T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MODELLEME YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Hazırlayan
Hamdi Furkan SERİN

Danışman
Prof. Dr. İbrahim BAYAZIT

Yüksek Lisans Tezi

Aralık 2019
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MODELLEME YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Hamdi Furkan SERİN

Danışman
Prof. Dr. İbrahim BAYAZIT

Aralık 2019
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Hamdi Furkan SERİN

“İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Modelleme Yeterliklerinin İncelenmesi” adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan
Hamdi Furkan SERİN

Danışman
Prof. Dr. İbrahim BAYAZIT

Matematik ve Fen Bilimleri ABD Başkanı
Prof. Dr. Hasan KAYA

Prof. Dr. İbrahim BAYAZIT danışmanlığında **Hamdi Furkan SERİN** tarafından hazırlanan **"İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Modelleme Yeterliklerinin İncelenmesi"** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü **İlköğretim** Anabilim Dalında **yüksek lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

16 / 12 / 2019

JÜRİ:

Danışman : Prof. Dr. İbrahim BAYAZIT ....

Üye : Doç. Dr. Cemalettin IŞIK ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Semirhan GÖKÇE ....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 26/12/2019 tarih ve 54-02 sayılı kararı ile onaylanmış olup, öğrencinin mezuniyet tarihi 25/12/2019'dir.

26 / 12 / 2019

Prof. Dr. Cevdet KIRPIK

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. İbrahim BAYAZIT' a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Çalışmalarım konusunda ilgisini ve önerilerini göstermekten hiçbir zaman kaçınmayan değerli hocam Azime ATAY' a çok teşekkür ederim. Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan matematik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim. Çalışmalarım sırasında yardımını hiç esirgemeyen değerli arkadaşım Mustafa SEZER' e teşekkürü bir borç bilirim. Çalışmalarım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkür ederim.

Hamdi Furkan SERİN

Aralık 2019, KAYSERİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MODELLEME YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Hamdi Furkan SERİN

Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Aralık 2019
Danışman: Prof. Dr. İbrahim BAYAZIT

ÖZET

Araştırmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecinde ürettikleri modeller ile ders programındaki konu ve kavramları izah etmek için ürettikleri modeller karşılaştırmalı olarak incelenmiş ve bu modellerin geçerliliği tespit edilmiştir. Modelleme; bilinmeyen bir durumu (problem veya hedef kavram) anlaşılır kılma süreci olarak ele alınmaktadır. Araştırma 70'i üçüncü sınıf ve 69'u dördüncü sınıf öğrencisi olmak üzere toplam 139 öğretmen adayının katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Veriler yazılı sınav ve yarı yapılandırılmış görüşme teknikleri ile toplanmıştır. Yazılı sınav iki bölümden ve her bölüm kendi içinde 6 sorudan oluşmaktadır. İlk bölüm 6 adet rutin olmayan gerçek yaşam problemlerini ve ikinci bölüm ortaokul matematik müfredatındaki farklı kavramlarla ilgili modelleme gerektiren altı soruyu içermektedir. Her bölüm yaklaşık bir saat sürecek şekilde ve birer hafta arayla tüm katılımcılara uygulanmıştır. Yazılı sınavdan sonra, 9 öğretmen adayı ile ürettikleri modellerin geçerliliği ve çeşitliliği göz önünde bulundurularak yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Her bir katılımcıyla yapılan görüşme yaklaşık 60-90 dakika sürmüştür ve veriler bir ses kaydedici ile kaydedilmiştir. Toplanan veriler içerik ve söylem analizi tekniklerini içeren nitel yöntemler kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırma bulguları rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinde öğretmen adaylarının büyük bir kısmının problemin yönergesine uygun bir görsel model (biçimsel açıdan geçerli başlangıç modelleri) oluşturmasına rağmen bu modellerde matematiksel mantığı yanlış işlettiklerini ve neticede içerik bakımından geçersiz modeller oluşturduklarını göstermektedir. Katılımcıların sonuç eksenli problem çözme alışkanlıklarının gerçek yaşam durumları için esnek düşünmelerini engellediği anlaşılmaktadır. Diğer taraftan öğretmen adaylarının geçmiş bilgilerini daha rahat kullanabilmeleri nedeniyle ders programındaki konu ve kavramların izahında eldeki durum farklı şekillerde (görsel, grafiksel gibi) de modellenebilmesine rağmen çoğunlukla sembolik model oluşturma eğiliminde oldukları görülmüştür. Katılımcıların ders programındaki konu ve kavramları izah etmeye çalışırken genellikle süreci değil sonucu karşılayacak şekilde modelleme yaptıkları ve birbirinden bağımsız modeller oluşturdukları belirlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının büyük bir kısmı modelleri zihinsel bir araç olarak (genelleme yapma, temsil etme vs.) kullanmakta sıkıntı yaşamakta, modeli zihinlerindeki teorik bilgilere kısıtlamakta ve var olan matematiksel bilgilerini modele aktarırken (grafiksel gösterimlere geçme gibi) zorlanmaktadırlar.

Anahtar Kelimeler: Öğretmen adayları, model, modelleme, rutin olmayan gerçek-yaşam problemleri, matematiksel kavramlar

INVESTIGATION OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS' MODELLING COMPETENCIES

Hamdi Furkan SERİN

Erciyes University, Institute of Educational Sciences
Master Thesis, December 2019
Supervisor: Prof. Dr. İbrahim BAYAZIT

ABSTRACT

This study aims to investigate, in a comparative manner, validity of the mathematical models produced by the prospective elementary school teachers when solving non-routine real-life problems and explaining mathematical concepts and notions. Modelling can be defined as the process of making an unknown situation (problem or target concept) understandable. The research employed qualitative case study, and it was carried out with the participation of 139 pre-service teachers (70 third grade and 69 fourth grade students). Data were obtained from written exam and the semi-structured interviews. The written exam consists of two parts. The first part includes six non-routine problems related to real-life situations. The second part also includes six problems that requested modelling activities to explain mathematical concept and notions, such as the idea of fraction. These two parts were administered to the participants in two successive sessions each of which took almost an hour. After the written exam, semi-structured interviews were carried out with nine prospective teachers. The interviewees were selected based on the criteria including validity and diversity of the models that they produced. The interviews with each participant took almost 60-90 minutes and they were recorded with voice recorder. Data were analysed using content and discourse analysis methods. The research findings indicated that most of the participants preferred visual models when solving real-life problems. Although most of them started with visually valid initial models, they could not revise and develop these initial models in accord with the information in the problem story; and this eventually caused production of invalid models. In order illustrate concepts and notions from mathematics curricula the participants preferred mostly symbolic models although the situations could be modelled visually or graphically. In order to illustrate mathematical notions and concepts the participants usually constructed models that meet the results not the process. Many of the participants were unable to use models as a mental tool for the purpose of generalization and representation of the problem situations. They tended to situate models into theoretical knowledge that they had from the past instead of using their existing knowledge to produce models that meet requirements of the problem context.

Keywords: Prospective teachers, model, modelling, non-routine real-life problems, mathematical concepts

İÇİNDEKİLER

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MODELLEME YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

KISALTMALAR

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

PAB : Pedagojik Alan Bilgisi

NCTM : National Council of Teachers of Mathematics

RME : Realistic Mathematics Education

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

ALINTILAR LİSTESİ

BÖLÜM I

GİRİŞ

Günümüzde matematik öğrenmek kadar matematiği bir araç olarak kullanabilmenin önemi de tartışılmaz bir konu haline gelmiştir. Çağın toplum anlayışı bilgiyi üretebilen, problem çözebilen, eleştirel düşünebilen, sorgulayabilen, öğrendiklerini birbiriyle ilişkilendirebilen ve gerçek yaşamda kullanabilen bireyler yetiştirme zorunluluğunu da beraberinde getirmektedir. Bu kapsamda eğitim sisteminin bireylerin bu ihtiyacını karşılaması ve kendilerini geliştirmek için uygun ortamlar hazırlaması beklenir.

Etkili matematik öğretimi öğrencilerin neyi bildiklerini ve neyi öğrenmeleri gerektiğini anlamayı, ardından onları daha iyi öğrenmeleri için desteklemeyi gerektirir (NCTM, 2000). Gerçek dünya bağlamları, öğrencilerin öğrendiklerini kendi çevreleri ile ilişkilendirmeleri ve kullanmaları için imkânlar sunar (a.g.e.). Bir açıdan, matematiksel modelleme, problemlere çözüm bulma çabasında gerçek yaşam durumlarını matematiksel terimlerle temsil etme süreci olarak tanımlanabilir (Cheng, 2001). Lingefjärd'a (2006) göre ise modelleme gerçek dünyadan bir durum almaktan ve orijinal durum ışığında yorumlanacak bir sonuca varmak için değişkenleri kullanmaktan çok daha fazlasıdır. Matematiksel modelleme, bir olgunun gözlemlenmesini, ilişkileri tahmin etmeyi, matematiksel analizleri (denklemler, sembolik yapılar vs.) uygulamayı, matematiksel sonuçları elde etmeyi ve modeli yeniden yorumlamayı içeren döngüsel bir matematiksel süreç olarak tanımlanabilir (Swetz ve Hartzler, 1991, akt: Lingefjärd, 2006). Bu tanımlardan da anlaşılacağı üzere matematiğin günlük hayata uygulanabilmesinin, matematiksel konu ve kavramların somutlaştırılmasının ya da birbiriyle ilişkilendirilmesinin mümkün olduğu bağlamlar modelleme sürecinin içerisinde doğal olarak saklıdır. Bu nedenle matematiksel modelleme eğitim sistemlerinin, dolayısıyla da matematik öğretiminin vazgeçilmez bir parçası haline gelmiştir.

Öğrencileri disiplin içi profesyonel olarak çalışmaya hazırlamak, matematiksel fikirlerin gerçek dünyaya uygulanabilirliklerini göstererek motive etmek ve matematiği müfredatın diğer alanlarıyla bütünleştirme fırsatları sunmak matematiksel modelleme faaliyetlerinin en temel amaçlarını oluşturmaktadır (Zbiek ve Conner, 2006). Model oluşturma faaliyetlerinde öğrencilerin ürettiği ürünler, matematiksel olarak anlamlı sistemleri inşa etmek, açıklamak, işlemek, tahmin etmek veya kontrol etmek için paylaşılabilir, manipüle edilebilir, değiştirilebilir ve yeniden kullanılabilir kavramsal araçları (örneğin modeller) içermekte ve dar bir şekilde belirlenmiş sorulara verilen kısa cevapların ötesine geçmektedir (Lesh ve Doerr, 2003).

Sınıf içi öğretimlerde etkili olabilmek için öğretmenlerin sağlam bir alan bilgisine sahip olmaları beklenir; ancak alan bilgisi etkili öğretim için tek başına yeterli değildir (Kahan, Cooper ve Bethea, 2003). Öğretmenlerin bilgiyi, mantığından ödün vermeden öğrencilerin anlayabilecekleri formata dökmeleri gerekir ki bu da pedagojik alan bilgisine sahip olmayı gerektirir (Ball, 1990). Pedagojik Alan Bilgisi (PAB), bir konunun anlaşılması için gerekli olan sunum biçimlerini, en uygun örnekleri, kavramları en güzel şekilde temsil eden benzetmeleri, betimlemeleri ve açıklamaları kapsayan bilgi türüdür (Shulman, 1986). Matematiksel modelleme, bir bilginin neden doğru olduğunu açıklamak, arka planındaki mantığı izah etmek, gerçek yaşamda nerelerde ve nasıl kullanılabileceğini açıklamak için imkânlar sunar; bu nedenle öğretmenlerin pedagojik alan bilgisinin önemli bir parçasını oluşturur.

Öğrencilerin yukarıda bahsi geçen ürünleri ortaya koyabilmeleri, modelleme sürecinde karşılaştıkları zorlukların üstesinden gelebilmeleri ve gerektiği anlarda doğru yönlendirilebilmeleri için öğretmenlerin modelleme konusunda yeterli bilgi ve deneyime sahip olmaları gerekmektedir. Dolayısıyla geleceğin öğretmenlerinin modelleme konusundaki yeterliklerinin nitel metotlar yardımıyla araştırılması önem arz etmektedir. Bu nedenle eldeki tez çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının rutin olmayan problemlerin çözümü ve ders programındaki konu ve kavramların izahı için modeller oluşturma konusundaki yeterliklerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

1.1. Araştırma Problemi

Bu tez çalışması kapsamında '*İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterlikleri nasıldır?*' araştırma sorusuna yanıt aranacaktır. Bu amaç doğrultusunda çalışmanın alt problemleri şu şekilde belirlenmiştir:

1- Öğretmen adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözümü için model üretmedeki yeterlikleri nasıldır?

2- Öğretmen adaylarının matematik ders programlarında yer alan konu ve kavramların (kesirler, sayılar, vs.) izahı için model üretmedeki yeterlikleri nasıldır?

3- Öğretmen adayları rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözümü için model oluşturmada mı yoksa ders programında yer alan konu ve kavramların izahı için model oluşturmada mı daha başarılıdırlar?

4- Öğretmen adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözümü için ürettikleri modellerin geçerliği nasıldır?

5- Öğretmen adaylarının matematik ders programlarında yer alan konu ve kavramların (kesirler, sayılar, vs.) izahı için ürettikleri modellerin geçerliği nasıldır?

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Son yıllarda bilim ve teknolojideki hızlı gelişmeler çağa ayak uydurmayı zorlaştırmaktadır. Bu yenilikler karşısında bireylerin daha donanımlı yetiştirilmesine duyulan ihtiyaç eğitim anlayışının da sürekli sorgulanmasını beraberinde getirmektedir. Öğretim programlarının toplumun beklentilerini karşılayabilecek şekilde güncellenmesi eğitimin niteliğini artırmakla birlikte programa hayat veren öğretmenlerimizin de buna paralel şekilde yetiştirilmesi önem arz etmektedir.

Matematiksel modelleme, matematik eğitiminde her geçen gün önemi artan bir konu haline gelmektedir. Öğrencilerin günlük hayatta karşılaştığı problem durumlarına olası çözümler üretebilmeleri, buldukları çözümlerin anlamlılığını sorgulayabilmeleri, öğrendikleri bilgileri somutlaştırabilmeleri, anlamlandırabilmeleri ve ilişkilendirebilmeleri için model oluşturma ve kullanma becerilerinin geliştirilmesi büyük önem arz etmektedir. Öğretmen adaylarının mesleğe başladıklarında öğrencilerdeki bu becerileri geliştirebilmeleri, öğrencilere uygun rehberliği yapabilmeleri, öğretim sürecinde modellemeden yararlanabilmeleri ve matematik öğretim programındaki modelleme ile ilgili kazanımları gerçekleştirebilmeleri için hizmet öncesi dönemde modelleme konusundaki yeterliklerini geliştirmiş olması beklenir.

Eldeki tez çalışmasının temel amacı, öğretmen adaylarının modelleme konusundaki beceri ve yeterliklerini inceleyerek bu alandaki başarı durumlarını ortaya koymaktır. Bu amaçla eldeki tez çalışmasında öğretmen adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözümü için ürettikleri modeller ile matematik ders programlarında yer alan konu ve kavramların izahı için ürettikleri modellerin karşılaştırmalı olarak incelenmesi, bu alanlardan hangisinde daha başarılı olduklarının tespiti ve süreçte yaşadıkları zorlukların neler olduğunun ortaya konulması hedeflenmektedir.

Öğretmen adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerindeki modelleme başarısı öğrencilere farklı stratejiler ile yöntemler geliştirerek problem çözme becerilerinin kazandırılması ve edinilen bilgilerin uygulamaya konularak matematik ile gerçek yaşam arasındaki ilişkinin kurulabilmesi açısından önemlidir. Diğer taraftan matematik ders programlarında yer alan konu ve kavramların izahındaki modelleme başarılarının ise matematiksel ifadelerin arka planında yatan düşüncelerin açıklanması, kanıtlanması ve somutlaştırılması yoluyla öğrencilerdeki anlamlı öğrenmeyi büyük ölçüde etkileyeceği söylenebilir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının mevcut başarılarının her iki yönden de ortaya çıkarılmasında yarar vardır. Araştırmada modelleme yeterliklerinin bu alt başlıklar üzerinden karşılaştırma yoluyla çalışılması modelleme başarılarını derinlemesine inceleme fırsatı sunmaktadır. Ülkemizde yapılan önceki çalışmalarda öğretmen adaylarının modelleme yeterliklerini bu açılardan inceleyen benzer bir araştırmanın olmayışı tez çalışmasının söz konusu alanda detaylı bir bakış açısı sunması ve diğer araştırmacılara öğretmen yeterlikleri konusunda ışık tutması açısından önem taşımaktadır. Ayrıca çalışmanın bulgularının öğretmen adaylarına hizmet öncesi dönemde verilecek eğitimin niteliği ve ders içeriklerinin belirlenmesi konusunda Eğitim Fakültelerinde yürütülen eğitim-öğretim faaliyetlerinin nasıl olması gerektiği konusunda bir fikir sunacağı düşünülmektedir.

1.3. Sınırlılıklar

Araştırma kapsamında öğretmen adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecindeki modelleme başarıları ile ders programındaki konu ve kavramların izahı sürecindeki modelleme başarıları karşılaştırmalı olarak incelenecektir. Araştırmanın matematiksel bağlamı, çalışmada kullanılan rutin olmayan gerçek yaşam problemleri ile ders programındaki konu ve kavramlar ile sınırlıdır. Ayrıca katılımcılar bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 70'i üçüncü sınıf ve 69'u dördüncü sınıf öğrencisi olmak üzere toplam 139 kişilik öğretmen adayı grubu ile sınırlıdır. Çalışmada ağırlıklı olarak nitel yöntemler kullanıldığı için araştırma sonuçları katılımcılar dışındaki bir gruba genellenemez. Ayrıca, eldeki çalışmanın süre açısından 2017-2018 eğitim ve öğretim yılının bahar dönemi ile sınırlı olduğunu belirtmek isteriz.

BÖLÜM II

ALAN YAZINI TARAMASI

2.1. Model ve Modelleme

Lesh ve Doerr'a (2003) göre model, dış gösterim sistemleri kullanılarak ifade edilen ve diğer sistemlerin davranışlarını inşa etmek, tanımlamak ve açıklamak için kullanılan kavramsal sistemlerdir. Lehrer ve Schauble (2003) ise modeli, yabancısı olduğumuz bir sistem ile önceden tanıdığımız sistemler arasında bağ kurmak için yararlandığımız benzetimler olarak tarif etmektedirler. Örneğin, atomun sık sık tarif edilen Rutherford modeli, güneş sistemini oluşturan nesneler ve ilişkiler ile atomun parçalarını oluşturan bileşenler arasındaki eşleşmeleri öneren bir analojidir. Bu benzetmedeki nesneler, güneş-çekirdek ve gezegenler-elektronlar arasındaki eşleşmeyi; ilişkiler ise merkezdeki yapının göreceli büyüklüğünü (güneşin ve çekirdeğin sırasıyla gezegen ve elektronlardan büyük olması durumu) ve gezegenler ile elektronların güneş ve çekirdek etrafında döndüğü bilgisini içerir. Bununla birlikte tüm özellikler bir modelde korunamaz; modellemenin önemli bir amacı, teorik olarak önemli olmayan özellikleri ortadan kaldırmaktır (Lehrer ve Schauble, 2003). Örneğin, yukarıda bahsedilen güneş sistemi-atom modelinde, güneş sıcak olmasına rağmen 'sıcaklık' özelliği modele dâhil edilmemiştir. Model, belirli bir sorunla ilgili gerçekliğin basitleştirilmiş bir temsili olarak gösterilmesidir ve sorunun bazı yönlerinin görselleştirilmesi (orijinal diyagram yerine bir ölçek çoğaltması kullanma), özelliklerinin genelleştirilmesi (dilbilgisi kuralları) veya kıyaslama yapılması (nüfus ve alan yerine nüfus yoğunluğunu kullanarak farklı bölgeleri karşılaştırma) için kullanılabilir (Dapueto ve Porenti, 1999).

Bir model yerine göre bir problemin çözümündeki şekil, grafik, tablo ya da cebirsel ifade olabileceği gibi yerine göre de öğretim sürecinde kullanılan sayı pulları, cebir karoları ve kesir takımları türünden materyaller olabilir. Bir olayı dinlediğimizde zihnimizde canlanan resim de bir model olarak kabul edilebilir. Önemli olan durumun çağrıştırdığı anlamlar ve kişinin zihninde canlanan ilişkiler ağıdır. Modelleri bir ip üzerine atılmış düğüme benzetebiliriz. Bu düğümü çözebilen, karmaşık durumlardan sade bir yapıya ulaşıp olayları birbirinden ayırabilir. Aynı zamanda da bu düğüm kopuk olayları birbirine bağlar. Aralarında bir bağ kurarak bir geçiş aracı, bir bağlantı olarak görülebilir. Diğer bir açıdan modelleri bir kapı gibi düşünebiliriz; bu kapı aralandığında arkasında gizlenen yapıları keşfedebiliriz. Bir modelin görsellik ve biçimselliği aşıldığında temsil ettiği yapının içeriğine ve anlamına ulaşılmış olur.

Model ve modelleme birbirine sıkı sıkıya bağlı iki kavramdır. Modelleme, olayları ve problemleri tanımlamak, açıklamak ve yorumlamak için problem durumlarını zihinde düzenleme, koordine etme, sistemleştirme ve organize edip bir ilişki kurma, zihinde farklı şemalar ile modeller oluşturma ve kullanma sürecidir (Lesh ve Doerr, 2003). Bu açıdan bakıldığında modelleme, model ile sonuçlanan bir süreç olarak düşünülebilir. Esasında, her model, arkasında zihinsel bir sürecin izlerini taşıyan bir üründür. Haines ve Crouch (2007) matematiksel modellemeyi, gerçek yaşam sorunlarının soyutlandığı, matematikselleştirildiği, çözüldüğü ve çözümün değerlendirildiği döngüsel bir süreç olarak tanımlamaktadırlar. Bu süreçte karşılaşabileceğimiz günlük hayat durumlarına çözüm üretebileceğimiz gibi olaylar arası derin yapıları da keşfedebiliriz. Bu yapıların birbiriyle olan bağlarını, birbirlerine olan etkilerini ortaya çıkarabiliriz. Hatta oluşan model belli bir süre sonra oluştuğu bağlamdan uzaklaşarak bağımsızlaşır ve başka bağlamlarda da kullanılabilir hale gelir. Yani sadece bir yapıdaki ilişkileri ortaya çıkarmakla kalmaz, yapılacak genellemeler ile başka ilişkilerde de yararlanılabilecek bir sistem haline gelir.

Öte yandan modellemeyi sadece karşılaşılan problemlere çözüm yolu geliştirdiğimiz düşünme süreçleri olarak da görmemek mümkündür. Lesh ve Caylor (2007) modellemeyi mevcut kaynaklardan yola çıkarak bilinmeyen bir durumu (hedef kavram, problem durumu, vs.) anlaşılır hale getirmek için bir sistem oluşturma süreci olarak tanımlamaktadır. Dolayısıyla bilinmeyen durum olarak görülen yapı matematiksel bir konu ya da kavramın arkasında yatan düşünce veya taşıdığı mesaj da olabilir. Bu açıdan modelleme; tam sayı, kesir gibi kavramlarla ilgili sembolik düşüncelerin izahını kolaylaştırmak, öğrencilerin bu kavramları anlamlı bir biçimde öğrenmelerini sağlamak amacıyla sayı doğrusu ve kesir kartları gibi farklı temsil ve sunum şekillerini içeren yeni sistemlerin oluşturulma süreci olarak kabul edilmektedir (Bayazit, Aksoy ve Kırnap, 2011). Kısaca öğretim sürecinde matematiksel düşüncelerin izahında kullanılan sayı doğrusu, cebir karoları, sayı pulları, grafikler ve cebirsel ifadeler gibi yapılar birer model iken bunların üretim ve oluşum süreci modelleme kavramına karşılık gelmektedir.

2.2. Modelleme Yaklaşımları

Modellemeye ilişkin literatür incelendiğinde modelleme sürecini ele alan farklı yaklaşımlar ve perspektifler göze çarpmaktadır. Bu yaklaşımlarda belirli düşünceler ya da sürecin bazı basamakları benzerlik gösterse de perspektifin ana hedefleri, önceki yaklaşımlarla ilişkileri açısından değişiklik arz etmektedir. Dolayısıyla her bir yaklaşımın temelini oluşturan düşüncelerin anlaşılması ve birbirleriyle karşılaştırılması bakımından aşağıdaki tablonun incelenmesi faydalı olacaktır.

Tablo 1. Modellemeye ilişkin farklı yaklaşımların sınıflandırılması [Kaiser (2005); Kaiser ve Sriraman (2006)]

YAKLAŞIMLAR	ANA HEDEFLER	ÖNCEKİ YAKLAŞIMLARLA İLİŞKİLERİ	ARKAPLAN
Realistik (Uygulamalı) Modelleme	**Faydacı hedefler:** Gerçek yaşam problemlerinin çözülmesi, Gerçek yaşamı anlama, Modelleme yeterliliklerinin geliştirilmesi	Pollak'ın Pragmatik Yaklaşımı	Anglo-Saxon Pragmatizmi ve Uygulamalı Matematik
Bağlamsal Modelleme	**Konu ile ilgili ve psikolojik hedefler:** sözel problemleri çözme	Sistem yaklaşımlarına yol açan bilgi işlem yaklaşımları	Problem çözme tartışmalarının yanı sıra günlük okul uygulamaları ve psikolojik laboratuar deneyleri
Eğitimsel Modelleme **a) Didaktik Modelleme** **b) Kavramsal Modelleme**	**Pedagojik ve konu ile ilgili hedefler:** a)Öğrenme süreçlerinin yapılandırılması ve geliştirilmesi b)Kavram tanıtımı ve gelişimi	Bütünleştirici Yaklaşım (Blum, Niss) ve Bilimsel-Hümanist yaklaşımın diğer gelişmeleri	Didaktik Teoriler ve Öğrenme Teorileri

Sosyo-Eleştirel Modelleme	**Pedagojik hedefler:** Çevreleyen dünyayı eleştirel anlama gibi	Özgürlükçü Yaklaşım	Siyaset sosyolojisinde sosyo-eleştirel yaklaşımlar
Epistemolojik veya Teorik Modelleme	**Teori temelli hedefler:** Teori gelişimini destekleme gibi	Freudenthal'in bilimsel-hümanist yaklaşımı	Roman Epistemolojisi
Bilişsel Modelleme	**Araştırma amaçları:** a) Modelleme sürecinde gerçekleşen bilişsel süreçlerin analizi ve bu bilişsel süreçlerin anlaşılması **Psikolojik hedefler:** b) Modelleri zihinsel imgeler ya da fiziksel resimler olarak kullanarak veya modellemeyi soyutlama ya da genelleme gibi zihinsel bir süreç olarak vurgulayarak matematiksel düşünme süreçlerinin teşvik edilmesi		Bilişsel Psikoloji

Realistik (Uygulamalı) modelleme yaklaşımına göre matematiksel modelleme uygulamalı problem çözme olarak görülmekte, modellenecek gerçek yaşam durumuna ve disiplinler arası yaklaşımlara güçlü bir vurgu yapılmaktadır. Bu yaklaşımda öğrencilerin modelleme çalışmaları ilgili teknolojinin kullanılmasıyla desteklenmeli, modelleme süreci ve modelin sonuçları, gerçek veya gerçekçi verilere karşı doğrulama yoluyla değerlendirilmelidir (Blomhoj, 2008). Realistik perspektifin temel özelliği, modellemenin matematiksel teori geliştirmek için kullanılan bir araç olarak değil, otantik problemleri çözmek için yararlanılan bir etkinlik olduğu hususudur (Kaiser ve Sriraman, 2006). Bu yaklaşıma göre öğrenmedeki ilerlemenin temel göstergesi öğrencilerin matematiksel modelleme yoluyla gerçek hayattaki problemleri çözmedeki başarısıdır (Blomhoj, 2008).

Bağlamsal modelleme yaklaşımının temelleri Kuzey Amerika'da geliştirilen ve matematik öğretiminde problem çözme ve sözel problemlerin rolü üzerine kapsamlı bir araştırmaya dayanmaktadır (Blomhoj, 2008). Bu araştırma yaklaşımı, altı ilke tarafından yönlendirilen model oluşturma etkinlikleri için tasarımların geliştirilmesi ve test edilmesine odaklanmaktadır. Bu ilkeler şunları içermektedir:

1. Gerçeklik ilkesi – durum öğrencilere anlamlı görünmeli ve önceki deneyimlerine bağlanmalıdır.

2. Model oluşturma ilkesi – durum öğrencilere önemli matematiksel yapılar geliştirmeleri için bir ihtiyaç yaratmalıdır.

3. Öz değerlendirme ilkesi – durum öğrencilerin oluşturdukları modelleri değerlendirmelerine izin vermelidir.

4. Yapıyı belgeleme ilkesi – durum ve bağlam öğrencilerin problemi çözerken düşüncelerini ifade etmelerini gerektirmelidir.

5. Yapıyı genelleme ilkesi – ortaya çıkan modeli diğer benzer durumlara genelleştirmek mümkün olmalıdır.

6. Basitlik ilkesi – problem durumu basit olmalıdır (Lesh ve Doerr, 2003).

Bu kapsamda model oluşturma etkinliği, öğrencilerin durumları anlamlandırmalarına, kendi matematiksel yapılarını icat etmelerine ve geliştirmelerine yönelik belirli öğretim tasarımı ilkeleri kullanılarak oluşturulan bir problem çözme etkinliği olarak tanımlanır. Başka bir ifadeyle geleneksel problem çözmenin amacı belirli bir prosedürle bilgiyi işlemek iken, bağlamsal modelleme yaklaşımına göre model oluşturmak sürecin bizatihi kendisidir (Kaiser ve Sriraman, 2006).

Eğitimsel yaklaşımın ana fikri, modelleri ve modellemeyi matematik öğretiminde hem öğrenmenin aracı olarak hem de kendi başına önemli bir yeterlik olarak (matematik öğretimi sonucunda geliştirilmesi beklenen beceriler) birleştirmektir. Buna göre farklı matematik müfredatlarında matematiksel modelleme etkinliklerinin düzenlenmesinin yolları, okul kültüründe modellemenin uygulanması ile ilgili sorunlar ve öğrencilerin modelleme etkinliklerinin değerlendirilmesine ilişkin sorunlar bu araştırma yaklaşımında ele alınmıştır (Blomhoj, 2008). Model, modelleme, modelleme döngüsü, modelleme uygulamaları ve yeterlikleri gibi alanlardaki temel kavramların tanımlanması, tartışılması ve bu kavramların farklı eğitim düzeylerinde matematik öğretimi ile ilgili anlamları eğitimsel yaklaşım altında önemli unsurlardır (a.g.e.).

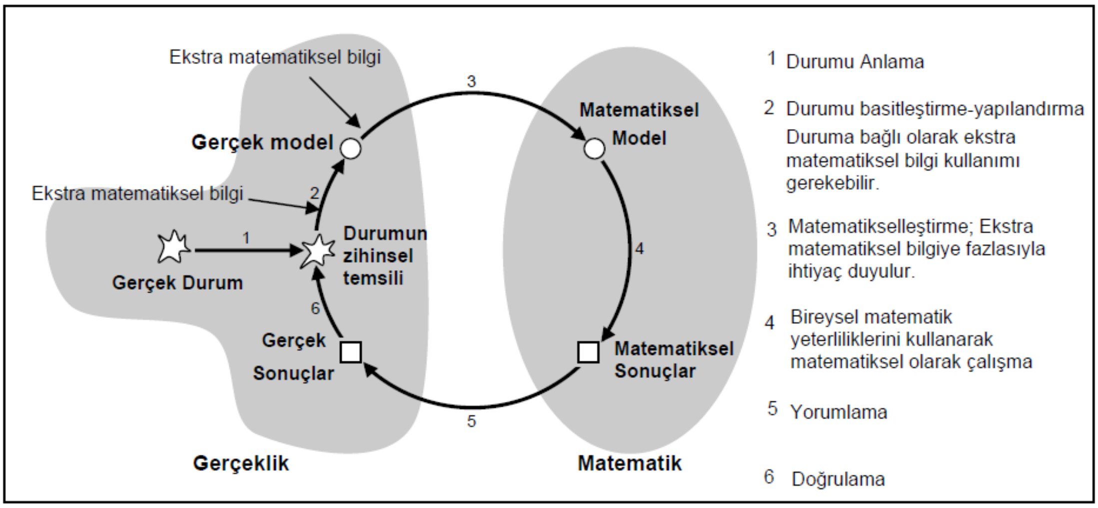
Sosyo-eleştirel yaklaşım matematiğin toplumdaki rolünü vurgular ve matematiksel modellerin rolü, doğası ve matematiksel modellemenin toplumdaki işlevi hakkında eleştirel düşünmeyi desteklemesinin gerekliliğini iddia eder (Kaiser ve Sriraman, 2006). Matematiksel modeller sosyal ve ekonomik eşitsizliği tanımlamak ve açıklamak için kullanılır; hem mikro hem de makro iktisat farklı türlerdeki matematiksel modeller üzerine kuruludur. Bu kapsamda mikro kredilerdeki faiz oranları, emlak finansmanı için ipotek, nüfus artımı ve salgın hastalıkların yayılımının tahmini ile diğerleri arasındaki kontrol politikaları, vergilendirme ve seçim sistemleri, sağlık verileri ve suç oranları matematiksel modellere dayanmakta ya da bu modeller vasıtasıyla tanımlanmakta ve tartışılmaktadır. Toplumsal yaşamın bu ve daha birçok önemli yönü matematiksel modelleme ve matematiksel modellerin uygulamaları yoluyla dönüştürülmekte ve biçimlendirilmektedir (Blomhoj, 2008).

Epistemolojik yaklaşım altında matematiksel modelleme, matematiğin öğretilmesi ve öğrenilmesi için daha genel teorilerin geliştirilmesinin aracı olarak görülür. Gerçekçi Matematik Eğitimi (Realistic Mathematics Education-RME) teorisi ve Chevallard tarafından geliştirilen matematiksel praksoloji (mathematical praxeologies) bu teorilere örnek gösterilebilir (Blomhoj, 2008). Gerçekçi matematik eğitiminde modeller matematik öğretimi için didaktik araçlar olarak kullanılır ve bu yaklaşım modellemenin matematik eğitiminin bir hedefi olmadığı anlamına gelir (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Modelleme, öğrencilerin zengin problem durumlarını tanımlayıp analiz ederek daha iyi anlamalarını sağladığı model geliştirme sürecidir ve öğrenciler bir dizi modelleme döngüsünden geçerek, sonunda diğer (benzer) karmaşık problem durumlarında da kullanabilecekleri etkili bir model geliştirirler (a.g.e.).

Bilişsel yaklaşımda temel amaç öğrencilerin yaptıkları bireysel matematiksel modelleme faaliyetlerinde hangi bilişsel işlevlerin etkinleştirildiğini anlamaktır. Bu doğrultuda öğrencilerin modelleme süreçleri analiz edilir ve belirli modelleme durumlarında bireysel rotalarını yeniden oluşturmak amacıyla öğrenciler ile görüşülür. Amaç, modelleme süreçlerinde bireysel bilişsel engelleri (türleri) belirlemektir (Blomhoj, 2008). Bilişsel yaklaşım özgünlük veya matematiksel karmaşıklık dereceleri bakımından değişkenlik gösteren farklı modelleme durumları ile çeşitli modelleme süreçlerini analiz etmeyi hedeflemektedir (Kaiser ve Sriraman, 2006).

2.3. Modelleme Sürecinin Basamakları

Önceki bölümde sunulduğu üzere modellemeyi ve dolayısıyla modelleme sürecindeki aşamaları açıklayan farklı teorik yaklaşımlar bulunmaktadır. Bu yaklaşımlar bazı alt basamaklar bakımından değişiklik arz etmekle birlikte modellemenin döngüsel bir süreç olması bakımından ortaktırlar (Zbiek ve Conner, 2006). Örnek teşkil etmesi bakımından Borromeo Ferri'nin (2006) bilişsel modelleme yaklaşımı aşağıda sunulmuştur:



Şekil 1. Bilişsel bir bakış açısıyla modelleme döngüsü [Borromeo Ferri'den (2006, s. 92) alınmıştır.]

Şekilden anlaşılacağı üzere Borromeo Ferri'nin (2006) modelleme sürecinde ilk aşama problemde verilen gerçek yaşam durumudur. Bu gerçek yaşam durumu, problem durumunun bizzat kendisidir. Bu bir resim, sadece bir metin veya her ikisi olabilir. Gerçek durumdan, durumun zihinsel temsiline geçişte birey sorunu az çok anlar. Problemde verilen durumun zihinsel olarak yeniden inşası, daha ziyade örtülü bir düzeyde olan ve çoğunlukla bireyin habersiz olduğu bir olay veya olgudur. Durumun zihinsel temsili bireyin matematiksel düşünme tarzına bağlı olarak çok farklı şekillerde olabilir. Örneğin kendi deneyimleriyle bağlantılı görsel hayaller ya da bireyin birleştirmek veya ilişkilendirmek istediği, problemde verilen sayı ve gerçeklerde yatabilir.

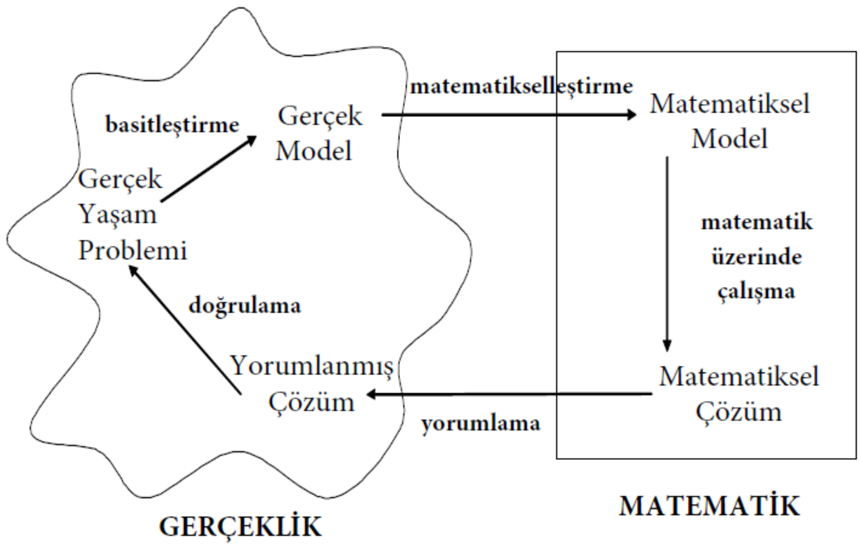
Durumun zihinsel temsilinden gerçek modele geçiş sürecinde, birey tarafından sorunun idealleştirilmesi ve sadeleştirilmesi gerçekleşir. Bunun nedeni, durumun zihinsel temsili sırasında bireyin, problemdeki bilgileri "filtreleme" yolunu etkileyen kararlar almasıdır. Ne tür bir sorun verildiğine bağlı olarak, ekstra matematiksel bilgi talebi ortaya çıkabilir. Gerçek model aşaması, durumun zihinsel temsili ile güçlü bir bağlantıya sahiptir. Bu nedenle gerçek model çoğunlukla bireyin zihin dünyasında inşa edilmiştir. Bu aynı zamanda dış temsillerin (çizimler veya formüller) seviyesinin de gerçek bir modeli temsil edebileceği anlamına gelir; ancak dışsal bir temsili oluştururken bireylerin kullandıkları sözel ifadeler de önemlidir.

Gerçek modelden matematiksel modele geçiş, bireyin matematikselleştirmede ilerlemesi, göreve bağlı olarak ekstra matematiksel bilginin bireyler tarafından şiddetle talep edilmesi ve matematiksel bir model oluşturmak için kullanılması ile gerçekleşir. Matematiksel model aşamasında bireyler çoğunlukla kabataslak çizimler veya formüller türünden dış temsiller oluştururlar. Bu aşamada, bireylerin sözel ifadeleri gerçekliğe atıfta bulunulan bir seviyeden ziyade, daha çok matematiksel seviye üzerinedir. Matematiğe geçiş bu aşamada tamamlanır.

Matematiksel modelden, matematiksel sonuçlara geçişte bireyler matematiksel yeteneklerini kullanırlar. Bu süreçte bireyler çoğunlukla model temelinde elde ettikleri sonuçları yazarlar. Sonuçların yorumlanması, matematiksel sonuçlardan gerçek sonuçlara geçişte gerçekleşmektedir. Ayrıca bireyler bu aşamada yaptıklarının farkında olmayabilirler.

Ulaştıkları sonuçları doğrulama sürecinde bireyler gerçek sonuçları ve durumun zihinsel temsilini düşünürler. Bu onlar için doğru olabilir ya da olmayabilir. Öğrenciler verilere dayanarak iki farklı doğrulama yöntemi kullanabilirler: Bunlardan ilki daha bilinçsiz yapılan **sezgisel doğrulama**, ikincisi ise daha bilinçli yapılan **bilgiye dayalı doğrulamadır.** Sezgisel doğrulamada birey sonuçların gerçekten açıklayamadığı nedenlerden dolayı yanlış olabileceğini bulur veya kendi geçmiş deneyimlerine uymadığı için sonuçların yanlış olduğunu hisseder. Bilgiye dayalı doğrulama bireylerin ekstra matematiksel bilgi temelinde kendi sonuçları ile ya hemfikir oldukları ya da olmadıkları durumları içerir. Hem "sezgisel" hem de "bilgiye dayalı" doğrulama, bireyin önceki yansımaları ile bağlantılıdır. Bireylerin çoğunlukla sezgisel veya bilgisel doğrulama yapmamasının nedeni, çoğunlukla "içsel matematiksel doğrulama" yapmalarıdır. Doğrulama, onlar için matematiksel modeli "hesaplamak" demektir. Sonuçları sırasıyla duruma, durumda verilen gerçekliğe bağlamazlar.

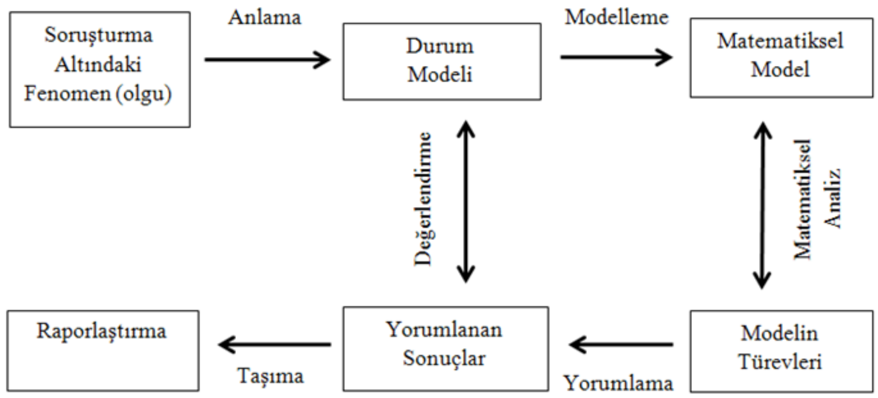
Maaß (2006) tarafından açıklanan bir diğer modelleme döngüsü yukarıda bahsi geçen döngüye benzemekle birlikte 'Durumun zihinsel temsili' ya da 'Durum Modeli' olarak da adlandırılabilen aşamayı içermemesi bakımından dikkat çekmektedir.



Şekil 2. Modelleme süreci [Blum'dan (1996) aktaran Maaß'dan (2006, s.115) alınmıştır.]

Şekilden anlaşılacağı üzere bir gerçek yaşam problemini modellerken, gerçeklik ve matematik arasında hareket edilmektedir. Dolayısıyla modelleme süreci bir gerçek yaşam problemiyle başlar. Bu sorunu basitleştirerek, yapılandırarak ve idealleştirerek gerçek bir model elde edilecektir. Gerçek modelin matematikselleştirilmesi bireyi matematiksel bir modele götürür. Varılan aşamada bu modele matematik içinde çalışarak matematiksel bir çözüm bulunabilir. Bu çözüm ilk önce yorumlanmalı ve sonra doğrulanmalıdır (Blum, 1996, akt: Maaß, 2006). Eğer çözümün veya seçilen sürecin gerçeğe uygun olduğu kanıtlanamazsa, modelleme sürecinin belirli aşamalarının veya sürecin tamamının yeniden çalışılması gerekir (bakınız, Şekil 2). Modelleme sürecinin bu gösterimi, lineer bir süreç olarak değil, kendi içinde çok yönlü işleyen karmaşık bir yapının şematize edilmiş hali olarak görülmelidir.

Verschaffel, Greer ve De Corte (2002) tarafından geliştirilen modelleme sürecinde ise 'Durum Modeli' basamağına yer verilirken 'Gerçek Model' basamağına yer verilmemiştir.



Şekil 3. Verschaffel, Greer ve De Corte'nin (2002) Modelleme Süreci

Yukarıda modelleme sürecini açıklayan örneklerde de görüldüğü üzere *gerçek model* ile *durum modeli* arasında kesin bir ayrımın ya da tercihin yapılması mümkün olmayıp farklı araştırmacılar tarafından bu basamakların birbiri yerine ya da birbirini kapsayacak şekilde kullanılabildiği anlaşılmaktadır. Bu durum modelleme sürecinin aşamalarını birbirinden kopuk parçalar halinde değerlendirmekten çok bütünsel bir şekilde yorumlanmasının önemine de işaret etmektedir.

Berry ve Houston (1995) ise modelleme sürecini şu basamaklara göre sınıflandırmışlardır.

1. Problemi Anlama: Sorunun hangi yönüyle araştırılacağına karar verilir. Probleme ilişkin veriler toplanır ve analiz edilir.

2. Değişkenleri seçme: Beyin fırtınası yapılarak problem ya da durumla ilgili özellikler sıralanır. Temel özellikler için modelde kullanılacak değişkenler tanımlanır.

3. Matematiksel bir model oluşturma: Durum ya da problem, sözel (word) bir model ile tanımlanmaya çalışılır. Sözel model, tanımlanmış değişkenler kullanılarak sembollerle yazılır.

4. Matematiksel problemi çözme: Matematiksel bilgiler bu aşamada kullanılır.

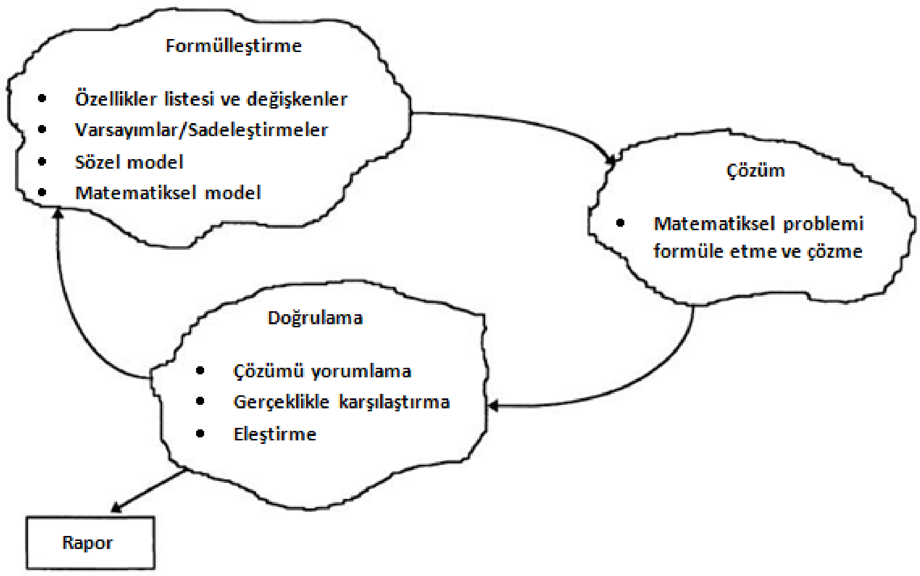
5. Çözümü yorumlama: Çözüm açıklanır. Modelin sonucu ile dikkate alınan durum arasında niteliksel bir uyuşmanın olup olmadığı kontrol edilir. Modeli doğrulamak için hangi verilerin gerekli olduğuna karar verilir.

6. Modeli doğrulama: Modelin sonuçları uygun verilerle test edilir.

7. Modeli geliştirme: Varsayımlar gözden geçirilerek revize edilmiş bir model oluşturulur. Çözme, yorumlama ve doğrulama süreçleri tekrarlanır.

8. Modelleme etkinliği hakkında rapor hazırlama: Problemi ve sonuçlarını açıklayan bir rapor hazırlanır. Bu rapor bir poster, yazılı rapor veya sözlü sunum şeklinde olabilir.

Yukarıdaki faaliyetlerin listesi her zaman sırayla geçilebilecek kesin bir liste değildir. Farklı başlıklar arasında dolaşmak genellikle iyi bir modelcinin çalışma şeklidir (Berry ve Houston, 1995). Bununla birlikte listenin, problem çözmede sıkıntı yaşandığında denenmesi için bazı görevleri veya rehberliği sağladığı, matematiksel modellemenin bir döngüde tekrarlanan bir süreci gösterdiği unutulmamalıdır (a.g.e.).



Şekil 4. Berry ve Houston'ın (1995, s. 40) Modelleme Süreci

Matematik eğitiminde modelleme etkinliklerinden en fazla rutin olmayan problemlerin çözümü sürecinde faydalanılmaktadır. Bu sebeple bundan sonraki kısımda rutin olmayan problemler üzerinde durulacaktır.

2.4. Rutin Olmayan Problemler ve Modelleme

Orton ve Wain'e (1994) göre problem bireylerin ilgisini uyandıran, zihinlerini zorlayan ve çözümü elde etmek için araştırma yapma ihtiyacı hissettikleri durumlardır. Krulik ve Rudnick (1989) ise problemi çözülmesi gereken ve çözüm için belirgin bir yolun görülemediği durumlar olarak tanımlamaktadır. Karşılaşılan bir durumla bireyin sahip olduğu bilgi ve düşünce yapısının uyuşmaması ve bireydeki bilişsel dengenin bozulması halinde bir problemin varlığından söz edilebilir (Baki, 2006).

Matematiksel problemleri rutin (sıradan) ve rutin olmayan (sıra dışı) problemler olarak iki kategoride değerlendirmek mümkündür (Arslan ve Altun, 2007). Rutin problemler, aritmetiksel işlemlerin, bilinen metot ve kuralların direkt olarak uygulanmasıyla çözülebilen ve matematik ders kitaplarında çokça örneğini gördüğümüz alıştırma türü sorulardır (Bayazit ve Aksoy, 2014). Bu problemler genellikle konunun pekiştirme aşamasında kullanılırlar. Rutin olmayan problemler ise aritmetiksel/cebirsel işlemlerin, kuralların ve formüllerin direkt olarak uygulanmasıyla çözülemeyen sorulardır ve bu problemlerin en temel özelliği çözüm için farklı yaklaşım ve metotların uygulanmasını, birden fazla stratejinin kullanımını ve yaratıcı düşüncenin işe koşulmasını gerektirmesidir (Bayazit ve Aksoy, 2014). Aşağıda rutin olmayan bir problem örneği verilmiştir:

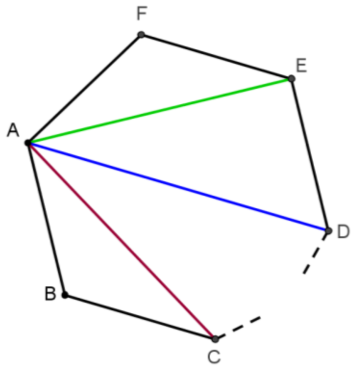
n kenarlı bir çokgenin kaç tane köşegeni vardır?

Bu problem farklı şekillerde çözüme kavuşturulabilir. Örneğin kombinasyon bilgisine sahip olan öğrenciler için '***n*** tane noktadan C(n, 2) tane doğru geçer; ancak bunların ***n*** tanesi kenar olacağı için, C(n, 2) - n tanesi köşegen olacaktır.' bilgisi kullanılabilir. Bu ifade gerekli işlemler yapılarak aşağıdaki biçime dönüştürülebilir.

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!.2!} - n = \frac{n.(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{\mathrm{n.(n-3)}}{2}$$

Şekil 5. Köşegen sayısını hesaplamak için kombinasyon düşüncesini içeren bir model

Diğer taraftan kombinasyon düşüncesinin kullanılamayacağı daha alt sınıf düzeylerinde ise problem durumu aşağıdaki şekilde modellenerek çözüm yapılabilir.



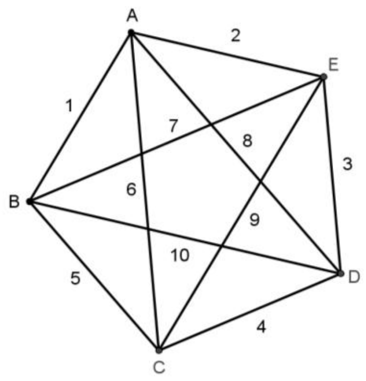
Şekil 6. Köşegen sayısını hesaplamak için çokgensel bir model

Şekilden anlaşılacağı üzere ***n*** kenarlı bir çokgende; bir köşeden (A köşesinden), kendisine ve komşularına (B ve F köşelerine) köşegen çizilemeyeceği için en fazla ***(n-3)*** tane köşegen çizilebilmektedir. Dolayısıyla ***n*** köşeden toplamda **n.(n-3)** tane köşegen çizilebilir. Ancak A köşesinden C köşesine çizilen köşegen ile C köşesinden A köşesine çizilen köşegen aynı olacağı için ve bu durum diğer köşeler arasında da geçerli olacağı için aslında bu toplamın yarısı kadar, yani $\frac{n.(n-3)}{2}$ tane köşegen çizilmiş olacaktır.

Gerçek-yaşam problemleri (real-world problems) bir tür rutin olmayan problemler olarak değerlendirilmektedir (Verschaffel, De Corte ve Vierstraete, 1999). Bu problemler, rutin olmayan problemlerin özelliklerini taşımakla birlikte gerçek yaşamdan kaynaklı bir takım özgün koşullar içerir ve matematiksel bilgiler ile yöntemler doğru uygulansa bile gerçek yaşam koşulları ihmal edildiği sürece doğru sonuca ulaşılması mümkün değildir (Bayazit, 2013). Gerçek-yaşam problemlerinde bulunması gereken temel özelikler 'matematikten günlük yaşama bilgi transferi', 'yapılan çözümün gerçek yaşamda anlamlılığının değerlendirilmesi', 'akla ilk gelen cevabın dışında farklı cevapların ya da çözümlerin bulunması' ve 'çözüm için gerçek-yaşam koşullarının düşünülerek uygun modellerin ve yöntemlerin kullanılması' olarak belirtilebilir (Chacko, 2004; Greer, 1993; Nesher ve Hershkovitz, 1997; Verschaffel ve ark., 1999, akt: Bayazit, 2013). Aşağıda gerçek yaşamla ilişkili rutin olmayan bir problem örneği verilmiştir:

Birbirini tanımayan 5 kişinin katıldığı bir toplantıda bütün katılımcılar birbirleriyle tokalaşırsa toplam kaç tokalaşma gerçekleşir?

Bu soru kişileri temsilen noktalar seçilerek ve her bir tokalaşma için bu noktalar arasındaki doğru parçaları çizilerek aşağıdaki gibi modellenebilir:



Şekil 7. Tokalaşma sorusu için örnek bir model

Şekilde görüldüğü üzere köşeler arasındaki doğru parçaları sayıldığında 5 kişi arasında toplam 10 tokalaşma gerçekleşmektedir. Bu modelde kişi sayısı arttıkça doğru parçalarını çizme ve sayma işlemi zorlaşsa da olayın temel mantığını kavratmak ve durumu görselleştirmek açısından yararlı olacağı düşünülebilir.

Diğer taraftan tokalaşma işlemini sistematik bir şekilde yürütebilmek ve hesaplamayı kolaylaştırabilmek için satır ve sütun mantığı içeren aşağıdaki gibi bir tablodan yararlanılabilir.

Tablo 2. Tokalaşma sorusu için örnek bir model

Katılımcı	A	B	C	D	E
A					
B	x				
C	x	x			
D	x	x	x		
E	x	x	x	x	

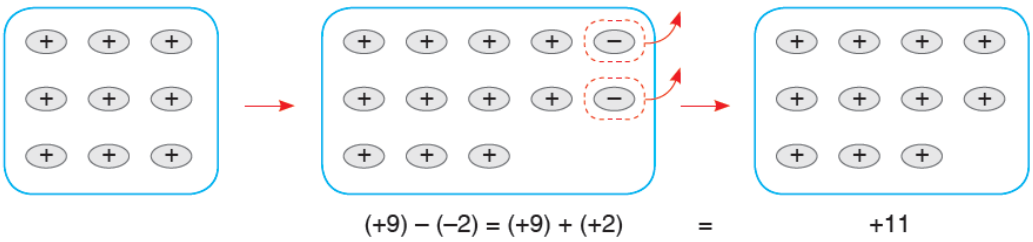
Tablodan anlaşılacağı üzere kişiler arasında yalnızca bir tokalaşma gerçekleşeceği için ve kişi kendisi ile tokalaşmayacağı için toplamda 1+2+3+4=10 tokalaşma yapılacaktır. Diğer taraftan tablodaki ilişkiler dikkatle incelendiğinde bu toplamın $\frac{5\,.\,4}{2}$ biçiminde de hesaplanabileceği ve genellenmeye çalışıldığında $\boldsymbol{n}$ kişinin katıldığı bir toplantıda $\frac{\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$ tokalaşmanın gerçekleşebileceği bulunabilir.

Gerçek-yaşamla alakalı rutin olmayan problemlerin, eleştirel ve yaratıcı düşüncenin gelişimi, özgün çözüm yolları ve stratejiler geliştirip uygulayabilme ve edinilen bilgileri farklı ortamlara uyarlayabilme gibi yeteneklerin kazandırılması için uygun öğrenme-öğretme ortamları sağladığı belirtilmektedir (Brown, 2001; NCTM, 1991). Birçok matematik eğitimcisi okul matematiğindeki sözel problemlerin mevcut uygulamasının öğrencilerin matematiksel modellemeye yönelik gerçek bir eğilimi teşvik etmediğini iddia etmektedir (De Corte, Verschaffel ve Greer, 2000). Sözel problemleri çözmek, temel becerileri (dört işlem) kazanmada yararlı olabilir ancak matematiksel konu ya da kavramların öğrenilmesini ve zihinde kalıcılığını sağlamamaktadır (Van de Walle, 2012, akt: Karalı, 2013). Bu problemler öğrencileri belirli kural ya da formülleri ezberleyerek sonuca gitmeye alıştırmaktadır.

