T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK DENKLEMLERİN KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ertuğrul ÇULHACIOĞLU

Haziran – 2019 AMASYA

ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK DENKLEMLERİN KARARLILIĞI

Ertuğrul ÇULHACIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ÖĞREKÇİ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran – 2019 AMASYA

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

Bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ertuğrul ÇULHACIOĞLU

19/06/2019

ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK DENKLEMLERİN KARARLILIĞI

(Yüksek Lisans Tezi)

Ertuğrul ÇULHACIOĞLU

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Bu çalışmada zaman skalasında kararlılık teorisi üzerindeki bazı çalışmalar incelenmiştir. Bunun için öncelikle zaman skalası hakkında genel bilgiler verilip zaman skalasında türev, integral ve dinamik denklemler incelenmiş olup bunların klasik türden türev, integral ve dinamik denklemler ile benzerlikleri ve farklılıkları vurgulanmıştır. Bunlarla birlikte zaman skalasında kararlılık kavramı ele alınıp Lyapunov'un klasik çalışmaları ele alınmıştır.

Sayfa Adedi	: 74
Anahtar Kelimeler	: Zaman skalası, Lyapunov'un ikinci metodu, zaman skalasında kararlılık analizi, dinamik denklemlerde kararlılık
Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ÖĞREKÇİ

STABILITY OF DYNAMIC EQUATİONS ON TIME SCALE

(M. Sc. Thesis)

ERTUĞRUL ÇULHACIOĞLU

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June - 2019

ABSTRACT

Stability theory on the time scales is analysed in this work. So first of all, general information about time scales is given, and then derivative, integral and the dynamic equations on the time scales are analysed and after that their classical correspondences and differences are emphasized. Apart from this, stability concepts on the time scales and Lyapunov's clasical studies are also analysed.

Page Number	: 74
Key words	: The Time Scales, Lyapunov's Second method, Stability Analysis On Time Scales, stabılıty of dynamıc equations
Supervisor	: Asst. Prof. Süleyman ÖĞREKÇİ

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardımlarıyla ve katkılarıyla beni yönlendiren, tez konusunun belirlenmesi, seminerimin hazırlanması sürecinde yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğretim Üyesi Süleyman ÖĞREKÇİ'ye saygılarımı ve teşekkürlerimi sunar ve bu süreçte maddi ve manevi desteğini hiç eksik etmeyen sevgili eşim Esra ÇULHACIOĞLU'na teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathfrak{R}$	Regresif fonksiyonlar kümesi
f^{Δ}	Delta türevi
$\int f(t)\Delta t$	Delta integrali
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	Granül fonksiyon
$\mathbb{C}_{rd}$	rd-sürekli fonksiyonlar kümesi
$\in$	Elemanıdır
γ	Gama
λ	Lamda
ϕ	Euler fi fonksiyonu
$\sum$	Toplam Sembolü

1. GİRİŞ

1.1. Zaman Skalasının Tarihçesi

Klasik analizde tek değişkene bağlı bir fonksiyonun türevi ve Riemann integrali tanımlanırken bu fonksiyonun tanım kümesinin reel sayılar kümesi olan $\mathbb{R}'$ nin bir aralığı olduğu kabul edilir [19]. Stefan Hilger [1] 1988'deki doktora tezinde tanım kümesini zaman skalası olarak isimlendirdiği daha da karmaşık bir yapıya sahip reel sayı kümelerindeki fonksiyonlar için delta türev kavramını tanımlamış ve bildiğimiz klasik analizi daha da geliştirmiştir [19]. Stefan Hilger bu teoriyi ilk olarak doktora tezinde ele aldığında amacı sürekli ortamdaki ve ayrık ortamdaki olayların analizini birleştirmek olmuştur. Bu düşünce uygulamalı bilimler gibi birçok alanda yer bulmaktadır. Bu alanlardan biri de zaman skalasında dinamik denklemlerdir. Diferansiyel denklemler teorisinin daha kısa zamandır çalışılmasının nedeni, doğa olaylarının devamlılık arz edip kesintilerin olmadığı var sayılmasıdır. Diferansiyel denklemler teorisi birçok bilim dalına için matematiksel bir ifade yöntemi olarak kullanılır. Ancak zaman sürekli olarak ilerlese de olayların kendi içinde süreklilik ve süreksizlik durumlarının aynı zamanda var olması bir gerçektir. O halde, her matematiksel olayı diferansiyel ve fark denklemleriyle ifade etmek mümkün değildir.

Yukarıda değinildiği gibi, doğa olayları ne tam olarak sürekli ne de tam olarak kesiklidir. Bu nedenle, olaylara ilişkin denklemlerin modellemelerinde yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur ve bu teorinin adı zaman skalası teorisi olarak belirlenmiştir. Zaman skalası teorisi ile birlikte hem süreklilik hem de süreksizlik barındıran olayların denklemlerinin matematiksel modellenmesi formülize edilebilmektedir. Belki de son dönemlerin en popüler çalışmalarından birisi olmasının en önemli sebebi de budur.

Zaman skalasında tanımlanan bu denklemlere dinamik denklemler denir. Dinamik denklemler zaman skalasının özel durumlarında fark denklemi, diferansiyel denklem haline veya kuantum fiziğinde çalışılan kuantum fark denklemine de dönüşür. Böylece fark ve diferansiyel denklem için ayrı ayrı sonuçlar bulmak yerine, keyfi zaman skalaları için geçerli birleştirilmiş sonuçlar bulunabilir.

Zaman skalası üzerine yapılan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk olarak giriş kısmında olan zaman skalasının tarihçesinden bahsedildi ve ikinci bölümde ise zaman skalasının daha sonra kullanacağımız gerekli olan ön bilgiler, tanımlamalar ve teoremler verildi. Zaman skalasında delta türev ve delta integralden bahsedildi. Üçüncü bölümde ise zaman skalasında dinamik denklem ve üstel fonksiyonlarla ilgili gerekli tanımlamalar ve teoremler verildi. Son bölümde ise zaman skalasında kararlılık analizi ile ilgili çalışmalar sunuldu.

2. ZAMAN SKALASINDA TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Zaman skalası reel sayıların keyfi boş olmayan bir alt kümesidir. Böylece

$$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_{\mathbf{0}}$$

yani reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve pozitif doğal sayılar zaman skalasına örnektir.

$$[0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$$

yine birer zaman skalasına örnek iken

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (0,1)$$

yani rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve (0,1) açık aralığı bir zaman skalası değildir. Zaman skalasını $\mathbb{T}$ sembolüyle belirteceğiz ve $\mathbb{T}$ zaman skalasının standart topoloji ile reel sayılardaki topolojiye sahip olduğunu varsayacağız. Bu bölümümüzde ilk kez Stefan Hilger'in doktora tezinde ayrık ve sürekli analizi birleştirmek için ortaya koyduğu bu zaman skalası teorisinde türevlenebilir fonksiyonlardan bahsedip $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarını inceleyip genel zaman skalası durumlarını ve örneklerini vereceğiz. Şimdi zaman skalasının önemli tanımları olan ileri sıçrama ve geri sıçrama operatörleri ile beraber granül fonksiyonunu vereceğiz.

2.1.1. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörü,

$$\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \ \sigma(t) := \begin{cases} inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} \\ t, \quad t = sup\, \mathbb{T} \end{cases}$$

iken, geri sıçrama operatörü,

$$\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \ \rho(t) := \begin{cases} sup\{s \in T : s < t\} \\ t, \quad t = inf\, \mathbb{T} \end{cases}$$

şeklindedir. granül fonksiyonu ise $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$

$$\mu(t) := \sigma(t) - t$$

olarak tanımlanır [1].

2.1.2. Tanım

i. Eğer $\mathbb{T}$ bir t maksimum noktaya sahipse $\sigma(t) = t$ olduğunda $inf\emptyset = sup\ \mathbb{T}$ olur.

ii. Eğer $\mathbb{T}$ bir t minimum noktaya sahipse $\rho(t) = t$ olduğunda $sup\emptyset = inf\ \mathbb{T}$ olur.

iii. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t'ye sağ saçılımlı nokta denir.

iv. Eğer $\rho(t) < t$ ise t'ye sol saçılımlı nokta denir.

v. Eğer nokta hem sağ hem de sol saçılımlı ise bu noktaya izole nokta denir.

vi. Eğer $t < sup\ \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına sağ yoğun nokta denir.

vii. Eğer $t > inf\ \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t noktasına sol yoğun nokta denir.

viii. Eğer nokta hem sağ hem de sol yoğun ise bu noktaya yoğun nokta denir.

2.1.3. Tanım

$\mathbb{T}$ sol saçılımlı bir k maksimum noktasına sahipse o zaman $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} - \{k\}$ olarak, aksi halde $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$ olarak tanımlanır [1].

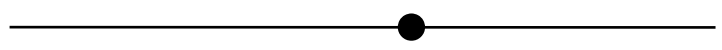
2.1.4. Tanım

$f^{\sigma}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ olarak tanımlanır [1].

Çizelge 2.1. Noktaların Sınıflandırılması

t sağ saçılımlı nokta	$\sigma(t) > t$
t sağ yoğun nokta	$\sigma(t) = t$
t sol saçılımlı nokta	$\rho(t) < t$
t sol yoğun nokta	$\rho(t) = t$
t izole nokta	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun nokta	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Çizelge 2.2. Noktaların Sınıflandırılması

 t_1	t_1 *sağ yoğun ve sol yoğun*
 t_2	t_2 *sol yoğun ve sağ saçılımlı*
 t_3	t_3 *sağ yoğun ve sol saçılımlı*
 t_4	t_4 *sağ saçılımlı ve sol saçılımlı*

(Burada t_1 yoğun nokta, t_4 izole nokta)

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ örneklerini inceleyelim.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise her bir $t \in \mathbb{R}$ için $\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = inf(t, \infty) = t,$

benzer şekilde $\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} = sup(-\infty, t) = t$'dir.

Dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$ yoğun noktadır.

Granül fonksiyonu μ ise her $t \in \mathbb{R}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$ bulunur.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise her bir $t \in \mathbb{Z}$ için

$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = inf(t+1,\ t+2,\ t-3, \dots) = t+1$ benzer şekilde

$\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = sup(\dots,\ t-3,\ t-2,\ t-1) = t-1$'dir.

Dolayısıyla her $t \in \mathbb{Z}$ için izole noktadır.

Granül fonksiyonu μ ise her $t \in \mathbb{Z}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$ bulunur [1].

Örnek

$\mathbb{T} = [0,2] \cup \{3,4,5\}$ olan bir zaman skalası için;

$\sigma(3) = inf\{s \in \mathbb{T} |\ s > 3\} = inf\{4,5\} = 4$’tür. O halde 3 sağ saçılımlı noktadır.

$\sigma(2) = inf\{s \in \mathbb{T} |\ s > 2\} = inf\{3,4,5\} = 3$’tür. O halde 2 sağ saçılımlı noktadır.

$\sigma(1) = inf\{s \in \mathbb{T} |\ s > 1\} = inf\{(1,2] \cup \{3,4,5\}\} = 1$’dir. O halde 1 sağ yoğun noktadır.

$\sigma(5) = inf\{s \in \mathbb{T} |\ s > 5\} = inf\emptyset = 5$’tir. O halde 5 sağ yoğun noktadır.

$\rho(3) = sup\{s \in \mathbb{T} |\ s < 3\} = sup[0,2] = 2$’dir. O halde 3 sol saçılımlı noktadır.

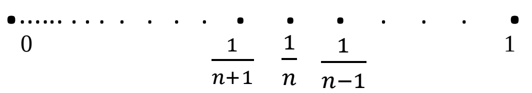
$\rho(2) = sup\{s \in \mathbb{T} |\ s < 2\} = sup[0,2) = 2$’dir. O halde sol 2 yoğun noktadır.

$\rho(1) = sup\{s \in \mathbb{T} |\ s < 1\} = sup[0,1) = 1$’dir. O halde 1 sol yoğun noktadır.

$\rho(5) = sup\{s \in \mathbb{T} |\ s < 5\} = sup[0,2] \cup \{3,4\} = 4$’tür. O halde 5 sol saçılımlı noktadır.

Örnek

$\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ olsun o zaman;



$t \in \mathbb{T}$ olsun. O zaman $t \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ veya $t = 0$’dır. $t \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ise

$\sigma(t) = inf\left\{s \in \mathbb{T} : s > \frac{1}{n}\right\} = inf\left\{\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, 1\right\} = \frac{1}{n-1} = \frac{t}{1-t}$

olduğundan t noktası sağ saçılımlı noktadır.

$\rho(t) = sup\left\{s \in \mathbb{T} : s < \frac{1}{n}\right\} = \{0, \dots, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\} = \frac{1}{n+1} = \frac{t}{1+t}$

olduğundan t noktası sol saçılımlı noktadır.

$\mu(t) = \frac{t}{1-t} - t = \frac{t^2}{1-t}$ elde ederiz. $t = 0$ ise $\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = 0$ ve $t = 0 = inf\ \mathbb{T}$ olduğundan $\rho(0) = 0$’dır [1].

Örnek

$\mathbb{T} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ olsun, bu durumda

$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T}: s > \sqrt{n}\} = inf\{\sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, \dots\} = \sqrt{n+1} = \sqrt{t^2+1}$

O halde t noktası sağ saçılımlı noktadır.

$\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{T}: s < \sqrt{n}\} = sup\{\dots, \sqrt{n-2}, \sqrt{n-1}\} = \sqrt{n-1} = \sqrt{t^2-1}$

O halde t noktası sol saçılımlı noktadır.

$\mu(t) = \sqrt{t^2+1} - t$ olur [1].

Örnek

$\mathbb{T}=\left\{\frac{n}{2}: n \in \mathbb{N}_0\right\}$ kümesi için,

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= inf\left\{s \in \mathbb{T} : s > \frac{n}{2}\right\} \\
&= inf\left\{\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \dots\right\} = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{n} = t\right) = t + \frac{1}{2} \\
\rho(t) &= sup\left\{s \in \mathbb{T} : s < \frac{n}{2}\right\} = sup\left\{0, \dots, \frac{n-2}{2}, \frac{n-1}{2}\right\} = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n} = t\right) = t - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

dir. Granül fonksiyonu ise; $\mu(t) = t + \frac{1}{2}$ olur [1].

Örnek

$\mathbb{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ olsun.

$$\sum_{t \in \mathbb{T}} \mu(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu(t_i) = \sum_{k=1}^{n} (\sigma(t_k) - t_k) = \sum_{k=1}^{n} (t_{k+1} - t_k)$$

$$= (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + \cdots + (t_n - t_{n-1}) + (t_{n+1} - t_n) = t_{n+1} - t_1$$

elde edilir [1].

2.1.1. Teorem (Tümevarım ilkesi)

$t_0 \in \mathbb{T}$ alalım ve $\{S(t): t \in [t_0, \infty)\}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlayan durumların bir ailesi olduğunu varsayalım,

i. $S(t_0)$ ifedesi doğrudur.

ii. $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ saçılımlı ve $S(t)$ ifadesi doğru ise $S(\sigma(t))$ ifadesi de doğrudur.
iii. $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ yoğun ve $S(t)$ ifadesi doğru ise o zaman t noktasının bir U komşuluğu vardır öyle ki $\forall s \in U \cap (t, \infty)$ için $S(s)$ ifadesi doğrudur.
iv. $t \in [t_0, \infty)$ noktası sol yoğun ve $\forall s \in [t_0, t)$ için $S(s)$ ifadesi doğru ise, $S(t)$ ifadesi de doğrudur. Bu durumda $S(t)$ ifadesi $t \in [t_0, \infty)$ için doğrudur [1].

Çizelge 2.3. Farklı zaman skalalarında operatörler

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$t-h$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)t$	qt	t/q
$2^{\mathbb{N}}$	t	$2t$	$t/2$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

2.2. Zaman Skalasında Delta Türev

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık t'nin bir U komşuluğu $\{U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T})\}$ var ve her $s \in U$ için,

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde $f^{\Delta}(t)$ varsa $f^{\Delta}(t)$'ye f fonksiyonunun t noktasındaki *Delta (veya Hilger) türevi* denir.

Örnek

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = a$, (a sabit) ile verilen fonksiyonun her $t \in \mathbb{T}$ için delta türevini inceleyelim.

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = a, (sabit)$ ise $f^{\Delta}(t) = 0$'dır. Gerçekten de her $\varepsilon > 0$ ve $s \in \mathbb{T}$ için,

$$|f(\sigma(t) - f(s) - 0.|\sigma(t) - s|| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

olduğu için doğrudur. O halde sabit fonksiyonun türevi 0'dır [1].

Örnek

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}, f(t) = t$ ile verilen fonksiyonun her $t \in \mathbb{T}$ için delta türevini inceleyelim.

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t,$ ise $f^{\Delta}(t) = 1$'dir. Gerçekten de her $\varepsilon > 0$ ve $s \in \mathbb{T}$ için;

$$|f(\sigma(t) - f(s) - 1.|\sigma(t) - s|| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

$$|(\sigma(t) - s - 1.|\sigma(t) - s|| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

$$0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

olması sebebiyle doğrudur. O halde $f(t) = t$ ise $f^{\Delta}(t) = 1$'dir [1].

Örnek

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}, f(t) = t^2$ ile verilen fonksiyonun her $t \in \mathbb{T}$ için delta türevini bulalım.

