 + \sigma^3)\boldsymbol{B} \quad \left(\sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3\sigma'^2 - 4\sigma\sigma''\right)\boldsymbol{E}\right|$$

$$+|\boldsymbol{T} \quad \sigma\tau\boldsymbol{N} \quad (-3\sigma\sigma')\boldsymbol{E} \quad (-\sigma''' + 3\sigma'\tau^2 + 3\sigma\tau\tau' + 6\sigma^2\sigma')\boldsymbol{B}|$$

$$+|\boldsymbol{T} \quad -\sigma^2\boldsymbol{E} \quad (-\sigma'' + \sigma\tau^2 + \sigma^3)\boldsymbol{B} \quad (3\sigma''\tau - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'')\boldsymbol{N}|$$

$$+|\boldsymbol{T} \quad -\sigma^2\boldsymbol{E} \quad (2\sigma'\tau + \sigma\tau')\boldsymbol{N} \quad (-\sigma''' + 3\sigma'\tau^2 + 3\sigma\tau\tau' + 6\sigma^2\sigma')\boldsymbol{B}|$$

olur. Elde edilen ifade düzenlenirse,

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}''' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| = -\sigma'(2\sigma'\tau + \sigma\tau')\left(\sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3\sigma'^2 - 4\sigma\sigma''\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E}\,|$$

$$+(-\sigma')(-3\sigma\sigma')(3\sigma''\tau - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}\,|$$

$$+\sigma\tau(-\sigma'' + \sigma\tau^2 + \sigma^3)\left(\sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3\sigma'^2 - 4\sigma\sigma''\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}|$$

$$+\sigma\tau(-3\sigma\sigma')(-\sigma''' + 3\sigma'\tau^2 + 3\sigma\tau\tau' + 6\sigma^2\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B}|$$

$$+(-\sigma^2)(-\sigma'' + \sigma\tau^2 + \sigma^3)(3\sigma''\tau - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}\,|$$

$$+(-\sigma^2)(2\sigma'\tau + \sigma\tau')(-\sigma''' + 3\sigma'\tau^2 + 3\sigma\tau\tau' + 6\sigma^2\sigma')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B}|$$

şeklinde bulunur. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E}\,| = -1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}\,| = 1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E}| = 1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B}| = -1$, $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}\,| = -1$ ve $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B}| = 1$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}''' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| = 2\sigma^2\sigma'^2\tau^3 + 2\sigma^4\sigma'^2\tau - 6\sigma'^4\tau - 8\sigma\sigma'^2\sigma''\tau + \sigma^3\sigma'\tau^2\tau' + \sigma^5\sigma'\tau'$$

$$-3\sigma\sigma'^3\tau' - 4\sigma^2\sigma'\sigma''\tau' + 9\sigma\sigma'^2\sigma''\tau - 3\sigma^2\sigma'^2\tau^3 - 3\sigma^4\sigma'^2\tau + 9\sigma\sigma'^3\tau' + 3\sigma^2\sigma'^2\tau''$$

$-\sigma^3\sigma''\tau^3-\sigma^5\sigma''\tau+3\sigma\sigma'^2\sigma''\tau+4\sigma^2\sigma''^2\tau+\sigma^4\tau^5+\sigma^6\tau^3-3\sigma^2\sigma'^2\tau^3-4\sigma^3\sigma''\tau^3$

$+\sigma^6\tau^3+\sigma^8\tau-3\sigma^4\sigma'^2\tau-4\sigma^5\sigma''\tau-3\sigma^2\sigma'\sigma'''\tau+9\sigma^2\sigma'^2\tau^3+9\sigma^3\sigma'\tau^2\tau'+18\sigma^4\sigma'^2\tau$

$-3\sigma^2\sigma''^2\tau+\sigma^3\sigma''\tau^3+\sigma^5\sigma''\tau-3\sigma^2\sigma'\sigma''\tau'-\sigma^3\sigma''\tau''+3\sigma^3\sigma''\tau^3-\sigma^4\tau^5-\sigma^6\tau^3$

$+3\sigma^3\sigma'\tau^2\tau'+\sigma^4\tau^2\tau''+3\sigma^5\sigma''\tau-\sigma^6\tau^3-\sigma^8\tau+3\sigma^5\sigma'\tau'+\sigma^6\tau''+2\sigma^2\sigma'\sigma'''\tau$

$-6\sigma^2\sigma'^2\tau^3-6\sigma^3\sigma'\tau^2\tau'-12\sigma^4\sigma'^2\tau+\sigma^3\sigma'''\tau'-3\sigma^3\sigma'\tau^2\tau'-3\sigma^4\tau\tau'^2+-6\sigma^5\sigma'\tau'$

olarak bulunur. Bulunan ifadede gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{E}''\quad \boldsymbol{E}'''\quad \boldsymbol{E}^{\iota v}|=-6\sigma'^4\tau-7\sigma^2\sigma'\sigma''\tau'+4\sigma\sigma'^2\sigma''\tau+6\sigma\sigma'^3\tau'+3\sigma^2\sigma'^2\tau''$

$+\sigma^2\sigma''^2\tau-\sigma^3\sigma''\tau^3-\sigma^5\sigma''\tau-\sigma^2\sigma'\sigma'''\tau-\sigma^2\sigma'^2\tau^3+4\sigma^3\sigma'\tau^2\tau'+2\sigma^4\sigma'^2\tau$

$-\sigma^3\sigma''\tau''+\sigma^4\tau^2\tau''+\sigma^6\tau''+\sigma^3\sigma'''\tau'-3\sigma^4\tau\tau'^2-2\sigma^5\sigma'\tau' \qquad (4.78)$

elde edilir. Şimdi (4.61) de verilen matrislerden ikincisi olan,

$$\begin{vmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ E_1''' & E_2''' & E_3''' \\ E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix}$$

matrisin determinantını bulalım. Bu matrisin determinantını bulmak için bu matrisi kapsayan,

$$\begin{vmatrix} 1 & y' & z' & w' \\ 0 & E_1' & E_2' & E_3' \\ 0 & E_1''' & E_2''' & E_3''' \\ 0 & E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{E}'\quad \boldsymbol{E}'''\quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| \qquad (4.79)$$

matrisin determinantını bulalım. (4.36), (4.40) ve (4.76) da verilen $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{E}'''$ ve $\boldsymbol{E}^{\iota v}$ vektörleri (4.79) de yerine yazılırsa,

$|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{E}'\quad \boldsymbol{E}'''\quad \boldsymbol{E}^{\iota v}|=\left|\boldsymbol{T}\quad -\sigma\boldsymbol{B}\quad (2\sigma'\tau+\sigma\tau')\boldsymbol{N}\quad \left(\sigma^2\tau^2+\sigma^4-3\sigma'^2-4\sigma\sigma''\right)\boldsymbol{E}\right|$

$+|\boldsymbol{T}\quad -\sigma\boldsymbol{B}\quad (-3\sigma\sigma')\boldsymbol{E}\quad (3\sigma''\tau-\sigma\tau^3-\sigma^3\tau+3\sigma'\tau'+\sigma\tau'')\boldsymbol{N}|$

olur. Elde edilen ifade matris özelliklerinden düzenlenirse,

$|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{E}'\quad \boldsymbol{E}'''\quad \boldsymbol{E}^{\iota v}|=(-\sigma)(2\sigma'\tau+\sigma\tau')\left(\sigma^2\tau^2+\sigma^4-3\sigma'^2-4\sigma\sigma''\right)|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{E}|$

$+(-\sigma)(-3\sigma\sigma')(3\sigma''\tau-\sigma\tau^3-\sigma^3\tau+3\sigma'\tau'+\sigma\tau'')|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{N}|$

şeklinde bulunur. $|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{E}|=-1$ ve $|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{N}|=1$ ifadeleri eşitlikte yerine yazılırsa,

$|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{E}'\quad \boldsymbol{E}'''\quad \boldsymbol{E}^{\iota v}|=-(-\sigma)(2\sigma'\tau+\sigma\tau')\left(\sigma^2\tau^2+\sigma^4-3\sigma'^2-4\sigma\sigma''\right)$

$+(-\sigma)(-3\sigma\sigma')(3\sigma''\tau-\sigma\tau^3-\sigma^3\tau+3\sigma'\tau'+\sigma\tau'')$

bulunur. Bulunan ifade de gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$|\boldsymbol{T}\quad \boldsymbol{E}'\quad \boldsymbol{E}'''\quad \boldsymbol{E}^{\iota v}|=2\sigma^3\sigma'\tau^3+2\sigma^5\sigma'\tau-6\sigma\sigma'^3\tau-8\sigma^2\sigma'\sigma''\tau+\sigma^4\tau^2\tau'+\sigma^6\tau'$

$-3\sigma^2\sigma'^2\tau'-4\sigma^3\sigma''\tau'+9\sigma^2\sigma'\sigma''\tau-3\sigma^3\sigma'\tau^3-3\sigma^5\sigma'\tau+9\sigma^2\sigma'^2\tau'+3\sigma^3\sigma'\tau''$

olarak bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}''' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| = -\sigma^5\sigma'\tau - 6\sigma{\sigma'}^3\tau + \sigma^4\tau^2\tau' + \sigma^6\tau' - 4\sigma^3\sigma''\tau' + \sigma^2\sigma'\sigma''\tau$$
$$-\sigma^3\sigma'\tau^3 + 6\sigma^2{\sigma'}^2\tau' + 3\sigma^3\sigma'\tau'' \tag{4.80}$$

elde edilir. Şimdi (4.61) de verilen matrislerden üçüncüsü olan,

$$\begin{vmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix}$$

matrisin determinantını bulalım. Bu matrisin determinantını bulmak için bu matrisi kapsayan,

$$\begin{vmatrix} 1 & y' & z' & w' \\ 0 & E_1' & E_2' & E_3' \\ 0 & E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ 0 & E_1^{(\iota v)} & E_2^{(\iota v)} & E_3^{(\iota v)} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| \tag{4.81}$$

matrisin determinantını bulalım. (4.36), (4.37) ve (4.76) da verilen E', E'' ve $E^{\iota v}$ vektörleri (4.81) de yerine yazılıp düzenlenirse,

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| = \left|\boldsymbol{T} \quad -\sigma\boldsymbol{B} \quad \sigma\tau\boldsymbol{N} \quad \left(\sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3{\sigma'}^2 - 4\sigma\sigma''\right)\boldsymbol{E}\right|$$
$$+|\boldsymbol{T} \quad -\sigma\boldsymbol{B} \quad -\sigma^2\boldsymbol{E} \quad (3\sigma''\tau - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'')\boldsymbol{N}|$$

olur. Bulunan ifade matris özelliklerinden düzenlenirse,

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| = (-\sigma)(\sigma\tau)\left(\sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3{\sigma'}^2 - 4\sigma\sigma''\right)|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E}|$$
$$+(-\sigma)(-\sigma^2)(3\sigma''\tau - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'')|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}|$$

bulunur. $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{E}| = -1$ ve $|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{N}| = 1$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| = -(-\sigma)(\sigma\tau)\left(\sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 3{\sigma'}^2 - 4\sigma\sigma''\right)$$
$$+(-\sigma)(-\sigma^2)(3\sigma''\tau - \sigma\tau^3 - \sigma^3\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'')$$

şeklinde bulunur. Bulunan ifadede gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}^{\iota v}| = -3\sigma^2{\sigma'}^2\tau - \sigma^3\sigma''\tau + 3\sigma^3\sigma'\tau' + \sigma^4\tau'' \tag{4.82}$$

elde edilir. Şimdi (4.61) de verilen matrislerden dördüncüsü olan,

$$\begin{vmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ E_1''' & E_2''' & E_3''' \end{vmatrix}$$

matrisin determinantını bulalım. Bu matrisin determinantını bulmak için bu matrisi kapsayan,

$$\begin{vmatrix} 1 & y' & z' & w' \\ 0 & E_1' & E_2' & E_3' \\ 0 & E_1'' & E_2'' & E_3'' \\ 0 & E_1''' & E_2''' & E_3''' \end{vmatrix} = |\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}'''| \tag{4.83}$$

matrisin determinantını bulalım. Bu matris (4.39) ile verilen C_1 matrisinin eksilisidir.

$$|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}'''| = -|\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}'' \quad \boldsymbol{E}'''| = \sigma^4\tau' - \sigma^3\sigma'\tau \tag{4.84}$$

bulunur. Şimdi (4.65), (4.68), (4.65), (4.71), (4.74), (4.78), (4.80), (4.82), (4.84), ile verilen eşitlikleri (4.61) de verilen matris de yerine yazılırsa,

$\det(N) = \big(\sigma(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3)\big)\big(-6\sigma'^4\tau - 7\sigma^2\sigma'\sigma''\tau' + 4\sigma\sigma'^2\sigma''\tau + 6\sigma\sigma'^3\tau' + 3\sigma^2\sigma'^2\tau'' + \sigma^2\sigma''^2\tau - \sigma^3\sigma''\tau^3 - \sigma^5\sigma''\tau - \sigma^2\sigma'\sigma'''\tau - \sigma^2\sigma'^2\tau^3 + 4\sigma^3\sigma'\tau^2\tau' + 2\sigma^4\sigma'^2\tau - \sigma^3\sigma''\tau'' + \sigma^4\tau^2\tau'' + \sigma^6\tau'' + \sigma^3\sigma'''\tau' - 3\sigma^4\tau\tau'^2 - 2\sigma^5\sigma'\tau'\big) - \big(\sigma'(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3) - \sigma\tau(T_1N_1 + T_2N_2 + T_3N_3) + \sigma^2(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3)\big)\big(-\sigma^5\sigma'\tau - 6\sigma\sigma'^3\tau + \sigma^4\tau^2\tau' + \sigma^6\tau' - 4\sigma^3\sigma''\tau' + \sigma^2\sigma'\sigma''\tau - \sigma^3\sigma'\tau^3 + 6\sigma^2\sigma'^2\tau' + 3\sigma^3\sigma'\tau''\big) + \big((\sigma'' - \sigma\tau^2 - \sigma^3)(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3) - (2\sigma'\tau + \sigma\tau')(T_1N_1 + T_2N_2 + T_3N_3) + 3\sigma\sigma'(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3) - \sigma\tau\kappa\big)\big(-3\sigma^2\sigma'^2\tau - \sigma^3\sigma''\tau + 3\sigma^3\sigma'\tau' + \sigma^4\tau''\big) - \Big((\sigma''' - 3\sigma\tau\tau' - 3\sigma'\tau^2 - 6\sigma^2\sigma')(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3) + (\sigma\tau^3 + \sigma^3\tau - 3\sigma''\tau - 3\sigma'\tau' - \sigma\tau'')(T_1N_1 + T_2N_2 + T_3N_3) + \big(-\sigma^2\tau^2 - \sigma^4 + 3\sigma'^2 + 4\sigma\sigma''\big)(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3) - 3\sigma'\tau\kappa - 2\sigma\tau'\kappa - \sigma\tau\kappa'\Big)(\sigma^4\tau' - \sigma^3\sigma'\tau)$

olur. Çarpma işlemlerini yapıp, $(T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3)$, $(T_1N_1 + T_2N_2 + T_3N_3)$, $(T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3)$ parantezlerine alınırsa,

$\det(N) = (T_1B_1 + T_2B_2 + T_3B_3)\big(-6\sigma\sigma'^4\tau - 7\sigma^3\sigma'\sigma''\tau' + 4\sigma^2\sigma'^2\sigma''\tau + 6\sigma^2\sigma'^3\tau' + 3\sigma^3\sigma'^2\tau'' + \sigma^3\sigma''^2\tau - \sigma^4\sigma''\tau^3 - \sigma^6\sigma''\tau - \sigma^3\sigma'\sigma'''\tau - \sigma^3\sigma'^2\tau^3 + 4\sigma^4\sigma'\tau^2\tau' + 2\sigma^5\sigma'^2\tau - \sigma^4\sigma''\tau'' + \sigma^5\tau^2\tau'' + \sigma^7\tau'' + \sigma^4\sigma'''\tau' - 3\sigma^5\tau\tau'^2 - 2\sigma^6\sigma'\tau' + \sigma^5\sigma'^2\tau + 6\sigma\sigma'^4\tau - \sigma^4\sigma'\tau^2\tau' - \sigma^6\sigma'\tau' + 4\sigma^3\sigma'\sigma''\tau' - \sigma^2\sigma'^2\sigma''\tau + \sigma^3\sigma'^2\tau^3 - 6\sigma^2\sigma'^3\tau' - 3\sigma^3\sigma'^2\tau'' - 3\sigma^2\sigma'^2\sigma''\tau - \sigma^3\sigma''^2\tau + 3\sigma^3\sigma'\sigma''\tau' + \sigma^4\sigma''\tau'' + 3\sigma^3\sigma'^2\tau^3 + \sigma^4\sigma''\tau^3 - 3\sigma^4\sigma'\tau^2\tau' - \sigma^5\tau^2\tau'' + 3\sigma^5\sigma'^2\tau + \sigma^6\sigma''\tau - 3\sigma^6\sigma'\tau' - \sigma^7\tau'' - \sigma^4\sigma'''\tau' + 3\sigma^5\tau\tau'^2 + 3\sigma^4\sigma'\tau^2\tau' + 6\sigma^6\sigma'\tau' + \sigma^3\sigma'\sigma'''\tau - 3\sigma^4\sigma'\tau^2\tau' - 3\sigma^3\sigma'^2\tau^3 - 6\sigma^5\sigma'^2\tau\big)$

$+(T_1N_1 + T_2N_2 + T_3N_3)\big(-\sigma^6\sigma'\tau^2 - 6\sigma^2\sigma'^3\tau^2 + \sigma^5\tau^3\tau' + \sigma^7\tau\tau' - 4\sigma^4\sigma''\tau\tau' + \sigma^3\sigma'\sigma''\tau^2 - \sigma^4\sigma'\tau^4 + 6\sigma^3\sigma'^2\tau\tau' + 3\sigma^4\sigma'\tau\tau'' + 6\sigma^2\sigma'^3\tau^2 + 2\sigma^3\sigma'\sigma''\tau^2 - 6\sigma^3\sigma'^2\tau\tau' - 2\sigma^4\sigma'\tau\tau'' + 3\sigma^3\sigma'^2\tau\tau' + \sigma^4\sigma''\tau\tau' - 3\sigma^4\sigma'\tau'^2 - \sigma^5\tau'\tau'' - \sigma^5\tau^3\tau' - \sigma^7\tau\tau' + 3\sigma^4\sigma''\tau\tau' + 3\sigma^4\sigma'\tau'^2 + \sigma^5\tau'\tau'' + \sigma^4\sigma'\tau^4 + \sigma^6\sigma'\tau^2 - 3\sigma^3\sigma'\sigma''\tau^2 - 3\sigma^3\sigma'^2\tau\tau' - \sigma^4\sigma'\tau\tau''\big)$

$+(T_1E_1+T_2E_2+T_3E_3)\big(\sigma^7\sigma'\tau+6\sigma^3\sigma'^3\tau-\sigma^6\tau^2\tau'-\sigma^8\tau'+4\sigma^5\sigma''\tau'-\sigma^4\sigma'\sigma''\tau+$
$\sigma^5\sigma'\tau^3-6\sigma^4\sigma'^2\tau'-3\sigma^5\sigma'\tau''-9\sigma^3\sigma'^3\tau-3\sigma^4\sigma'\sigma''\tau+9\sigma^4\sigma'^2\tau'+3\sigma^5\sigma'\tau''+$
$\sigma^6\tau^2\tau'+\sigma^8\tau'-3\sigma^4\sigma'^2\tau'-4\sigma^5\sigma''\tau'-\sigma^5\sigma'\tau^3-\sigma^7\sigma'\tau+3\sigma^3\sigma'^3\tau+4\sigma^4\sigma'\sigma''\tau\big)$
$+3\sigma^2\sigma'^2\tau^2\kappa+\sigma^4\sigma''\tau^2\kappa-3\sigma^4\sigma'\tau\tau'\kappa-\sigma^5\tau\tau''\kappa+3\sigma^4\sigma'\tau\tau'\kappa+2\sigma^5\tau'^2\kappa+\sigma^5\tau\tau'\kappa'-$
$3\sigma^3\sigma'^2\tau^2\kappa-2\sigma^4\sigma'\tau\tau'\kappa-\sigma^4\sigma'\tau^2\kappa'$

elde edilir. Elde edilen ifade de sadeleştirmeler yapılırsa,

$\det(N)=(T_1B_1+T_2B_2+T_3B_3)0+(T_1N_1+T_2N_2+T_3N_3)0+(T_1E_1+T_2E_2+$
$T_3E_3)0+\sigma^4\sigma''\tau^2\kappa-\sigma^5\tau\tau''\kappa+2\sigma^5\tau'^2\kappa+\sigma^5\tau\tau'\kappa'-2\sigma^4\sigma'\tau\tau'\kappa-\sigma^4\sigma'\tau^2\kappa'$

bulunur. Gerekli parantezlere alındığında,

$$\det(N)=\sigma^4\big(\tau\kappa(\sigma''\tau-\sigma\tau'')+(2\tau'\kappa+\tau\kappa')(\sigma\tau'-\sigma'\tau)\big)$$

olur. Türev işlemleri düzenlendiğinde,

$$\det(N)=\frac{\sigma^4}{\tau}\left((\tau^2\kappa)'\left(\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2\right)-\tau^2\kappa\left(\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2\right)'\right)$$

olarak bulunur. Elde edilen ifadede bölüm türevinden,

$$\det(N)=\frac{\sigma^8}{\tau}\left(\frac{\tau^2\kappa}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\sigma^2}\right)\left(\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)'\right)^2 \qquad (4.85)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade (4.16) da verilen ifadeden dolayı sıfırdan farklıdır. Yani $\det(N)\neq 0$. Dolayısıyla N matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_d fonksiyonu x_0 noktasında A5–tekilliğine sahip f_{dV_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

4- boyutlu Galile uzayında dayanak ve uzaklık fonksiyonlarının tekillikleri hesaplanarak bazı eğri ve yüzeylerin tekillikleri ile ilgili karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Sonuç olarak farklı fonksiyonlar tanımlanarak onlarla ilişkili eğri ve yüzeyler için tekillik karekterizasyonları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Ali, A.T., (2012). Position vectors of curves in the Galilean 3-space, *Mathematical Vesnik*, (64), 200-210.

Arnold, V.I., Gusein-Zade, S. M. and Varchenko, A. N., (1986). *Singularities of Differentiable Maps volume I*. Birkhäuser Boston, 382, Boston.

Bruce, J.W., Giblin P.J. and Gibson, C.G., (1981). On caustics of plane curves. *American Mathematical Monthly*, 88, 651-667.

Bruce, J.W., (1981). On Singularities, envelopes and elementary differential geometry. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 89, 43-48.

Bruce, J.W. and Giblin, P.J., (1983). Generic geometry. *American Mathematical Monthly*, 90, 529-561.

Bruce, J.W. and Giblin, P.J., (1992). *Curves and Singularities*(second editions). Cambridge University Press, 321 , New York.

Divjak, B., (2003). Special curves on ruled surfaces in Galilean and pseudo-Galilean space. *Acta Mathematica Hungarica*, 98 (3), 203-215.

Divjak,B and Sipus, Z.M., (2003). Minding's isometries of ruled surface in Galilean and pseudo-Galilean space. *Journal of Geometry*, 77, 35-47.

Fidal, D.L., (1984). The existance of sextactik point. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 96, 433-436

Fidal, D.L.and Giblin, P.J, (1984). Generic 1-parameter families of caustic by reflection in the plane. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 96, 425-432.

Hacısalihoğlu, H.H., (1982). *Diferensiyel geometri I*. İnönü Üniversitesi, Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 270, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H., (1998). *Dönüsümler ve Geometriler.* Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 326, Ankara.

Pavkovic, B.J. and Kamenarovic, I., (1987). The equiform differential geometry of curves in the Galilean space G_3. *Glasnik Matematicki*., 22(42), 449-457.

Röschel, O., (1984). *Die Geometrie des Galileischen Raumes*. Doctoral dissertation, Habilitationssch., Institut Für Mathematik und Angewandte Geometrie, 120.

Sipus, Z.M., (2008). Ruled Weingarten surfaces in the Galilean space. *Periodica Mathematica Hungarica*, 56(2), 213-225.

Şahin, T. and Yılmaz, M., (2011). The Rectifying Developable and the Tangent Indicatrix of a Curve in Galilean 3-Space, *Acta Mathematica Hungarica*, 132(1-2), 154-167.

Thom, R., (1975). *Structural Stability and Morphogenesis*. W.A. Benjamin, Reading, translated from the French edition of 1972, Massachusetts.

Yaglom, I.M., (1979). *A Simple Non-Euclidean Geometry and Physical Basis*. Springer-Verlag, 307, Newyork.

Yılmaz, S., (2010). Construction of the Frenet-Serret frame of a curve in 4D Galilean space and some applications, *International Journal of the Physical Sciences*, 5(8), 1284-1289.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	: Mücahit Seyfullah KARAMAN
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 04.04.1987- Taşköprü
Medeni hali	: Evli
e-posta	: mskaramn@gmail.com.tr

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Akdeniz Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	2019

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
2010-2011	Özel Antalya Arşiment Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2013-	Boyabat Türk Telekom Fen Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Karaman, M.S. ve Şahin, T., (2019). 4-Boyutlu Galile Uzayında Bazı Fonksiyonların Tekillikleri, 6. Uluslararası Multidisipliner Çalışmaları Kongresi, Gaziantep.