Oysa rutin olmayan problemlerle uğraşmak, bireyleri farklı çözüm yolları geliştirmeye zorlamakta ve bu süreçte model kullanmaya teşvik etmektedir. Model kullanımının sorunun yönergesinde verilen bilgilerin analizinde ve aralarındaki ilişkilerin belirlenmesinde, çözüme ilişkin uygun yöntem ve yaklaşımların geliştirilip uygulanmasında, özellikle de ulaşılan sonucun gerçek yaşam koşullarında anlamlı olup olmadığının yorumlanmasında etkili sonuçlar verdiği belirtilmektedir (Blum, 1993; Blum ve Ferri, 2009; Zbiek, 1998, akt: Bayazit, 2013). Dolayısıyla rutin olmayan problemler, bireylere farklı bakış açıları kazandıran, problem çözme yeteneklerini geliştiren ve öğrenilen bilgileri gerçek yaşamda uygulama imkânı veren doğal ortamları sunmakla birlikte modelleme yaklaşımının doğrudan gözlendiği, ihtiyaç duyulduğu ve yararlanıldığı durumlar olarak karşımıza çıkmaktadır.

2.5. Ders Programındaki Konu ve Kavramların Modellenmesi

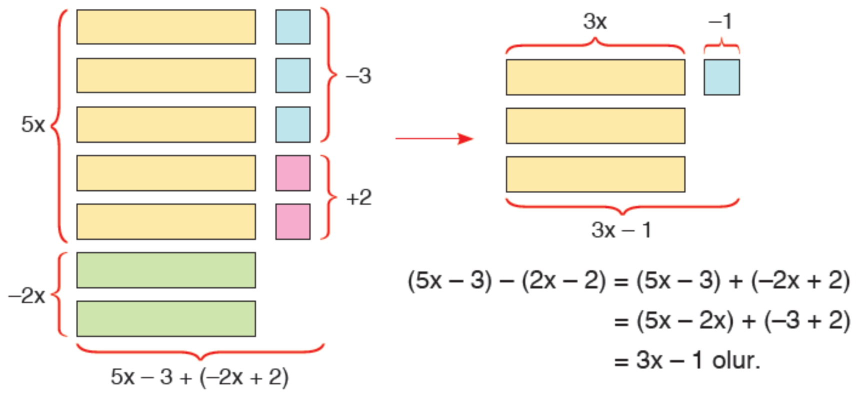
Matematik öğretim programında sayı kartları, onluk bloklar, kesir takımları, basit günlük materyallerden elde edilecek çeşitli modeller vb. gibi materyallerden yeni kavramların öğretiminde ve yapılacak olan değerlendirmelerde mümkün olduğu ölçüde yararlanılması önerilmektedir (MEB, 2018). Nitekim kesirler konusunda, tam sayılı kesirler ile bileşik kesirlerin birbirine dönüştürülmesi, kesirlerde sadeleştirme ve genişletme, bir çokluğun istenen kesir kadarını bulma, ondalık gösterimler, yüzdeler ile kesirlerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri için şeffaf kesir kartları, sayı doğrusu gibi modellerden yararlanılması beklenmektedir. Cebirsel ifadelerin anlamını açıklarken, cebirsel ifadelerde toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini yaparken ya da özdeşliklerin modellenmesi için cebir karoları gibi modellerden yararlanılması önerilmektedir. Benzer şekilde tam sayılarda işlem yaparken ve problem çözerken, sayı pulları, asansör, termometre ve sayı doğrusu gibisinden modeller kullanılması tavsiye edilmektedir. Ayrıca üçgenlerin iç açılarının ölçülerinin toplamını kanıtlarken kağıt katlama gibi somut modeller, eşitliğin korunumunu anlatırken terazi ve denge modelleri, dağılma özelliğini alan ile görselleştiren modeller, doğrunun eğimi ve büyüklüğünü anlatmak için günlük hayattan modeller, eşlik ve benzerliğin örneklendirildiği modeller ve üç boyutlu cisimleri (prizmalar, silindir, piramitler ve koni) tanıtırken, temel elemanlarını belirlerken, alan ve hacim bağıntılarını oluştururken somut modellerden yararlanılmasına vurgu yapılmaktadır. Örneğin tam sayılarda çıkarma işlemini sayma pulları ile açıklayan bir model aşağıda verilmiştir.



Şekil 8. Tam sayılarda çıkarma işlemini izah eden örnek bir model [Erenkuş ve Savaşkan'dan (2018, s. 15) alınmıştır]

Şekilde görüldüğü üzere başlangıçta 9 tane (+) pulun bulunduğu bir kutudan 2 tane (-) pulu çıkarmak mümkün değildir. Bu nedenle işlemi etkilemeyeceği için önce kutuya 2 adet sıfır çifti (1 artı ve 1 eksi puldan oluşan ikili) eklenmiş, daha sonra asıl yapılmak istenen işlem; yani 2 adet (-) pul çıkarılmıştır. Kutuda son durumda 11 tane (+) pul olduğu işlemin sonucu da +11 olarak belirlenmiştir.

Benzer şekilde cebirsel ifadelerde çıkarma işleminin cebir karolarından yararlanılarak açıklanmaya çalışıldığı örnek bir model aşağıda sunulmuştur.



Şekil 9. Cebirsel ifadelerde çıkarma işlemini izah eden örnek bir model [Erenkuş ve Savaşkan'dan (2018, s. 104) alınmıştır]

Bu modelde eksileni, çıkanın ters işaretlisi ile toplama mantığı kullanılmıştır. Bu doğrultuda değişkenleri temsil eden dikdörtgenler ve sabit terimleri temsil eden kareler zıt işaretlisi ile toplandığında birbirini yok etmiş, sayıca fazla olan karolar işlemin sonucunu belirlemiştir.

Van de Walle'nin (2012) altı kavramı temsil etmek için bahsettiği modeller ise şu şekildedir:

1) Sayılabilir nesneler, 'sayı' kavramını ve 'bir fazlası' gibi sayı kavramına bağlı fikirleri modellemek için kullanılabilir.

2) 'Uzunluk', farklı nesnelerin uzunluk niteliklerinin karşılaştırılmasını içerir. Bir nesnenin uzunluk ölçüsü, nesnenin uzunluğunun birim uzunlukla kıyaslanması ilişkisidir. Dolayısıyla, çubuklar uzunluğu ölçmek için kullanılabilir.

3) 'Dikdörtgenler' noktalı kâğıt üzerinde modellenebilir. Karşı kenarlar, eşit uzunlukta ve paraleldir; komşu kenarlar birbirini dik açıyla keser.

4) Onluk tabana ilişkin kavramlar (birlik, onluk, yüzlük) çoğunlukla şerit ve karelerle modellenir. Çubuklar ve çubuk desteleri de ayrıca yaygın olarak

kullanılmaktadır. ‘Yüz’ kavramı büyük karede (yüzlük) değil, o karenin şeritle (onluk) ve küçük kareyle (birlik) ilişkisi içindedir.

5) ‘Olasılık’ kavramı bir çarktan elde edilen sonuçların kıyaslanmasıyla modellenebilir. Olasılık, bir olayın meydana gelme sıklığı ile olası tüm sonuçlar arasındaki ilişkidir. Çark, burada göreceli (birbirine bağlı) frekansları oluşturmak için kullanılabilir. Bunlar, çarkın bölümlerinin birbiriyle ilişkilerinin gözlemlenmesiyle tahmin edilebilir.

6) ‘Pozitif’ ve ‘negatif’ tam sayılar farklı uzunluk ve yönlerdeki oklarla modellenebilir. ‘Negatif tam sayı’ kavramı, ‘büyüklük’ ve ‘tersi’ ilişkilerine dayanır. Negatif çokluklar sadece pozitif çokluklara kıyasla mevcuttur. Sayı doğrusu üzerindeki oklar, yön ile uzunluk bakımından ters ve boyut (veya büyüklük) ilişkilerini modeller.

Bağlam ve modeller öğrencilerin soyut kavramlara geçebilmeleri için kavramlara anlam vermelerine olanak sağlar (Van de Walle, 2012). Bu sayede kavramların arka planında kalan matematiksel düşüncelerin izahı kolaylaşır ve aralarında bağ kurularak sağlam bir temel üzerine oturtulabilir. Bilgiler arasında boşluk bulunmaması ve soru işaretlerine mantıklı açıklamalar getirilebilmesi ise öğreneni ekstra motive ederek matematiksel kaygısını azaltır.

Yapılandırmacı öğrenme teorisinin takipçisi eğitimciler insan zihninin soyut matematiksel düşünceleri tutmakta güçlük çekeceğini, bireylerin bu düşünceleri şekiller, cebirsel ifadeler, grafikler ve analojiler gibi birtakım araçlar yardımıyla kodlayarak belleklerinde saklayabileceklerini belirtmektedir (Bayazit vd., 2011). Bu araçlar üretimi sırasında kritik bilgilerin seçimini veya sadeleştirme gerektirdiğinden birey gereksiz ayrıntıları zihninde tutmak zorunda kalmaz ve yapılan ilişkilendirmeler bilgi ağını zenginleştirerek kodlama sürecinde yardımcı olur. Model kullanımının bilginin kalıcılığını artıracağı, bilgi edinme sürecini kolaylaştıracağı, kavramsal öğrenmeyi gerçekleştireceği, uzamsal zekânın gelişimini destekleyeceği, öğrencilerin kendi öğrenme süreçleri hakkındaki farkındalıklarının artacağı ve soyut kavramlara somut anlamlar yüklenmesini sağlayacağı görüşleri bilişsel kazanımlar açısından önemli fikirlerdir (Bayazit vd., 2011). Ayrıca ilgi çekmesi, derse katılımı artırması, öğrencilerin korku ve kaygılarını gidermesi ve dersi sıkıcılıktan kurtarması model kullanımının duyuşsal kazanımları olarak belirtilebilir (a.g.e.).

Diğer taraftan model ve manipülatiflerin öğretmenler tarafından etkisiz biçimde kullanabildiği durumlar da vardır. Model kullanımını aşırı şekilde yönlendirmenin doğal bir sonucu çocukların bunları bir kavramı keşfetmeye yarayan araçlar olarak görmesinden ziyade cevap bulma araçları olarak kullanmaya başlamalarıdır (Van de Walle, 2012). Örneğin çocuklara bir çarpma işleminin basamak blokları kullanılarak nasıl yapılabileceği açıklanırsa öğrenciler cevabı bulmak için blokları kullanabilir; ancak modellemede karşılaşılabilecek örüntü ve işlemlere odaklanamayabilirler. Diğer bir ifadeyle öğrenciler kullandıkları modelle ilgili konuşmalara katılabilirler; fakat yaptıklarının matematiksel amacının ne olduğunu bilmezlerse manipülatifler kavramı geliştirmek için bir araç olmaktan çıkar (Van de Walle, 2012). Özetle bir modelde öğretmenin gördüğü ilişkiyi veya anlamı öğrenci göremezse bir modelin etkili olması mümkün değildir.

2.6. İlgili Araştırmalar

Alan yazın incelendiğinde gerçek yaşam problemlerinin ve ders programındaki konu ve kavramların modellenmesi ile ilgili çok sayıda araştırma bulunmakla birlikte bunları birlikte konu edinen ya da karşılaştırmayı amaçlayan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu kapsamda çoğunluğu öğretmen ve öğretmen adayları ile ilgili olmak üzere ulusal ve uluslararası çalışmaların ortaya koyduğu bilgi ve bulgular paylaşılacaktır.

Kertil (2008) öğretmen adaylarının problem çözme becerilerini matematiksel modelleme sürecinde incelemiştir. Çalışma 2006-2007 eğitim-öğretim yılında İstanbul'daki bir üniversitenin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü 4.sınıfında öğrenim gören yaklaşık 40 kişilik öğretmen adayı grubunun katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda ilk olarak öğretmen adaylarının modelleme becerilerini belirlemek üzere ön test uygulanmış, daha sonra gerçek yaşam problemlerinden oluşan matematiksel modelleme etkinlikleri bireysel ve grup çalışması şeklinde üç hafta boyunca gerçekleştirilmiştir. Son olarak katılımcıların modelleme becerilerinin gelişimini değerlendirmek amacıyla son test uygulanmıştır. Ayrıca modelleme testi ve etkinliklerde yaşadıkları zorlukları, modelleme problemlerine bakış açılarını ve süreç sonundaki kazanımlarını araştırmak üzere 3 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bulgular öğretmen adaylarının modelleme sürecinde problem çözme becerilerinin ve gerçek hayat durumlarını yorumlamada matematiksel bilgilerini kullanma becerilerinin yeterli olmadığını göstermektedir. Katılımcıların problemin çözümü için hedefi belirginleştirme, bir matematiksel model seçme ve uygulama, sözel açıklamaları kullanma (formel olmayan matematiksel düşünceden formel matematiksel düşünceye geçiş) ve grafiksel gösterimlerden yararlanma gibi modelleme sürecinin bazı basamaklarında sıkıntı yaşadıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının tek bir çözümü olan, belirli kalıp ifadelerle bireyi yönlendiren geleneksel problem çözme alışkanlıklarının matematiksel modelleme ve problem çözme becerileri üzerinde negatif manada önemli etkilerinin olduğu gözlemlenmiştir. Görüşmeler sırasında öğretmen adayları matematiksel modelleme problemlerine alışkın olmadıklarını, çözüm yollarından emin olmadıkları için grup çalışması aşamasını beklediklerini ifade etmekle birlikte bu sürecin problem çözme yaklaşımları açısından önemli katkılar sağladığını belirtmişlerdir.

Eraslan (2011), model oluşturma etkinlikleri ve bunların matematik öğrenimine etkileri hakkında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının görüşlerini ve değerlendirmelerini araştırmıştır. Çalışma 2009-2010 eğitim-öğretim yılında Karadeniz bölgesinde bulunan bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği son sınıf öğrencilerinden modelleme dersi alan 45 kişi arasından seçilen 6 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adayları bu problemlerin geçmişten bildikleri problemlerden farklı olarak başlangıçta ne yapmaları gerektiği konusunda belirsizlik yarattığını ifade etmişlerdir. Model oluşturma etkinliklerinin içinde nasıl hareket etmeleri gerektiği konusunda yol gösteren ipuçlarının yer almaması nedeniyle ilerleyebilmek için her bir adımda varsayımda veya kabulde bulunmak zorunda kaldıklarını belirtmişlerdir. Soruda kesinlik bulunmaması ve çıkarımları kendilerinin yapmaları öğretmen adaylarını rahatsız etmiştir. Öğretmenlerin bu etkinliklerdeki rolü geleneksel problemlerdekinin aksine öğrenciye verilenlerden hareketle istenene ulaşmada yardımcı olmak değil, farklı yöntemler geliştirmelerinde, uygulamalarında ve gerektiğinde modeli revize etmek konusunda uygun fırsatları yaratmak olduğu için öğretmenlerin bu konuda kendilerini rahat hissetmelerinin ve farklı durumlar içeren modelleme etkinliklerinde bulunmalarının gerekliliği ifade edilmiştir. Yine aynı çalışmada öğretmen adayları belirli sınırlar dâhilinde planlandığında model oluşturma etkinliklerinin her sınıf düzeyinde uygulanabileceğinden ve bunların öğrencilerin matematiksel gelişimine katkı sağlayabileceğine ilişkin düşüncelerini ifade etmişlerdir. Ayrıca öğretmenlerin modelleme etkinliklerini bireysel çalışma yerine grupla ya da sınıfla birlikte uygulamasının yararlarına, süreci yönetirken farklı çözüm yolları üretebilmenin ve sürecin sonuçtan değerli olduğu konusunda öğrencileri güdülemesinin önemine de vurgu yapılmıştır.

Özgün (2012) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ürettiği matematiksel modelleri bilişsel ve kavramsal boyutları açısından incelemiştir. Çalışmaya 2010-2011 eğitim-öğretim yılında Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 121'i üçüncü sınıf ve 67'si dördüncü sınıf olmak üzere toplam 188 öğretmen adayı katılmıştır. Bu öğretmen adaylarına araştırma kapsamında belirlenen 5 açık uçlu sorudan oluşan yazılı sınav uygulanmış, daha sonra seçilen 5 öğretmen adayı ile yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın bulguları bilişsel ve kavramsal modeller arasında çok yakın bir ilişki ve etkileşimin olduğunu göstermektedir. Bu kapsamda bilişsel modellerin kavramsal modellerin üretimine öncülük etmekle birlikte uygun kavramsal modellerin de bilişsel modellerin revize edilerek geliştirilmesine katkı sağladığı belirtilmektedir. Diğer taraftan bilişsel ve kavramsal modellerin iç içe geçirilerek aralarındaki ilişkinin sağlıklı bir şekilde kurulabilmesinin üretilen modelin uygunluğu ve yeterliliği noktasında belirleyici olduğu görülmektedir. Araştırma sonuçları ayrıca öğretmen adaylarının grafiksel modellere nazaran çoğunlukla aritmetiksel ve cebirsel modeller kullanma eğiliminde olduklarını, nicelikler ve nitelikler arasındaki ilişkileri farklı açılardan değerlendirmekten çok sonuca ulaşma çabasına girdiklerini, sayısal veri içermeyen ve açık uçlu gerçek yaşam durumlarına ilişkin varsayımda bulunma noktasında sıkıntı çektiklerini göstermektedir.

Tekin-Dede ve Yılmaz (2013) bir modelleme probleminin çözüm sürecinde, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterliliklerini incelemiştir. Çalışma İzmir ilindeki bir üniversitenin son sınıfında öğrenim gören 19 ilköğretim matematik öğretmeni adayının katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu öğretmen adayları öğretmenlik uygulaması dersi kapsamında 9 hafta boyunca matematiksel modelleme ve modelleme döngüleri hakkında bilgilendirilmişlerdir. Ayrıca literatürden seçilen çeşitli modelleme problemleri hem ders esnasında çözülmüş hem de ev ödevi olarak verilmiştir. Bu uygulamaların sonrasında adayların modelleme yeterliklerini açığa çıkarmak amacıyla Yakıt problemi adı verilen bir problem katılımcılara sunularak çözmeleri istenmiştir. Katılımcılar modelleme yeterlilikleri konusunda bilgilendirilmemesine rağmen modelleme döngüsü hakkında bilgi sahibi oldukları ve grup içinde çalıştıkları için hemen hemen tüm yeterlikleri ortaya çıkarmışlardır. Ancak gerçek bir durumda matematiksel sonuçları yorumlama konusunda yetersiz kalmışlardır.

Tuna, Biber ve Yurt (2013) matematik öğretmen adaylarının kesirlerle ilgili gerçek yaşam problemlerin çözümünde model kullanma becerilerini araştırmışlardır. Çalışma 2011-2012 eğitim-öğretim yılında Türkiye'nin kuzeyinde bulunan bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümü 3. sınıfında öğrenim gören öğretmen adaylarıyla yürütülmüştür. Adaylara kesirlerle ilgili 5 tane gerçek yaşam problemi verilerek modelleme yöntemiyle çözmeleri istenmiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının modelleme becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı görülmüştür. Özellikle öğretmen adaylarının kalan verilip bütünü bulma problemlerini modellemede ve verilen oranların paydaları birbirinin tam katı olmayan problemlerin modellenmesinde zorlandıkları gözlenmiştir.

Ural (2014) matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme becerilerini ve bu süreçte karşılaştıkları zorlukları araştırmıştır. Araştırmaya bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesi son sınıfında öğrenim gören ve matematiksel modelleme üzerine herhangi bir eğitim almamış 38 öğretmen adayı katılmıştır. Öğrencilere Dizel–Benzin problemi ve Nüfus problemi olmak üzere teorik ve deneysel modellemeye yönelik iki problem durumu verilmiştir. Adayların modelleme becerileri Berry ve Houston (1995) tarafından geliştirilen matematiksel modelleme süreci temel alınarak incelenmiştir. Bulgular ışığında adayların büyük çoğunluğunun verilen gerçek yaşam problemini anlamada, matematiksel olarak ifade etmede, matematiksel bir model oluşturmada, modeli gerçek yaşamda yorumlamada, aritmetik yerine cebiri kullanmada, sahip oldukları matematiksel bilgileri gerçek yaşam probleminin çözüm sürecine aktarmada büyük ölçüde başarısız oldukları belirlenmiştir.

Deniz ve Akgün (2018) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme problemlerini çözme becerilerini incelemişlerdir. Araştırma matematiksel modelleme dersi kapsamında yürütülmüş ve öğretmen adayları literatürden seçilen ‘Maksimum Hacimli Kutu’, ‘Nasıl Depolayalım?’ ve ‘Hangi Konutu Almalı?’ adı verilen problemler üzerinde gruplar halinde çalışmışlardır. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının matematiksel modelleme problemlerine uyum sağlayamadıkları, problemi anlama ve verilen gerçek yaşam durumlarını matematiksel dile aktarırken gerekli değişkenleri seçmekte oldukça zorlandıkları ve matematiksel model oluşturma basamağında uygun modeli üretemedikleri görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının modelleme sürecinin ilk basamaklarını doğru bir şekilde tamamlayamamalarının sonraki basamakları olumsuz etkilediği, özellikle son iki basamak olan matematiksel modelleri çözme ve yorumlama basamaklarında diğer basamaklara göre daha az başarılı oldukları belirlenmiştir.

Bozkurt ve Polat (2011) tamsayılar konusunun öğretiminde sayma pulları ile modellemenin öğrenmeye etkisini öğretmen görüşleri üzerinden belirlemeye çalışmışlardır. Araştırmaya Türkiye’nin güneyinde yer alan bir ildeki farklı okullarda çalışan 16 ilköğretim matematik öğretmeni katılmıştır. Veriler yarı yapılandırılmış mülakat tekniği ile toplanmıştır. Araştırmadan elde edilen bulgular ışığında öğretmenlerin tamsayıları işlerken sayma pulları haricinde çok farklı bir modelleme yöntemini tercih etmedikleri belirlenmiştir. Sayma pullarından da çoğunlukla tamsayılarda toplama ve çıkarma işlemlerini modellerken yararlandıkları ancak çarpma ve bölme işlemlerini modellerken sorun yaşadıkları için çok fazla kullanmadıkları görülmüştür. Özellikle sıfır çiftleri oluşturularak yapılan modellemelerin yalnızca öğrenciler için değil, öğretmenler için bile zorluk yarattığını belirtmişlerdir. Diğer taraftan kitaplarda verilen sayma pulları ile modelleme örneklerinin belirli işlemlerle sınırlı kalması ve işaret farklılıklarını içeren farklı örneklerin yer almaması öğretmenlere sıkıntı yaratabilmektedir. Öğretmenler bu modelleri daha etkin kullanabilmek için detaylı kullanım yönergelerine ve örneklerin çoğaltıldığı ek kaynaklara ihtiyaç duymaktadırlar. Bu doğrultuda sayma pullarının somutlaştırıcı ve tamamlayıcı bir araç olarak kullanılabilirken yeterli bir materyal olarak görülmediği ifade edilmektedir. Ayrıca öğretmenlerin programda verilen örneklere ve modellere bağlı kaldıkları, kendi modellerini veya materyallerini üretme gibi bir uğraşlarının olmadığı ve alternatif modeller geliştirmeye çalışmadıkları görülmüştür.

Bayazit, Aksoy ve Kırnap (2011) ilköğretim matematik öğretmenlerinin genel model algılarını, tam sayılar ve kesirler konuları ile ilgili ders kitaplarında verilen modelleri anlama ve bu kavramları içeren sembolik işlemleri açıklamak için model oluşturma yeterliklerini araştırmışlardır. Çalışmaya 2010-2011 öğretim yılında Kayseri ili merkezinde farklı okullarda görev yapmakta olan 35 ilköğretim matematik öğretmeni katılmıştır. Araştırmanın verileri yazılı sınav ve mülakat teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. Yazılı sınavda öğretmenlerin model algılarını ortaya çıkarmak, model kullanımının yararlarına olan inançları ve ne türden katkılar sağlayacağına ilişkin düşüncelerini araştırmak, ders kitaplarında verilen sayma pulları ve kesir kartlarından oluşan modelleri anlama yeterliklerini araştırmak, tam sayı ve kesirlerle alakalı sembolik işlemleri modelleme yeterliklerini araştırmak üzere toplam 8 adet soru kullanılmıştır. Yazılı sınavdan sonra başarı düzeyleri açısından üst, orta ve alt grupların her birinden ikişer öğretmen olacak şekilde toplam 6 öğretmen ile yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın sonuçları öğretmenlerin büyük bir kısmının model algılarının ders kitaplarında örnekleri verilen kesir kartları, cebir karoları, sayma pulları ve sayı doğrusu gibisinden çizim yoluyla elde edilebilen ve görsellik içeren şekillere kısıtlanmış olduğunu göstermektedir. Bu kapsamda değişkenler arası ilişkilerin incelenmesi ve problem durumunun temsili amacıyla kullanılan cebirsel ve aritmetiksel yapıları model olarak belirten öğretmen sayısının azlığına dikkat çekilmektedir. Ayrıca öğretmenler model kullanımının sağlayacağı bilişsel ve duyuşsal kazanımlara ilişkin pozitif inanç ve düşüncelere sahip olmakla birlikte katılımcıların ders kitaplarında verilen modelleri anlama, yorumlama ve sembolik olarak verilen matematiksel durumları modellemede zorlandıkları görülmüştür.

Akgün, Çiltaş, Deniz, Çiftçi ve Işık (2013) ilköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme ile ilgili farkındalıklarını belirlemeyi amaçlamışlardır. Çalışmaya Erzurum il merkezinde görev yapan 11 ilköğretim matematik öğretmeni katılmıştır. Bu öğretmenlerle önce yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiş, daha sonra derslerinde matematiksel modellemeyi kullanıp kullanmadıklarını tespit etmek amacıyla 4 öğretmen sınıf içinde gözlemlenmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular öğretmenlerin matematiksel modelleri somut materyaller ve görseller olarak düşündüklerini; değişkenler, fonksiyonlar, eşitlik ve eşitsizlik gibi matematiksel ifadeler olarak düşünemediklerini göstermektedir. Ayrıca derslerde matematiksel modellemeyi kullandıklarını iddia ettikleri örneklerin aslında model kullanımı olması bu kavramları birbirine karıştırdıklarının, modellemeyi bir süreç olarak göremediklerinin ve modelleme hakkında da yeterli bilgiye sahip olmadıklarının bir göstergesidir. Diğer taraftan öğretmenler matematiksel modellemeyi dersin daha iyi anlaşılması, kalıcı öğrenmenin sağlanması ve matematiksel kavramların görselleştirilmesinde kullandıklarını ifade etmelerine rağmen; öğretim programının yoğun olması ve modellemenin zaman almasından dolayı konuları yetiştirme sıkıntısı yaşadıklarını, matematiksel modellere ulaşmada ve bu modelleri sınıf içinde kullanmada güçlük çektiklerini belirtmişlerdir. Yapılan görüşmelerde öğretmenler matematiksel modellemeyi çoğunlukla geometri, kesirler ve sayılar konusunda kullanmayı uygun gördüklerini belirtirken sadece birkaç öğretmen cebirsel ifadeler konusuna vurgu yapmıştır.

Çelik ve Çiltaş (2015) ortaokul matematik öğretmenlerinin beşinci sınıflarda kesirler konusunun öğretiminde matematiksel modelleri ne düzeyde kullandıklarını ve matematiksel modeller hakkındaki görüşlerini incelemiştir. Çalışma Rize ilindeki iki farklı ortaokulda görev yapan 3 ortaokul matematik öğretmeninin katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu öğretmenlerin 5. sınıflarda kesirler konusunu anlattıkları dersleri tekrar gözlemlenebilmesi için video kaydına alınmış ve ders sırasında belirli kazanımlar açısından hangi modellerin kullanıldığı gözlem formu ile değerlendirilmiştir. Ayrıca ders kayıtlarından sonra katılımcılara modelleme görüş formu uygulanarak yeni öğretim programını değerlendirmeleri, model kullanımının avantajları ve dezavantajları, kesirlerin öğretiminde model kullanıp kullanmadıkları ve en çok hangi tür modelleri kullandıkları gibi sorulara cevap aranmıştır. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre öğretmenlerin modelleri düzenli kullanmadıkları ve model kullandıkları konular ile tercih ettikleri modellerin farklı olduğu görülmüştür. Kesirlerin anlatımında öğretmenler çoğunlukla bölge modelini (bütünü oluşturan parçaların aynı şekle ve alana sahip olması) tercih ederken, daha sonra sayı doğrusu modelini kullanmaktadırlar. Fakat küme ve alan modeli (bütünü oluşturan parçaların aynı alana sahipken aynı şekle sahip olmak zorunda olmaması) neredeyse hiç kullanılmamıştır. Ayrıca öğretmenler kullandıkları bölge modelinin alan modeli olduğunu düşünmektedirler. Bütün bu hususlar öğretmenlerin modeller hakkında yeterli bilgi birikimine sahip olmadığını göstermektedir. Araştırmada gözlemlenen bir başka durum ise öğretmenlerin çoğunlukla konu anlatımında modellere başvururken soru çözümünde modellerden pek yararlanmadıkları ve öğrencileri model kullanımına pek teşvik etmedikleri hususudur. Ayrıca görüşme formundan elde edilen sonuçlara göre öğretmenler model kullanımını konuları görselleştirme, kalıcı olmasını sağlama, dikkat çekme ve dersi zevkli hale getirme gibi açılardan yararlı bulurken; model kullanımının zaman alıcı olduğu, her konuya uygun olmadığı ve derste ciddiyetsizliğe neden olduğu gerekçeleriyle dezavantajlı olduğunu düşünmektedirler.

Güler ve Temizyürek (2015) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatına yönelik model oluşturma becerilerini araştırmışlardır. Araştırmaya 2013-2014 eğitim-öğretim yılında Karadeniz bölgesinde bulunan bir üniversitenin pedagojik formasyon eğitimine devam eden öğretmen adaylarından Özel Öğretim Yöntemleri dersini alan 52 öğrenci arasından gönüllülük esasına göre seçilen 20 öğretmen adayı katılmıştır. Araştırma verileri bu dersin son haftasında sınıf ortamında gerçekleştirilen odak grup görüşmesi ile elde edilmiştir. Bu kapsamda öğretmen adaylarına Abaküs Problemi adı verilen bir problemin tek sayılar için revize edilen şekli sunularak ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın modeller yardımıyla ispatını oluşturmaları istenmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının bu bağıntının ispatında şekilsel, sözel ve cebirsel modeller kullandıkları ve bu modelleri gerektiğinde birbiriyle ilişkilendirerek altı farklı ispata ulaştıkları gözlenmiştir. Katılımcıların bu ispatları yaparken ise daha çok cebirsel ve şekilsel modeller oluşturdukları belirlenmiştir. Adayların model oluşturma sürecinde ön bilgilerinden yararlanmaları dikkat çekerken geometrik modellerin kullanıldığı ispatlarda fikirlerini izah etmede ve diğer adayları ikna konusunda cebirsel modellere göre daha fazla zorlandıkları görülmüştür. Araştırmada ulaşılan bir başka sonuç ise uygun etkinlikler kullanıldığında öğretmen adaylarının modeller yardımıyla ispat yapmakta başarılı olabilecekleri ve bu etkinliklerin matematiksel muhakeme yeteneğine katkı sağlayabileceği yönündedir.

Urhan ve Dost (2016), ortaöğretim matematik öğretmenlerinin modelleme etkinliklerine ilişkin görüşlerini belirlemeyi ve modellemenin öğretim sürecinde kullanılmasının önündeki engelleri ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Çalışma 2014-2015 eğitim öğretim yılında Ankara'daki devlet okullarında görev yapan 9 ortaöğretim matematik öğretmeninin katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Öğretmenlerin görüşleri yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılarak alınmıştır. Elde edilen bulgular öğretmenlerin birçoğunun matematiksel modelleme hakkında bilgi sahibi olmadığını ve derslerinde modellemeyi kullanmadıklarını göstermektedir. Bu kapsamda matematik konularını günlük yaşamla ilişkilendirememe, etkinlikleri anlayamama, etkinlikleri hazırlama ve uygulamada kendilerini yetersiz hissetme gibi sıkıntılar, öğretmenlerin modelleme etkinliklerini öğretim sürecinde kullanmasının önündeki önemli engeller olarak belirtilmiştir. Öğretmenlerden bazıları, modelleme etkinliklerinin matematiksel konular arasında bağlantı kurma, matematiği günlük yaşamla ilişkilendirme ve öğrencilerin motivasyonu arttırma gibi yönlerden katkı sağlayacağını düşünürken bazıları ise modelleme etkinliklerinin öğrencilerin hazırbulunuşluk düzeyine uygun olmaması, bu etkinliklerdeki soruların uzun olması nedeniyle öğrencilerin öğrenilmiş çaresizlik yaşamaları ve ön yargı geliştirmeleri, programın çok yoğun olması ve etkinliklerin uygulama sürecinin çok zaman alması gibi nedenlerle matematik öğretiminde kullanılmasının uygun olmadığını dile getirmiştir. Eğitim sisteminde var olan sınavların hızlı düşünme ve işlem yapma becerilerini ölçmesinin de bu sonuçta etkili olduğunu ifade etmişlerdir.

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının modelleme konusundaki yeterliklerini araştıran çok sayıda uluslararası çalışma bulunmaktadır. Örneğin, English ve Watters (2004) üçüncü sınıf öğrencileri (8 yaş grubunda) ve bu öğrencilerin öğretmenleri ile modelleme problemleri üzerine bir çalışma yürütmüştür. Bu kapsamda modelleme deneyimlerini tanıtmak ve yılın programını daha ayrıntılı bir şekilde planlamak için 1. dönemde dört öğretmen ile atölye çalışmaları yapılmıştır. Sürecin devamında çocukların ve öğretmenlerin ilerlemelerinin planlanması ve yansıtıcı analizi için yılın ortasında ve sonunda iki atölye çalışması daha yapılmıştır. Ayrıca her bir faaliyeti uygulamadan önce ve sonra öğretmenler ile kısa toplantılar gerçekleştirilmiştir. Modelleme faaliyetlerinin bağlamları yiyecek, hayvan ve uçuş üzerine çalışmalar içeren öğretmenlerin sınıf temalarına uyacak şekilde tasarlanmıştır. Bu aktiviteler çocukların; metin ve şematik biçimde sunulan matematiksel ve bilimsel bilgileri yorumlama, basit veri tablolarını okuma, veri toplama-analiz etme ve temsil etme, veri analizinden yazılı raporlar hazırlama, grup halinde işbirliği içinde çalışma, sözlü ve yazılı raporlar ile nihai ürünleri sınıf arkadaşlarıyla paylaşma gibi yeteneklerini geliştirmek için tasarlanmıştır. İkinci dönemin geri kalanı boyunca ve üçüncü dönemin tamamı için öğretmenler haftalık olarak ana model oluşturma faaliyetlerini uygulamıştır ve her ders 40 dakika sürmüştür. Faaliyetler sırasında bütün sınıfa giriş yapıldıktan sonra, çocuklar etkinliği tamamlamak için bağımsız olarak 3-4 kişilik gruplar halinde çalışmıştır. Faaliyetler tamamlandığında her grup sınıfa rapor vermiştir. Tüm sınıf etkileşimleri ve grup çalışmaları video ile kayıt altına alınırken, öğretmen toplantılarına ait ses kayıtları yapılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin matematikselleştirme süreçlerinde farklı seviyelerde karmaşıklıklar görülmüştür. Bu kapsamda öğrenciler, çeşitli temsil biçimlerinde sunulan verileri anlama ve yorumlama konusunda zorluklar yaşamaktadırlar. Genel olarak, öğrencilerin verileri dikkatlice incelemeden ve tartışmadan başlangıçtan itibaren bir cevap kaydetme eğiliminde oldukları ve buldukları anormal durumları açıklamak için informal bilgilerine başvurdukları belirtilmektedir. Diğer taraftan değişim, değişim oranı gibi görevde bulunan matematiksel kavramların sezgisel bilgisine ve anlaşılmasına, mevcut kişisel bilginin görev bilgisine karşı kullanılmasına dikkat çekilmektedir. Ayrıca modelleme görevlerinin öğrencilerin fikirlerini çoklu temsillerle ifade etmeleri için zengin fırsatlar sağladığına vurgu yapılmaktadır.

Doerr (2006) ortaöğretim matematik öğretmenleri ile gerçekleştirdiği durum çalışmasında öğrencilerinin üstel artışa dayalı modelleri geliştirirken öğretmenlerin nasıl karşılık verdiğini ve bu süreçte yaşanan zorlukları incelemiştir. Katılımcılar yirmi yıldan fazla öğretmenlik deneyimine ve üstel fonksiyonlar hakkında güçlü bir alan bilgisine sahip dört öğretmenden oluşmaktadır. Bu öğretmenler meslektaşları ile birlikte üstel büyümenin matematiğini araştırdıkları ve öğrencilerin bu görevlere yaklaşırken uygulayabilecekleri stratejileri tartıştıkları çalıştaylara katılmışlardır. Araştırma kapsamında sunulan bir problemde öğrencilerden bir satranç tahtası üzerine geometrik dizi oluşturacak biçimde ilk kareye bir kuruş, ikinci kareye iki kuruş, üçüncü kareye dört kuruş vs. yerleştirildiğinde bozuk paralar arasındaki üstel artışı incelemeleri ve her karedeki para sayısını kare sayısının bir fonksiyonu olarak ifade etmeleri beklenmiştir. Görev ayrıca, öğrencilerden paraların yüksekliğinin hangi karede sınıflarının tavanına, bir dağın zirvesine ve aya kadar ulaşabileceklerine karar vermelerini isteyen bir keşif içermektedir. Katılımcı öğretmenlerin her birinin sınıfında bu problemin uygulanması sırasında video kaydı alınırken araştırmacı da gözlemlerini kaydeden kısa notlar almıştır. Ayrıca derslerin ardından öğretmenlerle kısa görüşmeler yapılmış ve bu görüşmelerin ses kaydı yapılmıştır. Araştırmanın sonuçları, öğretmenlerin öğrencileri dinlerken uyguladıkları yaklaşımlarda önemli farklılıklar olduğunu göstermektedir. Öğretim uygulamalarındaki değişkenliğin, bilgi alanının karmaşıklığından ve sınıf ortamındaki kısıtlılıklardan kaynaklandığı belirtilmektedir. Ayrıca öğrencileri matematiksel modellerin geliştirilme sürecine dâhil edebilmek için öğretmenin sınıf ortamında yeni roller üstlenmesini gerektiği de vurgulanmaktadır.

Ferri ve Blum (2009) öğretmen adaylarının sadece modelleme görevlerini oluşturmayı ve çözmeyi değil, aynı zamanda modellemeyi nasıl öğretebileceklerini öğrenmeleri amacıyla seminerler düzenlemişlerdir. Çalışmaya Hamburg Üniversitesi'nde dördüncü sınıfta öğrenim gören 25 öğretmen adayı katılmıştır. Seminerler haftada 90 dakikalık kurslar şeklinde bir dönem boyunca gerçekleştirilmiştir. Seminer yapısının temelini modellemeye ilişkin dört yeterlik oluşturmaktadır. Bunlar; teorik yeterlik, görev ile ilgili yeterlik, öğretim yeterliği ve teşhis yeterliğidir. Teorik yeterlik; modelleme döngüleri, modelleme için hedefler/bakış açıları ve modelleme görevlerinin türleri hakkındaki bilgileri içermektedir. Görev ile ilgili yeterlik; modelleme görevlerini oluşturma, analiz etme ve çözme becerisini içermektedir. Öğretim yeterliği, modelleme derslerini planlama ve gerçekleştirme becerisi ve öğrencilerin modelleme süreçlerinde uygun müdahaleleri bilme yeteneğidir. Teşhis yeterliği ise öğrencilerin modelleme süreçlerindeki aşamaları belirleme ve yaşadıkları zorlukları teşhis etme yeteneğidir. Seminerler ayrıca teorik ve pratik aşamalar arasında uygun bir dengenin sağlanması amacıyla, 3 ders teorik, 3 ders uygulamalı, 4 ders teorik ve uygulamalı, 3 ders sunumlar ve son ders tüm çalışmanın değerlendirilmesi şeklinde beş bölüme ayrılmıştır. Çalışmada araştırmacılardan birinin bu konudaki tecrübelerinden dolayı işbirlikli öğrenme alanının öğretim stratejileri (düşün-eşleş-paylaş, jigsaw gibi) kullanılmıştır. Bu kapsamda seminerin ilk dersinde öğretmen adayları beşer kişilik 6 gruba ayrılarak tüm dönem boyunca birlikte çalışmaları sağlanmıştır. Ayrıca kurslar sırasında öğrenme ve anlama süreçlerinin nasıl geliştiğini ve temel problemlerinin neler olduğunu belirleyebilmek adına öğretmen adaylarından öğrenme günlüğü yazmaları istenmiştir. Araştırma sonucunda modelleme öğretimi için teori ve uygulama arasında bir dengenin kurulması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu doğrultuda içeriği değişmekle birlikte yukarıda belirtilen yeterliklere göre seminerler düzenlenmesinin uygun olduğu belirtilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının temel problemleri tespit edilmiştir. Bu problemler; modellemenin çeşitli yönlerini ve literatürdeki modelleme döngüleri arasındaki farkları anlamak, genel olarak modelleme döngüsünün aşamalarını ayırt etmek ve öğrencilerin modelleme süreçlerinin transkriptlerini analiz etmek, modelleme problemlerinin konu analizi ve bir problem kurarken özgün olabilmektir. Öğrencilerin bu zorluklar karşısında ilerleme kaydedebilmelerinin teori ile pratiği bağlantılı hale getirmeleriyle mümkün olabileceği belirtilmektedir.

Kaiser, Schwarz ve Tiedemann (2010) öğretmen adaylarının modelleme yeterlilikleri ile ilgili mesleki bilgilerini incelemişlerdir. Görüşme ve anket sonuçlarına dayanılarak öğretmen adaylarının yeterlilikleri; matematiksel alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve genel pedagoji bilgisi alanlarında değerlendirilmiştir. Çalışmaya, Hamburg Üniversitesi'nde düzenlenen seminerler kapsamında gönüllü olarak 80 matematik öğretmeni adayı katılmıştır. Bu öğretmen adaylarına modelleme ve gerçek yaşam örnekleri ile ilgili 3 soru, argümantasyon ve kanıt ile ilgili 3 soru, matematik öğretirken heterojenliğin nasıl ele alınacağı ile ilgili 1 soru olmak üzere toplam 7 sorudan oluşan anket uygulanmıştır. Daha sonra gönüllü olarak katılan 20 öğretmen adayı ile sorun odaklı görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Modelleme yeterlilikleri hakkında bilgi edinmek için, öğretmen adaylarına çeşitli mobil telefon ücretlerini karşılaştırmalarını ve özel koşulları (yoğun saatlerde ve diğer zamanlarda dakikada yapılan arama ücretleri) göz önünde bulundurarak bir oran önermelerini isteyen bir soru verilmiştir. Öğretmen adaylarından gösterilen modelleme döngüsüne atıfta bulunarak bir modelleme süreci yürütmeleri ve ne yaptıklarını açıklamaları istenmiştir. Ayrıca öğrencilerin yanlış çözümleri (aramaların süresine göre ağırlıklandırılmadığı vs.) verilerek analiz etmeleri istenmiştir. Görüşmeler yaklaşık 45-90 dakika sürmüştür ve başarısızlık ya da değerlendirme endişesinden kaçınmak için öğretim görevlileri yerine öğretmen adayları görüşmeleri gerçekleştirmiştir. Toplanan veriler içerik analizi yöntemine göre değerlendirilmiştir. Bu kapsamda matematik alan bilgisi okul matematik içeriği bilgisi ile sınırlıdır ve modellemeye odaklanmaktadır. Pedagojik alan bilgisi için, modelleme öğelerinin amaçları, olası ders planlama yöntemleri ve öğrencilerin kavram yanılgılarını belirleme yeterlilikleri hakkında bilgi edinilmiştir. Genel pedagojik bilgi için, motivasyonel yönler ve heterojenliğin nasıl ele alındığına dair bilgiler göz önünde bulundurulmuştur. Çalışmanın sonuçları, modelleme ve pedagojik değeri hakkında kapsamlı bir anlayış geliştirmek için gelecekteki öğretmenlerin matematik alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve genel pedagojide uygun bilgi ve yeterliliklere ihtiyaç duyduklarını göstermektedir. Çalışmada ayrıca pedagojik alan bilgisinin öğretmenlerin mesleki bilgisinin gelişiminde oynadığı merkezi rol vurgulanmaktadır. Diğer taraftan öğretmen adaylarından üçü ile yapılan görüşmeler aynı seminere katılmalarına rağmen bilgileri açısından önemli farklılıklar olduğunu göstermektedir. Özellikle, alan bilgisinin öğretmen adayı tarafından seçilen çalışma programına (üniversite, lise, ilköğretim, özel eğitim vs.) bağlı olduğu da ortaya çıkmıştır. Bu doğrultuda katılımcılar modelleme problemlerinin karmaşıklık düzeyinin ve gerçek yaşam bağlamının kapsamının öğrencilerin seviyesine göre düzenlenmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Küçük örneklem büyüklüğü nedeniyle çalışma sonuçlarının genelleştirilmesi amaçlanmasa ve mümkün değilse de sonuçlar modelleme ile ilgili öğretmen adaylarının mesleki bilgi birikiminin olası yapılarına dair içgörü sağlamaktadır.

Özetle, öğretmen ve öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde modelleme yeterliklerini inceleyen çalışmalarda katılımcıların çoğunlukla gerekli değişkenleri seçerek matematiksel bir model oluşturmada ve oluşturdukları bu modelleri gerçek yaşam durumunda yorumlamada yetersiz kaldıkları görülmüştür. Model oluşturma etkinliklerinde kesin bir cevabın olmaması, birden fazla çözüm yolunun olması, sürekli varsayımlarda bulunmak zorunda kalmaları ve farklı matematiksel konular arasında ilişki kurulmasının gerekliliği katılımcıların modelleme sürecinde yaşadıkları temel sıkıntılar arasında gösterilmektedir. Bu doğrultuda ilgili çalışmalarda öğretmen ve öğretmen adaylarının tek bir cevabı olan, belirli kalıp ifadelerde bireyi yönlendiren geleneksel problem çözme alışkanlıklarının problem çözme ve modelleme becerilerini olumsuz etkilediği görülmektedir. Ayrıca bu çalışmalarda katılımcıların çoğunlukla aritmetiksel ya da cebirsel modeller kullanma eğiliminde oldukları ve grafiksel gösterimler gibi farklı model türlerinden yeterince yararlanamadıkları belirlenmiştir.

Diğer taraftan ders programındaki konu ve kavramları modellemeye ilişkin çalışmalarda öğretmen ve öğretmen adaylarının model algılarının çoğunlukla sayma pulları, kesir kartları, cebir karoları gibi görsellik içeren şekillere kısıtlanmış olduğu ve modelleri değişkenler, fonksiyonlar gibi matematiksel yapılar olarak düşünemedikleri görülmüştür. Çalışmalardan elde edilen bulgulardan katılımcıların model ve modelleme kavramlarını birbirine karıştırdıkları ve modelleme hakkında tam olarak bilgi sahibi olmadıkları anlaşılmaktadır. İlgili araştırmalarda katılımcılar model kullanımının bilişsel ve duyuşsal kazanımlarına ilişkin pozitif düşüncelere sahip olmakla birlikte öğretim programının yoğun olması ve modellemenin zaman alıcı olmasından dolayı derslerde yeterince yer verilemediğini belirtmişlerdir. Ayrıca öğretmenlerin çoğunlukla programda verilen örnek ve modellere bağlı kaldıkları ve yeni modeller üretme arayışında olmadıkları görülmüştür. Yine bu çalışmalarda katılımcıların ders kitaplarında verilen modelleri anlama, yorumlama ve sembolik olarak verilen matematiksel durumları modellemede zorlandıkları belirtilmiştir. Özetle matematik konularını gerçek yaşamla ilişkilendirememe, etkinlikleri anlayamama, etkinlikleri hazırlama ve uygulamada kendilerini yetersiz hissetme gibi sıkıntılar, öğretmenlerin modelleme etkinliklerini öğretim sürecinde kullanmasının önündeki önemli engeller olarak görülmektedir. Öğrencilerin matematiksel modellerin geliştirilme sürecine dâhil edebilmek için öğretmenin sınıf ortamında yeni roller üstlenmesi gerektiği ve modelleme öğretimi için teori ve uygulama arasında bir dengenin kurulması gerektiği vurgulanmaktadır.

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Araştırma Modeli

Araştırmada, daha önce belirtildiği üzere öğretmen adaylarının modelleme yeterliklerinin ortaya çıkarılması hedeflenmektedir. Bunun için öğretmen adaylarının rutin olmayan ve gerçek yaşam problemlerinin çözümü için model üretmedeki başarıları ile matematik ders programlarında yer alan konu ve kavramların izahı için model üretmedeki başarılarının karşılaştırılarak araştırılması ve geliştirdikleri modellerin geçerliğinin detaylı olarak incelenmesi amaçlanmaktadır. Öğretmen adaylarının model üretmedeki başarılarının değerlendirilebilmesi, ortaya koydukları modellerin oluşum sürecinin ve katılımcıların bu süreçteki düşüncelerinin derinlemesine çalışılmasını gerektirdiği için bu araştırmada olguları ve olayları derinlemesine inceleme fırsatı sunan nitel araştırma yaklaşımı tercih edilmiştir.

Nitel araştırma, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama araçlarının kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamında gerçekçi ve bütüncül bir yaklaşımla ortaya konmasına yönelik bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Nicel yaklaşımda araştırmanın amacı, araştırma sonucunda elde edilen bulgulara göre genelleme yapmak iken nitel yaklaşımda amaç elde edilen bulgulara göre derinlemesine açıklama yapmaktır (Bilgili, 2008). Nitel araştırmalar, nicel araştırmalarda olduğu gibi sayılar yoluyla sonuçlara ulaşmaya çalışmaz; araştırılan konu ile ilgili okuyucuya betimsel, gerçekçi bir resim sunmaya çalışır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Eldeki tez çalışmasının amacı öğretmen adaylarının modelleme yeterliklerini ve bu süreçte sergiledikleri düşüncelerini ayrıntılı olarak incelemektir. Bu nedenle araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (örnek olay) metodunun kullanılmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Yıldırım ve Şimşek (2016) durum çalışmasını ‘Neden’, ‘Niçin’ ve ‘Nasıl’ soruları odağında bir konu ya da olayı derinlemesine inceleme ve araştırma fırsatı sunan bir yöntem olarak tanımlamaktadır. Yin (1984) ise durum çalışmasını, güncel bir olguyu kendi gerçekliği içinde araştıran, olgu ve içinde yer aldığı bağlam arasındaki sınırların kesin hatlarla çizilemediği ve birden fazla veri kaynağının kullanımının gerekli olduğu durumlarda takip edilen bir araştırma yöntemi olarak açıklamaktadır. Bu tez çalışmasında da öğretmen adaylarının ürettikleri modellerin verilen problemin çözümüne veya eldeki konu ya da kavramın izahına uygun olup olmaması, geçerliliği, hangi alanla alakalı model üretmede daha başarılı oldukları ve bu süreçte sergiledikleri düşüncelerin detaylı olarak incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaca ulaşmak için açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınav ve görüşme türünden birden fazla veri kaynağının kullanılması ve araştırma konusunun kendi bağlamında ve katılımcıların perspektifinden incelenmesi gerekmektedir. Tüm bu nedenlerle araştırmada durum (örnek olay) çalışması metodunun kullanılmasının uygun olacağı düşünülmüştür.

3.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu 2017-2018 öğretim yılının bahar döneminde Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim gören 70’i üçüncü sınıf ve 69’u dördüncü sınıf öğrencisi olmak üzere toplam 139 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Üçüncü ve dördüncü sınıf öğrencilerinin görmüş oldukları dersler açısından alt sınıflara göre daha donanımlı oldukları düşünülmüştür. Alan derslerinin yanı sıra almış oldukları Öğretim İlke ve Yöntemleri, Öğretim Teknolojisi ve Materyal Tasarımı, Özel Öğretim Yöntemleri I-II gibi derslerin modelleme konusunda öğretmen adaylarının bilgi ve deneyimlerini artırdığı söylenebilir. Ayrıca bu sınıf düzeylerindeki adayların mesleği icra etmeye yakın olmaları nedeniyle üzerinde araştırma yapılmasının öncelik arz ettiği düşünülmüştür.

Araştırmaya katılan 139 öğretmen adayına önce araştırma kapsamında belirlenen sorulardan oluşan yazılı sınavlar uygulanmıştır. Daha sonra yazılı sınav kâğıtlarının ön analizleri yapılmış ve öğretmen adaylarının sorulara ürettikleri modellerin geçerliği ve çeşitliliği de düşünülerek seçilen 9 öğretmen adayıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Mülakat yapılacak adaylar belirlenirken yazılı sınavdaki başarı durumları açısından 2 kişinin alt grupta, 5 kişinin orta grupta, 2 kişinin de üst grupta yer almasına dikkat edilmiştir. Böylece mülakatta çalışılan grubun heterojen bir yapı göstermesine çalışılmıştır. Bilimsel etik gereği araştırmada öğretmen adaylarının gerçek isimleri yerine kod adları kullanılmıştır.

3.3. Veri Toplama Araçları

Araştırma kapsamında veriler iki temel kaynaktan elde edilmiştir. Birinci veri kaynağı modellemeyle çözümü yapılabilen ve toplam 12 adet sorudan oluşan yazılı sınavı içermektedir. Yazılı sınav kendi içinde iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, çözümü modelleme gerektiren, rutin olmayan ve gerçek yaşamla alakalı 6 adet problem kullanılmıştır. Bu problemler matematik ile gerçek yaşam arasında bilgi transferi yapmaya imkân tanıyan, modelleme döngüsündeki zincirlerin birbirleriyle etkileşimli kullanılabilmesini gerektiren, model üzerinde çalışılırken daha genel sonuçlara ulaşmaya aracı olan ve farklı şekillerde modellenebilen sorular arasından seçilerek geliştirilmiştir. İkinci kısımda ise ortaokul matematik ders programı kapsamındaki konu ve kavramlar ile alakalı modelleme yapmayı gerektiren 6 adet soruya yer verilmiştir. Bu soruların, bir bilginin mantığını izah etmek, bir konuyu ya da kavramı somutlaştırmak ve anlatımı etkili kılmak için uygun modellerin üretilmesine imkân tanıyan türden problemler olmasına özen gösterilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının farklı şekillerde modelleyebileceği sorular olmasına dikkat edilmiştir.

Araştırmada kullanılan soruların geçerlik ve güvenirliğinin sağlanması için ana çalışmadan önce 2017-2018 öğretim yılında Ahi Evran Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü öğrencilerinden 77 öğretmen adayı üzerinde bir pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışmanın sonuçları ve uzman görüşleri dikkate alınarak araştırmada kullanılan sorularda dil ve içerik açılardan gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Dil ve anlatım yönünden anlaşılma güçlüğü yaratan bölümler çıkarılarak daha net bir anlatımla sorular yeniden ifade edilmiştir. Kimi sorular ise ölçekten tümden çıkarılmıştır. Örneğin, pilot çalışmada öğretmen adayları tarafından farklı şekillerde anlaşılan aşağıdaki *operatör sorusu* ölçekten çıkarılmış ve aynı nitelikte Pizza şirketi sorusuyla değiştirilmiştir.

Operatör Sorusu: A telefon şirketi kullanıcılarından aylık 12 TL sabit iletişim ücreti almakta ve ilave her bir dakikalık görüşme için 50 kuruşluk ücretlendirme yapmaktadır. B telefon şirketi ise aylık sabit iletişim ücretini 20 TL olarak belirleyip ilave görüşmelerin her bir dakikası için 25 kuruş ücret almaktadır. Bu şirketlerden hangisini tercih edersiniz ve niçin?

Pilot çalışmada, operatör sorusunun öğretmen adayları tarafından kullanım kotasını aşan her bir dakika için ekstra ücretlendirme uygulanacağı ve kota aşımı olmadığı sürece bu ücretin ödenmeyeceği gibi algılandığı fark edilmiştir. Bu nedenle, operatör sorusu yerine ana çalışma ölçeğinde Özgün'ün (2012) çalışmasında kullanılan, dolayısıyla geçerlik ve güvenirliği daha yüksek olduğu düşünülen aşağıdaki pizza şirketi sorusuna yer verilmiştir.

Pizza Şirketi Sorusu: Yerel gazetede pizza dağıtım işinde çalışmak isteyenler için bir ilan yer almaktadır. A şirketi her çalışanına aylık 120 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,2 TL prim vermektedir. B şirketi ise çalışanına aylık 48 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,8 TL prim vermektedir. Sizce bu şirketlerden hangisinde çalışmak daha kârlıdır? Neden? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz.

Yazılı sınavda, rutin olmayan ve gerçek yaşamla alakalı 6 problemden oluşan ilk kısım 139 öğretmen adayına eş zamanlı olarak ve yaklaşık bir saat süreyle uygulanmıştır. Ders kitaplarındaki konu ve kavramların izahına yönelik 6 sorudan oluşan ikinci kısım ise bir hafta sonra yine aynı biçimde uygulanmıştır. Araştırmanın geçerliği ve güvenirliğini sağlamak adına yazılı sınava ek bir yönerge konularak sınav esnasında öğretmen adaylarının dikkat etmeleri gereken hususlar belirtilmiştir. Yapabiliyorlarsa ilgili problemleri farklı şekillerde modelleyerek çözmeleri istenmiştir. Ayrıca katılımcıların birbirlerini etkilememeleri için gerekli önlemler alınmıştır.

Nitel çalışmalarda geçerliği ve güvenirliği artırmanın bir yolu da çeşitlemedir. Gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi farklı yöntemlerle elde edilen verilerin birbirlerini teyit amacıyla kullanılması, ulaşılan sonuçların geçerliğini ve güvenirliğini arttırır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu nedenle eldeki tez çalışmasında da yazılı sınava ek olarak öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilerek verileri çeşitleme yoluna gidilmiştir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının modelleme sürecindeki düşüncelerinin açığa çıkartılması, üretilen modellerin geliştirilmesi ve çeşitlendirilmesi noktasında yazılı sınavın sınırlılığını aşmak amacıyla 9 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yürütülmüştür. Mülakata katılacak öğretmen adayları belirlenirken yazılı sınav kâğıtlarının ön analizleri yapılmış, üretilen modellerin geçerliği ve çeşitliliği dikkate alınarak başarı durumları açısından 2 kişi alt grupta, 5 kişi orta grupta, 2 kişi de üst grupta yer alacak şekilde toplam 9 aday tespit edilmiştir. Her bir katılımcıyla yapılan mülakat yaklaşık 60-90 dakika sürmüştür. Katılımcıların izni alınarak görüşmeler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Ayrıca düşüncelerini yazılı olarak da ifade edebilmeleri için katılımcılara kâğıt ve kalem temin edilmiştir.

Görüşmelerde, yazılı sınavda kullanılan sorular katılımcılara teker teker yöneltilmiş ve bu problem durumlarını modelleyerek çözmeleri istenmiştir. Konuşmanın akışı öğretmen adaylarının verdikleri cevaplara göre şekillenmiş ve yeni sorular yöneltilerek sürdürülmüştür. Görüşmelerde öğretmen adaylarına yöneltilen sorular eldeki sorunun kullanım amacına göre değişmekle birlikte aşağıdakilere benzer sorular yöneltilerek katılımcıların düşünce süreçlerine ulaşılmaya çalışılmıştır. Böylece, öğretmen adaylarının modelleme sürecinde zorlandığı noktaların belirlenmesi, işe koştukları düşüncenin tercih edilme nedenlerinin sorgulanması, kullandıkları modelin temel yapısal özelliklerinin farkında olup olmadıkları ve farklı yeni modeller geliştirip geliştiremedikleri gibi hususların aydınlatılmasına çalışılmıştır. Ayrıca araştırmacının yönelttiği deşeleyici sorularla öğretmen adaylarının varsa eğer ortaya koydukları modellerin eksik ya da sınırlı yönlerini fark ederek bunlar üzerinde gerekli revizyonları yapıp yapamadıkları anlaşılmaya çalışılmıştır.

-Kurduğunuz model çerçevesinde düşüncelerinizi açıklayabilir misiniz?

-Soruda verilen bilgileri okuyup zihninizde bir yapı oluştuğunda bu modeli oluşturmanız gerektiğini hissettiniz mi? Yoksa verileri görsele aktarıp model üzerinde çalışırken matematiksel ilişkileri gördüğünüzde mi bu modeli kurmaya karar verdiniz?

-Modeliniz tüm durumları temsil etme konusunda yeterli midir?

-Kullandığınız modelin sınırlılıkları var mıdır?

-Bu problem durumunu farklı şekilde modelleyebilir misiniz?

-Görsel bir model kullanmadan da soruyu çözebilir miydiniz? Görsel model sorunun anlaşılmasını kolaylaştırmakta mıdır?

-Cebirsel model kullanmadan da çözüm yapabilir miydiniz?

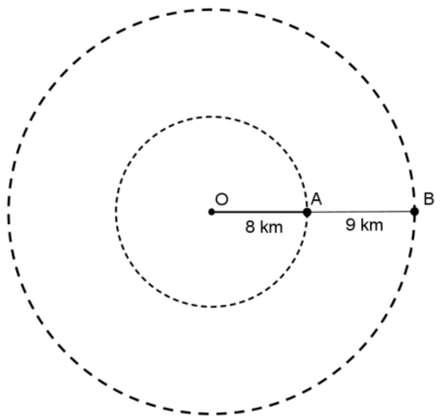
3.3.1. Araştırma Kapsamında Kullanılan Sorular

Araştırma kapsamında öğretmen adaylarına modelleme yeterliklerini incelemek amacıyla rutin olmayan ve gerçek yaşamla alakalı 6 tane ve ders programlarındaki konu ve kavramlarla alakalı 6 tane olmak üzere toplam 12 tane soru yöneltilmiştir. Aşağıda yazılı sınavın ilk kısmında yer alan ve rutin olmayan ve gerçek yaşam problemleri amaçlarına göre tanıtılmıştır.

3.3.1.1. Rutin Olmayan Problemler

1. **Okul Sorusu:** Burcu ve Ali aynı okula gitmektedirler. Burcu'nun evi okula 17 km, Ali'nin evi ise okula 8 km uzaklıktadır. Burcu ile Ali'nin evleri arasındaki uzaklık ne kadar olabilir? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Treffers ve De Moor'dan (1990) aktaran Verschaffel, De Corte ve Borghart'dan (1997) uyarlanmıştır].

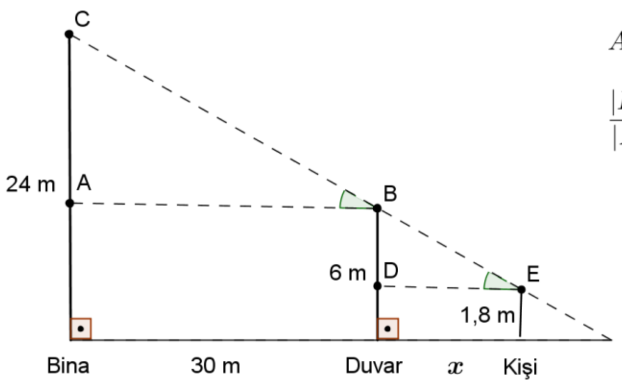
Bu problem katılımcıların evlerin konumuyla alakalı tüm durumları temsil edebilen ve genel çıkarımlarda bulunmaya yardımcı bir model üretmedeki yeterliklerini incelemek amacıyla kullanılmıştır. Katılımcılar bu soruda evleri okulun aynı tarafına ya da farklı tarafına yerleştirerek doğrusal bir yapıda model üretebilirler. Kimileri ise okul ile evler arasındaki konumlanmayı üçgen biçiminde temsil etmeyi deneyebilirler. Evler arasındaki uzaklıkla alakalı sayısal bir sonuç bulmayı amaçlayan bu yaklaşımların sorunun çözümü için uygun olduğu düşünülebilir. Ancak katılımcılar okulu merkeze alarak evleri hareket ettirdiklerinde konumlarının çembersel bir yapı oluşturacağını fark ettiklerinde gerçeği daha iyi yansıtan geçerli bir model üretebilirler.



Şekil 10. Okul sorusunun görsel olarak modellenmesi

2. **Bina Sorusu:** 24 metre yüksekliğindeki bir binanın, 30 metre doğusunda 6 metre yüksekliğinde bir duvar bulunmaktadır. 1,8 metre göz seviyesinden bakan bir kişinin binanın tepesini görebilmesi için duvarın doğusunda **en az** kaç metre uzaklıkta durması gerekir? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Nancarrow' dan (2004) uyarlanmıştır].

Bu soru, gerçek yaşamla alakalı bir durumun uygun görsel çizimler ya da sembollerle matematiğe aktarılmasını ve bu modeller yardımıyla doğru matematiksel ilişkiler kurularak çözüme ulaşılmasını gerektirmektedir. Öğretmen adayları bu sorunun yönergesine uygun görsel çizimler yapabilirler; ancak gerçek yaşamdan matematiğe geçişte, yani soruyu matematik diliyle ifade etmede sıkıntı yaşayabilirler. Diğer bir ifadeyle bina, duvar ve kişi aralarındaki uzaklıkları dikkate alarak geçerli bir görsel model ortaya koyabilirler, ancak bu modelin elemanları arasındaki matematiksel ilişkileri oluşturamazlarsa uygun orantıyı ya da denklemi yazamayabilirler.



$$ABC \approx DEB$$

$$\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

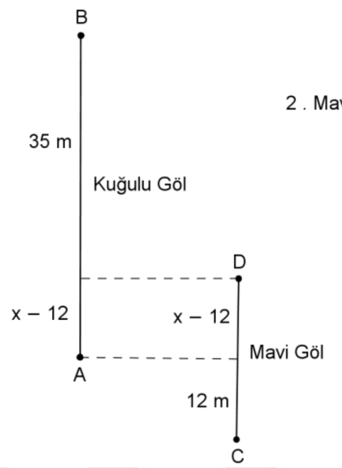
$$\frac{4,2}{18} = \frac{x}{30}$$

$$x = 7m$$

Şekil 11. Bina sorusunun görsel ve sembolik modeli

3. **Göl Sorusu:** Kuğulu gölün yüzeyi, Mavi gölün yüzeyinden 35 metre yukarıdadır. Kuğulu gölün derinliği, Mavi gölün derinliğinin iki katıdır. Kuğulu gölün dibi (tabanı), Mavi gölün dibinden (tabanından) 12 metre daha yukarıda olduğuna göre Mavi gölün derinliği ne kadardır? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Nancarrow'dan (2004) uyarlanmıştır].

Göl sorusu, bir önceki soruda olduğu gibi gerçek yaşamdan bir durumun modellenmesini ve bu model üzerinden yapılacak çıkarımların matematiksel dile doğru bir şekilde aktarılmasını gerektirmektedir. Katılımcılar yine sadece problemin hikâyesine uygun çizimler yapmakla kalabilirler ve bu modeller üzerinden değişkenler arasındaki ilişkileri doğru kuramadıkları için matematiğe geçişte sıkıntı yaşayabilirler. Yani gölleri konumlarına uygun biçimde resmedebilirler ama yüzey, taban ve derinlikleri arasındaki ilişkileri doğru bir şekilde kurgulayıp uygun biçimde matematiksel dile aktaramayabilirler. Bir önceki sorudan farkı ise sorunun çözümünde farklı modellerin (yani görsel ve sembolik, sadece sembolik ya da sadece aritmetiksel vb.) kullanılabilir olmasıdır. Bu soru aşağıdaki gibi görsel ve sembolik olarak modellenebilir:



2 . Mavi Gölün Derinliği = Kuğulu Gölün Derinliği

$$2 \cdot x = (x - 12) + 35$$
$$2x = x + 23$$
$$x = 23 \text{ m}$$

Şekil 12. Göl sorusunun görsel ve sembolik modeli

Sadece sembolik modeli tercih eden kimi öğretmen adayları ise göllerden birini referans alarak yüzeyine ‘y’ ve tabanına ‘t’ gibi değişkenler atadıktan sonra diğer gölün yüzeyi ile tabanını bu değişkenler cinsinden ifade edebilir. Buradan göllerin derinlikleri arasındaki ilişkiye uygun yazdıkları denklemin çözümünden sonuca gidebilirler.

Kuğulu gölün yüzeyi : y + 35   Mavi gölün yüzeyi : y
Kuğulu gölün tabanı : t + 12   Mavi gölün tabanı : t

Kuğulu Gölün Derinliği = 2 . Mavi Gölün Derinliği

$$(y + 35) - (t + 12) = 2 \cdot (y - t)$$
$$y + 35 - t - 12 = 2 \cdot (y - t)$$
$$(y - t) + 23 = 2 \cdot (y - t)$$
$$23 = y - t$$

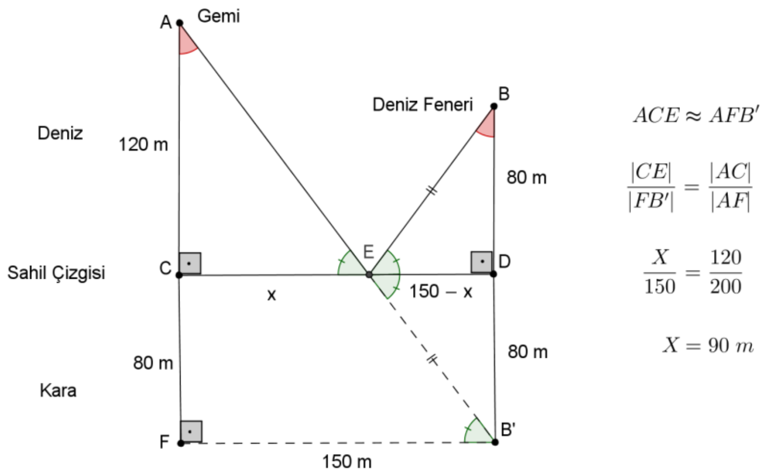
Şekil 13. Göl sorusunun sembolik modeli

Diğer taraftan göllerin tabanları aynı hizaya getirildiğinde yüzeyleri arasındaki 35 metrelik farkın 23 metreye düşeceği ve göllerden biri diğerinin iki katı olduğu için bu farkın direk küçük gölün derinliği olacağını düşünerek sadece aritmetiksel bir model de kurabilirler.

4. **Gemi Sorusu:** Sahildeki bir C noktasının 120 metre kuzeyinde ve denizdeki bir A noktasında korsan bir gemi bulunmaktadır. C noktasının 150 metre doğusunda ve yine sahilde (**kıyı üzerinde**) bir D noktası vardır. Denizdeki bir B noktasında bulunan deniz feneri ise D noktasının 80 metre kuzeyinde yer almaktadır. Korsan gemi bulunduğu noktadan hareket ederek önce sahile yanaşacak ve daha sonra deniz fenerine yolculuk yapacaktır. Bu yolculukta alınacak mesafenin **en kısa** olabilmesi için korsan geminin sahilde uğrayacağı yerin C noktasına olan uzaklığını tespit ediniz. Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Krulik ve Rudnick' den (1989) uyarlanmıştır].

Bu problem katılımcıların soruda verilen bilgileri bir çizime aktarmasından çok model üzerinde düşünerek rotayı kısaltması için geminin sahilde uğrayacağı noktanın tespit edilmesini gerektirmektedir. Bu açıdan önceki iki soruda olduğu gibi sadece gerçek yaşamla matematik arasındaki modelleme döngüsüyle sınırlı olmayıp okul sorusunda olduğu gibi model üzerinden genel çıkarımlara ulaşma amacı gütmektedir.

Öğretmen adayları bu soruda sahil üzerinde farklı noktalar (C ya da D gibi) seçerek bu noktalar için alınacak mesafeyi hesaplamayı ve sonuçları kıyaslamayı tercih edebilirler. Sorunun çözümünde geçerli bir model ortaya koyabilmek için bir yerden bir yere en kısa mesafenin doğrusal gidilerek elde edilebileceğinin farkında olunması gerekmektedir. Ancak karada ilerlenemeyeceği gibi bir gerçek de olduğu için öğretmen adaylarının doğrusal durumun bir benzerini yaratabilecekleri durumları düşünmeleri istenmektedir. Denizdeki noktalardan birinin sahil çizgisine göre simetriğini almaları ve denizdeki diğer nokta ile doğrusal olarak birleştirerek sahili kestiği noktayı bulmaları ya da geminin sahile yanaştığı rotanın sahille yaptığı açı ile sahilden ayrıldığı rotanın sahille yaptığı açının aynı olduğunu düşünerek çizecekleri üçgenler arasında benzerlik ilişkisi kurmaları gerekmektedir. Bahsedilen düşünceler çerçevesinde soru aşağıdaki biçimde modellenebilir:



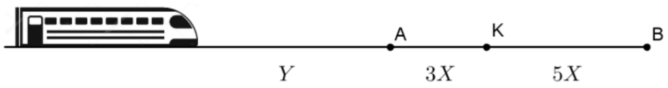
Şekil 14. Gemi sorusunun görsel ve sembolik modeli

Diğer taraftan katılımcılar geminin rotası için oluşturacakları dik üçgenlerde hipotenüs uzunluklarının toplamına ilişkin yazdıkları $\sqrt{120^2 + x^2} + \sqrt{80^2 + (150 - x)^2}$ ifadesinin alabileceği minimum değeri bu fonksiyonun 1.türevinin kökünden yararlanarak bulabilirler.

5. **Tren Sorusu:** Bir kadın, saatte 60 km hızla köprüye yaklaşan trenin sesini duyduğunda köprünün $\frac{3}{8}$ 'ünü geçmiş bulunmaktadır. Arkasından gelen treni fark ettiği anda köprünün herhangi bir ucuna koşarsa kendini kurtarabilecektir. Buna göre kadının saatteki hızı **en az** kaç km olmalıdır? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Krulik ve Rudnick' den (1989) uyarlanmıştır].

Bu soruda köprünün uzunluğu ve trenin köprüye uzaklığı verilmemiştir. Dolayısıyla katılımcıların bahsi geçen bilinmeyenleri sınırlandırmaları ve bunlara ilişkin varsayımlarda bulunmaları gerekmektedir. Kimi öğretmen adayları bu soruda kadının ve trenin yerini görsel bir model üzerinde belirledikten sonra köprünün uzunluğuna ya da trenin köprüye uzaklığına sayısal değerler vererek bu değerler için kadının hızını bulmayı deneyebilirler. Kimileri ise sorunun hikâyesine uygun görsel çizimler yapsalar da süreler, hızlar ve alınan yollar arasında doğru ilişki kuramadıkları için matematiğe geçiş noktasında sıkıntı yaşayabilirler.

Problem durumunu temsil eden uygun bir model üretebilmek için öncelikle trenin köprüye belli mesafede yerleştirilmesi ve kadının her iki uçtan da kurtulma durumunun düşünülmesi gerekmektedir. Ayrıca bu durumlar birbirinden bağımsız olarak yorumlanmayıp köprünün her iki ucundan da kurtulabileceği ortak bir hız arandığının farkında olunmalıdır. Aynı zamanda katılımcıların kadının köprünün uç noktalarına en geç tren ile aynı anda gelmesi gerektiğini düşünmeleri ve süreler ile alınan yollar arasında uygun orantısal ilişkiyi kurmaları gerekmektedir. Öğretmen adayları bu soruyu görsel ve sembolik modellerden yararlanarak aşağıdaki gibi çözebilirler:



Kadının A noktasına koştuğunu varsayalım.

$$\frac{3X}{V} = \frac{Y}{60}$$

$$180.X = V.Y$$

Kadının B noktasına koştuğunu varsayalım.

$$\frac{5X}{V} = \frac{8X+Y}{60}$$

$$300.X = 8X.V + V.Y$$

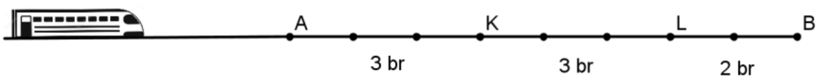
$$300.X = 8X.V + 180.X$$

$$120.X = 8X.V$$

$$V = 15km/h$$

Şekil 15. Tren sorusunun görsel ve sembolik modeli

Diğer taraftan katılımcılar görsel modeli daha etkin kullanarak ve sembolik modellere ihtiyaç duymadan aşağıdaki örnekte sunulduğu gibi cevaba ulaşabilirler:



Kadın 3 birim sola koşarak A noktasına geldiğinde tren de A noktasına geldi diye düşünelim.

Kadın 3 birim sağa koşarak L noktasına geldiğinde tren yine A noktasına gelmiş olur.

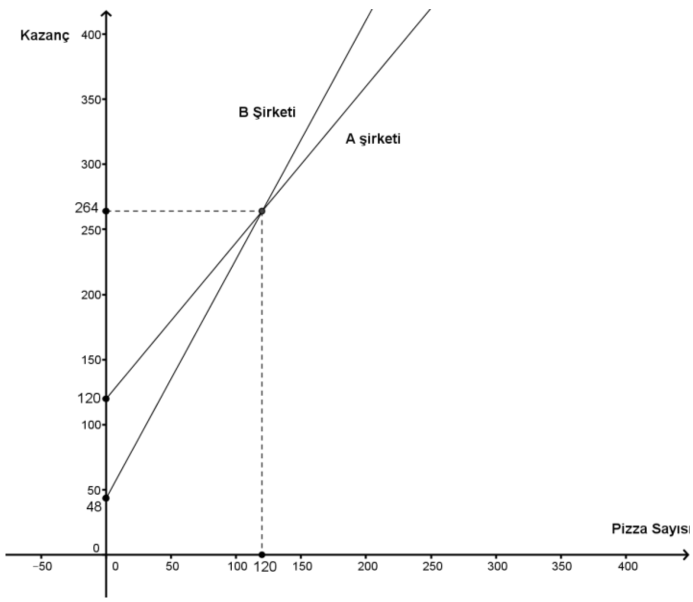
L noktasındaki kadının B noktasına ulaşmak için 2 birimlik yolu kalırken,
A noktasındaki trenin B noktasına ulaşmak için 8 birimlik yolu olduğu için
Kadının hızı trenin hızının 1 / 4 ' ü kadar yani 15 km / h olsa yeterlidir.

Şekil 16. Tren sorusunun görsel ve aritmetiksel modeli

6. **Pizza Şirketi Sorusu:** Yerel gazetede pizza dağıtım işinde çalışmak isteyenler için bir ilan yer almaktadır. A şirketi her çalışanına aylık 120 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,2 TL prim vermektedir. B şirketi ise çalışanına aylık 48 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,8 TL prim vermektedir. Sizce bu şirketlerden hangisinde çalışmak daha kârlıdır? Neden? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Llinares ve Roig' den (2005) aktaran Özgün'den (2012) alınmıştır].

Pizza şirketi sorusu, katılımcıların farklı modeller üretmedeki yeterliklerini ortaya çıkarmayı hedeflemektedir. Bu soruda şirketlerin birinde maaşın diğerinde primin avantajlı olduğunun göz önünde tutulması; belirli bir pizza sayısına kadar maaşı fazla olan şirkette, bu pizza sayısından sonra ise primi fazla olan şirkette çalışmanın kârlı olacağının düşünülmesi gerekmektedir.

Geçerli bir model üretebilmek için bütüncül bir yaklaşım ortaya koymak ve kazançları tüm durumlar için değerlendirmek gereklidir. Katılımcılar bunun için maaşlar arasındaki 72 TL lik farkı primler arasındaki 0,6 TL lik farka oranlayarak kaç pizza satışında kazançların dengeleneceğini aritmetiksel modellerle yorumlayabilirler. Kazançları maaş ile primin toplamı olarak 120+1,2.x ve 48+1,8.x biçiminde cebirsel modellerle ifade ettikten sonra kaç pizza satışında kazançların eşitleneceğini görmek için denklem kurabilirler. Şirketlerin birinin kârlı olmaktan çıkıp diğer şirketin kârlı olmaya başladığı bu kritik değeri denklemin çözümünden bulduktan sonra bu değerden küçük ya da büyük olması durumunda kârlı şirketi ayrı ayrı ifade edebilirler. Diğer taraftan kazanç (y) ve pizza sayısı (x) değişkenleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi grafikle modelleyip inceleyebilirler.



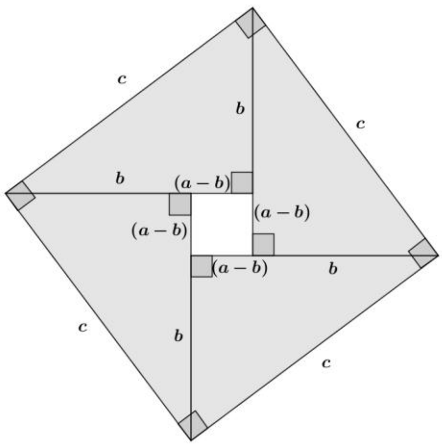
Şekil 17. Pizza şirketi sorusunun grafiksel modeli

3.3.1.2. Ders Programındaki Konu ve Kavramlarla Alakalı Sorular

Aşağıda ise yazılı sınavın ikinci kısmında kullanılan ve öğretmen adaylarının matematik ders programlarında yer alan konu ve kavramların izahı için model üretmedeki yeterliklerini inceleyen soruların kullanım amaçları ve nasıl modellenebilecekleri açıklanmıştır.

1. **Pisagor Bağıntısı Sorusu:** Pisagor teoreminde $a^2 + b^2 = c^2$ dir. Bu bilginin mantığını izah etmek için (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Bu soru öğretmen adaylarının Pisagor bağıntısının arka planındaki düşünceyi açıklamak için model üretmedeki yeterliklerini araştırmak için kullanılmıştır. Katılımcılar bunun için kare ve üçgen gibi şekillerin alan bağıntılarıyla ilişki kurarak veya geçmiş geometri bilgilerini sentezleyerek ve farklı biçimlerde kullanarak görsel modeller tasarlayabilirler. Bu modellerde görselliği açıklamak için sembolik izahlar da yer alabilir; ancak burada ana unsur oluşturulacak görsel modelin içeriği olduğundan sembolik modeller yardımcı unsur olarak kabul edilecektir.



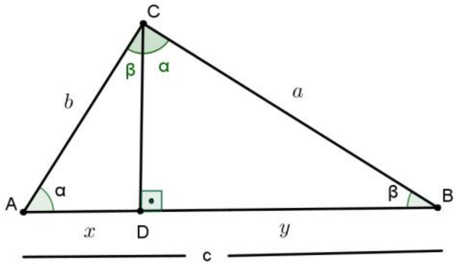
$$c^2 = 4.(\frac{a.b}{2}) + (a-b)^2$$

$$c^2 = 2.a.b + (a^2 - 2.a.b + b^2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Şekil 18. Pisagor bağıntısı sorusunun görsel modeli

Bu soru için, geçmiş bilgiler (Üçgende benzerlik, Öklid Teoremi, Cos Teoremi, vs.) kullanılarak aşağıdaki gibi farklı modeller de üretilebilir. Ancak, bu tür modellerde görsel çizimler konuyu temsil ve izahtan uzak olup yardımcı bir unsur olarak işlev görmektedir; bilginin mantığını açıklayan esas yapı görselliğin kendisi olmayıp sembolik modelin anlaşılmasında yardımcı unsur olarak kalmaktadır.



$$ACD \approx ABC \qquad BCD \approx BAC$$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} \qquad \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|BC|}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{b} \qquad \frac{a}{c} = \frac{y}{a}$$

$$x = \frac{b^2}{c} \qquad y = \frac{a^2}{c}$$

$$x + y = \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c}$$

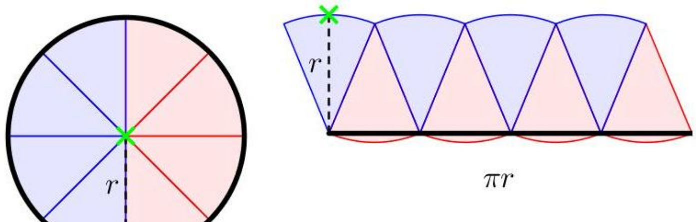
$$c = \frac{b^2 + a^2}{c}$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

Şekil 19. Pisagor bağıntısı sorusunun sembolik modeli

2. **Dairenin Alanı Sorusu:** Dairenin alanı $A = \pi r^2$ dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Bu soruda katılımcılardan dairenin alan bağıntısının neden πr^2 olduğunu açıklamaları istenmektedir. Öğretmen adayları bu bilgiyi açıklamak için daireyi belirli sayıda dilimlere ayırıp bu dilimleri dikdörtgensel bir yapı oluşturacak şekilde tekrar bir araya getirmek suretiyle bir model oluşturabilirler. Bu yaklaşımda dilim sayısının artarak sonsuza gitmesi limit mantığını gerektirse de modelin tasarlanış biçimi ve sembolik izaha çok ihtiyaç duyulmadan anlaşılabilmesi nedeniyle görsel bir model olarak kabul edilebilir.



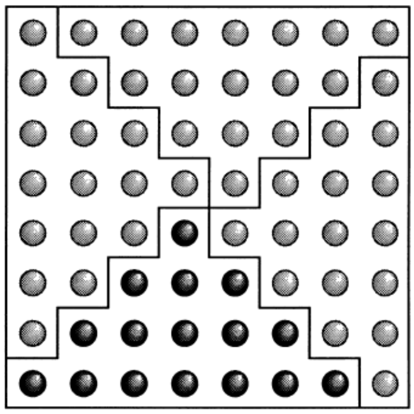
$$A = \pi r . r = \pi r^2$$

Şekil 20. Dairenin alanı sorusunun görsel modeli

Diğer taraftan katılımcılar daire içerisine bir çokgen çizerek, bu çokgenin alanını içerisinde oluşturdukları üçgenler yardımıyla hesaplamayı ve çokgenin kenar sayısı arttıkça alanının dairenin alanına yaklaşacağını düşünebilirler. Bu yaklaşım ise limit mantığının nasıl işletildiğini sembolik olarak açıklamayı gerektirdiği için sembolik model olarak alınabilir.

3. **Tek Sayıların Toplamı Sorusu:** Ardışık tek sayıların toplamı 1 + 3 + 5 + … + (2n-1) = n^2 dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Katılımcılar bu bilginin mantığını açıklamaya çalışırken n' nin belirli değerleri için eşitliğin doğru olduğunu göstermeyi tercih edebilirler. Aritmetiksel işlemlere dayalı bu düşünce birkaç özel durum hakkında bilgi verebilir, ancak bu şekilde yapılan bir modellemenin tüm durumları temsil etmesi söz konusu değildir. Bu soru için, sayıları temsilen belirli şekiller kullanarak ve bu şekillerin bir araya gelmesiyle oluşacak olan şeklin alanını hesaplama mantığını içeren görsel bir model tasarlanabilir. Örneğin, katılımcılar sayıları birimkareler ile temsil ettiklerinde her bir adımda eklenen birimkareleri öncekilerin etrafına L biçiminde iç içe yerleştirerek ve sürekli bir kare tasarlayarak toplam birimkare sayısını oluşan en büyük karenin alanı olarak göstermeye çalışabilirler. Diğer taraftan tek sayıları temsilen aldıkları bilyelerden oluşan dört tane şekil örüntüsünü bir kare oluşturacak biçimde aşağıdaki gibi birleştirebilirler.



$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

Şekil 21. Tek sayıların toplamı sorusunun görsel modeli (Nelsen, 1993)

Ayrıca geçmiş teorik bilgilerinden ve uygun formüllerden yararlanarak sembolik modeller kullanabilirler. Örneğin tüm sayıların toplamından çift sayıların toplamını çıkarabilirler, terim toplamı formülünü kullanabilirler ya da tümevarım yönteminden yararlanabilirler. Burada önemli olan seçilen yöntemlerden hangisinin pedagojiksel açıdan daha güçlü olduğudur.

$1+3+5+...+(2n-1)$ *toplamını bulurken terim toplamı formülünden yararlanalım.*

$$Terim\ sayısı = \frac{Son\ Terim - İlk\ Terim}{Artış\ Miktarı} + 1 \qquad Ortanca\ Terim = \frac{Son\ Terim + İlk\ Terim}{2}$$

$$Terim\ Sayısı = \frac{(2n-1)-1}{2} + 1 = n - 1 + 1 = n \qquad Ortanca\ Terim = \frac{(2n-1)+1}{2} = n$$

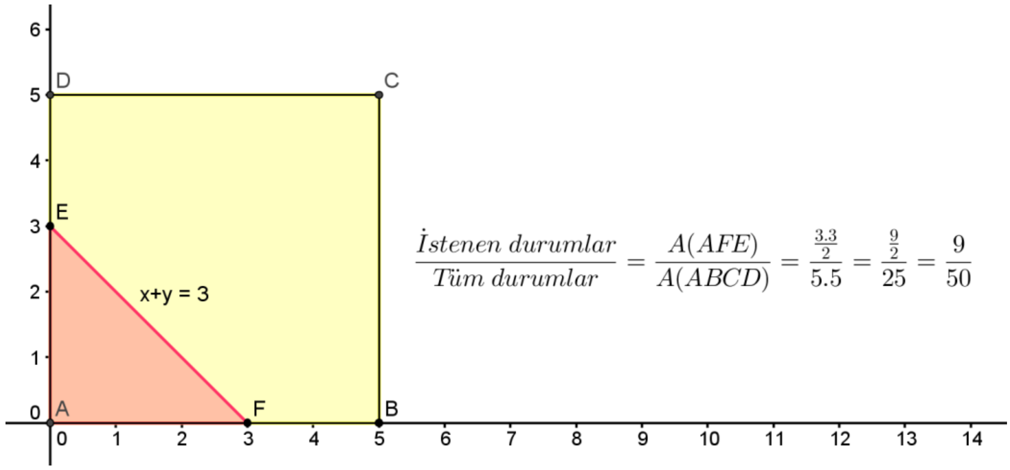
$$Terim\ Toplamı = Terim\ Sayısı \times Ortanca\ Terim \qquad Terim\ Toplamı = n \times n = n^2$$

Şekil 22. Tek sayıların toplamı sorusunun sembolik modeli

4. **Olasılık Sorusu:** 0 ile 5 arasından (0 ile 5 dâhil) rastgele seçilen iki reel sayının toplamının 3 ve 3'ten küçük olduğu durumlar söz konusudur. Söz konusu bu durumların olasılığını hesaplamada yararlanabileceğiniz matematiksel bir model oluşturunuz.

Olasılık sorusu olarak adlandırılan bu soru öğretmen adaylarının söz konusu tüm sayı çiftlerini bir model yardımıyla temsil etmelerini ve buradan çıkarımlar yaparak olasılık hesabına geçebilmelerini amaçlamaktadır. Katılımcılar bu soruda sadece toplamları 3 ve 3'ten küçük olacak şekilde belirli doğal sayı ya da rasyonel sayı çiftleri seçmekle kalabilirler. Kimi öğretmen adayları ise buldukları örnek durumlar arasında ilişki kurabilmek için sistematik bir tablo oluşturabilirler. Ancak öğretmen adaylarının geçerli model üretebilmeleri için reel sayı olarak bu aralıktaki sayı yoğunluğunun farkına varmaları ve sayıları birbirinden bağımsız seçebilmek için koordinat sistemi ile çalışmaları gerektiğini düşünmeleri gerekmektedir.

Ayrıca bu modelde seçilebilen sonsuz tane sayı çiftini; toplamın 3'e eşit olma durumunda x+y=3 doğrusu ile, toplamın 3'ten küçük olması durumunda bu doğrunun altında ve eksenler arasında kalan üçgenin alanı ile ve olası tüm durumları da bir karenin alanı ile temsil ederek kritik sınırları doğru tespit etmeleri önem arz etmektedir. Bu aşamadan sonra oluşan üçgenin ve karenin alanı arasında *istenen durumlar/tüm durumlar* ilişkisi kurarak olasılık hesaplamasına geçmeleri beklenmektedir.

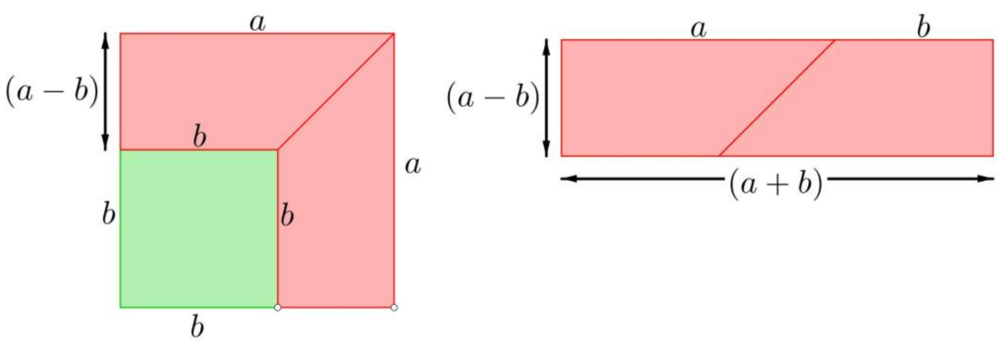


$$\frac{\text{İstenen durumlar}}{\text{Tüm durumlar}} = \frac{A(AFE)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{3.3}{2}}{5.5} = \frac{\frac{9}{2}}{25} = \frac{9}{50}$$

Şekil 23. Olasılık sorusunun grafiksel modeli

5. **İki Kare Farkı Özdeşliği Sorusu:** İki kare farkı özdeşliğinde a^2-b^2 = (a-b)·(a+b) dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Bu soruda öğretmen adaylarından a^2-b^2 nin neden (a-b)·(a+b) olduğunu açıklamaları beklenmektedir. Katılımcılar bu soruyu önceki sorularda olduğu gibi farklı biçimlerde (görsel, sembolik gibi) modelleyebilirler. Sınırlı bir düşünceye sahip olan öğretmen adayları a' ya ve b' ye değer vererek bu değerler için eşitliğin doğru olduğunu göstermeye çalışabilirler. Daha genel bir model üretmeye çalışan katılımcılar ise bu bilginin mantığını izah ederken a^2 ve b^2 yi iki farklı karenin alanı ile ilişkilendirerek a^2 - b^2 yi büyük bir karenin içerisinden küçük bir karenin çıkarılması sonucu kalan alan ile temsil edebilirler. Daha sonra kalan şekli ya iki yamuk ya da iki dikdörtgen oluşturacak biçimde keserek oluşan parçaları tekrardan bir araya getirebilirler. Bu şekilde kısa kenarı (a-b), uzun kenarı (a+b) olan bir dikdörtgen elde ederek alanın iki kenarın çarpımı olduğunu görsel bir model üzerinden gösterebilirler.



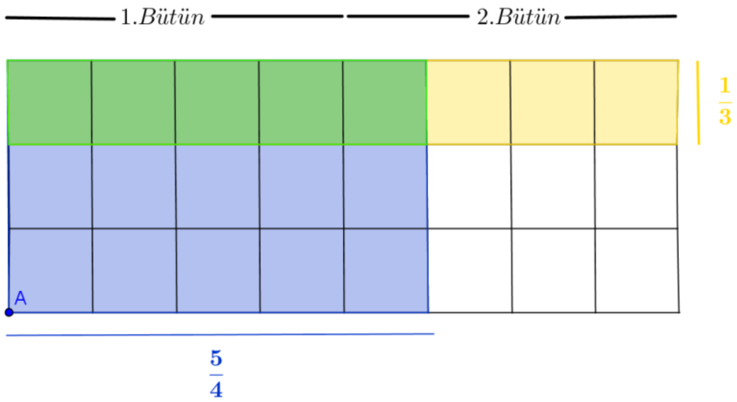
Şekil 24. İki kare farkı özdeşliği sorusunun görsel modeli

Diğer taraftan büyük kareden küçük kare çıkarıldıktan sonra kalan şekli iki ya da üç parçaya ayırarak bu parçaların alanları toplamını cebirsel işlemlerle bulabilirler. Ayrıca cebirsel ifadelerde çarpma yaparak ya da farklı özdeşliklerden yararlanarak sadece sembolik modeller de geliştirebilirler.

6. **Kesirlerde Çarpma Sorusu:** Kesirlerde çarpma işleminde $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{12}$dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Bu soru öğretmen adaylarının biri basit diğeri bileşik olmak üzere iki kesir arasındaki çarpma işleminin mantığını açıklayabilen bir model üretebilme yeterliklerini incelemek amacıyla sorulmuş olup iki basit kesir arasındaki çarpma işlemini izah etmeye göre daha karmaşık bir yapıda olduğu söylenebilir. Bu soruda katılımcılar $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{4}$ ve $\frac{5}{12}$ kesirlerini birbirinden bağımsız biçimde ve çarpma işleminin mantığını açıklamadan modellemeyi düşünebilirler. Bu bilginin arka planında yatan düşünceyi açıklamaya çalışan öğretmen adayları ise $\frac{5}{4}$ kesrini $\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$ şeklinde ayırdıktan sonra dağılma özelliğinden yararlanarak $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}$ işlemini $\frac{1}{3}\cdot(\frac{4}{4}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$ biçiminde iki ayrı çarpma işlemi olarak düşünebilirler. Daha sonra her bir çarpma işlemi için kesirlerin ifade ettiği yerleri farklı biçimlerde (birini yatay diğerini dikey bölme, sağa ya da sola eğik tarama, ayırt edici renklere boyama gibi) gösterdikten sonra iki modeli kesiştirerek ortak taranan bölgeleri alabilirler. Son aşamada ise ortak bölgelerin ifade ettiği kesirleri toplayarak işlemi tekrar birleştirebilirler.

Diğer taraftan katılımcılar bu çarpma işleminde kesirlerden birini modelledikten sonra o kısım üzerinde diğer kesri göstermeye çalışarak kesirleştirilmiş bir ifadenin yeniden kesirleştirilmesi olarak düşünebilirler. Bu biçimde dağılma kullanılan modelden farklı olarak tek bir yapı üzerinde çalışabilirler. Ayrıca $\frac{1}{3}$ ve $\frac{5}{4}$ kesirlerinin ifade ettikleri yerleri ayrı ayrı gösterdikten sonra kesişim bölgesini alarak aşağıdaki gibi modelleyebilirler.



Şekil 25. Kesirlerde çarpma sorusunun görsel modeli

3.4. Kuramsal Çerçeve ve Veri Analizi

Daha önceki bölümlerde de sunulduğu üzere literatürde model ve modelleme kavramlarının farklı şekillerde tanımlandığını görmekteyiz. Lesh ve Caylor (2007) modellemeyi mevcut kaynaklardan yola çıkarak bilinmeyen bir durumu (hedef kavram, problem durumu, vs.) anlaşılır hale getirmek için bir sistem oluşturma süreci olarak tanımlamaktadır. Dolayısıyla bilinmeyen durum bir problem olarak kabul edildiğinde modelleme bu probleme çözüm üretme süreci iken; bilinmeyen durum bir kavram ya da bilgi iken modelleme bu kavramın veya bilginin anlaşılır kılınma süreci olarak düşünülebilir. Eldeki çalışmada modelleme, rutin olmayan ve gerçek yaşam problemlerinin çözüm süreci ile ders programlarındaki konu ve kavramların izah süreci olmak üzere iki alanda ele alınmış ve öğretmen adaylarının bu alanlardaki başarılarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi hedeflenmiştir. Bu doğrultuda rutin olmayan ve gerçek yaşam problemleri ile ders programlarında yer alan konu ve kavramların izahına yönelik modelleme sorularından oluşan yazılı sınav ve 9 öğretmen adayı ile yürütülen yarı yapılandırılmış mülakatlar araştırmanın veri kaynaklarını oluşturmaktadır. Bu verilerin analizinde içerik ve söylem analizi metotları kullanılmıştır (Philips ve Hardy, 2002). Analiz sürecinde ise genel olarak alan yazın kısmında sunulan bilgilerden kuramsal çerçeve olarak yararlanılmıştır.

Lesh ve Doerr'a (2003) göre model, karmaşık sistemleri ve yapıları anlamak, açıklamak ve yorumlamak için zihinde var olan kavramsal yapılar ile bunların dış gösterim biçimlerinin bütünüdür. Bu genel tanımdan hareketle eldeki tez çalışmasında öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ve kavramları açıklamak amacıyla ortaya koydukları her türlü görsel çizimler, grafikler, tablolar, aritmetiksel veya cebirsel ifadeler model olarak değerlendirilmiştir.

Analiz sürecinin ilk aşamasında öğretmen adaylarının yazılı sınavda her bir soru için ürettiği matematiksel modeller ayrı ayrı incelenerek soruyu matematikselleştirme biçimleri tespit edilmiştir. Ardından modelleme sürecine yön veren kritik kavramlar ve düşünceler göz önüne alınarak yaptıkları çözüm ve izahlar için geliştirdikleri modeller kısa KOD'lar ile ifade edilmiştir. Dışarıdan hazır KOD kullanılmamış, KOD'ların tamamı ortamdan üretilmiştir. Örneğin, üretilen modeller matematikselleştirme biçimleri açısından tespit edilirken modelleme sürecinde kullanılan temsiller esas alınmış ve GÖR-MOD (Görsel Model), SEM-MOD (Sembolik Model), ARİT-MOD (Aritmetiksel Model) veya GÖR-SEM-MOD (Görsel-Sembolik Model) türünden KOD'lar kullanılmıştır. Analiz sürecinin bir sonraki aşamasında bu araçların eldeki durumu temsil etme noktasındaki uygunluğuna ve yeterliğine bakılmıştır. Her bir problem durumu için farklılık göstermekle birlikte üretilen modellerin yeterlik düzeyleri genel olarak GEÇ-MOD (Geçerli Model), GEL-GER-MOD (Geliştirilmesi Gereken Model), SIN-MOD (Sınırlı Model) ve GEÇSİZ-MOD (Geçersiz Model) olarak belirlenmiştir. Daha sonrasında ise aynı temayı içeren ve anlamsal açıdan yakın olan KOD'lar bir araya getirilerek daha genel kategoriler altında toplanmıştır. Araştırmanın geçerliğini ve güvenirliğini sağlamak adına analiz sürecinde yapılan bu işlemler birkaç kez tekrarlanmış ve şüpheye düşülen durumlarda danışman hoca ile tartışılarak ve uzman görüşlerine başvurularak oluşturulan KOD'lar ya da kategoriler üzerinde gerekli düzeltmeler yapılmıştır. En son, katılımcıların yazılı sınavda üretmiş oldukları modeller belirlenen kategorilere göre SPSS programına aktarılmış ve her bir kategorinin frekans ve yüzde hesapları yapılmıştır. Örnek teşkil etmesi açısından Okul sorusuna ve Tek Sayıların Toplamı sorusuna ilişkin verilerin nasıl incelendiği aşağıda kısaca açıklanacaktır. İlk olarak gerçek yaşamla alakalı rutin olmayan Okul sorusuna ilişkin verilerin analiz süreci sunulmuştur.

Okul sorusunda katılımcıların farklı modeller ürettikleri görülmüştür. Kimi öğrencilerin, evleri okulun aynı tarafına ve doğrusal biçimde yerleştirerek modeller oluşturdukları görülmüştür ki bu modeller EV-DOĞ-AYNI-TRF (Evler Doğrusal Aynı Tarafta) olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde evlerin okulun farklı taraflarına ve doğrusal biçimde yerleştirilerek oluşturulan modeller ise EV-DOĞ-FARK-TRF (Evler Doğrusal Farklı Tarafta) olarak kodlanmıştır. Diğer taraftan evlerin okul etrafında dik üçgen biçiminde yerleştirilerek oluşturulan modeller EV-ÜÇG-DİK-AÇI (Evler Üçgensel Dik Açı) olarak kodlanmıştır. Bunların kombinasyonlarından oluşan durumları içeren modeller ise; EV DOĞ AYNI TRF–ÜÇG DİK AÇI (Evler Doğrusal Aynı Tarafta ve Üçgensel Dik Açı), EV DOĞ FARK TRF–ÜÇG DİK AÇI (Evler Doğrusal Farklı Tarafta ve Üçgensel Dik Açı) ve EV DOĞ AYNI TRF – FARK TRF (Evler Doğrusal Aynı Tarafta ve Farklı Tarafta) biçimlerinde kodlanmıştır.

Okul sorusunda kimi öğretmen adaylarının ise yukarıda belirtilen çözümlerden farklı olarak daha esnek düşünmeye çalıştıkları görülmüştür. Bu katılımcılar evler arasında belirli sınır değerlerini aşmamak kaydıyla farklı mesafeler olabileceğini düşünmüşler ve buna uygun modeller ortaya koymuşlardır. Bu doğrultuda evlerin üçgen biçiminde yerleştirilerek evler arasındaki uzaklığın üçgen eşitsizliğine bağlı biçimde ifade edildiği çözümler ÜÇG-EŞİT-MOD (Üçgen Eşitsizliği Modeli) olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde evlerin üçgen biçiminde yerleştirilerek evler arasındaki uzaklığın Cosinüs teoremi ile hesaplanmaya çalışıldığı modeller COS-TEO-MOD (Cosinüs Teoremi Modeli) olarak kodlanmıştır. Son olarak evleri okul etrafında çembersel yapıda konumlandıran ve evler arasındaki mesafeye ilişkin daha esnek düşünmenin önünü açan modeller ise ÇEM-MOD (Çembersel Model) olarak kodlanmıştır.

Analizin bir sonraki aşamasında oluşturulan bu kodlar arasındaki anlamsal ilişkiler incelenmiş ve benzer düşünceyi yansıtan kodlar birleştirilerek daha genel kategoriler altında toplanmıştır. Örneğin EV-DOĞ-AYNI-TRF, EV-DOĞ-FARK-TRF, EV-ÜÇG-DİK-AÇI kodları ile bunların kendi arasındaki kombinasyonlarından oluşan yaklaşımlar; evler arasındaki uzaklığa ilişkin sabit bir sonuç bulmayı hedeflediğinden dolayı ve modelin tüm durumları temsil etme noktasında yetersiz kaldığı için **SINIRLI MODEL** kategorisinde birleştirilmiştir. Benzer şekilde ÜÇG-EŞİT-MOD ve COS-TEO-MOD kodları evlerin farklı konumlarda yerleştirilebileceği ve daha olasılıklı cevaplar çıkabileceği düşüncesini içermekle birlikte teoriksel bir bilginin sınırlılığında kaldıkları için **GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL** kategorisi altında toplanmıştır. Bu soruda ulaşılması beklenen en kapsamlı düşüncenin sergilendiği ve evler arasındaki uzaklığı hesaplamaktan çok tüm gerçek yaşam durumlarını temsil etme gayesi güden çözümleri içeren ÇEM-MOD kodu ise **GEÇERLİ MODEL** kategorisinde genelleştirilmiştir.

Yazılı sınavda öğretmen adaylarının okul sorusunun çözümünde kullandıkları modeller yukarıda belirtilen isimlerle (bazı sorular için alt kategorilerde üretilmiş ve bunlarda uygun şekillerde isimlendirilmişler) SPSS programına aktarılmış ve her bir kategoriye ait frekanslar ve yüzdeler hesaplanarak Tablo 3'te sunulmuştur:

Tablo 3. Okul sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE(%)
GEÇERLİ MODEL	3	2,2
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	22	15,8
SINIRLI MODEL	114	82,0
TOPLAM	139	100,0

Aşağıda ise katılımcıların ders programlarında yer alan konu ve kavramların izahı sürecinde modelleme yeterliklerinin incelenmesi amaçlayan durumlardan Tek Sayıların Toplamı sorusuna ilişkin yazılı sınav verilerinin nasıl incelendiği kısaca açıklanacaktır.

Tek sayıların toplamı sorusunda öğretmen adayları yine farklı yaklaşımlar sergilemişlerdir. Örneğin tek sayıların her birinin birimkare, üçgen ya da daire gibi şekiller ile temsil edildiği ve verilen sayı dizisi bir kez kullanılarak toplamın geometrik bir şeklin tüm alanı olarak gösterilmeye çalışıldığı modeller ÇİZ-TEK-DİZİ (Çizim Tek Dizi) olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde tek sayıların her birinin yine aynı şekiller ile temsil edildiği ve verilen sayı dizisi birden çok kez kullanılarak toplamın geometrik bir şeklin alanının bir parçası olarak gösterilmeye çalışıldığı modeller ÇİZ-ÇOK-DİZİ (Çizim Çok Dizi) biçiminde kodlanmıştır. Diğer taraftan sayıları temsilen kullandıkları şekilleri toplama işleminin mantığını açıklayacak biçimde bir araya getirmeden birbirinden bağımsız yapılar oluşturan öğrencilerin modelleri ÇİZ-BAĞ-YOK (Çizim Bağlantı Yok) olarak kodlanmıştır.

Kimi öğretmen adaylarının ise bu toplamı hesaplamaya çalışırken geçmişten getirdiği farklı teorik bilgilerinden yararlandığı görülmüştür. Örneğin sayı dizisini bir baştan bir de sondan alt alta yazarak Gauss metodunun mantığından yararlanmaya çalışan öğretmen adaylarının modelleri GAUSS-MET (Gauss Metodu) olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde bu eşitliğin doğruluğunu tümevarım yöntemi ile kanıtlamaya çalışan katılımcıların modelleri TÜM-VAR-MET (Tümevarım Metodu) biçiminde kodlanmıştır. Diğer taraftan tek sayıların toplamını bulmak için tüm sayıların toplamından çift sayıların toplamını çıkarmaya çalışan öğretmen adaylarının çözümleri TÜM SAY-ÇİFT SAY (Tüm Sayılar-Çift Sayılar) olarak kodlanmıştır. Son olarak ortanca terim ile terim sayısını çarparak terim toplamı formülünden yararlanan öğretmen adaylarının modelleri TER-TOP-FOR (Terim Toplamı Formülü) biçiminde kodlanmıştır.

Bazı öğretmen adaylarının ise bu eşitliğin doğruluğunu **n**'nin belirli değerleri için hesaplayarak göstermeye çalıştıkları görülmüştür. Örneğin **n**'nin seçilen bir değeri için oluşan sayı dizisini yazarak ve bu dizinin terimlerinin toplamını hesaplayarak eşitliğin doğruluğunu gösteren katılımcıların modelleri TEK-DEĞ-HES (Tek Değer Hesaplama) olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde **n**'nin birden çok değeri için oluşan sayı dizilerini ayrı ayrı yazarak ve her bir dizinin terimlerinin toplamını hesaplayarak eşitliklerin doğruluğunu birkaç kez göstermeye çalışan öğretmen adaylarının çözümleri ÇOK-DEĞ-HES (Çok Değer Hesaplama) biçiminde kodlanmıştır.

Analizin bir sonraki aşamasında belirlenen kodlar arasındaki anlamsal ilişkiler incelenerek birbirine yakın olan ya da benzer düşüncenin sergilendiği kodlar daha alt kategoriler altında birleştirilmiştir. Bu kapsamda verilen bilginin mantığını izah etmeye çalışırken kullandıkları temsiller dikkate alınarak saptamalar yapılmıştır. Çizimlerle oluşturulan şekiller içeren modeller GÖR-MOD (Görsel Modeller), eşitliğin doğruluğunu açıklamaya çalışırken değişkenlerin ya da sembollerin kullanıldığı modeller SEM-MOD (Sembolik Modeller) ve sayısal hesaplamaların ya da aritmetiksel işlemlerin kullanıldığı modeller ise ARİT-MOD (Aritmetiksel Modeller) olarak kodlanmış ve yine aynı adlarla alt kategoriler oluşturulmuştur.

Analizin en son aşamasında anlam bakımından yakın olan KOD'lar bir araya getirilerek genel kategoriler altında toplanmıştır. Ana kategoriler üretilen modellerin uygunluk ve geçerlikleri temelinde yapılmıştır. Bu doğrultuda sorudaki matematiksel ilişkilerin tam ve doğru olarak temsil edildiği modeller **GEÇERLİ MODELLER** olarak değerlendirilmiştir. Sorudaki matematiksel ilişkiler üzerinde kısıtlı bir düşüncenin sergilendiği ve tam sonuca ulaşmayan modeller **SINIRLI MODELLER** olarak alınmıştır. Sorudaki bilginin mantığını izah noktasında sınırlı modellere göre daha üst düzey düşüncenin sergilendiği ancak tam sonuca ulaşılamayan modeller **GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODELLER** olarak kabul edilmiştir. Sorudaki matematiksel ilişkilerin doğru biçimde temsil edilemediği veya mantık hatası içeren modeller ise **GEÇERSİZ MODELLER** kategorisinde toplanmıştır. Soruda herhangi bir model üretemeyen öğretmen adayları ise **YANIT YOK** kategorisinde değerlendirilmiştir. Tablo 4'te görüldüğü üzere kullanılan temsillerin türüne göre oluşturulan alt kategorilere ise genel kategoriler altında yer verilmiştir. Yazılı sınavda katılımcıların Tek sayıların toplamı sorusuna vermiş oldukları cevaplar yukarıda belirtilen kategori ve alt kategorilere göre SPSS programına aktarılmış ve frekansları ile yüzdeleri hesaplanarak Tablo 4'te sunulmuştur:

Tablo 4. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE (%)
GEÇERLİ MODEL	Görsel	21	15,1
	Sembolik	54	38,8
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Görsel	2	1,4
	Sembolik	3	2,2
SINIRLI MODEL	Aritmetiksel	12	8,6
GEÇERSİZ MODEL	Görsel	18	12,9
	Sembolik	15	10,8
YANIT YOK		14	10,1
TOPLAM		139	100,0

Diğer soruların analizinde de Okul sorusu ve Tek Sayıların Toplamı sorusundakine benzer yöntem ve yaklaşımlar takip edilmiştir. Ancak soruların yapısına ve kullanım amacına göre seçilen kodlar ile kategori isimlerinin değişiklik arz ettiğini belirtmek isteriz. Ayrıca bir soruda birden fazla modelin iç içe kullanılabildiği durumlar karşımıza çıkabilmektedir. Bu tip durumlarda baskın olan yaklaşıma göre kategoriler belirlenmeye çalışılmıştır. Örneğin görsel ve sembolik yaklaşımın birlikte kullanıldığı modellerde;

görsel model sembolik modelin anlaşılmasında yardımcı unsur ise ve sembolik izahlar olmadan görsel anlaşılamıyorsa bu modeller sembolik model kategorisinde değerlendirilmiştir. Benzer biçimde, sembolik model görsel modelin anlaşılmasında yardımcı unsur ise ve sembolik izaha çok gerek kalmadan görsel model eldeki durumun anlaşılmasına yeterli ise bu modeller görsel model kategorisinde değerlendirilmiştir.

Mülakat verilerinin analizinde de yazılı sınav verilerinin analizinde takip edilen yöntem ve yaklaşımlar benzer şekilde uygulanmıştır. Bu doğrultuda katılımcılarla görüşmelerden elde edilen veriler konuşmanın akışı içerisinde bir bütün olarak değerlendirilmiş olup söylem analizi metodu kullanılmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan mülakatlara ait ses kayıtları önce bilgisayara aktarılarak yazılı doküman haline dönüştürülmüştür. Oluşturulan bu dokümanlar birkaç kez okunarak öğretmen adaylarının modelleme sürecinde sergiledikleri düşünce ve takip ettikleri yöntemlere dair özetleyici notlar alınmıştır. Bir sonraki aşamada soruların çözümünde kullanılan modellere ilişkin yapılan saptamalar kısa kodlarla ifade edilmiştir. Analizin son aşamasında ise belirlenen kodlar daha genel kategoriler altında birleştirilmiştir. Yazılı sınav ve mülakat verilerinin analizinden elde edilen bulgular bir sonraki bölümde sunulmuştur. Bulguların anlaşılmasını kolaylaştırmak için her bir problem durumu için oluşturulan kategorilerle alakalı gerekli izahlar süreç içerisinde sürekli yapılacaktır.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde her bir soru için yazılı sınav ve mülakat verilerinin analizinden elde edilen bulgular peşi peşine sunulacaktır. Böylelikle verilerin daha akıcı bir düzen oluşturacağı ve birbirini bütünleyeceği düşünülmektedir. İlk olarak yazılı sınavın birinci aşamasında kullanılan ve öğretmen adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecinde model kullanımına ilişkin bulgular paylaşılacaktır. Sonrasında ise yazılı sınavın ikinci aşamasında kullanılan öğretmen adaylarının ders programlarında yer alan konu ve kavramların izahı için geliştirdikleri modellere ilişkin bulgulara yer verilecektir.

4.1. Rutin Olmayan Problemlere İlişkin Bulgular

Yazılı sınavın ilk bölümünde kullanılan problemler gerçek yaşamla ilişkili rutin olmayan altı adet sorudan oluşmakta idi. Bu soruların çözümünde öğretmen adaylarının gerçek yaşamdan matematiğe doğru bir geçiş yapmaları ve ürettikleri modeller üzerinde düşünerek anlamlı sonuçlara ulaşmaları beklenmektedir. Genel olarak bulgular katılımcıların sorunun hikâyesindeki gerçek yaşam durumunu çoğunlukla görsel bir model yardımıyla temsil etmeye çalıştıklarını, ancak ürettikleri modellerin elemanları arasındaki matematiksel ilişkileri doğru anlayıp matematiksel dile (algoritma yazma, denklem kurma, vs.) aktarmada sıkıntılar yaşadıklarını göstermektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının sonuç eksenli problem çözme alışkanlıklarının gerçek-yaşam durumları için esnek düşünmelerini engellediği ve akla ilk gelen prototip modeller dışında eldeki durumu temsile edecek nitelikte özgün modeller üretme konusunda yetersiz kaldıkları söylenebilir.