Her $\varepsilon > 0$, her $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ ve $\sigma(t) \neq s$ için;

$$\left|f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - f^{\Delta}(t).[\sigma(t) - s]\right| = |(\sigma^2(t) - s^2) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s||$$

$$\Rightarrow |\,\sigma(t) - s|\left|(\sigma(t) + s) - f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

$$\Rightarrow \ (\sigma(t) + s) - f^{\Delta}(t)| \leq \varepsilon$$

olur, ε herhangi bir keyfi pozitif bir sayı olduğundan mutlak değer özelliğinden $f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t$ olarak buluruz [1].

2.2.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için aşağıdakiler sağlanır.

i. f, t'de türevlenebilir ise f, t'de süreklidir.

ii. f, t'de sürekli ve t sağ saçılımlı ise bu durumda f, t'de

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)}$$

olarak türevlenebilir.

iii. t sağ yoğun nokta ise f nin t'de türevlenebilir olması ancak ve ancak,

$$\lim_{t\to s} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limitinin sonlu olmasıyla mümkündür bu durumda,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{t\to s} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

dir.

iv. f fonksiyonu t'de türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t)$$

dir [1].

İspat

i. f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ve $\varepsilon \in (0,1)$ kabul edelim.

$$\varepsilon^* = \varepsilon\left[1 + \left|f^{\Delta}(t)\right| + 2\mu(t)\right]^{-1}$$

olarak tanımlayalım.

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\right| \leq \varepsilon^*|\sigma(t)-s|$$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. Böylece her $s \in U \cap (t-\varepsilon^*, t+\varepsilon^*)$ için;

$$\begin{aligned}|f(t)-f(s)| &= \left|\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^{\Delta}(t)\}\right. \\ &\quad \left. + (t-s)f^{\Delta}(t)\right| \\ &\leq \varepsilon^*|\sigma(t)-s| + \varepsilon^*\mu(t) + |t-s|f^{\Delta}(t) \\ &\leq \varepsilon^*|\mu(t) + |t-s| + \mu(t) + |f^{\Delta}(t)|| \\ &\leq \varepsilon^*\left[1 + \left|f^{\Delta}(t)\right| + 2\mu(t)\right]\end{aligned}$$

$$= \varepsilon$$

elde edilir . Bu da bize f fonksiyonun t’de sürekli olduğu sonucunu verir.

ii. f fonksiyonu t’de sürekli ve yine t’de sağ saçılımlı olsun. Süreklilik tanımından dolayı;

$$\lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)}$$

yazarsak. $\varepsilon > 0$ içiin

$$\left| \frac{f(\sigma(t) - f(s)}{\sigma(t) - s} = - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \right| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. Her $s \in U$ için

$$\left| [f(\sigma(t) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t) - f(t)}{\mu(t)} [\sigma(t) - s] \right| \leq \ \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

elde edilir. Böylece;

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)}$$

olur.

iii. f fonksiyonu t noktasnda türevlenebilir ve t noktasında sağ yoğun olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için her bir $s \in U$ olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır.

O halde;

$$\big| \big[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\big] - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \big| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

yazılabilir. $\sigma(t) = t$ olduğundan, $\forall s \in U$ için,

$$\big| [f(t) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[t - s] \big| \leq \varepsilon |t - s|$$

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t) \right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Böylece aranan $s \in U$ ve $s \neq t$ için

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

iv. Eğer $\sigma(t) = t$ ise bu takdirde $\mu(t) = 0$ ve

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

yazılır.

Diğer taraftan eğer $\sigma(t) >$ t'nin yardımıyla,

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

elde edilir.

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarını inceleyelim.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise 2.2.1. Teorem (iii)'den dolayı $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ delta türevlenebilir ve

$$f'(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu olmak üzere mevcut ise,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur.

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise 2.2.1. Teorem (iii)'den dolayı $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ delta türevlenebilir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f$$

elde edilir [1].

Örnek

$h > 0$ ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k\epsilon\mathbb{Z}\}$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere $\sigma(t) = inf\{\, s \in \mathbb{T} : s > t\,\}$ ve $inf\{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h$ olur. Benzer biçimde $\rho(t) = t - h$ şeklindedir.

Herbir $t \in \mathbb{T}$ noktası bir izole noktadır ve her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h$'dır. O halde μ sabit olur.

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her bir $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

dir. Buradan

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h}}{h}$$

$$= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

$$= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

elde edilir. $f^{\Delta^n}(t) = \left(f^{\Delta^{n-1}}\right)^{\Delta}, n = 2,3, \ldots$ türevini de benzer bir şekilde elde edebiliriz. Yine benzer şekilde her $n \in \mathbb{N}_0$ için $\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$ olur.

Şimdi $\Delta_h = \frac{1}{h}(\sigma - I)$ operatörünü tanımlayalım. Burada I, birim operatördür.

Binom teoremi;

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^k\, b^{n-k} = (a+b)^n$$

şeklindedir. Δ_h operatörünün n. dereceden kuvvetini bulmak için, Binom teoremini operatör versiyonu cinsinden kullanılırsak

$$\Delta_h^n = \frac{1}{h^n}(\sigma - 1)^n = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \sigma^k (-I)^{n-k}$$

elde ederiz. Elde edileni operatöre uygulanırsak

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}(-1)^{n-k}f(t+kh)$$

elde edilir [1].

2.2.2. Teorem

$f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir olsunlar. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerli olur.

i. $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplamı t noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta} = f^{\Delta} + g^{\Delta}$$

sağlanır.

ii. $\forall\alpha$ sabiti için $\alpha f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t'de türevlenebilir ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

sağlanır.

iii. $f.g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında türevlenebilir ve

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$$

sağlanır.

iv. Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise, $\frac{f}{g}$'de türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t).g\big(\sigma(t)\big)}$$

sağlanır [1].

2.2.3. Teorem

α bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun.

i. $f(t) = (t-\alpha)^m$ şeklinde tanımlı bir f fonksiyonu için,

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^{v}(t-\alpha)^{m-1-v}$$

ii. $g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$ şeklinde tanımlı bir g fonksiyonu için,

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-v}(t-\alpha)^{v+1}} \,, (\sigma(t)-\alpha)(t-\alpha) \neq 0$$

eşitlikleri sağlanır [1].

2.2.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f^{Δ} fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa^2} = (\mathbb{T}^{\kappa})^{\kappa}$ üzerinde türevlenebilir ise, f fonksiyonunun ikinci türevi $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta}: \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. $n.$ dereceden türev $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$ şeklindedir. Sonuç olarak, $\sigma^2(t) = \sigma\big(\sigma(t)\big)$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ yazılabilir. O zaman $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ için $\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$ olur. Ayrıca $\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t$'dir [1].

Örnek

Genel olarak f ve g fonksiyonları iki kez türevlenebilir olması durumunda bile fg fonksiyonu iki kere türevlenemez. Çünkü,

$$(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

Olduğundan f ve g iki kez türevlenebilir ve f^{σ} türevlenebilir ise ve ikinci türev alınırsa;

$$((fg)^{\Delta})^{\Delta} = (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} = f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\rho}}g^{\Delta\Delta}$$

$$= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta})g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta}$$

elde edilir. Burada $f^{\Delta^{\sigma}} = f^{\Delta\sigma}$ şeklindedir [1].

2.2.4. Teorem (Leibnitz Formülü)

$S_k^{(n)}$, k tane σ ve $n-k$ adet Δ içeren, n uzunluğundaki mümkün olan tüm dizilerden oluşan bir küme olsun. Eğer her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^{Λ} mevcut ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{\Lambda \in_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right] g^{\Delta^k}$$

eşitliğine Leibnitz formülü denir [1].

Aşağıda Çizelge 2.4'te zaman skalasında değişik örnekler verilmiştir. Zaman skalasını farklı seçtiğimizde, seçilen zaman skalasına karşılık gelen granül fonksiyon, ileri ve geri sıçrama operatörlerinin alacağı sonuçlar gösterilmiştir.

Çizelge 2.4. Farklı zaman skalalarında operatörler ve türev

	$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
İLERİ SIÇRAMA	$\sigma(t)$	t	$t+1$
GERİ SIÇRAMA	$\rho(t)$	t	$t-1$
GRANÜL	$\mu(t)$	0	1
TÜREV	$f^{\Delta}(\mathrm{t})$	$f'(t)$	$\Delta f(t)$

2.3. Zaman Skalasında Delta İntegrali

2.3.1. Tanım

Bir $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sağ yoğun noktalarında sağdan limiti var (sonlu) ve sol yoğun noktalarında soldan limiti var (sonlu) ise f fonksiyonuna *düzenlidir* denir [1].

2.3.2. Tanım

Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu zaman skalasının tüm sağ yoğun noktalarında sağ sürekli ve tüm sol yoğun noktalarında sonlu sol limiti varsa bu f fonksiyonuna $\mathbb{T}$ üzerinde *rd-sürekli* denir. rd-sürekli fonksiyonlar kümesi C_{rd}, $C_{rd}(\mathbb{T}), C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir [1].

2.3.3. Tanım

Bir $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, bir $D \subset \mathbb{T}^{\kappa}$ bölgesi için, her $t \in D$ noktalarında türevlenebilir ve $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ bölgesi sağ saçılımlı nokta içermeyen sayılabilir bir küme olsun, bu durumda f fonksiyonuna D bölgesinde *ön-türevlenebilirdir* denir [1].

2.3.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

i. f sürekli ise rd-süreklidir.

ii. f rd-sürekli ise düzenlidir.

iii. σ operatörü rd-süreklidir.

iv. f rd-sürekli veya düzenli ise f^{σ} da bu şekildedir.

v. f sürekli, $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da rd-sürekli veya düzenli ise fog da bu şekildedir [1].

2.3.2. Teorem

Kapalı aralıkta her düzenli fonksiyon sınırlıdır [1].

İspat

Varsayalım, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız olsun. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \in [a, b]$ ve $|f(t_{n})| > n$ olsun. $\{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ olduğundan $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ yakınsak bir alt dizi vardır. Yani en az bir $t_0 \in [a. b]$ vardır ki,

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$$

olur. $\{t_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}$ kapalı olduğundan $t_0 \in \mathbb{T}$'dir. Bu durumda t_0 noktası izole olamaz. t_0 noktasına yukarıdan ya da aşağıdan yaklaşan bir alt dizi vardır. Her iki durumda düzgünlükten dolayı, $t \to t_0$ iken $f(t)$'nin limiti sonlu olmalıdır ki bu bir çelişki durumudur.

2.3.3. Teorem

f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon olsun. Her iki fonksiyon D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir olsun. O zaman her $t \in D$ için;

$$|f^{\Delta}(t)| \leq g^{\Delta}(t)$$

ise $r \leq s$ olmak üzere $\forall\, r, s \in \mathbb{T}$ için;

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

sağlanır [1].

İspat

$r, s \in \mathbb{T}$ *ve* $r \leq s$ *olsun.*$[r, s) \backslash D = \{t_n : n \in n\}$ ile gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun.
Şimdi tümevarım yöntemini kullanırsak, her $t \in [r, s]$ için,

$$S(t): |f(t) - f(r)| \leq g(t) - g(r) + \varepsilon \left[\sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]$$

eşitsizliğini göstereceğiz. Bunu göstererek te ortalama değer teoremi ispatlanmış olacaktır.

Şimdi 2.1.1. Teoremi ile verilen tümevarım ilkesinin koşullarını kontrol edelim.

i. Açık olarak $S(r)$ ifadesi doğrudur.

ii. t sağ saçılımlı bir nokta olsun ve $S(t)$ doğru olsun. Böylece;

$$\begin{aligned}
\left|f\big(\sigma(t)\big) - f(r)\right| &= \left|f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t) - f(r)\right| \\
&\leq \mu(t).\left|f^{\Delta}(t)\right| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq \mu(t).g^{\Delta}(t) + g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\
&= g\big(\sigma(t)\big) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n} \right] \\
&< g\big(\sigma(t)\big) - g(r) + \varepsilon \left[\sigma(t) - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n} \right]
\end{aligned}$$

olup $S(\sigma(t))$ doğrudur.

iii. $t = s$ sağ yoğun noktada $S(t)$ doğru olsun $(\sigma(t) = t)$. İki durumu da göz önüne alırsak. Yani $t \in D$ ve $t \notin D$ için bakalım. Öncelikle $t \in D$ olsun. Bu durumda f ve g, t'de türevlenebilirdirler. Dolayısıyla bir U komşuluğu vardır, öyle ki; her $\tau \in U$ için;

$$\left|f(t)-f(\tau)-f^{\Delta}(t).(t-r)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|$$

ve

$$\left|g(t)-g(\tau)-g^{\Delta}(t).(t-\tau)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|$$

olur . Böylece,

$$|f(t)-f(\tau)| \leq \left[\left|f^{\Delta}(t)\right|+\frac{\varepsilon}{2}\right].|t-\tau|$$

ve

$$g(\tau)-g(t)-g^{\Delta}(t).(\tau-t) \geq -\frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|$$

olur. Bu durumda her $\tau \in U \cap (t,\infty)$ için,

$$\begin{aligned}
|f(\tau)-f(r)| &\leq |f(\tau)-f(t)|+|f(t)-f(r)| \\
&\leq \left[f^{\Delta}(t)+\frac{\varepsilon}{2}\right]|t-\tau|+|f(t)-f(r)| \\
&\leq \left[g^{\Delta}(t)+\frac{\varepsilon}{2}\right]|t-\tau|+g(t)-g(r)\varepsilon.\left[t-r\sum_{t_n<t}2^{-n}\right] \\
&= g^{\Delta}(t).(\tau-t)+\frac{\varepsilon}{2}(\tau-t)+g(f)-g(r)+\varepsilon(t-r)+\varepsilon\sum_{t_n<t}2^{-n} \\
&\leq g(\tau)-g(t)+\frac{\varepsilon}{2}|r-\tau|+\frac{\varepsilon}{2}(r-t)+g(t)-g(r)+\varepsilon(t-r) \\
&\quad +\varepsilon\sum_{t_n<t}2^{-n} \\
&= g(\tau)-g(r)+\varepsilon\left[\tau-r+\sum_{t_n<\tau}2^{-n}\right]
\end{aligned}$$

olup $S(\tau)$ ifadesi her $\tau \in U \cap (t,\infty)$ için doğrudur.

Şimdi ikinci durum için $t \notin D$ olsun. Bu durumda bazı $m \in \mathbb{N}$ için $t = t_n$ olur. f ve g ön diferensiyellenebilir olduklarından bir U komşulukları vardır.

Yani $\forall \tau \in U$ için,

$$|f(\tau) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

ve

$$|g(\tau) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

dir. Dolayısıyla,

$$g(\tau) - g(t) \geq -\frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

olur. Bunları kullanarak;

$$|f(\tau) - f(r)| \leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-n} + g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-n} + g(\tau) + \frac{\varepsilon}{2} 2^{-n} - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]$$

$$= \varepsilon . 2^{-m} + g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]$$

$$\leq g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n} \right]$$

elde edilir ki $S(\tau)$, her $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için doğru olur.

(iv) t sol yoğun nokta olsun ve her $\tau < t$ için $S(\tau)$ doğru olsun. Bu durumda;

$$\lim_{\tau \to t^-} |f(r) - f(r)| \leq \lim_{\tau \to t^-} \left\{ g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n} \right] \right\}$$

$$\leq \lim_{\tau \to t^-} \left\{ g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \right\}$$

olup $S(t)$ doğrudur.

2.3.4. Teorem

f bir düzenli fonksiyon olsun. Bu durumda her $t \in D$ için D türevlenebilir bölgesiyle öntürevlenebilir ve $F^{\Delta}(t) = f(t)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu vardır [1].

2.3.4. Tanım

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir düzenli fonksiyon olsun. Bu durumda, 2.3.2. Teoremindeki gibi olan her bir F fonksiyonuna f'nin *ön-anti türevi* denir. Burada c keyfi bir sabit ve F; f'nin ön-anti türevi ise,

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + c$$

biçiminde tanımlanan ifadeye düzenli olan f fonksiyonunun *belirsiz integrali* denir [1].

2.3.5. Tanım

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in T^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ oluyorsa F'ye

f'nin *anti türevi* denir [1].

2.3.6. Tanım

Cauchy integrali $\forall m, n \in \mathbb{T}$ için;

$$\int_m^n f(t)\Delta t = F(n) - F(m)$$

olarak tanımlanır [1].

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve a sabit olmak üzere $a \neq 1$ olsun.

$$\left(\frac{a^n}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^n}{a-1}\right) = \frac{a^{n+1}-a^n}{a-1} = a^n$$

olduğundan,

$$\int a^n \,\Delta n = \frac{a^n}{a-1} + c$$

olarak yazarız. Burda c keyfi sabittir [1].

2.3.5. Teorem

Her bir rd-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır. Özel olarak

bir $t_0 \in \mathbb{T}$ için

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\eta)\Delta\eta$$

ile tanımlı fonksiyon $f(t)$'nin *anti-türevidir* [1].

İspat

f rd-sürekli fonksiyon olsun. 2.3.1. Teorem (ii)'den dolayı f düzenlidir. 2.3.5. Teoreminden dolayı ön-anti türevi vardır. $F(t_0) \neq t_0$ olsun ve her $t \in D$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ olsun. Burada F fonksiyonu D de ön-diferansiyelenebilirdir. Her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ olduğunu gösterelim. ($\mathbb{T}^{\kappa} \setminus \mathrm{D} \subset \mathbb{T}^{\kappa}$ dır). Dolayısıyla t sağ yoğun noktadır. Çünkü $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus \mathrm{D}$'de sağ saçılımlı nokta yoktur. F rd sürekli olduğu için, t noktasında süreklidir. $\varepsilon > 0$ olsun ve bu durumda bir U komşuluğu vardır öyle ki her $s \in U$ için,

$$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Şimdi $\tau \in \mathbb{T}$ için

$$k(\tau) = F(\tau) - f(t)(\tau - t_0)$$

tanımlayalım. Dolayısıyla k, D de ön diferanseyellebilirdir. O halde, $\tau \in D$ için;

$$k^{\Delta}(\tau) = F^{\Delta}(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t)$$

olup, her $s \in D \cap U$ için,

$$\left|k^{\Delta}(s)\right| = |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Bu yüzden;

$$sup_{s \in D \cap U}\left|k^{\Delta}(s)\right| \leq \varepsilon$$

olur.

2.3.1 Teoremden dolayı her $r \in U$ için,

$$|F(t) - F(r) - f(t)(t - r)|$$

$$= |h(t) + f(t)(t - t_0) - [h(r) - f(t)(r - t_0)] - f(t)(t - r)|$$

$$= |h(t) - h(r)|$$

$$= \left\{sup_{s \in D \cap U}\left|h^{\Delta}(s)\right|\right\}|t - r|$$

$$\leq \varepsilon|t - r|$$

olup F; t'de diferansiyellenebilirdir ve $F^{\Delta}(t) = f(t)$ dir.

2.3.6. Teorem

$f^{\Delta}(t) \geq 0$ ise, bu durumda f fonksiyonu azalan değildir [1].

2.3.7. Teorem

$f, g \in C_{rd}$ ve $p, r, s, \sigma(t) \in \mathbb{T}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır [1].

$i.$ $$\int_p^r (f(t) + g(t))\Delta t = \int_p^r f(t)\Delta t + \int_p^r f(t)\,\Delta t$$

$$ii.\int_{p}^{r} af(t)\Delta t = a\int_{p}^{r} f(t)\Delta t$$

$$iii.\int_{p}^{r} f(t)\Delta t = -\int_{p}^{r} f(t)\Delta t$$

$$iv.\ \int_{p}^{r} f(t)\Delta t = \int_{p}^{s} f(t)\Delta t + \int_{s}^{r} f(t)\Delta t$$

$$v.\ \int_{p}^{r} f\big(\sigma(t)\big)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(r) - (fg)(p) - \int_{p}^{r} f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$$

$$vi.\ \int_{p}^{r} f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(r) - (fg)(p) - \int_{p}^{r} f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$$

$$vii.\int_{p}^{p} f(t)\Delta t = 0$$

2.3.8. Teorem

$f \epsilon C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}$ ise;

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

olur [1].

İspat

2.3.5. Teoreminden f’nin bir F antitürevi vardır ve $\sigma(t) > t$ için

$$\begin{aligned}\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau &= F\big(\sigma(t)\big) - F(t)\\ &= \mu(t)F^{\Delta}(t)\end{aligned}$$

$$= \mu(t)f(t)$$

olur. $\sigma(t) = 0$ ise $\mu(t) = 0$ olduğundan eşitlik sağlanır.

2.3.9. Teorem

$m, n \in \mathbb{T}\ ve\ f \in C_{rd}$ olsun.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise;

$$\int_m^n f(t)\Delta t = \int_m^n f(t)dt$$

dir. Burda eşitliğin sağındaki integral *Riemann integrali*dir.

ii. Eğer $[m, n]$ aralığı sadece izole noktaları barındırıyorsa, bu taktirde

$$\int_m^n f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[m,n[} \mu(t)f(t) & m < n \\ 0 & m = n \\ \sum_{t\in[n,m[} \mu(t)f(t) & m > n \end{cases}$$

iii. Eğer $\mathbb{T}\ = h\mathbb{Z} = \{hk: k\epsilon\ \mathbb{Z}\}, h > 0$ ise, böylece

$$\int_m^n f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{m}{h}}^{\frac{m}{h}-I} f(kh)h & m < n \\ 0 & m = n \\ -\sum_{k=\frac{m}{h}}^{\frac{m}{h}-I} f(kh)h & m > n \end{cases}$$

iv. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise böylece

$$\int_{m}^{n} f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=m}^{n-I} f(t) & m < n \\ 0 & m = n \\ -\sum_{t=m}^{n-I} f(t) & m < n \end{cases}$$

elde edilir [1].

2.3.7. Tanım

f fonksiyonu $[\mathrm{m}, \infty)$ aralığında rd sürekli ve $m \in \mathbb{T}, sup\mathbb{T} = \infty$ ise genelleştirilmiş integrali

$$\int_{m}^{\infty} f(t)\Delta t := \lim_{n\to\infty} \int_{m}^{n} f(t)\Delta t$$

Şeklinde tanımlanır. Bu integralin limiti varsa genelleştirilmiş integral *yakınsak*, Limit yoksa genelleştirilmiş integral *ıraksak*tır [1].

2.3.10. Teorem

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve $g: \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$, de türevlenebilir fonksiyon olsun. Ayrıca $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[\mathrm{t}, \sigma(\mathrm{t})]$ reel aralığında bir c noktası vardır öyle ki,

$$(fog)^{\Delta}(t) = f'(g(c)).\, g^{\Delta}\,(t)$$

eşitliği sağlanır [1].

2.3.11. Teorem

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tanımlı f fonksiyonu sürekli, $t, s \in \mathbb{T}$ ve $\mathrm{t} > \mathrm{s}$ olmak üzere, $f(s)f(t) < 0$ sağlanıyorsa, $r \in [s, t)$ için $f(r) = 0$ veya $f(r)f(\sigma(r)) < 0$ olur [1].

Aşağıdaki Çizelge 2.5'te zaman skalasını farklı küme seçtiğimizde, bu zaman skalasına karşılık gelen integral denklemleri özetlenmiştir.

Çizelge 2.5. Farklı zaman skalalarında integral

	$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
İNTEGRAL	$\int_a^b f(t)\Delta t$	$\int_a^b f(t)dt$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t)$

3. DİNAMİK SİSTEMLER

3.1. Üstel Fonksiyon

3.1.1. Tanım

$k > 0$ olsun. Buna göre *Hilger karmaşık sayılarını*, *Hilger ekseni*ni, *Hilger yedek ekseni*ni ve *Hilger sanal çemberi*ni sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlarız,

$$\mathbf{C}_h = \left\{ z \in \mathbf{C} : \ z \neq -\frac{1}{k} \right\}$$

$$\mathbb{R}_k = \left\{ z \in \mathbf{C}_k : \ z \in \mathbb{R}, \qquad z > -\frac{1}{k} \right\}$$

$$\mathrm{A}_k = \left\{ z \in \mathbf{C}_k : \ z \in \mathbb{R}, \qquad z < -\frac{1}{k} \right\}$$

$$\mathrm{I}_k = \left\{ z \in \mathbf{C}_k : \ \left| z + \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k} \right\}$$

Burada $k = 0$ olursa $\mathbf{C}_0 = \mathrm{c}$, $\mathbb{R}_0 = \mathrm{r}$, $\mathrm{I}_0 = i\mathrm{r}$, $\mathrm{A}_0 = \emptyset$ ile tanımlıdır. Aynı zamanda $k > 0$ ve $z \in \mathbf{C}_k$ olduğunda,

z'nin Hilger reel kısmı; $\mathrm{Re}_k(z) = \frac{|zk+1|-1}{k}$,

z'nin Hilger sanal kısmı; $\mathrm{Im}_k(z) = \frac{Arg(zk+1)}{k}$

ile tanımlarız [1].

3.1.2. Tanım

$p: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon olsun. Her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0$$

eşitsizliği varsa p fonksiyonu *regresiftir* denir. Bütün regresif ve rd-sürekli fonksiyonların ailesini $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}(\mathbb{T})$ veya $\mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterlir [1].

3.1.3. Tanım

$\mathbb{T}$ üzerindeki tüm regresif ve rd-sürekli fonksiyonların ailesi $\mathfrak{R}$, her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve $p, q \in \mathfrak{R}$ için;

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)$$

ile tanımlı toplama $\oplus$ işlemi ‘‘*circle plus*’’ olarak adlandırılır, ve bu işlem altında regresif ve rd-sürekli fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{R}$, Abelyen gruptur ve bu gruba *regresif grup* denir [1].

3.1.4. Tanım

3.1.3. Tanımda $\oplus$ işlemi altında $p \in \mathfrak{R}$’nin toplamsal tersi;

$$\ominus p := -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}$$

ile tanımlanır ve $\mathfrak{R}$’dedir ve ayrıca her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için ve $p, q \in \mathfrak{R}$ için;

$$(p \ominus q)(t) := (p \oplus (\ominus q))(t)$$

ile tanımlanan ‘‘*circle minus*’’ çıkarma $\ominus$ işlemidir [1].

3.1.5. Tanım

Zaman skalasında $p \in \mathfrak{R}$ olmak üzere her $t, s \in \mathbb{T}$ olmak üzere $e_p(t, s)$ için aşağıdaki silindir dönüşümü olan

$$\xi_{\boldsymbol{h}}(z) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + hz)}{z} & h \neq 0 \\ z & h = 0 \end{cases}$$

kullanarak

$$e_p(t, s) = exp\left[\int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right]$$

ile tanımlanan fonksiyona *üstel fonksiyon* denir [1].

3.1.1. Yardımcı Teorem

Eğer $p \in \Re$ ise her $r, s, t \in \mathbb{T}$ için

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s)$$

yarı grup özelliği sağlanır [1].

İspat

$p \in \Re$ ve her $r, s, t \in \mathbb{T}$ olsun. 3.1.4. Tanımdan

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = exp\left[\int_r^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right] exp\left[\int_s^r \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right]$$

$$= exp\left[\int_r^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau + \int_s^r \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right]$$

$$= exp\left[\int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right]$$

$$= e_p(t,s)$$

olarak bulunur.

3.1.1. Teorem

$p, q \in \Re$ olsun,

i. $e_0(a,b) \equiv e_p(a,a) \equiv 1$

ii. $e_p(\sigma(a),b) = \big(1 + \mu(a)p(a)\big)e_p(a,b)$

iii. $e_p(a,b) = \frac{1}{e_p(b,a)} = e_{\ominus p}(b,a)$

iv. $e_p(a,b)e_p(b,c) = e_p(a,c)$

v. $e_p(a,b)e_q(a,b) = e_{p\oplus q}(a,b)$

vi. $\frac{e_p(a,b)}{e_q(a,b)} = e_{p\ominus q}(a,b)$

vii. $[\frac{1}{e_p(.,b)}]^{\Delta} = -\frac{p(a)}{e_p^{\sigma}(.,b)}$

eşitlikler sağlanır [1].

3.1.6. Tanım

$p \in \Re$ ise birinci mertebeden $y^{\Delta} = p(t)y$ lineer dinamik denklemine regresiftir denir [1].

3.1.2. Teorem

Varsayalım 3.1.5. Tanımdaki birinci mertebeden $y^{\Delta} = p(t)y$ lineer dinamik denklemi regresif ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda $e_p(.,t_0)$ foksiyonu, zaman skalasındaki

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür [1].

3.2. Lineer Dinamik Denklemler

3.2.1. Teorem

$p \in \Re$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere $y^{\Delta} = p(t)y$ regresif denklemi için, $y_0 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$y(t) = e_p(t,t_0)y_0$$

ile verilen fonksiyon,

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = y_0 \qquad (1)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür [3]. Buradaki $e_p(t,t_0)$ fonksiyonu üstel fonksiyondur. 3.1.2. Tanımına ilişkin başlangıç değer problemi ise;

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1 \qquad (2)$$

dir. Bu (2) denkleminin adjointi de aşağıdaki (3) denklemidir;

$$x^{\Delta} = -p(t)x^{\sigma},\ x(t_0) = 1 \tag{3}$$

3.2.2. Teorem

p, regresif ve rd-sürekli olsun, bu durumda (2) denkleminin çözümü tektir [3].

3.2.3. Teorem

p, regresif ve rd-sürekli olsun, bu durumda $e_p(.,t_0)$ ve $e_{\ominus p}(.,t_0)$ sırasıyla (2) ve (3) denklemlerinin tek çözümleridir.

Açıkça, p, regresif ve rd-sürekli ise 3.2.3. Teoreminden $x_0 e_{\ominus p}(.,t_0)$

$$x^{\Delta} = -p(t)x^{\sigma}, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

denkleminin tek çözümüdür. Bunun yanı sıra k, f rd-sürekli olmak üzere (4) denkleminin integral çarpanı olan $e_p(t,t_0)$ yardımıyla;

$$\left[x e_p(.,t_0)\right]^{\Delta} = x^{\Delta} e_p(.,t_0) + p e_p(.,t_0)x^{\sigma} = e_p(.,t_0)[x^{\Delta} + p x^{\sigma}] = e_p(.,t_0)f$$

denklemini çözebiliriz. Her iki tarafın t_0'dan t'ye kadar integralini alırsak x için bir formüle ulaşabiliriz.

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$$

eşitliğini kullanarak;

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y + f(t), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{5}$$

eşitliğini de çözebiliriz [3].

3.2.4. Teorem

p ve f rd-sürekli ve burada p regresif olsun.

$$x_0 e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau) f(\tau) \Delta(\tau)$$

ve

$$y_0 e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta(\tau)$$

fonksiyonları sırasıyla (4) ve (5)'in çözümüdür [3].

3.2.5. Teorem

Eğer $p, q \in \mathfrak{R}$ ise

$$e_{p\ominus q}^{\Delta}(., t_0) = (p - q) \frac{e_p(., t_0)}{e_q^{\sigma}(., t_0)}$$

olur [3].

3.2.6. Teorem

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ve $a, b, c \in \mathbb{T}$ ise

$$\left[e_p(c, .)\right]^{\Delta} = -p\left[e_p(c, .)\right]^{\sigma}$$

ve

$$\int_{a}^{b} p(t) e_p\big(c, \sigma(t)\big) \Delta t = e_p(c, a) - e_p(c, b)$$

dir [3].

3.3. Lineer Dinamik Denklem Sistemleri

3.3.1.Tanım

A, $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris fonksiyon olsun. Eğer A'nın her bir elemanı $\mathbb{T}$ üzerinde rd-sürekli ise A matrisine *rd-süreklidir* denir [1].

3.3.2.Tanım

$\mathbb{T}$ üzerinde $n \times n$ tipinde matris değerli A fonksiyonu için $I + \mu(t)A(t) \neq 0$ oluyorsa A matrisine $\mathbb{T}$ üzerinde *regresiftir* denir. Tüm regresif ve rd-sürekli matris fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{R}$ ile gösterilir [1].

3.3.3. Tanım

$A \in \mathfrak{R}$ $n \times n$ matris fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}$ için

$$Y^{\Delta}(t) = A(t)Y(t) \quad , \quad Y(t_0) = I$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm $e_A(t, t_0)$ ile gösterilir [1].

3.3.1. Teorem

M ve N $n \times n$ tipinde türevlenebilir matrisler olsun.

Bu durumda aşağıdakiler sağlanır [1].

i. $(M+N)^{\Delta} = M^{\Delta} + N^{\Delta}$

ii. $(aN)^{\Delta} = aM^{\Delta} \qquad (a\ sabit)$

iii. $(MN)^{\Delta} = M^{\Delta}N^{\sigma} + MN^{\Delta} = M^{\sigma}N^{\Delta} + NM^{\Delta}$

iv. MM^{σ} tersinir ise $(M^{-1})^{\Delta} = -(M^{\sigma})^{-1} - M^{\Delta}M^{-1} = -M^{-1}M^{\Delta}(M^{\sigma})^{-1}$

v. $M^{\sigma}(t) = M(t) + \mu(t)M^{\Delta}(t)$

3.3.2. Teorem

A ve B, $\mathbb{T}$'de matris değerli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır [1].

i. $e_0(a,b) \equiv e_A(a,a) \equiv 1$

ii. $e_A(\sigma(a),b) = \big(I + \mu(a)A(a)\big)e_A(a,b)$

iii. $e_A(a,b) = e_A(b,a)$

iv. $e_A(a,b)e_A(b,c) = e_A(a,c)$

4. KARARLILIK ANALİZİ

Pötzsche [14], keyfi zaman skalalarında invaryant lineer sistemlerdeki zaman kararlılığı için gerek ve yeterli şartları ortaya koyan öncü bir çalışma yapmıştır. Bu eserdeki tanımlamalar sistem matrisinin özdeğerlerinin, kararlılığın muhtemelen bağlantısız bir $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ kümesine dahil olduğu ki bu da üzerinde çalışılan sistem her bir zaman skalası için değişiklik gösterebilir yeterli koşulunu içermektedir.

