T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOTOPİ PERTURBATION METODU İLE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİNE BİR YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERYEM ÇOBANBAŞI

HAZİRAN 2019

HOMOTOPİ PERTURBATION METODU İLE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİNE BİR YAKLAŞIM

Meryem ÇOBANBAŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2019

Meryem ÇOBANBAŞI tarafından hazırlanan “HOMOTOPİ PERTURBATION METODU İLE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİNE BİR YAKLAŞIM” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi SERPİL ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Başkan:

Matematik Anabilim Dalı,

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Üye:

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ....

Tez Savunma Tarihi: / /2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu çalışmada;

- Tez içerisinde sunulan veriler, bilgiler ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Elde edilen tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçlar bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunulduğunu,
- Çalışma esnasında yararlanılan tüm eserleri uygun atıflar yapılarak kaynak gösterdiğimi,
- Tez aşamasında kullandığım verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Yapılan bu tezin tamamen özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Meryem ÇOBANBAŞI
/ /2019

İTHAF

Bu tez, her aşamasında bana destek olan annem ve babama ithaf olunur.

HOMOTOPİ PERTURBATION METODU İLE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİNE BİR YAKLAŞIM
(Yüksek Lisans Tezi)

Meryem ÇOBANBAŞI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2019

ÖZET

Bu tezde, lineer olmayan Fredholm integral denklemlerini çözmek için Homotopi Perturbation metodu (HPM) kullanılmıştır. Homotopi Perturbation Metodunun integral denklemini çözmedeki etkililiği çalışma içerisinde çeşitli örneklerle desteklenmiştir. Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kullanılan metotlarla ilgili temel bilgilere yer verilmiş ve bu metotlarla ilgili literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde integral denklemlerin özellikleri incelenmiş ve bu denklemlerin sınıflandırmasından bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde Homotopi Perturbation Metodunun özelliklerine değinilerek integral denklemlerindeki kullanımı incelenmiştir. Lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözmek için kullanılan metotlardan Direkt Hesaplama Metodu (DHM), Seri Çözüm Metodu(SÇM), Adomian Ayrıştırma Metodu(AAM) ve Homotopi Perturbation Metodu(HPM) açıklanarak bazı integral denklemlerin uygulaması yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise iki farklı örnek ele alınarak sayısal ve analitik sonuçlar karşılaştırılmış ve Homotopi Perturbation Metodunun diğer metotlardan daha etkili ve kullanışlı olduğu görülmüştür.

Sayfa Adeti	:	39
Anahtar kelimeler	:	Direkt Hesaplama Metodu, Seri Çözüm Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu, Homotopi Perturbation metodu
Danışman	:	Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

AN APPROACH TO NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS BY HOMOTOPY PERTURBATION METHOD

(M. Sc.)

Meryem ÇOBANBAŞI

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

In this thesis, we used the Homotopy Perturbation Method(HPM) to solve nonlinear Fredholm integral equations. We support the effectiveness of Homotop Perturbation Method(HPM) in solving integral equations by various examples.This thesis consist of four chapters. In the first chapter, we introduce the basic concepts and give a literatüre review.In the second chapter, we discuss the properties and give the classification of integral equations. In the third chapter, we review the properties of Homotopy Perturbation Method(HPM) and study their applications in integral equations.In addition to Homotopy Perturbation Method(HPM), we give the Direct Computation Method(DCM) , the Series Solution Method(SSM) and Adomian Decomposition Method(ADM) that are used to solve the nonlinear Fredholm integral equations. We then apply them to some integral equations. In the fourth chapter, we compare the analytical and numerical results in two different examples and we conclude that Homotopy Perturbation(HPM) is more effective and useful than the other methods.

Page Number : 39
Key Words : Direct Computation Method, Series Solution Method, Adomian Decomposition Method, Homotopy Perturbation Method
Supervisor : Assist. Prof. Serpil ŞAHİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgisini, tecrübesini ve desteğini esirgemeyen, tez konusunun belirlenmesi, hazırlanması ve sonuçlanması aşamalarında hep yanımda olan kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK BEYAN ... iv
ÖZET ... vi
ABSTRACT ... vii
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR ... viii
İÇİNDEKİLER ... ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ ... xi
ÇİZELGELER DİZİNİ ... xii
1. GİRİŞ ... 1
2. GENEL BİLGİLER ... 4
2.1. Tanım ... 4
2.2. İntegral Denklemlerin Genel Özellikleri ... 4
2.3. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması ... 4
2.3.1. Lineerliğe göre sınıflandırma ... 4
2.3.2. Homojenliğe göre sınıflandırma ... 5
2.3.3. İntegral sınırlarına göre sınıflandırma ... 5
2.3.4. $u(x)$ Bilinmeyen fonksiyonunun bulunduğu yere göre sınıflandırma ... 6
3. MATERYAL-METOT ... 7
3.1. Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemi ... 7
3.1.1. Direkt hesaplama metodu ... 10
3.1.2. Seri çözüm metodu ... 14
3.1.3. Adomian ayrıştırma metodu ... 16
3.1.4. Homotopi perturbation metodu ... 19
4. BULGULAR ... 27

5. SONUÇ 35

KAYNAKLAR 36

ÖZGEÇMİŞ 39

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
A	Genel diferansiyel operatör
$\mathbf{A_n}$	Adomian polinomları
B	Sınır operatörü
F	Fonksiyonel operatör
L	İntegral operatörü
M	Lineer operatör
N	Lineer olmayan operatör
Ω	Tanım kümesi
Γ	Tanım kümesinin sınırı

Kısaltmalar	**Açıklama**
AAM	Adomian ayrıştırma metodu
DHM	Direkt hesaplama metodu
HPM	Homotopi perturbation metodu
SÇM	Seri çözüm metodu

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelgeler **Sayfa**

Çizelge 3.1**.** Örnek 3.6 için HPM'nin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar 24

Çizelge 3.2**.** Örnek 3.7 için HPM'nin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar 26

Çizelge 4.1**.** Örnek 4.1 için HPM ve AAM'nin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar ... 31

Çizelge 4.2**.** Örnek 4.2 için HPM ve SÇM'nin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar 34

1. GİRİŞ

İntegral denklemleri, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun integral işaretinin içinde ve dışında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmaktadır [11,15]. Ancak, bu tanım yeterli bir tanım olarak kabul edilmemektedir. Böyle bir tanımdan yola çıkarak integral denklemlerin tamamını içine alacak bir teori kurulamamaktadır. İntegral denklemleri çok geniş bir araştırma sahası ve ayrıntılı inceleme konusudur.

İntegral denklemler ile matematiksel fizik ve mekanikte sıkça karşılaşabilmektedir. Ayrıca diferansiyel denklemlerin çözümünde de bir çözüm aracı olarak kullanılırlar. Bu nedenle diferansiyel denklemler ile integral denklemler arasında yakın bir ilişki vardır. İntegral denklemlerin, diferansiyel denklemlerle olan yakın ilişkisi ve diferansiyel denklemlerin mühendislikte çokça kullanılması integral denklemlerini de önemli bir duruma getirmiştir. Diferansiyel denklemlerin bir problemi tek başına tanımlamaya yetmediği bilinmektedir. Bu yüzden sınır şartlarının da diferansiyel denkleme eklenmesi gerekmektedir. Ancak, integral denklemlerde ise ilave şartlara gerek duyulmadan problemin tam olarak tanımı verilebilmektedir. Ayrıca integral denklemler bütün uzay üzerinden integral alınmasını gerektirmektedir. Bu yüzden de evrensel denklemlerdir.

19.yüzyılın ilk yarısında integral denklemleri ile ilgili ilk çalışmalar başlamıştır. Bu dönemde integral denklemleri ile ilgili planlı olarak araştırmalar yapılmamışken, 19. Yüzyılın sonlarına doğru çalışmalar daha sistematik ve bilinçli hale gelmiş ve araştırmalardan bu yönde sonuçlar alınmaya başlanmıştır. 1823 yılında ABEL tarafından mekanik bir problem incelenirken ilk defa integral denklemlerin kullanıldığı görülmüştür. Fakat integral denklem deyimi ilk olarak 1888'de Du Bois REYMOND tarafından yayınlanan çalışmasında görülmektedir [23].

İntegral denklemi ilk olarak 1900 yılında Eric İvar Fredholm (1866-1927) tarafından araştırılmıştır. Fredholm integral denklemleri sınır değer problemlerinden türetilmiştir. Erik İvar Fredholm spektral teori ve integral denklemleri üzerine en iyi çalışmaları yapan kişidir. Fredholm integral denklem sistemleri iki çeşit görünür.1.çeşit integral denklemleri [6,8,14,16,17] de incelenmiştir. Fredholm yaklaşım problemlerini incelemiş ve 1903'te bu konuda makalesini yayınlamıştır.

He [24-27] tarafından ortaya çıkarılan HPM pek çok matematikçi ve mühendis tarafından çeşitli fonksiyonel denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Bu metotda, çözüm gerçek çözüme hızlı bir şekilde yakınsayan sonsuz bir serinin toplamı olarak ele alınır. Topolojideki homotopi tekniğinin kullanılmasıyla, "küçük parametre" olarak adlandırılan $p \in [0,1]$ gömme parametresi ile bir homotopi, kurulur. Son zamanlarda pek çok bilimsel çalışma, lineer ve lineer olmayan bir denklem sınıfına bu metodun uygulanmasına yol göstermiştir. Bu metot He tarafından daha da geliştirilmiş ve ilerletilmiştir. Ayrıca bu metot, süreksizliğe sahip lineer olmayan salınıma [28], lineer olmayan dalga denklemlerine [6], sınır değer problemlerine [30],lineer olmayan problemlerin çatallanma ve sınır döngüsüne [31] ve bir çok diğer konulara [24-27] uygulanmıştır. Sonuç olarak He'nin homotopi perturbation metodu evrenseldir ve lineer olmayan çeşitli türden fonksiyonel denklemleri çözmek için kullanılabilir. Örneğin bu metot lineer olmayan Schrödinger denklemlerine [32], ısı transferinde ortaya çıkan lineer olmayan denklemlere [33], kuadratik Ricatti diferansiyel denkleme [34] ve diğer denklemelere [35-38] uygulanmıştır. [30]'de HPM ve homotopi analiz metodunun bir karşılaştırılması yapılmıştır.

Adomian ayrıştırma metodu 1980'li yıllarda George Adomian (1922-1996) tarafından bulunmuştur [3-5]. Bu metot, lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer yöntemlere göre daha basit ve daha karmaşık denklemlere uygulanabilen seri çözüm yöntemidir.

1992 yılında Adomian ve Rach, iterasyon sonucu elde edilen ilk iki terimde bulunan eşit fakat zıt işaretli terimleri " noise terms " olarak tanımlamışlar ve problemin çözümünün bazı durumlarda bu terimler sayesinde yalnız iki iterasyonla elde edilebildiğini göstermişlerdir [2].

1998 yılında Wazwaz, lineer ve lineer olmayan denklemlerde Taylor seri ve Adomian ayrıştırma metodu kullanmış ve ayrıştırma metodunun daha kolay uygulandığını ve birkaç iterasyonla güvenilir sonuçlar elde edildiğini göstermiştir [19].

2000 yılında Wazwaz, herhangi bir formüle gerek kalmadan cebirsel işlemler, trigonometrik özdeşlikler ve Taylor seri açılımından yararlanarak lineer olmayan terimler için Adomian polinomlarını hesaplamıştır [20].

2002 yılında Wazwaz, ayrıştırma metodunu kullanarak pek çok fiziksel olayı modelleyen lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünü vermiştir [21].

2003 yılında El-Sayed, Klein-Gordon denklemini Adomian ayrıştırma metodu ile çözmüş ve metodun diğer metotlara göre daha az hesaplama ile daha etkili sonuçlar elde ettiğini göstermiştir [10].

2004 yılında Babolian ve arkadaşları Adomian ayrıştırma metodunu lineer olmayan denklem sistemlerine uygulamışlardır [7].

Biz de bu çalışmamızda lineer olmayan Fredholm integral denklemlerinin çözümlerini Direkt Hesaplama Metodu, Seri Çözüm Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu ve Homotopi Perturbation Metodu ile inceleyeceğiz.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Tanım

İntegral denklemler, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun integral işareti altında göründüğü denklemler olarak tanımlanmaktadır. Bu bölümde integral denklemler genel özellikleri ile açıklanacak ve integral denklemlerin sınıflandırılması yapılacaktır.

2.2. İntegral Denklemlerin Genel Özellikleri

Standart bir integral deklemi formu şu şekildedir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{2.1}$$

Burada $g(x)$ ve $h(x)$ integralin sınırları, λ sabit bir parametre, $f(x)$ bilinen fonksiyon, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $K(x,t)$, x ve t değişkenlerinin bilinen bir fonksiyonudur ve integralin çekirdeği olarak adlandırılır. Ayrıca $g(x)$ ve h(x) hem değişken, hem sabit, hem de sabit ve değişken olabilir.

2.3. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklemler lineerliğe, bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu yere, homojenliğe ve sınırlarına göre sınıflandırılabilir.

2.3.1. Lineerliğe göre sınıflandırma

Eğer integral işaretinin içinde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun derecesi bir ise integral denkleme lineer integral denklem denir. Eğer, $u(x)$ bilinemeyen fonksiyonunun derecesi birden farklı veya denklem $u(x)$ 'in $e^u, \sinh(u), \cos(u), \ln(1+u)$ gibi lineer olmayan fonksiyonlarını içeriyorsa bu durumda integral denkleme lineer olmayan integral denklem denir. Örneğin;

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{2.2}$$

integral denklemi lineer integral denklemi ve

$$u(x) = 1 + \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt \tag{2.3}$$

integral denklemi lineer olmayan integral denklemdir.

2.3.2. Homojenliğe göre sınıflandırma

Eğer (2.1) integral denkleminde $f(x)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfır ise denklem homojen integral denklemi olarak adlandırılır. Eğer $f(x) \neq 0$ ise bu durumda denklem homojen olmayan integral denklemi olarak adlandırılır. Örneğin;

$$u(x) = \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt \tag{2.4}$$

integral denklemi homojen integral denklem ve

$$u(x) = \sin x + \int_0^x x.t.u(t)dt \tag{2.5}$$

integral denklemi homojen olmayan integral denklemidir.

2.3.3. İntegral sınırlarına göre sınıflandırma

Eğer (2.1) integral denkleminin sınırları sabit ise yani,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.6}$$

şeklinde ise integral denklem Fredholm integral denklemi olarak adlandırılır. Eğer (2.1) integral denkleminin sınırlarından en az biri değişken ise yani,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.7}$$

şeklinde ise integral denklem Volterra integral denklemi olarak adlandırılır.

2.3.4. $u(x)$ Bilinmeyen fonksiyonunun bulunduğu yere göre sınıflandırma

Eğer, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu sadece integral işaretinin altında görünüyorsa, integral denklemi birinci çeşit integral denklemi olarak adlandırılır. Eğer, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu integral işaretinin hem içinde hem dışında görünüyorsa, integral denklemi ikinci çeşit integral denklemi olarak adlandırılır.

3. MATERYAL-METOT

3.1. Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \tag{3.1}$$

şeklindeki integral denklemine 2. çeşit lineer olmayan Fredholm integral denklemi denir. Burada, $K(x,t)$ çekirdek, $f(x)$ reel değerli fonksiyon , λ bir parametre, a, b sabitler ve $F(u(x))$ ise, $\sin(u(x)), u^2(x), e^{u(x)}$ gibi $u(x)$ 'in lineer olmayan fonksiyonudur.

Bu bölümde ilk olarak dejenere (bozulmuş) yada ayrılabilir çekirdek kavramını vereceğiz. Ayrılabilir çekirdeğin standart formu

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f_i(t) \tag{3.2}$$

şeklindedir.

Lineer olmayan Fredholm integral denklemlerini ele almak için çeşitli analitik ve sayısal yöntemler kullanılmıştır. Bu çalışmada, direkt hesaplama metodu, seri çözüm metodu, Adomian ayrıştırma metodu ve homotopi perturbation metodunu kullacağız.

3.1. Teorem:(Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,u(t))dt \tag{3.3}$$

lineer olmayan integral denklemini ele alalım. Lineer olmayan integral denklemin teorisinden λ'nın önemli bir rol oynadığını biliyoruz. (3.3)'ün çözümünün varlığı için gerekli kriterler aşağıdaki gibidir.

(a) $a \le x \le b$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu sınırlıdır. Yani $|f(x)| < f$ dir.

(b) $D := \{(x,y,z) \,|\, a \le x, y \le b, |z| < c\}$ bölgesinde $K(x,y,z)$ çekirdeği integrallenebilir ve $K(x,y,z)$ sınırlıdır. Yani

$$\left|K(x,y,z)\right| < K \tag{3.4}$$

şeklindedir.

(c) D bölgesinde $K(x,y,z)$ çekirdeği Lipschitz koşulunu sağlar. Yani,

$$\left|K(x,y,z) - K(x,y,z')\right| < M\left|z - z'\right| \tag{3.5}$$

şeklindedir.

Ardışık yaklaşımları kullanarak ,

$$u_0(x) = f(x) - f(a),$$

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t,u_0(t))dt \tag{3.6}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse genel olarak,

$$u_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K[x,t,u_{n-1}(t)]dt$$

yazılabilir. Buradan,

$$u_1 - u_0 = \lambda\int_a^b K[x,t,u_0(t)]dt + f(a),$$

$$u_2 - u_1 = \lambda\int_a^b \{K[x,t,u_1(t)] - K[x,t,u_0(t)]\}dt,$$

…….

$$u_n - u_{n-1} = \lambda\int_a^b \{K[x,t,u_{n-1}(t)] - K[x,t,u_{n-2}(t)]\}dt,$$

elde edilir.

Yukarıda verilen koşullardan,

$$\left|u_1 - u_0\right| < \left|\lambda\right|K(b-a) + \left|f(a)\right| = \left|\lambda\right|(b-a)K[1 + \frac{f(a)}{\left|\lambda\right|K(b-a)}] = \left|\lambda\right|(b-a)m,$$

yazılabilir. Burada $m = K\{1 + \frac{f(a)}{\left|\lambda\right|K(b-a)}\}$ dır.

Bu eşitsizliklerden ve Lipschitz koşulundan,

$$|u_2 - u_1| < |\lambda| M \int_a^b |u_1 - u_0| dt < |\lambda|^2 M.m.(b-a)^2 < |\lambda|^2 .k^2.(b-a)^2$$

bulunur. Burada $k^2 > M.m$ dir.

Benzer şekilde,

$$|u_3 - u_2| < |\lambda|^3 k^3 (b-a)^3,$$

$$|u_n - u_{n-1}| < |\lambda|^n k^n (b-a)^n$$

elde edilir. O halde,

$$u(x) = u_0(x) + [u_1(x) - u_0(x)] + \ldots + [u_n(x) - u_{n-1}(x)] + \ldots, \tag{3.7}$$

serisi

$$U = f + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n k^n (b-a)^n$$

ifadesini sağlar ve bu seri

$$|\lambda| < \frac{1}{k(b-a)} \tag{3.8}$$

şartını sağlayan λ'nın tüm değerleri için düzgün yakınsaktır [9,13].

Tekil nokta ve çatallanmış nokta;

Lineer olmayan Fredholm integral denklemi bir λ parametresi içerdiğinde, denklemin λ'nın çözümüne bağlı olduğu açıktır ve λ'nın çatallanmış nokta olması mümkündür. Çatallanmış nokta, λ parametresinin bir değeridir. Yani λ_0, λ ile λ_0 arasında değiştiğinde o zaman reel çözümlerin sayısı da değişecektir. Bunu göstermek için,

$$u(x) = 3 + \lambda \int_0^1 u^2(t) dt \tag{3.9}$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım.

Bu denklemin çözümü,

$$u(x)=\frac{(1-2\lambda)\pm\sqrt{1-12\lambda}}{2\lambda} \tag{3.10}$$

şeklinde verilebilir.

Bu problemin çatallanma noktası $x_0=\frac{1}{12}$ dir.

$\lambda\leq\frac{1}{12}$ için lineer olmayan Fredholm integral denkleminin iki reel çözümü vardır, fakat $\lambda>\frac{1}{12}$ için reel çözüm yoktur. $\lambda_0=\frac{1}{12}$ çatallanma noktasındaki bu λ değişmesi sayıların ve çözümlerin yapısında değişikliğe neden olmuştur. Ancak $\lambda=0$ için, (3.9) denkleminde λ değerinin yerine yazılmasıyla $u(x)=3$ değerini elde ederiz.

(3.10) da $\lambda=0$ için $u(x)$ tanımsızdır. Buna göre $\lambda=0$ noktasına tekil nokta denir.

Lineer olmayan Fredholm integral denklemleri için aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

(i) Lineer olmayan denklemin çözümü tek olmayabilir yani birden fazla çözümü olabilir.

(ii) Çatallanma noktası ile ilgili olarak bir veya daha fazla çatallanma noktası olabilir. Bu da ileride örneklerle gösterilecektir.

3.1.1. Direkt hesaplama metodu

Bu kısımda, lineer olmayan Fredholm integral denklemlerini çözmek için direkt hesaplama metodu uygulanacaktır. Bu metot, lineer olmayan Fredholm integral denklemlerine doğrudan bir şekilde yaklaşır ve çözümü bir seri formunda değil, tam bir biçimde verir. Bu metot,

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n}g_k(x)h_k(t) \tag{3.11}$$

şeklindeki ayrılabilir çekirdekli denklemler için uygulanabilir. $x-t, xt^2, x^3-t^3, x^4t+xt^4, \ldots$

ifadeleri ayrılabilir çekirdeklere örnek olarak verilebilir.

Direkt hesaplama metodu aşağıdaki gibi uygulanır:

1-İlk olarak (3.11),

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \tag{3.12}$$

denkleminde yerine yazılır.

2-Buradan,

$$u(x) = f(x) + \lambda g_1(x)\int_a^b h_1(t)F(u(t))dt + \lambda g_2(x)\int_a^b h_2(t)F(u(t))dt + \ldots$$

$$+\lambda g_n(x)\int_a^b h_n(t)F(u(t))dt \tag{3.13}$$

3-(3.13) ün sağ tarafındaki her bir integral, sadece t değişkenine bağlıdır. Bu bir integralin bir sabite eşdeğer olduğu anlamına gelir. Buna dayanarak (3.13) denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda\alpha_1 g_1(x) + \lambda\alpha_2 g_2(x) + \ldots + \lambda\alpha_n g_n(x) \tag{3.14}$$

şeklinde olur.

Burada,

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt,\ 1 \le i \le n \tag{3.15}$$

şeklinde yazılabilir.

4- (3.14), (3.15) de yerine yazılırsa $1 \le i \le n$ olmak üzere α_i sabitlerine göre çözülecek n-tane denklem sistemi elde edilir. Elde edilen α_i sayısal değerleri (3.14) de yerine yazılırsa lineer olmayan Fredholm integral denkleminin $u(x)$ çözümü elde edilmiş olur.

Örnek 3.1. DHM'yi kullanarak aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözelim:

$$u(x) = a + \lambda \int_0^1 u^2(t)dt,\ a > 0 \tag{3.16}$$

Çözüm: İntegralin sınırları sabit olduğu için sağ taraftaki integral bir sabite eşdeğerdir. Sonuç olarak (3.16) i yeniden düzenlersek,

$$u(x) = a + \lambda\alpha \tag{3.17}$$

elde ederiz. Burada

$$\alpha = \int_0^1 u^2(t)dt \tag{3.18}$$

şeklindedir.

(3.17)'i (3.18) de yerine yazarsak

$$\alpha = \int_0^1 (a + \lambda\alpha)^2 dt \tag{3.19}$$

elde edilir.

$$\lambda^2\alpha^2 - (1 - 2a\lambda)\alpha + a^2 = 0 \tag{3.20}$$

denklemin çözümü

$$\alpha = \frac{(1 - 2a\lambda) \pm \sqrt{1 - 4a\lambda}}{2\lambda^2} \tag{3.21}$$

şeklindedir.

(3.21) eşitliği (3.17) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a\lambda}}{2\lambda} \tag{3.22}$$

çözümü elde edilir.

Şimdi aşağıdaki 3 durumu inceleyelim:

1. (3.16) da $\lambda = 0$ yazılırsa $u(x) = a$ olur. Ancak $\lambda = 0$ (3.22) ifadesini tanımsız yaptığı için $\lambda = 0$ noktası (3.16) denkleminin tekil noktası olarak adlandırılır.

2. (3.22) denkleminde $\lambda = \dfrac{1}{4a}$ için $u(x) = 2a$ şeklinde tek çözüm vardır.

Bu nedenle $\lambda = \dfrac{1}{4a}$ noktası denklemin çatallanma noktasıdır.

Buda gösteriyor ki ;

$\lambda < \dfrac{1}{4a}$ için (3.22) de iki reel çözüm vardır fakat ,

$\lambda > \dfrac{1}{4a}$ için (3.22) de reel çözüm yoktur.

3. $\lambda < \dfrac{1}{4a}$ için (3.22) de ki denklem iki reel çözüm verir.

Örnek 3.2. DHM'yi kullanarak aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözelim:

$$u(x) = \frac{9}{5}x + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2.u^2(t)dt \tag{3.23}$$

Çözüm : (3.23) ifadesini düzenleyip yeniden yazalım. Yani,

$$u(x) = (\frac{9}{5} + \frac{1}{3}\alpha)x \tag{3.24}$$

ve

$$\alpha = \int_{-1}^{1} t^2u^2(t)dt \tag{3.25}$$

şeklindedir.

(3.24) ifadesinden yararlanarak $u(t)$ yi elde edip (3.25) de yerine yazarsak,

$$u(t) = \int_{-1}^{1} (\frac{9}{5} + \frac{1}{3}\alpha)^2 t^4 dt \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.26)'nın integrali alınırsa

$$\alpha = \frac{18}{5}, \frac{81}{10} \tag{3.27}$$

elde edilir. Bulunan α değerleri (3.24) de yerine yazılırsa,

$$u(x) = 3x \quad \text{ve} \quad u(x) = \frac{9}{2}x \tag{3.28}$$

bulunur.

3.1.2. Seri çözüm metodu

Bu bölümde lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözmek için seri çözüm metodunu uygulayacağız. Bunun için, x = 0 noktası civarında Taylor serisinin genel formu,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.29}$$

şeklinde verilebilir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)F(u(t))dt \tag{3.30}$$

lineer olmayan Fredholm integral denkleminin $u(x)$ çözümünün var ve analitik olduğunu kabul edelim.

(3.29) eşitliği (3.30) denkleminin her iki tarafında yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \int_0^1 K(x,t)F(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)dt \tag{3.31}$$

veya

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = T(f(x)) + \int_0^1 K(x,t)F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)dt \tag{3.32}$$

şeklinde elde edilir. Burada $T(f(x)), f(x)$ için Taylor serisidir.

(3.30) daki integral denklemi (3.31) ya da (3.32) de geleneksel bir integrale dönüştürülecektir. Burada lineer olmayan $F(u(x))$ terimini integrallemek yerine, $t^n (n \geq 0)$

ifadeleri integrallenecektir. Eğer $f(x)$, trigonometrik fonksiyonlar ve üstel fonksiyonlar gibi temel fonksiyonları içeriyorsa, $f(x)$ fonksiyonları için Taylor açılımları kullanılabilir. Önceki bölümlerde olduğu gibi biz öncelikle (3.31) ya da (3.32) deki ifadenin sağ tarafındaki integrali alacağız ve aynı dereceye sahip x'in katsayılarını düzenleyeceğiz. Daha sonra $a_j(j \geq 0)$ de bir tekrarlama bağıntısı oluşturabilebilmek için elde edilen denklemin her iki tarafındaki aynı dereceye sahip x'in katsayılarını eşitleyeceğiz. a_j ler için tekrarlama bağıntısının çözülmesi ile katsayılar belirlenecektir. $a_j(j \geq 0)$ katsayıları belirlendikten sonra, elde edilen katsayıların (3.29) da yerine yazılmasıyla seri çözüm elde edilir. Tam bir çözüm elde edilemezse, oluşan serinin belirli bir yerde kesilmesiyle sayısal sonuçlar bulunabilir. Bu durumda aldığımız daha fazla terim, elde ettiğimiz daha yüksek doğruluk seviyesidir.

Örnek 3.3. SÇM'yi kullanarak aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözelim:

$$u(x) = 2 - \frac{41}{45}x + \frac{76}{945}x^2 - x^3 + \frac{1}{48}\int_{-1}^{1}(xt - x^2t^2)u^2(t)dt \tag{3.33}$$

Çözüm : (3.29) numaralı seri formunu kullanarak (3.33) de yerine yazalım.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = 2 - \frac{41}{45}x + \frac{76}{945}x^2 - x^3$$

$$+\frac{1}{48}\int_{-1}^{1}(xt^2 - x^2t^2)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots)^2 dt \tag{3.34}$$

şeklindedir. Buradan integral alınır ve işlemler yapılırsa,

$a_0 = 2;2$ $\quad a_1 = -1;0,2924553739$, $a_2 = 0;-173,622619$

$$a_3 = -1;-1, \quad n \geq 4 \text{ için } a_n = 0 \tag{3.35}$$

katsayıları elde edilir. Buradan da

$$u(x) = 2 - x - x^3 \quad \text{ve} \quad u(x) = 2 + 0,2924553739x - 173,6222619x^2 - x^3 \tag{3.36}$$

şeklindedir.

Örnek 3.4. SÇM'yi kullanarak aşağıda verilen lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözelim:

$$u(x) = 1 + \frac{7159}{7560}x + \frac{2309}{2160}x^2 + \frac{1}{36}\int_0^1 (xt^2 - x^2t)u^2(t)dt \tag{3.37}$$

Çözüm : (3.29) numaralı seri formunu kullanarak (3.37)'nin her iki tarafına yazalım

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = 1 + \frac{7159}{7560}x + \frac{2309}{2160}x^2 +$$

$$+\frac{1}{36}\int_0^1 (xt^2 - x^2t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + ...)dt \tag{3.38}$$

Sağ tarafın integrali alınır, x'ler bir araya toplanır, her iki tarafta da benzer katsayılar eşitlenirse,

$a_0 = 1;1$, $a_1 = 1;3611,190273$,

$$a_2 = 1;-4848,332424 \text{ , } n \geq 3 \text{ için } a_n = 0 \tag{3.39}$$

elde edilir. Tam çözüm,

$$u(x) = 1 + x + x^2 \quad \text{ve} \quad u(x) = 1 + 3611,190273x - 4848,332424x^2 \tag{3.40}$$

şeklinde bulunur.

3.1.3. Adomian ayrıştırma metodu

Bu bölümde, lineer olmayan Fredholm integral denklemine Adomian ayrıştırma metodu uygulanacaktır. Lineer $u(x)$ fonksiyonu sonsuz sayıda bileşenle temsil edilse de, denklemde görülen $\sin u, u^2, u^3, e^u$ gibi lineer olmayan terimler, Adomian polinomları olarak adlandırılan A_n , $n \geq 0$ ile ifade edilebilir. Aşağıda lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözmek için Adomian ayrıştırma metodunun nasıl kullanıldığını vereceğiz.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \quad (3.41)$$

denklemini ele alalım. Burada , $F(u(t))$, $u(t)$'nin lineer olmayan fonksiyonudur. (3.41) deki lineer $u(x)$ terimi,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (3.42)$$

ayrıştırma serisi ile temsil edilebilir. Burada, $u_n(x)$, $n \geq 0$ bileşenleri aşağıda verilen tekrarlama bağıntısı ile kolayca hesaplanabilir. Lineer olmayan $F(u(x))$ terimini, aşağıda verilen Adomian polinomları olarak adlandırılan A_n algoritması temsil edecektir.

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [F(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i)],\ n = 0,1,2,3,... \quad (3.43)$$

(3.43) ve (3.44), (3.42) de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t))dt \quad (3.44)$$

elde edilir.

$u_0(x), u_1(x),...,$ bileşenlerini belirlemek için, aşağıdaki 2. çeşit lineer olmayan Fredholm integral denkleminin tekrarlama bağıntısını kullanırız.

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)A_0(t)dt$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)A_1(t)dt \quad (3.45)$$

.

.

.

$$u_{n+1}(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)A_n(t)dt$$

şeklindedir.

Bileşenleri belirledikten sonra, seri formdaki çözüm kolayca elde edilebilir. Elde edilen seri çözüm, böyle bir çözümün var olması durumunda tam çözüme yakınsayabilir, aksi halde seri, sayısal sonuçlar için kullanılabilir.

Örnek 3.5. Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözelim.

$$u(x)=a+\lambda\int_0^1 u^2(t)dt,a \tag{3.46}$$

Çözüm: Lineer olmayan $u^2(x)$ terimi için Adomian polinomları,

$$A_0(x)=u_0^2(x),$$

$$A_1(x)=2u_0(x)u_1(x), \tag{3.47}$$

$$A_2(x)=2u_0(x)u_2(x)+u_1^2(x),$$

.

.

.

şeklinde elde edilir.

(3.42)' deki seri ve (3.47)'deki Adomian polinomları (3.46) da yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=a+\lambda\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)dt \tag{3.48}$$

şeklinde elde edilir.

Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak,

$$u_0(x)=a,$$

$$u_{k+1}(x) = \lambda \int_0^1 A_k(t)dt, t \geq 0 \tag{3.49}$$

ifadeleri bulunur. Yani,

$$u_0(x) = a,$$

$$u_1(x) = \lambda \int_0^1 u_0^2(t)dt = \lambda\alpha^2,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_0^1 (2u_0(t)u_1(t))dt = 2\lambda^2\alpha^3, \tag{3.50}$$

$$u_3(x) = \lambda \int_0^1 (2u_0(t)u_2(t) + u_1^2(t))dt = 5\lambda^3\alpha^4,$$

.

.

.

bileşenleri elde edilir.

O halde seri formda çözüm aşağıdaki gibi verilebilir.

$$u(x) = a + \lambda\alpha^2 + 2\lambda^2\alpha^3 + 5\lambda^3\alpha^4 + \ldots \tag{3.51}$$

Bu seri de,

$$u(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a\lambda}}{2\lambda}, \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{4a}$$

tam çözümüne yakınsar.

3.1.4. Homotopi perturbation metodu

<u>He'nin Homotopi perturbation metodunun ana fikri</u>

Bu metodun temel fikirlerini göstermek için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemini inceleyelim.

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega \tag{3.52}$$

diferansiyel denklemi

$$B\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)=0, r\in\Gamma, \tag{3.53}$$

sınır şartlarına göre ele alınsın.

A genel diferansiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ ise Ω tanım kümesinin sınırıdır.

A genel diferansiyel operatörü L ve N olarak iki parçaya ayrılabilir. Burada L lineer, N lineer olmayan operatördür. Dolayısıyla (3.52) denklemi

$$L(u)+N(u)-f(r)=0 \tag{3.54}$$

şeklindedir.

Homotopi tekniğinin kullanılmasıyla,

$$H(U,p)=(1-p)\left[L(u)-L(u_0)\right]+p\left[A(u)-f(r)\right]=0\,, p\in[0,1]\,, r\in\Omega \tag{3.55}$$

veya

$$H(U,p)=L(U)-L(u_0)+PL(u_0)+p[N(U)-f(r)]=0 \tag{3.56}$$

ifadelerini sağlayan

$U(r,p):\Omega\times[0,1]\to R$ şeklinde bir homotopi kuralım.

Burada $p\in[0,1]$ bir gömme parametresi ve u_0 da sınır koşullarını sağlayan (3.52) denkleminin başlangıç koşuludur. (3.55) ve (3.56) denklemlerinden,

$$H(U,0)=L(U)-L(u_0)=0\,, \tag{3.57}$$

$$H(U,1)=A(U)-f(r)=0, \tag{3.58}$$

ifadeleri yazılabilir.

p, 0'dan 1'e değişirken, $U(r,p)$ de $u_0(r)$'den $u(r)$'ye değişir. Topolojide buna homotopi denir. HPM'ye göre ilk olarak p gömme parametresini küçük bir parametre olarak alırız ve (3.55) ve (3.56) denklemlerinin çözümünün p-nin bir kuvvet serisi şeklinde olduğunu kabul ederiz. Yani,

$$U=U_0+pU_1+p^2U_2+\ldots \tag{3.59}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$p=1$ alırsak (3.56) denkleminin yaklaşık çözümü;

$$u=\lim_{p\to 1} U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots \tag{3.60}$$

şeklinde bulunur.

Perturbation metodu ve homotopi metodunun birleşimi, geleneksel perturbation metodunun sınırlandırılmasını ortadan kaldıran homotopi perturbation metodu olarak adlandırılmaktadır. Diğer taraftan, bu metot geleneksel perturbation metotlarından daha avantajlıdır. (3.60)'daki seri çoğu durum için yakınsaktır. Ancak yakınsaklık oranı $A(u)$ lineer olmayan operatörüne bağlıdır. Aşağıdaki ifadeler He tarafından önerilmektedir [24].

(1) $N(U)$'nun U'ya göre ikinci türevi küçük olmalıdır. Çünkü p parametresi nispeten büyük olabilir. Yani $p\to 1$'dir.

(2) $L^{-1}\dfrac{\partial N}{\partial V}$ 'nin normu seri yakınsak olsun diye 1'den daha küçüktür.

<u>Çözüm metodu</u>

Bu bölümde lineer olmayan Fredholm integral denklemini çözmek için homotopi perturbation metodunu verelim. Bunun için,

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\big(u(t)\big)^n dt,\ \ x\in[a,b],\ n\in N,\ n\geq 2 \tag{3.61}$$

denklemini ele alalım. Bu denklem için $\lambda\in R$, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu $[a,b]\times[a,b]$ bölgesinde ve $f(x)$ bilinen fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında sürekli olsun.

(3.61) denklemini çözmek için aşağıdaki gibi bir homotopi kuralım.

$$(1-p)\big(v(x)-u_0(x)\big)+p\left(v(x)-f(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\big(v(t)\big)^n dt\right)=0 \tag{3.62}$$

Kabul edelim ki (3.62) denkleminin,

$$v(x)=v_0(x)+pv_1(x)+p^2v_2(x)+\dots \tag{3.63}$$

şeklinde bir çözümü olsun.

Burada $v_i(x)$, $i = 1,2,...$ fonksiyonları henüz belirlenmemiş fonksiyonlardır. $v_0(x)$ veya $u_0(x)$ başlangıç yaklaşımı istenilen şekilde seçilebilir. Burada

$$v_0(x) = u_0(x) = f(x) \tag{3.64}$$

olarak alalım.

(3.63) serisi (3.62)'de yerine yazılır, katsayılar düzenlenir ve p'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlenirse $j \geq 1$ olmak üzere;

$$p^0 : v_0(x) - u_0(x) = 0$$

$$p^1 : v_1(x) + u_0(x) - f(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\left(v_0(t)\right)^n dt = 0$$

$$p^2 : \begin{cases} v_2(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)(2v_0v_1)dt = 0, n = 2 \\ v_2(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\left((3v_0)^2 v_1\right)dt = 0, n = 3 \\ v_2(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\left(4(v_0)^3 v_1\right)dt = 0, n = 4 \\ \ldots \end{cases}$$

…

$$p^j : \begin{cases} v_j(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\sum_{r=0}^{j-1}\left(v_k v_{j-k-1}\right)dt = 0 \\ v_j(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-r}\left(v_i v_k v_{j-k-i-1}\right)dt = 0 \\ v_j(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}\sum_{l=0}^{j-i-k-1}\left(v_i v_k v_l v_{j-l-k-i-1}\right)dt = 0, \\ \ldots \end{cases}$$

…

elde edilir.

(3.61) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u(x)=\lim_{p\to 1} v(x)=\sum_{j=0}^{\infty} v_j(x) \tag{3.65}$$

olarak bulunur.

3.2. Teorem: Adomian ayrıştırma metodu

$$H(u,p)=u(x)-f(x)-p\int_a^b K(x,t).u_n(t)dt=0$$

konveks homotopisi ile bir homotopi perturbation metodudur [22].

Örnek 3.6. Aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denklemini HPM'yi kullanarak çözelim:

$$u(x)=\sin(\pi x)+\frac{1}{5}\int_0^1 \cos(\pi x)\sin(\pi t)(u(t))^3\,dt, \quad x\in[0,1]$$

Bu integral denkleminin tam çözümü

$$u(x)=\sin(\pi x)+\frac{20-\sqrt{391}}{3}\cos(\pi x)$$

şeklindedir.

$\Omega\times[0,1]\to R$ 'ye oluşturacağımız homotopi aşağıdaki gibidir.

$$(1-p)(v(x)-u_0(x))+p\left(\sin(\pi x)-\frac{1}{5}\int_0^1 \cos(\pi x)\sin(\pi t)(v(t))^3\,dt\right)=0 \tag{3.66}$$

Burada

$$v(x)=v_0(x)+pv_1(x)+p^2v_2(x)+\ldots \tag{3.67}$$

ve başlangıç şartı

$$v_0(x)=u_0(x)=\sin(\pi x)$$

şeklindedir.

$$v_j(x)=\frac{1}{5}\int_0^1 \cos(\pi x)\sin(\pi t)\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}\left(v_i(t)v_k(t).v_{j-k-i-1}(t)\right)dt, j=1,2,3,... \quad (3.68)$$

denklemini elde ederiz. (3.68) denklemini kullanarak $V_i^* = \sum_{j=0}^{i} V_j$ ifadesinin yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi olur.

$v_1^* = 0{,}07500000000000000000\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$,
$v_2^* = 0{,}07499849203526276869\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$,
$v_3^* = 0{,}07542069301644733481 3\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$,
$v_4^* = 0{,}07542074958902678648 6\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$,
$v_5^* = 0{,}07542549914261694297 9\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$,
...

O halde $u(x) \approx v_5^*$ olur. Bu örnekle ilgili bazı sayısal sonuçları Çizelge 3.1'de sunulmaktadır.

Çizelge 3.1. Örnek 3.6 için HPM'nin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar

Örnek 3.6 İçin Sayısal Sonuçlar / Çizelge 3.1			
N=5			
x_i	$u(x)$	$u_{HPM}(x)$	$\lvert u(x)-u_{HPM}(x)\rvert$
0,0	0,754266889049371628E-1	0,754425499142616942979E-1	1,1897623202198E-6
0,1	0,380752038360555273 90	0,380750906829347786 52	1,1315312074873E-6
0,2	0,648806725544599958698	0,648805762908063262 29	9,6253793632469E-7
0,3	0,853351689742521798 04	0,853350990417776239 63	6,99324474555841E-7
0,4	0,974364644996211448 60	0,974364277339435233 75	3,6565677621485E-7
0,5	1	1	0
0,6	0,927748387594095695 63	0,927748755250871910 48	3,6765677621485E-7
0,7	0,764682299007373050 13	0,764682998332118608 53	6,9932474555840E-7
0,8	0,526763779138946671 33	0,526764741676882996 02	9,6253793632469E-7
0,9	0,237281950389339574 33	0,237283081920547061 71	1,1315312074873E-6
1,0	-0,754266889049371629E-1	-0,754254991426169430 16E-1	1, 1897623202197E-6

Örnek 3.7. Tam çözümü $x.\ln(x+1)$ olan aşağıdaki denklemi göz önünde bulunduralım:

$$u(x)=x\ln x-\frac{53}{108}x+\frac{1}{3}\ln 2\left(\frac{8}{3}x+2-x\ln 2\right)-\frac{241}{576}+\frac{1}{2}\int_0^1 (x-t)\left(u(t)\right)^2 dt,\ x\in[0,1]$$

Bu denklemi çözmek için aşağıdaki konveks homotopiyi kuralım:

$$(1-p)\left(v_0(x)-u_0(x)\right)+p\left(\begin{array}{l} v(x)-x\ln x+\dfrac{53}{108}x-\dfrac{1}{3}\ln 2\left(\dfrac{8}{3}x+2-x\ln 2\right) \\ \quad+\dfrac{241}{576}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (x-t)\left(v(t)\right)^2 dt \end{array}\right)=0 \tag{3.69}$$

(3.69) numaralı denklemin çözümü,

$$v(x)=v_0(x)+pv_1(x)+p^2v_2(x)+\ldots \tag{3.70}$$

şeklindedir. Başlangıç koşulunu,

$$v_0(x)=x\ln x-\frac{53}{108}x+\frac{1}{3}\ln 2\left(\frac{8}{3}x+2-x\ln 2\right)-\frac{241}{576}$$

şeklinde alalım.

(3.70)'i (3.69)'da yerine yazar ve p'nin aynı kuvvetlerini eşitlersek,

$$v_j(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 (x-t)\sum_{k=0}^{j-1}\left(v_k(t)v_{j-k-1}(t)\right)dt,\ j=1,2,3,\ldots. \tag{3.71}$$

denklemini elde ederiz. (3.71) denklemini kullanarak,

$V_i^*=\sum_{j=0}^{i} V_j$ ifadesinin yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$v_1^*=1{,}3670778747472905\times10^{-3}x-3{,}4015961796285688\times10^{-4}+x\ln(x+1),$$
$$v_2^*=-9{,}69991132410618\times10^{-5}x-8{,}0842064077807505\times10^{-5}+x\ln(x+1),$$
$$v_3^*=-3{,}95147178266119\times10^{-5}x+2{,}9702104910894865\times10^{-5}+x\ln(x+1),$$
$$v_4^*=2{,}0702585390001\times10^{-6}x-8{,}2836727360052977600\times10^{-8}+x\ln(x+1),$$
$$v_5^*=8{,}600785466824\times10^{-8}x-2{,}667965855283617446\times10^{-8}+x\ln(x+1),$$

...

O halde, $u(x) \approx v_5^*$ olur. Bu örnekle ilgili bazı sayısal sonuçlar Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Örnek 3.7 için HPM'nin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar

Örnek 3.7 İçin Sayısal Sonuçlar / Çizelge 3.2			
N=5			
x_i	$u(x)$	$u_{HPM}(x)$	$\lvert u(x) - u_{HPM}(x) \rvert$
0,0	0	-0,2667965855283617446E-6	2,6679658552836E-7
0,1	0,95310179804324860044E-2	0,5307597846324244667E-2	2,5819580006154E-7
0,2	0,36464311358790925242E-1	0,6464061763776330528E-1	2,4959501459471E-7
0,3	0,78709279340247315612E-1	0,8709038346018187722E-1	2,4099422912789E-7
0,4	0,13458889464848517220	0,3458866225504151113	2,3239344366107E-7
0,5	0,20273255405408219099	0,0273233026142399675	2,2379265819424E-7
0,6	0,28200217754744133219	0,28200196235556860477	2,1519187272742E-7
0,7	0,37143977574351927736	0,37143956915243201677	2,0659108726059E-7
0,8	0,47022933192169530655	0,47022913393139341278	1,9799030179377E-7
0,9	0,57766849755515529839	0,57766830816563897144	1,8938951632695E-7
1,0	0,69314718055994530942	0,63914699977121444930	1,8078873086012E-7

4. BULGULAR

Örnek 4.1. $u(x)=\frac{9}{5}x+\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} xt^2u^2(t)dt$ (4.1)

denklemini Direkt Hesaplama Metodu, Seri Çözüm Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu ve Homotopi Perturbation Metodu ile çözelim.

Direkt hesaplama metodu;

(4.1) ifadesini düzenleyip yeniden yazarsak,

$$u(x)=(\frac{9}{5}+\frac{1}{3}\alpha)x \tag{4.2}$$

şeklindedir. Burada

$$\alpha=\int_{-1}^{1} t^2u^2(t)dt \tag{4.3}$$

şeklinde alabiliriz.

(4.2) ifadesinden yararlanarak $u(t)$ yi elde edip (4.3) de yerine yazalım:

$$\alpha=\int_{-1}^{1} (\frac{9}{5}+\frac{1}{3}\alpha)^2t^4dt \tag{4.4}$$

(4.4) ün integrali alınırsa

$$\alpha=\frac{18}{5},\frac{81}{10} \tag{4.5}$$

bulunur.

Bulunan α değerleri (4.2) de yerine yazılırsa

$$u(x)=3x \qquad \text{ve} \qquad u(x)=\frac{9}{2}x \tag{4.6}$$

şeklinde tam çözüme ulaşılır.

Seri çözüm metodu;

$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seri formunu kullanarak bu ifadeyi (4.1) de yerine yazalım. O halde,

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=\frac{9}{5}x+\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2(a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots)^2 dt \tag{4.7}$$

ifadesi elde edilir ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$a_0=0, \qquad a_1=3,\frac{9}{2} \qquad n\geq 2 \text{ için } a_n=0 \tag{4.8}$$

bulunur.

O halde tam çözüm,

$$u(x)=3x \text{ ve } u(x)=\frac{9}{2}x \tag{4.9}$$

şeklindedir.

Adomian ayrıştırma metodu;

Lineer olmayan $u^2(t)$ terimi için Adomian polinomları

$$A_0(x)=u_0{}^2(x),$$

$$A_1(x)=2u_0(x)u_1(x), \tag{4.10}$$

$$A_2(x)=2u_0(x)u_2(x)+u_1{}^2(x),$$

.

.

.

şeklinde elde edilir.

Seri formu ve (4.7)'deki Adomian polinomları (4.1)'de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)=\frac{9}{5}x+\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)dt \tag{4.11}$$

elde edilir.

Belirlediğimiz Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak,

$$u_0(x)=\frac{9}{5}x$$

$$u_{k+1}(x)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2 A_k(t)dt \tag{4.12}$$

ifadeleri bulunabilir. Yani,

$$u_0(x)=\frac{9}{5}x$$

$$u_1(x)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2 u_0{}^2(t)dt=(\frac{9}{5})^2(\frac{1}{3})(\frac{2}{5})x \tag{4.13}$$

$$u_2(x)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2(2u_0(t)u_1(t))dt=(\frac{9}{5})^3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{5})^2 2x$$

.

.

.

ifadeleri elde edilir.

Seri formda çözüm,

$$u(x)=1,8x+0,432x+0,20736x+0,124416x+\ldots$$

$$\Rightarrow u(x)=2,7504x+\ldots$$

$$\Rightarrow u(x)\cong 3x \tag{4.14}$$

şeklindedir.

Homotopi perturbation metodu ;

Ele alınan integral denklemi için homotopi denklemi,

$$H(u,p)=u(x)-\frac{9}{5}x-p\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} xt^2u(t)^2dt=0 \tag{4.15}$$

şeklinde oluşturulur.

$$v(x)=v_o(x)+pv_1(x)+p^2v_2(x)+\ldots \tag{4.16}$$

serisi (4.12) denkleminde yerine yazılır, p'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlenir ve başlangıç şartı da

$$v_0(x)=u_0(x)=f(x)=\frac{9}{5}x \tag{4.17}$$

olarak alınırsa,

$$p^0: v_0(x)=u_0(x)=f(x)=\frac{9}{5}x$$

$$p^1: v_1(x)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2(v_0(t))^2dt$$

$$\Rightarrow v_1(x)=(\frac{9}{5})^2(\frac{1}{3})(\frac{2}{5})x$$

$$p^2: v_2(x)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2(2v_0(t)v_1(t))dt$$

$$\Rightarrow v_2(x)=(\frac{9}{5})^3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{5})^2 2x$$

$$p^3: v_3(x)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2(2v_0(t)v_2(t)+v_1(t)^2)dt$$

$$\Rightarrow v_3(x)=(\frac{9}{5})^4(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{5})^3 5x$$

$$p^4: v_4(x)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2(2v_0(t)v_3(t)+2v_1(t)v_2(t))dt \tag{4.18}$$

$$\Rightarrow v_4(x)=(\frac{9}{5})^5(\frac{2}{5})^4(\frac{1}{3})^4 14x$$

$$p^5: v_5(x)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x.t^2(2v_0(t)v_4(t)+2v_1(t)v_3(t)+v_2(t)^2)dt$$

$$\Rightarrow v_5(x)=(\frac{9}{5})^6(\frac{2}{5})^5(\frac{1}{3})^5 42x$$

.

.

.

elde edilir. O halde,

$$u(x)=\lim_{p\to 1}\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_j(x)$$

ifadesinden,

$$u(x)=v_0(x)+v_1(x)+v_2(x)+\dots \qquad (4.19)$$

elde edilir.

$$\Rightarrow u(x)=1{,}8x+0{,}432x+0{,}20736x+\dots$$

$$\Rightarrow u(x)\cong 3x \qquad (4.20)$$

şeklinde bulunur.

O halde, Örnek 4.1 için HPM ve AAM'nin uygulanması sonucu elde edilen sayısal sonuçlar ve oluşan hatalar aşağıdaki çizelgede gösterilebilir.

Çizelge 4.1. Örnek 4.1 için HPM ve AAM'nin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar

Örnek 4.1 için HPM ve AAM'nin uygulanması sonucu oluşan hatalar / Çizelge 4.1					
x_i	$u(x)$	$u_{AAM}(x)$	$u_{HPM}(x)$	$\lvert u(x)-u_{AAM}(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_{HPM}(x)\rvert$
0,0	0,0	0	0	0	0
0,1	0,3	0,2563806	0,2563806	0,0436194	0,0436194
0,2	0,6	0,5127612	0,5127612	0,0872388	0,0872388
0,3	0,9	0,7691418	0,7691418	0,1308582	0,1308582
0,4	1,2	1,0255224	1,0255224	0,1744776	0,1744776
0,5	1,5	1,281903	1,281903	0,218097	0,218097
0,6	1,8	1,5382836	1,5382836	0,2617164	0,2617164
0,7	2,1	1,7946642	1,7946642	0,3053358	0,3053358
0,8	2,4	2,0510448	2,0510448	0,3489552	0,3489552
0,9	2,7	2,3074254	2,3074254	0,3925746	0,3925746
1,0	3	2,563806	2,563806	0,436194	0,436194

Örnek 4.2. $u(x)=2-\frac{41}{45}x+\frac{76}{945}x^2-x^3+\frac{1}{48}\int_{-1}^{1}(xt-x^2t^2)u(t)^2dt$ (4.21)

denklemini SÇM ve HPM ile çözelim:

Seri çözüm metodu;

$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.x^n$ seri formunu (4.21) de yerine yazalım.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...=2-\frac{41}{45}x+\frac{76}{945}x^2-x^3$$
$$+\frac{1}{48}\int_{-1}^{1}(xt-x^2t^2)(a_0+a_1t+a_2t^2+...)^2dt \quad (4.22)$$

şeklindedir. Buradan integral alınır ve işlemler yapılırsa,

$a_0=2;2$, $a_1=-1;0,2924553739$, $a_2=0;-173,6222619$

$a_3=-1;-1$, $n\geq 4$ için $a_n=0$ (4.23)

katsayıları elde edilir. Buradan da çözüm,

$u(x)=2-x-x^2$ ve $u(x)=2+0,2924553739x-173,6222619x^2-x^3$ (4.24)

şeklinde bulunur.

Homotopi perturbation metodu;

Ele alınan integral denklemi için homotopi denklemi,

$$H(u,p)=u(x)-(2-\frac{41}{45}x+\frac{76}{945}x^2-x^3)-p\frac{1}{48}\int_{-1}^{1}(xt-x^2t^2)u(t)^2dt=0 \quad (4.25)$$

şeklinde oluşturulur.

$$v(x)=v_0(x)+pv_1(x)+p^2v_2(x)+... \quad (4.26)$$

serisi (4.21) denkleminde yerine yazılır, p'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlenir ve başlangıç şartı da

$$v_0(x)=u_0(x)=f(x)=2-\frac{41}{45}x+\frac{76}{945}x^2-x^3 \quad (4.27)$$

olarak alınırsa,

$$p^1 = v_1(x) = \frac{1}{48}\int_{-1}^{1}(xt - x^2t^2)(v_0(t)^2)dt \qquad (4.28)$$

$$\Rightarrow v_1(x) = -0{,}08612927x - 0{,}08078549x^2$$

$$p^2 : v_2(x) = \frac{1}{48}\int_{-1}^{1}(xt - x^2t^2)(2v_0(t)v_1(t))dt$$

$$\Rightarrow v_2(x) = -0{,}003667366x + 0{,}00044259x^2$$

.

.

.

elde edilir. O halde

$$u(x) = \lim_{p\to 1}\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa,

$$u(x) = v_0(x) + v_1(x) + v_2(x) + \ldots \qquad (4.29)$$

bulunur. O halde çözüm,

$$\Rightarrow u(x) = 2 - 0{,}91111111x + 0{,}08042328x^2 - x^3 - 0{,}08612927x - 0{,}08078549x^2$$
$$-0{,}00367366x + 0{,}00044259x^2$$

$$u(x) \cong 2 - x - x^3 \qquad (4.30)$$

şeklinde bulunur.

O halde Örnek 4.2 için HPM ve SÇM'nin uygulanması sonucu elde edilen sayısal sonuçlar ve oluşan hatalar aşağıdaki çizelgede gösterilebilir.

Çizelge 4.2. Örnek 4.2 için HPM ve SÇM'nin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar

Örnek 4.2 için HPM ve SÇM'nin uygulanması sonucu oluşan hatalar / Çizelge 4.2					
x_i	$u(x)$	$u_{SÇM}(x)$	$u_{HPM}(x)$	$\lvert u(x) - u_{SÇM}(x)\rvert$	$\lvert u(x) - u_{HPM}(x)\rvert$
0,0	2	2	2	0	0
0,1	1,899	1,9	1,8989078	0,001	0,0000922
0,2	1,792	1,8	1,79181399	0,008	0,00018601
0,3	1,673	1,7	1,67271858	0,027	0,00028142
0,4	1,536	1,6	1,53562156	0,064	0,00037844
0,5	1,375	1,5	1,37452296	0,125	0,00047704
0.6	1,184	1,4	1,18342274	0,216	0,00057726
0,7	0,957	1,3	0,95632092	0,343	0,00067908
0,8	0,688	1,2	0,68721751	0,512	0,00078249
0,9	0,371	1,1	0,37011248	0,729	0,00088752
1,0	0	1	-0,00099414	1	0,00099414

5. SONUÇ

Bu tezde 2. çeşit lineer olmayan Fredholm integral denkleminin çözümlerini bulmak için çeşitli metotlar uygulanmıştır. Metodun kararlılığını göstermek için x değerlerine bağlı olarak ele alınan metotlardan elde edilen sonuçlar tablo halinde sunulmuştur.

Homotopi Perturbation Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu ve Seri Çözüm Metodu ile elde edilen yaklaşık çözümler tam çözümlerle karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak He'nin Homotopi Perturbation Metodu ele alınan problemler için diğer metotlara göre daha güçlü ve etkili bir metottur.

KAYNAKLAR

1. Adomian, G. (1986). *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. San Diego: Academic Press, 286.

2. Adomian, G. and Rach, R. (1992). Noise terms in decomposition series. *Appl*. *Math. Comput*, 24 (11), 61-64.

3. Adomian, G. (1986). *Nonlinear Sthochastic Operator Equations*. New York: Academic Press, 215.

4. Adomian, G. (1998). A review of the decomposition method in applied mathematics. *J.Math.Anal*. *Appl*., 135, 501-544.

5. Adomian, G. (1988). An adaptation of the deco mposition method for a symtotic solutions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 30, 325-329.

6. Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Wong, P. (2004). Eigenvalues of a system of Fredholm integral equations. *Math. Comput. Modelling*, 39, 1113–1150.

7. Babolian, E., Biazar, J. and Vahidi, A. R. (2004). Solution of system of nonlinear equations by Adomian decomposition method. *Math. Comput*. *Appl*., 150, 847- 854.

8. Churchhouse, R.F. (1981). *Handbook of Applicable Mathematics(3)*. New York: Wiley.

9. Davıs, H.T. (1962). *Introductıon to Nonlinear Differantial and Integral Equations*. New York: Publications, 65.

10. El-Sayed, S.M. (2003). The decomposition method for solving studying the Klein-Gordon equation. *Chaos Solitons and Fractals*, 18, 1025-1030.

11. Green, C. D. (1969). *Integral Equations Methods*. New York: Barnes and Noble.

12. Hochstadt, H. (1973). *Integral Equations*. New York: Wiley.

13. Jerri, A. (1999*). Introduction to Integral Equations with Applications.* New York: Wiley.

14. Kanwal, R. (1997*). Linear Integral Equations*. Boston: Birkhauser.

15. Kress, R. (1999). *Linear Integral Equations*. Berlin: Springer.

16. Maleknejad, K., Aghazadeh, N. and Rabbani, M. (2006). Numerical solution of second kind Fredholm integral equations system by using a Taylor-series expansion method. *Appl,Math. Comput.*, 175, 1229-1234.

17. Polyanin, A. and Manzhirov, A. (2008). *Handbook of Integral Equations*. New York: Chapman and Hall.

18. Wazwaz, A. M. (1997). *A First Course in Integral Equations*. Singapore: World Scientific, 208.

19. Wazwaz, A. M. (1998). A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions. *Math. Comput.Appl,* 97, 37-44.

20. Wazwaz, A. M. (2000). A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operator. *Appl. Math. Comput*, 111, 53-69.

21. Wazwaz, A. M. (2002). *Partial Differential Equations.* Tokyo: A.A. Balkema Publishers, 459.

22. Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications*. Chicago: Springer, 120.

23. Aksoy, Y. (1998). *İntegral denklemler*. Cilt 1, (İkinci Baskı). İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayım Merkezi, 1-3.

24. He, J. H. (2004). The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities. *Applied Mathematics and Computation,* 151, 287–292.

25. He, J. H. (2005). Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, Chaos*. Solitons and Fractals,* 26, 695–700.

26. He, J. H. (2006). Homotopy perturbation method for solving boundary value problems. *Physics Letters,* 350, 87–88.

27. He, J. H. (2005). Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems, Chaos. *Solitons and Fractals,* 26 (3), 827–833.

28. He, J. H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 178, 257–262.

29. He, J. H. (2000). A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics,* 35 (1), 37–43.

30. He, J. H. (2004). Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation,* 156, 527–539.

31. He, J. H. (2003). Homotopy perturbation method a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation,* 135,73–79.

32. Biazar, J. and Ghazvini, H. (2007). Exact solutions for nonlinear Schrodinger equations by He's homotopy perturbation method. *Physics Letters,* A 366, 79–84.

33. Ganji, D. D. (2006). The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Physics Letters,* A 355, 337–341.

34. Abbasbandy, S. (2006). Numerical solutions of the integral equations Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation,* 173, 493–500.

35. Odibat, Z. and Momani, S. (2008). Modified homotopy perturbation method application to quadratic Riccati differential equation of fractional order. *Solitons and Fractals*, 36, 167–174.

36. Siddiqui, A. M., Mahmood, R. and Ghori, Q.K. (2008). Homotopy perturbation method for thin film flow of a third grade fluid down an inclined plane. *Solitons and Fractals*, 35 (1), 140-147

37. Cveticanin, L. (2006). Homotopy perturbation method for pure nonlinear differential equation. *Solitons and Fractals* 30, 1221–1230.

38. Biazar, J. and Ghazvini, H. (2009). He's Homotopy Perturbation Method for Solving System of Volterra Integral Equations of the Second Kind. *Solutions and Fractals*, 39(2), 770-777.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:ÇOBANBAŞI, Meryem
Uyruğu	:T.C
Doğum Tarihi ve Yeri	: 17.11.1989-Suluova
Medeni Hali	: Bekar
e-mail	: mmeryemm05@gmail.com

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	AMASYA Üniversitesi/İlköğretim Matematik	2018
Yüksek Lisans (tezsiz)	FIRAT Üniversitesi/Matematik	2012
Lisans	FIRAT Üniversitesi/Matematik	2012
Lise	Suluova Anadolu Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2016-2017	Suluova Metehan Atmaca And. Lis.	Öğretmen

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Çobanbaşı, M. and Şahin, S. (2018, June). *Solution of Nonlinear Fredholm İntegral Equation.* International Conference on Mathematics and Mathematics Education (İCMME-2018), Ordu University, Ordu, TURKEY