4.1.1. Okul Sorusuna İlişkin Bulgular

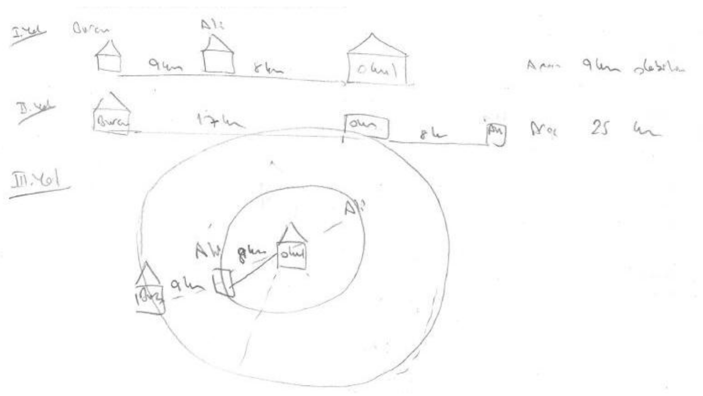
Burcu ve Ali aynı okula gitmektedirler. Burcu'nun evi okula 17 km, Ali'nin evi ise okula 8 km uzaklıktadır. Burcu ile Ali'nin evleri arasındaki uzaklık ne kadar olabilir? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Treffers ve De Moor'dan (1990) aktaran Verschaffel, De Corte ve Borghart'dan (1997) uyarlanmıştır].

Bu problemin çözümünde geçerli model üretebilmek için evlerin konumuna ilişkin birkaç özel durumla sınırlı kalınmayıp olası tüm durumları temsil edebilecek bütünlük ve genellikte durumların ortaya konulması gerekmektedir. Okulun merkez alınması ve evlerin okula uzaklıklarının sabit tutulması şartıyla evlerin okul etrafında iç içe iki çember üzerinde çok farklı şekillerde konumlandırılabileceğinin anlaşılması önem arz etmektedir. Ancak bulgular üretilen modellerin çok büyük oranda problemin içeriğini karşılamaktan uzak olduğunu göstermektedir. Tablo 5'te sunulduğu üzere yazılı sınav kâğıtlarının analizleri neticesinde katılımcıların üretmiş olduğu modeller *geçerli*, *geliştirilesi gereken* ve *sınırlı modeller* olmak üzere üç kategori altında toplanmıştır.

Tablo 5. Okul sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE(%)
GEÇERLİ MODEL	3	2,2
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	22	15,8
SINIRLI MODEL	114	82,0
TOPLAM	139	100,0

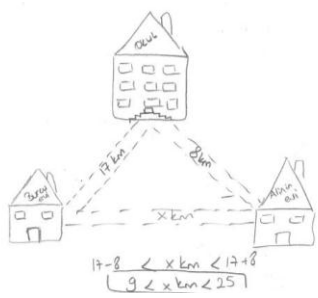
Araştırmaya katılan 139 öğretmen adayından sadece %2,2'si geçerli model üretirken, %15,8'i geliştirilmesi gereken model, %82'si ise sınırlı modeller üretebilmiştir. Evler arasındaki uzaklığa odaklanmak yerine evlerin konumları için mümkün olabilecek bütün durumları temsil yeteneğine sahip olan modeller *geçerli model* olarak kabul edilmiştir. Bu doğrultuda evlerin okul etrafında hareket ettikçe konumlarının iç içe iki çember oluşturacağını fark eden 3 öğretmen adayından birinin ürettiği geçerli model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 1. Okul sorusuna ilişkin çembersel yapıda geçerli model örneği [ÖA-75][1]

Yukarıdaki şekilde I. ve II. çözümlerde öğrencinin evleri okulun aynı ya da farklı taraflarında ancak doğrusal bir yapı oluşturacak biçimde yerleştirdiği görülmektedir. Sorunun çözümü için sadece iki özel durumu içeren bu modellerin sınırlı olduğu açıktır. III. çözümde ise okulu merkeze alarak evleri okul merkezli çembersel yapılar üzerinde hareket ettirmeye başladığı görülmektedir. Bu yaklaşımla evler arasındaki uzaklıkla alakalı sayısal bir cevap bulmak amacından ziyade modeli genelleme aracı olarak kullanmaya çalıştığı anlaşılmaktadır.

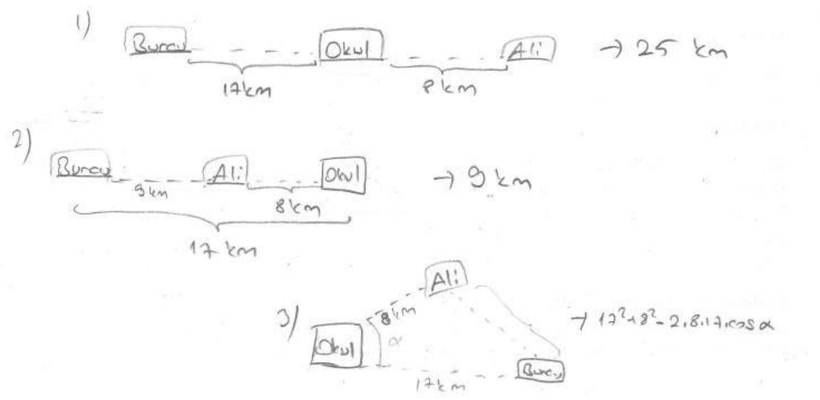
Aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere evlerin okul etrafındaki konumlarına ilişkin genellemeler yapmaya açık, ancak tüm durumları temsil etme yeteneğinden de yoksun olan modeller *geliştirilmesi gereken modeller* olarak değerlendirilmiştir. Bu alıntıdan öğretmen adayının evler arasındaki uzaklık için lineer modellerin dışında farklı durumlar oluşabileceğinin farkına vardığı anlaşılmaktadır.



Alıntı 2. Okul sorusuna ilişkin üçgensel yapıda geliştirilmesi gereken model örneği - I [ÖA-85]

[1] Yazılı sınavdaki 75 numaralı öğretmen adayını temsil etmektedir. Bundan sonra yazılı sınav kâğıtlarından yapılan alıntılarda bu format kullanılacaktır.

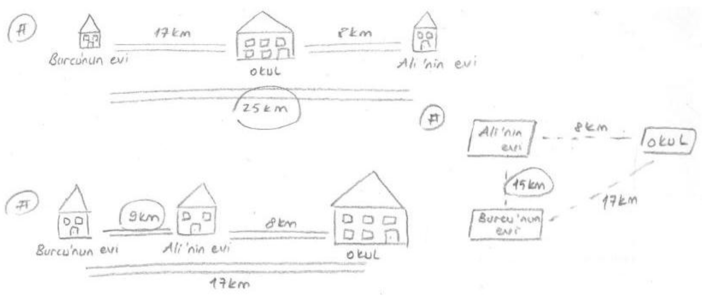
Ancak evler okul etrafında üçgensel bir yapıda konumlandırıldığı için üretilen model alternatif tüm durumlarla alakalı genelleme yapma noktasında yetersiz kalmaktadır. Geliştirilmesi gereken bir başka model örneği aşağıda verilmiştir. Bu modelde ise öğretmen adayının evler arasındaki uzaklığı açıya bağlı olarak ve Cos teoremi ile ifade etmeye çalıştığı görülmektedir.



Alıntı 3. Okul sorusuna ilişkin Cosinüs teoreminin kullanıldığı geliştirilmesi gereken model örneği - II [ÖA-6]

Bu öğretmen adayı ise evler arasındaki uzaklığı doğrusal durumlar üzerinde hesapladıktan sonra evler arasındaki açının değişebileceğini fark etmiş ve uzaklığın cos teoremi ile hesaplanabileceği gibi bir kanıya varmıştır. Ancak evlerin okul etrafındaki konumlarını üçgensel bir yapıya indirgeyerek çok sayıda diğer alternatifleri göz ardı etmiştir. Gerek bu gerekse bir önceki türden model üretenlerin evler arası uzaklıkla alakalı sayısal sonuçlara ulaşmayı hedefledikleri; ancak bu sonuçların farklılaşabildiği ve esnetilebildiği anlaşılmaktadır.

Evler arasındaki uzaklığı özel bir iki duruma indirgeyen modeller *sınırlı model* olarak kabul edilmiştir. Bu modellerin büyük çoğunluğu evleri aynı doğrultuda olacak şekilde okulun aynı veya ters tarafında konumlandıran modeller ile adayların geçmişten getirdikleri özel dik üçgen tipi (8-15-17 gibi) kullanılarak çözüm yapılan modelleri içermektedir. Sınırlı modellerdeki üçgensel yapının düşüncede esneklik içermediği ve hazır bilginin kullanıldığı özel bir üçgenle kısıtlı kaldığı söylenebilir. Buna ilişkin örnek bir model aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 4. Okul sorusuna ilişkin sınırlı bir model örneği [ÖA-1]

Alıntıda, öğretmen adayının iki tane lineer modelden sonra dik üçgen şeklinde (sağdaki model) bir model ortaya koyduğu ve evler arası uzaklığı 15 km olarak tespit ettiği görülmektedir. Bu modelin oluşturulmasında da temel düşüncenin evler arası uzaklığa ilişkin sayısal bir cevap bulma fikrini içerdiği; ancak bu cevapların geliştirilmesi gereken modellerdeki üçgensel yapılara göre çok spesifik olduğu ve bağlamın daha dar kaldığı anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlar, üretilen modellerin özellikleri ve modelleme sürecinde işe koşulan düşüncenin niteliğiyle alakalı çok daha aydınlatıcı bulgular ortaya koymuştur. Tablo 6'da görüldüğü üzere katılımcılardan 5 tanesi geçerli model, 1 tanesi geliştirilmesi gereken model ve 3 tanesi de sınırlı model üretebilmiştir.

Tablo 6. Okul sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model		X	X		X		X	X	
Geliştirilmesi Gereken Model	X								
Sınırlı Model				X		X			X

Mülakat sırasında kimi adaylar yazılı sınavda üretmiş oldukları modelleri geliştirip geçerli modeller üretirken kimileri de sınırlı model ya da geliştirilmesi gereken model düzeyinde kalmıştır. Örneğin, Aysun yazılı sınavda evleri okul etrafında doğrusal ve üçgensel (8-15-17 dik üçgeni) biçimlerde yerleştirerek evler arasındaki uzaklığı hesaplamaya çalıştığı sınırlı modeller ortaya koymuştu. Mülakat esnasında araştırmacının soruları üzerine oluşturduğu modelleri revize ederek geçerli modele ulaşmıştır. Aysun ile yapılan mülakattan bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Diyalog 1:

Aysun: İlk başta okulu ortaya alıp iki tarafa Burcu ve Ali' yi yerleştirmek geldi aklıma. Sonra Burcu' nun evi 17 km uzakta olduğu için okulu Burcu'dan en uzak noktaya koydum; Ali'yi de araya yerleştirdim. Sonra düşünürken özel üçgen mantıkları geldi aklıma, 8-15-17 dik üçgeni.

Araştırmacı: Peki farklı üçgenler olamaz mı? Sadece dik üçgen mi olmak zorunda?

Aysun: İlla ki 90^o olmaz ama ben burada bir cevap oluşturmak için yaptım.

Araştırmacı: Peki net bir sayısal sonuç bulmak önemli mi? Olayı biraz daha genelleştirmeye çalışsan; burada 90^o çok özel bir durum.

Aysun: Modelleyelim [yeni model oluşturuyor]…

Araştırmacı: Evet öyle bir model oluşturalım ki bize tüm durumları temsil etsin.

Aysun: [Üçgensel bir model oluşturup okulu bu üçgenin yüksekliği üzerinde hareket ettiriyor] Mesela okulu buraya koysam. Okul buradaki tüm değerlere gelse şöyle. O zaman şu ortada yine doğrusal olur. İlk modelimi elde ederim. Ama burada dikliği sağlayamam bu sefer de.

Araştırmacı: Dik olmak zorunda mı?

………………………………

Aysun: Okulu merkeze koysam, çember oluştursam burası 17, şuralar da 17 km [Yarıçapı 17 km olan çember üzerinde Burcu'nun evini hareket ettiriyor]. Bir de burada Ali'yi oluştursam.

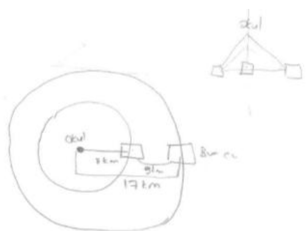
Araştırmacı: Söylediklerini çizebilir misin?

Aysun: Ali 8 km miydi? Yani o daha içte bir yerlerde olacak. [Yarıçapı 8 km olan bir çember çiziyor.] Burcu'nun evi de burası olsa. Mesela sınavdaki ilk modelim çıkar buradan.

Araştırmacı: Evet. Aralarında 9 km olmuş olur.

Aysun: Sonra çember üzerinde Burcu'yu bu tarafa getirebilirim. Evet, böyle olabilir. Yani 2. modelimi de oluşturabildim. Evleri çember üzerinde hareket ettirdikçe tüm durumları temsil edebilecek genellemeyi sağlarım.

……………………………



Alıntı 5. Okul sorusu için Aysun tarafından üretilen geçerli model

Diyalogdan anlaşılacağı üzere Aysun mülakat sırasında evler arasındaki uzaklığı hesaplama düşüncesinden vazgeçmiş ve evlerin konumlanması için birkaç özel durumun aksine daha genel bir temsil aracı kullanması gerektiğini fark etmiştir. Ayrıca bu genelleme neticesinde ürettiği modelin yazılı sınavda kullandığı durumları içerip içermediğini de sorgulamıştır.

Mülakat verilerinin analizinden ulaşılan bir diğer bulgu ise teorik bilgilerin sınırlılığından kurtulmadığı sürece üretilen modellerin gerçek yaşam durumlarını temsil etmede yetersiz kalacağıdır. Aşağıdaki alıntıda Gönül isimli öğretmen adayının modelleme mantığı teorik bilgi temelli olduğu için geçerli model üretemediği görülmektedir.

Diyalog 2:

Gönül: Önce Burcu'nun evini, okulu ve Ali'nin evini böyle düz bir sıra halinde düşünerek yaptım. Daha sonra bir de dik üçgen şeklinde koymak istedim.

Araştırmacı: Üçgensel durum oluşuyorsa karşımıza çıkan bütün durumlar doğrusal olmak zorunda değildir diyebilir miyiz?

Gönül: Dik üçgen de olmak zorunda değildi. Cos teoremiyle falan yine bir üçgenden çıkartabilirdik orada. Farklı açılar da olabilirdi ama onları yorumlamak istemedim. Bu daha kolayıma geldi.

Araştırmacı: Peki Cos teoremiyle incelediğinizde amacınız nedir?

Gönül: Ali ile Burcu'nun evleri arasındaki uzaklığı bulmak.

Araştırmacı: Cos teoremiyle her bir açıyı tek tek incelememiz mi gerekir yoksa durumu biraz daha genelleştirebilir miyiz?

Gönül: Genelleştirebiliriz. Mesela bir kenarı 8, bir kenarı 17 olan başka üçgenler de çıkartabilirdik. Bulmaya çalıştığımız kenarın karşısındaki köşenin açısına da alfa deriz. Oradan da Cos teoreminden bir şeyler bulmaya çalışırız.

Araştırmacı: Cos teoremi matematiksel teorik bir bilgi ve günlük hayata uyarlanırken bu bilginin sınırlılıkları olur. …. Yani sayısal bir sonuç bulmak için belli başlı durumları inceliyorsunuz gibime geldi.

Gönül: Aslında amacım zaten oydu. Çünkü dışarıdan birisine bu şekilde anlatmak ya da bu şekilde açıklamak daha iyi olur…

Araştırmacı: Ama 8-15-17 üçgeni de geçmişten getirdiğiniz bir bilgi. Size geçmişte Pisagor öğretilmeseydi, yani aralarında 90^{o} olduğu özel durumu bilmeseydiniz farklı durumları nasıl incelerdiniz?

Gönül: O üçgeni bilmeseydim sadece bu iki doğrusal durumu [lineer model], düşünürdüm. Yine de üçgen olur diye düşünürdüm, ama oradaki sayısal değeri bulamazdım.

……………………………………..

Diyalogdan sahip olduğu teorik bilgilerin Gönül'ün gerçek hayat durumları için esnek düşünmesini engellediği anlaşılmaktadır. Gönül her ne kadar yazılı sınavda evler arasındaki uzaklığı hesaplamaya çalıştığı sınırlı modelini mülakatta geliştirilmesi gereken modele dönüştürse de geçerli modele ulaşamamıştır.

Bulgular gerçek yaşam durumunu matematiksel mantıkla ilişkilendiremeyen öğretmen adaylarının modellerini geliştiremediklerini göstermektedir. Bu durum aşağıdaki alıntıda açıkça görülmektedir.

Diyalog 3:

Yavuz: [Kâğıda bakarak] Birkaç durum var ve ben galiba 1-2 durumu daha unutmuş gibiyim.

Araştırmacı: Mesela hangi durumlar?

Yavuz: [Dik üçgen çiziyor] Evleri arasındaki uzaklık, hipotenüsten, $\sqrt{17^2+8^2}$=$\sqrt{353}$ çıkıyor.

Araştırmacı: Yazılı sınavda evlerin doğrusal olduğu durumları incelemişsiniz. Şimdi de üçgensel bir durum oluşacağını belirtiyorsunuz. Günlük hayatta evlerin konumu hep bu şekilde mi karşımıza çıkar? Başka olasılıklar söz konusu olamaz mı?

Yavuz: Olabilir ama ben galiba sonuçların net çıkmasını istediğim için öyle yerleştirdim.

Araştırmacı: Bu olasılıklardan bir tanesi açının 90^o olduğu durum. Mesela 150^o olamaz mı?

Yavuz: [Evlerin konumunu değiştirerek] Yani burada da olabilir. Başka şekilde de olabilir. …

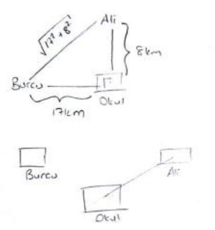
Araştırmacı: Peki bu durumları genellediğimizde hepsini temsil edebilecek nasıl bir model oluşturabilirsin? Evleri hareketli düşünsek farklı durumlar oluşmaz mı?

Yavuz: Oluşabilir.

Araştırmacı: Mesela Ali'nin evi sabit olsa Burcu'nun evinin yerini değiştirsek ya da Burcu'nun evi sabit olsa Ali'nin evini Burcu'nun evine göre farklı konumlarda yerleştirdiğimizde ortaya nasıl bir görüntü çıkartır?

Yavuz: Okulun yerini de değiştirebiliriz o zaman.

……………………………



Alıntı 6. Okul sorusu için Yavuz tarafından üretilen sınırlı model

Yazılı sınavda oluşturduğu lineer model hatırlatıldığında Yavuz unuttuğu birkaç farklı durum olabileceğini belirtmekte, ancak yine net bir sonuç bulmak amacıyla dik üçgene yönelmektedir. Ayrıca mülakatın sonuna doğru araştırmacının "*Evleri hareketli düşünsek farklı durumlar oluşmaz mı?*" sorusuna "*Okulun yerini de değiştirebiliriz o zaman.*" şeklinde verdiği cevap Yavuz' un okulu sabit tutarak evleri hareket ettirmesi gerektiğinin farkında olmadığını göstermektedir. Dolayısıyla matematiksel mantıkla ilişki kuramaması okulu çemberin merkezi olarak görmesini engellemiş ve mülakatta sınırlı modelini geliştirememesine neden olmuştur.

4.1.2. Bina Sorusuna İlişkin Bulgular

24 metre yüksekliğindeki bir binanın, 30 metre doğusunda 6 metre yüksekliğinde bir duvar bulunmaktadır. 1,8 metre göz seviyesinden bakan bir kişinin binanın tepesini görebilmesi için duvarın doğusunda **en az** kaç metre uzaklıkta durması gerekir? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Nancarrow' dan (2004) uyarlanmıştır].

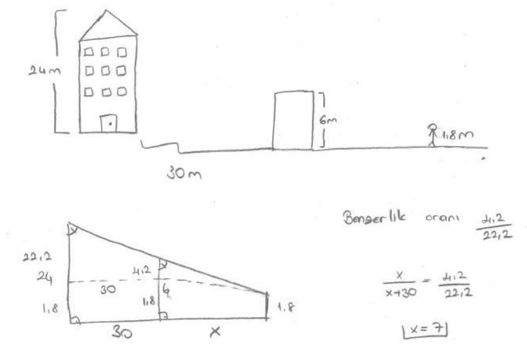
Bu problemin çözümü, sorunun hikâyesinde geçen bina, duvar ve kişiyi aralarındaki uzaklıklara uygun biçimde çizime aktarmanın ötesinde bir düşünce gerektirmektedir. Öğretmen adayları öncelikle kişiyi binanın tepesini görebilmesi için duvara belli mesafede yerleştirdikten sonra görüş hizasını bina, duvar veya zemin ile kesiştirerek oluşturacakları üçgenler arasında orantısal ilişkiler kurmalıdır. Katılımcıların yazılı sınavda ürettikleri modellerin yeterlik durumlarına ilişkin bulgular Tablo 7'de sunulmuştur:

Tablo 7. Bina sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE (%)
GEÇERLİ MODEL	Görsel-Sembolik	80	57,6
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Görsel-Sembolik	28	20,1
	Görsel	25	18,0
GEÇERSİZ MODEL	Görsel	4	2,9
YANIT YOK		2	1,4
TOPLAM		139	100,0

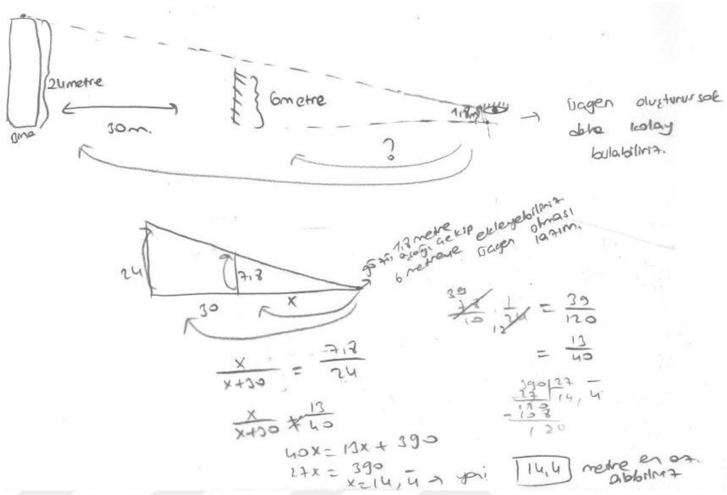
Öğretmen adaylarının %57,6'sının geçerli modeller ürettiği görülmektedir. Bu modellerin tamamında görsel ve sembolik yapılar birlikte kullanılmıştır. Geliştirilmesi gereken model oluşturan %20,1'lik kesim görsel-sembolik araçları tercih ederken, %18'lik grup ise sadece görsel araçlar kullanmayı tercih etmiştir. Katılımcıların %2,9'unun ürettiği modellerin geçersiz olduğu ve bunların tamamının görsel yapılardan oluştuğu görülmüştür.

Bu soruda geçerli model üretilebilmesi için gerçek yaşam durumundan matematiğe doğru bir geçişin yapılması gerekmektedir. Bu bağlamda bina, duvar ve kişi arasındaki uzaklıkları dikkate alarak uygun bir görsel model çizen ve bu model üzerinde oluşturdukları üçgenlerde orantısal ilişkileri (benzerlik, eğim vb.) doğru biçimde kuran öğretmen adaylarının çözümleri *geçerli model* olarak kabul edilmiştir. Buna ilişkin örnek bir model aşağıda görülmektedir. Bu model incelendiğinde öğretmen adayının sadece gerçek yaşam durumunu çizim üzerinde temsil etmekle kalmayıp bu görsel modelin elemanları arasındaki anlamsal ilişkileri doğru kurgulayıp yorumladığı anlaşılmaktadır.



Alıntı 7. Bina sorusuna ilişkin geçerli görsel-sembolik model örneği [ÖA-20]

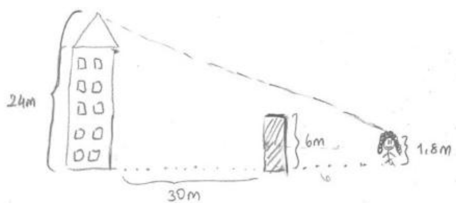
Bina, duvar ve kişi aralarındaki uzaklıkları dikkate alarak uygun bir çizim yapmasına rağmen bu görsel üzerinde yanlış matematiksel ilişkiler kuran ya da herhangi bir matematiksel işlem yürütemeyen öğretmen adaylarının ürettikleri modeller *geliştirilmesi gereken model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Oluşturdukları üçgenlerde kişinin duvara uzaklığı, kişinin binaya uzaklığı, görüş hizasındaki noktaların birbirine uzaklığı gibi bilinmeyenleri birbiriyle kıyaslayamayan veya belirli açıların aynı olduğunu fark edemeyen öğretmen adaylarının model üzerinde matematiksel ilişkileri kurmakta sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Aşağıda bu duruma ilişkin bir örnek sunulmuştur.



Alıntı 8. Bina sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken görsel-sembolik model örneği [ÖA-34]

Bu öğretmen adayı sorunun yönergesini adım adım takip ederek doğru çizim yapsa da yaptığı çizimi matematiksel bilgi ile ilişkilendirerek görsel modelden sembolik modele geçememiştir. Öğretmen adayının göz seviyesini aşağıya çekip duvarın yüksekliğini artırması nedeniyle doğru orantı algoritması kuramadığı anlaşılmaktadır.

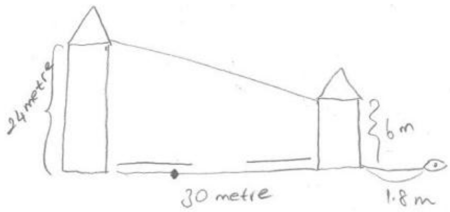
Geliştirilmesi gereken model kategorisinde değerlendirilen bir başka örnek şu şekildedir:



Alıntı 9. Bina sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken görsel model örneği [ÖA-32]

Öğretmen adayının soruda verilen yönergeyi takip ederek biçimsel açıdan uygun bir model ürettiği açıktır. Ancak bu görsel modeli amacına uygun kullanıp soruda var olan matematiksel mantığı yorumlayamadığı da bir gerçektir.

Diğer taraftan sorudaki verilere uygun bir görsel çizim yapamayan ve bu model neticesinde yanlış matematiksel ilişkiler kuran öğretmen adaylarının modelleri *geçersiz model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Buna ilişkin bir model örneği aşağıda görülmektedir:



Alıntı 10. Bina sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği [ÖA-28]

Alıntıda, öğretmen adayının sorudaki gerçek yaşam durumunu gözetmediği, ayakta dikilmesi gereken kişiye modelde yer vermediği görülmektedir. Dolayısıyla uygun başlangıç modeli ortaya koyamaması matematiksel ilişkileri kurmasını engellemiştir.

Görüşmeler sırasında katılımcılardan bazıları araştırmacının soruları karşısında yazılı sınavdaki modellerini revize ederek geçerli modele ulaşmışlardır. Mülakatta üretilen model türleri Tablo 8'de sunulmuştur. Bu kapsamda Merve ve Buğra mülakatta yazılı sınavda üretmiş oldukları geliştirilmesi gereken görsel-sembolik modellerini geçerli modele dönüştürürken, Gönül farklı orantısal ilişkiler kurarak üretmiş olduğu geçerli modelini çok daha esnek biçimde kullanmıştır.

Tablo 8. Bina sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD

Kısaltmalar: GÖR-SEM-MOD: Görsel-Sembolik Model

Aşağıda Merve ile yürütülen mülakattan bir kesit sunulmuştur. Diyalog incelendiğinde Merve'nin yazılı sınavda görsel model üzerinde kurduğu benzerlik ilişkisinin başlangıçta farkında olmadığı ancak araştırmacının soruları karşısında üçgenlerde oluşan açıların eşliğini görerek ve yeni bir orantısal ilişki kurarak geçerli modele dönüştürdüğü görülmektedir.

Diyalog 4:

……………………………..

Araştırmacı: Peki bu üçgenleri benzer kılan unsur ne?

Merve: Benzer üçgenlerde iki tane kenar birbiri ile orantılı olacaktı. O iki kenar orantılı olduğu için üçüncüsü de orantılı oluyordu. Burada 24 ile 6 zaten oranlı.

Araştırmacı: Yalnız o kenar çiftleri arasındaki orantıyı şu an göremiyoruz.

Merve: [Üçgenleri göstererek] Şu açılar dik oluyor zaten. Şurası zaten ortak açı iki üçgende de. O zaman şu açılar da aynı olur. Buradan benzer üçgen çıkıyor… açıların eşliğinden. …

……………….

Araştırmacı: Kişinin görüş hizasını ayaklarının bulunduğu noktadan başlatmışsınız. Kendi boyunun verdiği bir yükseklik (göz seviyesi 1,8 m) yok mu?

Merve: Doğru, görüş hizasının zeminle kesişmesi kişinin biraz ötesinde olması lazım. O zaman bulduğum 10 metre, görüş hizasının zemini kestiği noktanın duvara uzaklığı olur.

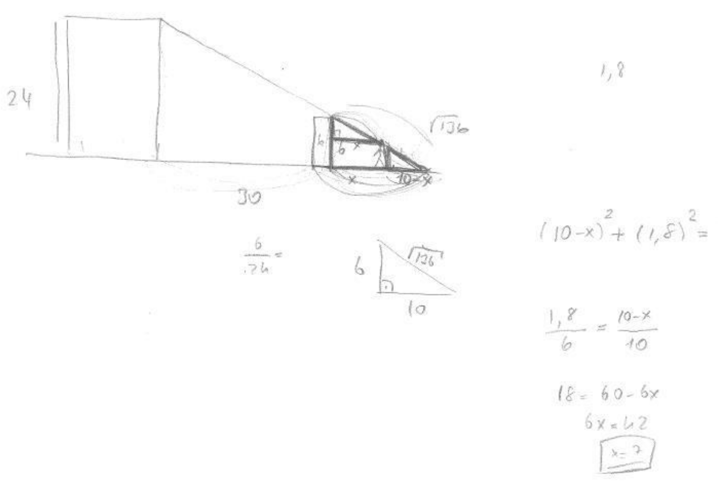
Araştırmacı: Asıl istenen kişi ile duvar arasındaki mesafeyi nasıl bulabiliriz?

Merve: [Kişi ile görüş hizasının zemini kestiği nokta arasını göstererek] 10-x dedim buraya.

Araştırmacı: Sonra nasıl devam edeceğiz?

Merve: Tamam. Yeni bir benzerlik kuralım. [İşlem yapıyor] $\frac{1,8}{6} = \frac{10-x}{10}$ dan x, o zaman 7 çıktı.

…………………….



Alıntı 11. Bina sorusu için Merve tarafından üretilen geçerli görsel-sembolik model

Merve yazılı sınavda kişinin görüş hizasını yerden başlatarak gerçek yaşam durumuna aykırı bir model oluşturmuş ve 6 ile 24 sayıları arasındaki oranı diğer kenarlar arasındaki oranla kıyaslamadan mantığı olmayan bir benzerlik ilişkisi kurmuştu. Araştırmacının soruları üzerine kurduğu benzerlik ilişkisini açıların eşliğini de işe katarak çok daha mantıksal bir temele dayandırmıştır. Ayrıca görüş hizasını yerden başlatamayacağını; göz seviyesinden çizdiğinde de bulduğu mesafenin kişinin duvara uzaklığı değil görüş hizasının zemini kestiği noktanın duvara uzaklığı olacağını fark etmiştir.

Mülakat verilerinin analizinden ulaşılan bir diğer önemli bulgu ise kimi öğretmen adaylarının soruyu okuduğunda içeriğindeki matematiksel yapıyı kafasında direk canlandırdığı, kimilerinin ise model üzerinde çalışırken matematiksel ilişkileri görerek bir yöntem uygulamaya karar verdiğidir. Aşağıdaki diyalogda Esin'in problemdeki matematiksel mantığı sorunun yönergesini okuduğunda zihninde oluşan ilk model aracılığıyla keşfettiği görülmektedir.

Diyalog 5:

Esin: 1,8 m göz mesafesindeki bir kişinin binanın tepesini görmesini istiyoruz. Direk şekli çizince üçgen benzerliği geldi aklıma. Hani oradan gidebilirim dedim. Verdiklerini tamamen yerleştirdiğimde sonuçta duvar ile bina doğrusal ve paralel olmak zorunda.

Araştırmacı: Tamam. Sonra nasıl düşündünüz?

Esin: Kişi zaten ayakta duruyor illa ki o da paralel olmak zorunda. Şu şekilde ben uzattığımda [kişinin göz hizasından duvara yere paralel olacak biçimde doğru parçası çiziyor] boyu 1,8 idi, Duvardan kişinin boyunu çıkardığımda (6 m -1,8 m = 4,2 m), direk şurada üçgen kalıyor.

Araştırmacı: Duvarın ve binanın göz seviyesinin üstünde kalan parçalarıyla iki üçgen oluştu.

Esin: Bina ile duvar arası 30 metre. Hani duvara ne kadar uzaklıkta olmam gerektiğini sorduğu için direk duvara olan mesafeme x dediğimde [Benzerliğe bağlı orantıyı kuruyor]…

Araştırmacı: Sanırım paralellikten kaynaklı bir benzerlik oluşturuyorsunuz.

Esin: Aynen. Dedim hani sonuçta duvar, bina ve insan. Hepsi ayakta dik durduğuna göre hepsi paralel olmalı. Paralel olduğundan da zaten üçününkini bildiğime göre benzerlik oranını illa ki yakalıyorum. Benzerlik oranını yazdığımda da $\frac{x}{x+30} = \frac{4,2}{22,2}$ geliyor.

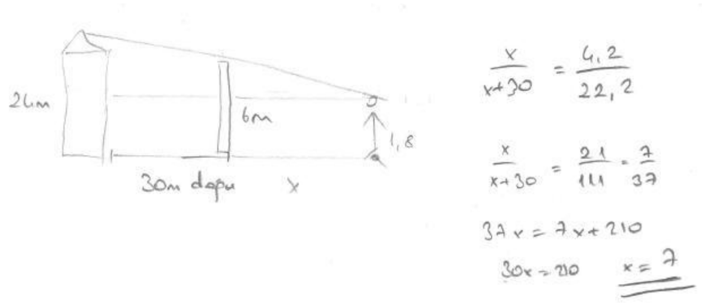
Araştırmacı: Anladığım kadarıyla siz bu soruyu okuduğunuzda ya da çizimden sonra benzerliğe gidiyor diye düşündünüz.

Esin: Evet direk bakınca benzerlik çağrıştırdı.

Araştırmacı: Peki karşı tarafa neden benzerlik kurduğunuzu nasıl izah ederdiniz?

Esin: Hani üç açısında eşlik varsa benzerliğe geçebiliyoruz ya da herhangi bir paralel verdiyse. Hani şöyle bir durum, bir soruda hiçbir şekilde bir şey çıkmıyorsa illa ki benzerlik vardır mantığı var.

……………………………..



Alıntı 12. Bina sorusu için Esin tarafından üretilen geçerli görsel-sembolik model

Esin soruda belirtilen bina, duvar ve insanı zemine dik biçimde konumlandırdığında bunlar arasında paralellik oluştuğu için benzerlik kurması gerektiği düşüncesine vardığını ifade etmektedir. Bu durum göstermektedir ki sorunun yönergesindeki çağrışımlar bireyin zihinsel bir model oluşturarak soruyu çözmesine aracı olabileceği gibi kişi gerçek yaşam durumunu temsilen çizdiği görsel model üzerinde çalışırken matematiksel ilişkileri görerek de çözüme ulaşabilir. Diğer taraftan Esin'in "*Bir soruda hiçbir şekilde bir şey çıkmıyorsa illa ki benzerlik vardır*." ifadesi modelleme sürecinde geçmiş bilgilerinin ne kadar etkisinde kaldığının göstergesidir.

4.1.3. Göl Sorusuna İlişkin Bulgular

Kuğulu gölün yüzeyi, Mavi gölün yüzeyinden 35 metre yukarıdadır. Kuğulu gölün derinliği, Mavi gölün derinliğinin iki katıdır. Kuğulu gölün dibi (tabanı), Mavi gölün dibinden (tabanından) 12 metre daha yukarıda olduğuna göre Mavi gölün derinliği ne kadardır? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Nancarrow'dan (2004) uyarlanmıştır].

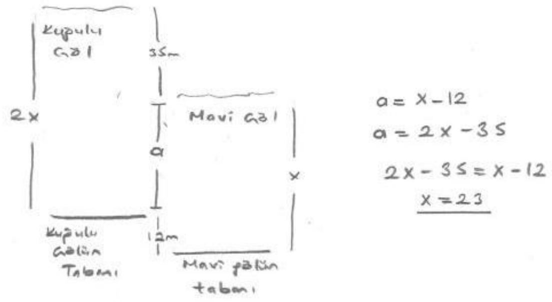
Öğretmen adayları bu problemdeki gerçek yaşam durumunu farklı biçimlerde modelleyerek sonuca gidebilirler. Gölleri konumlarına uygun biçimde bir çizime aktardıktan sonra yüzey, taban ve derinlikleri arasındaki ilişkiye dayalı kurdukları denklemin çözümünden cevaba ulaşabilirler. Diğer taraftan sadece sembollere dayalı bir biçimde göllerden birinin yüzeyini ve tabanını, referans kabul ettikleri diğer gölün yüzeyi ile tabanı cinsinden ifade ederek oluşturacakları denklemin çözümünden cevabı bulabilirler. Ayrıca göllerin tabanlarını ya da yüzeylerini aynı hizaya getirmek suretiyle derinlikleri arasındaki ilişkiyi sadece aritmetiksel olarak yorumlayabilirler. Öğretmen adaylarının bu soruya ilişkin üretmiş olduğu modeller yeterlikleri açısından incelenerek Tablo 9'da sunulmuştur.

Tablo 9. Göl sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	**ALT KATEGORİLER**	**FREKANS**	**YÜZDE(%)**
GEÇERLİ MODEL	Görsel-Sembolik	105	75,5
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Görsel-Sembolik	20	14,4
GEÇERSİZ MODEL	Görsel-Sembolik	8	5,7
	Görsel	3	2,2
YANIT YOK		3	2,2
TOPLAM		139	100,0

Katılımcıların %75,5'i soruya ilişkin uygun bir çizim yapmış, bu çizim üzerinde doğru matematiksel ilişkiler kurarak geçerli görsel-sembolik modeller üretmiştir. %14,4'lük bir kesim sorunun yönergesindeki verilere uygun bir çizim yapmasına rağmen bu çizim üzerinde matematiksel mantığı yanlış işleterek geliştirilmesi gereken görsel-sembolik modeller oluşturmuştur. Öğretmen adaylarının %7,9'u ise problemin hikâyesindeki verileri yanlış bir çizimle temsil ettiği için geçersiz modeller üretmiştir. Bunlardan %5,7'lik kesim çizimden kaynaklı yanlış denklemler kurarken %2,2'lik kesim çizim üzerinde sembolik bir işlem yürütmemiştir.

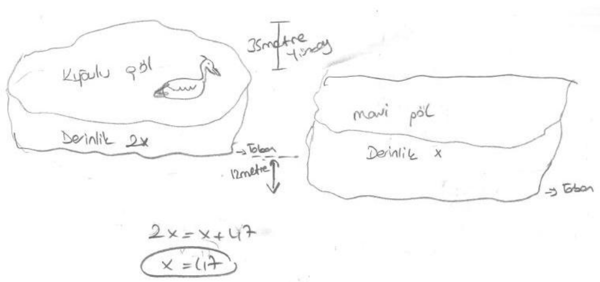
Göllerin konumlarını dikkate alarak uygun çizimler yapan ve bu çizimler üzerinden değişkenler (göllerin ortak bölgesi, Mavi gölün derinliği vs.) arası ilişkileri gözeterek doğru denklemler oluşturup çözüme ulaşan öğretmen adaylarının modelleri *geçerli model* olarak kabul edilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği görsel-sembolik model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 13. Göl sorusuna ilişkin geçerli görsel-sembolik model örneği [ÖA-76]

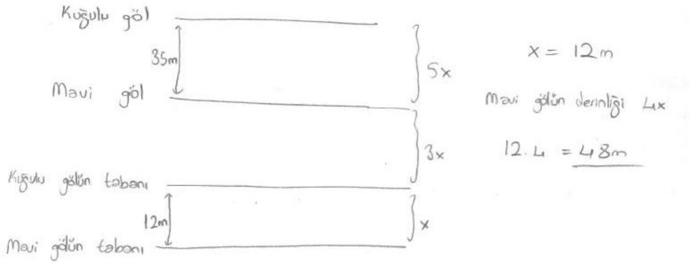
Alıntıda, bu öğretmen adayının soruda verilen yönergeyi takip ederek uygun çizim yaptığı, modeldeki manayı anlayıp uygun biçimde matematiksel dile aktararak (denklem kurduğu) çözüm yaptığı görülmektedir. Bu öğretmen adayının modelleme döngüsündeki zincirin halkaları [gerçek durum, görsel (gerçek) model ve sembolik (matematiksel) model] arasındaki bağlantıları sağlıklı bir şekilde kurarak işlettiği açıktır.

Diğer taraftan göllerin tabanları ve yüzeyleri arasındaki ilişkiyi dikkate alarak doğru bir çizim yapmasına rağmen bu görsel model üzerinde matematiksel mantığı yanlış işleten öğretmen adaylarının ürettiği modeller *geliştirilmesi gereken model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Buna ilişkin görsel-sembolik bir model aşağıda sunulmuştur:



Alıntı 14. Göl sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken görsel-sembolik model örneği-I [ÖA-85]

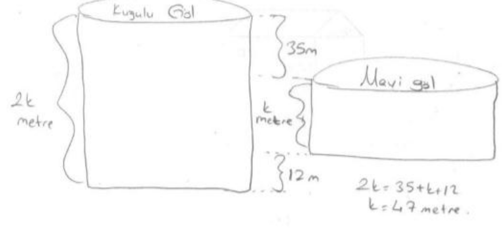
Yaptığı çizimden öğretmen adayının soruda verilen yönergeyi takip ederek uygun çizim yaptığı anlaşılmaktadır. Ancak modelleme döngüsünde gerçek yaşamdan matematiğe geçiş noktasında sıkıntı yaşadığı görülmektedir. Kurduğu denklemin (2x=x+47) yaptığı çizimdeki manayı karşılamadığı açıktır. Aşağıdaki örnekte ise öğretmen adayının göllerin derinlikleri arasındaki iki katı ilişkisini oluşturmak amacıyla seçtiği değişkenin değerlerinin birbirinden farklı olduğu görülmektedir.



Alıntı 15. Göl sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken görsel-sembolik model örneği-II [ÖA-90]

Bu öğretmen adayı göllerin derinliklerini birbirinin iki katı olması için (8x) ve (4x) biçiminde matematikselleştirse de değişkenin aldığı değerler yüzeyleri arasındaki fark (5x=35) ile tabanları arasındaki fark (x=12) düşünüldüğünde birbiri ile aynı çıkmamaktadır. Dolayısıyla katılımcının modelin elemanlarını birbirinden bağımsız değerlendirmesinin ve kendi içinde uyumunu kontrol etmemesinin modelleme döngüsünün bütünlüğünü bozduğu anlaşılmaktadır.

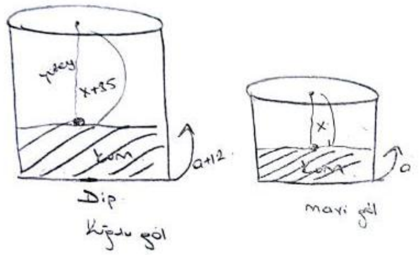
Göllerin yüzeyleri, tabanları ve derinlikleri arasındaki anlamsal ilişkileri temsil edemeyen modeller ise *geçersiz model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu modeller kendi içerisinde sembolik yapılar içerip içermemesine göre iki alt kategoriye ayrılmıştır. Ayrıca sorunun içeriğini anlayamama, bilgi eksikliği ya da dikkat eksikliği gibi nedenlerden dolayı da kendi içerisinde farklılaşabilmektedir. Soruda verilen bilgileri anlayamadığı için yanlış çizim yapan, dolayısıyla geçersiz görsel-sembolik model üreten öğretmen adaylarından birinin ürettiği model aşağıda görülmektedir.



Alıntı 16. Göl sorusuna ilişkin geçersiz görsel-sembolik model örneği [ÖA-14]

Öğretmen adayı, göllerin seviyelerini doğru biçimde konumlandıramadığı için (Kuğulu gölün tabanı 12 metre aşağıda değil yukarıda olmalı) derinlikleri arasındaki ilişkiyi yanlış bir denklem ile temsil etmiştir. Dolayısıyla gerçek yaşam durumunu temsil eden uygun başlangıç modelleri ortaya koyamadığı için bu modelden geliştirdiği sembolik modellerin de amacına hizmet etmediği açıktır.

Yüzey, taban ve derinlik algısını modele yanlış aktaran öğretmen adaylarının olduğu görülmüştür. Bu tür hatalar içeren bir model örneği aşağıda sunulmaktadır:



Alıntı 17. Göl sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği [ÖA-134]

Yaptığı çizimden bu öğretmen adayının yüzey kavramını derinlik olarak anladığı ve derinlikler arasındaki iki kat ilişkisini kuramadığı anlaşılmaktadır. Adayın göllerin karşılıklı bileşenleri (tabanları, yükseklikleri, vs.) arasındaki anlamsal bağları kuramadığı; görsel unsurlara takılıp kaldığı görülmektedir.

Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden elde edilen nitel bulgular Tablo 10'da sunulmuştur. Yazılı sınavda geçerli model üreten öğretmen adaylarının tamamının görsel ve sembolik modelleri birlikte kullanması nedeniyle araştırmacı mülakatta katılımcıların göl sorusunu farklı biçimlerde modellemelerini istemiştir. Diğer adaylardan farklı olarak Esin mülakatta görsel-aritmetiksel model üretebilmiştir.

Tablo 10. Göl sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR ARİT MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD

Kısaltmalar: GÖR-SEM-MOD: Görsel-Sembolik Model,

GÖR-ARİT-MOD: Görsel-Aritmetiksel Model

Aşağıda Esin ile yapılan mülakattan bir kesit sunulmuştur. Diyalog incelendiğinde öğretmen adayının uzamsal düşünme yeteneğini de işe koşarak gölleri gerçek yaşamdaki halleriyle düşündüğü ve zihninde canlandırdığı görsel modeller üzerinde aritmetiksel işlemler yaptığı görülmektedir.

Diyalog 6:

Araştırmacı: Aslında bir cebirsel ifade kullanmadan olaya aritmetiksel yaklaşmışsınız.

Esin: Zaten bilinmeyen vererek çoğu soruyu çözemediğimiz için kolaylıkla anlatamıyoruz. Direk mantık yürüterek, hani gözümde tasarlayarak düşündüm.

Araştırmacı: Bunu tam olarak açıklayabilir misiniz?

Esin: Şu an hani yüzeylerini söylüyor ya. Mavi Gölün yüzeyini normal kabul ettim. Diğeri 35 metre yukarıda. Bir yerden fazlalığı var bir de yüzeyden fazlalığı var. Şimdi şöyle ifade edeyim. Hani bir kişinin boyunu ölçüyorsunuz ve ayakkabısını çıkarmasını istiyorsunuz. Çünkü boyu 170 cm iken topuklu ayakkabıyla duruyorsa mesela boyu 180 cm gelecek.

Araştırmacı: Yani zeminden yüksekte olmasını boyunu düşüren bir unsur mu kabul ettiniz?

Esin: Evet boyunu düşürüyor. Diğerini temel alarak konuşuyorum ya ben, diyorum ikisinden de 12'yi çıkarırsam, ikisinin dibini aynı düşünüyorum. Yani hem yukarıdan çıkarıyorum hem aşağıdan çıkarıyorum.

Araştırmacı: Anladım. Devam edelim.

Esin: Topukluyu çıkardığımda boydan da düşünüyorum. Hani bu ikisinin dibi de aynı oluyor ya. Dibi aynı ise artık geriye kalan fazlalık 35-12=23 metre. Yüzeyi 23 metre yukarıda kalıyor. Birinin derinliği x diyeyim. Diğeri 2x olsun. O zaman o fazlalık x'e gitmek zorunda.

……………………

Alıntıdan anlaşılacağı üzere Esin, Kuğulu gölün tabanını 12 metre aşağıya çekerek Mavi gölün tabanıyla aynı hizaya getirdiğinde yüzeyleri arasındaki 35 metrelik farkın 23 metreye düşeceğini ve derinlikler arasındaki iki kat ilişkisinden dolayı bu farkın Mavi gölün derinliği olacağını görmüştür. Mülakatın sonuna doğru göllerin derinlikleri için 2x ve x gibi değişkenler kullansa da aritmetiksel hesaplamalarla yürüttüğü modelini açıklamaya çalışırken sembollere başvurmuştur.

4.1.4. Gemi Sorusuna İlişkin Bulgular

Sahildeki bir C noktasının 120 metre kuzeyinde ve denizdeki bir A noktasında korsan bir gemi bulunmaktadır. C noktasının 150 metre doğusunda ve yine sahilde (**kıyı üzerinde**) bir D noktası vardır. Denizdeki bir B noktasında bulunan deniz feneri ise D noktasının 80 metre kuzeyinde yer almaktadır. Korsan gemi bulunduğu noktadan hareket ederek önce sahile yanaşacak ve daha sonra deniz fenerine yolculuk yapacaktır. Bu yolculukta alınacak mesafenin **en kısa** olabilmesi için korsan geminin sahilde uğrayacağı yerin C noktasına olan uzaklığını tespit ediniz. Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Krulik ve Rudnick' den (1989) uyarlanmıştır].

Katılımcıların bu soruda alınacak mesafeyi minimuma düşürmek için geminin rotasını ve dolayısıyla sahilde uğrayacağı noktayı doğru tespit etmeleri gerekmektedir. Ayrıca sahildeki belirli noktalar için alınacak mesafeler ile sınırlı kalmayıp kıyı şeridi üzerindeki bütün noktalar hakkında yorumda bulunabilecekleri bir genellemeye ulaşmaları önem arz etmektedir. Bu durum ise ancak eldeki durumu tam temsil edebilecek nitelikte görsel bir modelin inşası ile mümkün olabilir. Bu içerikteki görsel bir model ortaya konduktan sonra cebirsel veya aritmetiksel modellere geçiş yapıp çözüm yapmak daha başarılı sonuçlar verebilir. Öğretmen adaylarının bu soru için üretmiş oldukları modeller *geçerli*, *geliştirilmesi gereken*, *sınırlı* ve *geçersiz* olmak üzere 4 kategori altında toplanmıştır (bakınız, Tablo 11).

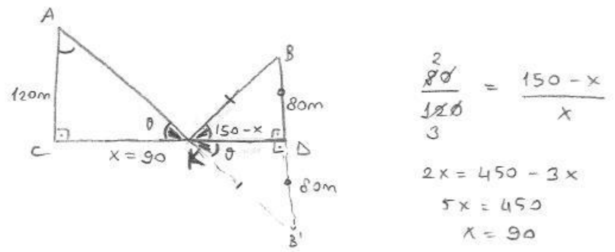
Tablo 11. Gemi sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE (%)
GEÇERLİ MODEL	Görsel - Sembolik	12	8,6
	Görsel - Aritmetiksel	40	28,8
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Görsel - Sembolik	20	14,4
SINIRLI MODEL	Görsel-Aritmetiksel	28	20,1
GEÇERSİZ MODEL	Görsel	32	23,0
YANIT YOK		7	5,0
TOPLAM		139	100,0

Katılımcıların %37,4'ü geçerli modeller üretmiştir. Bu modellerden yaklaşık 4 te 3 ü görsel ve aritmetiksel yapılardan oluşmaktadır. Diğer taraftan geliştirilmesi gereken model oluşturan %14,4'lük grubun tamamı görsel ve sembolik araçları birlikte kullanmıştır. Ayrıca sınırlı model üreten %20,1'lik kesim görsel ve aritmetiksel yapılara dayalı, geçersiz model oluşturan %23’lük kesim ise sadece görsel yapılara dayalı modeller oluşturmuştur.

Öğretmen adaylarının bu soruda geçerli model üretebilmeleri için geminin sahilde uğrayacağı noktayı diğer noktalardan ayıran özelliklerin farkında olmaları gerekmektedir. Bu kapsamda gerçek yaşam durumuna uygun biçimde oluşturulan çizim üzerinde bu noktanın yerinin; daha niteliksel ve ilişkisel bir yaklaşımla cebirsel olarak (simetri alarak, benzerlik kurarak vs.) bulunduğu görsel-sembolik modeller ile daha niceliksel ve sayısal yaklaşımla (mesafeleri hesaplayıp birbiriyle kıyaslayarak) bulunduğu görsel-aritmetiksel modeller *geçerli model* olarak değerlendirilmiştir.

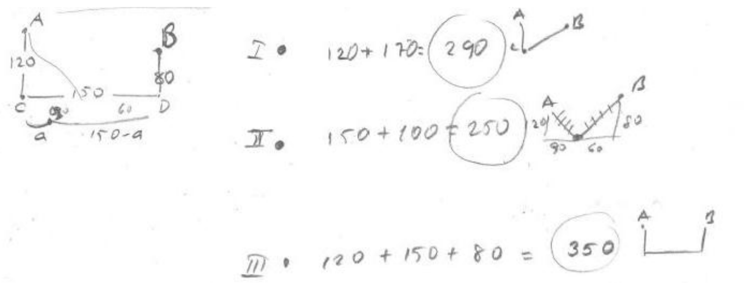
Geminin sahile yanaştığı rota ile sahilden ayrıldığı rotanın doğrusal olması durumunda alınacak mesafenin en kısa olacağı düşüncesinden hareketle; denizdeki noktalardan birinin simetriğini alarak sahili kestiği noktayı bulan ya da kıyı şeridi ile yapılan açıların eşitliğini kullanarak üçgenlerde benzerlik kuran katılımcıların modelleri geçerli görsel-sembolik model olarak kabul edilmiştir. Bu modellerden biri aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 18. Gemi sorusuna ilişkin geçerli görsel-sembolik model örneği [ÖA-1]

Bu öğretmen adayı denizdeki B noktasının sahil çizgisine göre simetriğini (B’) almış ve denizdeki diğer A noktası ile doğrusal birleştirerek ($[AB']$) izlenecek rotanın sahili kestiği noktayı bulmuştur. Bu şekilde ikizkenar üçgendeki $|KB|$ = $|KB'|$ eşitliğinden yararlanarak alınacak mesafeyi en kısa yapacak doğrusal durumunun bir benzerini elde etmiştir. Daha sonra oluşan üçgenlerde açıların eşliğini kullanarak kurduğu benzerlikten sahilde uğraması gereken K noktasının C noktasına uzaklığını bulmuştur. Dikkat edilecek olursa görsel-sembolik yaklaşımda model öğretmen adaylarına tam bir düşünme aracı olurken sahildeki noktanın yerine dair daha milimetrik, daha hassas ve daha nitel sonuçlar vermektedir.

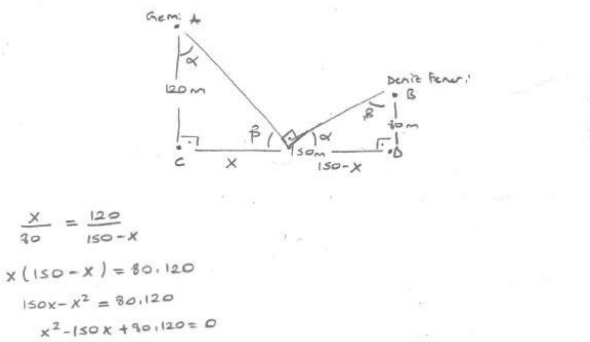
Benzer şekilde sahilden seçilen belirli noktalar için alınacak mesafeleri hesaplayarak ve bu sonuçları birbirleriyle kıyaslayarak doğru noktanın tespit edildiği modeller geçerli görsel-aritmetiksel model olarak kabul edilmiştir. Bu modellerden biri aşağıdaki gibidir.



Alıntı 19. Gemi sorusuna ilişkin geçerli görsel-aritmetiksel model örneği [ÖA-17]

Örnekte görüldüğü üzere bu öğretmen adayı geminin izleyebileceği bazı rotalar için alınacak mesafeleri 290 metre (A-C-B güzergâhı), 350 metre (A-C-D-B güzergâhı) ve 250 metre (C-D arasında bir nokta için) olarak hesaplamıştır. Aritmetiksel işlemlerle yürütülen bu ve benzeri modellerde katılımcıların C noktasının 90 metre uzağındaki bir nokta için özel dik üçgenlerde hipotenüsün değerini tam olarak hesaplayabilmeleri (150 ve 100 gibi) toplam alınan 250 metrelik mesafenin diğer rotalara göre daha kısa olduğunu fark ettirmiş ve belki de sorudaki verilerin sağladığı bir kolaylıktır. Katılımcılar ayrıca geçerli görsel-sembolik modellerde olduğu gibi problemin muhtevasını temsil edebilecek çizimler ortaya koymuşlardır; ancak bu modelin kullanım sürecinde noktanın yerini tam tespit adına nitel yaklaşmak ya da cebirsel düşünmek (simetri, benzerlik gibi) gerekirken bu genel yaklaşımı nicelleştirmeye çalışmışlar ve sayısal veriler üzerinden deneyerek isabetli noktayı bulmaya çalışmışlardır.

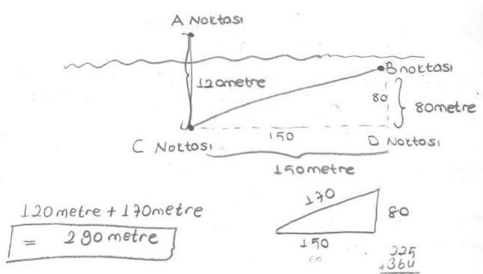
Diğer taraftan biçimsel açıdan sorunun muhtevasını karşılıyor gibi gözükse de içeriksel açıdan hatalı modeller *geliştirilmesi gereken model* olarak kabul edilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği görsel-sembolik model aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 20. Gemi sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken görsel-sembolik model örneği [ÖA-76]

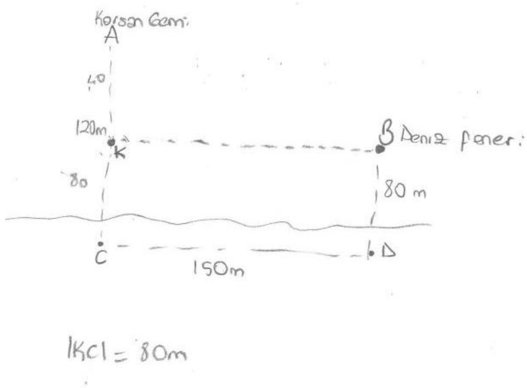
Bu öğretmen adayının alınacak mesafenin kısalması için geminin sahilde uğrayacağı noktanın temsili yeri hakkındaki tahmini doğru olsa da oluşturduğu rotada sahile yanaşma açısı (β) ile sahilden ayrılma açısının (α) aynı olması gerektiğinin farkında değildir. Diğer bir ifadeyle gerçek yaşamdan matematiğe geçişte yaşanan sorun (rotanın kısalması için açıların eşitliğini görememe) üçgenler arasında benzerlik ilişkisinin yanlış kurulmasına ve gerçek yaşamla uyuşmayan çözümün yapılmasına sebep olmaktadır.

Geminin alacağı yolun rastgele seçilen bir ya da birkaç nokta için hesaplanarak sahildeki diğer noktalar hakkında yorumlar içermeyen ve dolayısıyla doğru noktanın tam olarak tespit edilemediği modeller *sınırlı modeller* olarak değerlendirilmiştir. Buna ilişkin örnek bir model aşağıda sunulmuştur. Model incelendiğinde öğretmen adayının sahildeki sadece C noktası için alınacak mesafeyi hesapladığı görülmektedir.



Alıntı 21. Gemi sorusuna ilişkin sınırlı görsel-aritmetiksel model örneği [ÖA-18]

Sorunun yönergesinde verilen noktaların yerleşimini yanlış yaparak ya da sahile uğrama gibi şartları gözetmeden gerçek yaşam durumuna aykırı çizimlerle oluşturulan modeller *geçersiz model* olarak kabul edilmiştir. Bu modellerden biri aşağıdaki gibidir.



Alıntı 22. Gemi sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği [ÖA-90]

Şekilde, öğretmen adayının oluşturduğu rotada gemiyi sahile uğramadan deniz fenerine ulaştırdığı ($[AK]$ ve $[KB]$ güzergâhı) ve en kısa mesafeyi alması için belirlediği noktanın (K) sahildeki C noktasına uzaklığını 80 metre bulduğu görülmektedir. Dolayısıyla geçersiz modellerin sorunun içeriğindeki bilgileri tam olarak karşılamadığı ve yolu kısaltmak adına matematiksel bir temele dayanmadığı söylenebilir.

Gemi sorusuyla alakalı, görüşmelerde ise katılımcılardan 7 tanesi geçerli model, 1 tanesi geliştirilmesi gereken model ve 1 tanesi de sınırlı model üretebilmiştir.

Tablo 12. Gemi sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR ARİT MOD		GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR ARİT MOD	
Geliştirilmesi Gereken Model									GÖR SEM MOD
Sınırlı Model					GÖR ARİT MOD				

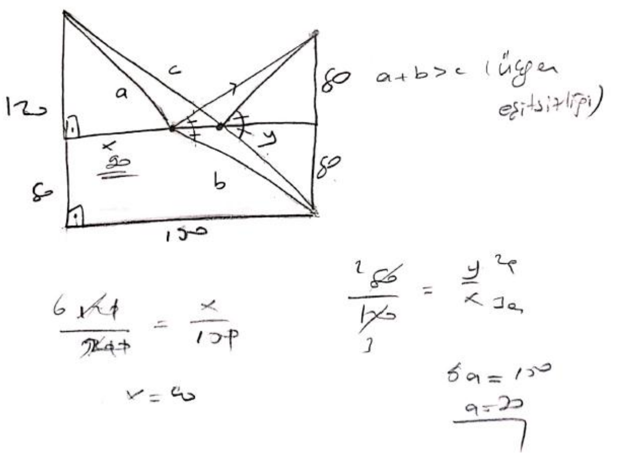
Kısaltmalar: GÖR-SEM-MOD: Görsel-Sembolik Model,

GÖR-ARİT-MOD: Görsel-Aritmetiksel Model

Aşağıda Buğra adlı öğretmen adayıyla yürütülen mülakattan bir kesit sunulmuştur. Diyalog incelendiğinde Buğra'nın model üzerinde simetri düşüncesini yalnızca uygulamakla kalmadığı, doğrusal durumun gidilecek rotayı neden kısalttığına ilişkin üçgen eşitsizliğine bağlı ispat geliştirebildiği görülmektedir.

Diyalog 7:

> **Buğra:** [Sahilde ilk aldığı noktanın solunda yeni bir nokta seçerek] Şimdi ben şu noktayı alsaydım, yine aynı şekilde simetri aldığım zaman bu nokta için de gemi önce sahile geliyor, sonra deniz fenerine gidiyor.
>
> **Araştırmacı:** Peki iki durumun farkı ne?
>
> **Buğra:** [Alıntı 23'te çizdiği üçgende a ve b kenarlarını göstererek] Şimdi buradaki amaç şu. Ben bunun simetriğini aldığım zaman aynı uzunluğu ölçmüş oluyorum. Ama geminin sahile yanaştığı rotayı temsil eden doğru parçası (a kenarı) ile sahilden ayrıldığı rotayı temsil eden doğru parçasının simetrisi olan doğru parçası (b kenarı) uç uca gelmedi.
>
> **Araştırmacı:** Uç uca gelmesindeki amacınız nedir?
>
> **Buğra:** [Alıntı 23'teki kenarları a, b, c olan üçgeni göstererek] Sahildeki noktayı seçtiğim anda şu üçgenin bir kenarı oluyor, şu diğer iki kenarı oluyor. Üçgen eşitsizliğinden dolayı şu ikisinin toplamı (a+b), şundan (c) her türlü daha fazla. Yani sahildeki şu noktayı öyle bir seçmeliyim ki şu iki doğru parçası bir doğru belirtmeli.
>
> ………………………



Alıntı 23. Gemi sorusu için Buğra tarafından üretilen geçerli görsel-sembolik model

Diyalogda Buğra; sahilden seçtiği iki farklı nokta için geminin bu noktalara yanaşırken kullandığı rotalar ile ayrılırken kullandığı rotaların yansımalarıyla oluşan üçgende, kenarlar arasındaki eşitsizliğe göre doğrusal durumun neden en kısa mesafeyi aldıracağını açıklamaktadır. Bu durum göstermektedir ki bir modeli oluşturmak kadar o modeli etkili kullanabilmek (arka planındaki düşünceyi ispatlamak) de önemlidir.

Bulgular, geçerli görsel-aritmetiksel model oluşturan bazı öğretmen adaylarının geminin rotasını özel dik üçgenlere benzeterek alacağı mesafeyi hesaplamaya çalıştıklarını ve doğru noktayı deneme-yanılma yöntemine benzer bir yaklaşımla tespit ettiklerini göstermektedir.

Diyalog 8:

Merve: İki şekilde olabilir. Ama en azı mı soruyor? En kısayı sorduğu için gemi sahildeki C noktasına gelse 120 metre yol alır, oradan B noktasına gitse 80-150-170… Bir de sahildeki D noktasına gelebilir oradan gidebilir.120-150...

Araştırmacı: Başlangıçta A-C-B güzergâhını kullansın dediniz. Alınacak yolu 120+170=290 buldunuz. Şimdi de A-D-B güzergâhını kullansa dediniz ve alınacak yolu hesaplamaya çalışıyorsunuz. Peki ortalarda (C ile D arasında) bir yere gelemez mi?

Merve: Gelebilir ama oradaki sayısal veriyi şu an çıkarmaya çalışıyorum. [C ile D arasından seçilen bir nokta için rotaların oluşturduğu üçgenlerin dik kenarlarını göstererek] Şu uzunluk ile şu uzunluğun hipotenüsünün alınabilmesi gerekiyor. Şu iki veriyi şunlara uydurmak gerekiyor. [Düşünüyor] 60 desek çıkıyor galiba.

Araştırmacı: Sahilde uğranacak noktanın D' ye uzaklığını nasıl 60 olarak belirlediniz?

Merve: [Köşesi deniz fenerinde olan üçgeni göstererek] Şurada 6-8-10 üçgeninden (60 ve 80 den)

Araştırmacı: Peki burası 80 değil de tanıyamayacağınız bir sayı olsaydı? Yani özel bir üçgeni kuramayacağınız bir sayı, mesela deniz fenerinin D noktasına uzaklığı 41 metre olsaydı?

Merve: Genelde benzerlik çıkartıyorlar üçgenlerden sorularda. Hiç 41 ile karşılaşmadım.

………………………..

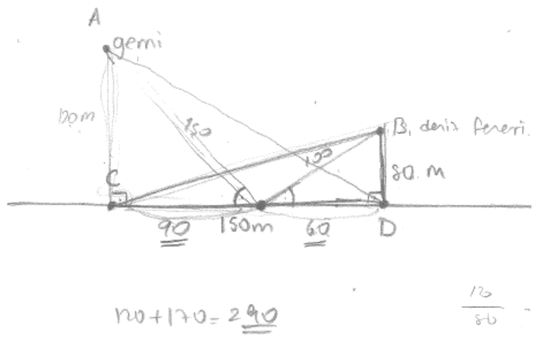
Araştırmacı: C noktasına 90 metre uzaklıkta bir yer buluyorsunuz ama sanki seçilen noktalar arasında deneme yanılma yapıyorsunuz.

Merve: Hani 3-4-5 üçgeninde dik kenarlardan yürümek varken hipotenüsten yürürsün. Yolun kısalması için 7 yerine 5 olur.

Araştırmacı: Ama C noktasına geldiğinizde de Pisagor var. (80-150-170 üçgeni) C ile D arasındaki bir nokta ([CD] nı 90'a 60 diye bölen) için de iki hipotenüsten geçmiş oluyorsunuz. O noktadaki pisagoru bu noktadaki pisagordan ayıran unsur ne olsun ki yol kısalsın?

Merve: A ile B arasındaki mesafe olabilir belki. Yani gemi ile deniz feneri arasındaki mesafe.

……………………………………..



Alıntı 24. Gemi sorusu için Merve tarafından üretilen geçerli görsel-aritmetiksel model

Alıntıdan anlaşılacağı üzere Merve doğru noktayı tespit ederken dik kenarlardan geçmek yerine hipotenüsü kullanması gerektiğini düşünse de sahildeki farklı noktalar (seçtiği noktanın biraz solundaki ya da biraz sağındaki vs.) için de iki hipotenüsten geçebileceğinin farkında değildir. Dolayısıyla adayın oluşturduğu modelin yapısal özelliklerinin tam olarak bilincinde olmadan rastlantısal bir yaklaşımla (matematiksel bir temeli ve amacı olmadan) doğru sonuca ulaştığı söylenebilir. Ayrıca "*Genelde benzerlik çıkartıyorlar üçgenlerden sorularda. Hiç 41 ile karşılaşmadım.*" ifadesine bakılırsa Merve'nin modelleme sürecinde geçmiş tecrübelerinin etkisinde kaldığı görülmektedir.

4.1.5. Tren Sorusuna İlişkin Bulgular

Bir kadın, saatte 60 km hızla köprüye yaklaşan trenin sesini duyduğunda köprünün $\frac{3}{8}$'ünü geçmiş bulunmaktadır. Arkasından gelen treni fark ettiği anda köprünün herhangi bir ucuna koşarsa kendini kurtarabilecektir. Buna göre kadının saatteki hızı **en az** kaç km olmalıdır? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Krulik ve Rudnick' den (1989) uyarlanmıştır].

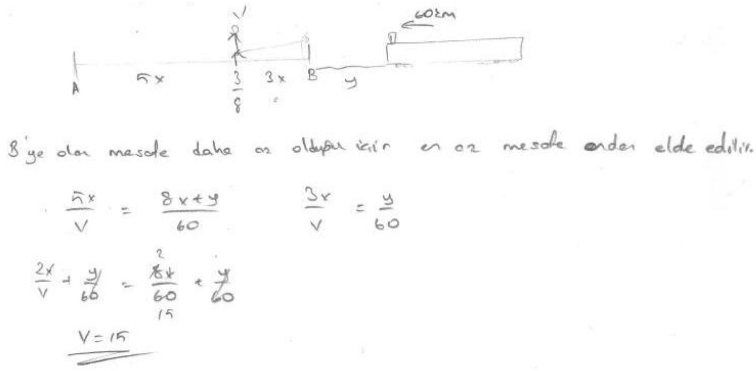
Öğretmen adaylarının bu soruda kadının köprünün her iki ucundan da kurtulabileceği bir hız bulmaları gerekmektedir. Bu doğrultuda trenin köprüye belli bir mesafede olduğunun düşünülmesi, uç noktalarına ulaşırken kadının ve trenin alacağı yollar ile sürelerin karşılıklı yorumlanması ve aralarındaki orantısal ilişkinin doğru kurulması önem arz etmektedir. Yazılı sınav kâğıtlarının analizi neticesinde öğretmen adaylarının bu soruya ilişkin üretmiş olduğu modeller yeterlikleri açısından incelenerek Tablo 13'te sunulmuştur:

Tablo 13. Tren sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE (%)
GEÇERLİ MODEL	Görsel - Sembolik	6	4,3
	Görsel - Aritmetiksel	2	1,4
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Görsel - Sembolik	21	15,1
	Görsel	6	4,3
GEÇERSİZ MODEL	Görsel - Sembolik	55	39,6
	Görsel	29	20,9
YANIT YOK		20	14,4
TOPLAM		139	100,0

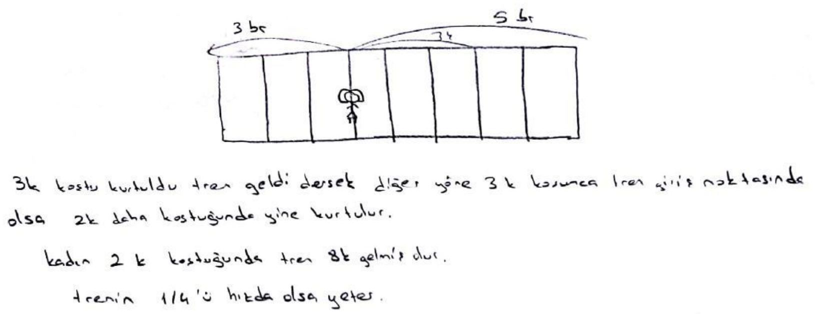
Araştırmaya katılan 139 öğretmen adayının sadece %5,7'si geçerli model üretirken, %19,4'ü geliştirilmesi gereken model, %60,5'i ise geçersiz modeller üretmiştir. Diğer taraftan herhangi bir model üretemeyen 20 öğretmen adayından 7'si köprünün uzunluğu ya da trenin kadına uzaklığı verilmediği için sorunun çözülemeyeceği şeklinde görüş bildirirken, 13'ü ise soruyu tamamen boş bırakmayı tercih etmiştir.

Katılımcıların bu soruda geçerli model üretebilmeleri için harekete başlarken trenin köprünün herhangi bir ucunda olamayacağını anlamaları, kadının köprünün uç noktalarına en geç tren ile aynı anda geldiğini düşünmeleri ve kurtulduğu her iki durum arasında yol ile zamana bağlı orantısal ilişki kurarak ortak bir hız bulmaları gerekmektedir. Bu bağlamda trenin ve kadının köprüye göre uygun biçimde yerleştirilerek oluşturulan çizime ek olarak; alınan yolların ve geçen sürenin cebirsel olarak yorumlandığı görsel-sembolik modeller ile belli bir anda kalan yollar üzerinden hızların orantısal olarak yorumlandığı görsel-aritmetiksel modeller *geçerli model* olarak kabul edilmiştir. Geçerli bir görsel-sembolik model örneği şu şekildedir:



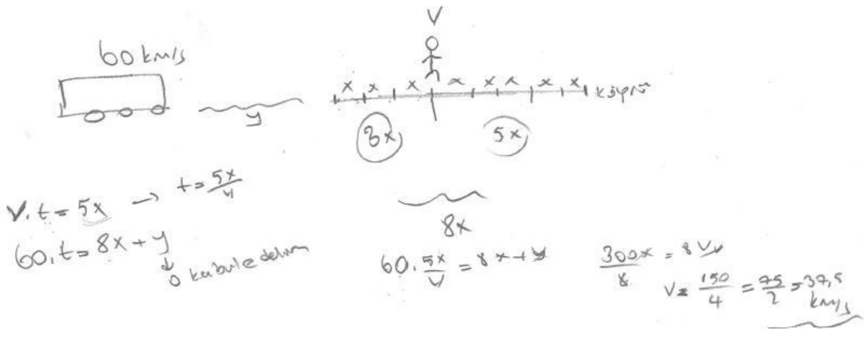
Alıntı 25. Tren sorusuna ilişkin geçerli görsel-sembolik model örneği [ÖA-72]

Bu öğretmen adayı trenin köprüye belli bir mesafede olduğunun ve kadının köprü üzerinde herhangi bir yerde bulunduğunun farkında olup söz konusu durumları değişkenlerle uygun şekilde ifade etmiştir. Ayrıca görsel modelde var olan matematiksel manayı doğru biçimde algılayıp sembolik modele aktarmada da başarılı olduğu görülmektedir. Diğer bir ifadeyle gerçek yaşam durumunu temsilen oluşturdukları çizimden yol, hız ve zaman arasındaki orantısal ilişkiyi kullanarak matematiğe doğru biçimde geçiş yapmıştır. Benzer şekilde trenin aynı yolu gittiği sürede kadının köprü üzerinde farklı yönleri seçmesi halinde ulaşacağı noktaları tespit ederek hızları arasındaki ilişkiyi kalan yollar üzerinden orantısal olarak yorumlayan öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu görsel-aritmetiksel model örneği aşağıda sunulmuştur.



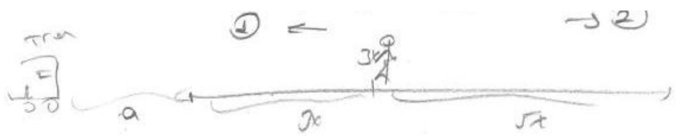
Alıntı 26. Tren sorusuna ilişkin geçerli görsel-aritmetiksel model örneği [ÖA-52]

Soru hikâyesinde verilen bilgileri kullanarak gerçek yaşam durumuna uygun bir çizim yapmasına rağmen bu görsel model üzerinde matematiksel mantığı yanlış işleten ya da herhangi bir işlem yürütmeyen katılımcıların oluşturmuş oldukları modeller *geliştirilmesi gereken model* olarak kabul edilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu görsel-sembolik model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 27. Tren sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken görsel-sembolik model örneği [ÖA-21]

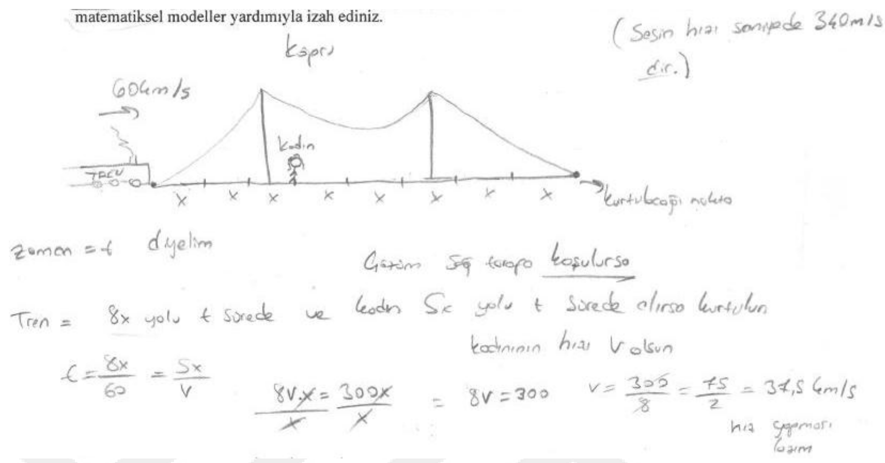
Bu öğretmen adayının trenin ve kadının köprünün üzerindeki yeri hakkındaki algısı doğru olmasına rağmen alınan yollar, süreler ve hızlar arasındaki ilişkileri doğru kuramaması model üzerinden vardığı sonuçların gerçek yaşam durumu için anlamlı olmasını engellemiştir. Öğrencinin trenin köprüye uzaklığı olan 'y' mesafesini sıfırlaması, treni köprünün başında kabul etmesi ile aynı olup kadının her iki uçtan kurtulmasına aykırı bir durumdur. Gerçek yaşamdan matematiğe geçişte sıkıntı yaşandığı durumlara ilişkin bir başka geliştirilmesi gereken model örneği aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 28. Tren sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken görsel model örneği [ÖA-80]

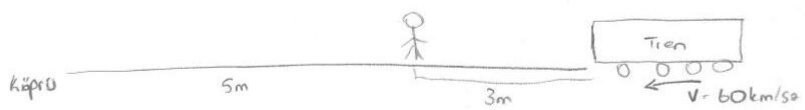
Bu alıntıda ise problem hikâyesine uygun görsel modelin üretildiği, ancak modeldeki matematiksel ilişkileri aritmetiksel ya da sembolik dile aktararak kullanma konusunda herhangi bir yorumun yapılmadığı görülmektedir. Bu öğrenci kadın ve trenin aldığı yollar ile süreler arasında orantısal bir ilişki kuramamış da olabilir çözüm yapmaya gerek duymamış da olabilir.

Trenin ve kadının köprüye göre yerinin ya da ilerleme yönünün doğru olarak belirlenemediği çizimler ile bu çizimler üzerinde gerçek yaşam durumunun uygun biçimde temsil edilemediği yapılar *geçersiz model* olarak değerlendirilmiştir. Buna ilişkin örnek bir model aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 29. Tren sorusuna ilişkin geçersiz görsel-sembolik model örneği [ÖA-7]

Bu kategorideki modeller problem ifadesindeki bilgileri temsil etmekten uzaktır. Yukarıdaki alıntıda görüldüğü üzere kimi öğrenciler trenin köprüye belli bir mesafede yerleştirilmesi gerektiğini anlayamamışlardır. Bu durum kadının köprünün her iki ucundan kurtulabilmesi ihtimaliyle çelişmektedir. Mantık hatası içeren ancak çözümde kullanılmadan olduğu gibi bırakılan görsel bir model şu şekildedir:



Alıntı 30. Tren sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği [ÖA-90]

Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlara ilişkin bulgular aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Tablo 14'te görüldüğü üzere katılımcılardan 5 tanesi geçerli model, 4 tanesi geliştirilmesi gereken model üretebilmiştir. Katılımcılar geçerli modellerin tamamında görsel ve sembolik yapıları birlikte kullanmayı tercih etmişlerdir.

Tablo 14. Tren sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	Gönül	Aysun	Esin	Merve	Özgür	Yavuz	Buğra	Zeynep	Nihat
Geçerli Model		GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD				GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD
Geliştirilmesi Gereken Model	GÖR SEM MOD			GÖR SEM MOD	GÖR SEM MOD	GÖR MOD			
Geçersiz Model									

Kısaltmalar: GÖR-SEM-MOD: Görsel-Sembolik Model, GÖR-MOD: Görsel-Model

Bulgular, korku ve kaygı gibisinden duyusal etmenlerin kimi katılımcıların matematiksel mantığı doğru işletmelerini olumsuz etkilediğini işaret etmektedir. Bu durum Özgür isimli öğretmen adayının konuşmalarından anlaşılmaktadır:

Diyalog 9:

Araştırmacı: Kadın geriye doğru koşamaz demişsiniz. Geriye neden koşamıyor?

Özgür: Geriye koşamaz çünkü koşsa trenle çarpışacak o zaman.

Araştırmacı: Peki öyle bir hızla gelip trenle çarpışmadan oradan da kurtulamaz mı?

Özgür: [Soruyu okuyor] Doğru, zaten herhangi bir ucuna koşarsa kendini kurtarabiliyormuş.

Araştırmacı: Hem şu da var. Trenin üzerine gittiğinde 3x yol alacak, diğer tarafa koştuğunda da 5x yol alacak. 5x'e yöneldiğinde de risk alıp yolu uzatmış olmuyor mu?

Özgür: Evet. Yanlış düşünmüşüm. …

Araştırmacı: Peki şöyle sorayım. Kadının hızı ile trenin hızını kıyaslamamız mümkün mü?

Özgür: Mantıken düşünürsek tren daha hızlıdır.

Araştırmacı: Şu an öyle bir bilgimiz yok ama. Yollar arasında bir kıyaslama yapabilir miyiz?

Özgür: İşte hızları karşılaştırabilirsek yolları da karşılaştırabiliriz ama trenin köprüye olan uzaklığını bilmiyoruz.

Araştırmacı: Peki zamanları kıyaslayabilir miyiz?

Özgür: [Trenin köprüye olan uzaklığını göstererek] İşte bunu çözerken şurayı bilmediğimiz için zamanları da kıyaslayamayız. O yüzden hızları da bulamayız.

Araştırmacı: Ama uç noktalarına kadın trenden önce gelebilir mi? Çünkü kadın daha kısa sürede gelirse kurtulabileceği daha düşük bir hız olmaz mı?

Özgür: O zaman karşılaşmış oldukları durum gibi düşüneceğiz. [Köprünün uç noktasını göstererek] Bu buraya t zamanda gelmiş olsa, trenin hızı zaten 60. Bu da t zamanda gelmiş olacak. Yani 3x= V_k.t olacak. Burada trenin köprüye olan uzaklığını bilmiyoruz. k desek oradaki yola da. k=60.t olacak.

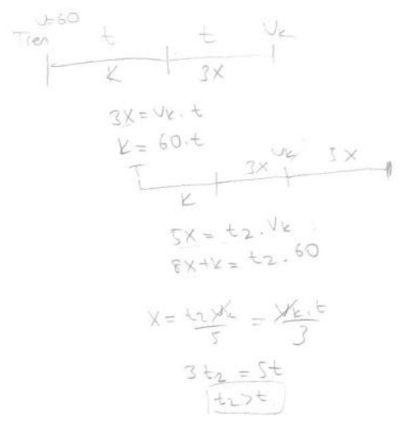
Araştırmacı: Evet. Bu birinci durum. (Kadının 3x, trenin k yol aldığı durum)

Özgür: Evet. Bir de kadının 5x'e gittiğini düşünürsek. Zamana t_2 desek burada da. Tren bu sefer 8x+k yol alacak. O da t_2 zamanda alacak ve hızı 60.

Araştırmacı: Bu iki ifadeyi birbiriyle kıyaslayabilir miyiz?

Özgür: x'leri eşitleyebiliriz bence buradan. Oradan zamanları da kıyaslayabiliriz. [İşlem yapıyor] x=$t_2.V_k/5$. O da eşittir $V_k.t/3$. Bunlar sadeleşiyor. 3. t_2= 5.t Yani t_2, t'den büyük oluyor. Yani ikinci durumda daha fazla zaman gerekiyor.

…………………………..



Alıntı 31. Tren sorusu için Özgür tarafından üretilen geliştirilmesi gereken görsel-sembolik model

Alıntıdan anlaşılacağı üzere Özgür, mülakatın başında kadının trenin geldiği yöne doğru kaçması ihtimalini düşünmediği için süreler ve alınan yollar arasında bir ilişki kuramamıştır. Görüşmenin ilerleyen bölümlerinde araştırmacının kadın ile trenin hızlarını, aldıkları yolları ve sürelerini kıyaslamaya yönelik soruları üzerine Özgür anlık bir kurtulma için ikisinin köprünün uç noktalarına ulaşma sürelerinin eşit olması gerektiğinin farkına varmıştır. Ancak her iki durumdan elde ettiği bağıntılarda değişkenleri birbiri cinsinden ifade edemediği için bir sonuca ulaşamamıştır.

Mülakat bulguları modelleme döngüsünün sıkı sıkıya takip edilmesi gereken bir kurallar zinciri olmadığını; aşamaların birbiri ile koordineli ve esnek yürütülmesi gereken bir süreç olduğuna işaret etmektedir. Buna ilişkin bir alıntı aşağıdaki sunulmuştur:

Diyalog 10:

Esin: Her iki ucundan da kendini kurtarabiliyorsa dedim. Bir o uca gideceğim bir o uca gideceğim. İkisine de götürüp eşitleyerek buldum ben hızını. Hani trenin hızını vermiş.

Araştırmacı: Kadın her iki uca da gittiğine göre tren köprüden belirli bir mesafe uzakta mı?

Esin: Yani illa ki belirli bir mesafeye koydum. Zaten sınavda herkesin sorduğu o belli mesafeydi. Hani o belli mesafeyi nasıl yok edeceğiz? Ben de o belli mesafeyi her ikisinde kullanıp birbirini götürmesini sağlayarak yapmak istedim. Öndeki veya arkadakinden çıksa kurtuluyor falan tarzı bir ifade olsaydı soru çıkmaza gidiyor zaten de.

Araştırmacı: Peki devamında nasıl düşündünüz?

Esin: Köprünün 3/8'ini gitmiş dediğinde ben direk hani paylaştırdım. 3x'e 5x diye. Bulunduğu yeri belirledim. Önce hani hiçbir şey hareketsizmiş gibi çizdim. Bunun hızını zaten bilmiyorum. Trenin ne kadar uzaklıkta olduğunu bilmiyorum. Sadece trenin hızını biliyorum.

Araştırmacı: Peki burada kullandığınız oran ne anlama geliyor?

Esin: Zamandan düşündüm. Aldığı yol ile hızının oranı zamana eşit olacak. Her iki uçtan da kurtarıyorsa ikisine de gitmesi için gereken süre eşit. Yani trenle kadının gelme süreleri eşit.

Araştırmacı: Kadının köprünün kurtulacağı ucuna trenden önce gelmemesi mi gerekiyor?

Esin: En az hızı olduğuna göre ikisinden de ucu ucuna kurtulması gerekiyor. İkisi de buraya geldiğine göre dedim, aldığı yol ile hızı oranlıyorum. Aldığı yol 3x, hızı V. Tren de aynı sürede geleceğine göre aldığı yol y, hızı 60 dedim. Birinciden bunu buldum buradan zaten bir şey çıkaramıyorum. Bu birinci durum için yazdığım bağıntı, bir de ikinci durum için yazdım.

Araştırmacı: İkinci durum için ne kadar yol alacak?

Esin: İkinci için de 5x buraya alacak bu. Yine aynı hız ile alacak. Çünkü en azını istiyor benden. Bu da yine 60 km/h ile alacak ama bu 8x + y alacak bunda. İkinci yol için.

Araştırmacı: İki denklemi ortak mı çözüyorsunuz?

Esin: Evet zaten şuradan xy ' li bir denklem geliyor. Burada yerine yazınca hız geliyor.

……………………………

Esin'in trenin köprüye uzaklığı ve köprünün uç noktalarına kadının ve trenin ulaşma süreleri hakkında yaptığı çıkarımlar modelleme sürecinde önemli rol oynamaktadır. Mülakat esnasında kullandığı "*Ben de o belli mesafeyi her ikisinde kullanıp birbirini götürmesini sağlayarak yapmak istedim*." ve "*Her iki uçtan da kurtarıyorsa ikisine de gitmesi için gereken süre eşit*." ifadeleri de bu durumu doğrular niteliktedir.

4.1.6. Pizza Şirketi Sorusuna İlişkin Bulgular

Yerel gazetede pizza dağıtım işinde çalışmak isteyenler için bir ilan yer almaktadır. A şirketi her çalışanına aylık 120 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,2 TL prim vermektedir. B şirketi ise çalışanına aylık 48 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,8 TL prim vermektedir. Sizce bu şirketlerden hangisinde çalışmak daha kârlıdır? Neden? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz [Llinares ve Roig' den (2005) aktaran Özgün'den (2012) alınmıştır].

Bu soru katılımcıların farklı türden modeller üretebilme yeterliklerini incelemeyi amaçlamaktadır. Şirketlerin hangisinde çalışmanın avantajlı olduğuna karar verebilmek için oluşturulacak modellemelerde belirli bir sayıda pizza satışı ile sınırlı kalınmayıp bütün durumların değerlendirilebileceği genel modellerin üretilmesi önem arz etmektedir. Tablo 15'te görüldüğü üzere öğretmen adaylarının yazılı sınavda üretmiş olduğu modeller *geçerli*, *geliştirilmesi gereken*, *sınırlı* ve *geçersiz modeller* olmak üzere dört kategori altında toplanmıştır.

Tablo 15. Pizza şirketi sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE (%)
GEÇERLİ MODEL	Aritmetiksel	8	5,8
	Sembolik	49	35,3
	Sembolik-Grafiksel	4	2,9
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Sembolik	21	15,1
	Sembolik-Aritmetiksel	10	7,2
SINIRLI MODEL	Aritmetiksel	42	30,2
GEÇERSİZ MODEL	Sembolik	2	1,4
YANIT YOK		3	2,2
TOPLAM		139	100,0

Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının yaklaşık %44'ünün geçerli modeller ürettiği görülmektedir. Bu modellerin çok büyük çoğunluğunun (%35,3'lük kesim) sembolik modellerden oluşması dikkat çekmektedir. Geliştirilmesi gereken model oluşturan %15,1'lik kesim sadece sembolik yapıları tercih ederken, %7,2'lik kesim sembolik ve aritmetiksel temsilleri birlikte kullanmayı tercih etmiştir. Öğretmen adaylarının %30,2'sinin oluşturduğu modellerin sınırlı olduğu ve bu modellerin tamamının aritmetiksel hesaplamalara dayalı olduğu görülmektedir.

Katılımcıların bu soruda geçerli model üretebilmeleri için kazançları bütüncül bir yaklaşımla değerlendirmeleri gerekmektedir. Dolayısıyla A şirketinde maaşın B şirketinde primin fazla olduğunun dikkate alınması; belirli bir pizza sayısına kadar A şirketinde çalışmanın, bu pizza sayısından sonra ise B şirketinde çalışmanın daha kârlı olacağını düşünmeleri beklenmektedir. Bu bağlamda maaşlar arasındaki farkın primler arasındaki fark ile kıyaslandığı aritmetiksel modeller, pizza sayısına değişken atanarak kazançların sadece denklem yardımıyla karşılaştırıldığı sembolik modeller ve kazançların hem cebirsel denklem hem de grafik aracılığıyla incelendiği sembolik-grafiksel modeller *geçerli model* olarak kabul edilmiştir.

Şirketlerin birinde maaşın diğerinde primin avantajlı olduğunu görerek kazançların eşitlendiği pizza sayısını bulabilmek için maaşlar arası farkı primler arası farka oranlayan öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu geçerli aritmetiksel model aşağıda sunulmuştur. Bu modelin dağıtılan pizza sayısı arttıkça B şirketinden daha fazla prim alınacağı, elde edilen bu kazanımın ise zaman içinde şirketler arası maaş farkını kapatacağı, 120 pizzadan sonra ise B şirketinde çalışmanın daha kârlı olacağı düşüncesini içerdiği açıktır.

* A şirketi: 120 TL maaş + 1,2 TL pizza başına prim
* B şirketi: 48 TL maaş + 1,8 TL pizza başına prim

120 − 48 = 72 TL

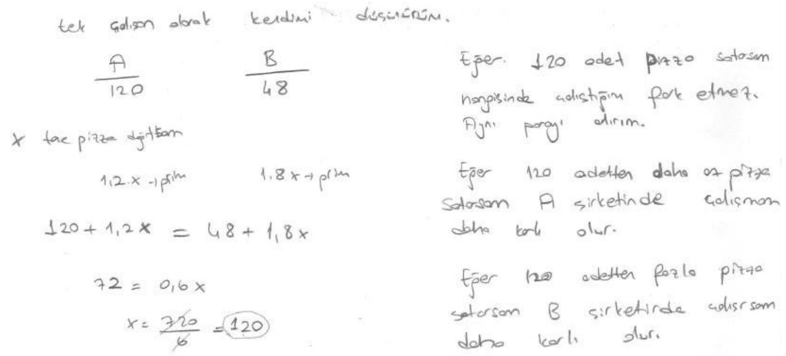
1,8 − 1,2 = 0,6

* $\frac{72}{0,6} = \underline{120}$ pizza

B şirketinde çalışan ile A şirketinde çalışanlar 120'şer pizza dağıttıklarında aynı parayı kazanmış oluyorlar. 121.nci pizzadan itibaren B şirketindeki daha çok kazanmaya başlar.

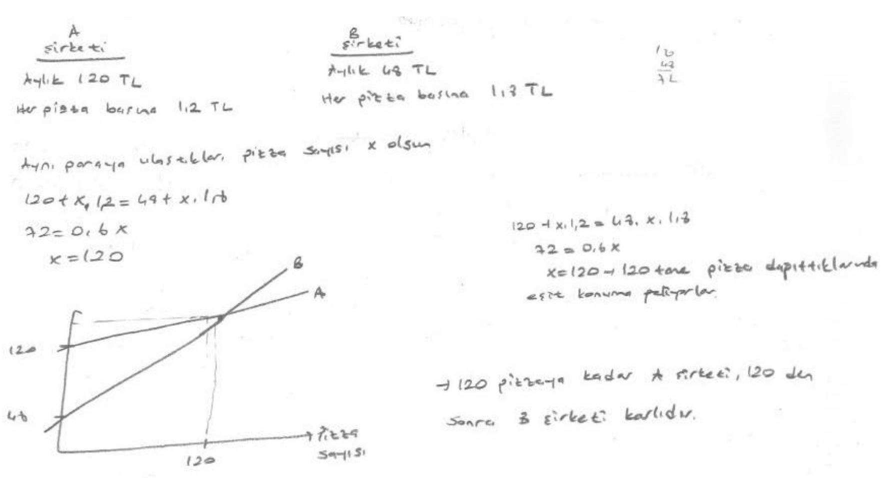
Alıntı 32. Pizza şirketi sorusuna ilişkin geçerli aritmetiksel model örneği [ÖA-12]

Kazançları maaş ile primin toplamı biçiminde ifade ederek ve pizza sayısına ortak bir değişken atayarak kaç pizza dağıttığında kazançların eşitleneceğini görmek için denklem kuran öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu geçerli sembolik model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 33. Pizza şirketi sorusuna ilişkin geçerli sembolik model örneği [ÖA-77]

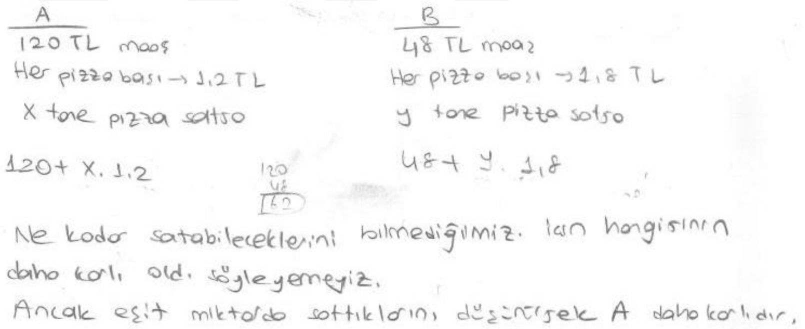
Bu öğretmen adayı kazancın pizza sayısına bağlı olarak değiştiğini görmüş ve bu değişkenin belli bir değeri için kazançların eşit olabileceğini düşünmüştür. Bu görüşünü 120+1,2.x=48+1,8.x biçiminde yazdığı denklemin çözümü olan 120 pizza için de doğrulamıştır. Bu değer A şirketinin kârlı olmaktan çıkıp B şirketinin kârlı olmaya başladığı bir geçiş noktası olup üç durum yaratmaktadır (x<120, x=120, x>120). Dikkat edilecek olursa sembolik modelde düşünce kazançların eşitlenme anına odaklanmış olup, bu kritik değerin altındaki ya da üstündeki durumlar hakkında ortaya konulan sembolik model üzerinde doğrudan bir gözlem yapılamamaktadır. Oysa sembolik modellerin eşlik ettiği grafiksel modellerde kazançların başlangıçtan itibaren seyrini, kazançların eşitlendiği kritik değerin altında ya da üstünde hangi şirketin daha kârlı olabileceğini gözlemlemek mümkündür. Aşağıda geçerli sembolik-grafiksel modellerden bir örnek sunulmuştur.



Alıntı 34. Pizza şirketi sorusuna ilişkin geçerli sembolik-grafiksel model örneği [ÖA-76]

Dikkat edilecek olursa bu öğretmen adayı kazançlar arasındaki ilişkiyi sembolik denklem ile kıyaslamakla kalmamış kazanç (y) ve pizza sayısı (x) gibi iki değişken arasındaki ilişkiyi grafik üzerinde de gözlemlemiştir.

Kazançların pizza sayısı yerine atanan herhangi bir değişkenin yardımıyla her iki şirket için de sembolik bir fonksiyon olarak ifade edilmesine rağmen şirketler arası kıyaslamanın yapılamadığı ya da bu fonksiyon üzerinde sadece belirli değerler için kıyaslamanın yapılabildiği modeller *geliştirilmesi gereken modeller* olarak değerlendirilmiştir. Örnek teşkil etmesi açısından aşağıda sembolik bir model sunulmuştur. Bu model incelendiğinde öğretmen adayının sadece şirketlerin kazancını maaş ile primin toplamı biçiminde ifade ettiği ve bu cebirsel ifadeleri birbiri ile kıyaslayamadığı görülür.


A
120 TL maaş
Her pizza başı → 1,2 TL
x tane pizza satsa
120+ x. 1,2

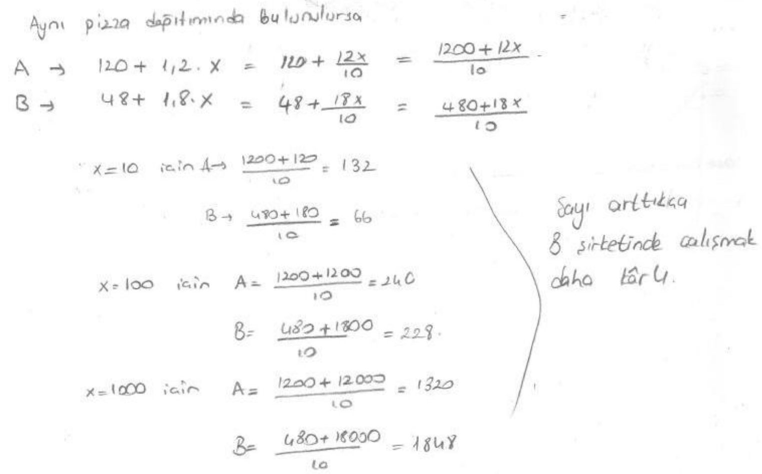
B
48 TL maaş
Her pizza başı → 1,8 TL
y tane pizza satsa
48+ y. 1,8

120
48
72

Ne kadar satabileceklerini bilmediğimiz için hangisinin daha karlı old. söyleyemeyiz.
Ancak eşit miktarda sattıklarını düşünürsek A daha karlıdır.

Alıntı 35. Pizza şirketi sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken sembolik model örneği [ÖA-4]

Bu öğretmen adayı kazançların pizza sayısına göre değişeceğini fark etmekle birlikte belli bir değer için eşit olabileceğini görememiştir. Ayrıca değişkenleri x ve y biçiminde farklı seçmesi iki şirketi aynı şartlarda (aynı sayıda pizza satışı) değerlendirmesi gerektiğinin farkında olmadığını göstermektedir. Kazanç fonksiyonlarında belirli değer ya da değerler için bulduğu sonuçları birbiriyle kıyaslayan öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu geliştirilmesi gereken bir başka model şu şekildedir:



Aynı pizza dağıtımında bulunulursa

$A \to 120 + 1{,}2 \cdot x = 120 + \frac{12x}{10} = \frac{1200+12x}{10}$

$B \to 48 + 1{,}8 \cdot x = 48 + \frac{18x}{10} = \frac{480+18x}{10}$

$x=10$ için $A \to \frac{1200+120}{10} = 132$

$B \to \frac{480+180}{10} = 66$

$x=100$ için $A = \frac{1200+1200}{10} = 240$

$B = \frac{480+1800}{10} = 228$

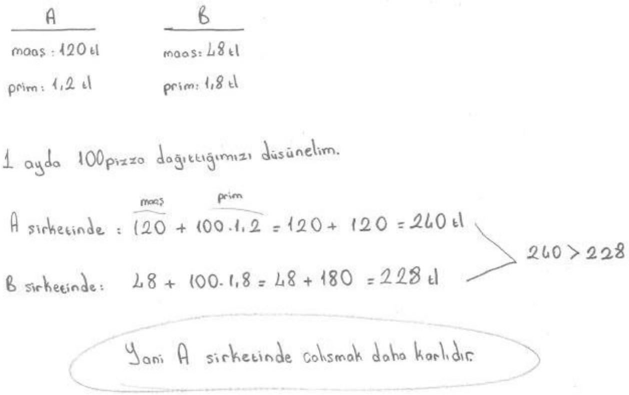
$x=1000$ için $A = \frac{1200+12000}{10} = 1320$

$B = \frac{480+18000}{10} = 1848$

Sayı arttıkça B şirketinde çalışmak daha kârlı.

Alıntı 36. Pizza şirketi sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken sembolik-aritmetiksel model örneği [ÖA-26]

Diğer taraftan kazançların sadece belirli sayıda pizza dağıtımı için hesaplanarak kıyaslandığı modeller *sınırlı model* olarak kabul edilmiştir. Sınırlı modellerde kazançların geliştirilmesi gereken modellerde olduğu gibi pizza sayısına atanan bir değişkene bağlı bir fonksiyon biçiminde ifade edilemediği ve yalnızca bir iki spesifik girdi üzerinden değerlendirildiği söylenebilir. Bu modellerden biri aşağıda sunulmuştur.



A	B
maaş: 120 tl	maaş: 48 tl
prim: 1,2 tl	prim: 1,8 tl

1 ayda 100 pizza dağıttığımızı düşünelim.

A şirketinde: $\overbrace{120}^{\text{maaş}} + \overbrace{100.1,2}^{\text{prim}} = 120 + 120 = 240$ tl

B şirketinde: $48 + 100.1,8 = 48 + 180 = 228$ tl

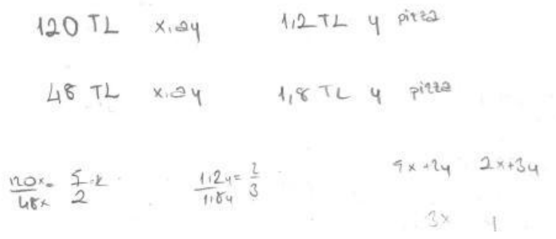
$240 > 228$

Yani A şirketinde çalışmak daha karlıdır.

Alıntı 37. Pizza şirketi sorusuna ilişkin sınırlı aritmetiksel model örneği [ÖA-3]

Bu kategorideki öğretmen adayları iki şirketin kazançlarını tek bir değer ya da değerler için kıyaslamanın yeterli olacağını düşünmüşlerdir. Dolayısıyla sınırlı modeller kazançların dağıtılan pizza sayısına bağlı olarak değişebildiğini, belirli bir değer için kazançların eşitlenebileceğini ya da başka değerler için durumun diğer şirketin lehine dönebileceği fikirlerini içermediği için düşüncede bir kısıtlılık söz konusudur.

Geçerli model üreten öğretmen adaylarının aksine kazanç fonksiyonlarını oluşturamayan, iki şirket arasında herhangi bir kıyaslama yapamayan ya da mantık hatası içeren modeller *geçersiz model* olarak değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu geçersiz sembolik model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 38. Pizza şirketi sorusuna ilişkin geçersiz sembolik model örneği [ÖA-29]

Görüşmeler sırasında kimi öğretmen adaylarının yazılı sınavda üretmiş oldukları modelleri geliştirerek geçerli modellere dönüştürdüğü, kimi adayların ise farklı geçerli modeller üretebildiği tespit edilmiştir. Mülakat bulguları Tablo 16'da sunulmuştur.

Tablo 16. Pizza şirketi sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	SEM GRF MOD	SEM GRF MOD	ARİT MOD	SEM MOD	SEM MOD	SEM GRF MOD	SEM GRF MOD	SEM MOD	SEM MOD

Kısaltmalar: SEM-GRF-MOD: Sembolik Grafiksel Model, SEM-MOD: Sembolik Model, ARİT-MOD: Aritmetiksel Model

Bulgular yazılı sınavda sembolik-grafiksel model gibi farklı türden modelleri birlikte geliştirebilen adayların olaya daha ilişkisel bakabildiklerini ve bu modelleri kullanma hâkimiyetleri açısından sonradan gelişme sağlayan adaylara göre daha başarılı olduklarını göstermektedir. Örneğin Aysun adlı öğretmen adayı kazançları kıyaslamada grafiksel modeli kullanma gerekçesini aşağıdaki gibi açıklamaktadır.

Diyalog 11:

Aysun: Şöyle düşündüm: Grafik oluşturayım, illa bir noktada kesişmeleri gerekecek bunların. Birini 48'den birini 120'den başlattım, şimdi benim için önemli olan nokta kesiştikleri, yani aynı miktarı aldıktan sonra çalışma performansıma göre hangisinde daha fazla para kazanırım onu düşünürüm dedim. Nerede birleştirmişim? [Grafiğe bakarak] 120 adet pizzada kesişti.

Araştırmacı: Siz burada modellemeye grafikle mi başladınız cebirle mi başladınız?

Aysun: Cebirsel denklemi yazdım sonra grafikle yorumlayabileceğimi düşündüm hani doğrusal bir grafik oluştururum diye düşündüm.

Araştırmacı: Peki burada grafik çizmenizdeki gaye neydi?

Aysun: Eşitlendiği noktaya bakayım da sonrasında hangisi y eksenine yaklaşacak dedim. A yatay hareketlilik yapıyor, B dikey hareketlilik yapıyor buraya [y eksenine] daha yakın.

Araştırmacı: Yatay hareketlilik olarak kast ettiğiniz eğiminin daha düşük olması mı?

Aysun: Evet eğime göre yorumlamak istedim. Diğeri daha hızlı ilerliyor. Eşitlendikten sonra daha fazla para alacağım orda.

Araştırmacı: Peki 120 için kritik durum nedir yani 120'yi neden bulma ihtiyacı hissettiniz?

Aysun: Hani 120'de her ikisinde de eşit miktar para alacağım. Yani buraya kadarki çalışmamda hani performans olarak bu kadar çalışsam A'da yüksek alırım dedim. Sonrası…

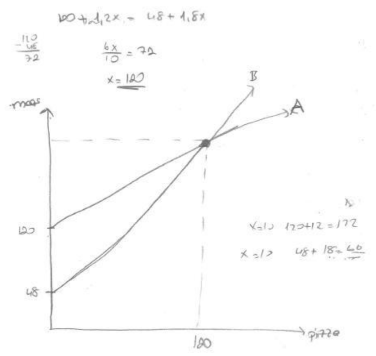
Araştırmacı: Yani şunu soruyorum 120'nin öncesi veya sonrasındaki durum farkı ne?

Aysun: Sayısal değerler aynı orada, sonrasında birisi 1,2-1,2 TL artacak diğeri 1,8-1,8 artacak.

Araştırmacı: O zaman bir müddet sonra diğer şirket arayı açmaya mı başlıyor?

Aysun: Evet arayı açmaya başlıyor. Şimdi buradayken bunların referans noktaları aynı değildi yani başlangıçta eşit bir koşulda değillerdi. Ama şu noktadan sonra bunlar eşit koşulda hareket edecekler. O yüzden orayı bulmak istedim. Çünkü A şirketi ilk başta 120 TL veriyor, fazla bir değerden başlıyor. Ama bu 48 TL veriyor daha geriden geliyor. Ama bu noktada şu an her ikisi de aynı. Koşu yarışması gibi düşünelim aynı noktadan başlayan var, farklı noktadan var.

…………………......



Alıntı 39. Pizza şirketi sorusu için Aysun tarafından üretilen geçerli sembolik-grafiksel model

Aysun'un "*Grafik oluşturayım, illa bir noktada kesişmeleri gerekecek bunların*." ve "*Şimdi buradayken bunların referans noktaları aynı değildi yani başlangıçta eşit bir koşulda değillerdi*." ifadelerine bakılırsa grafikteki kesişim noktasının kazançlar açısından kritik bir an oluşturduğunun ve model üzerindeki etkisinin farkında olduğu anlaşılmaktadır.

Diğer taraftan yazılı sınavda sınırlı model üreten kimi öğretmen adaylarının mülakatta geçerli modeller oluştursalar da bu modelleri etkin biçimde kullanamadıkları gözlenmiştir. Örneğin aşağıdaki diyalog incelendiğinde Merve adlı öğretmen adayının başlangıçta iki şirketi aynı şartlarda kıyaslamak gerektiğinin bile farkında olmadığı ve oluşturduğu sembolik modelde hala aritmetiksel hesaplamalar yapma eğiliminde olduğu görülmektedir.

Diyalog 12:

Merve: Burada kafamdan belli bir sayı verdim. İşte 200 pizza dağıtsın dedim. Gelirlerini hesapladığım zaman 120+1,2.200=360 TL etti. Diğerinde 48+1,8.200=408 TL etti. İlk olarak maaşı fazla diye düşünürsek A şirketi daha kârlı geliyor. Belli bir değerden sonra B daha kârlı.

Araştırmacı: Kazançları 200 pizza gibi sadece belirli bir değer için kıyaslamamız yeterli olur mu? Yani daha bütünsel yaklaşmak için 200'ün dışındaki durumları nasıl değerlendirebiliriz?

Merve: [Düşünüyor] Bir x değeri desek sattığı pizza için.

Araştırmacı: Yani değişken bir durum mu? O zaman farklı bir pizza sayısı için diğer şirket kârlı çıkabilir mi? Mesela 100 pizza için düşünsek?

Merve: 100 pizzayı denediğimiz zaman... [Hesaplar] Bu sefer A şirketi kârlı.

Araştırmacı: Siz 200 pizza için B şirketi kârlı demiştiniz. 100 pizza için A şirketi kârlı oldu.

Merve: Yani o işte belli bir değerin üstüne çıkması gerekiyor ki B şirketi, A'dan kârlı olsun.

Araştırmacı: Ama o kritik yeri nasıl bulacağız? Bunların birbirine üstünlük sağladıkları o sınır neresi? Yani nerede durum B şirketinin lehine değişiyor?

Merve: Onu şöyle bulabiliriz. Her ikisinin de eşit olduğu kazançlar mesela 1200 lira olsun. Bu gelire göre toplam dağıttığı pizza sayılarını bulsam. [Düşünüyor]

Araştırmacı: Yani kazançların eşit çıktıkları bir durum oluşabilir mi? Yoksa kazanç olarak illa biri diğerinden üstün müdür?

Merve: Oluşabilir. Aynı olduğu durum olabilir.

Araştırmacı: O anı nasıl bulabiliriz?

Merve: Şimdi x ile y'den gideceğim ama ikisi de aynı pizzayı (x tane) mı dağıtacak, Yoksa farklı sayılarda (biri x tane, diğeri y tane) pizza dağıtıp mı? Büyük ihtimal farklı olur.

Araştırmacı: Farklı sayıda pizza sattığımızda aynı firmada bile farklı primler verilmez mi? Ya da aynı sayıda pizza sattıklarında kazançlarının eşitlendiği bir durum oluşamaz mı?

Merve: Oluşabilir. X tane satsalar? Ben iki durumu 120 + 1,2 x = 48 + 1,8 x yapsam ne olur? [işlem yapıyor] 120 pizzada ikisinin de kazançları eşitleniyor. 120'nin üstüne çıkınca diğeri.

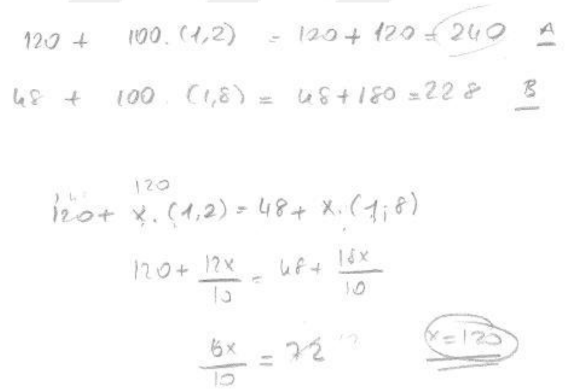
Araştırmacı: Peki o zaman kazançları eşitlememizdeki gaye ne oldu?

Merve: İkisi de kaç pizza satarsa eşitlenir kazançlar. Buna bakmak için

Araştırmacı: Yani bu pizzanın üstüne çıktığında biri altında kaldığında diğer şirket mi kârlı?

Merve: Evet. 119 ile 121'e baktığımızda hangisinin kârlı olduğunu bulabiliriz.

……………………….



Alıntı 40. Pizza şirketi sorusu için Merve tarafından üretilen geçerli sembolik model

Merve mülakatta yazılı sınavdaki özel bir değer için şirketlerden elde edilecek kazançları kıyaslamanın yeterli olacağı düşüncesini revize ederek geçerli sembolik model üretse de bulduğu kritik değerin kazançlar için etkisini bütünsel açıdan yorumlayamamış ve sınır değerin üzerine çıktığında direk primi yüksek olan B şirketinin avantajlı olduğunu görememiştir. Hatta "*119 ile 121'e baktığımızda hangisinin kârlı olduğunu bulabiliriz*." ifadesine bakılırsa Merve'nin kazançları hala bu değerler için hesaplayarak kıyaslama düşüncesinde olduğu anlaşılmaktadır.

4.2. Ders Programındaki Konu ve Kavramlarla Alakalı Sorulara İlişkin Bulgular

Bu bölümdeki sorularda ise öğretmen adaylarından ders programındaki konu ve kavramların izahına yönelik model üretmeleri istenmişti. Dolayısıyla katılımcıların oluşturacakları modeller ile bir konu ya da kavramı somutlaştırmaları, bir bilginin mantığını açıklamaları veya kanıtlamaları beklenmektedir. Bulgular genelde, öğretmen adaylarının bu izahları önceden gördükleri modellere benzer modellerle yapmaya çalıştıklarını ve yeni özgün modeller üretmede sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Diğer taraftan katılımcılar modelleri zihinsel bir araç olarak (genelleme yapma, temsil etme vs.) kullanmaları gereken sorularda diğer sorulara göre zorlanmaktadır. Ayrıca konu ve kavramların izahı için farklı biçimlerde modellenebilen (görsel, sembolik vs.) sorularda katılımcıların çoğunlukla sembolik modelleri tercih ettikleri görülmüştür. Görsel modellerde ise ortaya konulan şekilleri oluşturan elemanların birbirinden bağlantısız kullanıldığı ve sürecin değil sonucun modellendiği görülmektedir.

4.2.1. Pisagor Bağıntısı Sorusuna İlişkin Bulgular

Pisagor teoreminde $a^2 + b^2 = c^2$ dir. Bu bilginin mantığını izah etmek için (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Teoremin doğruluğunu göstermek için yapılan modellemelerde 3-4-5 gibisinden özel dik üçgenler ile sınırlı kalınmayıp bütün dik üçgenler için geçerli olacak genel modellerin üretilmesi önem arz etmektedir. Bu soruya ilişkin yazılı sınav kâğıtlarının analizinden elde edilen bulgular Tablo 17'de sunulmuştur:

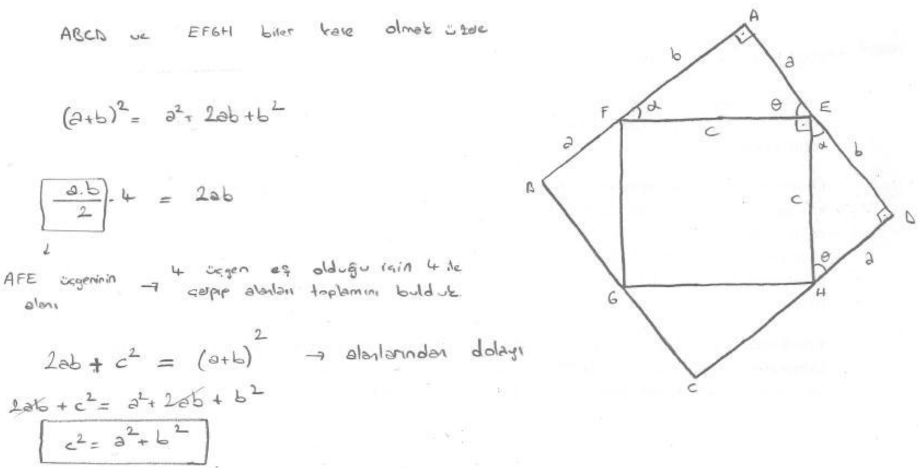
Tablo 17. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE(%)
GEÇERLİ MODEL	Görsel	8	5,8
	Sembolik	7	5,0
	Etkinlik Temelli	22	15,8
SINIRLI MODEL	Sembolik	5	3,6
GEÇERSİZ MODEL	Görsel	84	60,4
	Sembolik	4	2,9
YANIT YOK		9	6,5
TOPLAM		139	100,0

Katılımcıların %26,6’sının geçerli modeller ürettiği görülmektedir. Bu modelleri oluşturan %5,8’lik kesim görsel yapıları, %5,0’lık kesim sembolik yazılımları ve %15,8’lik grup ise uygulama ve etkinlik içerikli yapıları kullanmıştır. %3,6’lık sınırlı modelin tamamı ise semboller kullanılarak oluşturulmuştur. Yaklaşık katılımcıların %63,3’ünün ürettiği modellerin geçersiz olduğu, bunlardan %2,9’u hariç diğerlerinin görsel yapılardaki modeller olduğu görülmektedir.

Kare ve üçgen gibi şekillerin alan bağıntılarıyla ilişki kurarak ve geometri bilgilerini farklı şekillerde sentezleyerek görsel model oluşturan, geçmiş teorik bilgilerinden (Cos Teoremi, Öklid Teoremi) yararlanarak sembolik model oluşturan ve bir materyal tasarlayarak ya da aktivite yaparak etkinlik temelli modeller üreten öğretmen adayları *geçerli modeller* kategorisinde değerlendirilmiştir.

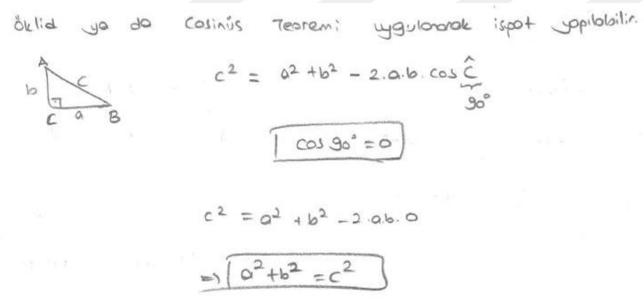
Eldeki bilginin mantığını açıklamak amacıyla farklı geometrik şekilleri bir araya getiren ve oluşan şeklin tüm alanını ya da belirli bir parçanın alanını bu görsel yapıyı oluşturan diğer parçaların alanları cinsinden ifade ederek geçerli model üreten 8 öğretmen adayından birinin çözümü aşağıdaki gibidir:



Alıntı 41. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin geçerli görsel model örneği [ÖA-13]

Örnekte görüldüğü üzere bu öğretmen adayı bir kenarı c olan bir karenin etrafına dik kenarları a ve b olan dört tane eş üçgeni dışarıda yeni bir kare oluşturacak biçimde tasarlamış; büyük karenin alanını içerdeki küçük karenin alanı ile üçgenlerin alanlarının toplamı biçiminde ifade etmiştir. Dikkat edilecek olursa bu yaklaşımı sergileyen öğrenciler modelleme sürecinde aslında sembolik modeller de kullanmışlardır. Yalnız özdeşlikler ve alan bağıntıları gibi bu sembolik ifadeler modelin kuruluş amacı olmayıp görselin açıklanmasında yardımcı bir unsur olarak kalmaktadır. Burada düşüncenin esasını oluşturan yapı görselin kendisidir; görsel unsur bilginin mantığını açıklamaya yönelik tasarlanmış olup daha ön plandadır.

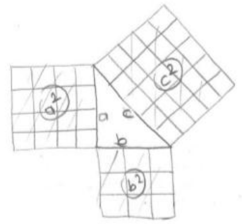
Diğer taraftan geçerli sembolik model üreten öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu aşağıdaki model incelenecek olursa öğretmen adayının geçmişten getirmiş olduğu teorik bilgilerinden yararlandığı görülür.



Alıntı 42. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin geçerli sembolik model örneği [ÖA-86]

Bu öğretmen adayının Cos teoremini dik üçgen için uyguladığı ve Cos 90^{o} nın trigonometrik oranından yararlandığı açıktır. Örnekte görüldüğü üzere bu kategorideki modellerde bilginin kanıtlanmasında aktif rol alan esas yapı sembolik ifadelerdir. Yardımcı unsur olarak üçgen gibi görsel araçlar kullanılsa da izahın ana temasını sembolik yapılar oluşturmaktadır; bu nedenle sembolik model olarak değerlendirilmiştir.

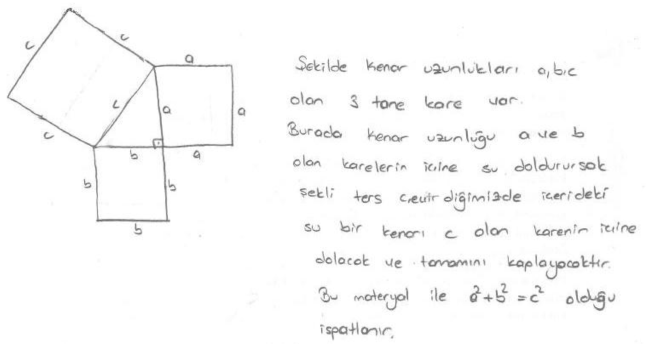
Geçerli model kategorisinde değerlendirilen ancak kâğıt üzerinde karşı tarafı ikna etmenin zor olduğu ve belirli bir etkinliğin sonucunda bu bilginin izahını kolaylaştıran etkinlik temelli modellerden biri aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 43. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin geçerli etkinlik temelli model örneği – I [ÖA-87]

Örnekte görüldüğü üzere bu öğretmen adayı a^2, b^2 ve c^2 yi karelerin alanları ile ilişkilendirmiş ve belirli özel üçgenler üzerinde ölçmeye dayalı bir etkinlik gerçekleştirmek istemiştir. Bu kapsamda oluşturulan modelin anlam taşıyabilmesi için kenarlar üzerinde cetvel yardımıyla bir ölçme işleminin yapılması ve bu kenarlar üzerinde karelerin inşa edilip alanlarının yine ölçümler yoluyla kıyaslanması gerekmektedir.

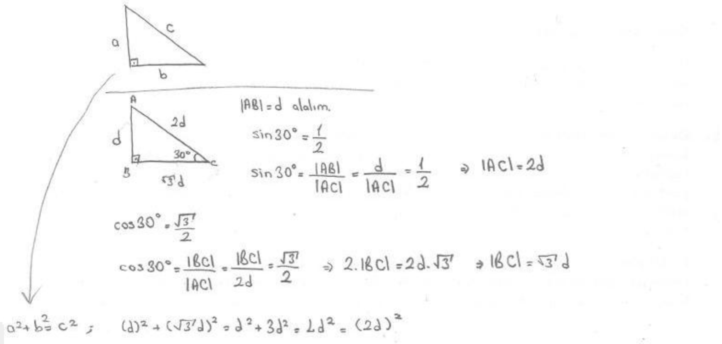
Benzer biçimde iki boyutlu olarak anlatımı zor olsa da üç boyutlu bir materyal tasarımından bu bilginin somutlaştırılmasına yardımcı olan öğretmen adaylarından birinin ürettiği etkinlik temelli model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 44. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin geçerli etkinlik temelli model örneği - II [ÖA-20]

Dikkat edilecek olursa bu öğretmen adayı verilen bilgiyi üç boyutlu olarak tasarlanan bir materyalin içerisine su (ya da kum gibi malzemeler) doldurarak ve materyali ters çevirme hareketi ile içindeki malzemenin bir bölgeden diğer bölgeye geçişi ile izah etmeye çalışmaktadır. Ancak bu model kâğıt üzerinde anlaşılması zor olduğu için ve bir aktivite gerektirdiği için etkinlik temelli model kategorisinde değerlendirilmiştir.

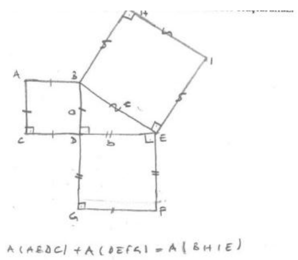
Diğer taraftan kâğıt üzerinde anlaşılabilir olmasına rağmen yapılan modellemede geneli yansıtmayan ve belirli açılar ya da üçgenlerle kısıtlı kalan sembolik izahlar *sınırlı model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu modeller incelendiğinde katılımcıların verilen bilginin doğruluğunu belirli bir üçgen için kanıtladığı görülmektedir.



Alıntı 45. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin sınırlı sembolik model örneği [ÖA-3]

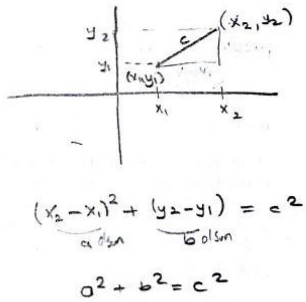
Alıntıda görüldüğü üzere bu öğretmen adayı geçmişten hatırladığı 30^o-60^o-90^o özel dik üçgeni için 30^o nin trigonometrik oranlarından yararlanarak Pisagor bağıntısının doğruluğunu kanıtlamıştır. Bu yaklaşımda yapılan üçgen çizimlerinin bilginin mantığını izahtan uzak olup sembolik modele eşlik eden yardımcı bir unsur olarak kullanıldığı açıktır.

Eldeki bilginin izahında yetersiz kalan anlamsız çizimler ve bağlantısız şekiller ile yanlış teorik bilgiler içeren sembolik ifadeler *geçersiz model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Buna ilişkin örnek bir yanıt şu şekildedir:



Alıntı 46. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği [ÖA-76]

Bu öğretmen adayı a^2, b^2 ve c^2 yi farklı karelerin alanları ile ilişkilendirse de oluşturulan görsel yapı verilen bilginin mantığını izah noktasında yetersiz kalmaktadır. Çünkü çizime bakan kişi a^2+b^2 nin neden c^2 ettiğini sadece bu görsel üzerinden anlayamamaktadır ve eldeki haliyle model okuyucuya sadece bir resim sunmaktadır. Dolayısıyla bu modelin anlam taşıyabilmesi için dik kenarlar üzerinde inşa edilen karelerin alanları toplamının, hipotenüs üzerinde inşa edilen karenin alanına eşit olduğunun mantıklı bir şekilde izahı gerekir. Benzer şekilde geçersiz model kategorisinde değerlendirilen aşağıdaki model incelenecek olursa üretilen sembolik yapının bahsi geçen eşitliğin doğruluğunu kanıtlamaktan uzak olduğu görülür.



Alıntı 47. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin geçersiz sembolik model örneği [ÖA-120]

Örnekten anlaşılacağı üzere bu öğretmen adayı Pisagor teoreminin mantığını izah etmek için iki nokta arasındaki uzaklık formülünden yararlanmaya çalışmıştır. Ancak $(x_2 - x_1)^2$ ile $(y_2 - y_1)^2$ ifadesinin toplamını c^2 ye eşit kabul etmesi zaten oluşturduğu üçgende Pisagor teoremini uygulamasının bir sonucu olup eldeki durumun izahına yeterli değildir. Ayrıca üretilen modelde çizilen koordinat sistemi sembolik modelin anlaşılmasında yardımcı bir enstrüman olup esas düşünce iki nokta arasındaki uzaklık formülünü kullanmak olduğundan bu model geçersiz sembolik model kategorisinde değerlendirilmiştir.

Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlardan elde edilen bulgular Tablo 18'de sunulmuştur. Görüşmelerde kimi öğretmen adayları yazılı sınavda üretmiş oldukları modelleri geliştirme yoluna gittikleri görülmüştür. Örneğin yazılı sınavda geçersiz model üreten Gönül, Özgür, Yavuz, Buğra ve Zeynep mülakat sırasında etkinlik temelli geçerli modeller üretirken, yazılı sınavda sınırlı model üreten Nihat bu modelini geliştirerek geçerli sembolik modele dönüştürmüştür. Yazılı sınavda etkinlik temelli geçerli model üreten Aysun ise mülakatta geçersiz görsel model oluşturmuştur. Ayrıca yazılı sınavda geçerli model oluşturan Esin mülakatta farklı modeller geliştiremezken, Merve bu soruya ilişkin herhangi bir geçerli model üretememiştir.

Tablo 18. Pisagor bağıntısı sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	ETK TEM MOD		GÖR MOD		ETK TEM MOD	ETK TEM MOD	ETK TEM MOD	ETK TEM MOD	SEM MOD
Sınırlı Model									
Geçersiz Model		GÖR MOD		GÖR MOD					

Kısaltmalar: ETK-TEM-MOD: Etkinlik Temelli Model, SEM-MOD: Sembolik Model, GÖR-MOD: Görsel Model

Aşağıda Nihat ile yürütülen mülakattan bir kesit verilmiştir. Bu diyalog incelendiğinde yazılı sınavda özel bir dik üçgen üzerinde trigonometrik oranları kullanarak sınırlı model üreten Nihat'ın araştırmacının soruları neticesinde mülakatın sonuna doğru geneli yansıtan, dolayısıyla geçerli kabul edilebilecek sembolik bir modele ulaştığı görülmektedir.

Diyalog 13:

Nihat: …. Formüllerden biliyoruz 30^o-60^o-90^o dik üçgeninde kenarların 1-$\sqrt{3}$-2 ile orantılı olduğunu. Oradan sinüs ve cosinüsü yazdım burada da gördüğünüz gibi. Değer verince ispatlamış oldum işte.

Araştırmacı: Ancak üçgende 30^o olası durumlardan sadece bir tanesi ve olayın genelini yansıtmıyor.

Nihat: Evet ben ne istediğinizi çok iyi anladım. Ama zaten olayın genelini yansıtabilseydim…

Araştırmacı: Mesela sin 30^o değil de sin α desek daha genel bir çözüm elde edemez miyiz?

Nihat: Ama sin α' nın neye eşit olduğunu biliyor muyuz? Ayrıca 30^o yi vermek daha kesin sonuçlara ulaştırır.

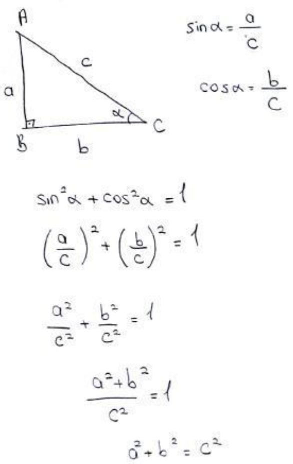
Araştırmacı: Peki trigonometrik bilgilerinizden de yararlanarak kenarlar arasındaki ilişkiyi başka bir biçimde kuramaz mıyız? İsterseniz bir dik üçgen çizin. En azından sin 30^o dan bağımsız düşünerek bu durumu genelleyebilir miyiz diyorum.

Nihat: [Bir dik üçgende trigonometrik işlemler yapıyor] Madem trigonometrik bilgilerimizden yararlanıyoruz. sin^2α ve cos^2α nın toplamının 1'e eşit olduğunu biliyoruz. sin α ve cos α nın üçgendeki değerlerini yerine yazarsak karelerini alıp topladığımızda a^2+b^2=c^2 geliyor.

Araştırmacı: Şu modeliniz açıyı belli bir dereceye indirgemektense daha geneli temsil etti.

Nihat: Evet. Ama fark ettiğiniz üzere bir şeylere değer vermeyi seviyorum.

……………………..



Alıntı 48. Pisagor bağıntısı sorusu için Nihat tarafından üretilen geçerli sembolik model

Mülakat sırasında Nihat'ın "*Ama sin α' nın neye eşit olduğunu biliyor muyuz? Ayrıca 30^o yi vermek daha kesin sonuçlara ulaştırır.*" ifadesini kullanması bilinmeyen durumlarla çalışmada zorlandığının ve üreteceği modelin tüm durumları temsil etmesi gerektiğinin farkında olmadığının göstergesidir. Ayrıca "*Ama fark ettiğiniz üzere bir şeylere değer vermeyi seviyorum.*" ifadesine bakılırsa Nihat bir eşitliğin doğruluğunu belirli değerler için gösterdiğinde verilen bilgiyi kanıtlaması için yeterli olduğunu düşünmektedir. Öğretmen adayı araştırmacının soruları neticesinde eldeki durumun genelini yansıtabilecek bir model üretmesi gerektiğini fark etmiş ve seçtiği açıyı α'ya dönüştürerek geçmiş trigonometrik bilgilerinden yararlanmıştır.

Mülakat verilerinin analizinden ulaşılan bir diğer sonuç öğretmen adayları daha önce gördükleri modellere benzer modeller oluşturabiliyorken, özgün modeller oluşturmada zorlandıkları hususudur. Örneğin aşağıdaki alıntıda Aysun adlı öğretmen adayının özdeşliklerden yararlanarak farklı görsel bir model oluşturmada sıkıntı yaşadığı görülmektedir.

Diyalog 14:

Aysun: Kenarı a birim olan bir karenin alanı, bu a^2 olur. b^2 için de kenarı b olan yine bir tane kare çizerim. Ama bunları birleştirip c^2 oluşturmak istiyorum. c^2 de başka bir alan, toplasam bunları mesela c' ye bunlar cinsinden bir değer vermem lazım ki sonuç böyle oldu diyeyim.

Araştırmacı: Ya da içerisinde a^2 ve b^2 yi üreteceğiniz daha büyük bir şekil düşünmeniz lazım. Çünkü burada parçalı düşündüğünüz zaman o ikisini tekrar bir araya getiremiyoruz.

Aysun: [Düşünüyor] Kareleri şuradan birleştirsem olmaz, benden bir model çıkmayacak gibi.

Araştırmacı: Başka cebirsel bilgilerinizden ya da geometrik bilgilerinizden yararlansak? Mesela a^2 ile b^2 cebirsel olarak size ne çağrıştırıyor ya da cebirsel olarak ikisinin toplandığı durum başka nerelerde karşınıza çıkıyor?

Aysun: $(a+b)^2$ de falan çıkıyor mesela. Oradan yararlansam da, şimdi c'ye bunlar cinsinden bir şey desem daha mantıklı olacak. Mesela c = a+b desem. Oradan da çıkmaz ki c^2 = a^2 + b^2.

……………………………

Aysun: [Düşünüyor] Anladım. Şöyle $(a+b)^2$ den 2.a.b yi çıkaracağım. **[**$(a+b)^2$ yi bir kenarı (a + b) olan bir kare olarak modelliyor] Evet. Sonra bundan alanı a.b olan iki tane şekil çıkaracağım. [Model üzerinde tekrar bir dikdörtgen oluşturmaya çalışarak] Mesela kenarları a ve b olan bir dikdörtgen elde etmem lazım.

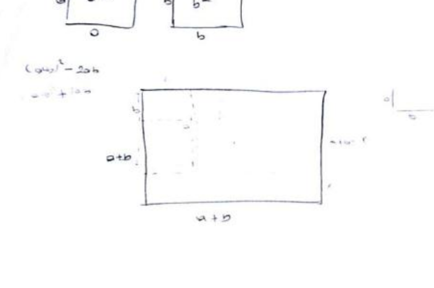
Araştırmacı: Peki elde ettiğimiz şekil alanı c^2 olan başka bir geometrik şekle dönüşür mü? Ya da c^2 elde edeceksek başka bir kare elde etmemiz lazım onlar çıktıktan sonra.

Aysun: [Bir kenarı a+b olan karenin kenarlarını göstererek] Hem şu kenardan hem buradan eşit bir uzunluk çıkacak. Mesela buradan x br, buradan x br kessem, şurası a + b - x olur.

Araştırmacı: Bu şeklin içine başka bir kare yerleştiremez miyiz?

Aysun: Yerleştirebilirim. [Karenin köşe kısmını göstererek] Şuradan yerleştiririm düz mantık.

………………………………



Alıntı 49. Pisagor bağıntısı sorusu için Aysun tarafından üretilen geçersiz görsel model

Aysun a^2 ve b^2 ifadelerini iki farklı karenin alanı ile ilişkilendirmiş ancak bunların, alanı c^2 olan başka bir şekil ile bağlantısını kuramamıştır. Araştırmacının "*Cebirsel* *olarak ikisinin toplandığı durum başka nerelerde karşınıza çıkıyor*?" sorusu üzerine $(a + b)^2$ özdeşliğini hatırlamış ve bu ifadenin açılımından a^2+b^2 yi elde etmek için 2ab terimini yok etmesi gerektiğini fark etmiştir. Ancak bir kenarı (a+b) olan karenin içerisinden alanı 2ab olacak şekiller çıkarıldığında alanı c^2 olabilecek yeni bir kare tasarlayamamıştır.

4.2.2. Dairenin Alanı Sorusuna İlişkin Bulgular

Dairenin alanı $A = \pi r^2$ dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Bu soruda katılımcılardan dairenin alan bağıntısının mantığını açıklayabilecekleri bir model oluşturmaları gerekmektedir. Dolayısıyla katılımcıların geçmiş bilgilerini kullanarak eldeki bilgiyi temsil edecek modeller üretmeleri beklenmektedir. Bu soruya ilişkin yazılı sınav bulguları Tablo 19'da sunulmuştur.

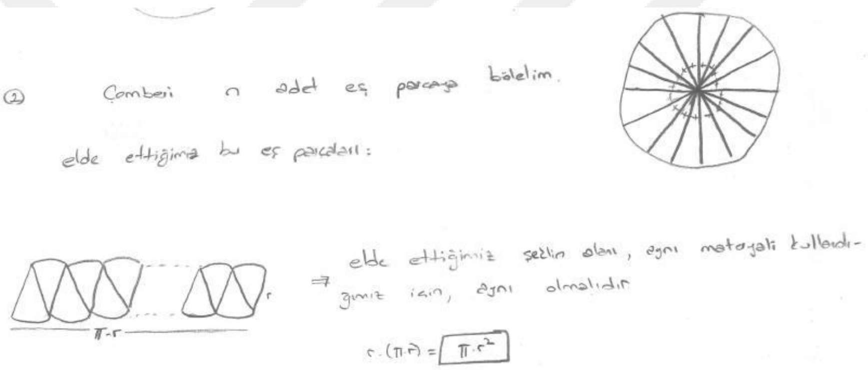
Tablo 19. Dairenin alanı sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE(%)
GEÇERLİ MODEL	Görsel	12	8,6
	Sembolik	12	8,6
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Sembolik	5	3,6
GEÇERSİZ MODEL	Görsel	46	33,1
	Sembolik	46	33,1
YANIT YOK		18	12,9
TOPLAM		139	100,0

Katılımcıların %17,2'sinin geçerli modeller ürettiği görülmektedir. Bu öğretmen adaylarının yarısı eldeki bilgiyi izah etmeye çalışırken görsel modeller oluşturmuş, yarısı ise sembolik modeller kullanmayı tercih etmiştir. Katılımcıların %3,6'sı geliştirilmesi gereken sembolik modeller geliştirmişlerdir. Geçersiz model üreten %66,2'lik grubun yarısı görsel temsiller kullanırken, diğer yarısı sembolik araçlar kullanmıştır.

Bu soruyla alakalı, daireyi belirli parçalara ayırarak ve bu parçaların yerleşimini alanını hesaplamayı bildikleri farklı geometrik şekillere benzeterek görsel model oluşturan öğretmen adayları ile teorik bilgileri aracılığıyla (limit, integral vb.) değişkenlere bağlı sembolik izahlar geliştirerek eldeki durumu açıklayan öğretmen adaylarının modelleri *geçerli model* kategorisinde değerlendirilmiştir.

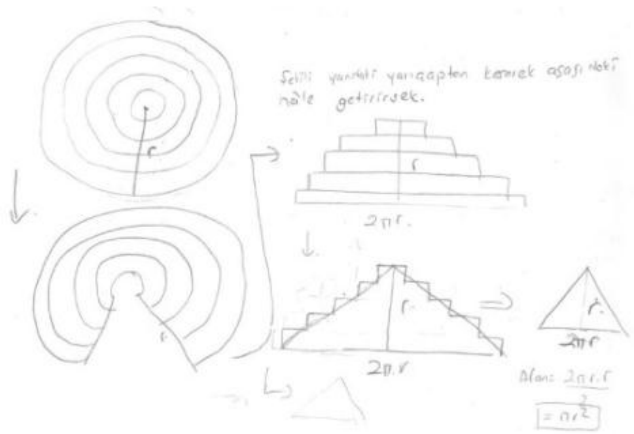
Aşağıda geçerli görsel bir model örneği görülmektedir. Bu model incelenecek olursa öğretmen adayının daireyi belirli sayıda daire dilimine ayırdığı ve bu dilimleri dikdörtgensel bir yapı oluşturacak şekilde yeniden dizayn ederek alan bağıntısına ulaştığı görülür.



Alıntı 50. Dairenin alanı sorusuna ilişkin dikdörtgensel yapıdaki geçerli görsel model örneği - I [ÖA-13]

Üretilen model paralelkenara benzese de daire üzerindeki dilimlenme sayısı arttıkça şekil dikdörtgene dönüşmeye başlayacaktır. Yaptığı yazılı açıklamadan öğrencinin bu durumun farkında olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca parçalanma sayısının artarak sonsuza gitmesi durumu düşünce olarak limit kullanımını gerektirse de sembolik limit mantığını açıklamaya çok gerek kalmadığı için şeklin görselliği ile alanın izahı yapılabilmektedir. Daire dilimlerinin yarısı aşağıda yarısı yukarıda kullanıldığı için yeni şeklin taban uzunluğu dairenin çevresinin yarısı (π.r) olmaktadır. Yükseklik olarak da yarıçap kullanıldığı için oluşturulan şeklin alanının πr^2 olduğu açıkça anlaşılmaktadır.

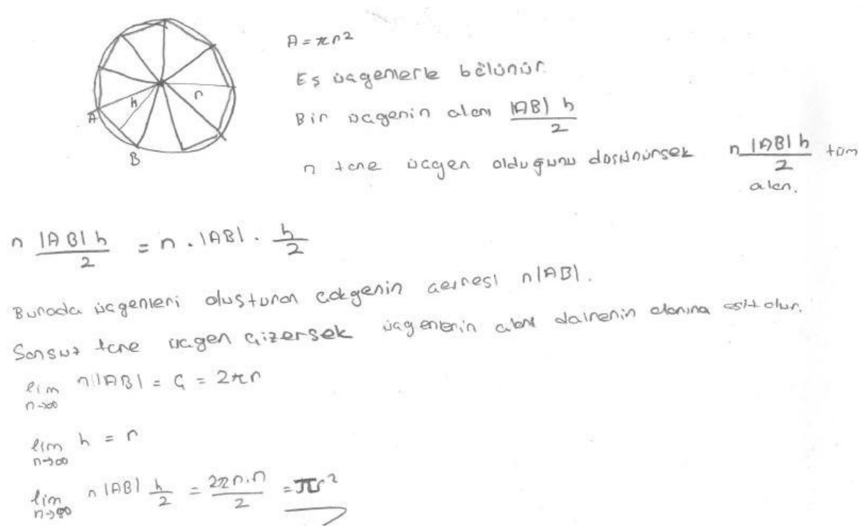
Daireyi iç içe şeritlere bölerek ve bu şeritleri üst üste gelecek biçimde açarak eldeki bilgiyi üçgensel bir yapının alan bağıntısıyla açıklamaya çalışan öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu görsel model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 51. Dairenin alanı sorusuna ilişkin üçgensel yapıdaki geçerli görsel model örneği - II [ÖA-81]

Bu öğretmen adayı daireyi yarıçaptan keserek açmış; elde ettiği şeritleri yeniden bir araya getirmek suretiyle üçgensel bir şekil tasarlamıştır. Başlangıçta bu tasarım üçgene benzemese de şeritler inceldikçe (limit durumunda doğru parçasına dönüşünce) kenarlar üzerinde ihmal edilen parçalar kalmayacak ve şekil gittikçe üçgene dönüşmeye başlayacaktır. Bir öncekinde olduğu gibi bu tasarımda da bilginin izahı model üzerinden yapılmakta olup görsel unsurlar ağırlıktadır. Ayrıca şerit sayısının artarak sonsuza gitmesi düşünce olarak yine limit mantığını gerektirse de sembolik olarak yeni açıklamalara çok gerek kalmamaktadır. En dıştaki şeridin uzunluğu, yani üçgenin tabanı, dairenin çevresine $(2.\pi.\mathrm{r})$ eşit olmakta; yarıçap ise (r) üçgenin yüksekliğini oluşturmaktadır. Üçgenin alan bağıntısı kullanılarak başlangıçtaki dairenin alanının $\frac{(2.\pi.\mathrm{r}).\mathrm{r}}{2} = \pi r^2$ olduğu anlaşılmaktadır.

Diğer taraftan geçerli sembolik model üreten öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu aşağıdaki model incelenecek olursa öğretmen adayının limit mantığının nasıl işletildiğini teorik olarak açıklamaya çalıştığı görülür.

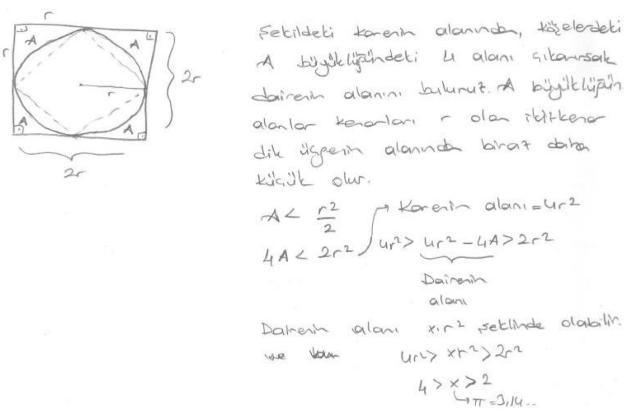


Alıntı 52. Dairenin alanı sorusuna ilişkin geçerli sembolik model örneği [ÖA-10]

Bu öğretmen adayı dairenin içerisine düzgün bir çokgen çizmiş, daha sonra bu çokgenin alanını içerisinde oluşturduğu üçgenler yardımıyla hesaplamaya çalışmıştır. Oluşturulan modele göre çokgenin kenar sayısı arttıkça alanı, dairenin alanına yaklaşacağı düşüncesinden hareketle eş üçgenlerin; tabanı (|AB|), yüksekliği (h) ve sayısı (n) cinsinden dairenin alanı $\lim_{n\to\infty} \frac{n.IABI.h}{2}$ biçiminde ifade edilebilir. Diğer taraftan çokgenin kenar sayısı arttıkça; çevresi, dairenin çevresine yaklaşacağı için $\lim_{n\to\infty} n.IABI = 2.\pi.\mathrm{r}$ olduğu ve üçgenin yüksekliği, yarıçapa yaklaşacağı için $\lim_{n\to\infty} h = r$ olduğu bilinmektedir.

Buradan $\lim_{n\to\infty} \frac{n.IABI.h}{2} = \frac{1}{2}.[\lim_{n\to\infty} n.IABI\,].[\lim_{n\to\infty} h]=\frac{1}{2}.[2.\pi.\mathrm{r}].[\mathrm{r}]$ den $A = \pi r^2$ gelmektedir. Bu yaklaşımı sergileyen öğrenciler modelleme süreci içerisinde aslında olayı görsel olarak da modellemişlerdir. Yalnız yapmış oldukları görsel çizimler tek başına bir anlam ifade etmeyip limit mantığının nasıl işletildiğini sembolik olarak izah etmek gerekmektedir. Dolayısıyla sembolik ifadeler olmadan görsellik anlaşılmadığı için bu modeller sembolik model kategorisinde değerlendirilmiştir.

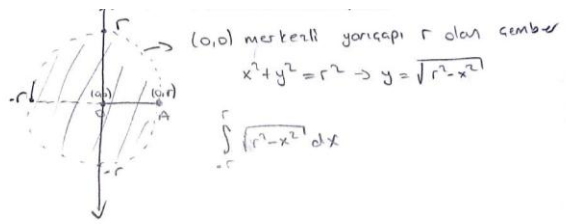
Diğer taraftan dairenin alan bağıntısının mantığını tam olarak açıklamasa da bu düşünceye aracı olabilecek sembolik izahlar *geliştirilmesi gereken model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği aşağıdaki model incelenecek olursa öğretmen adayının dairenin alanını belirli değerler arasında sınırladığı görülür.



Alıntı 53. Dairenin alanı sorusu için geliştirilmesi gereken sembolik model örneği - I [ÖA-73]

Bu öğretmen adayı dairenin alanının, etrafına çizdiği karenin alanından küçük, içine çizdiği karenin alanından büyük; yani bu iki karenin alanı ($4r^2$ ile $2r^2$) arasında bir değer alması gerektiğini bulmuştur. Hatta bu model üzerinden π sayısının 4 ile 2 arasında olduğunu da göstermiştir. Ancak yapılan izahlar yanlış olmasa da dairenin alan bağıntısının neden πr^2 olduğunu tam olarak açıklayamamaktadır. Dolayısıyla eldeki modelin bir anlam taşıyabilmesi için geliştirilmesi gerekmektedir.

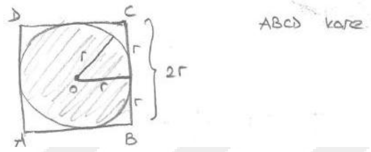
Benzer şekilde dairenin alanını integral ile hesaplamaya çalışan öğretmen adaylarından birinin ürettiği geliştirilmesi gereken sembolik model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 54. Dairenin alanı sorusu için geliştirilmesi gereken sembolik model örneği- II [ÖA-88]

Örnekte görüldüğü üzere bu öğretmen adayı çember denkleminden yola çıkarak eğrinin altında kalan alanı integral ile hesaplayabileceğini fark etmiştir. Ancak ulaştığı son ifadeden integralin çözümüne geçememiştir. Dolayısıyla bu çözümü geçerli modele dönüştürmek amacıyla dairenin, koordinat sisteminin I. bölgesinde kalan parçası için yazılacak $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ integrali üzerinde x = r. $\sin\theta$ dönüşümü yapılması yerinde olacaktır. Daha sonra integralin hesaplanmasından elde edilen alan dört ile çarpılarak (koordinat sistemindeki tüm bölgeler için) dairenin tüm alanı elde edilecektir.

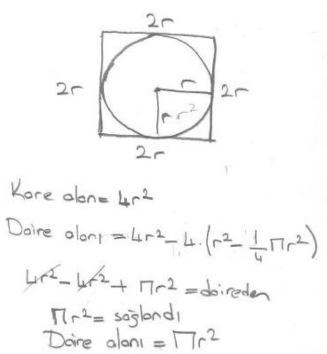
Diğer taraftan dairenin alan bağıntısını izah etmede anlamsız kalan çizimler ya da birbirinden bağlantısız şekiller ile yanlış teorik bilgi içeren ya da belirli bir mantıktan yoksun cebirsel ifadeler *geçersiz model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Aşağıda daire ile etrafına çizilen kare arasındaki bağlantının kurulamadığı görsel bir model örneği sunulmuştur.



Alıntı 55. Dairenin alanı sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği [ÖA-86]

Dikkat edilecek olursa bu öğretmen adayı herhangi bir sembolik izah kullanmadan dairenin etrafına bir kare çizmiştir. Ancak bu çizim kendi başına bir anlam ifade etmemekte ve dairenin alan bağıntısını kanıtlamaya aracı olmamaktadır. Dolayısıyla kare ile daire arasında herhangi bir ilişki kurulmadan (alanları arasında kıyaslama yapılmadan ya da birbiri cinsinden ifade edilmeden) bu görsel modelin amaca hizmet etmesi söz konusu değildir.

Benzer şekilde geçersiz sembolik model üreten öğretmen adaylarından birinin ürettiği aşağıdaki model incelenecek olursa öğretmen adayının alan bağıntısının mantığını açıklamaya çalışırken bilginin kendisini kullandığı görülür.



Alıntı 56. Dairenin alanı sorusuna ilişkin geçersiz sembolik model örneği [ÖA-16]

Bu öğretmen adayı dairenin alanının πr^2 olduğu bilgisini modelleme süreci içerisinde kullanarak tekrar πr^2 ye ulaşmaktadır. Bu ve benzeri örneklerde öğretmen adayları çoğunlukla daire dilimlerini πr^2 nin bir kesri ile ifade ettikten sonra daire dışında kalan parçaların alanlarını bu kesre bağlı biçimde elde etmişlerdir. En son tüm alandan daire dışındaki bu parçaların alanları toplamını çıkararak tekrar πr^2 ye ulaşmışlardır. Dolayısıyla sürecin başında kurulan sembolik ilişkiler alanın πr^2 olduğu varsayımına dayandığı için bu modeller geçersiz sembolik model olarak kabul edilmiştir. Ayrıca bu modellerin bazılarında görsel çizimler de kullanılmıştır. Yalnız görsel yapılar tek başına bir anlam ifade etmeyip sembolik izahların anlaşılmasında yardımcı bir rol üstlenmektedir.

Görüşmeler sırasında kimi öğretmen adaylarının yazılı sınavdaki modellerini revize ederek ya da yeni modeller tasarlayarak geçerli modeller ürettikleri görülürken kimilerinin ise sınavda ürettikleri modellere bağlı kaldıkları görülmüştür (bakınız, Tablo 20). Yazılı sınavda geliştirilmesi gereken model üreten Esin ve Buğra mülakatta geçerli modeller oluştururken, geçersiz model oluşturan Yavuz mülakatta geliştirilmesi gereken model üretmiştir. Aysun ve Merve görüşmeler esnasında yazılı sınavdakinden farklı geçerli modeller üretirken, Gönül ve Zeynep mülakatta yazılı sınavdan farklı bir model üretememiştir. Ayrıca Özgür ve Nihat bu soruya ilişkin herhangi bir geçerli model oluşturamamıştır.

Tablo 20. Dairenin alanı sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	SEM MOD	GÖR MOD	SEM MOD	GÖR MOD			GÖR MOD	GÖR MOD	
Geliştirilmesi Gereken Model						SEM MOD			
Geçersiz Model					GÖR MOD				SEM MOD

Kısaltmalar: SEM-MOD: Sembolik Model, GÖR-MOD: Görsel Model

Aşağıda Yavuz adlı öğretmen adayıyla yapılan mülakattan bir kesit sunulmuştur. Bu diyalog incelendiğinde Yavuz'un zihninde geçerli model üretse de bu modelini dışarıya yansıtmakta zorlandığı için geliştirilmesi gereken model düzeyinde kaldığı görülmektedir.

Diyalog 16:

Araştırmacı: Mesela daireyi farklı parçalara ayırarak ve bu parçaların yerleşimini değiştirerek bildiğimiz başka geometrik bir şeklin alanına benzetebilir miyiz?

Yavuz: Benzeyebilir aslında. [Daireyi üçgenlere bölüyor] Buradan üçgenler çıkartabiliriz.

Araştırmacı: Üçgenleri çıkarttığımızda altta küçük parçacıklar kalacak. O parçacıkları ihmal edersek alan πr^2 olmaz mı? Başka bir parçalanma yapabilir miyiz?

Yavuz: Her çokgenle yapamayız o zaman.

Araştırmacı: Bir çokgenle yaptığınızda o parçaları ihmal etmeyeceğiniz biçime çevirmeliyiz.

Yavuz: Şöyle yapabiliriz aslında. n kenarlı bir çokgen. Ne kadar çok kenarlı yapabilirsek ihmal edilen alan o kadar daha az olmuş oluyor.

Araştırmacı: Peki o çokgenin alanını nasıl hesaplayabiliriz? İsterseniz bir çizim yapın.

Yavuz: [Daire üzerinde üçgenler oluşturmaya çalışıyor] Küçük ikizkenar üçgenler oluşuyor ve n tane ikizkenar üçgenin toplamı bu çokgenin alanı etmiş oluyor. Yaklaşık bir değer bulmuş oluyoruz aslında.

Araştırmacı: Oradaki bir üçgenin alanını nasıl hesaplarız?

Yavuz: Buradan. Şu (taban alanı x yükseklik)/2 ve n tane olduğunu düşünürsek çokgenin alanını bulmuş oluyoruz. Buradan aslında limitini alıp dairenin alanını bulmuş olabiliriz.

Araştırmacı: Peki limit yaklaşımıyla nasıl düşünebiliriz?

Yavuz: Limit alırsak limit sonsuza gidecek. (üçgen sayısı olan n sonsuza gidecek)

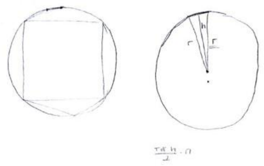
Araştırmacı: Peki bu sonsuza gitme buradaki verileri nasıl etkiler? Mesela yüksekliği, yarıçapı, üçgenin tabanını… Hani sonuç olarak alanı hesaplama yöntemimiz bunlar.

Yavuz: Taban uzunluğu değişecek. Daha küçülecek de sıfıra mı yaklaşır? Evet, taban uzunluğu küçülecek. n zaten sonsuza gidiyor. h' lar büyüyecek galiba.

Araştırmacı: Peki h'lar büyüyünce belli bir sınır yok mu? Sürekli büyümeye devam mı eder?

Yavuz: Yani r 'ye ulaşacak. Ulaştığında da bitecek zaten sonsuz olacağı için. Evet, r'ye ulaşacak h' larda. Üçgenlere parçalayabiliriz. [Düşünüyor] Ama πr^2 ye ulaşamadım.

……………………..



Alıntı 57. Dairenin alanı sorusu için Yavuz tarafından üretilen geliştirilmesi gereken sembolik model

Alıntıdan anlaşılacağı üzere Yavuz daire içerisinde oluşturduğu çokgenin kenar sayısı arttıkça ihmal edilen alanların azalacağının ve dairenin alanına yaklaşacağının farkındadır. Hatta çokgenin alanı olarak yazdığı ifadenin limitini aldığında dairenin alanını bulabileceğini düşünmesi Yavuz' un zihninde geçerli bir model oluşturduğunun göstergesidir. Ancak bu modelini dışa aktarmada zorlanması limit durumunda diğer verilerin nasıl etkileneceğini kestirememesine (çokgenin çevresinin dairenin çevresine dönüşmesi durumu) ve alan bağıntısını πr^2 olarak ifade edememesine sebep olmuştur.

Yukarıdaki alıntıda kısmen görüldüğü üzere bulgular öğretmen adaylarının model ile etkileşime girdikçe daha geçerli modeller üretebildiklerini göstermektedir. Bu durum aşağıdaki alıntıda çok daha açık bir şekilde görülmektedir.

Diyalog 17:

Araştırmacı: Peki kare değil de oradaki kayıpları minimuma düşürecek başka bir şekilde parçalayamaz mıyız? Bu şekilde bir pastayı hiç artmayacak şekilde nasıl servis edebiliriz?

Buğra: Daire dilimine bölerim herhalde. Ama bu sefer şöyle yerleştiririm o zaman. [Dilimleri bir alta bir üste gelecek şekilde yerleştiriyor]

Araştırmacı: Peki bunun faydası ne olur?

Buğra: Daire dilimini ne kadar küçültürsem yay parçası o kadar düz olacağı için paralelkenara benzedi diyeceğim, tüm açıyı eşit parçalara böldüğümü düşündüm. Dikdörtgene döndü sanki…

Araştırmacı: Peki bu şeklin alanını nasıl bulabiliriz?

Buğra: 360^{o} / α tane daire dilimim var. Ama… [α : Daire dilimlerinin merkez açısı]

Araştırmacı: Yalnız bazılarını aşağıda kullanıyorsunuz bazılarını yukarıda.

Buğra: [Daire dilimlerinden alt kısma gelenleri göstererek] Şurası dairenin çevresinin yarısı.

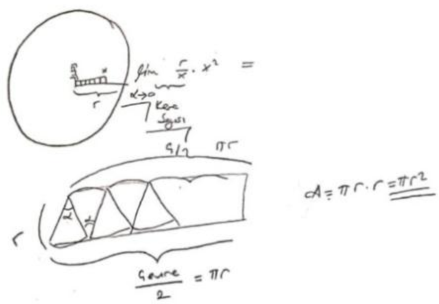
Araştırmacı: Nedir orasının uzunluğu?

Buğra: $\pi . r$ olur. [Dairenin yarıçapını da yükseklik gibi kabul ederek] Şurası da r, πr^2 oldu.

Araştırmacı: Bu modele bakan biri düşünce olarak illa sonsuz parçalanmaya gitmek zorunda mı? Yani daire dilimlerinin açısı limit durumuna ulaşmadan da yapılan izah anlaşılabilir mi?

Buğra: Ama şöyle eğer ben açıyı 0^o ye yaklaştırmazsam taban düz olmaz. [paralelkenarın tabanı olacak kenarı göstererek] Şöyle yaylardan yamuk bir kenar olur şurası.

…………………………..



Alıntı 58. Dairenin alanı sorusu için Buğra tarafından üretilen geçerli görsel model

Buğra mülakatın başında daireyi kare şeklinde parçalara ayırmış ve dairenin alanını oluşturduğu karelerin alanı cinsinden ifade etmeye çalışmıştır. Ancak kare sayısını hesaplamada ve dairenin içini boşluk kalmayacak şekilde doldurmada zorlandığı için bu düşüncesinden vazgeçmiştir. Araştırmacının kayıplar olmadan bir pastayı nasıl servis edebileceği sorusu üzerine daire dilimleri şeklinde parçalamaya karar vermiş ve bunları bir alta bir üste gelecek biçimde yerleştirerek aralarında boşluk kalmayacağı yeni bir şekil tasarlamıştır. Bu durum öğretmen adaylarının modelleme etkinlikleri üzerinde çalıştıkça daha geçerli modeller oluşturabileceklerine işaret etmektedir.

4.2.3. Tek Sayıların Toplamı Sorusuna İlişkin Bulgular

Ardışık tek sayıların toplamı 1 + 3 + 5 + … + (2n-1) = n^2 dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Bu soruda katılımcılardan ardışık tek sayıların toplamını veren bağıntının mantığını açıklayabilecek bir model oluşturmaları istenmektedir. Dolayısıyla yapılacak modellemenin n'nin belirli değerleri ile sınırlı kalmayıp tüm sayı dizilerini kapsayabilecek genellemeyi taşıması ya da bu düşünceye kapı aralaması beklenmektedir. Yazılı sınav bulguları Tablo 21'de sunulmuştur:

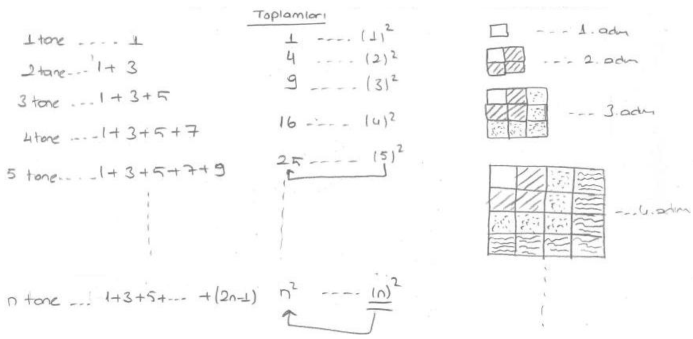
Tablo 21. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE (%)
GEÇERLİ MODEL	Görsel	21	15,1
	Sembolik	54	38,8
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Görsel	2	1,4
	Sembolik	3	2,2
SINIRLI MODEL	Aritmetiksel	12	8,6
GEÇERSİZ MODEL	Görsel	18	12,9
	Sembolik	15	10,8
YANIT YOK		14	10,1
TOPLAM		139	100,0

Katılımcıların %53,9'u geçerli modeller oluşturmuştur. Bu öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%38,8'lük kesim) sembolik modeller üretmiştir. Diğer taraftan geliştirilmesi gereken model düzeyinde kalan %1,4 lük kesim görsel model, %2,2'lik kesim ise sembolik modeller kullanmayı tercih etmiştir. Sınırlı model oluşturan %8,6'lık grup verilen eşitliğin doğruluğunu belirli sayı dizileri üzerinde aritmetiksel hesaplamalarla açıklamaya çalışmıştır. Ayrıca %12,9'u görsel model ve %10,8'i sembolik model olmak üzere %23,7'lik kesim geçersiz modeller üretmiştir.

Farklı geometrik şekiller kullanılarak eldeki bağıntının mantığının somutlaştırıldığı görsel modeller ile geçmiş teorik bilgilerin farklı biçimlerde kullanılarak bağıntının elde ediliş sürecinin gösterildiği sembolik yapılar *geçerli model* olarak kabul edilmiştir.

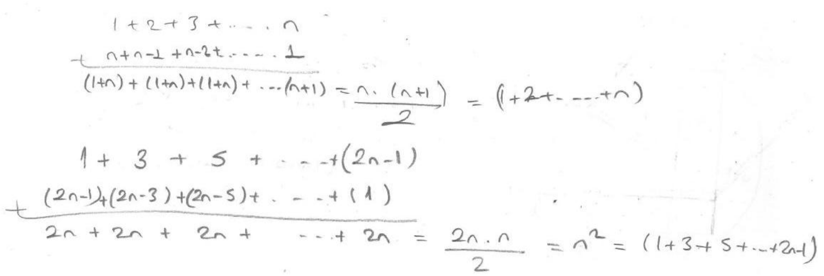
Sayıları temsilen belirli şekiller kullanarak n^2'yi geometrik bir şeklin tüm alanı ya da alanının bir parçası olarak göstermeye çalışan öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 59. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin geçerli görsel model örneği [ÖA-2]

Bu öğretmen adayı tek sayıları birim kareler ile temsil etmiş ve n^2'yi bir karenin alanı ile ilişkilendirerek görsel bir model tasarlamıştır. Modelleme sürecinde her bir adımda eklenen birim kareleri öncekilerin etrafına ters 'L' biçiminde yerleştirmiş ve sürekli bir kare tasarlayarak toplam birim kare sayısını oluşan en büyük karenin alanı olarak göstermeye çalışmıştır. Dikkat edilecek olursa bu modelde görselin kendisi düşünceye aracı olmakta ve yeni açıklamalara ihtiyaç duymadan eldeki bilginin mantığını izah edebilmektedir.

Geçerli sembolik model üreten öğretmen adayları Gauss metodunun mantığından yararlanma, tümevarım düşüncesi, tüm sayıların toplamından çift sayıları çıkarma, terim toplamı formülünden yararlanma gibi farklı yaklaşımlar ortaya koymuşlardır. Bu öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu aşağıdaki model incelenecek olursa öğretmen adayının Gauss metodunu tek sayılar için kullandığı görülür.



Alıntı 60. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin geçerli sembolik model örneği - I [ÖA-33]

Bu öğretmen adayı tek sayı dizisini bir baştan bir de sondan alt alta gelecek biçimde yazmış ve aynı sıradaki terimlerin toplamının 2n çıkmasından yararlanarak eldeki toplamı, iki tek sayı dizisinin toplamının yarısı olarak hesaplamıştır. Tümevarım metodunu kullanarak verilen bilginin doğruluğunu göstermeye çalışan öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu model aşağıdaki gibidir.

Tümevarım metodu kullanılarak bir ispat yapılabilir.

i) $n=1$ için $1 = n^2$

ii) $n=k$ için $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$ (I) olduğunu kabul edelim.

iii) $n=k+1$ için $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ olduğunu ispat edelim.

(I) numaralı eşitliğin her iki tarafına $(2k+1)$ ekleyelim.

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+2k+1$ bu işlemi yaptığımız takdirde;

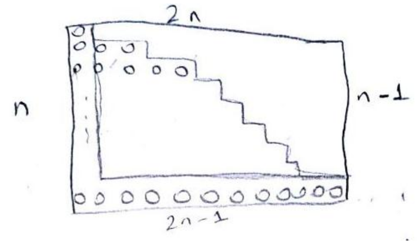
$(k^2+2k+1)=(k+1)^2$ olduğunu görüyoruz. O halde;

$n=k+1$ için $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ olduğu ispat edilmiş oldu.

Alıntı 61. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin geçerli sembolik model örneği - II [ÖA-86]

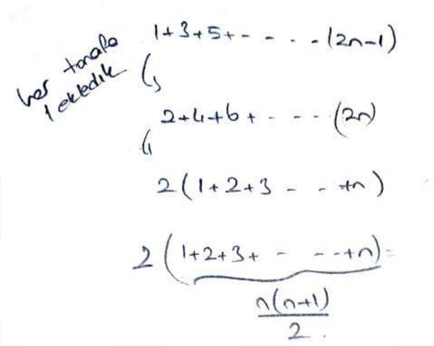
Alıntıdan açıkça anlaşıldığı üzere bu öğretmen adayı n=1 için eşitliğin doğruluğunu göstermiş, n=k için eşitliğin doğru olduğunu kabul etmiş ve n=k+1 için doğruluğunu ispatlamıştır. Domino taşlarına benzetilebilecek bu modelde her bir terimin istenen şartı sağlaması durumunda ardışığı olan terimin de sağlayacağı düşüncesinden hareketle sembolik yapılar kullanılmıştır.

Diğer taraftan verilen eşitliğe ulaşmada belli bir mantığı taşıyan ancak tam olarak sonuca ulaşmayan modeller *geliştirilmesi gereken modeller* kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu kategoride değerlendirilen aşağıdaki model incelendiğinde öğretmen adayının verilen sayı dizisini iki kez kullanarak birbirini dikdörtgene tamamlayan görsel bir yapı oluşturduğu anlaşılmaktadır.



Alıntı 62. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken görsel model örneği [ÖA-41]

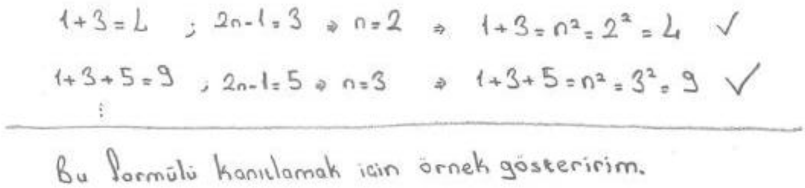
Örnekte görüldüğü üzere bu öğretmen adayı tek sayıları temsilen kullandığı şekilleri oluşturduğu dikdörtgenin alanının bir parçası biçiminde göstermeye çalışmıştır. Ancak yaptığı çizimde şekillerin toplam sayısını hesaplamaya yardımcı olacak bir tasarıma ulaşamamıştır. Dolayısıyla sayı dizisini şekil üzerinde belirleyen sınırların merdiven biçiminde ve sadece şeklin tüm alanının yarısı olacak biçimde çizilmesi ya da toplamın tüm alanın bir parçası olacak biçimde kenar uzunlukları cinsinden ifade edilmesi yerinde olabilir. Benzer biçimde farklı toplam formülleri ile ilişki kurmaya çalışılan ancak istenilen bağıntıya ulaşmayan sembolik modellerden biri aşağıdaki gibidir.



Alıntı 63. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken sembolik model örneği [ÖA-134]

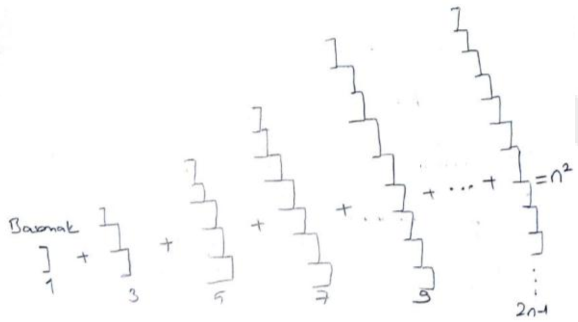
Dikkat edilecek olursa bu öğretmen adayının geçerli model üretme noktasında bir arayış içerisinde olduğu görülmektedir. Sadece oluşturduğu modeli sürdürerek bir sonuca ulaşma noktasında (ulaştığı son toplamdan eklediği sayıların toplamını çıkarma) yetersiz kalmıştır. Bu gibi durumlara adayların varılan noktadaki yeni matematiksel ilişkileri fark edememeleri, modeli amacı doğrultusunda baştan sona kadar etkili biçimde kullanamamaları ya da geçmiş teorik bilgileri hatırlayamamaları gibi etkenlerin neden olduğu düşünülmektedir.

Sayı dizisi için bütünsel yaklaşımlar içermeyen ve bağıntının doğruluğunu özel birkaç sayı dizisi üzerinde göstermeye çalışan katılımcıların modelleri *sınırlı modeller* olarak kabul edilmiştir. Aşağıda buna ilişkin örnek bir model sunulmuştur.



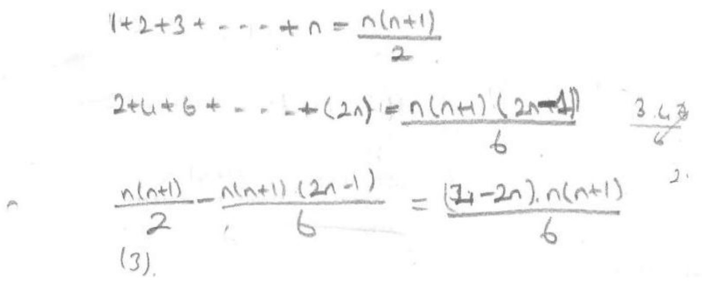
Alıntı 64. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin sınırlı aritmetiksel model örneği [ÖA-3]

Geçerli model üreten öğretmen adaylarının aksine sayıları temsilen aldıkları şekilleri birbirinden bağımsız biçimde kullanarak görsel yapılar oluşturan katılımcılar ile yanlış teorik bilgiler ya da toplam formülleri neticesinde hatalı sembolik yapılar oluşturan katılımcıların modelleri *geçersiz model* kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu görsel model aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 65. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği [ÖA-100]

Örnekte görüldüğü üzere bu öğretmen adayı tek sayıları temsilen belirli şekiller kullanmıştır. Yalnız bu şekilleri birbirinden bağımsız düşündüğü için birleştirme (terimlerin toplama işleminin mantığını açıklama) ve bütün hakkında bir yorumda bulunma noktasında yetersiz kalmaktadır. Kullanılan görsel unsurlar bir araya getirilerek n^2 ile ilişkilendirilmediği için bu model geçersiz model kategorisinde değerlendirilmiştir. Aşağıdaki alıntıda ise geçersiz sembolik model oluşturan öğretmen adaylarından birinin toplam formülünü yanlış kullandığı görülmektedir.



$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2+4+6+\dots+(2n)=\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}=\frac{(3-2n).n(n+1)}{6}$$

(3)

Alıntı 66. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin geçersiz sembolik model örneği [ÖA-96]

Bu öğretmen adayı tek sayıların toplamını hesaplamak için tüm sayıların toplamından çift sayıların toplamını çıkarmak istemiştir. Ancak çift sayıların toplamını karesel sayıların toplam formülü ile hesaplamaya çalışması nedeniyle oluşturduğu modelden bir sonuca ulaşamamıştır. Özetle, geçersiz sembolik model üreten adayların geçmişten getirdikleri teorik bilgilerin ya da formüllerin hatalı olmasının doğru sembolik ilişkiler kurmalarını engellediği anlaşılmaktadır.

Katılımcılar ile yapılan görüşmelerden elde edilen bulgular aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Yazılı sınav bulgularına benzer olarak mülakatta da geçerli model üreten katılımcıların çoğunluğu sembolik modeller üretmiştir.

Tablo 22. Tek sayıların toplamı sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	SEM MOD	SEM MOD	GÖR MOD		SEM MOD	GÖR MOD	SEM MOD		
Sınırlı Model									ARİT MOD
Geçersiz Model				GÖR MOD				GÖR MOD	

Kısaltmalar: SEM-MOD: Sembolik Model, GÖR-MOD: Görsel Model, ARİT-MOD: Aritmetiksel Model

Bulgular öğretmen adaylarının bir bilginin nedenini basite indirgemek veya kolay açıklayabilmek amacıyla ispat yöntemleri konusunda tavizler verdiklerini göstermektedir. En çok dikkat çekenlerden bir tanesi örnek vermenin bir eşitliğin doğruluğunu göstermeye yeterli olacağını düşünmektedirler. Ayrıca modelin görsel özelliklerine yoğunlaşmaları nedeniyle yapısal özelliklerini ihmal ettikleri anlaşılmaktadır. Yazılı sınavda tümevarım yönteminden yararlanarak geçerli sembolik model oluşturan bir öğretmen adayı ile mülakatta görsel model oluşturması sürecinde geçen bir diyalog şu şekildedir.

Diyalog 18:

Araştırmacı: Tümevarım yöntemi ileri matematiksel bir bilgi ve soyut cebirsel işlemler içeriyor. Bu ifadeyi bir ortaokul öğrencisine rahatlıkla anlatabilir misiniz?

Zeynep: Küçük sayılarda deneyerek anlatabilirdim.

Araştırmacı: Peki küçük sayılarla denemiş olmanız bilginin mantığını bütüncül bir yaklaşımla izah ettiğiniz manasına gelir mi?

Zeynep: Tümevarımı veririm daha sonra küçük sayılarda örnek vererek doğru olduğunu gösteririm.

Araştırmacı: Tamam tümevarım ile kanıtlamış oluruz ancak somutlaştırmış olur muyuz? n^2 yi daha basit ve daha somutlaştırabilecek biçimde ne ile ilişkilendirebilirsiniz?

Zeynep: Alan. Karenin alanı.

Araştırmacı: Bu karenin alanını nasıl kullanabiliriz?

Zeynep: 1 birim karelik, 3 birim karelik alan.[Bir kenarı 1 br, 3 br ve 5 br olan kareler çiziyor]

Araştırmacı: 1 birim karelik, 3 birim karelik alan dediniz. Yalnız bir kenarı 3 birim olan kare çizdiğinizde 9 birim karelik bir alan oluşturmuş olmadınız mı?

Zeynep: Evet öyle oldu. Sayıların kendisini değil karelerini göstermiş oldum. Bir kenarına $\sqrt{3}$ desek. O da olmaz. O zaman n^2 lik bir kareden…

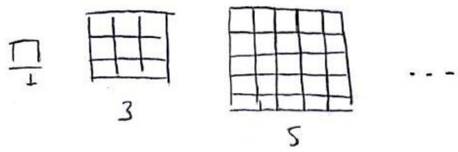
Araştırmacı: Diyelim böyle bir model oluşturdunuz, bir de bu şekli n^2'ye dönüştürecek bir düzenleme yapmanız gerekmeyecek mi? Yani şekilleri olduğu gibi ayrı ayrı bırakabilir miyiz?

Zeynep: Bu model olmadı zaten. Bunların alanları toplamı olarak düşünecektim de.

Araştırmacı: Peki hem bu şekilleri bir araya getirerek toplama işleminin mantığını vurgulayabileceğimiz hem de sayıların 1-3-5 şeklinde dizilimini koruyabileceğimiz görsel bir model oluşturabilir miyiz? Yani bu modele bakan bir kişi gerçekten orada 1'i temsilen, 3'ü temsilen şekiller olduğunu görebilsin.

Zeynep: Aklıma bir şey gelmiyor. Gelse zaten burada yapardım.

……………………………..



Alıntı 67. Tek sayıların toplamı sorusu için Zeynep tarafından üretilen geçersiz görsel model

Diyalogdan anlaşılacağı üzere Zeynep tümevarım düşüncesinin içerdiği soyutluğu aşmak amacıyla belirli sayı dizileri için örnek vererek eşitliğin doğruluğunu göstermeyi düşünmektedir. Farklı bir model üretebilmesi adına somutlaştırabileceği bir biçimde düşünmesi istenince n^2 yi birbirinden farklı karelerin alanları ile ilişkilendirmiş; ancak bu karelerin alanları (1, 9, 25, …) ile tek sayıların bağlantısını kuramamıştır. Ayrıca kareleri ayrı ayrı çizdiği için toplama işleminin mantığını açıklayacak şekilde bir görsel model oluşturmamıştır. Dolayısıyla Zeynep'in oluşturduğu modelin yapısal özelliklerinin sadece bir kısmına odaklandığı (n^2) ve bu özelliklerin bütününü (sayıların temsili, toplamanın mantığı, sonuç) bünyesinde ilişkilendirebileceği işlevsel bir model ortaya koyamadığı görülmektedir.

Mülakat verilerinin analizinden ulaşılan bir diğer bulgu eldeki durumu temsil edebilecek farklı modeller arasından güçlü olanın tercih edilebilmesi bireyin modelleme yeterliklerinin bir göstergesidir. Bu duruma örnek olabilecek bir bölüm aşağıda verilmiştir.

Diyalog 19:

Buğra: Tek sayıları ben şu şekilde modelledim. 1. adımda zaten 1 tane kare var elimde. Şimdi 2. adımda ekleyeceğim 3 tane kareyi yeni bir kare oluşturacak şekilde yerleştirdim.

Araştırmacı: Neden kare olacak şekilde yerleştiriyoruz?

Buğra: En son toplam, buradaki toplam kare sayısı çünkü benim için. 5 için mesela 5 tane kare ekliyorum. Yani her eklediğim sayı için o sayı kadar kare ekliyorum. Ondan sonra ben toplam kareyi saydığım zaman zaten sayıların toplamını bulmuş olacağım.

Araştırmacı: Bu toplamın sonucu olacak n^2 nin bir karenin alanı olması şart mı?

Buğra: Yok. Yani şöyle söyleyeyim. Dikdörtgen de olabilirdi. Şuraya bakmama gerek yok. En kolay nasıl hesaplayabilirim? Onu düşünerek.

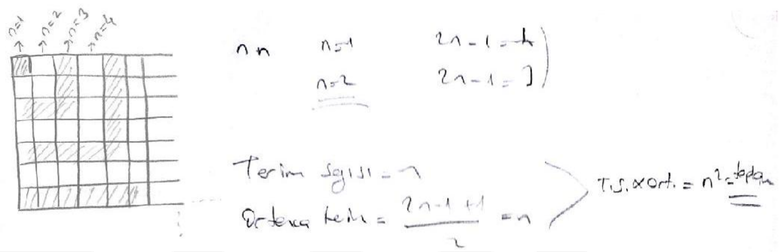
Araştırmacı: Dikdörtgen olduğunda n^2 ile nasıl ilişkilendireceğiz?

Buğra: Örnek veriyorum dikdörtgenin bir kenarı n/2 gelir diğer kenarı 2n gelir yine n^2 gelir. Benim burada amacım hani alanını hesaplayacak kolay bir şekil oluşturmak. Yani sürekli tek sayıda küçük kare eklediğimiz için her seferinde farklı büyük bir kare oluşuyor. Toplam küçük kare sayısı da büyük karenin alanı olduğu için model bize n^2 olduğunu gösteriyor.

Araştırmacı: Peki bu toplamı farklı bir model oluşturarak da bulabilir misiniz?

Buğra: [Düşünüyor] Terim sayısıyla ortanca terimi çarpıp bulabilirim. n=1 dediğim zaman 2n-1=1, n=2 dediğim zaman 2n-1=3. Şuradan ben zaten (2n-1) deki indisin terim sayısı olduğunu biliyorum. O zaman terim sayım ‘n’, ortanca terim de (ilk terim+ son terim)/2 den (2n-1+1)/2. Bu da ‘n’. Bu ikisinin çarpımı zaten n^2. Bu da toplam zaten.

…………………….



Alıntı 68. Tek sayıların toplamı sorusu için Buğra tarafından üretilen geçerli sembolik model

Buğra’nın alanı n^2 olacak farklı şekiller arasından tek sayıların hem ardışık olarak iç içe L biçiminde yerleşimini hem de toplamlarını rahat göstermek açısından kareyi tercih etmesi modelleme sürecine esnek yaklaşımının bir sonucudur. Mülakatın devamında Buğra yazılı sınavdaki geçerli görsel modeline ek bir de sembolik model geliştirmiştir.

4.2.4. Olasılık Sorusuna İlişkin Bulgular

0 ile 5 arasından (0 ile 5 dâhil) rastgele seçilen iki reel sayının toplamının 3 ve 3’ten küçük olduğu durumlar söz konusudur. Söz konusu bu durumların olasılığını hesaplamada yararlanabileceğiniz matematiksel bir model oluşturunuz.

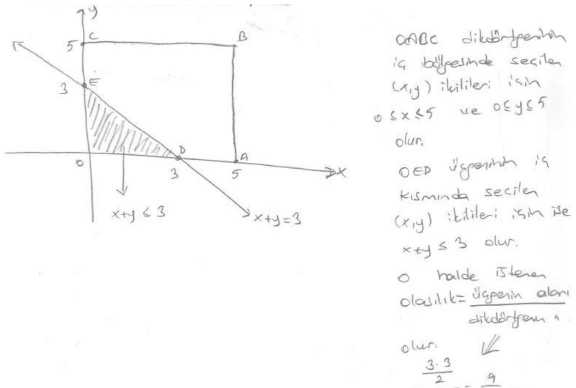
Katılımcıların bu soruda belirtilen aralıktaki tüm sayı çiftlerini düşünerek geneli yansıtabilecek bir model oluşturmaları gerekmektedir. Çalışılan aralıktaki sayı yoğunluğu nedeniyle koordinat sistemi üzerinde istenen durumları bir üçgenin alanı ile, olası tüm durumları da bir karenin alanı ile temsil ederek olasılık hesabına geçmeleri önem arz etmektedir. Yazılı sınavda öğretmen adaylarının bu soruya ilişkin üretmiş oldukları modeller yeterlikleri açısından değerlendirilerek Tablo 23’ te sunulmuştur.

Tablo 23. Olasılık sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE(%)
GEÇERLİ MODEL	Grafiksel	2	1,4
GELİŞTİRİLMESİ GEREKEN MODEL	Grafiksel	5	3,6
SINIRLI MODEL	Sistematik Tablo	12	8,6
GEÇERSİZ MODEL		91	65,5
YANIT YOK		29	20,9
TOPLAM		139	100,0

Katılımcılardan sadece 2 tanesinin geçerli model ürettiği görülmektedir. Geliştirilmesi gereken model oluşturan %3,6'lık kesim sayıları temsil aracı olarak grafik kullanmayı tercih ederken, sınırlı model üreten %8,6'lık grup tablo modeller üzerinden çıkarımda bulunmaya çalışmıştır. Geçersiz model oluşturan %65,5'lik kesimin ise gelişigüzel örnekler seçerek ya da sorunun muhtevasına uygun olmayan yöntemler takip ederek olasılık hesabı yapmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu soruda başarı düzeyinin çok düşük olduğunu not etmek isteriz.

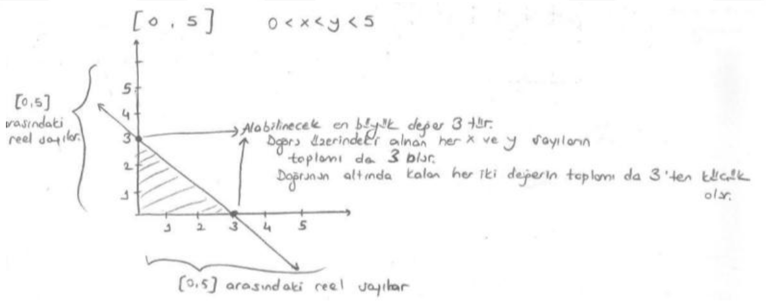
Toplamları 3 ve 3'ten küçük olacak şekilde belirli örnekler aramak yerine tüm sayı çiftlerinin gösterdiği ortak davranışı inceleyerek ve yerlerini koordinat sisteminde belirli bölgeler ile sınırlayarak doğru olasılık hesaplamasına ulaşan öğretmen adaylarının modelleri *geçerli model* olarak kabul edilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği geçerli model aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 69. Olasılık sorusuna ilişkin geçerli model örneği [ÖA-73]

Bu öğretmen adayı iki sayıyı birbirinden bağımsız seçebilmek için koordinat sistemi kullanması gerektiğini düşünmüştür. Ayrıca belirtilen aralıklarda sonsuz tane sayı çifti olduğunun, bu ikililerin bir araya geldiğinde belirli sınırlar içinde kalacağının ve belirli bir alan oluşturacağının da farkındadır. Dolayısıyla sayıların toplamı 3'e eşit iken x+y=3 doğrusunun üzerinde olması, 3'ten küçük iken bu doğrunun altında ve eksenler arasında kalan üçgen içinde olması ya da tüm durumların bir kare içerisine düşmesi gibi durumları tespit ederek sınırları doğru biçimde belirlemiştir. En son bu sınırlar üzerinden bulduğu alanları *istenen durumlar/ tüm durumlar* biçiminde yazarak olasılığı doğru biçimde hesaplamıştır.

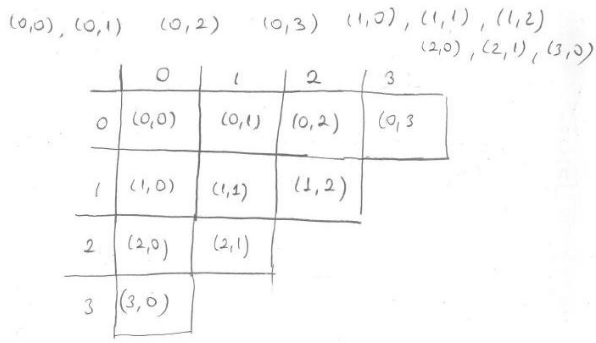
Diğer taraftan grafiksel yapılar üzerinde çalışmalarına rağmen sayı çiftlerinin yerleşimini belirleyen sınırların tespiti ve olasılık hesabı noktasında eksiklikler ya da yanlışlıklar içeren modeller *geliştirilmesi gereken model* olarak değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin ürettiği aşağıdaki model incelenecek olursa öğretmen adayının tüm sayı çiftlerini bir karenin alanı ile temsil edemediği ve dolayısıyla olasılık hesaplamasına geçemediği görülür.



Alıntı 70. Olasılık sorusuna ilişkin geliştirilmesi gereken model örneği [ÖA-1]

Bu öğretmen adayı da belirtilen aralıktaki sayıları temsilen aldıkları sıralı ikilileri göstermek için koordinat sistemi kullanması gerektiğini düşünmüştür. Ancak burada çizdiği grafiği yorumlayıp matematiğe geçişte sıkıntı yaşamıştır. Sayıların toplamı 3'e eşit iken x+y=3 doğrusunun üzerinde olması, 3'ten küçük iken bu doğrunun altında ve eksenler arasında kalan üçgen içinde olması durumlarını doğru biçimde belirlerken; tüm durumların bir kare içerisine düşmesi durumunu tespit edememiştir. Bütün sınırları tam olarak belirleyemediği için de olasılık hesabını doğru yapamamıştır.

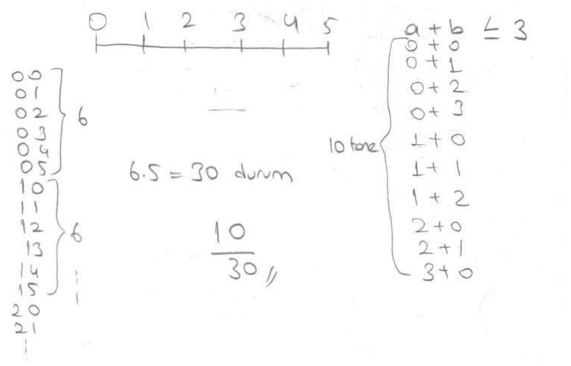
Sayı çiftleri hakkında bütünsel yorumlar içermeyen; ancak seçilen bazı doğal ya da rasyonel sayı çiftleri aralarında belirli bir ilişki yakalamak için oluşturulan sistematik tablolar *sınırlı model* olarak kabul edilmiştir. Buna ilişkin bir örnek bir model aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 71. Olasılık sorusuna ilişkin sınırlı model örneği [ÖA-28]

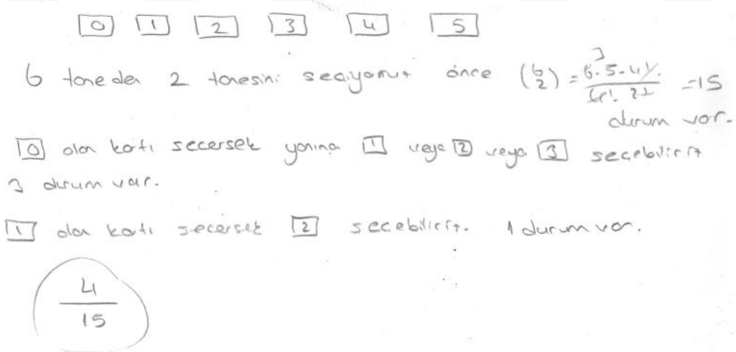
Bu katılımcı toplamları 3 ve 3'ten küçük olacak sayı çiftleri ararken iki sayı için de en üst sınır olarak 3'e kadar çıkmıştır. Reel sayılar için düşünmemiş olsa da asıl niyetinin bir desen oluşturmak, olayı görmek ya da soru hakkında bir fikir yürütmeye çalışmak olduğu anlaşılmaktadır. Çünkü oluşturduğu tabloda belirli aralıklar üzerinde çalışması, istenen durumlar için köşegensel yapılara ulaşması – ki bu üçgensel yapının temelini oluşturmaktadır – bu adayın bir örüntü arayışında olduğunun göstergesidir. Dolayısıyla bu şekilde belirli sayılar üzerinde farklı ihtimaller düşünerek önünü görmeye çalışan adayların ürettikleri modeller sınırlı model olarak kabul edilmiştir.

Geçersiz model kategorisinde değerlendirilen modellerde öğretmen adaylarının farklı yaklaşımlar sergiledikleri görülmüştür. Örneğin belirtilen aralıktan sadece uygun doğal ya da rasyonel sayı çiftlerinin seçilmesi, uygun bazı sayı çiftleri için yanlış olasılık hesaplanması, sayıların seçilme işleminin somut nesnelerin çekilmesine benzetilerek aynı sayının tekrar kullanılmaması gibi sorunun içeriğini tam olarak karşılamayacak durumlar ortaya çıkmaktadır. Bu öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 72. Olasılık sorusuna ilişkin geçersiz model örneği – I [ÖA-4]

Alıntıda görüldüğü üzere bu öğretmen adayı aralıktan seçilen sayı çiftlerini yalnızca doğal sayılar üzerinde düşünerek olası diğer durumları göz ardı etmiştir. Dolayısıyla oluşturulan model ile reel sayı çiftlerinin yerlerine dair genellemenin yapılamaması (istenen olayın çıktı sayısı ve örnek uzayın çıktı sayısı gibi temel kavramların belirlenememesi) olasılığın doğru hesaplanmasını engellemektedir. Geçersiz bir başka model örneği de şu şekildedir:



Alıntı 73. Olasılık sorusuna ilişkin geçersiz model örneği – II [ÖA-22]

Alıntıda öğretmen adayının sayıların seçilme işlemini kartların çekilmesine benzettiği ve bu durumun aralıktaki sonsuz reel sayı çiftini temsil edemediği açıktır. Ayrıca kartların aynı anda çekilmesi durumunda seçilen sayının tekrar seçilme olasılığının göz ardı edilmiş olması sorunun içeriği ile örtüşmemektedir. Özetle, geçersiz modeller oluşturan katılımcıların istenen şartı sağlayan tüm sayı çiftlerinin davranışı hakkında çıkarımda bulunamadıkları ve olasılık hesaplamasına kapı aralayabilecek bir model oluşturamadıkları söylenebilir.

Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden elde edilen bulgular Tablo 24'te sunulmuştur. Buna göre 5 öğretmen adayı geçerli model, 1 öğretmen adayı geliştirilmesi gereken model, 3 öğretmen adayı ise geçersiz modeller üretebilmiştir.

Tablo 24. Olasılık sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	X	X	X				X		X
Geliştirilmesi Gereken Model				X					
Geçersiz Model					X	X		X	

Bulgular yazılı sınavda geliştirilmesi gereken model oluşturan katılımcıların mülakatta bu modellerini geçerli modele daha kolay dönüştürebildiklerini göstermektedir. Buna ilişkin Aysun ile yapılan görüşmeden bir kesit şu şekildedir:

Diyalog 20:

Araştırmacı: Burada aldığınız sıralı ikililerin sayısını artıramaz mıyız? Örneğin sayılardan birini 1/2 alsak bu sizin sınırladığınız bölgenin dışında.

Aysun: Artırırız. Siz artırdınız mesela şu anda. O zaman benim yaptığım model olmuyor.

Araştırmacı: Peki bu sıralı ikililerin sayısı arttıkça bunlar belli bir bölgede toplanır mı?

Aysun: Toplanır, zaten o mantıktan gitmeye çalıştım. Doğru üzerinde mi toplanır acaba?

Araştırmacı: Toplamın tam 3 olduğu sınır neresidir? Ya da ortak bir sınır var mıdır?

Aysun: (3,0), (0,3). Mesela (3,3) toplamı 6 olur, olmaz. 3+1/2 = 7/2. 6/2'den küçük bir değer almasını istiyorum. 3 doğrusu üzerinde mi desem? Şöyle y = x alsam dedim. Altı üstü olmaz.

Araştırmacı: Öyle bir sınır bulun ki o sınırın dışına çıktığımızda artık 3'ten büyük olsun. Yani bu sayıların hepsini temsil edebileceğimiz bir ifade üretebilir miyiz?

Aysun: [Düşünüyor] Doğru çizeyim şöyle. Koordinat sistemi çizeyim. y'ye 0 verdiğim zaman x = 3. Şu da 3. [x+y=3 doğrusunu çiziyor]

Araştırmacı: O doğru üzerinde ne olur?

Aysun: (0,0) sağladığı için şu aşağısında kalan alanlar olacak. Ama bir de 0 ile 5 arasında sınırladığınız için. Evet. Şu 5 ve 5'ten yukarıda da olmayacak. Toplam alan şurası olacak. [x+y=3 doğrusunun altında ve eksenler arasında kalan üçgeni tarıyor]

Araştırmacı: Tamam. Burası istediğimiz bölge.

Aysun: Toplamda 5'ler arasındaki kare alan olacak. Bütün havuzu buradan almamız isteniyor.

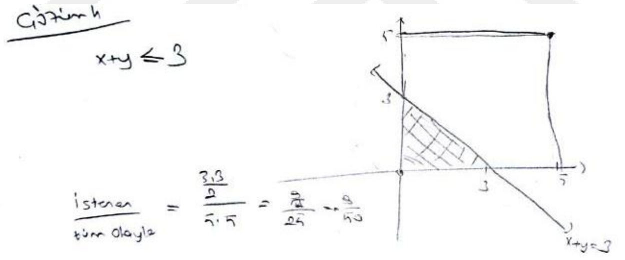
Araştırmacı: Peki bu bölgede artık olasılık hesaplamaya girecek olursak nasıl düşünebiliriz?

Aysun: Bu karenin içi işte tüm olaylar, yani 5x5 lik bir alan. Şu üçgenin alanı da istenilen durum. Ben aslında bunu yapmaya çalışmıştım. Yani istenen/tüm dediğimizde, (9/2)/25, 9/50.

……………………………

Aysun: Aslında ilk başta şöyle düşündüm. Bir sayı doğrusu alayım işte 0 ile 5 arasında. Baktım iki sayı diyor ikisini burada örnekleyemiyorum modelde. O yüzden bir sayı doğrusuna daha ihtiyacım daha vardı, bunu koordinat sistemine dönüştürdüm. Sonra aradaki değerleri almayı düşündüm ama sınırları belirlerken hata yapmışım.

………………………………..



Alıntı 74. Olasılık sorusu için Aysun tarafından üretilen geçerli model

Aysun yazılı sınavda koordinat sisteminde belirli sıralı ikililer ve bunların oluşturduğu bazı bölgelerin alanları ile uğraşsa da kritik sınırları tespit edemediği için doğru olasılık hesaplaması yapamamıştı. Mülakat sırasında araştırmacının "*Peki bu sıralı ikililerin sayısı arttıkça bunlar belli bir bölgede toplanır mı*?" ve "*Toplamın tam 3 olduğu sınır neresidir*?" gibi soruları üzerine sayı çiftlerinin belirli bir alan oluşturduğunu fark ederek üçgenin alanı ile karenin alanı arasında istenen durumlar/tüm durumlar ilişkisini kurmuştur.

Mülakat verilerinin analizinden ulaşılan bir diğer önemli bulgu ise öğretmen adaylarının modelleri geneli temsil edecek bir araç olarak kullanmakta zorlandıkları hususudur. Aşağıda Zeynep adlı öğretmen adayı ile yapılan görüşmeden bir diyalog sunulmuştur.

Diyalog 21:

Zeynep: Toplamları 3 ve 3'ten küçük olacak durumları yazdım. (0,0), (0,1), (0,2), (0,3) gibi.

Araştırmacı: Anladığım kadarıyla siz sadece doğal sayı olduğu durumları düşünmüşsünüz. Ama reel sayı seçmeniz isteniyor. Mesela rasyonel sayı olarak 1/2'ye 5/2 seçemez miyiz?

Zeynep: Seçebiliriz. Bunların toplamı da 3.

Araştırmacı: Peki tüm bu durumları birlikte nasıl değerlendirebiliriz?

Zeynep: O da sonsuz olur değerlendiremeyiz. Sonsuz/sonsuz gibi belirsizlik çıkar.

Araştırmacı: Burada aslında sadece belirli durumları incelemiş oluyoruz. Önceki sorularda durumu bir cebirsel ifade ile genellemiştiniz. Burada da benzer biçimde düşünemez miyiz?

Zeynep: Burada bir aralık olduğu için, aralıkta zaten sonsuz tane sayı olduğunu biliyoruz.

Araştırmacı: Peki bu aralığın hepsini inceleyen ya da temsil eden bir model üretemez miyiz?

Zeynep: Sayı doğrusu olabilir. [Bir sayı doğrusu çizerek 0-5 aralığını belirliyor]

Araştırmacı: Bu sayı doğrusunu iki sayı seçerken nasıl kullanacağız?

Zeynep: Bu iki sayı dediğiniz toplamları 3 olan sayılar mı?

Araştırmacı: Evet. Bu aralıktan bir sayı, bir nokta aldığınızı kabul edelim. Burada bir sayıyı temsil etmiş oluyorsunuz.

Zeynep: 0 ile 1 aralığını aldığım zaman orada sonsuz tane var ama.

Araştırmacı: Tamam. 0 ile 1 aralığından bir sayı seçtiniz. İkinci sayıyı nereden seçeceğiz? Ya da bu durumları aynı sayı doğrusu üzerinde gösterdiğimizde şekil git gide karmaşıklaşmaz mı?

Zeynep: Evet. Ama bir fikrim yok.

…………………………….

Alıntı 75. Olasılık sorusu için Zeynep tarafından üretilen geçersiz model

Alıntıdan anlaşılacağı üzere Zeynep belirtilen aralıkta sonsuz sayı olacağının farkındadır. Ancak bu sayıları birbirinden bağımsız seçebilmek için koordinat sistemi ile çalışması gerektiğine ve bu sayı çiftlerinin yerlerine dair genellemeye ulaşamamıştır. Daha açık bir ifadeyle çıkarımlarda bulunabileceği bir model üretememesi olasılık hesabına geçiş yapmasını engellemektedir.

4.2.5. İki Kare Farkı Özdeşliği Sorusuna İlişkin Bulgular

İki kare farkı özdeşliğinde a^2-b^2 = (a-b)·(a+b) dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

Katılımcıların bu soruda eldeki bilginin arka planındaki düşünceyi anlamlı bir şekilde açıklayabilecek bir model oluşturmaları gerekmektedir. Bu doğrultuda yapılacak modellemelerin a'nın ya da b'nin belirli sayı değerleri ile kısıtlı kalmayıp genellenebilir sonuçlara ulaşılması beklenmektedir. Bu soruya ilişkin yazılı sınav bulguları Tablo 25'te sunulmuştur.

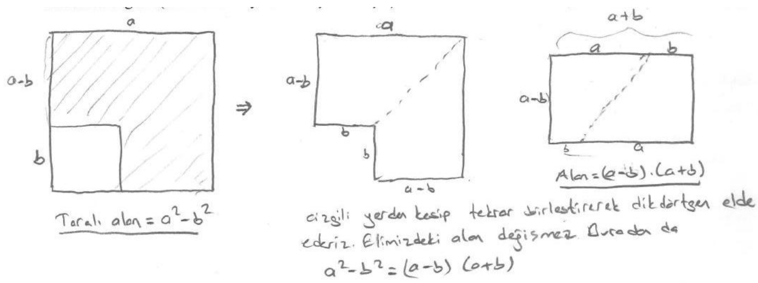
Tablo 25. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	FREKANS	YÜZDE (%)
GEÇERLİ MODEL	Görsel	36	25,9
	Sembolik	80	57,5
SINIRLI MODEL	Aritmetiksel	3	2,2
GEÇERSİZ MODEL	Görsel	12	8,6
	Sembolik	4	2,9
YANIT YOK		4	2,9
TOPLAM		139	100,0

Katılımcıların %83,4'ünün geçerli modeller ürettiği görülmektedir. Bu adaylardan yaklaşık üçte ikisi modellerini sembolik yapılar üzerine inşa etmiştir. Sınırlı model üreten %2,2'lik kesim sadece aritmetiksel hesaplamalar ile yetinmiştir. Diğer taraftan geçersiz model oluşturan %11,5'lik grubun dörtte üçü görsel şekilleri, dörtte biri ise sembolik yazılımları kullanmıştır. Öğretmen adaylarının %2,9'u soruya ilişkin herhangi bir model üretememiştir.

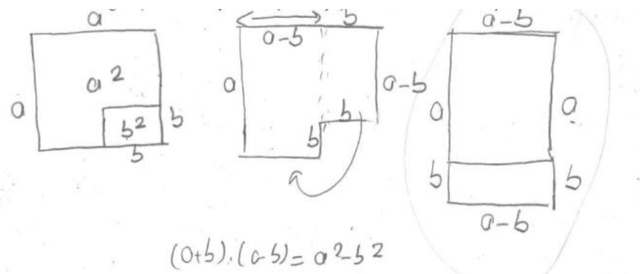
Bu soruda a^2 - b^2 nin iki karenin alanları arasındaki farkı temsil edecek ve alanının korunumu düşüncesiyle yeniden tasarlandığı görsel modeller ile bu alanlara bağlı ya da bunlardan bağımsız olarak cebirsel işlemler biçiminde oluşturulan sembolik modeller *geçerli model* olarak kabul edilmiştir.

Büyük bir karesel bölgenin içerisinden küçük bir karesel bölge çıkarıldıktan sonra kalan şekli belli bir yerden keserek ve oluşan parçaların yerleşim biçimini değiştirerek tasarlanan geçerli görsel modellerden biri aşağıda sunulmuştur.



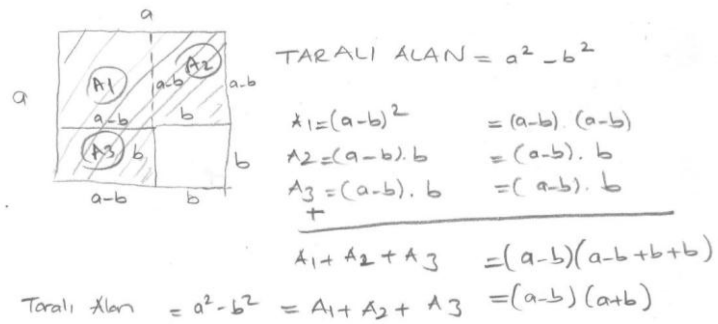
Alıntı 76. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin geçerli görsel model örneği – I [ÖA-95]

Bu öğretmen adayı a^2 ve b^2 yi iki karenin alanı ile ilişkilendirdikten sonra a^2 - b^2 yi büyük bir karenin içerisinden küçük bir karenin çıkarılması sonucu kalan alan ile temsil etmiştir. Daha sonra kalan şekli iki yamuk oluşturacak biçimde kesmiş ve oluşan parçalardan birini diğer tarafa eklemiştir. Bu şekilde kısa kenarı (a-b), uzun kenarı (a+b) olan bir dikdörtgen elde ederek alanın iki kenarın çarpımı olduğunu doğrudan göstermiştir. Bu tip modeller sembolik izahlara çok ihtiyaç duyulmadan anlaşılabildiği ve oluşturulan şeklin tasarımı ön plana çıktığı için görsel model olarak adlandırılmıştır. Benzer şekilde kesme işleminin iki dikdörtgen oluşturacak şekilde yapıldığı bir diğer geçerli görsel model aşağıdaki gibidir.



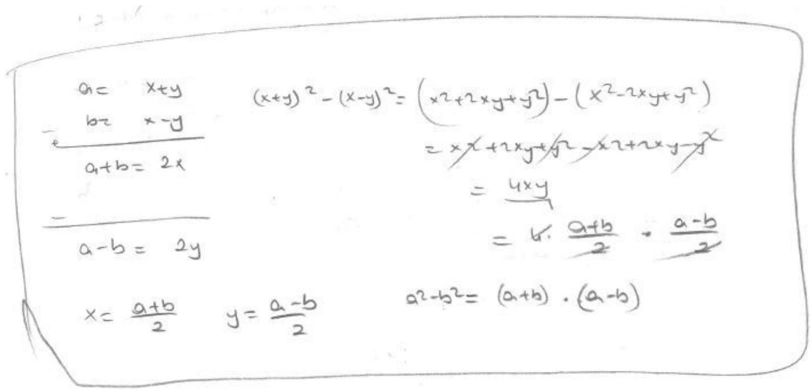
Alıntı 77. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin geçerli görsel model örneği – II [ÖA-24]

Karelerin alanları arasındaki ilişkiyi kullanmakla birlikte eşitliğin doğruluğunu bir dizi cebirsel işlemin sonunda gösterebilen öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu geçerli sembolik model aşağıda verilmiştir.



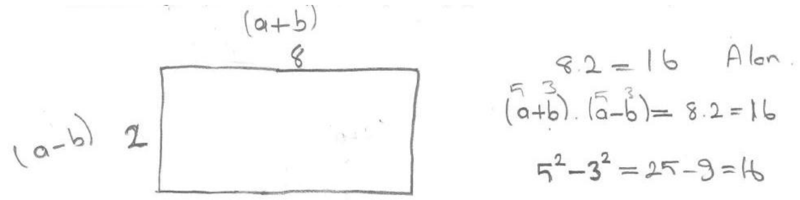
Alıntı 78. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin geçerli sembolik model örneği – I [ÖA-19]

Yukarıdaki alıntıda da görüldüğü üzere, geçerli sembolik model üreten adayların büyük çoğunluğu a^2 - b^2 yi büyük bir karenin içerisinden küçük bir karenin çıkarılması sonucu kalan alan ile temsil etmişlerdir. Ancak, kalan şekli bir yerden kesmek ve diğer tarafa eklemek yerine iki ya da üç parçaya ayırarak bu parçaların alanları toplamını cebirsel işlemlerle bulmuşlardır. Bu modeller görsel çizimler içermekle birlikte çizimin kendisi eldeki durumu içerik açıdan temsil edememekte; bu çizimin sembollerle detaylandırılarak anlamlandırılması gerekmektedir. Dolayısıyla bu tip modellerde cebirsel işlemler ağır bastığı için sembolik model olarak kabul edilmiştir. Kimi öğretmen adayları (n=10) ise eldeki bilgiyi cebirsel ifadelerde çarpma yapma, farklı özdeşliklerden yararlanma gibi tamamen sembollere dayalı bir biçimde izah etmeye çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu geçerli sembolik model örneği aşağıdaki gibidir.



Alıntı 79. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin geçerli sembolik model örneği – II [ÖA-34]

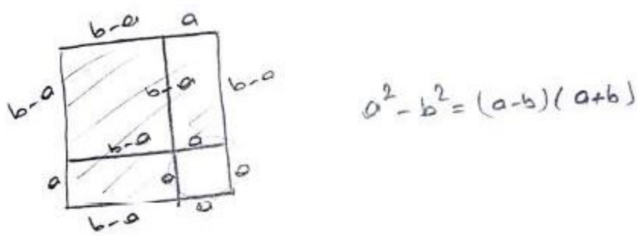
Diğer taraftan a'ya ve b'ye belirli değerler vererek bu değerler için eşitliğin doğruluğunu göstermeye çalışan öğretmen adaylarının oluşturduğu modeller *sınırlı modeller* olarak değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adaylarından birinin üretmiş olduğu aşağıdaki model incelenecek olursa öğretmen adayının izahı sadece sayısal işlemler üzerinden yürüttüğü görülür.



Alıntı 80. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin sınırlı aritmetiksel model örneği [ÖA-16]

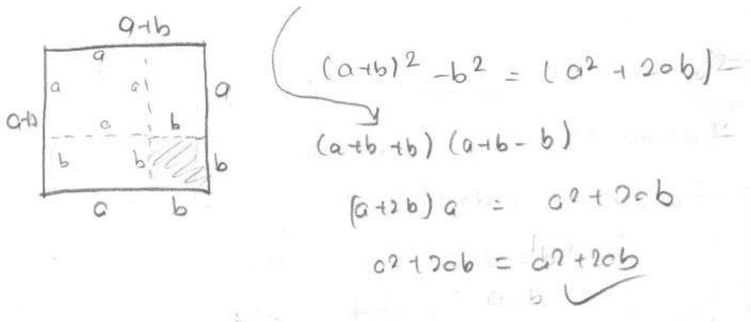
Bu kategorideki öğretmen adayları değişkenlere verdikleri değer ya da değerler için elde edecekleri sonuçları hesaplayarak eşitliğin doğruluğunu göstermenin yeterli olduğunu düşünmüşlerdir. Dolayısıyla bakılan değerler modeli bir ya da birkaç özel duruma kısıtladığı için elde edilen sonuçların genelleştirilemeyeceği açıktır.

Geometrik şekillerin belirli bir mantığı taşımadığı veya anlamsız biçimde kullanıldığı çizimler ile teorik bilgilerin (alan bağıntıları, farklı özdeşlikler vs.) amaçsız bir şekilde yanlış kullanıldığı cebirsel izahlar *geçersiz model* olarak kabul edilmiştir. Şekil üzerindeki parçaların alanları arasında verilen eşitliğe ulaşmaya yönelik bir bağ kurulamayan görsel modellerden biri aşağıda sunulmuştur.



Alıntı 81. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği [ÖA-134]

Bu öğretmen adayı şekillerin alanları üzerinden bir ilişki kurmaya çalışsa da görsel üzerinde parçaların yerlerini değiştirmek suretiyle izahın anlaşılabileceği yeni bir tasarıma ulaşmadığı ya da belirli parçaların alanlarını cebirsel olarak ifade etmediği için eldeki model istenen amaca hizmet etmemektedir. Ayrıca şekil üzerinde büyük karenin bir kenarının a yerine b seçilmesi nedeniyle modelin iki karenin alanları arasındaki farkı (a^2 - b^2) gösterme düşüncesinden de uzak olduğu açıktır. Benzer şekilde yapılan sembolik izahın çizim üzerinde alanlar arasındaki ilişkiyi açıklayamadığı geçersiz modellerden biri aşağıdaki gibidir.



Alıntı 82. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin geçersiz sembolik model örneği [ÖA-35]

Bu öğretmen adayı yaptığı izahta süreç içerisinde aslında bilginin kendisini kullanmış olup (terimlerin kareleri farkının iki terimin toplamı ile farkının çarpımı) sadece farklı terimler için bir uygulamasını yapmakla kalmıştır. Ayrıca kullandığı sembolik yapılar, yardımcı unsur olarak kullandığı görseli açıklayamadığı gibi ulaştığı son ifadede kanıtlaması gereken asıl eşitliğin doğruluğunu da gösterememiştir.

Görüşmeler sırasında kimi öğretmen adayları yazılı sınavdaki modellerini geliştirme veya farklı geçerli modeller üretme yoluna giderken kimi adaylar ise yazılı sınavdan farklı bir aşama kaydedememiştir. Yazılı sınavda geçerli sembolik model üreten Gönül, Yavuz ve Buğra mülakatta bu modellerine ek geçerli görsel modeller üretirken; yazılı sınavda sınırlı aritmetiksel model üreten Nihat bu modelini geçerli sembolik modele dönüştürmüştür. Yazılı sınavda geçerli görsel model üreten Aysun ve Zeynep ile geçerli sembolik model üreten Esin, Merve ve Özgür mülakatta yeni geçerli modeller üretememiştir.

Tablo 26. İki kare farkı özdeşliği sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	Gönül	Aysun	Esin	Merve	Özgür	Yavuz	Buğra	Zeynep	Nihat
Geçerli Model	GÖR MOD	GÖR MOD	SEM MOD	SEM MOD		GÖR MOD	GÖR MOD	GÖR MOD	SEM MOD
Sınırlı Model									
Geçersiz Model					GÖR MOD				

Kısaltmalar: GÖR-MOD: Görsel Model, SEM-MOD: Sembolik Model

Bulgular model üzerinde esnek düşünce sergileyebilen adayların farklı modelleri daha kolaylıkla üretebildiklerini göstermektedir. Örneğin yazılı sınavda alanlar arasındaki görsel ilişkiyi sembolik yapılar ile açıklayan Yavuz'un mülakatta oluşturduğu çizimi farklı biçimlerde kullanarak birbirine benzer görsel modeller tasarlayabildiği görülmektedir.

Diyalog 22:

Yavuz: Burada bir kenarı a olan bir kare aldım ve bir kenarı b olan bir kareyi de buradan çıkardım. Kalan bölgeyi dikdörtgensel alanlara bölüp cebirsel ifadelerle bir sonuç elde ettim.

Araştırmacı: Yalnız bu görsel model bu bilginin mantığını direk gözler önüne seriyor mu? Yoksa bu eşitliğe ulaşana kadar bir dizi cebirsel işlem mi yapmak zorunda kalıyoruz?

Yavuz: Yok sermiyor. Cebirsel işlemlerden sonra özdeşlik çıkıyor.

Araştırmacı: Modeldeki amacımız bilgiyi biraz daha karşı tarafa izah etmeyi kolaylaştırmak değil midir? Yani bu modeli öyle bir hale getirebilir miyiz ki, şöyle görsele bakan bir kişi için (a- b).(a+b) çarpımı olduğunu direk gösterebilir miyiz?

Yavuz: Evet. [Düşünüyor] Şöyle olabilir. Bir kenarı a olan bir kareden yine bir kenarı b olan bir kareyi çıkartıyoruz ve bu kalan alanı buradan köşelerini birleştiriyoruz. Ortadan kestiğimizde iki yamuk çıkıyor. Birini ters çevirip tekrardan buraya koyduğumuzda birbirini tamamlayacak. Yani bir dikdörtgensel alan çıkıyor ve bu alanı biz bildiğimiz için (a–b).(a+b)

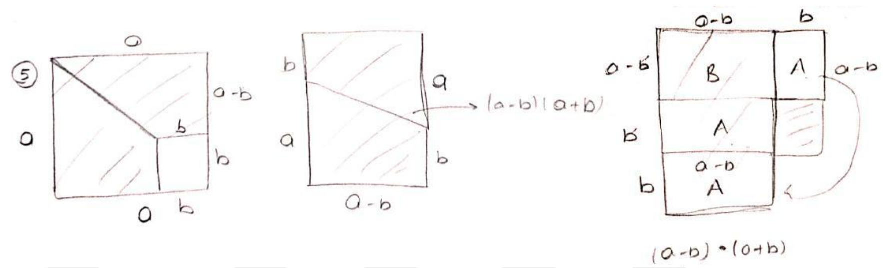
Araştırmacı: En azından bu modele bakan bir kişi cebirsel izahın yarattığı karmaşıklığa girmeden daha sade bir yapıyla direk olayın mantığını kavrayabilir. Peki bu modeli iki yamuk kullanmadan başka bir biçimde elde edemez miydik?

Yavuz: Edebilirdik aslında. (a-b) olan kenarını yine (a-b) olan kenara denk getirebiliriz.

Araştırmacı: Yani parçaların yine yerleşimlerini mi değiştiriyoruz?

Yavuz: Evet. [Kalan şekli dikdörtgenlere parçalıyor] Şöyle 3 tane dikdörtgensel bölge elde ettik. Şuradaki dikdörtgenlerden birini, buradaki dikdörtgenin yanına (a–b) kenarı üzerinde yaparsak. Buradan da yine (a – b) * (a – b + b + b). Buradaki b'ler zaten birbirini götürüyor. (a-b).(a+b)' yi bulmuş oluyoruz yine taşıma yöntemiyle.

……………………



Alıntı 83. İki kare farkı özdeşliği sorusu için Yavuz tarafından üretilen geçerli görsel model

Diyalogdan anlaşılacağı üzere Yavuz ile yapılan görüşmede yazılı sınavda oluşturduğu modelinde görselliği ön plana çıkarabilecek bir düzenleme yapılıp yapılamayacağına dikkat çekilmiştir. Yavuz'un küçük kare çıkarıldıktan sonra kalan şekli hem yamuk hem de dikdörtgen biçiminde keserek aynı izahı yapabilmesi parçalar arası ilişkileri iyi kurmasının sonucudur.

Mülakat verilerinin analizinden ulaşılan bir diğer önemli bulgu ise bir modelin kalitesini sadece bilinmeyen ile bilinen arasında kurduğu köprü ile değil o geçişi en sade, en anlaşılır yoldan sağlayıp sağlayamadığı ile ölçmek gerektiği düşüncesidir. Yazılı sınavda geçerli sembolik model üreten Özgür'ün mülakatta yaptığı izahı sadeleştirerek görsel model üretme çabası sırasında geçen bir diyalog şu şekildedir.

Diyalog 23:

Özgür: Burada büyük olan karenin bir kenarına a, küçük olanın bir kenarına da b dedim. $a^2 - b^2$ yi istiyor bizden. Yani şu kare alanı çıkartacağız tamamen. Kalan alanı hesaplıyoruz.

Araştırmacı: Küçük kareyi çıkardıktan sonra kalan şekli iki dikdörtgene mi parçaladınız?

Özgür: Evet. İki dikdörtgene parçalayıp alanları topluyoruz. a.(a-b) + b.(a-b) oluyor şurası da. (a-b) ortak parantezine aldım. (a-b).(a+b) oldu.

Araştırmacı: Peki şunu sorayım. Burada yaptığınız izahta görsellik mi daha ön planda kullandığınız cebirsel işlem mi ön planda?

Özgür: Bence birbirini destekliyor yani şunları yazmadan sadece görseli çizsem bir şey ifade etmez. Mesela ortaokul öğrencisine anlatacak olsam sadece cebirsel yazsam yine göremeyiz.

Araştırmacı: Peki öyle bir model geliştirelim ki buradaki cebirsel izahı azaltalım. Yani biraz daha şeklin görselliği ile durumu açıklayabilir miyiz?

Özgür: Zaten alan kullanıyoruz. Paranteze alma işlemini mi diyorsunuz cebirsel diye?

Araştırmacı: Evet ortak çarpan parantezine alıyorsunuz. Yani $a^2 - b^2$ direk (a-b)(a+b) diye şeklin kendisi konuşmuyor. Yeni cebirsel açıklamalara ihtiyaç duyuyoruz. Bir modeldeki amacımız oradaki matematiksel bilgiyi daha basitleştirerek karşı tarafı ikna etmektir ya da ona açıklamaktır. Buradaki yaptığınız cebirsel işlem olayı daha çok karmaşıklaştırabilir.

Özgür: Yani o zaman tek bir alan bulmamız lazım çarptığımız için. Bir kenarı (a-b) olacak diğer kenarı (a+b) olacak bir şekil bulmamız lazım.

Araştırmacı: İki dikdörtgen yerine tek bir şekle dönüştürebilir miyiz?

Özgür: Evet. Bir kareyi diğerinin üstüne ekleyebiliriz mesela hani (a+b) gelmesi için. Şimdi (a+b) yi çıkarmaya çalışıyorum. (a-b) yi sonuçta bulabiliriz diye. Burada bir alan çıkmıyor.

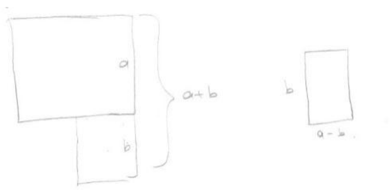
Araştırmacı: Burada elde ettiğiniz dikdörtgenlerden gidelim. Bu dikdörtgenlerin kenarları ne?

Özgür: Birinin a ile (a-b).

Araştırmacı: Burada a'yı kullanıyorsunuz. Ama (a-b) yi kullanmıyorsunuz. Nere (a-b)?

Özgür: [Düşünüyor] Orası a olacak. (a-b) evet bulamadım onu. Peki şunları birbirine eklesek. Şurası (a-b), şurası b… O zaman da garip bir şekil ortaya çıkıyor. Olmuyor.

……………………………



Alıntı 84. İki kare farkı özdeşliği sorusu için Özgür tarafından üretilen geçersiz görsel model

Alıntıdan anlaşılacağı üzere Özgür cebirsel işlemlere gerek kalmadan modelin görselliği üzerinden izah yapabilmek için kenarları (a+b) ile (a-b) olan bir şekil oluşturması gerektiğinin farkındadır. Ancak küçük kare çıkarıldıktan sonra kalan şekli belli bir yerden keserek ve oluşan parçaları uzunlukları aynı olan kenarlardan tekrar birleştirerek alanı kenarların çarpımı biçiminde gösterebileceği dikdörtgen gibi yeni bir şekil tasarlayamamıştır.

4.2.6. Kesirlerde Çarpma Sorusuna İlişkin Bulgular

Kesirlerde çarpma işleminde $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$ dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

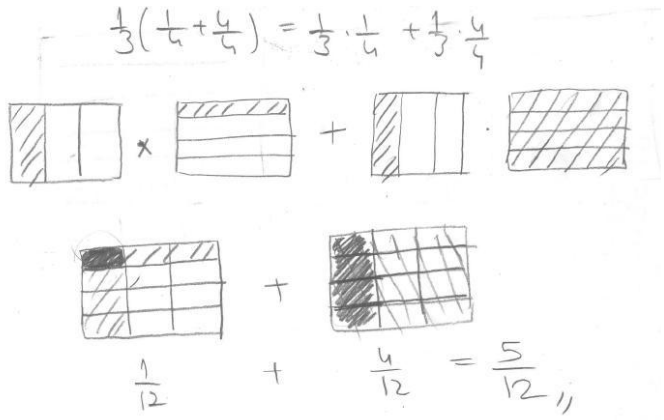
Bu soru katılımcıların kesirlerde çarpma işleminde verilen eşitliğin nereden geldiğini açıklayabilecek bir model oluşturabilme yeterliklerini incelemeyi amaçlamaktadır. Yapılacak modellemelerde kesirlerin birbirinden bağımsız biçimde gösterilmesi yeterli olmayıp çarpma işlemindeki mantığın izah edilmesi gerekmektedir. Tablo 27'de sunulduğu üzere yazılı sınav kâğıtlarının analizleri neticesinde üretilen modeller *geçerli, sınırlı* ve *geçersiz modeller* olmak üzere üç kategoride toplanmıştır.

Tablo 27. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin yazılı sınav bulguları

KATEGORİLER	**ALT KATEGORİLER**	**FREKANS**	**YÜZDE (%)**
GEÇERLİ MODEL	Görsel-Aritmetiksel	21	15,1
	Görsel	45	32,4
SINIRLI MODEL	Görsel-Aritmetiksel	21	15,1
GEÇERSİZ MODEL	Görsel	45	32,4
YANIT YOK		7	5,0
TOPLAM		139	100,0

Katılımcıların %47,5'inin geçerli modeller ürettiği görülmektedir. Bu modeller kendi içerisinde aritmetiksel işlemler açısından farklılaşsa da hepsinde görsel içerikler kullanılmıştır. Diğer taraftan sınırlı model oluşturan %15,1'lik grubun tamamı aritmetiksel işlemlerden modele geçiş yapmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının %32,4'ünün üretmiş olduğu modellerin geçersiz olduğu ve bu modellerin görsel yapılar üzerine inşa edildiği görülmüştür.

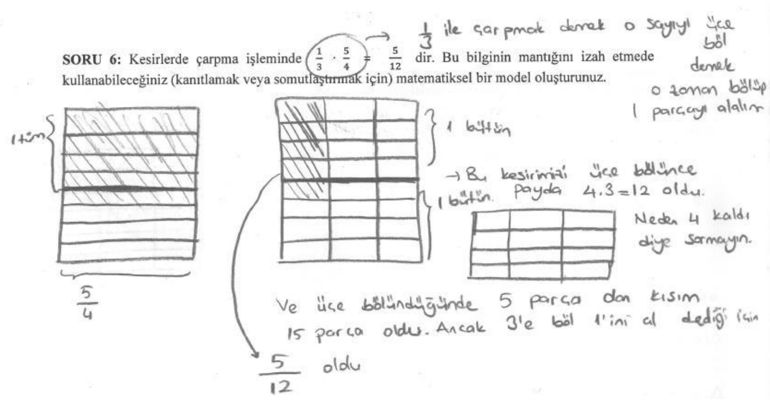
Katılımcıların bu soruda geçerli model üretebilmeleri için basit ve bileşik kesirler arasındaki ilişkiyi ortaya koyabilmeleri gerekmektedir. Bu doğrultuda bileşik kesrin bir tam ve bir basit kesir biçiminde ayrılarak dağılma işleminin mantığından yararlanılan görsel-aritmetiksel modeller (n=21) ile her iki kesrin ifade ettiği anlamın bütünsel ve işlemsiz biçimde gösterildiği görsel modeller (n=45) *geçerli model* olarak kabul edilmiştir. Aşağıda dağılma işleminin kullanıldığı örnek bir model sunulmuştur.



Alıntı 85. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin geçerli görsel-aritmetiksel model örneği [ÖA-4]

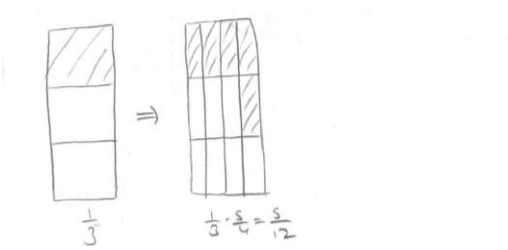
Bu katılımcı $\frac{5}{4}$ kesrini $\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$ şeklinde ayırdıktan sonra dağılma özelliğinden yararlanarak $\frac{1}{3}$ kesri ile ayrı ayrı çarpma işlemi olarak görülebileceğini düşünmüştür. Bu çarpma işlemlerini modellerken ise kesirlerin ifade ettiği yerleri farklı biçimlerde tarayarak gösterdikten sonra şekilleri üst üste getirmiş ve ortak taranan bölgeyi almıştır. Dolayısıyla kesişim bölgeleri her bir çarpma işleminin sonucunu göstermektedir. En son aşamada ise ortak bölgelerin ifade ettiği kesirleri tekrar birlikte düşünerek toplamıştır.

Görsel yaklaşımın işlemsiz kullanıldığı modellerde öğrenciler dağılma özelliğinin kullanıldığı görsel-aritmetiksel modellerden farklı olarak tek bir yapı üzerinde çalışmaktadırlar. Ancak düşünce tarzı olarak önce $\frac{1}{3}$ kesrinden başlayıp sonra $\frac{5}{4}$ ü gösterme; önce $\frac{5}{4}$ kesrinden başlayıp sonra $\frac{1}{3}$ ü gösterme ya da kesirleri ayrı ayrı gösterip kesişimlerini alma gibi farklı yaklaşımlar ortaya koymuşlardır. Kesirlerden birini modelledikten sonra o kısım üzerinde diğer kesri göstermeye çalışarak kesirleştirilmiş bir ifadenin yeniden kesirleştirilmesi olarak düşünen öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu görsel model aşağıdaki gibidir.



Alıntı 86. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin geçerli görsel model örneği - I [ÖA-8]

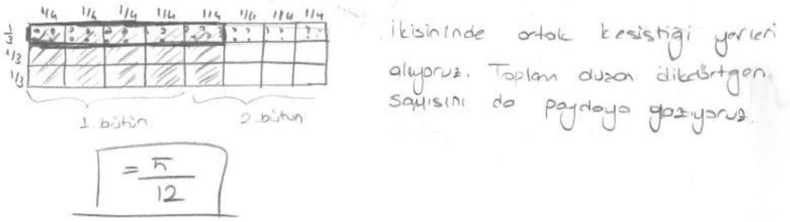
Alıntıdan anlaşılacağı üzere bu öğretmen adayı önce $\frac{5}{4}$ kesrini şeklin tamamı üzerinde göstermiştir. Daha sonra $\frac{5}{4}$ ün ifade ettiği bölümü üç parçaya bölmüş ve bu parçalardan birini alarak $\frac{1}{3}$ kesrine geçmiştir. Dikkat edilecek olursa $\frac{1}{3}$ kesri sadece $\frac{5}{4}$ lük kısım üzerinde tanımlandığı için şeklin tamamında gösterilmemiştir. Ayrıca bu modelde önce $\frac{5}{4}$ kesri gösterildiği için ikinci bütüne ihtiyaç duyulmaktadır. Görsel yaklaşımın işlemsiz biçimde uygulandığı ve kesirleştirilmiş bir ifadenin yeniden kesirleştirilmesi yaklaşımını içeren bir başka örnek şu şekildedir:



Alıntı 87. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin geçerli görsel model örneği-II [ÖA-92]

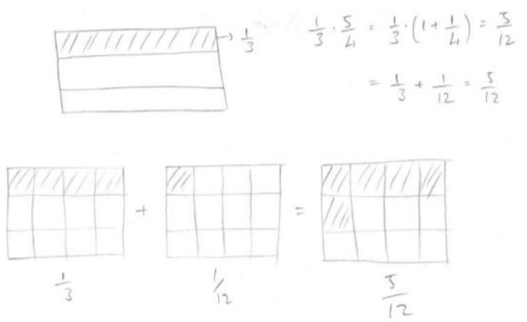
Bu öğretmen adayı ise önce $\frac{1}{3}$ kesrini şeklin tamamı üzerinde göstermiştir. Daha sonra $\frac{1}{3}$ ün ifade ettiği bölüm dört parçaya bölünüp bu parçalardan beş tane alınarak $\frac{5}{4}$ kesrine geçilmiştir (İlk kısım yetersiz kaldığı için 5. parça ikinci $\frac{1}{3}$ lük kısım üzerinden alınabilmiştir). Dikkat edilecek olursa $\frac{5}{4}$ kesri sadece $\frac{1}{3}$ lük kısım üzerinde tanımlandığı için şeklin tamamında gösterilmemiştir. Ayrıca bu modelde önce $\frac{1}{3}$ kesri gösterildiği için ikinci bütünün kullanılmasına da gerek kalmamaktadır.

Son olarak görsel yaklaşımın işlemsiz uygulandığı bir diğer modelde ise $\frac{1}{3}$ ile $\frac{5}{4}$ kesirleri ana şekil üzerinde ayrı ayrı düşünülmüş ve farklı biçimlerde taranarak şeklin tamamında gösterilmiştir. Daha sonra ikisinin ortak ifade ettiği alan bulunarak kesişim alınmıştır.



Alıntı 88. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin geçerli görsel model örneği-III [ÖA-2]

Sınırlı model üreten katılımcıların işlemden modele geçiş yaptıkları; diğer bir ifadeyle işleme göre model oluşturdukları görülmüştür. Dolayısıyla oluşturulan modellerin çarpma işleminin mantığını izah edemediği; süreci değil sonucu karşılayacak şekilde oluşturuldukları söylenebilir. Aşağıda buna ilişkin bir örnek sunulmuştur.

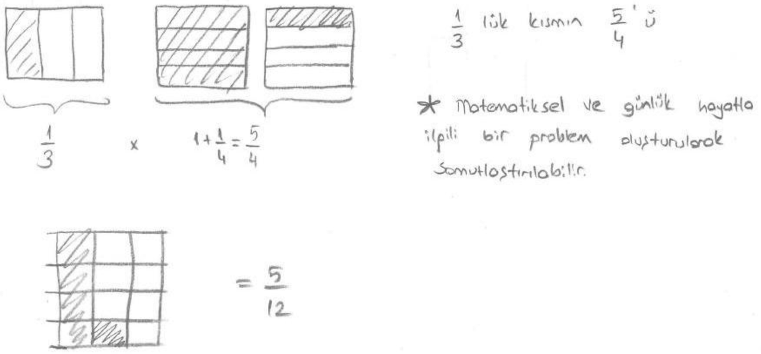


Alıntı 89. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin sınırlı görsel-aritmetiksel model örneği [ÖA-74]

Bu öğretmen adayı dağılmayı sayısal olarak sonuçlandırdıktan sonra gelen $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ işlemini modellemiştir. Dolayısıyla bu model $\frac{1}{3}$.1 işleminin sonucunun neden $\frac{1}{3}$ çıktığını ya da $\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$ işleminin sonucunun neden $\frac{1}{12}$ çıktığını açıklamada yetersiz kalmaktadır.

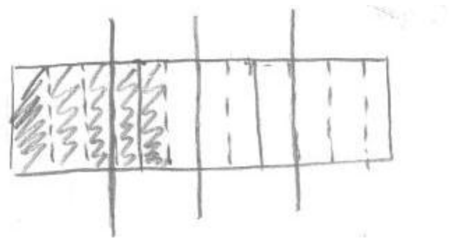
Oysa dağılma yaklaşımının kullanıldığı geçerli modellerde model işlemlerin mantığını izah edebilmektedir.

Geçersiz model kategorisinde değerlendirilen modellerde ise öğretmen adayları ya kesirleri ayrı ayrı aralarında bir bağ olmadan modellemişler ya da tek bir şekil üzerinde hepsini ortak biçimde göstermeye çalıştıkları anlamsız çizimler ortaya koymuşlardır. Bu öğretmen adaylarından birinin oluşturduğu aşağıdaki model incelenecek olursa öğretmen adayının $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{4}$ ve $\frac{5}{12}$ kesirlerini birbirinden bağımsız biçimde modellediği görülür.



Alıntı 90. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği - I [ÖA-86]

Diğer taraftan kesirlerin birlikte gösterilmeye çalışıldığı anlamsız bir çizim örneği aşağıda sunulmuştur. Bu model incelendiğinde öğretmen adayının oluşturduğu yapının çarpma işleminin mantığını açıklamaktan uzak olduğu görülür.



Alıntı 91. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin geçersiz görsel model örneği - II [ÖA-19]

Öğretmen adayları mülakatta çok daha iyi performans sergilemişlerdir. Mülakat bulguları Tablo 28'de sunulmuştur. Buna göre katılımcılardan 5 tanesi geçerli görsel model, 4 tanesi de geçerli görsel-aritmetiksel model üretmiştir.

Tablo 28. Kesirlerde çarpma sorusuna ilişkin mülakat bulguları

Modellerin Geçerlik Durumları	**Gönül**	**Aysun**	**Esin**	**Merve**	**Özgür**	**Yavuz**	**Buğra**	**Zeynep**	**Nihat**
Geçerli Model	GÖR MOD	GÖR MOD	GÖR MOD	GÖR ARİT MOD	GÖR ARİT MOD	GÖR MOD	GÖR MOD	GÖR ARİT MOD	GÖR ARİT MOD

Kısaltmalar: GÖR-MOD: Görsel Model, GÖR-ARİT-MOD: Görsel Aritmetiksel Model

Bulgular öğretmen adaylarının bileşik kesirler ile yapılan işlemleri açıklamada basit kesirlere göre daha zorlandıklarını göstermektedir. Aşağıda yazılı sınavda kesirleri birbirinden bağımsız bir biçimde modelleyerek geçersiz model oluşturan Nihat adlı öğretmen adayıyla yapılan görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Diyalog 24:

Araştırmacı: Benim bu modele baktığımda gördüğüm durum şu: 1/3 ve 5/4 kesirleri ayrı ayrı modellenmiş. Aşağıda 5/12'yi gösteren başka bir şekil daha var.

Nihat: Ama oradan oraya nasıl geldik? Onu izah edemedim.

Araştırmacı: Evet, bu model çarpma işleminin mantığını bana açıklamıyor. Peki kesirlerde çarpma size ne ifade ediyor? Bu iki kesri nasıl yorumlamamız gerekiyor?

Nihat: Şekil olarak mı?

Araştırmacı: Bu iki şekli birleştirdiğinizi söylüyorsunuz. Ama işlem sonucu 5/12 nasıl geldi?

Nihat: Kesirleri modelleyip araya mantıklı bir şey ekleyeceğimi düşündüm. Ama olmadı. Açıkçası çarpmayı şekillerle nasıl gösterebileceğimi bilmiyorum. Bölmeyi de düşündüm.

Araştırmacı: Peki 1/3 ünün 5/4 ü ya da 5/4 ünün 1/3 ü size ne ifade ediyor?

Nihat: Çarpma. Ama burası 5/4 değil de yani 4'ten küçük olsaydı. Yani basit kesir olsaydı…

Araştırmacı: Bileşik kesir olmasının bir zararı var mı? Bileşik kesir olması neyi zorlaştırıyor?

Nihat: Birleştirmeyi.[Bir şekil çizerek farklı biçimlerde tarıyor] Mesela 1/3 dikey, yatay kısım 1/4 diyelim. Ortak taranan kısım 1 parça, 12 parça var. O zaman 1/12, 1/3 ile 1/4 ün çarpımı.

Araştırmacı: Peki neden ortak taranan bölgeye aldık?

Nihat: İki şekli üst üste koyduğumuzu düşündüm. Çünkü biri üç parçaya ayrılmış, biri dört parçaya ayrılmış. 4 parçaya ayrılanı 3, 3 parçaya ayrılanı da tekrar 4 parçaya ayırmamız lazım. İki şeffaf kâğıdı üst üste koyduğumuzda ortak gelen kısmı burası. Ama 5/4 olduğu zaman…

Araştırmacı: Aslında sizde kesirlerde çarpma için bir mantık var. 1/3 ile 1/4 ün kesişimini alıp 1/12 yi buluyorsunuz. Peki bu işlemi bileşik kesirde niye yapamıyoruz onu anlamadım.

Nihat: Çünkü burada fazladan bir şekil daha çıkıyor.

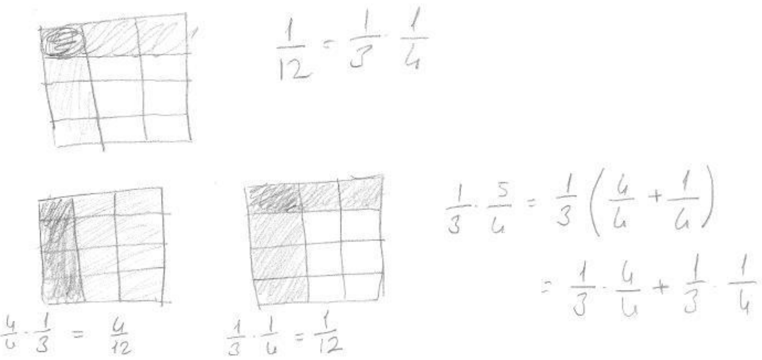
Araştırmacı: Tamam iki şekil üzerinden 1/3 alma işlemi yapamaz mıyız?

Nihat: Belki. [Düşünüyor] O zaman 5/4 ü ayırsam. [Dağılma uyguluyor] Böyle yazarsak 1/3.4/4 + 1/3.1/4 [Yeni bir bütün çiziyor] Bu bütün olsun. 4/4 olduğu için aslında hepsi taralı.

Araştırmacı: Tamam. Yine kesişim mi alıyorsunuz?

Nihat: Evet. 1/3 de sadece bu kısmı olmuş oluyor. Burası 4/12 oldu. Burası da daha önce yaptığımız gibi 1/12 oldu. Yerine yazıp topladığımız zaman 5/12. Evet. Sonuç çıktı.

……………………….



Alıntı 92. Kesirlerde çarpma sorusu için Nihat tarafından üretilen geçerli görsel-aritmetiksel model

Diyalogda görüldüğü üzere Nihat'ın kesirlerde çarpma işlemini izah ederken kesişim alabileceği şeklinde bir bilgisi vardır. Ancak "*Ama burası 5/4 değil de yani 4'ten küçük olsaydı. Yani basit kesir olsaydı…*" ifadesine bakılırsa bu işlemi bileşik kesirler için uygulamakta zorlandığı anlaşılmaktadır. Nitekim başlangıçta basit kesirler için ortak taralı bölgeye baksa da dağılma özelliğini gördükten sonra izahını geçerli modele dönüştürmeyi başarmıştır.

BÖLÜM V

TARTIŞMA – SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma ve Sonuç

Araştırma kapsamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının modelleme yeterliklerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda katılımcıların rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecindeki modelleme başarıları ile ders programındaki konu ve kavramların izahına yönelik modelleme başarılarının karşılaştırılması ve ürettikleri modellerin geçerliğinin detaylı olarak incelenmesi hedeflenmiştir. Araştırma bulguları öğretmen adaylarının söz konusu alanlarda ürettikleri modellerin niteliği, çeşitliliği, modelleme sürecinde zorlandıkları noktalar ve öğretmen eğitimi hususlarında önemli bilgiler vermektedir. Aşağıda araştırma kapsamında kullanılan her bir soru için üretilen modellerin geçerliklerine ilişkin yüzdeler sunulmuştur.

Tablo 29. Katılımcıların modelleme alanlarına göre ürettikleri modellerin geçerlik yüzdeleri

	SORU ADI	Geçerli Model (%)	Geliştirilmesi Gereken Model (%)	Sınırlı Model (%)	Geçersiz Model (%)	Yanıt Yok (%)
RUTİN OLMAYAN PROBLEMLER	Okul Sorusu	2,2	15,8	82,0	-	-
	Bina Sorusu	57,6	38,1	-	2,9	1,4
	Göl Sorusu	75,5	14,4	-	7,9	2,2
	Gemi Sorusu	37,4	14,4	20,1	23,0	5,0
	Tren Sorusu	5,7	19,4	-	60,5	14,4
	Pizza Şirketi Sorusu	43,9	22,3	30,2	1,4	2,2
ROPM Ortalama		**37,0**	**20,7**	**22,0**	**15,9**	**4,2**

	SORU ADI	Geçerli Model (%)	Geliştirilmesi Gereken Model (%)	Sınırlı Model (%)	Geçersiz Model (%)	Yanıt Yok (%)
DERS PROGRAMINDAKİ KONU VE KAVRAMLAR	Pisagor Bağıntısı Sorusu	26,6	-	3,6	63,3	6,5
	Dairenin Alanı Sorusu	17,2	3,6	-	66,2	12,9
	Tek Sayıların Toplamı Sorusu	53,9	3,6	8,6	23,7	10,1
	Olasılık Sorusu	1,4	3,6	8,6	65,5	20,9
	İki Kare Farkı Özdeşliği Sorusu	83,4	-	2,2	11,5	2,9
	Kesirlerde Çarpma Sorusu	47,5	-	15,1	32,4	5,0
DPKM Ortalama		**38,3**	**1,8**	**6,3**	**43,7**	**9,7**

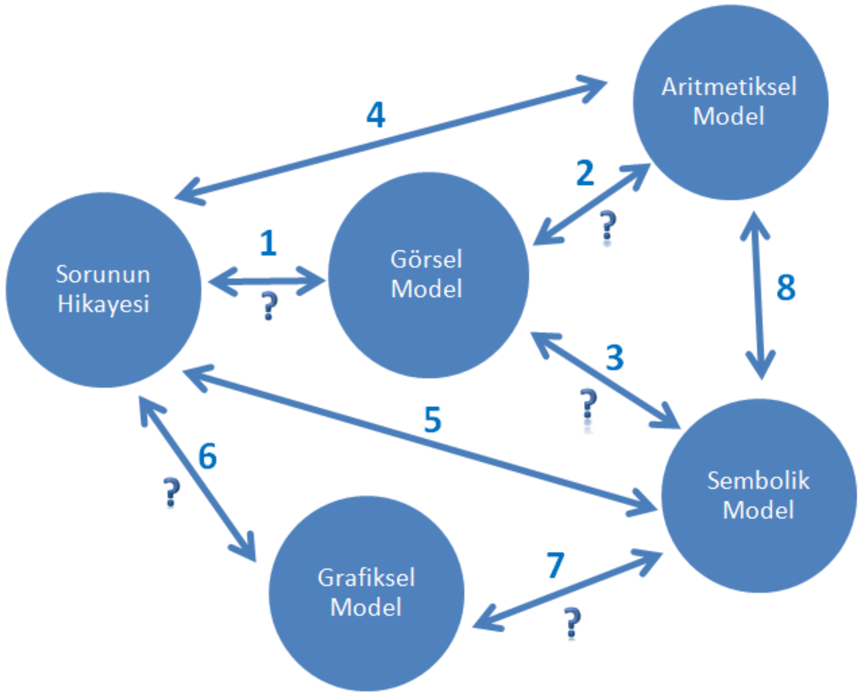
Kısaltmalar: ROPM: Rutin Olmayan Problemlerin Modellenmesi, DPKM: Ders Programındaki Konu ve Kavramların Modellenmesi

Sorular bazında değişiklik göstermekle birlikte öğretmen adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecindeki modelleme başarıları ile ders programındaki konu ve kavramların izahına yönelik modelleme başarıları arasında çok büyük bir fark görülmemiştir. Her iki alanda üretilen geçerli model yüzdelerinin ortalamaları arasında yaklaşık %1 - %1,5'lik bir fark olup (bakınız, Tablo 29) katılımcıların bu modelleme alanlarındaki yeterliklerinin birbirine yakın olduğu söylenebilir. Diğer taraftan rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinde üretilen geliştirilmesi gereken ve sınırlı model yüzdesinin, ders programındaki konu ve kavramlar için üretilen geliştirilmesi gereken ve sınırlı model yüzdesine göre daha yüksek olması dikkat çekmektedir. Dolayısıyla ders programındaki konu ve kavramlar için adayların geçerli model üretemedikleri takdirde geliştirilmeye müsait yapılar ortaya koyamamaları bu alandaki geçersiz model yüzdesini artırmaktadır. Bu durum öğrencilerin ders programında izah etmeleri istenen modelleri doğrudan geçmiş öğrenim hayatlarında aramalarının ve yeni özgün bir model üretme arayışında olmamalarının bir sonucu olabilir.

Araştırma kapsamında ulaşılan bir diğer sonuç öğretmen adaylarının sonuç eksenli problem çözme alışkanlıklarının gerçek yaşam durumları için esnek düşünmelerini engellediği hususudur. Örneğin, Okul sorusunda sadece 3 öğretmen adayının (katılımcıların %2,2'si) evlerin tüm konumlarını temsil edebilen çembersel yapılar oluşturarak geçerli modeller ürettiği görülmektedir. Ayrıca Aysun adlı öğretmen adayıyla araştırmacı arasında geçen diyalog tekrardan incelenirse Aysun'un bir cevap oluşturmak için evleri özel dik üçgen biçiminde konumlandırdığı anlaşılmaktadır (bakınız, Diyalog 1). Bu sonuç Hıdıroğlu, Tekin Dede, Kula ve Bukova Güzel'in (2014) sonuçlarıyla paralellik arz etmektedir. Hıdıroğlu vd. (2014) çalışmalarında sonuca odaklanan öğrencilerin bir sonuç bulduklarında problemi yorumlamayı ve doğrulamayı bıraktıklarını ifade etmektedirler. Eldeki çalışmanın bulguları öğretmen adaylarının model üzerinden ulaştıkları sonuçları gerçek yaşam durumunda yorumlamadıklarına da işaret etmektedir. Nitekim Okul sorusunda 114 öğretmen adayının (katılımcıların %82'si) evler arasındaki uzaklığı birkaç özel durum için hesaplayıp bırakmaları buldukları sonuçlar üzerinde düşünmediklerini göstermektedir. Benzer şekilde Pizza şirketi sorusunda 42 öğretmen adayının (katılımcıların %30,2'si) kazançları sadece belirli sayıda pizza satışı için kıyaslamaları gerçek yaşamda dağıtılan pizza sayısının değişkenlik arz edebileceği yorumunda bulunmamalarının sonucudur. Bu bağlamda araştırmanın sonuçları Tekin Dede ve Yılmaz'ın (2013) sonuçları ile uyumludur. Tekin Dede ve Yılmaz (2013) yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarının gerçek yaşam durumunda matematiksel sonuçları yorumlama noktasında yetersiz kaldıklarını belirtmişlerdir.

Araştırma bulguları rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinde öğretmen adaylarının büyük bir kısmının problemin yönergesine uygun bir görsel model (biçimsel açıdan geçerli başlangıç modelleri) oluşturmasına rağmen bu modellerde matematiksel mantığı yanlış işlettiklerini ve neticede içerik bakımından geçersiz modeller oluşturduklarını göstermektedir. Örneğin, Bina sorusunda 28 öğretmen adayı (katılımcıların %20,1'si) sorunun hikâyesine uygun bir çizim oluşturmasına rağmen bu çizim üzerinde yanlış denklemler kurdukları için sembolik (matematiksel) dile geçişte sorun yaşamışlardır. Benzer şekilde Göl sorusunda 20 öğretmen adayı (katılımcıların %14,4'ü) gerçek yaşam durumunu görsel model üzerinde doğru biçimde temsil etmelerine rağmen bu modelin elemanları arasındaki matematiksel ilişkileri doğru kuramadıkları için geliştirilmesi gereken modeller oluşturmuşlardır. Yine Gemi sorusunda 20 öğretmen adayı (katılımcıların %14,4'ü) geminin rotasına uygun bir çizim oluşturmasına rağmen alınacak yolun kısalması için belirli açıların eşitliğini ve bunun sonucunda oluşacak doğru benzerlik ilişkisini ya da simetri düşüncesini kuramadıkları için geliştirilmesi gereken model düzeyinde kalmıştır. Yine benzer olarak Tren sorusunda 21 öğretmen adayı (katılımcıların %15,1'i) treni ve kadını köprüye göre uygun biçimde yerleştirmelerine rağmen yol ve süre arasındaki orantısal ilişkileri doğru kuramadıkları için sembolik modele geçişte sıkıntı yaşamışlardır.

Diğer taraftan Bina sorusunda 25 öğretmen adayının (katılımcıların %18'i) ve Tren sorusunda 6 öğretmen adayının (katılımcıların %4,3'ü) gerçek yaşam durumuna uygun bir çizim yapmasına rağmen bu çizim üzerinde herhangi bir sembolik işlem yürütmemesi de görsel model ile sembolik model arasındaki bağlantının kurulamamasına işaret etmektedir. Buradan şu sonuç çıkarılabilir ki yönergeyi kullanarak görsel modelleri doğru biçimde çizmek önemlidir ama bundan çok daha önemlisi o görsel modelleri problemin muhtevası ile ilişkilendirerek daha matematiksel formlara, denklemlere ya da algoritmalara dökerek çözüm yapabilmektir. Yani model kullanımındaki asıl başarı modelin görsel özellikleri ile matematiksel bilgiyi ilişkilendirebilmekle ortaya çıkmaktadır. Bu sonuçlar Deniz ve Akgün'ün (2018) çalışmasıyla uyumludur. Deniz ve Akgün (2018) yürüttükleri araştırmada öğretmen adaylarının gerçek yaşam durumlarını matematik diline aktarırken gerekli değişkenleri seçmekte zorlandıklarını ve matematiksel model oluşturma basamağında uygun modeli oluşturamadıkları sonucuna ulaşmıştır. Özetle, eldeki çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının gerçek yaşam durumlarını temsil eden biçimsel açıdan geçerli modeller üretseler de bu modelleri amaca dönük etkili bir şekilde kullanamadıklarını göstermektedir. Gerçek yaşam problemlerinin çözümünde, matematik ve gerçek yaşam durumları arasında ileri-geri geçişler büyük önem arz etmektedir. Katılımcıların rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözümü sürecinde farklı model türleri arasındaki geçişlerde çoğunlukla yaşadıkları sorunlar aşağıda gibi modellenebilir.



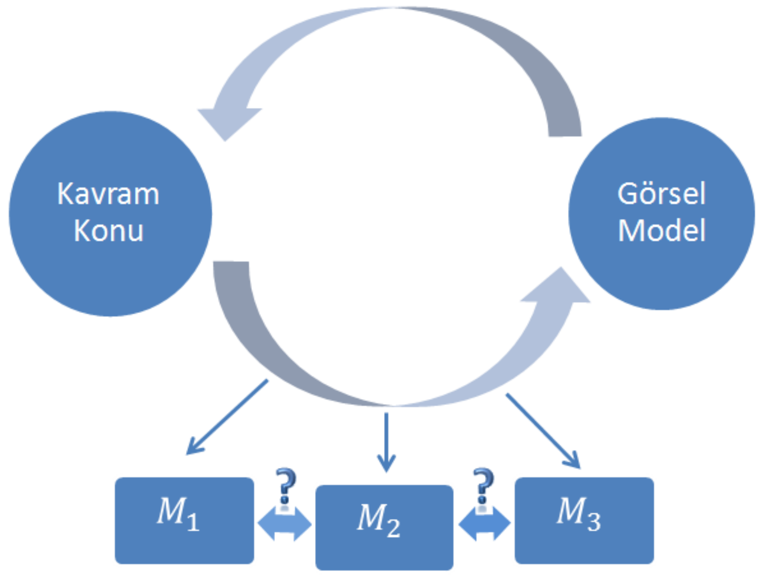
Şekil 26. Rutin olmayan problemlerin modellenmesi sürecinde çoğunlukla yaşanan sorunlar[2]

Şekilden anlaşılacağı üzere araştırma bulguları öğretmen adaylarının gerçek yaşam ile matematik arasındaki döngüyü sağlıklı bir şekilde kuramadıklarını göstermektedir. Bu durum kimi zaman gerçek yaşam durumunu temsil eden görsel modelin tam olarak ortaya konması; ancak bu görsel modelden aritmetiksel ya da sembolik modele geçişte (2 veya 3 numaralı geçişler) yaşanan sıkıntılarla kendini göstermektedir. Kimi zaman da problem hikâyesindeki bilgiler ile görsel model arasındaki ilişkilerin tam olarak kurulamamasından ötürü (1 numaralı geçiş) görsel modelin yarım bırakılması ve geliştirilememesi olarak karşımıza çıkmaktadır. Diğer taraftan Pizza Şirketi sorusunda olduğu gibi görsel modele gerek duymadan sorunun hikâyesinden doğrudan aritmetiksel, sembolik ya da grafiksel modele geçilebilen sorularda çoğunlukla grafiksel modele geçişte (6 ve 7 numaralı geçişler) sorunlar yaşanmaktadır. Bu bağlamda araştırmanın sonuçları Ural'ın (2014) bulgularını desteklemektedir. Ural (2014) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının gerçek yaşam problemlerini anlamada, matematiksel bir model üretmede ve modeli yorumlamada büyük ölçüde başarılı olamadıkları sonucuna ulaşmıştır.

---

[2] Matematiksel grafiklerin dışında kalan çizimle oluşturulmuş yapılar *görsel model* olarak ele alınmıştır.

Araştırmanın bir diğer önemli sonucu öğretmen adaylarının ders programındaki konu ve kavramları izah etmeye çalışırken süreci değil sonucu karşılayacak şekilde modelleme yaptıkları hususudur. Bu durum özellikle görsel modeller oluşturulurken geometrik şekillerin ya da çizimlerin birbirinden bağlantısız biçimde ve parça parça modellenmesi olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin Pisagor bağıntısı sorusunda geçersiz görsel model oluşturan 84 öğretmen adayının (katılımcıların %60,4'ü) büyük çoğunluğu bir dik üçgenin kenarlarının etrafına düz kareler çizmiş; ancak bu karelerin alanları arasındaki toplama işleminin mantığını açıklayamamıştır (bakınız, Alıntı 46). Benzer biçimde Tek sayıların toplamı sorusunda geçersiz görsel model oluşturan öğretmen adaylarının (katılımcıların %12,9'u) büyük bir kısmı tek sayıları temsilen belirli geometrik şekiller kullanmalarına rağmen bunlar arasındaki toplama işleminin mantığını açıklayacak ve sonucu n^2 çıkacak başka bir şekil ile bağlantı kuramamışlardır (bakınız, Alıntı 65). Yine Kesirlerde çarpma sorusunda geçersiz görsel model oluşturan 45 öğretmen adayının (katılımcıların %32,4'u) çoğu kesirleri ayrı ayrı ve çarpma işleminin mantığını izah etmeden modellemiştir (bakınız, Alıntı 90). Öğretmen adaylarının ders programındaki konu ve kavramların modellenmesi sürecinde yaşadıkları bu sıkıntılar aşağıdaki gibi bir modelle temsil edilebilir.



Şekil 27. Ders programındaki konu ve kavramların birbirinden bağımsız alt modeller oluşturacak şekilde modellenmesi sorunu

Şekilden anlaşılacağı üzere öğretmen adayları kavram ya da konu ile görsel model arasındaki bağlantıyı tam olarak kuramamakta ve döngüsel gidiş gelişler arasında sıkıntı yaşamaktadırlar. Dolayısıyla sürecin basamaklarındaki her bir parça kendi içinde M_1, M_2, M_3 gibi ayrı ayrı modellense de bu alt modeller birbirinden kopuk yapılar oluşturmaktadır. Buradan modelleme sürecinin başarılı yürütülebilmesi için modelin bütününü oluşturan alt modellerin birbirlerine mantıksal bir bağ ya da örgü ile bağlanması gerektiği sonucu çıkarılabilir.

Araştırma bulguları göstermektedir ki öğretmen adayları matematiksel düşünceye hâkim olamadıkları ve kavramsal derinliğe ulaşamadıkları için geçerli model üretememektedirler. Nitekim fonksiyonel düşünme gerektiren Pizza şirketi ve Olasılık sorularında öğretmen adaylarının yeterince grafiksel modeller üretememeleri dikkat çekmektedir. Pizza şirketi sorusunda sadece 4 öğretmen adayı (katılımcıların %2,9'u) kazançları grafik üzerinde kıyaslayarak geçerli sembolik-grafiksel modeller üretebilmiştir. Benzer şekilde Olasılık sorusunda sadece 2 öğretmen adayı (katılımcıların %1,4'ü) sayıları temsilen grafik kullanarak doğru olasılık hesaplaması yapabilmiştir. Bu sonuçlar Kertil'in (2008) ve Özgün'ün (2012) sonuçları ile uyumludur. Kertil (2008) çalışmasında öğretmen adaylarının grafik gösterimlerini kullanırken zorlandıklarını belirtmiştir. Özgün (2012) ise yaptığı araştırmada öğretmen adaylarının grafiksel modellere göre cebirsel ve aritmetiksel modelleri tercih ettikleri sonucuna ulaşmıştır.

Gerek görsel modeller ile sembolik modeller arasındaki geçişin gerekse sembolik modeller ile grafiksel modeller arasındaki geçişin önemi sağlıklı modelleme süreçlerinin işletilebilmesi için eldeki problem durumunun gerektirdiği farklı model türleri arasında ilişki kurulması gerektiği sonucunu da beraberinde getirmektedir. Dolayısıyla bu sonuç matematik öğretim sürecinde ve problem çözme sürecinde farklı temsil biçimlerinden (grafik, sembolik vs.) yararlanmanın ve bu temsiller arası geçişin öneminden bahseden Goldin ve Kaput (1996); Goldin (1998) gibi araştırmacıların çalışmalarını desteklemektedir.

Araştırma bulguları katılımcıların büyük çoğunluğunun modelleri zihinsel bir araç (cognitive tool) olarak değil rutinin bir parçası olarak kullanma eğiliminde olduklarını göstermektedir. Örneğin modelin evlerin olası tüm konumlarını temsil etme ve genelleme amacıyla kullanılmasını gerektiren Okul sorusunda sadece 3 öğretmen adayı (katılımcıların %2,2'si, bakınız Tablo 5) geçerli model üretebilmiştir. Dolayısıyla katılımcıların büyük bir kısmının kendi kafalarında var olan düşüncelerini (evleri ve okulu lineer ya da üçgensel biçimde konumlandırma) karşılayacak şekilde görsel yapılar oluşturdukları ve esnek bir düşünme aracı olarak model oluşturamadıkları söylenebilir. Bu durum adayların evler arasındaki uzaklığı hesaplamaya odaklanmalarının ve geleneksel problem çözme alışkanlıklarının bir sonucu olabilir. Benzer şekilde model üzerinden olası tüm sayı çiftlerinin yerlerine dair genelleme yapılması gereken Olasılık sorusu için yazılı sınavda sadece 2 öğretmen adayı (katılımcıların %1,4'ü) geçerli model oluşturabilmiştir. Öğretmen adaylarının çoğunluğunun belirli doğal ya da rasyonel sayı çiftleri üzerinde olasılık hesabı yapmaya çalışmaları reel sayı çiftlerinin sonsuzluğunu temsil edebilecek bir model oluşturmakta zorlandıklarının göstergesi olabilir. Nitekim görüşmelerde Zeynep adlı öğretmen adayı belirtilen aralıkta sonsuz sayı çifti olacağını fark etmesine rağmen sayıları birbirinden bağımsız seçebilmek için koordinat sistemi ile çalışması gerektiğini düşünememiştir (bakınız, Diyalog 21). Pisagor bağıntısı sorusunda adayların a^2, b^2 ve c^2 yi farklı karelerin alanları ile ilişkilendirmelerine rağmen bu kareleri ayrı ayrı modellemeleri ve a^2+b^2 nin neden c^2 ettiğini açıklayabilecek bir model oluşturamamaları modeli yine rutinin bir parçası olarak kullandıklarına işaret etmektedir (bakınız, Alıntı 46). Diğer taraftan dik üçgenin kenarlarının etrafına sadece düz kareler oluşturup bırakmaları katılımcıların zihinlerinde geçmişten prototip bir modelin kalmasının bir sonucu olabilir. Yine Bina sorusunda bazı adayların benzerlik oluşturmalarına rağmen bu benzerliği matematiksel bir temele dayandırmadan ve manadan habersiz bir şekilde kullanmaları dikkat çekmektedir. Örneğin Merve ile araştırmacı arasında geçen diyalog tekrardan incelenirse (bakınız, Diyalog 4) Merve'nin yazılı sınavda kenar çiftleri arasındaki orantısal ilişkiyi incelemeden benzerlik kurduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca Esin adlı öğretmen adayının bir soruda herhangi bir çıkarımda bulunulamıyorsa illa ki benzerlik mantığı olabileceği şeklinde görüş belirtmesi geçmiş bilgilerinin etkisinde ne kadar kaldığının göstergesidir (bakınız, Diyalog 5). Diğer taraftan Gemi sorusunda modeli zihinsel bir araç olarak kullanabilen Buğra simetri düşüncesini yalnızca uygulamakla kalmayıp alınacak rotayı neden kısalttığına dair üçgen eşitsizliğine bağlı bir ispat geliştirebilmektedir (bakınız, Diyalog 7). Ayrıca Gemi sorusunda görsel modelin mantığını anlayarak sembolik yaklaşım (simetri alma, benzerlik kurma) sergileyen adaylar için model tam bir düşünce aracı olurken sahilde uğranması gereken nokta için daha milimetrik, daha nitel sonuçlar vermektedir.

Modelleme sürecinde adayların geçmiş bilgilerini farklı biçimlerde kullanmaları ve bu bilgiler arasında ilişki kurmalarının gerekliliği ortadadır. Nitekim Pisagor bağıntısı sorusunda katılımcılar Cos teoremi ve diğer trigonometrik bilgilerinden yararlanarak sembolik izahlar; özdeşlik ve alan bağıntıları bilgilerini kullanarak da görsel modeller oluşturmuşlardır. Benzer şekilde Dairenin alanı sorusunda adaylar limit ve integral bilgilerini işe koşarak bağıntının ispatını yapmışlardır. Yine Tek sayıların toplamı sorusunda Gauss kuralının mantığından, Tümevarım düşüncesinden ve farklı toplam formüllerinden yararlanmışlardır. Ancak araştırma bulguları öğretmen adaylarının bazı sorularda modeli zihinlerindeki teorik bilgilere kısıtladıklarını göstermektedir. Örneğin Okul sorusunda Gönül adlı öğretmen adayıyla araştırmacı arasında geçen diyalog tekrar incelenirse (bakınız, Diyalog 2) geliştirilmesi gereken model üreten Gönül'ün modeli kendi teorik düşüncesiyle sınırlandırdığı anlaşılmaktadır. Burada, modelin kendisi düşüncenin aracı olmaktan ziyade öğretmen adayının geçmişten getirmiş olduğu teorik bilgiler (cos teoremi, üçgen eşitsizliği, geometri bilgisi gibi) düşüncenin aracı olmuştur. Dolayısıyla katılımcılar geçmişten getirdikleri bilgilerle ve geçmişten edindikleri zihinsel modellere uygun çizimler yapmışlar, ancak bu çizimleri geliştirerek serbest düşünme aracı olarak geçerli modeller ortaya koyamamışlardır.

Güler ve Temizyürek (2015) yaptıkları araştırmada öğretmen adaylarının model oluşturma sürecinde ön bilgilerinden çoğunlukla yararlandıklarını, geometrik modellerin kullanıldığı ispatlarda fikirlerini izah ederken ve diğer adayları ikna ederken cebirsel modellerin kullanıldığı ispatlara göre daha çok zorlandıklarını belirtmişlerdir. Eldeki çalışmada adayların geçmiş bilgilerini daha rahat kullanabilmeleri nedeniyle ders programındaki konu ve kavramların izahında çoğunlukla sembolik model oluşturma eğiliminde oldukları görülmüştür. Örneğin Tek sayıların toplamı sorusunda geçerli model üreten 75 adaydan (tüm katılımcıların %53,9'u); 21'i (%28) görsel model oluştururken, 54 aday (%72) sembolik modeller oluşturmuştur. Benzer şekilde İki kare farkı özdeşliği sorusunda geçerli model üreten 116 öğretmen adayından (tüm katılımcıların %83,4); 36'sı (%31) görsel modeller tercih ederken, 80 öğretmen adayı (%69) sembolik modeller kullanmayı tercih etmiştir. Bu durumun görsel modellerin, bilgiye göre yeni bir şekil tasarlamaları gerektiği için katılımcılara zor geldiği; sembolik modellerin ise geçmiş hazır bilginin kullanılması söz konusu olduğu için kolay geldiği düşünülmektedir.

Araştırma kapsamında öğretmen adaylarının modelleme etkinlikleri üzerinde çalıştıkça daha geçerli modeller üretebildikleri görülmüştür. Bu doğrultuda kimi adaylar modellerinin eksik ya da hatalı yönlerini görerek revize etme yoluna giderken kimi adaylar yeni modeller oluşturabilmiştir. Örneğin, Okul sorusunda Aysun adlı öğretmen adayı ile araştırmacı arasında geçen diyalog tekrardan incelenirse (bakınız, Diyalog 1) Aysun'un model üzerinden yaptığı çıkarımlar sonucunda evlerin tüm konumlarını temsil edebilen çembersel yapılara ulaştığı görülmektedir. Benzer şekilde Pisagor bağıntısı sorusunda Nihat adlı öğretmen adayı özel bir dik üçgende trigonometrik oranları kullanarak oluşturduğu sınırlı modelini mülakatta genel bir üçgene dönüştürerek geçerli model oluşturmuştur (bakınız, Diyalog 13). Yine Dairenin alanı sorusunda Buğra adlı öğretmen adayı başlangıçta daireyi karesel parçalara ayırsa da alanı oluşan parça sayısı cinsinden hesaplamada zorlandığı için sonradan daire dilimleri biçiminde parçalamaya ve dikdörtgensel bir yapının alan bağıntısını kullanmaya karar vermiştir (bakınız, Diyalog 17). Benzer biçimde İki kare farkı özdeşliği sorusunda Yavuz model üzerinde çalıştıkça oluşturduğu parçaların alanlarını cebirsel işlemlerle bulmak yerine kalan şekli belirli bir yerden keserek ve parçalardan birini diğer tarafa ekleyerek izahı şeklin tasarımı üzerinden yapılabileceği görsel bir model oluşturmuştur (bakınız, Diyalog 22). Buradan katılımcıların model ile etkileşime girdikçe başlangıçtaki düşünce yapılarını geliştirdikleri ve dolayısıyla modelleme başarılarının arttığı sonucuna ulaşabiliriz.

Özetle, öğretmen adaylarının sonuç eksenli problem çözme alışkanlıklarının gerçek-yaşam durumları için esnek düşünmelerini engellediği, bu nedenle de uygun ve geçerli modeller üretmelerine mani olduğu söylenebilir. Rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecinde katılımcıların büyük bir kısmının problem yönergesine uygun görsel modeller oluşturmalarına rağmen bu modellerde matematiksel mantığı yanlış kullandıkları görülmektedir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının gerçek yaşam ile matematik arasındaki döngüyü kurmakta sıkıntı yaşadıkları, bunun da uygun ve geçerli model oluşturmalarını engellediği söylenebilir. Katılımcıların ders programındaki konu ve kavramların izahına yönelik model oluştururken geçmiş bilgi ve deneyimlerine çok fazla bağlı kaldıkları, bu nedenle de eldeki problem durumunu karşılayacak biçimde özgün ve geçerli modeller üretme noktasında ciddi zorluklar yaşadıkları görülmektedir. Ayrıca konu ve kavramların mantığını açıklamak amacıyla oluşturdukları modellerde süreci değil sonucu karşılayacak şekilde ve birbirinden bağımsız modeller oluşturdukları anlaşılmaktadır. Kısaca katılımcıların büyük bir kısmı modelleri zihinsel bir araç olarak kullanmakta sıkıntı yaşamakta, modeli zihinlerindeki teorik bilgilere kısıtlamakta ve var olan matematiksel bilgilerini modele aktarırken (grafiksel gösterimlere geçme gibi) zorlanmaktadırlar.

5.2. Öneriler

Modelleme etkinlikleri öğrencilerin hem problem çözme becerilerini geliştirmek hem de anlamlı öğrenmeyi sağlamak açısından uygun öğrenme ortamları sunmaktadır. Nitekim rutin olmayan problemler birden fazla çözüm yolu gerektirmesi, gerçek yaşam koşullarından kaynaklı bir takım özgün koşullar içermesi nedeniyle çözüm sürecinde model kullanımının gözlenebileceği en doğal ortamlardan biridir. Diğer taraftan matematiksel modeller belirli konu ya da kavramların anlaşılmadan ve ezbere öğrenilmesi yerine mantığının ispatlanması, somutlaştırması ve geçmiş bilgiler ile ilişki kurulması noktasında fonksiyonel araç olma özelliği taşımaktadır. Dolayısıyla söz konusu becerilerin geliştirilmesinde ve modellemeden öğretim sürecinde yararlanma konusunda öğretmenlerin öğrencilere sunacağı rehberliğin önemi tartışılmazdır. Öğretmen adaylarının rutin olmayan gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecindeki modelleme başarıları ile ders programındaki konu ve kavramların izahına yönelik modelleme başarılarının incelendiği bu araştırmada katılımcıların kayda değer bir kısmının geçerli modeller üretme noktasında sıkıntı yaşadıkları görülmüştür.

Araştırmada öğretmen adaylarının gerçek yaşam durumları için yeterince esnek bir bakış açısı sergileyememelerinin geleneksel problem çözme alışkanlıklarının bir sonucu olduğu söylenebilir. Bu açıdan öğretmen adaylarının farklı strateji ve yöntemler geliştirerek modelleme yapabilecekleri, oluşturdukları modeller üzerinden elde ettikleri sonuçların gerçek yaşam durumunda anlamlılığını sorgulayabilecekleri, tek bir cevabı olmayan ya da modelin bu cevapların genelleme aracı olarak görülmesini gerektiren açık uçlu problem durumları üzerinde daha çok çalıştırılmaları yerinde olabilir. Ayrıca gerçek yaşam ile matematik arasındaki ilişkinin kurulabilmesi ve döngünün başarılı bir şekilde tamamlanabilmesi için modelleme sürecinin esnek ve koordineli yürütülmesi gerektiği bilincinin kazandırılmasında yarar vardır.

Diğer taraftan ders programındaki konu ve kavramların izahı sürecinde adayların özgün modeller oluşturamamaları belirli teoremlerin ya da bağıntıların ispatlarının geçmişten günümüze benzer şekilde kullanılmaya alışılmasının bir sonucu olabilir. Nitekim Pisagor teoreminin çok farklı şekillerde ispatı olmasına rağmen katılımcılar bu bağıntıya ilişkin farklı ve zengin içerikte modeller oluşturamamışlardır. Bu nedenle üniversitelerde öğretmen adaylarının modelleme yeterliklerini artıracak etkinliklere ve modelleme çalışmalarına mümkün olan tüm dersler içinde yer verilmesi uygun olabilir.

Ayrıca matematiksel modellemenin literatürde çoğunlukla karşımıza çıktığı şekliyle sadece gerçek yaşamda geçen problem durumları üzerinde değil ders programlarındaki konular üzerinde de daha çok ele alınması yarar sağlayabilir. Bu doğrultuda modellemenin matematik eğitiminde daha etkili nasıl kullanılabileceğine ilişkin ve modellemeyi gerçek yaşamda disiplin dışında tutmak yerine disiplinle ilişkilendirmeye çalışacak araştırma sayısı artırabilir.

KAYNAKÇA

Akgün, L., Çiltaş, A., Deniz, D., Çiftçi, Z. ve Işık, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme ile ilgili farkındalıkları. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *12*, 1-34.

Arslan, Ç. ve Altun, M. (2007). Learning to solve non-routine mathematical problems. *Elementary Education Online*, *6*(1), 50-61.

Baki, A. (2006). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi.* İstanbul: Bilge Matbaacılık.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132-144.

Bayazit, İ. (2013). İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin gerçek-yaşam problemlerini çözerken sergiledikleri yaklaşımlar ve kullandıkları strateji ve modellerin incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi. 13*(3), 1903-1927.

Bayazit, İ. ve Aksoy, Y. (2014). Matematiksel Problemlerin Öğrenim ve Öğretimi. E. Bingölbali ve M. F. Özmantar (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri içinde* (ss. 287-312). Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Bayazit, İ., Aksoy, Y. ve Kırnap, S. M. (2011). Öğretmenlerin matematiksel modelleri anlama ve model oluşturma yeterlilikleri. *e-journal of New World Sciences Academy*, *6*(4), 1C0456.

Berry, J. ve Houston, K. (1995). *Mathematical Modelling.* Bristol: J. W. Arrowsmith Ltd.

Bilgili, S. A. (2008). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. İstanbul: Lisans Yayıncılık, Editör: Orhan Kılıç, Mustafa Cinoğlu.

Blomhøj, M. (2008). Different Perspectives in Research on The Teaching and Learning Mathematical Modelling - Categorising the TSG21 papers. *11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Mexico.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - Mathematics Education, 38*(2), 86–95.

Bozkurt, A. ve Polat, M. (2011). Sayma pullarıyla modellemenin tam sayılar konusunu öğrenmeye etkisi üzerine öğretmen görüşleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *10*(2), 787-801.

Brown, S. (2001). *Reconstructing school mathematics: Problems with problems and the real world*. New York: Lang.

Cheng, A. K. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator, 6*(1), 63-75.

Çelik, B. ve Çiltaş, A. (2015). Beşinci sınıf kesirler konusunun öğretim sürecinin matematiksel modeller açısından incelenmesi. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *10*(1), 180-204.

Dapueto, C. ve Parenti, L. (1999). Contributions and Obstacles of Contexts in the Development of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 1-21.

De Corte, E., Verschaffel, L. ve Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living* içinde (pp. 66-73). Amman, Jordan: The National Center for Human Resource Development.

Deniz, D. ve Akgün, L. (2018). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme becerilerinin incelenmesi. *Akdeniz Eğitim Araştırmaları Dergisi, 12*(24), 294-312.

Doerr, H. M. (2006). Teachers' Ways of Listening and Responding to Students' Emerging Mathematical Models. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 255-268.

English, L. D. ve Watters, J. J. (2004). Mathematical Modelling with Young Children. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 335-342.

Eraslan, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının model oluşturma etkinlikleri ve bunların matematik öğrenimine etkisi hakkındaki görüşleri. *Elementary Education Online, 10*(1), 364-377.

Erenkuş, M. A. ve Savaşkan, D. E. (2018). *Matematik 7.Sınıf Ders Kitabı* (Editör P. Tutucu). Ankara: Koza Yayıncılık.

Ferri, R. B. ve Blum, W. (2009). Mathematical Modelling in Teacher Education – Experiences from a Modelling Seminar. *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. ve Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, ve B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* içinde (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(3), 446-462.

Haines, C. ve Crouch, R. (2007). Mathematical modelling and applications: Ability and competence frameworks. W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, ve M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* içinde (pp. 417-424). New York, NY: Springer.

Hıdıroğlu, Ç. N., Tekin Dede, A., Kula, S. ve Bukova Güzel, E. (2014). Öğrencilerin kuyruklu yıldız problemine ilişkin çözüm yaklaşımlarının matematiksel modelleme süreci çerçevesinde incelenmesi. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *31*, 1-17.

Kahan, J., Cooper, D. ve Bethea, K. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: a framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 223-252.

Kaiser, G. (2005). Introduction to the Working Group "Applications and Modelling". *Proceedings of CERME 4*, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Kaiser, G. ve Sriraman, B. (2006). A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302-310.

Kaiser, G., Schwarz, B. ve Tiedemann, S. (2010). Future Teachers' Professional Knowledge on Modeling. R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines ve A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* içinde (pp. 433-444). New York, NY: Springer.

Karalı, D. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme hakkındaki görüşlerinin ortaya çıkarılması*. Yüksek lisans tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.

Kertil, M. (2008). *Matematik öğretmen adaylarının problem çözme becerilerinin modelleme sürecinde incelenmesi*. Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Krulik, S. ve Rudnick, J. A. (1989). *Problem solving: A handbook for senior high school teachers.* USA : Allyn and Bacon.

Lehrer, R. ve Schauble, L. (2003). Origins and evolution of model-based reasoning in mathematics and science. R. Lesh, ve H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* içinde (pp. 59-70). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. ve Caylor, B. (2007). Introduction to the Special Issue: Modeling as Application versus Modeling as a Way to Create Mathematics. *International Journal of Computer and Mathematics Learning, 12*, 173-194.

Lesh, R. ve Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. R. Lesh, ve H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* içinde (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 96-112.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - Mathematics Education, 38*(2), 113–142.

MEB. "Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)". T.C. Milli Eğitim Bakanlığı. Ankara.(2018).

Nancarrow, M. (2004). *Exploration of metacognition and non-routine problem based mathematics instruction on undergraduate student problem-solving success (Unpublished doctoral thesis).* The Florida State University, Florida.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.

Nelsen. R. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking.* Washington: Mathematical Association of America.

Orton, A. ve Wain, G. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. A. Orton ve G. Wain (Eds.), *Issues in Teaching Mathematics* içinde. London: Cassel.

Özgün, D. (2012). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ürettiği matematik modellerinin nitel bir yaklaşımla incelenmesi*. Yüksek lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

Phillips, N. ve Hardy, C. (2002). *Discourse Analysis: Investigating Processes of Social Construction*. United Kingdom: Sage Publications Inc.

Shulman, L. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. M. Wittrock (Eds.), *Handbook of Research on Teaching* içinde. NY: Macmillian Publishing Company.

Tekin-Dede, A. ve Yılmaz, S. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterliliklerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 4*(3), 185-206.

Tuna, A., Biber, A. Ç. ve Yurt, N. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme becerileri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 33*(1), 129-146.

Ural, A. (2014). Matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme becerilerinin incelenmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(2014), 110-141.

Urhan, S. ve Dost, Ş. (2016). Matematiksel modelleme etkinliklerinin derslerde kullanımı: Öğretmen görüşleri. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, *15*(59), 1279-1295.

Van de Walle, J. A. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim*, (Çeviri. Editörü S. Durmuş). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: an Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54***,** 9–35.

Verschaffel, L., De Corte, E. ve Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 339-359.

Verschaffel, L., De Corte, E. ve Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(3), 265-285.

Verschaffel, L., Greer, B. ve De Corte, E. (2002). Everyday Knowledge And Mathematical Modeling Of School Word Problems. K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. V. Oers ve L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education* içinde (pp. 257-276). Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (10.Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. (1984). Case study research: Design and methods. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

Zbiek, R. M. ve Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students’ understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 89-112.

EKLER

EK 1. RUTİN OLMAYAN PROBLEMLERİ MODELLEME ÖLÇEĞİ

Adı Soyadı:

Cinsiyeti: ( ) Bay ( ) Bayan

Sınıfı:

Değerli Matematik Öğretmeni Adayı,

Bu ölçme aracı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterliklerinin incelenmesi amacıyla hazırlanmıştır. **Elde edilen veriler sadece bu araştırma kapsamında kullanılacak ve gizli tutulacaktır.**

Ölçme aracının **ilk aşaması** olan bu bölümde sizlerden rutin olmayan ve gerçek yaşam problemlerini matematiksel modeller oluşturarak çözüme kavuşturmanız beklenmektedir. Bu süreçte şekil, grafik ya da diyagram çizme, cebirsel ifadeler ve tablo oluşturma gibi matematikselleştirme araçlarından yararlanabilirsiniz. Bir problemde farklı modeller kullanarak çözümler yapmanız ürettiğiniz modellerin zenginliğini inceleme fırsatı da sunacaktır.

Problemleri çözerken sadece kendi bilgi birikiminizi kullanarak modeller oluşturmanız çalışmanın güvenirliği ve geçerliliği açısından büyük önem arz etmektedir. Yanıtsız soru bırakmamanızı diler, araştırmaya getireceğiniz katkı için şimdiden teşekkür ederim.

Hamdi Furkan SERİN

Matematik Öğretmeni

1-Okul Sorusu: Burcu ve Ali aynı okula gitmektedirler. Burcu'nun evi okula 17 km, Ali'nin evi ise okula 8 km uzaklıktadır. Burcu ile Ali'nin evleri arasındaki uzaklık ne kadar olabilir? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz.

2-Bina Sorusu: 24 metre yüksekliğindeki bir binanın, 30 metre doğusunda 6 metre yüksekliğinde bir duvar bulunmaktadır. 1,8 metre göz seviyesinden bakan bir kişinin binanın tepesini görebilmesi için duvarın doğusunda **en az** kaç metre uzaklıkta durması gerekir? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz.

3-Göl Sorusu: Kuğulu gölün yüzeyi, Mavi gölün yüzeyinden 35 metre yukarıdadır. Kuğulu gölün derinliği, Mavi gölün derinliğinin iki katıdır. Kuğulu gölün dibi (tabanı), Mavi gölün dibinden (tabanından) 12 metre daha yukarıda olduğuna göre Mavi gölün derinliği ne kadardır? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz.

4-Gemi Sorusu: Sahildeki bir C noktasının 120 metre kuzeyinde ve denizdeki bir A noktasında korsan bir gemi bulunmaktadır. C noktasının 150 metre doğusunda ve yine sahilde (**kıyı üzerinde**) bir D noktası vardır. Denizdeki bir B noktasında bulunan deniz feneri ise D noktasının 80 metre kuzeyinde yer almaktadır. Korsan gemi bulunduğu noktadan hareket ederek önce sahile yanaşacak ve daha sonra deniz fenerine yolculuk yapacaktır. Bu yolculukta alınacak mesafenin **en kısa** olabilmesi için korsan geminin sahilde uğrayacağı yerin C noktasına olan uzaklığını tespit ediniz. Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz.

5-Tren Sorusu: Bir kadın, saatte 60 km hızla köprüye yaklaşan trenin sesini duyduğunda köprünün $\frac{3}{8}$ 'ünü geçmiş bulunmaktadır. Arkasından gelen treni fark ettiği anda köprünün herhangi bir ucuna koşarsa kendini kurtarabilecektir. Buna göre kadının saatteki hızı **en az** kaç km olmalıdır? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz.

6-Pizza Şirketi Sorusu: Yerel gazetede pizza dağıtım işinde çalışmak isteyenler için bir ilan yer almaktadır. A şirketi her çalışanına aylık 120 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,2 TL prim vermektedir. B şirketi ise çalışanına aylık 48 TL maaş ve dağıttığı her pizza başına 1,8 TL prim vermektedir. Sizce bu şirketlerden hangisinde çalışmak daha kârlıdır? Neden? Çözümünüzü matematiksel modeller yardımıyla izah ediniz.

EK 2. DERS PROGRAMINDAKİ KONU VE KAVRAMLARI MODELLEME ÖLÇEĞİ

Adı Soyadı:

Cinsiyeti: ( ) Bay ( ) Bayan

Sınıfı:

Değerli Matematik Öğretmeni Adayı,

Bu ölçme aracı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterliklerinin incelenmesi amacıyla hazırlanmıştır. **Elde edilen veriler sadece bu araştırma kapsamında kullanılacak ve gizli tutulacaktır.**

Ölçme aracının **ikinci aşaması** olan bu bölümde matematik ders programlarında yer alan konu ve kavramların izahı için matematiksel modeller üretmeniz beklenmektedir. Bu süreçte matematiksel bağıntıların, ilişkilerin ya da özelliklerin ispatı, açıklanması ve anlaşılır kılınması için görsel, geometrik ya da cebirsel ifadeler gibi matematikselleştirme araçlarından yararlanabilirsiniz. Bir problemde farklı modeller kullanarak çözümler yapmanız ürettiğiniz modellerin zenginliğini inceleme fırsatı da sunacaktır.

Problemleri çözerken sadece kendi bilgi birikiminizi kullanarak modeller oluşturmanız çalışmanın güvenirliği ve geçerliliği açısından büyük önem arz etmektedir. Yanıtsız soru bırakmamanızı diler, araştırmaya getireceğiniz katkı için şimdiden teşekkür ederim.

Hamdi Furkan SERİN
Matematik Öğretmeni

1-Pisagor Bağıntısı Sorusu: Pisagor teoreminde $a^2 + b^2 = c^2$ dir. Bu bilginin mantığını izah etmek için (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

2-Dairenin Alanı Sorusu: Dairenin alanı $A = \pi r^2$ dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

3-Tek Sayıların Toplamı Sorusu: Ardışık tek sayıların toplamı 1 + 3 + 5 + … + (2n-1) = n^2 dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

4-Olasılık Sorusu: 0 ile 5 arasından (0 ile 5 dâhil) rastgele seçilen iki reel sayının toplamının 3 ve 3'ten küçük olduğu durumlar söz konusudur. Söz konusu bu durumların olasılığını hesaplamada yararlanabileceğiniz matematiksel bir model oluşturunuz.

5-İki Kare Farkı Özdeşliği Sorusu: İki kare farkı özdeşliğinde a^2-b^2 = (a-b)·(a+b) dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

6-Kesirlerde Çarpma Sorusu: Kesirlerde çarpma işleminde $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$ dir. Bu bilginin mantığını izah etmede kullanabileceğiniz (kanıtlamak veya somutlaştırmak için) matematiksel bir model oluşturunuz.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Hamdi Furkan SERİN

Uyruğu: Türkiye (T.C)

Doğum Tarihi ve Yeri: 27.03.1992 - Kayseri

Medeni Durum: Bekâr

e-mail: hfserin38@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2014
Lise	Melikgazi Mustafa Eminoğlu Anadolu Lisesi, Kayseri	2010

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2018-Halen	Çalapverdi Şehit Mehmet Muratdağı Ortaokulu, Yozgat	Öğretmen
2014-2018	Çakmak Ortaokulu, Yozgat	Öğretmen

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR

1. Bayazıt I., Serin, H. F. (2019). "Matematik Öğretmeni Adaylarının Gerçek-Yaşam Problemlerinin Çözümü İçin Ürettikleri Modellerin Farklı Açılardan İncelenmesi", *VI. International Eurasian Educational Research Congress. Bildiri Özetleri Kitabı.* 19-22 Haziran 2019. Ankara/TÜRKİYE, ss. 1422-1423.

2. Bayazıt I., Serin, H. F. (2019). "İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Modelleme Yeterliklerinin İncelenmesi", *4. International Turkish Computer & Mathematics Education Symposium. Özetler Kitapçığı*. 26-28 Eylül 2019. İzmir/TÜRKİYE, ss. 695-697.