Bununla ilgili bir çalışmasında [18], zaman skalaları üzerindeki zaman invaryantlı skaler dinamik denklem ve zaman değişkenli kararlılık özelliklerini ele almıştır. Bu keyfi zaman skalaları üzerinde değişken zamanlı birinci mertebeden dinamik denklemin karakteristik davranışını ortaya koyan ilk çalışma olmuştur. Bu çalışmanın amacı otonom lineer dinamik sistemin mevcut sonuçlarını, zaman skalalarının geniş bir sınıfı üzerinde, otonom olmayan lineer dinamik sistemin daha bir genel haline genişletmektir. (Örneğin; sınırlı granül olan zaman skalaları ve sup$\mathbb{T}=\infty$)

Genelde sistem matrisinin özdeğerlerinin yerleşimi, zaman değişkenli sistemin üstel kararlılığını ya da kararlılığını garanti etmez. Otonom olmayan sistemlerde bu teoriyi geliştirmek için ayrık dinamik sistemler ve sürekli kararlılık ile ilgili standart çalışmalarda olduğu gibi bir Rus matematikçi ve mühendis olan Lyapunov'un ''İkinci (direkt) Metodu''nun genel bir zaman skalası versiyonunu ortaya koyarak düzgün kararlılık, düzgün üstel kararlılık ve düzgün asimptotik kararlılık teoremleri zaman değişkenli sistemler için birleştiriyoruz.

1892'deki doktora tezinde Lyapunov [7] diferansiyel denklemin kararlılığını analiz etmek için iki metot ortaya koymuştur. Onun ''İkinci Metodu'' hem diferansiyel hem de fark denklemlerinde lineer ve lineer olmayan sistemlerin kararlılık analizi için yaygın olarak kullanılan bir yöntem olmuştur. Lyapunov'un ''İkinci (direkt) Metot'' olarak adlandırılan metodun hedefi şudur: Çözümleri açık olarak bilmeden verilen denklem biçimlerini kullanarak fark denklemleri ve diferansiyel denklemin kararlılığı sorularını cevaplamaktır.

Lyapunov'un ikinci metodu şu şekilde özetlenebilir;
Bir dinamik sistemin kararlı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özelliklere sahip bir skaler $V(x)$ fonksiyonunun (Lyapunov fonksiyonu) var olmasıdır.

a) $V(x) > 0, \quad V'(x) < 0, \qquad x \neq x_e$ için

b) $V(x) = V'(x) = 0, \qquad x = x_e$ için

Burada x_e dinamik denklemin sabit(denge) noktasıdır.

Mühendislik uygulamalarında ve uygulamalı matematik problemlerinde bir çözüm genellikle ne kolayca elde edilebilir ne de kolayca hesaplanabilir. Lyapunov'un ''İkinci Metodu''nun doğal güzelliği ve seçkinliği, tam çözümün bilgisinin gerekli olmamasıdır. Sistem için ortaya konulan çözümün davranışı kesin bir çözüm hesaplamaksızın araştırılabilir.

Lyapunov'un ''İkinci Metodu''nu zaman skalaları üzerinde otonom olmayan lineer sistemlerle birleştirip genişleterek ardışık noktaları arasında düzensiz mesafe içeren bir zaman tanım kümesinin mümkünlüğü ile karşı karşıya gelebiliriz. Bu da meselenin önemli bir konu olduğunu kanıtlar.

4.1. Genel Tanım ve Teoremler

$x(t)$'nin Öklidyen normu, $n \times 1$ tipinde bir vektör ve t'nin gerçek değerli fonksiyonu olarak

$$\|x(t)\| = \sqrt{x^T(t)x(t)}$$

şeklindedir.

$$\|A\| = max_{\|x\|=1}\|A\|$$

ifadesi bir $m \times n$ tipindeki A matrisinin indüklenmiş normudur.

$$\|A\| = \left[max_{\|x\|=1} x^T A^T A x\right]^{1/2}$$

ifadesi $m \times n$ tipindeki A matrisinin spektral normudur [2].

4.1.1. Tanım

M simetrik bir matris ve x, $n \times 1$ vektör olmak üzere

Eğer $x^T M x \geq 0$ ise *pozitif yarı tanımlı*,

Eğer $x^T M x \geq 0$ ve yalnızca $x = 0$ olduğunda *pozitif tanımlı* olarak ifade edilir [2].

Şimdi düzgün kararlılık ve düzgün üstel kararlılık kavramlarını tanımlayacağız. Bu iki kavram aşağıdaki zamana bağlı regresif lineer dinamik denklemin çözümünde sınırlılığı içerir.

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0\,, \quad t_0 \in \mathbb{T} \tag{6}$$

4.1.2. Tanım

Her $t_0$ve $x(t_0)$ için

$$\|x(t)\| \leq \gamma \left\| x(t_{0)} \right\| \,, \;\; t \geq t_0$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ sonlu sabiti varsa (6) zaman değişkenli lineer denklemine *düzgün kararlıdır* denir [2].

4.1.3. Tanım

Her $t_0$ve $x(t_0)$ için

$$\|x(t)\| \leq \gamma \left\| x(t_{0)} \right\| e_{-\lambda}(t, t_0)\,, \;\; t \geq t_0 \tag{7}$$

olacak şekilde γ ve $\lambda > 0$ sonlu sabiti varsa (6) zaman değişkenli lineer dinamik denklemine *düzgün üstel kararlıdır* denir [2].

4.1.4. Tanım

$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0$ lineer dinamik denklemi düzgün kararlı ve herhangi bir $\gamma > 0$, $t_0$ve $x(t_0)$ için

$$\|x(t)\| \leq \gamma \left\| x(t_{0)} \right\|, \;\; t \geq t_0 + T \tag{8}$$

olacak şekilde bir $T > 0$ varsa (6) zaman değişkenli lineer dinamik denklemine *düzgün asimptotik kararlıdır* denir [2].

4.1.1. Teorem

(6) zaman değişkenli lineer dinamik denkleminin düzgün kararlı olması için gerek yeter koşul her $t \geq t_0$ ve $t, t_0 \in \mathbb{T}$ için

$$\|\phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma \tag{9}$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ var olmasıdır [2].

İspat

Varsayalım (6) zaman değişkenli lineer dinamik denklemi düzgün kararlı olsun. O zaman her $t_0$ve $x(t_0)$ için $\|x(t)\| \leq \gamma\|x(t_0)\|$, $t \geq t_0$ olacak şekilde $\gamma > 0$ sonlu sabiti vardır. Verilen t_0 ve $t_a \geq t_0$ için x_a bir vektör olsun. (6) denkleminin t_a başlangıç değeri olmak üzere $x(t_0) = x_a$ bir çözümüdür. $\|x_a\| = 1$ *için* $\|\phi_A(t_a, t_0)x_a\| = \|\phi_A(t_a, t_0)\|\|x_a\| = \|\phi_A(t_a, t_0)\|$ elde ederiz. Yani başlangıç durumu $x(t_0) = x_a$ olan (6) zaman değişkenli lineer dinamik denkleminin t_a zamanındaki çözümü;

$$\|x(t_a)\| = \|\phi_A(t_a, t_0)x_a\| = \|\phi_A(t_a, t_0)\|\|x_a\| \leq \gamma\|x_a\|$$

şeklindedir. $\|x_a\| = 1$ iken $\|\phi_A(t_a, t_0)\| \leq \gamma$ olduğunu görüyoruz. Herhangi bir t_0 ve $t_a \geq t_0$ için x_a seçilebildiğinden her $t, t_0 \in \mathbb{T}$ *için* $\|\phi_A(t_a, t_0)\| \leq \gamma$ olduğunu görürüz. Şimdi varsayalım her $t, t_0 \in \mathbb{T}$ için $\|\phi_A(t_a, t_0)\| \leq \gamma$ olacak şekilde bir γ var olsun. (6) denkleminin çözümü herhangi t_0 ve $x(t_0) = x_0$ için;

$$\|x(t)\| = \|\phi_A(t, t_0)x_0\| \leq \|\phi_A(t, t_0)\|\|x_0\| \leq \gamma\|x_0\|, \ t \geq t_0$$

şeklindedir. Böylece (6) düzgün kararlıdır.

4.1.2. Teorem

(6) zaman değişkenli lineer dinamik denkleminin düzgün üstel kararlı olması için gerek yeter koşul her $t \geq t_0$ ve $t, t_0 \in \mathbb{T}$ için;

$$\|\phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0)$$

olacak şekilde λ ve $\gamma > 0$ var olmasıdır [2].

İspat

İlk olarak (6) denkleminin üstel kararlı olduğunu varsayalım. Herhangi bir t_0 ve $x(t_0) = x_0$ için $\gamma,\ \lambda > 0$ ve$-\lambda \in \Re^+$var öyleki $\|x(t)\| = \|x_0\|\gamma e_{-\lambda}(t, t_0)$,

$t \geq t_0$ olacak şekilde (6)'ya ait uygun çözümler vardır. Yani t_0 ve $t_a \geq t_0$ için bir x_a vektör için (6) denkleminin t_a başlangıç değeri olmak üzere $x(t_0) = x_a$ bir çözümüdür. $\|x_a\| = 1$ için, $\|\phi_A(t_a, t_0)x_a\| = \|\phi_A(t_a, t_0)\|\|x_a\| = \|\phi_A(t_a, t_0)\|$ olsun. Başlangıç durumu $x(t_0) = x_a$ koşuluna uygun (6) zaman değişkenli lineer dinamik denkleminin t_a zamanındaki çözümü;

$$\|x(t_a)\| = \|\phi_A(t_a, t_0)x_a\| = \|\phi_A(t_a, t_0)\|\|x_a\| \leq \|x_a\|\gamma e_{-\lambda}(t, t_0)$$

eşitsizliğini sağlar. $\|x_a\| = 1$ ve $-\lambda \in \mathfrak{R}^+$ iken $\|\phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0)$ olur. Herhangi bir $t_0\ ve\ t_a \geq t_0$ için x_a seçilebildiğinden her $t, t_0 \in \mathbb{T}$ için $\|\phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0)$ olduğunu görürüz. Şimdi varsayalım her $t, t_0 \in \mathbb{T}$ için $\|\phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0)$ olacak şekilde $\gamma,\ \lambda > 0$ ve$-\lambda \in \mathfrak{R}^+$ var olsun. (6) denkleminin çözümü herhangi t_0 ve $x(t_0) = x_0$ için $\|x(t)\| \leq \|\phi_A(t, t_0)x_0\| \leq \|\phi_A(t, t_0)\|\|x_0\| \leq \|x_a\|\gamma e_{-\lambda}(t, t_0)$,$t \geq t_0$ olur. Böylece (6) lineer dinamik denkleminin düzgün üstel kararlılığı elde edilir.

4.1.3. Teorem

Her $t \in \mathbb{T}$ için $\|A(t)\| \leq \alpha$ olacak şekilde bir α sabiti var olsun.

(6) zaman değişkenli lineer dinamik denklemi düzgün üstel kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $t, \tau \in \mathbb{T}$ ve $t \geq \sigma(\tau)$ için

$$\int_{\tau}^{t} \|\phi_A(t, \sigma(s))\|\Delta s \leq \beta \tag{10}$$

olacak şekilde bir β sabitinin var olmasıdır [2].

İspat

(6) ile verilen denklemin düzgün üstel kararlı olduğunu varsayalım. Teorem 4.1.2'den her $t, \tau \in \mathbb{T}$ ve $t \geq \tau$ için $\|\phi_A(t, \tau)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, \tau)$ olacak şekilde γ ve $\lambda > 0$ ve $-\lambda \in \mathfrak{R}^+$ vardır. Her $t \geq \sigma(\tau)$ için;

$$\int_{\tau}^{t} \|\phi_A(t, \sigma(s))\|\Delta s \leq \int_{\tau}^{t} \gamma e_{-\lambda}\big(t, \sigma(s)\big)\Delta s$$

$$= \frac{\gamma}{\lambda}[e_{-\lambda}(t,t) - e_{-\lambda}(t,\tau)]$$

$$= \frac{\gamma}{\lambda}[1 - e_{-\lambda}(t,\tau)]$$

$$\leq \frac{\gamma}{\lambda}$$

sonucuna varılır. Böylece (7) denkleminde $\beta = \frac{\gamma}{\lambda}$'dır.

Şimdi (10) ifadesinin sağladığını varsayalım.

$$\phi_A(t,\tau) = I - \int_\tau^t [\phi_A(t,s)]^{\Delta s}\Delta s = I + \int_\tau^t \phi_A\big(t,\sigma(s)\big)A(s)\Delta s$$

ifadesinin çözüm matrisini temsil ettiğini görüyoruz. Böylece her $t,\tau \in \mathbb{T}$ ve $t \geq \sigma(\tau)$ için $\|A(t)\| \leq \alpha$ olmak üzere

$$\|\phi_A(t,\tau)\| = 1 + \int_\tau^t \big\|\phi_A\big(t,\sigma(s)\big)\big\|\|A(s)\|\Delta s \leq 1 + \alpha\beta$$

olur. Böylece ispatı tamamlamak için her $t \geq \sigma(\tau)$ için;

$$\|\phi_A(t,\tau)\|(t-\tau) = \int_\tau^t \|\phi_A(t,\tau)\|\,\Delta s$$

$$\leq \int_\tau^t \big\|\phi_A\big(t,\sigma(s)\big)\big\|\|\phi_A(\sigma(s),\tau)\|\Delta s$$

$$\leq \beta(1+\alpha\beta) \qquad \text{(i)}$$

olur.

Şimdi T ile $T \geq 2\beta(1+\alpha\beta)$ ve $t = \tau + T \in \mathbb{T}$ seçimi ile

$$\|\phi_A(t,\tau)\| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{(ii)}$$

elde edilir. (i) ve (ii)'deki sınırları kullanarak keyfi τ için $[\tau + kT, \tau + (k+1)T]_{\mathbb{T}}$ biçimindeki zaman skalasında aşağıdaki eşitsizliklere sahip oluruz.

$$\|\phi_A(t,\tau)\| \leq 1+\alpha\beta, \qquad t \in [\tau, \tau+T)_{\mathbb{T}},$$

$$\|\phi_A(t,\tau)\| = \|\phi_A(t,\tau+T)\phi_A(\tau+T,\tau)\|$$

$$\leq \|\phi_A(t,\tau+T)\|\|\phi_A(\tau+T,\tau)\|$$

$$\leq \frac{1+\alpha\beta}{2}, \quad t \in [\tau+T, \tau+2T)_{\mathbb{T}}$$

$$\|\phi_A(t,\tau)\| = \|\phi_A(t,\tau+2T)\phi_A(\tau+2T,\tau+T)\phi_A(\tau+T,\tau)\|$$

$$\leq \|\phi_A(t,\tau+2T)\|\|\phi_A(\tau+2T,\tau+T)\|\|\phi_A(\tau+T,\tau)\|$$

$$\leq \frac{1+\alpha\beta}{2^2}, \quad t \in [\tau+2T, \tau+3T)_{\mathbb{T}}.$$

Genel olarak herhangi $\tau \in \mathbb{T}$ için;

$$\|\phi_A(t,\tau)\| \leq \frac{1+\alpha\beta}{2^k}, \qquad t \in [\tau+kT, \tau+(k+1)T)_{\mathbb{T}}$$

olur. Şimdi azalan üstel sınır elde etmek için sınırlar seçiyoruz. $k \in \mathbb{N}_0$ ile $t \in [\tau+kT, \tau+(k+1)T)_{\mathbb{T}}$ için;

$$e_{-\lambda}(t,\tau) \geq e_{-\lambda}(\tau+(k+1)T,\tau) = \frac{1}{2^{k+1}}$$

ifadesine çözüm olarak $\gamma = 2(1+\alpha\beta)$ ve $\lambda(t), (-\lambda \in \mathfrak{R}^+)$ pozitif fonksiyonunu tanımlıyoruz.

$t \geq \tau$ ile tüm $t, \tau \in \mathbb{T}$ için $\|\phi_A(t,\tau)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,\tau)$ olacak şekilde azalan üstel sınırlar elde ediyoruz. Bu nedenle 4.1.2. Teoreminden üstel kararlılık elde edilmiş olur.

Örnek olarak $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğu zaman

$$e^{-\lambda(t-\tau)} \geq e^{-\lambda(\tau+(k+1)T-\tau)} = e^{-\lambda((k+1)T)} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

çözümdür. $k \in \mathbb{N}_0$ ve $t \in [\tau+kT, \tau+(k+1)T)_{\mathbb{T}}$ için $\lambda = -\frac{1}{T}\ln(\frac{1}{2})$'dir.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğu zaman ise,

$$(1-\lambda)^{t-\tau} \geq (1-\lambda)^{\tau+(k+1)T-\tau} = (1-\lambda)^{(k+1)T} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

çözümdür. $k \in \mathbb{N}_0$ ve $t \in [\tau + kT, \tau + (k+1)T)_{\mathbb{T}}$ için $\lambda = 1 - (\frac{1}{2})^{-1/T}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğunda $-\lambda \in \mathfrak{R}^+$'dır.

4.1.4. Teorem

$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t),\ x(t_0) = x_0$ zaman değişkenli lineer dinamik denklemi düzgün üstel kararlıdır ancak ve ancak düzgün asimptotik kararlıdır [2].

İspat

Varsayalım (6) sistemi düzgün üstel kararlı olsun. Bu $t \geq \tau$ için $\|\phi_A(\sigma(s), \tau)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, \tau)$ öyle ki $-\lambda \in \mathfrak{R}^+$ olacal şekilde γ ve $\lambda > 0$ sabitlerinin var olduğunu ifade eder. Açıkça düzgün kararlılığı ifade eder. Şimdi $\gamma > 0$ olmak üzere $t_0 + T \in \mathbb{T}$ için $e_{-\lambda}(t_0 + T, t_0) \leq \frac{\delta}{\gamma}$ olacak şekilde yeteri kadar büyük pozitif $T \in \mathbb{T}$ seçebiliriz. $t \in \mathbb{T}$ ile $t \geq t_0 + T$ ve herhangi bir t_0 ve x_0 için,

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &= \|\phi_A(t, t_2)x_0\| \\
&\leq \|\phi_A(t, t_2)\|\|x_0\| \\
&\leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0)\|x_0\| \\
&\leq \gamma e_{-\lambda}(t_0 + T, t_0)\|x_0\| \\
&\leq \delta\|x_0\|,\ t \geq t_0 + T.
\end{aligned}$$

Böylece (6) düzgün asimptotik kararlıdır. Şimdi tersini varsayalım. Düzgün asimptotik kararlılık tanımı ile (6) denklemi düzgün kararlıdır. Böylece $t \geq \tau$ için $\|\phi_A(t, \tau)\| \leq \gamma$ olacak şekilde $\gamma > 0$ sabiti vardır. $\delta = \frac{1}{2}$ seçelim. $t = t_0 + T \in \mathbb{T}$ ve (8) için uygun bir pozitif T sabiti seçelim. Verilen bir t_0 ve $\|x_a\| = 1$ olacak şekilde x_a için $\|\phi_A(t_0 + T, t_0)x_a\| = \|\phi_A(t_0 + T, t_0)\|$. $x_a = x_0$ olduğunda $x(t)$'nin (6) denklemindeki çözümü $\|x(t)\| = \|x(t_0 + T)\| = \|\phi_A(t_0 + T, t_0)x_a\| = \|\phi_A(t_0 + T, t_0)\|\|x_a\| \leq \frac{1}{2}\|x_a\|$'dır. Buradan ise $\|\phi_A(t_0 + T, t_0)\| \leq \frac{1}{2}$ elde edilir. Herhangi bir t_0 için x_a'nın varlığı kolayca görülür. Bu nedenle yukarıdaki eşitsizlik herhangi bir t_0 için geçerlidir. Böylece $t \geq \tau$ için $\|\phi_A(t, \tau)\| \leq$

γ ve $\|\phi_A(t_0 + T, t_0)\| \leq \frac{1}{2}$ ifadeleri 4.1.3 Teoremindeki gibi kullanılarak düzgün üstel kararlılık elde edilir.

4.2. Zaman Değişkenli Lineer Dinamik Sistemlerde Kararlılık

Bu bölümde

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{T} \tag{11}$$

formundaki regresif zaman değişkenli lineer dinamik sistemlerin kararlılığını ele alacağız. Buradaki amacımız, toplam enerjinin zaman geçtikçe durumunu gözlemleyerek zorlanmamış sistemin kararlılığını incelemektir. Eğer zaman geçtikçe sistemin toplam enerjisi azalırsa o zaman durum vektörü sıfır enerjiye karşılık gelen sabit bir değere (denge noktasına) yaklaşır. Sistemin kararlılığı durum denkleminin çözümünün büyüme karakteristiklerini içerir. Bu özellikler durum vektörünün uygun bir skaler fonksiyonu ile ölçülebilir. Burada (11) sisteminin çözümlerinin $t \to \infty$ iken sınırlılık ve asimptotik davranışı özelliklerinden bahsedeceğiz. Bu konu ile ilgili uygun bir skaler fonksiyon elde etmeye çalışacağız. $\mathbb{T}$ zaman skalasını sınırsız kabul edelim. Başlarken burada (11) lineer denklemin $t \to \infty$ iken $\|x(t)\|^2 \to 0$ olan bütün çözümlerini ele alacağız. (11) denkleminin herhangi bir çözümü için $\|x(t)\|^2 = x^T(t)x(t)$ skaler fonksiyonun t'ye göre delta türevi;

$$\begin{aligned} [\|x(t)\|^2]^{\Delta_T} &= x^{T^{\Delta}}(t)x(t) + x^{T^{\sigma}}(t)x^{\Delta}(t) \\ &= x^T(t)A^T(t)x(t) + x^T(t)\big(I + \mu(t)A^T(t)\big)A(t)x(t) \\ &= x^T(t)[A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t)]x(t) \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece elde edilmiş kuadratik form negatif tanımlı ise, yani her t için $[A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t)]$ negatif tanımlı ise o zaman $\|x(t)\|^2$, t artarken monoton azalacaktır. Her t için $[A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t)] \leq -\upsilon I$ olacak şekilde bir $\upsilon > 0$ varsa bu durumda $t \to \infty$ iken $\|x(t)\|^2 \to 0$ olacağını daha sonra göstereceğiz. Bu araştırmamızı formülize için kararlılığın analizinde yararlı olan zamanla değişen kuadratik formlar tanımlarız. Bu kuadratik formlara birleşik zaman skalası kuadratik Lyapunov fonksiyonları deriz. Bir simetrik matris olan $Q(t) \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ için genel kuadratik Lyapunov fonksiyonunu $x^T(t)Q(t)x(t)$ şeklinde yazabiliriz. Eğer $x(t)$, (11) denkleminin çözümü ise $x^T(t)Q(t)x(t)$ ifadesinin bir skaler sonucu olacağından amacımız her $t \geq t_0$ için $x^T(t)Q(t)x(t)$ ifadesinin değerinin davranışını incelemektir.

4.2.1. Tanım

$Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ olacak şekilde bir $Q(t)$ simetrik matrisini alalım. Birleşik zaman skalası kuadratik Lyapunov fonksiyonu $t \geq t_0$ için,

$$x^T(t)Q(t)x(t) \tag{12}$$

şeklindedir [2]. Bu ifadenin delta türevi ise,

$$\begin{aligned}[x^T(t)Q(t)x(t)]^{\Delta_T} &= x^T[A^T(t)Q(t) + (I + \mu(t)A^T(t))(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \\ &\quad \mu(t)Q^\Delta(t)A(t))] \\ &= x(t)\big[A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) + \\ &\quad \big(I + \mu(t)A^T(t)\big)Q^\Delta(t)\big(I + \mu(t)A(t)\big)\big]x(t)\end{aligned}$$

şeklindedir. Her t için elde edilen (12)'nin t'ye göre türevi alınarak elde edilen dinamik denklem;

$$A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) + \big(I + \mu(t)A^T(t)\big)Q^\Delta(t)\big(I + \mu(t)A(t)\big) = -M, \quad M = M^T$$

şeklindedir. Bilindik sürekli matris diferansiyel denklem ve ayrık fark denklemlerinin birleşiminden elde edilen $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$'deki ilgili kuadratik Lyapunov fonksiyonunu kolayca görebiliriz. Süreklilik durumu için $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğunda $\mu(t) \equiv 0$ olur. Böylece (11) deki sürekli sistem

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geq t_0 \tag{13}$$

şeklinde olur. (13) deki kuadratik Lyapunov fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dt}[x^T(t)Q(t)x(t)] = x^T\big[A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \dot{Q}(t)\big]x(t)$$

olur. Burada

$$A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \dot{Q}(t) = -M, \quad M = M^T$$

bilindik matris diferansiyel sistemi (13) deki sürekli sistemin türevli halidir [5,6,7,8,9]. $\mathbb{Z}$'deki diferansiyel denklem sistemlerinin özdeğerli formda geleneksek yazılışını unutmayalım. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ayrık durumu için

$$x(t+1) = A_R(t)x(t), \;\; t \geq t_0 \tag{14}$$

şeklindedir. Fark formu

$$x^{\Delta}(t) = \Delta x(t) = x(t+1) - x(t) = A(t)x(t), \;\; t \geq t_0$$

olarak yazılır. Böylece fark formundan yinelemeliye geçmek $A(t)$ matrisi üzerinde bir birim kaydırma gerektirir. Yani,

$$x(t+1) = \big(I + A(t)\big)x(t) = A_R(t)x(t)$$

burada $A_R = (I + A)$'dır.

Şimdi birleşik zaman skalası kuadratik Lyapunov fonksiyonunu görelim. Burada $\mathbb{Z}$'de $\mu(t) \equiv 1$ olduğuna dikkat edelim.

$$x^T(t)[A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + A^T(t)Q(t)A(t) + (I + A(t))\Delta Q(t)(I + A(t))]x(t)$$

$$= x^T(t)[(A_R^T(t) - I)Q(t) + Q(t)(A_R(t) - I) + (A_R^T(t) - I)Q(t)(A_R(t) - I) + A_R^T(t)\Delta Q(t)A_R(t)]x(t)$$

$$= x^T(t)[A_R^T(t)Q(t) - Q(t) + Q(t)A_R(t) - Q(t) + A_R^T(t)Q(t)A_R(t) - A_R^T(t)Q(t) - Q(t)A_R(t) + Q(t) + A_R^T(t)\Delta Q(t)A_R(t)]x(t)$$

$$= x^T(t)[-Q(t) + A_R^T(t)Q(t)A_R(t) + A_R^T(t)\Delta Q(t)A_R(t)]x(t)$$

$$= x^T(t)\big[-Q(t) + A_R^T(t)Q(t)A_R(t) + A_R^T(t)\big(Q(t+1) - Q(t)\big)A_R(t)\big]x(t)$$

$$= x^T(t)[A_R^T(t)Q(t+1)A_R(t) - Q(t)]x(t)$$

elde edilir. Burada $A_R^T(t)Q(t+1)A_R(t) - Q(t) = -M, \; M = M^T$ ifadeleri Bu (14) yinelemeli sistem iyi bilinen ayrık matris yinelemeli denklemleridir [9,10,11]. Granül fonksiyonu olan $\mu(t)$ zaman değişkenli olduğundan birleşik zaman skalasında matris dinamik denklemlerini sürekli ve ayrık olayların içinde birleştirebildiğimizi kolayca gösterebiliriz. Bu birleşik zaman skalasında matris dinamik denklemi, sadece sürekli ve ayrık zamanın iki özel durumunu birleştirmekle kalmaz, ayrıca bu kavramları keyfi $\mathbb{T}$ zaman skalasına genişletir ve araştırmamızda önemli bir rol oynar [2].

4.3. Düzgün Kararlılık

Bu bölümde (11) sisteminin düzgün kararlılığının kriterlerini sunacağız. Aşağıda teoremle vereceğimiz kriterler Lyapunov kriterinin ayrık ve sürekli davranışlarının bir genelleştirilmesidir. Düzgün kararlılık (11) sisteminin çözümlerinin her zaman sınırlı olmasını gerektirmektedir ve sıradaki teoremde ise bu sistemin düzgün kararlılığı için yeterli koşullar verilecektir. Stratejimiz, $Q(t)$ matrisi üzerine yeterli şartları bulmaktır öyle ki karşılık gelen kuadratik formu düzgün kararlılığını versin.

4.3.1. Teorem

Her $t \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $Q(t) \in C_{rd}^{1}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ simetrik matrisi varsa (11) sistemi düzgün kararlıdır:

i. $\eta I \leq Q(t) \leq \rho I$
ii. $A^T(t)Q(t) + (I + \mu(t)A^T(t))(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^\Delta(t)A(t)) \leq 0$

burada $\eta, \rho \in \mathbb{R}^+$ biçimindedir [2].

İspat

ii'den ve [1,Tanım 1.71]'den herhangi bir t_0 ve $x(t_0) = x_0$ ve $t \geq t_0$ için;

$$x^T(t)Q(t)x(t) - x^T(t_0)Q(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t} [x^T(s)Q(s)x(s)]^\Delta \Delta s \leq 0$$

dır. *i*'den

$$\eta\|x(t)\|^2 \leq x^T(t)Q(t)x(t) \leq x^T(t_0)Q(t_0)x(t_0) \leq \rho\|x(t_0)\|^2$$

dir. Bu da

$$\|x(t)\| = \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\|x(t_0)\|$$

olduğunu gösterir. Bu son ifade her t_0 ve $x(t_0) = x_0$ için geçerli olduğundan (11) denklemi düzgün kararlıdır.

Bu teoremi şöyle bir örnekle açıklayalım:

Örnek

$x^{\Delta}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -a(t) \end{bmatrix} x(t)$ zaman değişkenli lineer dinamik sistemini düşünelim ve bu sistemin düzgün kararlı olması için $a(t)$ fonksiyonunun sağlaması gereken koşulları tespit edelim. Burada her $t \in \mathbb{T}$ için $a(t) \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$'dir. Eğer $Q(t) = I$ seçersek,

$$x^T(t)Q(t)x(t) = x^T(t)x(t) = \|x(t)\|^2$$

olur. $\eta = \rho = 1$ olduğunda 4.3.1. Teoreminin i koşulu sağlanır. İkinci koşulu sağlamak için;

$$A^T(t)Q(t) + \left(I + \mu(t)A^T(t)\right)(Q^{\Delta}(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^{\Delta}(t)A(t)) \leq 0$$

eşitsizliğinde $Q(t) = I$ olduğunda $Q^{\Delta}(t) = 0$ olduğunu görüyoruz. Yani;

$$A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t) \leq 0$$

olur. Şimdi

$$A(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -a(t) \end{bmatrix}, A^T(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -a(t) \end{bmatrix}$$

ve

$$\mu(t)A^T(t)A(t) = \begin{bmatrix} 5 & a(t) - 2 \\ a(t) - 2 & a(t)^2 + 1 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t) = \begin{bmatrix} 5\mu(t) - 4 & (a(t) - 2)\mu(t) \\ (a(t) - 2)\mu(t) & (a(t)^2 + 1)\mu(t) - 2a(t) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi herhangi bir 2×2 tipinde bir $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ matrisi alalım. Bu matrisin negatif yarı tanımlı olması için $-m_{11}, -m_{22} \geq 0$ ve $\det(M) \geq 0$ olmalıdır. Bizim,

$$A^*(t) \coloneqq A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t)$$

matrisimiz için;

$-a_{11}^* = 4 - 5\mu(t) \geq 0$ burada $0 \leq \mu(t) \leq \frac{4}{5}$,

$-a_{22}^* = -((a(t)^2 + 1)\mu(t) - 2a(t)) \geq 0$ ve

$det\big(A^*(t)\big) = 4\mu(t)^2 a(t)^2 - 4\mu(t)a(t)^2 + 4\mu(t)^2 a(t) - 10\mu(t)a(t) + 8a(t) + \mu(t)^2 - 4\mu(t) \geq 0$

olmalıdır. $0 \leq \mu(t) \leq \frac{4}{5}$ aralığındaki her bir değer için $-a_{22}^* \geq 0$ olduğunda $\det\big(A^*(t)\big) \geq 0$ olduğunu göstermek kolaydır. Bu nedenle sadece ikinci eşitsizlikle ilgilenmemiz gerekir. Eğer $\mu(t) = \frac{4}{5}$ ise $a(t)$ fonksiyonunun alacağı tek değer 2'dir. Eğer $\mu(t) = \frac{1}{2}$ seçersek $a(t)$ fonksiyonunun $\frac{1}{2} \leq a(t) \leq \frac{7}{2}$ aralığında izin verilen değerlerden oluşan aralıktadır. Eğer $\mu(t) = \frac{2}{5}$ seçersek $a(t)$ fonksiyonunun $\frac{1}{3} \leq a(t) \leq \frac{9}{2}$ aralığında izin verilen değerlerden oluşan başka bir aralık oluştururuz. $\mu(t) \to 0$ iken aralığın sonsuz uzunluğa açılması ve 0(sıfır) ile alttan sınırlı olması ilginçtir. Bu nedenle $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ iken $a(t)$ için tek gereklilik her $a \in \mathbb{T}$ için pozitif olmasıdır.

4.4. Düzgün Üstel Kararlılık

Şimdi (11) sisteminin düzgün üstel kararlı olması için yeterli olan kriterleri sunacağız. Ayrık ve sürekli lineer sistemlerde 4.4.2. Teoremde sunulan kriterler yine düzgün üstel kararlılık için Lyapunov kriterlerinin genelleştirilmesidir, buna Hahn [12]'deki klasik metin ile [7,11]'deki çalışmalar eşlik edebilir. Düzgün kararlılıktan düzgün üstel kararlılığa geçerken basit ama çok güçlü bir farklılık vardır. Pozitif tanımlı $Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$'nin simetrik olması kesin negatif tanımlı delta türevi ile birlikte, pozitif tanımlı matrisler tarafından alttan ve üstten sınırlandırılmasını gerektirir. Yani bazı $\varepsilon > 0$ için;

$$[x^T(t)Q(t)x(t)]^\Delta = -\varepsilon x^T(t)x(t).$$

(11)'in üstten sınırlı bütün çözümlerinin $t \to \infty$ iken azalan, üstel olarak sıfıra gittiğini göstereceğiz. Bu düzgün üstel kararlık (11) sisteminin düzgün kararlı olduğunu söyler fakat tersi doğru değildir. Aşağıdaki teoremi ispatlamak için Gronwall eşitsizliğini göstereceğiz.

4.4.1. Teorem (Gronwall Eşitsizliği)

$x, f \in C_{rd}$ ve $p \in \Re^+, p \geq 0$ olsun. O zaman her $t \in \mathbb{T}$ için

$$x(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} x(\tau)p(\tau)\Delta\tau$$

eşitsizliği, her $t \in \mathbb{T}$ için

$$x(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} e_p\big(t, \sigma(\tau)\big)f(\tau)p(\tau)\Delta\tau$$

eşitsizliğini ifade eder [1].

4.4.2. Teorem

Her $t \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ simetrik matrisi varsa (11) zaman değişkenli lineer dinamik sistemi düzgün üstel kararlıdır:

i. $\eta I \leq Q(t) \leq \rho I$

ii. $A^T(t)Q(t) + \big(I + \mu(t)A^T(t)\big)\Big(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^\Delta(t)A(t)\Big) \leq -vI$

burada $\eta, \rho, v \in \mathbb{R}^+, \frac{-v}{\rho} \in \Re^+$ [2].

İspat

ii' den (11)'de herhangi bir başlangıç koşulu t_0 ve $x(t_0) = x_0$ olan $x(t)$ çözümü için her $t \geq t_0$ olmak üzere

$$[x^T(t)Q(t)x(t)]^\Delta = -v\|x(t)\|^2$$

olduğunu görürüz. Ayrıca her $t \geq t_0$ için i koşulu bize

$$x^T(t)Q(t)x(t) \leq \rho\|x(t)\|^2$$

olduğunu söyler. Böylece her $t \geq t_0$ için,

$$[x^T(t)Q(t)x(t)]^\Delta \leq \frac{-v}{\rho} x^T(t)Q(t)x(t)$$

dir. $\frac{-v}{\rho} \in \Re^+$ olarak Gronwall'ın 4.4.1. Teoremindeki eşitsizliğinin zaman skalası versiyonunu kullanabiliriz. $t \geq t_0$ için;

$$x^T(t)Q(t)x(t) \leq x^T(t_0)Q(t_0)x(t_0)e_{\frac{-v}{\rho}}(t, t_0) \qquad (15)$$

i'deki $\eta I \leq Q(t)$ ve (15) ifadesine eş değer olan $\eta\|x(t)\|^2 \leq x^T(t)Q(t)x(t)$ eşitsizliğinin η ile bölünmesinden elde edilen sonuç, $t \geq t_0$ için;

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\eta} x^T(t)Q(t)x(t) \leq \frac{1}{\eta} x^T(t_0)Q(t_0)x(t_0)e_{\frac{-v}{\rho}}(t, t_0)$$

elde edilir.

$$x^T(t_0)Q(t_0)x(t_0) \leq \rho\|x(t_0)\|^2$$

iken bu durum

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\rho}{\eta}\|x(t_0)\|^2 e_{\frac{-v}{\rho}}(t, t_0)$$

olduğunu ifade eder. Buradan da $t \geq t_0$ için,

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \sqrt{\frac{\rho}{\eta} e_{\frac{-v}{\rho}}(t, t_0)}$$

elde ederiz. Bu durum keyfi t_0 ve $x(t_0)$ için sağlanır. Böylece düzgün üstel kararlılık elde edilmiş olur.

Düzgün ve üstel kararlılık arasındaki farkı göstermek için başka bir örnek verelim.

Örnek

Tekrar $x^{\Delta}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -a(t) \end{bmatrix} x(t)$ zaman değişkenli lineer dinamik sistemini düşünelim. $a(t) = \sin(t) + 2$ alalım, her $t \in \mathbb{T}$ için $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$'de olduğu açıktır. Dikkat edilmelidir ki buradaki sinüs fonksiyonu zaman skalası trigonometrik fonksiyon olan $\sin_1(t, 0)$ değil, alışılmış sinüs fonksiyonudur.

Tekrar $Q(t) = I$ seçelim, böylece

$$x^T(t)Q(t)x(t) = x^T(t)x(t) = \|x(t)\|^2$$

dir. 4.4.2. Teoremin i koşulunda $\rho = \eta = 1$ için sağlanır. İkinci koşulu sağlanması için

$$A^T(t)Q(t) + \left(I + \mu(t)A^T(t)\right)\left(Q^{\Delta}(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^{\Delta}(t)A(t)\right) \leq -vI$$

eşitsizliğinde $Q(t) = I$ olduğundan $Q^{\Delta}(t) = 0$ olduğunu görüyoruz. Böylece

$$A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t) \leq -vI$$

sağlanır. Herhangi bir 2×2 tipinde bir $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ matrisi alalım. Bu matrisin negatif tanımlı olması için $-m_{11} > 0$ ve $\det(M) > 0$ olmalıdır. Bu matrisimiz için

$$A^*(t) \coloneqq A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t)$$

olarak tanımlayalım.

$-a_{11}^* = 4 - 5\mu(t) > 0$ ve buradan $0 \leq \mu(t) < \frac{4}{5}$ dir.

$det\left(A^*(t)\right) = 4sin^2(t)\mu(t)^2 + 20\, sin(t)\, \mu(t)^2 + 25\mu(t)^2 - 4sin^2(t)\mu(t) - 26sin(t)\mu(t) - 40\mu(t) + 8\, sin(t) + 16 > 0$

olmalıdır. Her $t \in \mathbb{T}$ için $0 \leq \mu(t) < \frac{1}{2}$ olduğu sürece $det\left(A^*(t)\right) > 0$'dır.

Örneğin;

$$\mathbb{T} = \mathbb{P}_{0.6,\ 0.4} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [k, k + 0.6]$$

için bu zaman skalasında

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & eğer\ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k, k+0.6] \\ 0.4, & eğer\ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k+0.6] \end{cases}$$

dir. İşte her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) \leq \frac{1}{2}$ olur. Burada önceki örnekte izin verilen değerlerin tüm t değerleri için $\frac{1}{2} \leq a(t) < \frac{7}{2}$ olduğu görülür. Herhangi bir t için $A^*(t)$ matrisinin özdeğerleri $\mu(t) \leq \frac{1}{2}$ iken $-\frac{1}{2}$'den küçük bir maksimum değere sahiptir. $\mu(t)$, 0'a doğru azaldıkça maksimum değer de azalır. Bu nedenle $A^*(t)$ matrisinin özdeğerlerinin maksimumu $-\frac{1}{2}$'den küçüktür. Yani $A^*(t)$ negatif tanımlıdır. Böylece $v = \frac{1}{2}$ seçebiliriz. $-\frac{v}{\rho} = -\frac{1}{2} \in \mathfrak{R}^+$ olduğunu kontrol ettikten sonra şimdi $x(t_0)$ başlangıç değerine sahip $x(t)$'nin çözümünün normunun her zaman pozitif azalan zaman skalası üstel fonksiyonu olan $\|x(t_0)\|\sqrt{e_{-\frac{1}{2}}(t, t_0)}$ ile sınırlandığını biliyoruz. $Q(t) = I$ için $A^*(t)$ matrisi 4.4.2. Teoreminin i ve ii koşullarını sağlar. Böylece yukarıdaki sistem düzgün üstel kararlıdır deriz.

4.5. $\boldsymbol{Q(t)}$ Matrisini Bulma

İlk olarak zaman skalası Lyapunov matris denklemi olan;

$$A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) = -M \tag{16}$$

ifadesinin zaman skalasına özgü, simetrik ve pozitif tanımlı çözüm matrisi için kapalı bir form vereceğiz.

Uyarı: Zaman skalası Lyapunov matris denkleminin, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ durumu için

$$XA(t) + B(t)X = -M$$

Sylvester matris denklemi ile ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumu için

$$B(t)XA(t) - X = -M$$

Stein denkleminin birleşimi olduğuna dikkat edelim [13].

$Q(t)$ matrisinin (16) zaman skalasında Lyapunov matris denkleminin bir çözümü olduğunu ispatlamak için önce [1]'de bulunan teoremi ve sonucu verelim.

4.5.1. Teorem

$A \in \mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ ve C türevlenebilir olduğunu varsayalım. Eğer

$$C^{\Delta} = A(t)C - C^{\sigma}A(t)$$

matris dinamik denkleminin bir çözümü C ise

$$C(t)e_A(t,s) = e_A(t,s)C(s)$$

olur [2].

Sonuç

$A \in \mathfrak{R}$ ve C de bir sabit matris olsun. C, $A(t)$ ile değişmeli ise C, $e_{A(t)}$ ile de değişmelidir. Özel olarak $A(t)$, $e_{A(t)}$'ye göre sabit matris ise $A(t)$, $e_{A(t)}$ ile de sıra bağımsızdır [2].

Şimdi önemli bir sonuç ispatlayacağız.

4.5.2. Teorem

$n \times n$ tipinde $A(t)$ matrisi her bir $t \geq t_0$ için bütün özdeğerlere, karşılık gelen Hilger çemberi içinde sahip olsun. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}$ için öyle bir $\mathbb{S}$ zaman skalası vardır ki $I := [0,\infty)_{\mathbb{S}}$ üzerinden integrasyon ile (16)'nın tek çözümü

$$Q(t) = \int_I e_{A^T(t)}(s,0)Me_{A(t)}(s,0)\Delta s \tag{17}$$

olarak verilir. Ayrıca M pozitif tanımlı ise her $t \geq t_0$ için $Q(t)$ pozitif tanımlıdır [2].

İspat

Öncelikle keyfi bir $t \in \mathbb{T}$ sabitleyelim. $A(t)$'nin bütün öz değerleri ilgili Hilger çemberinde olduğundan (17) yakınsaktır [14], dolayısıyla $Q(t)$ iyi tanımlıdır. Şimdi her sabit $t \in \mathbb{T}$ için $Q(t)$'nin (16)'nın bir çözümü olduğunu göstereceğiz.

Durum 1: $\mu(t) > 0$. $\mu(t)$ pozitif bir sayı olduğunda zaman skalasını $\mathbb{S} = \mu(t)N_0$ olarak tanımlarız. Yani her bir $s \in \mathbb{S}$ için $\mu(s) \equiv \mu(t)$ olur. Başka bir deyişle $\mathbb{S}$ sabit granüle sahiptir. Şimdi $I = [0, \infty)_{\mathbb{S}}$ üzerinden integral ile (17)'yi aşağıdaki gibi elde ederiz;

$$A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t)$$

$$= \int_I A^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)Me_{A(t)}(s,0)\Delta s + \int_I A^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)Me_{A(t)}(s,0)\Delta s$$

$$+ \mu(t)\int_I A^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)Me_{A(t)}(s,0)A(t)\Delta s$$

$$= \int_I A^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)Me_{A(t)}(s,0)[I + \mu(t)A(t)]\Delta s$$

$$+ \int_I e_{A^T(t)}(s,0)Me_{A(t)}(s,0)A(t)\Delta s$$

$$= \int_I A^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)M[I + \mu(t)A(t)]e_{A(t)}(s,0)\Delta s$$

$$+ \int_I e_{A^T(t)}(s,0)MA(t)e_{A(t)}(s,0)\Delta s$$

$\mu(s) = \mu(t)$ olduğunda son satır ile devam edelim,

$$= \int_I A^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)M[I + \mu(t)A(t)]e_{A(t)}(s,0)\Delta s$$

$$+ \int_I e_{A^T(t)}(s,0)MA(t)e_{A(t)}(s,0)\Delta s$$

$$= \int_I [e_{A^T(t)}(s,0)]^{\Delta_s} M e^{\sigma}{}_{A(t)}(s,0)\Delta s + \int_I e_{A^T(t)}(s,0) M [e_{A(t)}(s,0)]^{\Delta_s}\Delta s$$

$$= \int_I [e_{A^T(t)}(s,0) M e_{A(t)}(s,0)]^{\Delta_s}\Delta s$$

$$= [e_{A^T(t)}(s,0) M e_{A(t)}(s,0)]|_0^{\infty}$$

$$= -M.$$

Durum 2: $\mu(t) = 0$. $\mu(t) = 0$ olduğunda $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ zaman skalasını tanımlarız. Şimdi $I = [0,\infty)_{\mathbb{S}}$ üzerinden integral ile (17)'yi aşağıdaki gibi elde ederiz;

$$A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t)$$

$$= A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t)$$

$$= \int_I A^T(t) e_{A^T(t)}(s,0) M e_{A(t)}(s,0)\Delta s + \int_I e_{A^T(t)}(s,0) M e_{A(t)}(s,0) A(t)\Delta s$$

$$= \int_I A^T(t) e^{A^T(t)-s} M e^{A(t)-s} ds + \int_I e^{A^T(t)-s} M e^{A(t)-s} A(t) ds$$

$$= \int_I \frac{d}{ds}\left[e^{A^T(t)-s}\right] M e^{A(t)-s} + e^{A^T(t)-s} M \frac{d}{ds}\left[e^{A(t)-s}\right] ds$$

$$= \int_I \frac{d}{ds}\left[e^{A^T(t)-s} M e^{A(t)-s}\right] ds$$

$$= \left[e^{A^T(t)-s} M e^{A(t)-s}\right]|_0^{\infty}$$

$$= -M.$$

(17)'de tanımlanan $Q(t)$ her $t \in \mathbb{T}$ için (16)'da bir çözümdür, burada $t \in \mathbb{T}$ keyfi ve sabittir. Şimdi $Q(t)$'nin tek çözüm olduğunu göstereceğiz, bunun için $Q^*(t)$'nin (16)'nın başka bir çözümü olduğunu varsayalım. Burada,

$$A^T(t)[Q^*(t) - Q(t)] + [Q^*(t) - Q(t)]A(t) + \mu(t)A^T(t)[Q^*(t) - Q(t)]A(t) = 0$$

ifadesinden

$$e_{A^T(t)}(s,0)A^T(t)[Q^*(t) - Q(t)]e_{A(t)}(s,0) + e_{A^T(t)}(s,0)[Q^*(t) - Q(t)]A(t)e_{A(t)}(s,0) + \mu(t)e_{A^T(t)}(s,0)A^T(t)[Q^*(t) - Q(t)]A(t)e_{A(t)}(s,0) = 0, \quad s \geq 0$$

olur. Buradan da,

$$[e_{A^T(t)}(s,0)[Q^*(t) - Q(t)]e_{A(t)}(s,0)]^{\Delta_s} = 0, \quad s \geq 0 \tag{18}$$

elde ederiz. (18)'i $[0,\infty)_{\mathbb{S}}$ aralığında integrallersek,

$$\left[e_{A^T(t)}(s,0)[Q^*(t) - Q(t)]e_{A(t)}(s,0)\right]\Big|_0^{\infty} = -\big(Q^*(t) - Q(t)\big) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu da $Q^*(t) = Q(t)$ anlamına gelir.

Son olarak M'nin pozitif tanımlı olduğunu varsayalım. Hatırlayalım, $x \neq 0$ her $n \times 1$ vektör için M pozitif tanımlı olduğunda $x^T M x > 0$ olduğunu ifade eder. Buradan $Q(t)$ açıkça simetriktir. $Q(t)$'nin pozitif tanımlı olduğunu ispatlamak için, M pozitif tanımlı olduğundan

$$x^T(t)Q(t)x(t) = \int_I x^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)\, M e_{A(t)}(s,0)x(t)\Delta s > 0$$

ifadesi doğrudur, burada $x(t)$'nin sıfırdan farklı herhangi bir $n \times 1$ vektör olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla $Q(t)$ pozitif tanımlıdır.

4.6. Yavaş Değişen Sistemler

Zaman değişkenli matrislerin özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki yerleşimi sistem kararlılığını veya üstel kararlılığını garanti etmek için gerek yeter koşuldur ve zaman skalasındaki zaman değişkenli lineer sistemin kararlılığı çok önemli bir çalışma olan [14]'te derinlemesine incelenmiştir. Ancak özdeğer yerleşimi tek başına her zaman değişkenli lineer dinamik sistemin genel durumunda ne yeterli ne de gereklidir.

Sistem matrisleri sınırlı olan ve özdeğerleri negatif reel kısımlı olan fakat yine de kararsız olan zaman değişkenli sistem örnekleri vardır [5,15,9]. Ancak sınırlılık ve yavaş değişen sistem matrisi gibi bazı koşullar altında üstel kararlılık kompleks düzlemde doğru özdeğer yerleşimi ile elde edilebilir [6,28,16].

Başlangıç olarak zaman skalalarında zaman değişkenli lineer sistemler için bir kararlılık bölgesinin tanıtıldığı bir tanım veriyoruz. Bu tanım aslında $\lambda \in \mathbb{C}$ sabitinin ortalama süresinin negatif ve her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve $1 + \mu(t)\lambda \neq 0$ olması durumunda λ sayısı üstel kararlılık regresif kümesi olan $\mathscr{S}(\mathbb{T})$ içinde kaldığını söyler.

4.6.1. Tanım

(11) dinamik sisteminde $A(t) \equiv A$ sabit iken üstel kararlılık regresif kümesi

$$\mathscr{S}(\mathbb{T}) \quad = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \lim_{T\to\infty} sup \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^{T} \lim_{\searrow \mu(t)} \frac{\log|1 + s\lambda|}{s} \Delta\tau < 0 \right\} \qquad (19)$$

olarak tanımlanır. Bu küme her zaman $\{\lambda \in \mathbb{C}, Re(\lambda) < 0\}$ içinde kalır [14].

Aşağıdaki önemli teoremde $A(t)$ zaman değişkenli matrisinin $\lambda_i(t)$ özdeğerlerinin ve $i = 1,2,3, \dots, n$ ve her $t \geq t_0$ için karşılık gelen Hilger çemberinde bulunmasına ihtiyacımız vardır. Hilger çemberinin

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \left| \frac{1}{\mu(t)} + \lambda(t) \right| < \frac{1}{\mu(t)} \right\} \subset \mathscr{S}\,(\mathbb{T})$$

olduğunu hatırlayalım. Son olarak, 4.3.1 Teoremde kullanılmak üzere Kronecker çarpımının tanımını vereceğiz. Kronecker çarpım, boyutlardan bağımsız iki matrisin çarpımına izin verir [2].

4.6.2. Tanım

$n_A \times m_A$ boyutlu A matrisi ve $n_B \times m_B$ boyutlu B matrisinin

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m_A}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_A1} & \cdots & a_{n_Am_A} \end{bmatrix}$$

olan $n_A n_B \times m_A m_B$ matristir [2]

4.6.1. Yardımcı Teorem

$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsunlar;

i. $(A \otimes I_n)(I_m \otimes B) = A \otimes B = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n)$

ii. $i = 1,2,3,\dots,m$ ve $j = 1,2,3,\dots,n$ için λ_i ve γ_j sırasıyla A ve B için özdeğerler olsun. Bu durumda $A \otimes B$'nin özdeğerleri $\lambda_i\gamma_j$'dir. Burada $i = 1,2,3,\dots,m$ ve $j = 1,2,3,\dots,n$ şeklindedir ve $(A \otimes I_n) + (I_m \otimes B)$'nin özdeğerleri ise $\lambda_i + \gamma_j$'dir. Burada $i = 1,2,3,\dots,m$ ve $j = 1,2,3,\dots,n$ şeklindedir [17].

Şimdi zaman değişkenli yavaş değişen sistemler için düzgün üstel kararlılık teoremini verelim.

4.6.1. Teorem *(yavaş zaman değişkenli sistemlerde üstel kararlılık)*

$A(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ ile (11)'deki regresif zaman değişkenli lineer dinamik sistem için μ_{max}, ${\mu^\Delta}_{max} < \infty$ değerine sahip olduğumuzu varsayalım. $\|A(t)\| < \alpha$ olacak şekilde bir $a > 0$ sabiti var olsun. Ayrıca $A(t)$'nin her $\lambda_i(t)$ noktasal özdeğerleri için $Re_\mu[\lambda_i(t)] \leq -\varepsilon < 0$ olacak şekilde bir $0 < \varepsilon < \frac{1}{\mu_{max}} \leq \frac{1}{\mu(t)}$ sabiti var olsun. Bu durumda eğer $\|A^\Delta(t)\| \leq \beta$ ise (6) sistemi düzgün üstel kararlı olacak şekilde bir $\beta > 0$ sabiti vardır [2].

İspat

Her $t \in \mathbb{T}$ için $Q(t)$ fonksiyonu

$$A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) = -I \tag{20}$$

denkleminin çözümü olsun. 4.2.4. Teorem, her bir t için $Q(t)$'nin varlığını, tekliğini ve pozitifliğini garanti eder. Ayrıca her $t \in \mathbb{T}$ için

$$Q(t) = \int_I e_{A^T(t)}(s,0)e_{A(t)}(s,0)\Delta s$$

eşitliğinin (19) için bir çözümü olduğuna ve burada $I \coloneqq [0,\infty)_{\mathbb{S}}$ ve $\mathbb{S} = \mu(t)\mathbb{N}_0$ olduğuna dikkat edelim. İspatın kalan kısmı için $Q(t)$'nin 4.2.2. Teoreminin koşullarının sağlanabilmesi için kullanılabileceğini ve böylece (11)'in düzgün üstel kararlılığının elde edilebileceğini göstereceğiz. $Q(t)$ matrisinin sınırlılığı göstermek için Kronecker çarpımını ve bazı özelliklerini kullanacağız. v_i ile I' nın i. sütunu ve $q_i(t)$ ile de $Q(t)$'nin i. sütunu gösterelim. O zaman;

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

$n \times 1$ vektörlerini tanımlayalım. (20)'deki $n \times n$ matris denkleminin $n^2 \times 1$ vektör denklemi olan

$$\left[(A^T(t) \otimes I) + \left(I \otimes A^T(t)\right) + \mu(t)\left(A^T(t) \otimes A^T(t)\right)\right]q(t) = -v \tag{21}$$

gibi yazılabildiği doğrulanabilir. Şimdi $q(t)$'nin üstten sınırlı ve her $t \in \mathbb{T}$ için $Q(t) \leq \rho I$ olacak şekilde bir pozitif ρ sabitinin var olduğunu kanıtlayacağız. $A(t) \in \mathfrak{R}$ iken, $A(t)$'nin $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ noktasal özdeğerleri de ayrıca regresif olur. Ayrıca $I \in \mathfrak{R}$ olduğuna dikkat edelim. 4.3.1. Yardımcı Teoreminde Kronecker çarpımı daha önce belirtilen özelliklerine göre $(A^T(t) \otimes I)$'nın ve $\left(I \otimes A^T(t)\right)$'nin noktasal özdeğerleri de $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$'dir. $(\mathfrak{R}\left(\mathbb{T}, R^{n^2 \times n^2}\right), \oplus)$ grup olduğundan $(A^T(t) \otimes I), \left(I \otimes A^T(t)\right) \in \mathbb{R}$ olup buradan her $t \in \mathbb{T}$ için;

$$\begin{aligned} (A^T(t) \otimes I) \oplus \left(I \otimes A^T(t)\right) &= (A^T(t) \otimes I) + (I \otimes A^T(t)) \\ &\quad + \mu(t)(A^T(t) \otimes I)(I \otimes A^T(t)) \\ &= (A^T(t) \otimes I) + \left(I \otimes A^T(t)\right) \\ &\quad + \mu(t)(A^T(t) \otimes A^T(t)) \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

olur. Şimdi $(A^T(t) \otimes I) \oplus \left(I \otimes A^T(t)\right)$ ifadesinin sıfıra eşit bir özdeğere sahip olmadığını gösterelim. Bu durumda $\det\left[(A^T(t) \otimes I) \oplus \left(I \otimes A^T(t)\right)\right] \neq 0$ olacaktır. Elde ettiğimiz

$$(A^T(t) \otimes I) \oplus \left(I \otimes A^T(t)\right) = (A^T(t) \otimes I) + \left(I \otimes A^T(t)\right) + \mu(t)(A^T(t) \otimes A^T(t))$$

ifadesinin n^2 tane noktasal özdeğerleri her $i, j = 1,2,3, \dots, n$ için;

$$\lambda_{i,j}(t) = \lambda_i(t) \oplus \lambda_j(t) = \lambda_i(t) + \lambda_j(t) + \mu(t)\lambda_i(t)\lambda_j(t) \in \Re$$

olur.

Hatırlarsak $Re_\mu[\lambda_i(t)] \leq -\varepsilon$ iken $|1 + \mu(t)\lambda_i(t)| < 1$ olduğunu biliyoruz. Her $t \in \mathbb{T}$ ve her $i,j = 1,2,3,\dots,n$ için;

$$\begin{aligned} Re_\mu\left[\lambda_i(t) \oplus \lambda_j(t)\right] &= \frac{\left|1+\mu(t)(\lambda_i(t) \oplus \lambda_j(t))\right|-1}{\mu(t)} \\ &= \frac{|1+\mu(t)\lambda_i(t)|\left|1+\mu(t)\lambda_j(t)\right|-1}{\mu(t)} \\ &< \frac{\left|1+\mu(t)\lambda_j(t)\right|-1}{\mu(t)} \\ &= Re_\mu[\lambda_i(t)] \\ &\leq -\varepsilon \end{aligned}$$

olur.

Bu nedenle $0 < \varepsilon < \frac{1}{\mu_{max}} \leq \frac{1}{\mu(t)}$ için $Re_\mu\left[\lambda_i(t) \oplus \lambda_j(t)\right]$'dir ve

$$0 < \varepsilon \leq Re_\mu\left[\lambda_i(t) \oplus \lambda_j(t)\right] \leq \left[\lambda_i(t) \oplus \lambda_j(t)\right]$$

ilişkisine sahibiz. Böylece $t \in \mathbb{T}$ olduğunuda;

$$\left|\det\left[(A^T(t) \otimes I) \oplus \left(I \otimes A^T(t)\right)\right]\right| = \left|\prod_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_i(t) \oplus \lambda_j(t)\right]\right| \geq \varepsilon^{n^2} \qquad (22)$$

olur.

Şimdi, (22)'deki determinant her t için sıfırdan farklı ve sıfırdan farklı sınırlanmış olduğu için (22)'deki $\left[(A^T(t) \otimes I) \oplus \left(I \otimes A^T(t)\right)\right]$ ifadesinin $t \in \mathbb{T}$ iken terslenebilir olduğu açıktır $A(t)$ ve $\mu(t)$ üstten sınırlı olduğu için $(A^T(t) \otimes I)$ üstten sınırlıdır ve dolayısıyla tersi olan

$$(A^T(t) \otimes I) \oplus \left(I \otimes A^T(t)\right)^{-1}$$

ifadesi de her $t \in \mathbb{T}$ için sınırlıdır. (21)'in sağ tarafı sabit olduğundan, her $t \in \mathbb{T}$ için $q(t)$'nin sınırlı olduğu ve dolayısıyla her $t \in \mathbb{T}$ için $Q(t) \leq \rho I$ olacak şekilde bir ρ pozitif sabitinin var olduğu sonucuna varırız. $Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$'nin simetrik olduğu açıktır. Şimdi her $t \in \mathbb{T}$ için

$$A^T(t)Q(t) + \left(1 + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t)\right) + \left(I + \mu(t)A(t)\right)^T Q^{\Delta}(t)\left(I + \mu(t)A(t)\right) \leq -vI$$

olacak şekilde bir $v > 0$ var olduğunu göstereceğiz. $Q(t)$, (20)'yi sağladığı için yukarıdaki eşitsizlik

$$Q^{\Delta}(t) \leq (1 - v)\left(\left(I + \mu(t)A(t)\right)^T\right)^{-1}\left(I + \mu(t)A(t)\right)^{-1} \tag{23}$$

eşitsizliğine denk ve bu da

$$\left(I + \mu(t)A(t)\right)^T Q^{\Delta}(t)\left(I + \mu(t)A(t)\right) \leq (1 - v)I$$

ifadesini verir.

(19)'un t'ye göre delta türevi ile;

$$A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\Delta}(t) + A^{T^{\Delta}}(t)Q^{\Delta}(t) + Q^{\Delta}(t)A^{\sigma}(t) + Q(t)A^{\Delta}(t) + \mu^{\Delta}(t)A^T(t)Q(t)A(t)$$

$$+\mu^{\sigma}(t)A^{\Delta}(t)Q(t)A(t) + \mu^{\sigma}(t)A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\Delta}(t)A(t) + \mu^{\sigma}(t)A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\sigma}(t)A^{\Delta}(t) = 0$$

elde edilir. $Q^{\sigma}(t) = \mu(t)Q^{\Delta}(t) + Q(t)$ eşitliğini yukarıda yazarsak;

$$A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\Delta}(t) + A^{T^{\Delta}}(t)Q^{\Delta}(t) + Q^{\Delta}(t)A^{\sigma}(t) + Q(t)A^{\Delta}(t) + \mu^{\Delta}(t)A^T(t)Q(t)A(t)$$

$$+\mu^{\sigma}(t)A^{\Delta}(t)Q(t)A(t) + \mu^{\sigma}(t)A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\Delta}(t)A(t) + \mu(t)\mu^{\sigma}(t)A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\Delta}(t)A^{\Delta}(t)$$

$$+\mu^{\sigma}(t)A^{T^{\sigma}}(t)Q(t)A^{\Delta}(t) = 0$$

olur. Bu nedenle;

$$A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\Delta}(t) + Q^{\Delta}(t)A^{\sigma}(t) + \mu^{\sigma}(t)A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\Delta}(t)A(t)$$

$$+\mu(t)\mu^{\sigma}(t)A^{T^{\sigma}}(t)Q^{\Delta}(t)A^{\Delta}(t)$$

$$= -A^{T^{\Delta}}(t)Q(t) - Q(t)A^{\Delta}(t) - \mu^{\Delta}(t)A^T(t)Q(t)A(t) - \mu^{\sigma}(t)A^{T^{\Delta}}(t)Q(t)A(t)$$

$$-\mu^{\sigma}(t)A^{T^{\sigma}}(t)Q(t)A^{\Delta}(t)$$

olur. Yalnızca sol tarafa dönüştürelim, o zaman;

$$A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t) + Q^\Delta(t)A^\sigma(t) + \mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t)A(t)$$

$$+\mu(t)\mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t)A^\Delta(t)$$

$$= A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t) + Q^\Delta(t)A^\sigma(t) + \mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t)(A(t) + \mu(t)A^\Delta(t))$$

$$= A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t) + Q^\Delta(t)A^\sigma(t) + \mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t)A^\sigma(t)$$

eşitliği var olur. Böylece, şimdi;

$$A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t) + Q^\Delta(t)A^\sigma(t) + \mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q^\Delta(t)A^\sigma(t)$$

$$= -A^{T^\Delta}(t)Q(t) - Q(t)A^\Delta(t) - \mu^\Delta(t)A^T(t)Q(t)A(t) - \mu^\sigma(t)A^{T^\Delta}(t)Q(t)A(t)$$

$$-\mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q(t)A^\Delta(t) \tag{24}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. Basitlik için;

$$X = A^{T^\Delta}(t)Q(t) + Q(t)A^\Delta(t) + \mu^\Delta(t)A^T(t)Q(t)A(t) + \mu^\sigma(t)A^{T^\Delta}(t)Q(t)A(t)$$

$$+\mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q(t)A^\Delta(t)$$

diyelim. O zaman (18)'deki matris denkleminin $Q^\Delta(t)$ çözümünü $t \in \mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ için;

$$Q^\Delta(t) = \int_{I^\sigma} e_{A^{T^\sigma}(t)}(s,0)Xe_{A^\sigma(t)}(s,0)\Delta s$$

olarak yazabiliriz, burada $I^\sigma \coloneqq [0,\infty)_{\mathbb{S}^\sigma}$ ve $\mathbb{S}^\sigma = \mu^\sigma(t)\mathbb{N}_0$'dır. Şimdi $Q(t), Q^\sigma(t), A(t)$, $A^\Delta(t)$, μ_{max} ve μ^Δ_{max}'ın sınırlılıklarını kullanarak $Q^\Delta(t)$'ye bağlı bir sınır elde ediyoruz. Herhangi bir $n \times 1$ tipinde bir x vektörü ve herhangi bir t için;

$$\left|x^T e_{A^{T^\sigma}(t)}(s,0)Xe_{A^\sigma(t)}(s,0)x\right|$$

$$= \left|x^T e_{A^{T^\sigma}(t)}(s,0)[A^{T^\Delta}(t)Q(t) + Q(t)A^\Delta(t) + \mu^\Delta(t)A^T(t)Q(t)A(t)\right.$$

$$\left.+\mu^\sigma(t)A^{T^\Delta}(t)Q(t)A(t) + \mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q(t)A^\Delta(t)]e_{A^\sigma(t)}(s,0)x\right|$$

$$\leq \left\|A^{T^\Delta}(t)Q(t) + Q(t)A^\Delta(t) + \mu^\Delta(t)A^T(t)Q(t)A(t) + \mu^\sigma(t)A^{T^\Delta}(t)Q(t)A(t)\right.$$

$$\left.+\mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q(t)A^\Delta(t)\right\|x^T e_{A^{T^\sigma}(t)}(s,0)e_{A^\sigma(t)}(s,0)x.$$

Böylece;

$$\left|x^T Q^{\Delta}(t)x\right| = \left|\int_{I^\sigma} x^T e_{A^{T^\sigma}(t)}(s,0) X e_{A^\sigma(t)}(s,0) x\Delta s\right|$$

$$\leq \left\|A^{T^\Delta}(t)Q(t) + Q(t)A^\Delta(t) + \mu^\Delta(t)A^T(t)Q(t)A(t)\right.$$

$$\left. +\mu^\sigma(t)A^{T^\Delta}(t)Q(t)A(t) + \mu^\sigma(t)A^{T^\sigma}(t)Q(t)A^\Delta(t)\right\| x^T Q^\sigma(t)x$$

$$\leq (2\beta\|Q(t)\| + \mu^\Delta_{max}\alpha^2\|Q(t)\| + 2\mu_{max}\alpha\beta\|Q(t)\|)x^T Q^\sigma(t)x$$

$$= \|Q(t)\|(2\beta+\alpha^2\mu^\Delta_{max}+2\alpha\beta\mu_{max})x^T Q^\sigma(t)x$$

elde edilir. Şimdi sağ tarafı $\|x\| = 1$ olacak şekilde bütün x'ler üzerinden maksimize edersek

$$\left|x^T Q^\Delta(t)x\right| \leq \|Q(t)\|\|Q^\sigma(t)\|(2\beta + \alpha^2\mu^\Delta_{max} + 2\alpha\beta\mu_{max})$$

ifadesini elde ederiz. Sol tarafı da $\|x\| = 1$ olacak şekilde bütün x'ler üzerinden maksimize edersek $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için

$$\left\|Q^\Delta(t)\right\| \leq \rho^2(2\beta + \alpha^2\mu^\Delta_{max} + 2\alpha\beta\mu_{max})$$

elde edilir. $\alpha, \mu_{max}, \mu^\Delta_{max}$ ve $Q(t)$ ile $Q^\sigma(t)$ üzerindeki ρ norm sınırı kullanılarak $\left\|A^\Delta(t)\right\|$ üzerinde β sınırı seçilebilir ve böylece (22)'deki v değerini verecek olan $Q^\Delta(t)$ sınırı oluşturulabilir.

Son olarak her $t \in \mathbb{T}$ için $\eta I \leq Q(t)$ olacak şekilde bir η pozitif sabitinin var olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir t ve herhangi bir $n \times 1$ tipinde x vektörü için;

$$\left(x^T e_{A^T(t)}(s,0)e_{A(t)}(s,0)x\right)^{\Delta_s} = x^T\left[A^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)e_{A(t)}(s,0)\right.$$

$$+e_{A^T(t)}(s,0)e_{A(t)}(s,0)A^T(t)$$

$$\left.+\mu(t)A^T(t)e_{A^T(t)}(s,0)e_{A(t)}(s,0)A(t)\right]x$$

$$= x^T e_{A^T(t)}(s,0)[A^T(t) + A(t)$$

$$+\mu(t)A^T(t)A(t)]e_{A(t)}(s,0)x$$

$$\geq (-2\alpha - \mu_{max}\alpha^2)x^T e_{A^T(t)}(s,0)e_{A(t)}(s,0)x$$

olur. $s \to \infty$ iken $e_{A(t)}(s,0) \to 0$ olduğunu biliyoruz, öyle ki;

$$-x^T x = \int_I \left[x^T e_{A^T(t)}(s,0) e_{A(t)}(s,0)x\right]^{\Delta_s} \Delta s \geq (-2\alpha - \mu_{max}\alpha^2) x^T Q(t) x$$

olur. Fakat elbetteki bu $t \in \mathbb{T}$ için;

$$Q(t) \geq \frac{1}{-2\alpha - \mu_{max}\alpha^2} I$$

olur. Yani biz bunu

$$\eta = \frac{1}{-2\alpha - \mu_{max}\alpha^2}$$

olarak yazabiliriz.

4.7. Bozunum Sonuçları

Genel olarak düzgün kararlı olan bir lineer durum denkleminin başka bir durum denklemine ‘‘yakın’’ olduğu zaman dikkate alınarak incelenmesi yararlı olur. Hem [7,11] hem de [9]’da (11) sisteminin kararlılığı uygun olan Lyapunov fonksiyonu tarafından önceden belirlenmiş ise, o zaman bozunum matrisi olan $F(t)$ üzerindeki belirli koşullar bozulmuş lineer sistem olan;

$$z^{\Delta}(t) = [A(t) + F(t)]z(t) \tag{25}$$

nin kararlılığını garanti eder.

4.7.1. Teorem

(11) ile verilen lineer durum denkleminin düzgün kararlı olduğunu varsayalım. Her τ için;

$$\int_{\tau}^{\infty} \|F(s)\| \Delta s \leq \beta \tag{26}$$

olacak şekilde bir $\beta \geq 0$ varsa (25)’teki bozulmuş lineer dinamik denklemi düzgün kararlıdır [2].

İspat

Sabitlerin değişimi teoreminden (25)'in çözümü herhangi t_0 ve $z(t_0) = z_0$ için;

$$z(t) = \phi_A(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \phi_A\big(t, \sigma(s)\big)F(s)z(s)\Delta s \tag{27}$$

Şeklindedir. Burada $\phi_A(t, t_0)$, (11) sistemi için çözüm matrisidir. (11)'deki düzgün kararlılıktan, $t \geq \tau$ ile her $t, \tau \in \mathbb{T}$ için $\|\phi_A(t, \tau)\| \leq \gamma$ olacak şekilde $\gamma > 0$ sabiti vardır. (27)'deki eşitlikte her iki tarafın normu alınarak $t \geq t_0$ da;

$$\|z(t)\| \leq \gamma\|z_0\| + \int_{t_0}^{t} \gamma\|F(s)\|\|z(s)\|\Delta s$$

yazabiliriz. 4.4.1. Teorem'deki Gronwall eşitsizliğinden, [18]'deki sonuçtan ve (26)'daki eşitsizlikten $t \geq t_0 için;$

$$\|z(t)\| \leq \gamma\|z_0\|e_{\gamma\|F\|}(t.t_0)$$

$$= \gamma\|z_0\|exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\log(1+\mu(s)\gamma\|F(s)\|}{\mu(s)}\Delta s\right)$$

$$\leq \gamma\|z_0\|exp\left(\int_{t_0}^{\infty} \frac{\log(1+\mu(s)\gamma\|F(s)\|}{\mu(s)}\Delta s\right)$$

$$\leq \gamma\|z_0\|exp\left(\int_{t_0}^{\infty} \gamma\|F(s)\|\Delta s\right)$$

$$\leq \gamma\|z_0\|e^{\gamma\beta}$$

elde ederiz.

γ, herhangi bir t_0 ve $z(t_0)$ için kullanılabildiğinden (25)'teki durum denklemi düzgün kararlıdır.

4.8. Kararsızlık Kriteri

(11) sisteminin kararsız olup olmadığını belirlemek için de birleşik zaman skalasında kuadratik Lyapunov fonksiyonunu kullanabiliriz. Bu, uygun bir $Q\,(t)$ matrisinin geliştirilmesinin zor olduğu ve kararsız bir sistemin ortaya çıkması olasılığı durumunda çok yararlı bir sonuçtur.

4.7.1. Teorem

Her $t \in \mathbb{T}$ için simetrik olan $n \times n$ tipinde bir $Q\,(t) \in C_{rd}^{1}$ matrisi var olduğunu ve aşağıdaki iki özelliğe de sahip olduğunu varsayalım.

i. $\|Q(t)\| \leq \rho,$

ii. $A^T(t)Q(t) + \left(I + \mu(t)A^T(t)\right)\left(Q^{\Delta}(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^{\Delta}(t)A(t)\right) \leq -\upsilon I,$

Burada $\rho, \upsilon > 0$. Ayrıca $Q(t_a)$ pozitif yarı tanımlı olmayacak şekilde bir $t_a \in \mathbb{T}$ var olsun. O zaman (11)'deki lineer dinamik denklem düzgün kararlı olmaz [2].

İspat

Varsayalım $x(t)$, başlangıç koşulları $t_0 = t_a$ ve $x(t_0) = x(t_a) = x_a$ için $x_a^T Q(t_a) x_a < 0$ olan (11)'in çözümü olsun. O zaman $t \geq t_0$ olduğunda,

$$x^T(t)Q(t)x(t) - x_0^T Q(t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t} [x^T(s)Q(s)x(s)]^{\Delta s} \Delta s \leq -\upsilon \int_{t_0}^{t} x^T(s)x(s)\Delta s \leq 0$$

sağlanır. Bu eşitsizlikten $t \geq t_0$ olduğunda

$$x^T(t)Q(t)x(t) \leq x_0^T Q(t_0)x_0 < 0$$

olur. $t \geq t_0$ olduğunda ii'den

$$-\rho\|x(t)\|^2 \leq x^T(t)Q(t)x(t) \leq x^T(t_0)Q(t_0)x(t_0) < 0$$

olur, bu da

$$\|x(t)\|^2 \geq \frac{1}{\rho}|x^T(t)Q(t)x(t)| > 0 \tag{28}$$

eşitsizliğine yol açar. Yine ii'den ve $t \geq t_0$ olduğunda

$$v \int_{t_0}^{t} x^T(s)x(s)\Delta s \leq x_0^T Q(t_0)x_0 - x^T(t)Q(t)x(t)$$

$$\leq |x_0^T Q(t_0)x_0| + |x^T(t)Q(t)x(t)|$$

$$\leq 2|x^T(t)Q(t)x(t)|$$

olur. (28) kullanarak ve son olarak $t \geq t_0$ olduğunda

$$\int_{t_0}^{t} x^T(s)x(s)\Delta s \leq \frac{2\rho\gamma^2}{v}\|x(t)\|^2 \tag{29}$$

elde ederiz.

İspatı bitirmek için $x(t)$'nin sınırsız olduğunu göstereceğiz. Sınırsız çözüm ile (11)'in düzgün kararlı olmadığını sonucuna varabiliriz. Şimdi her $t \geq t_0$ için $\|x(t)\| < \gamma$ olacak şekilde bir $\gamma > 0$ var olduğunu varsayalım. Buradan (29) denkleminden $t \geq t_0$ için;

$$\int_{t_0}^{t} x^T(s)x(s)\Delta s \leq \frac{2\rho\gamma^2}{v}$$

elde edilir.

Bu son eşitsizlikten $t \to \infty$ iken $\|x(t)\| \to 0$ olur ve bu da (28) ile çelişir. Böylece $x(t)$ çözümü sınırlı olamaz, bu da (11)'in düzgün kararlı olmadığını gösterir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında zaman skalası teorisi ele alınmış olup, karmaşık bir yapıya sahip reel sayı kümeleri olan zaman skalasında delta türev, delta integral, üstel fonksiyon ile beraber lineer dinamik denklemler ve zaman skalasında kararlılık durumları incelenmiştir. İlgili kümelerde kullanılan tanımların ve teoremlerin keyfi olarak kapalı kümelere de uygulanabilirliği bakımından zaman skalasının oldukça kullanışlı olduğu görülmüştür. Bunların ayrık ve sürekli analizlerin birleşiminde nasıl kullanıldığı incelenmiş ve fonksiyonların süreksiz olduğu noktalarda sıçrama operatörleri olan ρ ve σ ile ortaya çıkan sorunlar çözülmüştür. Türev alma işleminde bildiğimiz türev tanımında fonksiyonun süreklilik şartı parçalı fonksiyonlarda fonksiyonun türevinin alınmasına engel iken bu ρ ve σ operatörleri ile bu engel ortadan kalkmıştır.

Zaman skalasında üstel fonksiyonlarda $\oplus$ve $\ominus$ işlemlerini tanımlayarak, üstel fonksiyon işlemlerinin klasik üstel fonksiyon işlemleri ile benzer özelliklere sahip olduğu görülmüştür.

Zaman skalasında kararlılık analizi üzerine çalışmalar ve adi diferansiyel denklem sistemnin kararlık ve kararsızlık probleminin türevin varlığı ya da yokluğu ile ilişkilendirilmesinde öncü olan Lyapunov'un ‘‘İkinci (direkt) Metodu’’ incelendi. Lyapunov, diferansiyel denklemeler ile çalışmaya başlamasından sonraki süreçte matematikçiler kararlılık teorisinin somut problemlere uygulanabileceğini fark etmişlerdir. Lyapunov'un ikinci metodu; skaler bir $V(x)$ fonksiyonunun x değeri bir denge noktasına eşit değilse bu skaler $V(x)$ fonksiyonu pozitif iken türevi olan $V'(x)$ fonksiyonu ise negatif, bu x değeri bir denge noktasına eşit ise bu skaler $V(x)$ fonksiyonu ve türevi sıfıra eşit olduğunu söylemektedir.

Burada Lyapunov'un bu metodunun güzel yanı tam bir çözüm bilgisinin gerekli olmayışıdır. Lyapunov'un ″ikinci metodu‶ nu zaman skalaları üzerinde otonom olmayan lineer sistemlerle birleştirip genişleterek ardışık noktaları arasında düzensiz mesafe içeren bir zaman tanım kümesinin mümkünlüğü ile karşı karşıya gelinebilmesi durumu konunun önemini vurgulamıştır. Lyapunov'un bu metodunu zaman skalasıyla birleştirerek genel bir zaman skalası versiyonu ortaya koyup düzgün kararlılık, düzgün üstel kararlılık ve düzgün asimptotik kararlılık kavramlarının nasıl birleştirildiği incelenmiştir.

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad t_0 \in \mathbb{T} \qquad \text{(I)}$$

zaman değişkenli lineer dinamik denkleminin düzgün kararlı, düzgün üstel kararlı ve düzgün asimptotik kararlı olması için gerek yeter koşulların neler olduğunu incelendi. Daha sonra yukarıdaki (I) formundaki regresif zaman değişkenli lineer dinamik sistemin kararlılık durumları ve kuadratik form tanımları incelendi. Bu tanımlanmış kuadratik formlara birleşik zaman skalası kuadratik Lyapunov fonksiyonları denilmektedir. Bu birleşik zaman skalası kuadratik Lyapunov fonksiyonunun $Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ olacak şekilde bir $Q(t)$ simetrik matrisini aldığımızda $t \geq t_0$ için,

$$x^T(t)Q(t)x(t)$$

şeklinde olduğu görülmüştür. Bu birleşik zaman skalası kuadratik Lyapunov fonksiyonunun $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğunda elde edilen türevlerde granül fonksiyonu olan $\mu(t)$ zaman değişkenli olduğundan birleşik zaman skalasında matris dinamik denklemlerini sürekli ve ayrık olayların içinde birleştirebildiğimiz görülmüştür. Bu birleşik zaman skalasında matris dinamik denklemi, sadece sürekli ve ayrık zamanın iki özel durumunu birleştirmekle kalmayıp, ayrıca bu kavramları keyfi $\mathbb{T}$ zaman skalasına da genişletir. (I) sistemi için düzgün kararlılık ve düzgün üstel kararlılık kriterleri olan 4.3.1 ve 4.4.2 Teoremleri incelendi ve düzgün kararlılığın (11) sisteminin çözümlerinin her zaman sınırlı olmasını gerektirdiğini ve düzgün kararlılıktan düzgün üstel kararlılığa geçerken basit ama çok güçlü bir farklılığın var olduğunu ve pozitif tanımlı $Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ nin simetrik olması kesin negatif tanımlı delta türevi ile birlikte, pozitif tanımlı matrisler tarafından alttan ve üstten sınırlandırılmasını gerektiği görülmüştür.

Zaman skalası Lyapunov matris denklemi olan;

$$A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) = -M$$

denkleminin tek çözümü 4.5.2 Teorem ile incelendi.

Yavaş değişen sistemlerde ve bozulmuş lineer sistemlerde kararlılık durumları incelenip, (I) sisteminin kararsız olup olmadığını belirlemek için birleşik zaman skalasında kuadratik Lyapunov fonksiyonu kullanılabilineceğini ve 4.7.1 Teoremi ile kararsızlık kriterleri incelendi. Buradan verilen (I) sisteminin $x(t)$ çözümü sınırlı değil ise bu denklem sisteminin kararlılığından bahsedemeyiz. Yani sistemin düzgün kararlı olmayacağı görülmüştür.

KAYNAKÇA

1. Bohner, M., Peterson, A. (2001). *Dynamic Equations on Time Scales*. Boston, Birkhäuser.
2. DaCunha, J.J. (2005). Stability for time varying linear dynamic systems on time scales. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 176(2), 381 – 410.
3. Agarwal, R., Bohner, M., O'Reganc, D., Petersond, A. (2002). Dynamic equations on time scales: a survey. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 141(1), 1–26.
4. Bohner, M., Peterson, A.(2001). *Dynamic aquations on time scalas: An introduction with applications*. Boston, Birkhäuser, 1-78.
5. Brogan, W.L. (1991). *Modern Control Theory. Prentice-Hall, Upper Saddle River.*
6. Desoer, C.A. (1969). Slowly varying system x = A(t)x. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 14(6), 780–781.
7. Kalman, R.E., Bertram, J.E. (1960). Control system analysis and design via the second method of Lyapunov I: Continuous-time systems. *Journal Basic Engineering* 82(2), 371-393.
8. Rosenbrock, H.H. (1963). The stability of linear time-dependent control systems *Journal Electron,* 15(1), 73-80.
9. Rugh, W.J. (1996). *Linear System Theory*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
10. Desoer, C.A. (1970). *Slowly varying xi+1 = Aixi*. Electron*ics* Letter. 6(11), 339–340.
11. Kalman, R.E. Bertram, J.E. (1960). Control system analysis and design via the second method of Lyapunov II: Discrete-time systems. *Transections of the ASME Journal of Basic Engineering* 82(2), 394–400.
12. Hahn, W. (1967). *Stability of Motion*. NewYork, Springer.
13. Bellman, R. (1970). *Introduction to Matrix Analysis*. NewYork, McGraw-Hill.
14. Pötzsche, C.,Siegmund, S., Wirth, F. (2003). A spectral characterization of exponential stability for linear time-invariant systems on time scales. *Discrete Continuous Dynamic Systems* 9(5), 1223–1241.

15. Chen, C.T. (1999). *Linear System Theory and Design*. NewYork, Oxford University Press.
16. Solo, V. (1994). On the stability of slowly-time varying linear systems. *Mathematics of Control Signals and Systems* 7(4), 331–350.
17. Zhang, F. (1999). *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*. NewYork, Springer.
18. Gard, T., Hoffacker, J. (2003). Asymptotic behavior of natural growth on time scales. *Dynamic Systems Appl*. 121(2), 131–148.
19. Huseynov, A. (2010). *Yarı-sonsuz zaman skalaları üzerinde Sturm-Liouville operatörü* (Doktora tezi, Ankara Üniversitesi), 1,284997.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ertuğrul ÇULHACIOĞLU

Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti

Doğum Tarihi Ve Yeri : 03/10/1988 Çorum / Sungurlu

Medeni Hali : Evli

e-mail : culhaci_88@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Sungurlu Lisesi-2006

Lisans : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü-2010

Yabancı dil : İngilizce

İş Deneyimi/Yıl

2013- 2017 : Sungurlu Milli Eğitim (Öğretmen)

2017- : Akdağmadeni Milli Eğitim (Öğretmen)

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Çulhacıoğlu, E. ve Öğrekçi S.(2018, 12-15 Eylül). *Zaman Skalasında Kararlılık Analizi*. 31. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzincan