T.C

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA ULAM-HYERS ANLAMINDA KARARLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA BÜLBÜL

HAZİRAN 2019

ZAMAN SKALASINDA ULAM-HYERS ANLAMINDA KARARLILIK

Mustafa BÜLBÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ÖĞREKÇİ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2019

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuç bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım tüm eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

Bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa BÜLBÜL
19/06/2019

ZAMAN SKALASINDA ULAM-HYERS ANLAMINDA KARARLILIK

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa BÜLBÜL

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Bu tez çalışmasında birinci mertebeden bazı dinamik denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı çalışıldı. Bunun için önce zaman skalası teorisi için temel tanımlar ve teoremler verildi sonra zaman skalasında delta türev, delta integral, üstel fonksiyon ve dinamik denklemler analiz edildi. Son bölümde birinci mertebeden homojen ve homojen olmayan bazı dinamik denklemlerin Ulam-Hyers kararlığı incelenmiştir.

Sayfa Adedi : 43
Anahtar Kelimeler : Zaman Skalası, Dinamik Denklem, Ulam-Hyers Kararlılığı
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Süleyman Öğrekçi

ULAM-HYERS STABILITY ON TIME SCALES

(M.Sc.Thesis)

Mustafa BÜLBÜL

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

In this thesis Ulam-Hyers stability of some dynamic equations of first order are studied. For this, firstly basic definitions and theorems of the time scale theory are given, and then delta derivative, delta integral, exponential function and dynamic equations on time scale are analysed. In the last part Ulam-Hyers stability of homogeneous and inhomogeneous some dynamic equations of first order are investigated.

Page Number : 43
Key Words : The Time Scales, Dynamic Equations, Ulam-Hyers Stability
Supervisor : Asst. Prof. Süleyman Öğrekçi

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardımları ve katkılarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ÖĞREKÇİ ‘ ye saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\in$	Elemanıdır
μ	Mü
σ	Sigma
ρ	Ro
f^{Δ}	Delta Türev
C_{rd}	rd- sürekli fonksiyonlar kümesi
$\Re$	rd-sürekli ve regresif fonksiyonlar kümesi

1. GİRİŞ

Son zamanlarda zaman skalası teorisi büyük ilgi görmektedir. Zaman skalası teorisini, ilk defa Stefan Hilger 1988' deki doktora tezinde ayrık ve sürekli ortamdaki olayların analizini birleştirmek için ortaya atmıştır. Bunun için de her ikisini barındıran bir küme almış ve bu kümeye zaman skalası adını vermiştir. Zaman skalası üzerinde çalışırken zaman skalasını reel sayılar kümesi olarak alırsak sürekli analiz, tam sayılar olarak alırsak ayrık analiz ortaya çıkmaktadır.

Diferansiyel denklemler teorisinin temelinde süreklilik mantığı vardır. Bu yüzden diferansiyel denklemler teorisi fizik, kimya, astronomi, ekonomi, işletme gibi birimlerde matematiksel ifade yöntemi olarak kullanılır. Diferansiyel denklemler ile fark denklemleri arasında önemli farklılıklar vardır. Bu da matematiksel modelleme seçiminde zorluklar meydana getirmektedir. Doğadaki olaylar kendi içinde süreklilik ve süreksizlik durumlarını barındırabilir. Bu yüzden matematiksel her olayı diferansiyel denklemler ile ve fark denklemleri ile ifade edilemeyebilir.

Tabiattaki olaylar ne tam olarak sürekli ne de tam olarak kesikli olmadığından dolayı hem sürekli hem de ayrık değişkenlerden oluşan matematiksel olaylar üzerinde çalışmasını sağlayan bir yeni teoriye ihtiyaç duyulmuştur. Zaman skalası bu teorinin adıdır.

Zaman skalası, diferansiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etmemizi sağlar. Diferansiyel ve fark denklemlerini zaman skalasına taşınması ile elde edilen bu denklemlere zaman skalasında dinamik denklemler denir. Ayrıca zaman skalasındaki dinamik denklemler sadece $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için değil farklı yapıdaki sürekli ve ayrık kümeler için araştırma sağlar.

Diferansiyel denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı üzerinde yapılan çalışmalar son yıllarda büyük ilgi görmektedir. Bu tez çalışmasının amacı bazı lineer homojen ve homojen olmayan dinamik denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı incelemektir.

Zaman skalası üzerine yapılan bu çalışmanın ikinci bölümünde zaman skalasında temel kavramlar ve teoremler hakkında bilgiler verildi. Ayrıca delta türev, delta integral ve özelliklerinden bahsedildi. Üçüncü bölümde zaman skalasında dinamik denklemler ve üstel fonksiyonlarla ilgili tanımlar ve özellikler verildi. Son bölümde bazı homojen ve homojen olmayan lineer dinamik denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı incelendi ve sonuçlar verildi.

2. ZAMAN SKALASI

2.1. Zaman Skalasında Temel Kavramlar

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin herhangi bir kapalı alt kümesine bir zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile sembolize edilir. Tam ve reel sayılar, [0,1] reel aralığı ,[0,1] U [2,3] kümesi gibi kümeler zaman skalasına birer örnektir. Fakat rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, (0,1) reel aralığı gibi kümeler zaman skalasına örnek değildirler. $\mathbb{T}$ zaman skalası aynı zamanda reel sayıların standart topoloji özelliğine sahiptir.

2.1.1. Tanım

$\mathbb{T}$ zaman skalasında ileri sıçrama operatörü $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \qquad \sigma(t) = inf\{r \in \mathbb{T} : r > t\}$$

şeklinde tanımlanır. Geri sıçrama operatörüyse $t \in \mathbb{T}$ için

$$\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \qquad \rho(t) = sup\{r \in \mathbb{T} : r < t\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki tanımda $\emptyset$ boş küme notasyonunu şöyle kullanacağız;

- Eğer $\mathbb{T}$ bir t maksimumuna sahipse $\sigma(t)=t$ durumunda $inf\emptyset = sup\ \mathbb{T}$ olur ve
- Eğer $\mathbb{T}$ bir t minimumuna sahipse $\rho(t)=t$ durumunda $sup\emptyset = inf\ \mathbb{T}$ olur [2].

2.1.2. Tanım

$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere Eğer $\sigma(t) > t$ olduğunda t noktası sağ saçılımlı ve $\rho(t) < t$ olduğunda da sol saçılımlı olarak adlandırılır. Hem sağ saçılımlı hem de sol saçılımlı olan noktaya izole nokta denir. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ için, eğer $\sigma(t)=t$ ise t ' ye sağ yoğun nokta, eğer $\rho(t)=t$ ise t noktasına sol yoğun denir. Hem sağ hem de sol yoğun noktaya kısaca yoğun nokta denir [2].

2.1.3. Tanım:

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ olmak üzere

$$\mu(t) := \sigma(t) - t$$

ile tanımladığımız fonksiyona granül (graininess) fonksiyon deriz. Granül fonksiyonu aynı zamanda ardışık noktalar arası uzaklık olarak ifade edilebilir. Zaman skalası kavramlarında sık kullanılan bir fonksiyon olduğu için önemli bir yere sahiptir [2].

Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması

t sağ saçılımlı	$\sigma(t) > t$
t sağ yoğun	$\sigma(t) = t$
t sol saçılımlı	$\rho(t) < t$
t sol yoğun	$\rho(t) = t$
t izole	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Çizelge 2.2. Noktaların şematik sınıflandırılması

 t_1	t_1 *sağ yoğun ve sol yoğun*
 t_2	t_2 *sol yoğun ve sağ saçılımlı*
 t_3	t_3 *sağ yoğun ve sol saçılımlı*
 t_4	t_4 *sağ saçılımlı ve sol saçılımlı*
t_1 *noktasına kısaca yoğun,* t_4 *noktasına izole nokta denir*	

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ zaman skalaları için sıçrama operatörlerini ve granül fonksiyonu hesaplayalım.

i) Eğer T = $\mathbb{R}$ alınırsa her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = inf\{r\in \mathbb{R}: r>t\} = inf(t,\infty) = t$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = sup\{r\in \mathbb{R}: r<t\} = sup(-\infty,t) = t$$

olur. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. Granül fonksiyonumuz μ ise her $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mu(t) = \sigma(t)-t = t-t = 0$$

bulunur.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = inf\{r\in \mathbb{Z}: r>t\}= inf(t+1, t+2, t+3,\ldots) = t+1$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = sup\{r\in \mathbb{Z}: r<t\}=sup(\ldots,t-3, t-2, t-1) = t-1$$

olur. Bu nedenle her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole noktadır. Granül fonksiyonumuz μ ise her $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\mu(t) = \sigma(t)-t = t+1-t =1$$

bulunur [2].

Çizelge 2.3. Çeşitli zaman skalalarında sıçrama operatörleri ve granül fonksiyon

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$t-h$
$q^{\mathbb{Z}}$	$(q-1)t$	qt	t/q
$2^{\mathbb{N}}$	t	$2t$	$t/2$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

Yukarıdaki tabloda farklı zaman skalalarında sıçrama operatörleri hesaplanmış ve granül fonksiyonları bulunmuştur. Burada granül fonksiyonun her zaman sabit fonksiyon olmadığı farklı zaman skalalarında t' ye bağlı sabit olmayan örnekleride görülmektedir.

Örnek

$\mathbb{T} = [2,3] \cup \{4,5\}$ zaman skalasında $\sigma(4)$, $\sigma(\frac{5}{2})$ ve $\rho(5)$ değerlerini bulalım.

$\sigma(4) = inf\{s \in \mathbb{T}: s > 4\} = inf\{5\} = 5$

$\sigma(\frac{5}{2}) \; = inf\left\{s \in \mathbb{T}: s > \frac{5}{2}\right\} = inf\left\{(\frac{5}{2}, 3] \cup \{4{,}5\}\right\} = \frac{5}{2}$

$\rho(5) = sup\{s \in \mathbb{T}: s < 5\} = sup\{[2{,}3] \cup \{4\}\} = 4$

Örnek

$\mathbb{T} = \{3^m : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ zaman skalası için σ, μ, ρ değerlerini bulup noktaları sınıflandıralım.

$\mathbb{T} = \{3^m : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} = \{\dots 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 1, 3^1, 3^2, 3^3, \dots\} \cup \{0\}$

$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T}: s > 3^m\} = inf\{3^{m+1}, 3^{m+2}, \dots\} = 3^{m+1}(3^m = t$ olduğundan) $= 3t$

$\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{T}: s < 3^m\} = sup\{\dots 3^{m-2}, 3^{m-1}\} = 3^{m-1}(3^m = t$ olduğundan) $= \frac{t}{3}$

$\sigma(0\,) = inf\{s \in \mathbb{T}: s > 0\} = 0$

$\rho(0) = sup\{s \in \mathbb{T}: s < 0\} = 0$

$\mu(t) = 3t - t = 2t$

Örnek

$\mathbb{T} = \left\{\frac{2}{m} : m \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ zaman skalasında

$\sigma(t) = inf\left\{s \in \mathbb{T}: s > \frac{2}{m}\right\} = inf\left\{\frac{2}{m-1}, \frac{2}{m-2} \dots 2\right\} = \frac{2}{m-1}\,(\frac{2}{m} = t$ olduğundan) $= \frac{2t}{2-t}$

$\rho\;(t) = sup\left\{s \in \mathbb{T}: s < \frac{2}{m}\right\} = sup\left\{\dots \frac{2}{m+2}, \frac{2}{m+1}\right\} = \frac{2}{m+1}\,(\frac{2}{m} = t$ olduğundan) $= \frac{2t}{2+t}$

$\mu(t) = \sigma(t) - t = \frac{t^2}{2-t}$

Örnek

$\mathbb{T} = \{m^3 : m \in \mathbb{Z}\}$ zaman skalasını ele alalım

$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T}: s > m^3\} = inf\{(m+1)^3, (m+2)^3 \dots\} = (m+1)^3(m^3 = t$ oluşundan)

$\sigma(t) = \left(\sqrt[3]{t} + 1\right)^3$

$\rho\;(t) = sup\{s \in \mathbb{T}: s < m^3\} = sup\{\dots (m-2)^3, (m-1)^3\} = (m-1)^3(m^3 = t$ oluşundan)

$\rho\;(t) = \left(\sqrt[3]{t} - 1\right)^3$

$\mu(t) = \sigma(t) - t = \left(\sqrt[3]{t} + 1\right)^3 - t$

$\rho(t) < t < \sigma(t)$ olduğundan buradaki t noktası izole noktadır.

Örnek

$\mathbb{T} = [0,3] \cup \{4,5,6\}$ zaman skalasında

$\rho\ (\sigma(4\ )) = \rho\ (5)$=4, $\sigma\ (\rho(4\ ))= \sigma(3)$=4

$\rho\ (\sigma(3\ )) = \rho\ (4)$=3 $\sigma\ (\rho(3\ ))= \sigma(3)$=4

Buradan soldan ve sağdan aynı karakterli noktada $\rho\ (\sigma(t)) = \sigma\ (\rho(t))$,farklı karakterli noktada ise $\rho\ (\sigma(t)) \neq \sigma\ (\rho(t))$ bulunur [2].

2.2. Delta Türevi

2.2.1. Tanım

$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olmak üzere $\mathbb{T}$ sol saçılımlı bir n maksimum noktasına sahip olduğunda $\mathbb{T}^{K}$ = $\mathbb{T}$ - {n} olarak aksi durumda $\mathbb{T}^{K}$ = $\mathbb{T}$ olarak tanımlanır. Buradaki $\mathbb{T}^{K}$ kümesi $\mathbb{T}$’ deki türevlenebilme bölgesi olarak adlandırılır [2].

2.2.2. Tanım

Her $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere $f^{\sigma}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f^{\sigma}(t) = f\big(\sigma(t)\big)$ olarak tanımlanır [2].

2.2.3. Tanım

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık t 'nin bir U komşuluğu var ve ($U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$) her s ∈ U için

$$|\big[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\big] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde $f^{\Delta}(t)$ varsa $f^{\Delta}(t)$ 'ye f fonksiyonunun t’deki *delta (Hilger) türevi* denir [2].

Örnek

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $f(t) = c$, (sabit) olarak tanımladığımız fonksiyonun her $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere delta türevin $f^{\Delta}(t) = 0$ $dır$. Gerçekten Δ türevin tanımından her $\varepsilon > 0$ için

$$\Big|f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - 0.\,|\sigma(t) - s|\Big| = \varepsilon|\sigma(t) - s| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

olmasıyla doğrudur yani sabitin delta türevi 0’dır [2].

Örnek

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $f(t) = t$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun her $t \in \mathbb{T}$ için Δ türevi

$f^{\Delta}(t) = 1$ ′ dir. Gerçekten Δ türevin tanımından her $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$|f(\sigma(t) - f(s) - 1.|\sigma(t) - s|| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

$$|(\sigma(t) - s - 1.|\sigma(t) - s|| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \text{ ise } 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

olması sebebiyle doğrudur. Bu iki örnekte görüldüğü gibi sabit fonksiyonun ve *t* fonksiyonun delta türevi bütün zaman skalalarında aynıdır [2].

Örnek

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $f(t) = t^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun her $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere Δ türevini bulalım.

Her $\varepsilon > 0$, *her* $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ *ve* $\sigma(t) \neq s$ için

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t).[\sigma(t) - s]| &= |(\sigma^2(t) - s^2) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)| \\ &= |\sigma(t) - s|.|(\sigma(t) + s) - f^{\Delta}(t)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \\ &\Longrightarrow |(\sigma(t) + s) - f^{\Delta}(t)| \leq \varepsilon \text{ ‘dir.} \end{aligned}$$

ε sayısının keyfi pozitif bir sayı olmasından ve mutlak değerin özeliğinden

$f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t$ olarak buluruz.

Burada Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa $f^{\Delta}(t) = 2t$ olursa klasik türevle aynı olduğu,

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa $f^{\Delta}(t) = 2t + 1$ tamsayılardaki türev olan ileri fark operatörüyle çakıştığı görülür [2].

2.2.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i. f, t noktasında Δ türevlenebilir ise f, t noktasında süreklidir.

ii. f, t noktasında sürekli ve t sağ saçılımlı ise bu durumda f, t'de

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

gibi türevlenebilir.

iii. Eğer t sağ yoğun nokta ise f nin *t* noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin mevcut (sonlu) olmasıyla mümkündür ve bu durumda türev

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitine eşittir.

iv. f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t)$'dir

İspat

i) f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir olduğunu kabul edelim ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun.

$\varepsilon^* = \varepsilon\left[1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)\right]^{-1}$ tanımlarsak $\varepsilon^* \in (0,1)$ olur.

$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s|$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. Böylece her $s \in U \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$ için

$$
\begin{aligned}
|f(t) - f(s)| &= \left|\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^{\Delta}(t)\}\right. \\
&\quad \left. + (t - s)f^{\Delta}(t)\right| \\
&\leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s| + \varepsilon^*\mu(t) + |t - s|f^{\Delta}(t) \\
&\leq \varepsilon^*\left|\mu(t) + |t - s| + \mu(t) + |f^{\Delta}(t)|\right| \\
&\leq \varepsilon^*\left[1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)\right] \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur ve bu da bize f fonksiyonu t noktasında sürekli olduğunu gösterir

ii) f fonksiyonu t noktasında sağ saçılımlı ve sürekli olsun. Sürekliliğin

tanımından

$$\lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

olur. Bundan dolayı verilen $\forall\, \varepsilon > 0$ için t noktasının bir U komşuluğu vardır ve bu komşuluktaki

$\forall\, s \in U$ için,

$$\left|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}\right| < \varepsilon$$

sağlanır.Buradan $\forall\, s \in U$ için

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - \left(\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}\right)(\sigma(t) - s)\right| \leq |\sigma(t) - s|$$

olur bu da bize

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

olduğunu gösterir.

iii) f fonksiyonu t noktasında sağ yoğun ve türevlenebilir olsun. $\varepsilon > 0$ için

$\forall$ s $\in$ U olacak şekilde t ‘nin bir U komşuluğu mevcuttur öyle ki

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

sağlanır. t noktası sağ yoğun olduğundan $\sigma(t) = t$ ‘dir. Bu yüzden $\forall$ s $\in$ U için

$$|f(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(t - s)| \leq \varepsilon|t - s|$$

eşitsizliğini bulmuş oluruz. Bu eşitsizlikten $\forall$ s $\in$ U ve $t \neq s$ için

$$\left|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t)\right| < \varepsilon$$

burdan da istediğimiz sonuç olan

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

Diğer taraftan $t \in \mathbb{T}^{K}$, t noktası sağ yoğun ve

$$\lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin sonlu bir sayı olduğunu kabul edelim. Bu limit K gibi bir sayıya eşitse, verilen her $\varepsilon > 0$ için t’nin öyle bir komşuluğu mevcuttur ki $\forall$ s $\in$ U olmak üzere

$$\left|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - K\right| < \varepsilon$$

olur ve $\forall$ s $\in$ U için

$$|f(t) - f(s) - K(t - s)| \leq \varepsilon|t - s|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada t noktası sağ yoğun olduğundan $\sigma(t) = t$ ‘dir ve

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - K(\sigma(t) - s) \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu da bize t’nin sağ yoğun olduğu durumdaki türev tanımını verir. Bu yüzden f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir.

iv) Eğer $\sigma(t) = t$ ise $\mu(t) = 0$ olur ve ise $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t). f^{\Delta}(t)$ yazılır.

Eğer $\sigma(t) > t$ ise ii) den $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t). f^{\Delta}(t)$ yazılabilir [2].

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ koşullarını inceleyelim.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğunda Teoerem 2.2.1 (iii)’den $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Δ türevlenebilir ve

$$f'(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu olmak üzere mevcut ise

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur [2].

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğunda Teorem 2.2.1. (ii)' den $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ Δ türevlenebilir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f$$

elde edilir.

2.2.2. Teorem

$f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ noktasında türevi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i. $f + g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{T}$ noktasında türevlenebilir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

olur.

ii. Herhangi bir α sabit sayısı için $\alpha . f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de türevlenebilir ve

$$(\alpha . f)^{\Delta}(t) = \alpha . f^{\Delta}(t)$$

olur.

iii. $f . g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ noktasında türevlenebilir ve

$$(f . g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t). g(t) + f(\sigma(t)). g^{\Delta}(t)$$

olur.

iv. $f(t). f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ de $t \in \mathbb{T}$ noktasında türevlenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t). f(\sigma(t))}$$

olur.

v. $g(t). g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ de $t \in \mathbb{T}$ de türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t). g(t) - f(t). g^{\Delta}(t)}{g(t). g(\sigma(t))}$$

olur [2].

2.2.3. Teorem

n $\in$ $\mathbb{N}$ ve α bir sabit olmak üzere;

i) $f(t) = (t - \alpha)^n$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon için,

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma(t) - \alpha)^k (t - \alpha)^{n-1-k}$$

ii) $g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^n}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon da

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\sigma(t) - \alpha)^{n-k} (t - \alpha)^{k+1}},$$

$(\sigma(t) - \alpha)(t - \alpha) \neq 0$

eşitliklerini sağlar [2].

Örnek

$(t^2)^{\Delta} = t + \sigma(t)$

$\left(\frac{1}{t}\right)^{\Delta} = -\frac{1}{t\sigma(t)}$

örneklerin çözümleri 2.2.3 teoremden dolayı açıktır [2].

2.2.4. Tanım

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, f^{Δ} fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa^2} = (\mathbb{T}^{\kappa})^{\kappa}$ da türevlenebilirse, f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevini $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta}: \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlayabiliriz. Aynı şekilde $(f^{\Delta})^n: \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$ şeklinde n. mertebeden türevi tanımlayabiliriz. Burada $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ şeklinde kullanacağız. Uygun olması açısından $\sigma^0(t) = t$ ve $\rho^0(t) = t$ $\mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}$ ile göstereceğiz [2].

Örnek

Genel bir ifadeyle f ve g fonksiyonları iki defa türevlenebilir olsa da fg fonksiyonu iki defa türevlenemeyebilir. $(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$ olduğundan f ve g iki kez türevlenebilir ve f^{σ} türevlenebilir ise fg iki kez türevlenebilir ve

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta^{\sigma}} + f^{\sigma^{\Delta}})g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta\Delta}\end{aligned}$$

elde edilir [2].

Örnek

$\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk: k \in \mathbb{Z}\}$ zaman skalasında $h > 0$ olmak üzere $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)$'nin ikinci mertebeden türevini bulalım.

$\sigma(t) = inf\{r \in \mathbb{T}: r > t\} = inf\{t + mh: m \in \mathbb{N}\} = t + h$

$\rho(t) = sup\{r \in \mathbb{T}: r < t\} = sup\{t - mh: m \in \mathbb{N}\} = t - h$

ve her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = t + h - t = h$ sabit bir sayı olur. Böylece zaman skalasındaki her nokta izole nokta olur.

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\forall\ t \in \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

olur ve buradan

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} = \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h}}{h} = \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

$$= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

ikinci türevini elde etmiş oluruz. Benzer şekilde $f^{\Delta^n}(t)$ türevini de benzer şekilde elde edebiliriz. Benzer şekilde $n \in N_0$ için $\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$ olur.

Şimdi $\Delta_h = \frac{1}{h}(\sigma - I)$ operatörü tanımlayalım. Burada I, birim operatördür.

Binom teremi;

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

şeklindedir. Δ_h operatörünün n −inci kuvvetini bulmak için Binom teoreminin operatör versiyonunu kullanırsak;

$${\Delta_h}^n = \frac{1}{h^n}(\sigma - I)^n = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\sigma^k$$

elde edilir.

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(-1)^{n-k} f(t+kh)$$

elde edilir [2].

Çizelge 2.4. Zaman skalalarında türev örnekleri

	$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
İLERİ SIÇRAMA	$\sigma(t)$	t	$t+1$
GERİ SIÇRAMA	$\rho(t)$	t	$t-1$
GRANÜL	$\mu(t)$	0	1
TÜREV	$f^{\Delta}(t)$	$f'(t)$	$\Delta f(t)$

2.3. Delta İntegrali:

2.3.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun zaman skalasının bütün sağ yoğun noktalarında sağdan limiti mevcut (sonlu) ve bütün sol yoğun noktalarda soldan limiti mevcut (sonlu) ise f fonksiyonu düzenli (regulated) deriz [2].

2.3.2. Tanım

Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu zaman skalasının bütün sağ yoğun noktalarında sağ sürekli ve bütün sol yoğun noktalarında sonlu sol limiti varsa bu f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde rd-sürekli olarak adlandırılır. *rd-sürekli* fonksiyonlar kümesi C_{rd} , $C_{rd}(\mathbb{T})$, $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ile gösterilir [2].

2.3.1. Teorem

$g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere

i) g sürekli ise rd-süreklidir.

ii) g rd-sürekli ise düzenlidir.

iii) σ operatörü (ileri sıçrama) rd-süreklidir.

iv) g rd-sürekli veya düzenli ise g^{σ} aynı özellikleri sağlar.

v) g sürekli ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu rd-sürekli veya düzenli olursa gof fonksiyonu da aynı özelliğe sahiptir.

2.3.2. Teorem

Düzenli olan her fonksiyon kapalı aralıkta sınırlıdır.

İspat

Farz edelim $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonumuz sınırsız olsun. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $t_n \in [a,b]$ ve $|f(t_n)| > n$ olsun. $\{t_n: n \in \mathbb{N}\} \subset [a,b]$ olduğu için$\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ yakınsak olan bir alt dizi mevcuttur. Yani en az bir $t_0 \in [a,b]$ mevcuttur ki $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$ olsun. $\{t_{n_k}: k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}$ kümesi kapalı olduğundan $t_0 \in \mathbb{T}$ olur. Bundan dolayı t_0 izole noktası olamaz. Ve t_0 noktasına alttan ve üsten yaklaşan bir alt dizi mevcuttur. Düzgünlükten dolayı her iki durumda da $t \to t_0$ giderken $f(t)$'nin limiti mevcut(sonlu) olmalıdır ki bu bir çelişkidir [2].

2.3.3. Tanım

Bir $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $D \subset \mathbb{T}^{\kappa}$ olmak üzere, $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ kümesi sayılabilir ve sağ saçılımlı nokta barındırmıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde ön türevlenebilir (pre-türevlenebilir) denir [2].

2.3.3. Teorem (Ortalama Değer Teoremi)

$\mathbb{T}$ de tanımlanan reel değerli iki fonksiyon f ve g olsun. Bu iki fonksiyonda bir D bölgesinde ön-türevlenebilir olsunlar. O zaman her $t \in D$ için, $|f^{\Delta}(t)| \leq g^{\Delta}(t)$ ise $s \leq r$ olmak üzere her $r, s \in \mathbb{T}$ için $|f(r) - f(s)| \leq g(r) - g(s)$ sağlanır [2].

Sonuç

f ve g fonksiyonları D bölgesinde ön türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

i) U uç noktaları $r, s \in \mathbb{T}$ olan kompact bir aralıksa

$$|f(s) - f(r)| \leq \{\underset{t\in\mathbb{T}^{\kappa}\cap D}{Sup} |f^{\Delta}(t)|\}. |s - r| \quad \text{dır}$$

ii) Her $t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = 0$ ise f sabit bir fonksiyondur.

iii) Her $t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ ise C sabit olmak üzere $g(t) = f(t) + C$ dir [2].

2.3.4. Teorem

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli ve her $t \in D$ için D ön türevlenebilir bölgesinde

$F^{\Delta}(t) = f(t)$ olacak şekilde ön tüvlenebilir bir F fonksiyonu vardır [2].

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve a bir sabit olmak üzere

$$\int a^t \, \Delta t$$

integralini hesaplayalım.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

eşitliğinden C sabit olmak üzere

$$\int a^t \, \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

yazabiliriz [2].

2.3.4. Tanım

$f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ oluyorsa F ye f nin *antitürevi* denir. *Cauchy integrali* $\forall c,d \in \mathbb{T}$ için

$$\int_c^d f(t)\Delta t = F(d) - F(c)$$

olarak tanımlanır [2].

2.3.5. Teorem

Rd-sürekli her fonksiyonun bir antitürevi mevcuttur. Özel olarak bir $t_0 \in \mathbb{T}$ için

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau$$

ile tanımlı fonksiyon f fonksiyonun antitürevidir [2].

2.3.6. Teorem

$f, g \in C_{rd}$ ve $b, c, d \in$ R ve $t \in \mathbb{T}$ olsun ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

$i.$ $\displaystyle\int_b^c \big(f(t) + g(t)\big)\Delta t = \int_b^c f(t)\Delta t + \int_b^c g(t)\,\Delta t$

$ii.$ $\displaystyle\int_b^c \alpha f(t)\Delta t = \alpha \int_b^c f(t)\Delta t$

$iii.\ \int_b^c f(t)\Delta t = -\int_c^b f(t)\Delta t$

$iv.\ \int_b^c f(t)\Delta t = \int_b^d f(t)\Delta t + \int_d^c f(t)\Delta t$

$v.\ \int_b^c f\big(\sigma(t)\big)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(c) - (fg)(b) - \int_b^c f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$

$vi.\ \int_b^c f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(c) - (fg)(b) - \int_b^c f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$

$vii.\int_b^b f(t)\Delta t = 0$

$viii.\int_t^{\sigma(t)} f(r)\Delta r = \mu(t)f(t)$

Yukarıdaki özelliklerden görüldüğü gibi klasik integralde olduğu gibi bütün özelliklerin çakıştığı fakat çarpımın türevinin farklı olmasından dolayı beşinci ve altıncı maddelerin farklılık gösterdiği anlaşılmaktadır [2].

2.3.7. Teorem

$a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

Burda sağdaki integral belirli integraldir.

ii) Eğer $[a, b]$ izole noktalardan oluşmuş ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b[} \mu(t)f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t\in[a,b[} \mu(t)f(t) & a > b \end{cases}$$

olur.

iii) $h > 0$ ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & a > b \end{cases}$$

olur.

iv) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a > b \end{cases}$$

olur [2].

2.3.5. Tanım

f fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında rd-sürekli ve $a \in \mathbb{T}$ ve $Sup\mathbb{T} = \infty$ ise *genelleştirilniş (improper) integral,*

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{m\to\infty} \int_a^m f(t)\Delta t$$

ile tanımlarız. Sağ taraftaki limit mevcutsa genelleştirilmiş integral yakınsaktır. Aksi durumda ıraksaktır [2].

2.3.6.Tanım (Ara Değer Teoremi)

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $t, s \in \mathbb{T}$ ve $t > s$ ise

$$f(s)f(t) < 0$$

sağlanıyorsa, $r \in [s, t)$ için $f(r) = 0$ veya $f(r)f(\sigma(r)) < 0$ olur [2].

Çizelge 2.5. Zaman skalalarında integral örnekleri

	$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
İNTEGRAL	$\int_b^c f(t)\Delta t$	$\int_b^c f(t)dt$	$\sum_b^{c-1} f(t)$

3. DİNAMİK DENKLEMLER

3.1. Üstel Fonksiyon

Üstel fonksiyonu tanımlamadan önce bazı gerekli tanımlamaları verelim.

3.1.1. Tanım

$p: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ sağlanırsa p fonksiyonu regresiftir deriz. Tüm regresif ve rd-sürekli fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}(\mathbb{T})$ veya $\mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir [3].

3.1.1. Teorem

Tüm rd-sürekli ve regresif fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{R}$ olmak üzere $\forall\, t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve $p, q \in \mathfrak{R}$ için

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)$$

ile tanımladığımız $\oplus$ işlemi 'circle plus' işlemi olarak isimlendirilir ve işlem altında rd-sürekli ve regresif fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{R}$ Abelyen gruptur ve bu gruba regresif grup deriz.

İspat

i) $\forall\, p, r \in \mathfrak{R}$ için $p \oplus r \in \mathfrak{R}$ olduğunu gösterirsek işlemin kapalı olduğunu göstermiş oluruz. $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ ve $1 + \mu(t)r(t) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} 1 + \mu(t)(p \oplus r)(t) &= 1 + \mu(t)p(t) + \mu(t)r(t) + (\mu(t))^2 p(t)r(t) \\ &= \big(1 + \mu(t)p(t)\big)\big(1 + \mu(t)r(t)\big) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $p \oplus r \in \mathfrak{R}$ sağlanır.

ii) $\forall\, p, r, s \in \mathfrak{R}$ için $p \oplus (r \oplus s) = (p \oplus r) \oplus s$ ve $p \oplus r = r \oplus p$ olduğu işlemin tanımından aşikardır.

iii) $\forall\, p \in \mathfrak{R}$ ve θ sıfır fonksiyonu olmak üzere $p \oplus \theta = \theta \oplus p$ eşitliği sağlanır.

iv) $p \in \mathfrak{R}$ için

$$\ominus\, p(t) := -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}$$

fonksiyonunu tanımlarsak $\forall\, t \in \mathbb{T}$ için

$$\big(p \oplus (\ominus\, p)\big)(t) = p(t) \oplus \left(-\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}\right)$$

$$= \ p(t) - \frac{p(t)}{1 + \ \mu(t)p(t)} - \mu(t)p(t)\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}$$

$$= \ \theta$$

eşitliği sağlanır ve böylece ispat tamamlanır [3].

3.1.2. Tanım

Tanımladığımız $\oplus$ işlemi altında $p \in \mathfrak{R}$' nin ters elemanı

$$\ominus \, p(t) \coloneqq -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathfrak{R}$'nin bir elemanıdır ayriyeten her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve $p, q \in \mathfrak{R}$ için

$$(p \ominus q)(t) := \big(p \oplus (\ominus \, q)\big)(t) = \frac{p(t) - q(t)}{1 + \mu(t)q(t)}$$

şeklinde tanımlanan $\ominus$ işlemi 'circle minus' işlemi olarak isimlendirilir ve $\mathfrak{R}$'de kapalıdır [3].

3.1.3. Tanım

Zaman skalasında her $r, t \in \mathbb{T}$ ve $p \in \boldsymbol{\mathfrak{R}}$ olmak üzere

$$e_p(t, r) = exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)} \, (p(\tau))\Delta\tau \right)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *üstel fonksiyon* denir. Burada

$$\xi_{\mu(t)}\big(p(\tau)\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(\tau)} Log(1 + p(\tau)\mu\tau), & \mu(\tau) > 0 \\ p(\tau), & \mu(\tau) = 0 \end{cases}$$

biçimindedir [3].

3.1.2. Yardımcı Teorem

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ve her $s, r, t \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$e_p(t, r)e_p(r, s) = e_p(t, s)$$

yarı grup özelliğini sağlar.

İspat

$p \in \Re$ ve $\forall r, s, t \in \mathbb{T}$ olsun.Tanım 3.1.3’den

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}\,(p(\tau))\Delta\tau\right) exp\left(\int_s^r \xi_{\mu(\tau)}\,(q(\tau))\Delta\tau\right)$$

$$= exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}\,\big(p(\tau)\big)\Delta\tau + \int_s^r \xi_{\mu(\tau)}\,(q(\tau))\Delta\tau\right)$$

$$= exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\,(p(\tau))\Delta\tau\right)$$

$$= e_p(t,s)$$

olarak bulunur [3].

3.2. Birinci Mertebeden Lineer Dinamik Denklemler

3.2.1. Tanım

$p \in \Re$ ise birinci mertebeden lineer dinamik denklem

$$y^{\Delta} = p(t)y$$

regresifdir denir [1].

3.2.2. Tanım

$p \in \Re$ olmak üzere

$$y^{\Delta} = p(t)y + s(t)$$

şeklindeki denkleme birinci mertebeden lineer regresif dinamik denklem denir. Eğer $s(t) = 0$ ise bu denkleme birinci mertebeden homojen lineer regresif denklem denir [1].

3.2.1. Teorem

Farz edelim ki $y^{\Delta} = p(t)y$ birinci basamaktan lineer dinamik denklem regresif ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda $e_p(.,t_0)$, zaman skalasında

$$y^{\Delta} = p(t)y \qquad y(t_0) = 1 \tag{3.1}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür [1].

3.2.2. Teorem

$p \in \mathfrak{R}$ ise (3.1) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y(t) = e_p(t, t_0)$$

dır.

İspat

Farz edelim ki $x(t)$, (3.1) başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun.

$$\left(\frac{x(t)}{e_p(t,t_0)}\right)^{\Delta} = \frac{x^{\Delta}(t)e_p(t,t_0) - x(t){e_p}^{\Delta}(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)}$$

$$= \frac{p(t)x(t)e_p(t,t_0) - p(t)x(t)e_p(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)}$$

$$= 0$$

olduğundan

$$\frac{x(t)}{e_p(t,t_0)} = C$$

sabit olmalıdır.

$x(t) = y(t_0) = 1$ olduğundan $C = 1$ dir. Böylece (3.1) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = y(t) = e_p(t,t_0)$$

olur [1].

3.2.3. Teorem

$p \in \mathfrak{R}$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$x^{\Delta} - p(t)x = 0, \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü $x(t) = x_0 . e_p(t,t_0)$ ile verilir. Buradaki $e_p(t,t_0)$ fonksiyonuna *üstel fonksiyon* denir [1].

3.2.4. Teorem

q rd-sürekli ve regresif ise e_q ve $e_{\ominus q}$ fonksiyonları sırasıyla

$$y^{\Delta} = q(t)y \qquad y(t_0) = 1 \tag{3.2}$$

$$x^{\Delta} = -q(t)x^{\sigma} \qquad x(t_0) = 1 \tag{3.3}$$

başlangıç değer problemlerinin tek çözümleridir [1].

3.2.5. Teorem

$p \in \Re$ ise

$$x^{\Delta}(t) = p(t)x(t) + q(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = e_p(t, t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p\big(t_0, \sigma(\tau)\big)\,(q(\tau))\Delta\tau\right] \tag{3.5}$$

şeklindedir.

İspat

(3.4) denklemin çözümü

$$x(t) = C(t)e_p(t, t_0) \tag{3.6}$$

şeklinde olsun. Burada $C(t)$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalasında Δ türevlenebilir bir fonksiyondur.

$$x^{\Delta}(t) = C^{\Delta}(t)e_p(\sigma(t), t_0) + C(t){e_p}^{\Delta}(t, t_0) \tag{3.7}$$

eşitliğinden (3.6) ve (3.7)'yi denklemde yerine yazarsak,

$$C^{\Delta}(t) = e_p\big(t_0, \sigma(t)\big)q(t)$$

olur. Buradan da

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} e_p\big(t_0, \sigma(\tau)\big)\,\big(q(\tau)\big)\Delta\tau + C_0$$

elde edilir. Bu sonuçtan

$$x^{\Delta}(t) = p(t)x(t) + q(t)$$

$x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulundan $C_0 = x_0$ olur. Böylece denkleminin genel çözümü

$$x(t) = e_p(t, t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p\big(t_0, \sigma(\tau)\big)\,(q(\tau))\Delta\tau\right]$$

yazabiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur [1].

3.2.6. Teorem

$p,q \in \Re$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır [1].

i. $e_0(t, r) \equiv e_p(t, t) = 1$

ii. $e_p(\sigma(t), r) = \big(1 + \mu(t)p(t)\big)e_p(t, r)$

$iii.$ $e_p(t,r) = \dfrac{1}{e_p(r,t)} = e_{\ominus p}(r,t)$

$iv.$ $e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s)$

$v.$ $e_p(t,r)e_q(t,r) = e_{p\oplus q}(t,r)$

$vi.$ $\dfrac{e_p(t,r)}{e_q(t,r)} = e_{p\ominus q}(t,r)$

$vii.$ $[\dfrac{1}{e_p(.,r)}]^{\Delta} = -\dfrac{p(t)}{e_p^{\sigma}(.,r)}$

Örnek

$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $s, t \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$x^{\Delta}(t) = x'(t)$$

olduğundan

$$x'(t) = p(t)x(t) \qquad\qquad x(t_0) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = e_p(t,s) = e^{\int_s^t p(\tau)\Delta\tau}$$

olur. $p(t) = \alpha$ (sabit) olarak alınırsa

$$e_\alpha(t,s) = e^{\alpha(t-s)}$$

ve özel olarak $s = 0$ olarak alırsak

$$e_\alpha(t,0) = e^{\alpha t}$$

elde ederiz [1].

Örnek

$p: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\forall\, t \in \mathbb{Z}$ için $p(t) \neq -1$ olacak şekilde bir fonksiyon $r, t \in \mathbb{Z}$ ile $r < t$ olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise, üstel fonksiyon

$$e_p(t,r) = \prod_{\tau=r}^{t-1}\big(1 + p(\tau)\big)$$

$p(t) = \alpha \neq -1$ (sabit) olarak alınırsa;

$$e_\alpha\,(t,r) = (1+\alpha\,)^{t-r}$$

olur. Özel olarak $r = 0$ olarak alınırsa

$$e_\alpha\,(t,0) = (1+\alpha\,)^{t}$$

şeklinde olur.

4. ULAM-HYERS KARARLILIĞI

4.1. Tanım ve Tarihçe

Genel fonksiyonel denklemler için şöyle sorular sorulabilir: Birbirinden çok az farklı olan iki fonksiyonel denklemin çözümlerinin de birbirine çok yakın olması ne zaman doğrudur? Benzer şekilde verilen bir fonksiyonel denklem bir fonksiyonel eşitsizlik ile değiştirildiğinde eşitsizliğin çözümlerinin denklemin çözümlerine yakın olması gerektiği ne zaman iddia edilebilir?

S. Ulam, Wisconsin Üniversitesi Matematik kulübüne 1940 yılında verdiği meşhur konuşmasında birçok çözülmemiş problem sunmuştur [9]. Bu fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olmuştur. Günümüz araştırmalarını buraya yönlendiren bu soru günümüzde *kararlılık problemi* olarak bilinmektedir. Bu problemlerden birisi de grup homomorfizmalarının kararlılığı ile ilgilidir.

Kısaca G_1bir grup ve d(.,.) metriği ile G_2 de bir metrik grup olsun. ε>0 verilsin . Eğer $\forall x, y \in G_1$ için $(d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$ koşulunu sağlayan bir h: $G_1 \rightarrow G_2$ fonksiyonu için , ∀ $x \in G_1$ için $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir H: $G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizması var olacak şekilde bir δ >0 bulunabilir mi? Bir sonraki yılda bu problem yaklaşık toplamsal fonksiyonlar durumu D. H. Hyers tarafından çözüldü [9]. Şöyle ki G_1 ve G_2 Banach uzayları olmak üzere,

$$\forall x, y \in G_1 \text{ için } \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğinin her çözümüne toplamsal fonksiyon ile yaklaşabileceğini kanıtladı. Bu durumda Cauchy-toplamsal fonksiyonel denklemi olan

$$f\,(x+y) = f(x) + f(y)$$

Ulam –Hyers kararlıdır denir.

4.1.1. Teorem

ε > 0 verilsin. ∀ t ∈[a,b) için $|\, y'(t) - f(t, y(t))| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan her y ∈ C^1 [a,b) fonksiyonu için,

$$x' = f(t, x(t)) \qquad (4,1)$$

denkleminin $|y(t) - x(\,t)\,| \leq c_f.\varepsilon$ özelliğinde bir x ∈ C^1[a,b) çözümü var olacak şekilde bir c_f > 0 sayısı bulunabiliniyorsa, (4,1) denklemi Ulam-Hyers kararlıdır denir [9].

4.2. Picard Operatörleri ve Uygulamaları

4.2.1. Tanım

(X, →) bir L- uzay olsun

F_A: A'nın sabit noktaları

$A^O := 1_X, A^1 := A, ..., A^{n+1} := A^n \circ A$

$A^\infty(x) := \lim_{n\to\infty} A^n(x)$

olsun. Bu durumda,

i) $F_A = \{x_A^*\}$

ii) $A^n(x) \rightarrow x_A^*$ (n →∞ ∀ x ∈X)

koşullarını sağlayacak x_A^* ∈ X varsa A: X →X bir *Picard operatörüdür.* Eğer A nın sabit noktaları F_A birden fazla ise A:X →X zayıf Picard operatörüdür [9].

4.2.2. Tanım

(X, d) metrik bir uzay $A: X \rightarrow X$ zayıf Picard operatörü ve c>0 sayısı reel bir sayı olsun. Eğer $x \in$ X için $d(x, A^\infty(x)) \leq c.\, d(x, A(x))$ oluyorsa A operatörüne bir *c-zayıf Picard operatörü* denir [7].

4.2.1. Teorem

Eğer (X, d) metrik bir uzay olsun $A: X \rightarrow X$ c- zayıf picard operatörü ise

$$x = Ax \tag{4.2}$$

sabit nokta denklemi Ulam-Hyers kararlıdır [7].

4.3. Sabit Katsayılı Lineer Dinamik Denklemlerin Ulam-Hyers Kararlılığı

4.3.1.Teorem

$$y' = ay \quad (a \in R)$$

diferansiyel denkleminin Ulam-Hyers kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $a \neq 0$ olmasıdır. Ayrıca $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq$ n olmak şartıyla

$$y^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} a_k\, y^{(n-k)} = 0$$

denkleminin Ulam-Hyers kararlılığına sahip olması için gerek ve yeter şart karakteristik denklemin pür sanal köklerinin olmamasıdır [10].

4.3.2.Teorem

$a \in \mathbb{R}$ için

$$y_{n+1} = ay_n$$

fark denkleminin Ulam –Hyers kararlığına sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul $|a| \neq 1$ olmasıdır. Ayrıca

$$y_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \, y_{n+i} \qquad (a_i \in R, 0 \leq i \leq p-r)$$

denkleminin Ulam –Hyers kararlığına sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart karakteristik denkleme karşılık gelen köklerin modüllerinin 1'den farklı olmasıdır [4].

4.4. Zaman Skalasında Lineer Dinamik Denklemlerin Ulam-Hyers Kararlılığı

Zaman skalasında birinci mertebeden lineer dinamik denklemleri incelerken bazı önemli koşullardan yararlanacağız. Bu koşullar aşağıdaki gibidir.

S1) $|e_a(t,t_0)|$ ve $\int_{t_0}^{t} |e_a\,(t,\sigma(s))|\,\Delta s$ $[t_0\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında sınırlıdır;

S2) Her $t \in$ $[t_0\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında $\lim_{t\to\infty} |e_a\,(t,t_0)| = \infty$ ve $\int_{t}^{\infty} |e_a\,(t_0,\sigma(s))|\,\Delta s < \infty$ ' dır ;

S3) $|e_a(t,t_0)|$ $[t_0\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında sınırlı ve $\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |e_a\,(s,t_0))|\,\Delta s = \infty$ ' dır.

Bu koşullar için aşağıdakilerin sağladığı doğrulanabilir.

a) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $|\,a\,| \neq 0$, ise S1 ve S2 koşullarından biri sağlanır.

b) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $a \notin$ {-2,0} ise S1 ve S2 koşullarından biri sağlanır.

c) Eğer t_0=1, $\mu(t_{2j}) = \frac{1}{(2j+1)^2}$ ve $\mu(t_{2j-1}) = 2 - \frac{1}{(2j+1)^2}$ ise $e_{-1}(t,t_0)$ üstel fonksiyonu her $[t_j, t_{j+1}]$ aralığında işaret değiştirir ve S3 koşulu sağlanır.

d) Her $[t,\infty)$ aralığında modülleri keyfi büyüklükte ve küçüklükte üstel fonksiyonlarına sahip $\mathbb{T}$ zaman skalaları vardır. Bu durumda önceki koşulların hiçbiri sağlanmaz.

4.4.1. Teorem

Eğer a >0 ve üstel fonksiyon $e_a(t,t_0)$ pozitif değerli ise, S1, S2 ve S3' deki integraller hesaplanabilir. Bu durumda

$$y^{\Delta}(\mathrm{t}) = ay(t) \qquad (4.3)$$

denklemi her zaman Ulam-Hyers kararlıdır. $a = 0$ ise

$$y^{\Delta}(\mathrm{t}) = 0$$

denklemi sadece sabit çözüme sahiptir.

$y^{\Delta}(\mathrm{t}) = \varepsilon$ perturbe fonksiyonu $y(t) = y(t_0) + \varepsilon(t - t_0)$ çözümüne sahiptir. Bu durumda (4.3) fonksiyonu Ulam- Hyers kararlı değildir [9].

4.4.2. Teorem

a bir karmaşık sayı olmak üzere

$$y^{\Delta}(\mathrm{t}) = ay(t) \qquad (4.4)$$

dinamik denklemi eğer S1 veya S2 koşullarından birini sağlarsa $[t_0 \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında Ulam-Hyers kararlıdır. Aynı özellik homojen olmayan denklem için de geçerlidir.

İspat

(4.3) denkleminin çözümü $y(t) = y_0 e_a(t, t_0)$ olsun.

$$z^{\Delta}(t) = az(t) + h(t)$$

perturbe denkleminin çözümünü

$$z(t) = z_0\, e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} h(s) e_a(t, \sigma(s))\, \Delta s$$

şeklinde gösterelim. Eğer Her $t \in \mathbb{T}$ ve $|h(t)| < \varepsilon$ için $y(t)$ ve $z(t)$ arasındaki farkı hesaplamamız gerekir.

Durum 1: Eğer S1 şartı sağlanırsa;

$$|z(t) - y(t)| = \left|(z_0 - y_0) e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} h(s) e_a(t, \sigma(s))\, \Delta s\right| \leq$$

$$|(z_0 - y_0)|.|e_a(t, t_0)| + \varepsilon \int_{t_0}^{t} |e_a(t, \sigma(s))|\, \Delta s$$

olur. $M_1 > 0$ sayısını $|e_a(t, t_0)|$ için üst sınır, $M_2 > 0$ sayısını $\int_{t_0}^{t} |e_a(t, \sigma(s))|\, \Delta s$ için üst sınır ve y_0 sayısını $|(y_0 - z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde seçersek eşitsizlik her $t \in [t_0 \infty)_{\mathbb{T}}$ için $|z(t) - y(t)| < \varepsilon(M_1 + M_2)$ olur.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $a < 0$ olursa bu durum gerçekleşir.

Durum 2: Eğer S2 şartı sağlanır ve $a \neq 0$ ise

$$|z(t) - y(t)| = \left|(z_0 - y_0) e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} h(s) e_a(t, \sigma(s))\, \Delta s\right| \leq$$

$$|e_a(t, t_0)|.\left|z_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} h(s) e_a(t_0, \sigma(s))\, \Delta s\right|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. S2 koşulundan

$$\int_{t_0}^{\infty} h(s)e_a\,(t_0, \sigma(s))\,\Delta s$$

integrali her zaman yakınsaktır.

$$y_0 = z_0 + \int_{t_0}^{\infty} h(s)e_a\left(t_0, \sigma(s)\right)\Delta s$$

olacak şekilde y_0 seçersek.

$$|z(t) - y(t)| \leq \varepsilon |e_a(t, t_0) \int_{t}^{\infty} e_a\,(t_0, \sigma(s))\,\Delta s\,|$$

$$\int_{t}^{\infty} e_a\,(t_0, \sigma(s))\,\Delta s = -\frac{1}{a}\int_{t}^{\infty} \frac{-a}{(1+\mu(s)a)\;e_a(s, t_0)}\Delta s$$

$$= -\frac{1}{a}\left[\lim_{s\to\infty}\frac{1}{e_a(s, t_0)} - \frac{1}{e_a(t, t_0)}\right] = \frac{1}{ae_a(t, t_0)}$$

elde edilir. $\forall t \in\ [t_0 \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$|z(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{|a|}$$

elde ederiz ve böylece (4.4) denklemi Ulam Hyers kararlıdır. Bu durum $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $a > 0\ veya\ \mathbb{T}=\mathbb{Z}\ ve\ a > 1$ durumu için geçerlidir [9].

4.4.3.Teorem

$$y^{\Delta^n} - \sum_{k=1}^{n} a_k\, y^{\Delta^{(n-k)}} = 0 \qquad (4.5)$$

n-inci mertebeden dinamik denklemin karakteristik denklemi

$$r^n - \sum_{k=1}^{n} a_k\, r^{(n-k)} = 0$$

olsun. Karakteristik denklemin köklerini $\lambda_{1,}\lambda_2 \ldots \lambda_n$ ile gösterelim.
Her $t \in T$ ve $1 \leq j \leq n$ için $1+\mu(t)\,\lambda_j \neq 0$ ve S1 veya S2 koşullarından biri sağlanıyorsa, $[t_0 \infty)_{\mathbb{T}}$ aralğıda (4.5) denklemi Ulam-Hyers karalıdır [9].

4.5 Bazı İntegral Denklemlerinin Ulam-Hyers Kararlılığı

Bu kısımda

$$u(t_1,t_2) = w(t_1,t_2) + \int_{a_1}^{t_1}\int_{2}^{t_2} a(s_1,s_2)u(s_1,s_2)\Delta_1 s_1 \Delta_2 s_2$$

$$+ \int_{a_1}^{t_1} b(s_1,t_2)u(s_1,t_2)\Delta_1 s_1 \qquad (4.6)$$

ve daha genel olarak

$$u(t) = w(t) + \int_{a}^{t} a_1(s_1)u(s_1)\Delta s_1 + \int_{a}^{t}\int_{a}^{s_1} a_2(s_2)ju(s_2)\Delta s_2 \Delta s_1 + \cdots$$

$$+ \int_{a}^{t}\int_{a}^{s_1} \dots \int_{a}^{s_{n-1}} a_n\ (s_n)u(s_n)\Delta s_n \dots \Delta s_1$$

integral denkleminin Ulam-Hyers kararlılığını inceleyeceğiz.

Bu tip denklemler yüksek mertebeden dinamik denklemleri sabit nokta problemlerine dönüştürdüğümüzde karşımıza çıkar. Bu yüzden bu denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı ayrıca dinamik denklemlerdeki Ulam-Hyers kararlılığı üzerine bilgi sağlar. Aralarındaki temel fark integral denkleminin kullanılma gerçeğidir. İyi seçilmiş metrik uzaylarda elde edilen Ulam-Hyers kararlılığı teoremlerinin ne koşulları ne de sonuçları klasik yapıyla aynı değildir.

Not

Bu bölümde Bielecki tipi genişletilmiş metrik ile çalışacağız. Bu metrik Tisdell ve Zaidi'nin çalışmasına dayalı çok değişkenli fonksiyonlarda tanımlanmıştır [9]. Buna ihtiyaç duyulmasının nedeni operatörlerimizin iyi seçilmiş metrik uzaylarda Picard operatörü (daha kesin daralma dönüşümü) olduğunu kanıtlamaktır

$\mathbb{T}_1 , \mathbb{T}_2$ zaman skalaları ve $\alpha , \beta > 0$ pozitif iki reel sabitler olmak üzere

$$\|.\|_{\alpha,\beta} \ : C([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$$

fonksiyonunu

$$\|u\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\substack{s_1 \in [a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \\ s_2 \in [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}}} \frac{\| u(s_1,s_2) \|}{e_\alpha(s_1,a_1)e_\beta(s_2,a_2)} \tag{4.7}$$

olarak, ve

$d_{\alpha,\beta} : C\big([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R}^n\big) \times C\big([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R}^n\big) \to \mathbb{R}_+$
fonksiyonunu da her $u, v \in C([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R}^n)$ için

$$d_{\alpha,\beta}(u,v) = \|u - v\|_{\alpha,\beta} \tag{4.8}$$

olarak tanımlayalım.

4.5.1. Yardımcı Teorem

α , $\beta > 0$ olmak üzere $\sigma_1(b_1) < \infty$ ve $\sigma_2(b_2) < \infty$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $d_{\alpha,\beta}$, $C([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R}^n)$ üzerinde bir metriktir.
2. $d_{\alpha,\beta}$ metriği ile , $C\big([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R}^n\big)$ tam bir metrik uzaydır.
3. $\|.\|_{\alpha,\beta}$, $C\big([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R}^n\big)$ üzerinde bir normdur ve $\|.\|_{0,0}$ normuna denktir.
4. $C([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R}^n, \|.\|_{0,0})$ bir Banach uzayıdır.

Notasyonu sadeleştirmek için, $X = C([a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}, \mathbb{R})$ ve $D_1 := [a_1,\sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1}$, $D_2 := [a_2,\sigma_2(b_2)]_{\mathbb{T}_2}$ notasyonunu kullanacağız. Tanımladığımız böyle metriklere Bielecki (T.Z) tipi metrikler denir [9].

4.5.2. Teorem

Eğer $w, a, b \in X$, $\sigma_1(b_1) < \infty$, $\sigma_2(b_2) < \infty$ ise bu durumda

$$A(u)(t_1,t_2) = w(t_1,t_2) + \int_{a1}^{t1}\int_{a2}^{t2} a(s_1,s_2)u(s_1,s_2)\Delta_1 s_1 \Delta_2 s_2 + \int_{a_1}^{t_1} b(s_1,t_2)u(s_1,t_2)\Delta_1 s_1$$

olarak tanımlanan A: $X \to X$ operatörü iyi tanımlıdır ve A operatörü $(X , d_{\alpha,\beta})$ üzerinde bir daralma dönüşümü olacak şekilde α , $\beta > 0$ pozitif reel sabitler vardır.

İspat

$M_1 := \ max\{|a(t_1, t_2)|(t_1, t_2) \in D_1 x D_2\}$, $M_2 := max\{|b(t_1, t_2)|(t_1, t_2) \in D_1 x D_2\}$ ile gösterelim. Verilen koşullardan böyle sabitler mevcut ve $M_1 < \infty$, $M_2 < \infty$ sağlanır. Her $u, v \in X$ için

$$\left|A(u)(t_{1,}t_2) - A(v)(t_{1,}t_2)\right| \leq \int_{a_1}^{t_1}\int_{a_2}^{t_2} |a(s_1, s_2)||u(s_1, s_2) - v(s_1, s_2|\Delta_1 s_1 \Delta_2 s_2$$

$$+ \int_{a_1}^{t_1} |b(s_1, s_2)||u(s_1, s_2) - v(s_1, s_2)|\,\Delta_1 s_1$$

$$\leq M_1 \int_{a_1}^{t_1}\int_{a_2}^{t_2} \frac{|u(s_1, s_2) - v(s_1, s_2)|}{e_\alpha(s_1, a_1)e_\beta(s_2, a_2)}\, e_\alpha(s_1, a_1)e_\beta(s_2, a_2)\Delta_1 s_1 \Delta_2 s_2$$

$$+ M_2 \int_{a_1}^{t_1} \frac{|u(s_1, t_2) - v(s_1, t_2)|}{e_\alpha(s_1, a_1)e_\beta(s_2, a_2)} e_\alpha(s_1, a_1)e_\beta(s_2, a_2)\Delta_1 s_1$$

$$\leq M_1 ||u - v||_{\alpha,\beta} \int_{a_1}^{t_1}\int_{a_2}^{t_2} e_\alpha(s_1, a_1)e_\beta(s_2, a_2)\Delta_1 s_1 \Delta_2 s_2$$

$$+ M_2 ||u - v||_{\alpha,\beta} \int_{a_1}^{t_1} e_\alpha(s_1, a_1)e_\beta(s_2, a_2)\Delta_1 s_1$$

$$= M_1 ||u - v||_{\alpha,\beta} \frac{(e_a(t_1, a_1) - 1)(e_\beta(t_2, a_2) - 1)}{\alpha.\beta} + M_2 ||u - v||_{\alpha,\beta} \frac{e_\alpha(t_1, a_1) - 1)}{\alpha} e_\beta(t_2, a_2)$$

$$\leq M_1 ||u - v||_{\alpha.\beta} \frac{e_a(t_1, a_1)e_\beta(t_2, a_2)}{\alpha.\beta} + M_2 ||u - v||_{\alpha.\beta} \frac{e_\alpha(t_1, a_1)}{\alpha} e_\beta(t_2, a_2)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafını $e_\alpha(t_1, a_1)e_\beta(t_2, a_2)$ pozitif terimi ile bölersek

$$\frac{|A(u)(t_1, t_2) - A(v)(t_1, t_2)|}{e_\alpha(t_1, a_1)e_\beta(t_2, a_2)} \leq \frac{M_1}{\alpha\beta} ||u - v||_{\alpha.\beta} + \frac{M_2}{\alpha} ||u - v||_{\alpha.\beta}$$

$$= \frac{M_1 + M_2\beta}{\alpha\beta} ||u - v||_{\alpha.\beta}$$

elde ederiz. $(t_1, t_2) \in D_1 x D_2$ üzerinde supremum olarak alırsak

$$||A(u) - A(v)||_{\alpha,\beta} \leq \frac{M_1 + \beta M_2}{\alpha.\beta} ||u - v||_{\alpha,\beta}$$

elde edilir. Eğer $\alpha, \beta > M_1 + \beta M_2$ ise A $(X\,, d_{\alpha,\beta}\,)$ üzerinde bir daralma dönüşümüdür [9].

4.5.3. Yardımcı Teorem

(X, d) bir Banach uzayı olsun. Eğer $A: X \to X$ q $<$ 1 pozitif daralma sabitiyle bir daralma dönüşümüdür. Bu durumda A, $c_A = \frac{1}{1-q}$ ile bir c-zayıf picard operatörüdür. Dahası (4.2) sabit nokta denklemi Ulam-Hyers kararlıdır [9].

4.5.4. Teorem

Eğer $w, a, b \in X$, $\sigma_1(b_1) < \infty$, $\sigma_2(b_2) < \infty$ ise

$$u(t_1,t_2) = w(t_1,t_2) + \int_{a_1}^{t_1}\int_{2}^{t_2} a(s_1,s_2)u(s_1,s_2)\Delta_1 s_1\Delta_2 s_2 + \int_{a_1}^{t_1} b(s_1,t_2)u(s_1,t_2)\Delta_1 s_1$$

integral denklemi $D_1 \times D_2$ üzerinde Ulam-Hyers kararlıdır.

İspat

Teorem 4.5.2'in ispatındaki notasyonları kullanarak $M_1 < \infty$, $M_2 < \infty$ olduğundan

$$A(u)(t_{1,}t_2) = w\big(t_{1,}t_2\big) + \int_{a1}^{t1}\int_{a2}^{t2} a(s_1,s_2)u(s_1,s_2)\Delta_1 s_1\Delta_2 s_2$$

$$+ \int_{a_1}^{t_1} b(s_1,t_2)u(s_1,t_2)\Delta_1 s_1 \qquad (4.9)$$

olarak tanımlanan operatör, $q = \frac{M_1+\beta M_2}{\alpha.\beta} < 1$ olacak şekilde α, β sabitlerini seçersek q daralma sabitiyle birlikte bir daralma dönüşümü olur. Yardımcı Teorem 4.5.3' den A operatörünün $c_A = \frac{\alpha.\beta}{\alpha.\beta - M_1 - \beta M_2}$ pozitif sabitiyle c-zayıf picard operatörü olduğunu söyleyebiliriz. Teorem 4.2.1'den (4.9) denklemi Ulam-Hyers kararlıdır [9].

4.5.5. Teorem

$w, a, b \in X$, $\sigma_1(b_1) < \infty$, $\sigma_2(b_2) < \infty$ olsun. Ayrıca $f, g \in C(D_1 \times D_2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ son değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$u(t_1,t_2) = w(t_1,t_2) + \int_{a_1}^{t_1}\int_{a_2}^{t_2} a(s_1,s_2) f\big(s_1,s_2,u(s_1,s_2)\big)\Delta_1 s_1 \Delta_2 s_2$$

$$+ \int_{a_1}^{t_1} b(s_1,t_2) g(s_1,t_2,u(s_1,t_2))\Delta_1 s_1$$

integral denklemi $D_1 \times D_2$ üzerinde Ulam-Hyers kararlıdır [9].

Şimdi sabit katsayılı ikinci mertebeden dinamik denklemler için aşağıdaki sonuçları vereceğiz.

4.5.6. Teorem

c_1 ve c_2 reel sabitler için

$$x^{\Delta\Delta}(t) + c_1 x^{\Delta}(t) + c_2\, x(t) = 0 \qquad (4.10)$$

denklemi $[a,b]_{\mathbb{T}}$ zaman skalası aralığında her zaman Ulam-Hyers kararlıdır.

İspat

(4.10) denkleminin a'dan t'ye integralini alırsak

$$x^{\Delta}(t) - x^{\Delta}(a) + c_1\big(x(t) - x(a)\big) + c_2 \int_a^t x(s)\Delta s = 0$$

elde ederiz. Bu denklemin tekrar a'dan t'ye integralini alırsak

$$x(t) = x(a) - \Big(x^{\Delta}(a) + c_1 x(a)\Big)a + \Big(x^{\Delta}(a) + c_1 x(a)\Big)t - c_2 \int_a^t \int_a^s x(\xi)\Delta\,\xi\Delta s$$

$$- c_1 \int_a^t x(s)\Delta s$$

denklemini elde ederiz.

$$w(t) = x(a) - \Big(x^{\Delta}(a) + c_1 x(a)\Big)a + \Big(x^{\Delta}(a) + c_1 x(a)\Big)$$

fonksiyonunu kullanarak $C[a,b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde

$$A(x)(t) = w(t) - c_2 \int_a^t \int_a^s x(\xi)\Delta\,\xi\Delta s - c_1 \int_a^t x(s)\Delta s$$

operatörünü tanımlayalım.

(4.10) denklemi $Ax = x$ denklemine denk olduğundan Teorem 4.5.4 A tarafından üretilen sabit nokta denkleminin Ulam-Hyers kararlılığını bulmak için uygulanabilir. (4.10) denkleminin denk dönüşümlerinden ve bundan dolayı aralığın ve üstel fonksiyonların sınırlılığı nedeniyle (4.10) dinamik denkleminin Ulam-Hyers kararlılığını elde ederiz [9].

4.5.7. Teorem

$p, g, f \in C_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$ olsun ve

ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan

$$x^{\Delta\Delta}(t) + p(t)x^{\Delta}(t) + q(t)x(t) = f(t), \qquad t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \tag{4.11}$$

delta dinamik denklemini ele alalım. Eğer p türevlenebilir ve tanım kümesinde $p = p^{\sigma}$ ise (4.11) dinamik denklemi Ulam-Hyers kararlıdır.

İspat

Teorem 4.5.6'nın ispatındaki fikri kullanacağız. Yani bir integral operatörü tanımlayıp ve bunun bir c-zayıf picard operatörü olduğunu kanıtlayacağız. (4.11)'deki denklemin a'dan t'ye integralini alırsak

$$x^{\Delta}(\mathrm{t}) - x^{\Delta}(a) + \int_a^t p(s)x^{\Delta}(s)\Delta s + \int_a^t q(s)x(s)\Delta s = \int_a^t f(s)\Delta s$$

denklemini buluruz. Bununla birlikte $p = p^{\sigma}$ olduğundan kısmi integrasyonla

$$x^{\Delta}(t) - x^{\Delta}(a) + p(t)x(t) - p(a)x(a) - \int_a^t p^{\Delta}(s)x(s)\Delta s + \int_a^t q(s)\,\Delta s = \int_a^t f\,(s)\Delta s$$

denklemini yazabiliriz ve a'dan t'ye bir kez daha integral alıp terimleri düzenlersek

$$x(t) = x(a) + \left(x^{\Delta}(a) + p(a)x(a)\right)(t-a) + \int_a^t \int_a^s f(\xi)\Delta\xi\Delta s \quad + \int_a^t \int_a^s (p^{\Delta}(\xi)$$
$$- q(\xi))x(\xi)\Delta\xi\,\Delta s - \int_a^t p(s)x(s)\Delta s$$

denklemini buluruz.

$$w(t) := x(a) + \left(x^{\Delta}(a) + p(a)x(a)\right)(t-a) + \int_a^t \int_a^s f\,(\,\xi)\Delta\xi\Delta s$$

fonksiyonunu kullanarak, $C[a,b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde A operatörünü

$$A(x)(t) \coloneqq w(t) + \int_a^t \int_a^s \left(p^{\Delta}(\xi) - q(\xi)\right) x(\xi)\Delta\xi\Delta s - \int_a^t p(s)x(s)\Delta s$$

olarak tanımlayalım. 4.5.4 teoreminden A tarafından üretilen sabit nokta denkleminin Ulam-Hyers kararlılığını elde ederiz. Ayrıca aralığın ve üstel fonksiyonların sınırlılığından dolayı (4.11) denkleminin de Ulam-Hyers kararlılığını buluruz [9].

Not

Teorem 4.5.6 ve 4.5.7 sonuçları, 4.5.4 teoremini kullanmadan doğrudan (4.7) normu ve tek değişkenli fonksiyonların bir metrik uzayı kullanarak da elde edebiliriz.
4.5.6 ve 4.5.7 teoremleri ayrıca n-inci mertebeden delta lineer dinamik denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı için genelleştirilebilir.

4.5.8.Teorem

$w, a_1, a_2 \dots \dots a_n \in C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ ve $\sigma(b) < \infty$ ise

$$u(t) = w(t) + \int_a^t a_1(s_1)u(s_1)\Delta s_1 + \int_a^t \int_a^{s_1} a_2(s_2)u(s_2)\Delta s_2 \Delta s_1 + \cdots$$
$$+ \int_a^t \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} a_n(s_n)u(s_n)\Delta s_n \dots \Delta s_1 \qquad (4.12)$$

integral denklemi $C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ üzerinde her zaman Ulam-Hyers kararlıdır.

İspat

Bu ispatta, 4.5.4 Teoreminin ispatı için kullandığımız benzer fikri kullanacağız.

$$A = C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} \to C[a, \sigma(b)]$$

integral operatörünü

$$A(u)(t) = w(t) + \int_a^t a_1(s_1)u(s_1)\Delta s_1 + \int_a^t \int_a^{s_1} a_2(s_2)u(s_2)\Delta s_2 \Delta s_1 + \cdots$$
$$+ \int_a^t \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} a_n(s_n)u(s_n)\Delta s_n \dots \Delta s_1$$

olarak tanımlayalım. $a_1, a_2 \dots \dots a_n \in C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ olduğundan, her $t \in C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ için $|a_1| < M_1, \dots, |a_n| < M_n$ olacak şekilde $M_1 < \infty, \dots M_n < \infty$ pozitif reel sabitler vardır.

Eğer $u, v \in C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ ise

$$|A(u)(t) - A(v)(t)| \leq M_1 \int_a^t |u(s_1) - v(s_1)| \Delta s_1 + M_2 \int_a^t \int_a^{s_1} |u(s_2) - v(s_2)| \Delta s_2 \Delta s_1$$

$$+ M_n \int_a^t \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} |u(s_n) - v(s_n)| \Delta s_n \dots \Delta s_1$$

$$M_1 \|u - v\|_\alpha \frac{e_\alpha(t,a)}{\alpha} + M_2 \|u - v\|_\alpha \frac{e_\alpha(t,a)}{\alpha^2} + \cdots + M_n \|u - v\|_\alpha \frac{e_\alpha(t,a)}{\alpha^n}$$

$$= \|u - v\|_\alpha e_\alpha(t,a) (\frac{M_1}{\alpha} + \frac{M_2}{\alpha^2} + \frac{M_n}{\alpha^n})$$

elde ederiz. Eşitsizliğin her iki tarafını pozitif fonksiyon olan $e_\alpha(t,a)$ bölüp $t \in C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ üzerinde supremum olarak alırsak,

$$\|A(u) - A(v)\|_\alpha \leq \|u - v\|_\alpha (\frac{M_1}{\alpha} + \frac{M_2}{\alpha^2} + \frac{M_n}{\alpha^n})$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $M \coloneqq max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ olarak seçersek,

$$\|A(u) - A(v)\|_\alpha \leq \|u - v\|_\alpha \, M \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \frac{1}{\alpha^n}}{1 - \frac{1}{\alpha}} \leq \|u - v\|_\alpha \frac{M}{\alpha - 1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer $\frac{M}{\alpha - 1} < 1$ olursa A operatörümüz bir daralma dönüşümüdür. Yardımcı Teorem 4.5.3'den A bir c-zayıf picard operatörüdür. Dahası integral denkleminin Ulam-Hyers kararlılığını elde ederiz. Bu da bize n-inci mertebeden sabit katsayılı dinamik denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığını gösterir. (aralığın ve $e_\alpha(t,a)$ üstel fonksiyonun sınırlılığından dolayı) [9].

4.5.9. Teorem

$\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \dots, \mathbb{T}_n$ keyfi zaman skalaları olsun. $\sigma_1(b_1) < \infty, \dots,$ $\sigma_n(b_n) < \infty$ olacak şekilde $[a_1, \sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \in \mathbb{T}_1, \dots, [a_n, \sigma_n(b_n)]_{\mathbb{T}_n} \in \mathbb{T}_n$ zaman skalası aralıkları olsun.
$Y \coloneqq C([a_1, \sigma_1(b_1)]_{\mathbb{T}_1} \times \dots \times [a_n, \sigma_n(b_n)]_{\mathbb{T}_n}, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Eğer $w, f_1, \dots, f_n \in Y$ ise

$$A(u)(t_1, \dots, t_n) = w(t_1, \dots, t_n) + \int_{a_1}^{t_1} f_1(s_1, t_2, \dots, t_n) u(s_1, t_2, \dots, t_n) \Delta_1 s_1 + \int_{a_1}^{t_1}$$

$$\times \int_{a_2}^{t_2} f_2(s_1, s_2, t_3, \dots, t_n) u(s_1, s_2, t_3 \dots, t_n) \Delta_2 s_2 \Delta_1 s_1 + \cdots + \int_{a_1}^{t_1}$$

$$\times \int_{a_2}^{t_2} \dots \int_{a_n}^{t_n} f_n \ (s_1, \dots, s_n) u(s_1, \dots, s_n) \Delta_n s_n \dots \Delta_1 s_1$$

ile tanımlanan $A\colon \ Y \to Y$ operatörü c-zayıf picard operatörüdür. Dahası $u = Au$ sabit nokta denklemi her $i = 1,2, \dots, n$ için $D_i = [a_i, \sigma_{\mathrm{i}}(b_i)]_{\mathbb{T}_i}$ olmak üzere $D_1 \times \dots \times D_n$ üzerinde Ulam-Hyers kararlıdır [9].

Bu teoremin ispatında teorem 4.5.6 ‘nın ispatında kullandığımız;

her $u \in Y$ için

$$\|u\|_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\mathrm{n}}} = \sup_{s_1 \in D_1, \dots, s_n \in D_n,} \frac{\| \ u(s_1, \dots, s_n) \ \|}{e_{\alpha_1}(s_1, a_1) \dots e_{\alpha_{\mathrm{n}}}(s_n, a_n)}$$

normuna dayalı aynı argümanı kullanırız.

4.6. Delta Lineer Dinamik Sistemlerin Ulam-Hyers Kararlılığı

Burada keyfi bir zaman skalası aralığı olan $D \coloneqq C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ üzerinde $u_1, \dots, u_n\colon D \to \mathbb{R}$ için $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$, $K(t) = (k_{ij}(t))_{i.j=1,\dots,n}$ n x n boyutlu bir matris, $u^\Delta(t) = (u_1^\Delta(t), \dots, u_n^\Delta(t))^T$ ve $f_1, \dots, f_n\colon D \to \mathbb{R}$ için $F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ olmak üzere

$$u^\Delta(t) = K(t)u(t) + F(t) \qquad (4.13)$$

delta lineer dinamik sistemlerin Ulam-Hyers kararlılığı inceleyeceğiz. Burada $C(D, \mathbb{R}^n)$ fonksiyon uzayı için bir boyutlu Bielecki tipi (4.8) metriğini kullanacağız. d_α metriği ile $X = (C(D, \mathbb{R}^n), d_\alpha)$ bir Banach uzayıdır.

4.6.1. Teorem

Eğer her $i, j = 1, \dots, n$ için $k_{ij}, f_i \in C_{rd}(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ ise (4.13) denklemi D üzerinde Ulam-Hyers kararlıdır.

İspat

Genelliği bozmadan $u(a) = 0$ olarak kabul edebiliriz.(4.13) denkleminin a' dan t' ye integralini alırsak

$$u(t) = \int_a^t K(s)u(s)\Delta s + \int_a^t F(s)\Delta s$$

denklemini elde ederiz. $A: C(D,\mathbb{R}^n) \to C(D,\mathbb{R}^n)$ operatörünü

$$A(u)(t) := \int_a^t F(s)\Delta s + \int_a^t K(s)u(s)\Delta s$$

eşitliğiyle tanımlayalım. A operatörü X üzerinde bir daralma dönüşümü olacak şekilde bir α pozitif sabit sayısının olduğunu ispatlamamız gerekir. $k_{ij} \in C_{rd}(\mathrm{D}, \mathbb{R}^n)$ olması, her $t \in \mathrm{D}$ için $\|K(t)\| \leq M$, olacak şekilde bir pozitif sabit olan $M < \infty$ sabit sayısının var olduğunu gösterir. Burada $\|.\|$ bir matris normdur. Eğer $u, v \in C(D,\mathbb{R}^n)$ ise

$$\|A(u)(t) - A(v)(t)\| \leq \int_a^t \left\|K(s)\big(u(s) - v(s)\big)\right\|\Delta s \leq \int_a^t \|K(s)\|\|u(s) - v(s)\|\Delta s$$

$$\leq M \int_a^t \frac{\|(s) - v(s)\|}{e_\alpha(s,a)} e_\alpha(s,a)\Delta s$$

$$\leq \frac{M}{\alpha} ||u - v||_\alpha e_\alpha(t,a).$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eşitsizliğin her iki tarafını pozitif fonksiyon olan $e_\alpha(t,a)$ bölüp, $t \in \mathrm{D}$ üzerinde supremum olarak alırsak,

$$\|A(u) - A(v)\|_\alpha \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\|_\alpha$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer $\frac{M}{\alpha} < 1$ ise A bir daralma dönüşümüdür. Bu sebepten Yardımcı Teorem 4.5.3 ve Teoerem 4.2.1'den dolayı

$$u = A(u)$$

sabit nokta denkleminin Ulam-Hyers kararlı olduğu sonucuna varabiliriz. Bu da (4.13) denkleminin Ulam-Hyers kararlı olduğunu gösterir [9].

5. SONUÇ

Bu tez çalışmamızda ilk olarak zaman skalasının tanımı yapılmış, zaman skalasında üstel fonksiyon, delta türev, Δ integral, ve dinamik denklemler incelenmiştir. İlgili kümeler için kullandığımız tanımların ve teoremlerin herhangi bir kapalı küme de uygulanabilirliği yönünden zaman skalasının kullanışlı olduğu görülmüştür. Ayrık ve sürekli analizi birleştirirken, fonksiyonları süreksizlik noktalarındaki problemeler sıçrama operatörleri ile çözülmüştür. Türev alma işleminde gerekli süreklilik şartı, parçalı fonksiyonlarda türev alımına engel iken bu σ ve ρ sıçrama operatörleri ile sorun çözülmüş ve delta türevi ile her fonksiyon türevlenebilir hale geldiği görülmüştür. Benzer durum integral için de, fonksiyonun integrali μ granül fonksiyonu yardımıyla elde edilen integraller toplamına eşit olmuştur. Zaman skalasında adi türevin delta türev ile hesaplanabileceğini ve yüksek basamaktan adi türevlerin hesap edilmesinde herhangi bir sorun olmadığı görülmüştür.

Aynı zamanda bu çalışmada zaman skalasında üstel fonksiyon, delta türev ve delta integral ve bunların temel özelliklerine ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır.

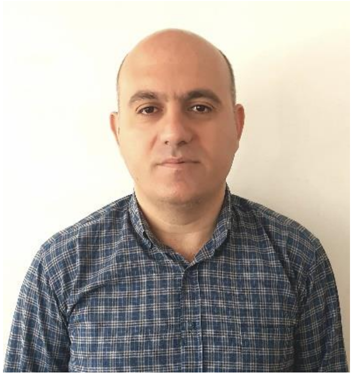
S. Ulam, Wisconsin Üniversitesi Matematik Kulübüne 1940 yılında verdiği konuşmasında birçok çözülememiş problem sunmuştur. Bu fonksiyonel denklemlerin ve kararlılık teorisinin başlangıcı olmuştur. Bu çalışmada ayrıca birinci mertebeden homojen ve homojen olmayan bazı diferansiyel denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı incelenmiştir. Bununla birlikte birinci mertebeden homojen ve homojen olmayan bazı dinamik denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı incelenmiş ve sonuçları verilmiştir. Burada $\mathbb{T}$ zaman skalasındaki sabit katsayılı denklemlerin Ulam-Hyers kararlılığı yine $\mathbb{T}$ de tanımlı, üstel fonksiyonları davranışlarıyla yakın ilişki olduğu görülmüştür. Dahası bu davranış sadece üstel fonksiyonun tanımladığı sabitlerle (ve fonksiyonlarla) değil zaman skalasının kendi iç yapısıyla ilişkilidir. Bu nedenle sonuçların üstel fonksiyonun asimptotik davranışları açısından formüle edildiği görülmüştür.

KAYNAKÇA

1. Agarwal, R., Bohner, M., O'Reganc, D. and Petersond, A. (2002). Dynamic Equations on Time Scales: a survey. *Journal of Computational and Applied Mathematics*,141,1-26.
2. Bohner, M. and Peterson, A.(2001). *Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications*. Boston, Birkhäuser.
3. Bohner, M. and Peterson, A. (2003). *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Boston, Birkhäuser.
4. Popa, D. (2005). Hyers-Ulam Stability of the Linear Recurence with Constant Coefficients. *Advances in Difference Equations,* 2005(2), 101-107.
5. Cimpean, D. S. and Popa, D. (2010). On the Stability of the Linear Differential Equation of Higher Order with Constant coefficients. *Applied Mathematics Computation*,217(8), 4141-4146.
6. Rus, I.A. (2003). Picard Operators and Applications. *Scientiae Mathematicae Japanicae*, 58 (1), 191-219.
7. Rus, I.A. (2009). Remarks on Ulam Stability of the Operatorial Equations. *Fixed Point Theory* (10), 305-320.
8. Rus, I.A. (2009). Ulam Stability of Ordinary Differential Equations. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 54 (4), 125-133.
9. Meszaros, A.R. and Andras, S.(2013). Ulam-Hyers Stability of Dynamic Equations on Time Scales via Picard Operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 219, 4853-4864.
10. Miura, T., Miyajima, S. and Takashi, S.E. (2003). Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Operator with Constant Coefficients. *Mathematische Nachrichten*, 258, 90-96.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Adı-Soyadı	: Mustafa BÜLBÜL
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 01.01.1977- Suluova
Medeni hali	: Evli
e-posta	: mubulbulll@hotmail.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Marmara Üniversitesi	1999

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
1999-	Amasya Milli Eğitim	Öğretmen

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Bülbül, M. ve Öğrekçi, S.(2018, 12-15 Eylül). *Zaman Skalasında Ulam-Hyrers Kararlılığı.* 31. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzincan