T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ GEOMETRİ ALANINDAKİ İSPAT YAPABİLME YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Hazırlayan
Murat COŞKUN

Danışman
Dr. Öğretim Üyesi Sevim SEVGİ

Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2020
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ GEOMETRİ ALANINDAKİ İSPAT YAPABİLME YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Hazırlayan
Murat COŞKUN

Danışman
Dr. Öğretim Üyesi Sevim SEVGİ

Ocak 2020
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Murat Coşkun

M. Coşkun

"İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometri Alanındaki İspat Yapabilme Yeterliklerinin İncelenmesi" adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi' ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan
Murat COŞKUN

M. Coşkun

Danışman
Dr. Öğretim Üyesi Sevim SEVGİ

Matematik ve Fen Bilimleri ABD Başkanı
Prof. Dr. Hasan KAYA

Dr. Öğretim Üyesi Sevim SEVGİ danışmanlığında **Murat COŞKUN** tarafından hazırlanan **"İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometri Alanındaki İspat Yapabilme Yeterliklerinin İncelenmesi"** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü **Matematik ve Fen Bilimleri** Anabilim Dalında **yüksek lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

30 / 01 / 2020

JÜRİ:

Danışman	: Dr. Öğretim Üyesi Sevim SEVGİ	....
Üye	: Doç. Dr. Cemalettin IŞIK	....
Üye	: Dr. Öğretim Üyesi Semirhan GÖKÇE	....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 26/03/2020 tarih ve ...12-01.......sayılı kararı ile onaylanmış olup, öğrencinin mezuniyet tarihi 19/03/2020.'dir.

....26./.03../ 2020

Prof. Dr. Cevdet KIRPIK

Enstitü Müdürü

T.C. ERCİYES ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

ÖNSÖZ

Bana çalışmalarım süresince her türlü yardımı ve fedakârlığı sağlayan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, rehberlik eden danışmanım Dr. Öğretim Üyesi Sevim SEVGİ'ye teşekkür ederim.

Tez konumu seçmemde yardımcı olan ve öğrencisi olmaktan gurur duyduğum Prof. Dr İbrahim BAYAZIT'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans ders döneminde ve tez yazım aşamasında, mülakatlarımı yapmamda yardımcı olan, ihtiyacım olan tüm zamanlarda yanımda olan Doç. Dr. Gürsel GÜLER'e teşekkür ederim.

Ölçeğimi uygulamamda ve mülakatlarımı yapmamda yardımcı olan Araştırma Görevlisi Azime Atay'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans yapmam konusunda bana cesaret veren, amcam Doç. Dr. Ramazan COŞKUN'a teşekkür ederim.

Son olarak eğitim hayatım boyunca hiçbir desteğini esirgemeyen aileme ve yüksek lisans ders döneminde ve tez yazım aşamasında beni bir an bile yalnız bırakmayan bunaldığım her an beni yüreklendiren canım eşim Selva Coşkun'a teşekkür ederim.

Murat COŞKUN

Ocak 2020, KAYSERİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ GEOMETRİ ALANINDAKİ İSPAT YAPABİLME YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Murat COŞKUN

Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2020
Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Sevim SEVGİ

ÖZET

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometri alanındaki ispat yapabilme yeterliklerinin incelenmesi, temel geometrik kavramları bilme düzeylerinin belirlenmesi ve kullandıkları ispat yöntemleri hakkındaki bilgilerini araştırmaktır. Araştırmanın örneklemini Orta Anadolu'daki iki devlet üniversitesinde 2018-2019 eğitim-öğretim yılı 3. ve 4. sınıfta öğrenim gören 228 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri 6 sorudan oluşan Geometri İspat Testinden ve 11 öğretmen adayıyla yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmeler betimsel yöntem kullanılarak analiz edilmiştir. Görüşmelerden ilköğretim matematik öğretmeni adaylarınınn ispatların mantığını anlamak yerine ezberledikleri, temel geometrik kavramları karıştırdıkları sonucuna ulaşılmıştır. 228 öğretmen adayının verilerinin analizi sonucunda öğretmen adaylarının 6 ispat problemini doğru yapabilme oranı yaklaşık %38'dir yani öğretmen adaylarının geometri alanındaki ispat yapabilme yeterlikleri düşüktür.

Verilerin analizi sonucunda araştırmaya katılan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yeterliklerinin düşük olduğu söylenebilir. İki üniversitedeki öğretmen adaylarının ispat yeterlikleri birbirinden farklıdır bunun sebebi üniversiteye giriş puanı olabilir. Her iki üniversitedeki öğretmen adaylarının da yaptıkları ispatın türünü bilemedikleri belirlenmiştir, aynı şekilde öğretmen adayları temel geometrik kavramlara ilişkin bilgi düzeyleri düşüktür.

Anahtar Kelimeler: Geometri, Ortaokul Matematik Öğretmen Adayı, İspat, Formel ispat, İnformel İspat.

ANALYSIS of PRE-SERVICE ELEMENTARY TEACHERS PROOF ABILITIES IN GEOMETRY LEARNING AREA

Murat COŞKUN

Erciyes University, Institute of Educational Sciences
Master Thesis, January 2020
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sevim SEVGİ

ABSTRACT

The aim of this study is to investigate the pre-service elementary mathematics teachers' ability to make proof in geometry learning area, to determine their level of knowledge of basic geometric concepts, to investigate their knowledge about the proof abilities they use. The sample of the study consists of 228 pre-service elementary mathematics who are studying in the 3rd and 4th year of 2018-2019 academic year in two public universities in Central Anatolia. The data of the study was obtained from the Geometry Proof Test consisting of 6 questions and semi-structured interviews with 11 pre-service elementary mathematics. Semi-structured interviews were analyzed using descriptive method. It was concluded from the interviews that pre-service elementary mathematics teachers apply memorizing rather than understanding the logic of proofs and confuse basic geometric concepts. From the analysis of the data of 228 teacher candidates, the rate of pre-service teachers to make 6 proof problems correctly is approximately 38%, that is, the teacher candidates' ability to make proof in geometry is low.

As a result of the study, it can be said that pre-service mathematics teachers participating in the research have low geometric proof competence. Pre-service elementary mathematics teachers' competencies in the proof differ from university to university, which may be due to university entrance scores. It was determined that the pre-service elementary mathematics at both universities did not know the type of proof they applied, and the level of knowledge about basic geometric concepts was basic.

Keywords: Geometry, Pre-service Elementary Mathematics Teacher, Proof, Proving, Formal Proof, Informal Proof

İÇİNDEKİLER

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ GEOMETRİ ALANINDAKİ İSPAT YAPABİLME YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

KISALTMALAR

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

ŞEKİLLER LİSTESİ

BÖLÜM I

GİRİŞ

Gelişen bilim, teknoloji, artan ekonomik rekabet ulusları birçok alanda olduğu gibi eğitim alanında da gelişmeye değişmeye ve yenilenmeye yöneltmiştir. Bunun temel sebebi ise bu hızlı ilerleyişe ayak uyduracak ve bir adım ileriye götürecek bireyler yetiştirmektir. Şüphesiz ki bu yenilenmenin en başında olan alan ise eğitim-öğretim alanı olmuştur. Çünkü 21. yüzyıl bireylerden bilgiyi araştıran, inceleyen, bulduğu bilgiyi eleştiren ve eski öğrendiği bilgilerden faydalanarak sentezleme yoluyla günlük yaşamda kullanabilecekleri yeni ürünler oluşturabilecek bireyler yetiştirmeyi amaçlamaktadır. Buradan da anlaşılacağı üzere disiplinler arasında matematiğin önemi ortaya çıkmaktadır. Çünkü değişen Dünya'da matematiği anlayabilme, kullanabilme, bireylerin uyum sağlamalarını ve gelecekte başarı elde etmelerini kolaylaştırarak matematiğin amaçlarından bir tanesi olan bireylerin akıl yürütme, bilgiyi düzenleme, genelleme yaparak problem çözme becerilerini geliştirmek hedeflenmektedir (Toluk, 2003; Nasibov ve Kaçar, 2005).

Matematik bir bilim dalı olmasının yanı sıra dünyanın anlaşılması ve yeni ürünler oluşturmak için yardımcı bir bilim dalı olma görevi de görmektedir. Matematik disiplini birçok disiplin tarafından ortak kullanılan bir araçtır. Bu nedenle günümüzde öğretim alanında yapılan çalışmaların başlıca amaçlarından bir tanesi matematiği anlayarak öğrenen öğrenciler yetiştirmektir. Bunun içinde öğrenmelerine yardımcı olacak bir yapının kullanılmasını sağlamak matematik öğretiminin temel amaçlarından bir tanesi olduğu düşünülmektedir.

Matematik, bireylerin düşünmelerini ve muhakemenin gelişmesini sağlamaktadır. Buna göre matematiksel düşünme tahmin etme, genellemeler de bulunma, soyutlama, karşılaştırma ve ispatlama ile yeni bilgi ve kavramlara ulaştığında diğer düşünme ve değerlendirmelerden farklı olmaktadır. Matematiksel ispat, matematiğin temel bileşenlerinin birbiri ile ilişkisini açıklığa kavuşmasını sağlayıp anlaşılmasını kolaylaştıran önemli bir yapı taşıdır. Bu yüzden matematiksel ispat; soyutlama, ilişkilendirme, muhakeme yapma ve genelleme gibi zihinsel süreçleri içermektedir. Bu zihinsel süreçler sonucunda bireyin matematiksel bilgiler arasında bağlantı kurarak özümsenmesi amaçlanmıştır. Bu özümsemeyi yapabilmek için matematiksel muhakemeyi kullanır. Çünkü matematiksel muhakeme, bireylerin bulduğu sonuçların tutarlı ve mantıklı olmasını sağlamaktadır. Bu nedenle matematiğin merkezinde ispat süreci vardır. İspat matematiği matematik yapan şeylerin en önemli bölümünü oluşturmaktadır (Padula, 2006). Günümüzde ispat; neden sonuç ilişkisini görerek, kavramları anlayarak, öğrettiği ve ezberciliği azaltmada önemli bir yeri olduğundan dikkatleri üzerine çekmiştir. Matematik öğretiminde mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili katkıda bulunan bir yapının ispat süreci olduğu fark edilmektedir (MEB, 2005).

İnsan psikolojik yapısı itibari ile bir ifadenin doğruluğunu ve kullanışlılığını görmek ister bu sadece insan öğrenmesi ile değil başka bir kişiye veya kişilere öğretmesinde de aynı amaç geçerlidir. Bunu yaparken de karşısındakini fikrini onaylatarak öğretmeyi amaçlar. Bunun hiç şüphesiz olduğu alanlardan biri de matematiktir. Çünkü matematik diğer disiplinlerden biraz daha çok neden, niçin gibi sorulara yanıt aramaktadır. Bizim bu sorulara yanıt verebileceğimiz yapı ise ispat yöntemidir. Çünkü ispat yöntemi matematiksel önermelerin birbiriyle arasındaki ilişkiyi mantıksal bir çerçevede açıklığa kavuşturmaktadır (Yıldırım, 2000). Matematiksel ispatın önemli bir özelliği de matematiği soyutluktan kurtararak anlaşılmasını sağlamasıdır. Matematiksel ispatın diğer önemli bir işlevi de matematiksel kavram ve teoremlerin nasıl kullanıldığını göstermesidir. Bu özelliğinden dolayı matematiksel bilgilerin oluşturulmasını, geliştirilmesini sağlamaktadır.

Matematikte ispat yönteminin önemini ortaya çıkaran bir diğer önemli nokta ise matematiğin kendine has dilinin açıklığa kavuşmasıdır. Çünkü matematiksel ispat yöntemi matematik teorem, sembol, aksiyom, simge gibi soyut kavramları arasındaki ilişkiyi mantık ve muhakeme çerçevesinde anlamlandırıp anlaşılmasını sağlamaktadır. Böylelikle matematiksel işlemler arasındaki ilişkiyi kavrayarak özümsemelerini sağlamaktadır. Matematiksel kavram ve önermelerin anlam kazanması ispat kavramı ile ilişkilidir (Flores, 2002).

Baki'ye (2008) göre matematiksel ispat yöntemi düşüncenin gelişmesi ve değişerek kümülatif bir birikim sonucunda ilerlemesine yardımcı olduğunu söylemiştir. Bu ilerleme üst boyut düşünmenin büyük bir önemi olduğunu ve bu üst boyut düşünmenin ana bileşenini muhakeme kavramı olduğu bilinmektedir. Üst boyut düşünmenin oluşması için problem çözme basamağının her birinde de ispat yöntemini kullanıyor olmamız ispat yönteminin önemini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla matematik öğretmenlerinin sahip olması gereken yeterliliklerden biri öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini anlama ve bu doğrultuda onlara dönütler verme, öğrencilerin olası muhakeme hatalarını bilmeyi ve tahmin etmeyi gerektirmektedir (Petrou ve Goulding, 2011).

İspat yönteminin bu kadar önemli olmasının yanı sıra ispat yönteminde özellikle muhakeme kısmında sistematik hataların olduğu görülmektedir. Genellikle belirli dönemler veya belirli boyutlarda ele alınan bu muhakeme hataları incelenmiştir ve matematik öğretimi alan-yazına büyük katkı sağlayan bilimsel çalışmalar elde edilmiştir. Bizim de bu çalışmadaki nihai amacımız matematik öğretimi alan yazınına katkı sağlamaktır.

1.1. İspat Kavramının Tanımı ve İlgili Görüşler

Matematik derslerinde öğrenciler ispatla ilgili etkinliklere daha isteksiz katılım göstermektedir. (Alibert, 1998; Almeida, 2003; De Villiers, 1990; Jones, 2000; Knuth, 2002; Raman, 2003, akt: Gökkurt & Soylu, 2012; Doruk ve Kaplan, 2013). Gökkurt ve Soylu (2012) fen bilgisi ve matematik öğretmenliği birinci sınıfına devam eden öğrencilerinin, ispatın matematik öğretimindeki rolünün farkında olmadıklarını ve çoğunun ispatı gereksiz bir etkinlik olarak gördüklerini tespit etmişlerdir. İspatı gereksiz gören öğrenciler ispatın manasını ifade ederken farklı kavramlar kullanmaktadırlar. Bu öğrenciler ispatla ilgili öğrenimsel ve öğretimsel sıkıntı yaşamaktadırlar. Köğce ve Yıldız (2011) üniversite birinci sınıfa devam eden matematik öğretmen adaylarının ispat hakkındaki "*bir ifadenin doğruluğunu gösterme*" olarak tanımladıklarını, son sınıfa devam eden matematik öğretmenliği öğrencileriyse ispatı "*bir ifadenin neden-sonuç ilişkisi içinde, tüm durumlara uygulanabilirliğini belirlemek için doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek*" (s. 1268) olarak tanımladıklarını belirtmişlerdir.

Dane'e (2008) göre bazı öğrenciler ispatı, "*Tanımsız kavramlara, aksiyomlara veya daha önce ispat edilen teoremlere dayanarak, bir dizi mantıksal hükümlerle bir önermenin doğru olduğunu ortaya çıkarmadır.*" (s.499) şeklinde tanımlamışlardır. Moore (1994) ise ispatı açıklama ve belli adımları olan bir işlem süreci olarak öğrencilerin ifade ettiğini belirmiştir.

Matematik alan eğitimcileri ispat kavramını farklı şekillerde tanımlanmaktadır. Selden ve Selden (2003) ispatı, "teoremlerin doğruluğunu test etmek için kullanılan (arguments) iddialardır" (s. 5) şeklinde tanımlamıştır. Bell (1976) ispatı, "belli aşamalar sonucunda gerçekleşen doğrulama, açıklama ve sistematikleşmeyi içeren bir süreç" (s. 41) olarak tanımlamaktadır. Doğrulama bir önermenin doğruluğunu göstermektir. Açıklama bir önermenin nedenleriyle doğru olduğunu göstermektir. Son olarak sistematikleştirme önermeleri, aksiyomları ve teoremleri tümevarımsal bir sistem içerisinde organize etmektir. De Villiers (1990) bu üç aşamayı biraz daha genişleterek doğrulama, açıklama, sistematikleştirme olan ispat sürecine keşif ve iletişim aşamasını da eklemiştir. Baki (2008) matematiksel ispatı bir süreç olarak görmekte ve bu sürecin doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç alt süreci içerdiğinin altını çizmektedir. Fakat Altıparmak ve Öziş (2005) matematiksel ispatı, insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenek olarak görmektedirler ve bu yeteneğin okul öncesi dönemden itibaren gelişim gösterdiğini ve uygun stratejilerle daha da ileri taşınabileceğini belirtmektedir. Netice olarak birçok matematikçi ve matematik eğitimcisinin ispatı, muhakemenin en temel unsuru ve matematiğin kalbi olarak değerlendirdikleri söylenebilir (Senk et. al., 2009, akt: Bahtiyari-Albayrak, 2010). Sonuç olarak, ispatla alakalı görüşler ve tanımlar incelendiğinde, ispat kavramının farklı şekillerde tanımlanmış olduğu ancak bu tanımlarda ortaya çıkan ortak özelliğin ispatın doğrulama, açıklama, soyutlama ve sistematikleştirme gibisinden düşünsel eylemler içeren bir süreç olduğu düşüncesi olduğu görülmektedir.

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu araştırmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yeterliklerinin belirlenmesidir. Geometri alanındaki ispat şemaları ve geometrik kavramların ispatlarının nasıl ortaya çıktığını incelemektir. Geometrik ispat sürecinde ne gibi farklılıklar ortaya konulduğunun belirlenmesidir. Bunun için ilköğretim matematik öğretmeni adaylarıyla hem ispat yaptıkları ve ispatlamalarını nasıl yaptıklarını anlattıkları hem de ispatın doğası hakkındaki görüşlerini ortaya koydukları mülakatlar yapılmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarının belirlenmesi, ileride ilköğretim matematik öğretmeni olacak bu öğretmen adaylarının öğrencilere vereceği geometri alanındaki ispat öğretimini hakkında bilgiler verebilir. Özellikle ilköğretim döneminde yani somut işlemler evresinde olan ilköğretim öğrencilerindeki somut ve soyut düşünmelerini de göz önüne alırsak, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat hakkındaki bilgi eksikliklerinin tespit edilmesi gerekmektedir. Bununla ilgili eksikliklerin giderilmesi için öğrenme ortamı sağlayabiliriz. İlköğretim matematik öğretmenleri ispatın, akıl yürütmenin ve şemaların önemini anlamalıdırlar. İlköğretim matematik öğretmen adayları geometri alanındaki ispatları öğretmek üzere hazırlanmış ve bilgilerini geliştirmiş olurlar. Ayrıca, ilköğretim öğrencilerinin ispat, akıl yürütme, sentezleme ve karşılaştırma gibi problem çözme becerilerini geliştirmek için fırsat yakalarlar (Norby, 2013). Matematik öğretiminde yapılan araştırmalar matematik öğretmen adayları ve öğrencilerin ispatı anlamalarında ve kullanmalarında eksiklikleri ve kavram yanılgıları olduğunu ortaya koymuşlardır (Güner, 2012; Knuth, 2002; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Norby, 2013; Riley, 2003). Araştırmaların diğer bir sonucu ise ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispatları öğretmek için yetiştirilmemiş olmalarıdır (Yoo, 2008). İlköğretim öğrencilerinin ispat deneyimlerinin, ispatlama ve akıl yürütme becerisinin öğretimi ile ispatlama ve akıl yürütme becerisindeki gelişimlerinin matematik öğretmenlerine bağlı olduğu şüphesizdir (Altıparmak ve Öziş, 2005; Martin ve Harel, 1989; Riley, 2003). Bu araştırmamızın bulgularının yurtdışında ve ülkemizde ilgili alan yazındaki çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu çalışma bundan sonra yapılacak çalışmalar için önemli bir referans niteliğine sahiptir.

1.3. Araştırma Problemi ve Alt Problemler

Bu çalışma kapsamında "İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yapabilme yeterlikleri nasıldır?' araştırma sorusuna yanıt aranmıştır. Bu amaç doğrultusunda çalışmanın alt problemleri şu şekilde belirlenmiştir:

1. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yapabilme yeterlikleri ne düzeydedir?

2. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki genişletme gereken sorularda ispat yapabilme yeterlikleri nasıldır?
3. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki farklı alt alanlardan bilgi transferi gerektiren sorularda ispat yapabilme yeterlikleri nasıldır?
4. İlköğretim matematik öğretmeni adayları geometri alanındaki geçmiş geometrik bilgilerin sentezini gerektiren sorularda ispat yapabilme yeterlikleri nasıldır?

1.4. Tanımlar

Bu araştırmada formel ve informel ispat üzerinde durulduğundan tanımları aşağıda ayrıca yapılmıştır.

Formel İspat: Aksiyom ve teoremlere dayandırılan, hepsinin geçerliği ispatlanmış ifadeler dizisidir (Morash, 1987).

İnformel İspat: Muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir. Başka bir deyişle iyi düşünülmüş savları kullanarak ifadenin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir (Almeida, 1996).

1.5. Sınırlılıklar

- Araştırma İç Anadolu Bölgesinde bulunan iki devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 3. ve 4. sınıf öğrencileri ile sınırlıdır.

- Bu araştırma veri toplamak için kullanılan 6 adet geometri ispat problemi ile sınırlıdır.

- Öğrencilerin, mülakatlarda kullanılan 12 adet yapılandırılmış soruya verdikleri cevaplarla sınırlıdır.

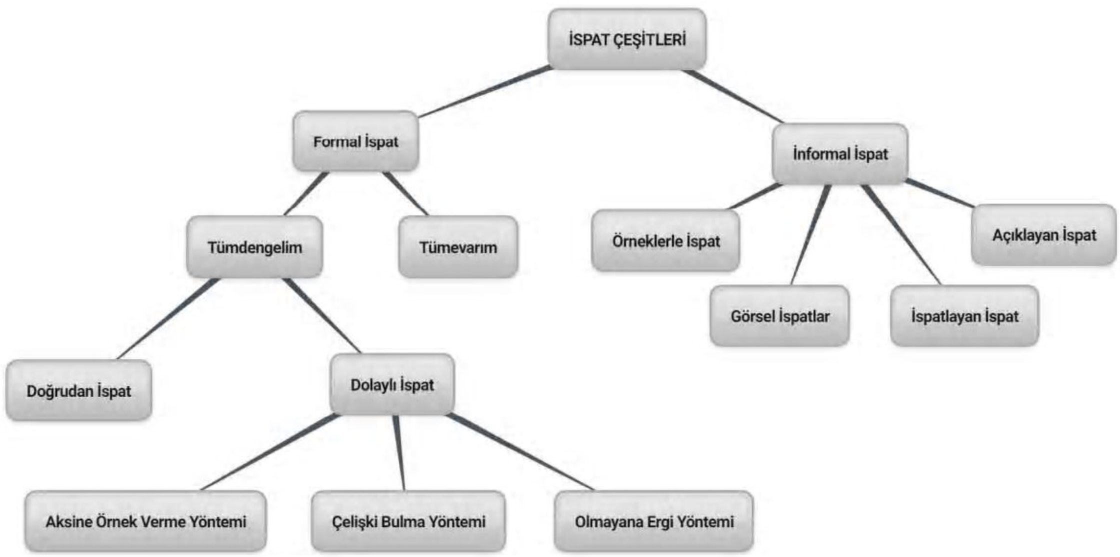
BÖLÜM II

GENEL BİLGİLER

Bu kısımda alan yazında yapılmış olan geometrik ispat ile ilgili yapılan araştırmalara yer verilmiştir.

2.1. İspat Türleri

Matematikte farklı ispat yöntemleri, stratejileri ve yaklaşımlarının olduğu bir gerçektir. Yapılan araştırmalara bakıldığında ispatı genel olarak formel ispat ve informel ispat olmak üzere iki başlık altında toplamak mümkündür (bakınız, Şekil 1). Formel ispat tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümden gelim ise doğrudan ispat ve dolaylı ispat olmak üzere iki alt başlığa ayrılmaktadır (Bahtiyari-Albayrak, 2010). Dolaylı ispat ise kendi içerisinde aksine örnek verme, çelişki bulma, olmayana ergi yöntemi olmak üzere üç alt başlık altında toplanır. İnformel ispat ise örneklerle ispat, görsel ispatlar, ispatlayan ispat ve açıklayan ispat olmak üzere dörde ayrılır (Dede, 2013).



Şekil 1. İspat türleri diyagramı (Dede, 2013, sayfa 14-34)

2.1.1. Formel İspat

Formel ispat Şekil 1'de verildiği üzere tümdengelim ve tümevarım olarak iki alt kola ayrılmaktadır (Dede, 2013). Matematikte kullandığımız bazı teoremlerin ifadesi genelden hareketle bir ifadenin, durumun doğrulanmasını gerektirebilir. En genelden başlayarak teoremle ilişkili bütün özel durumları da kapsayan bir çıkarım yapılır. Bu ispat yöntemine ise *tümdengelim* metodu denilmektedir (Bayazıt, 2017). Formel ispat yönteminin diğer alt kolu ise tümevarım yöntemidir. Sayılabilir sonsuz kümeler üzerinde tanımlanmış olan teoremlerin ispatında kullanılır. Öncelikle, n=1 için verilen önermenin doğruluğu gösterilir. Daha sonra, n=k için doğru kabul edilir. Son basamakta, n=k+1 için doğruluğu gösterilerek ispat süreci tamamlanır. Tümevarım yöntemiyle ispat yapılırken her zaman n=1 ile ispata başlama zorunluluğu bulunmamaktadır. Teoremde verilen şartlara göre herhangi bir doğal sayıyla tümevarım yöntemiyle ispata başlamak mümkündür.

Tümdengelim yöntemi de iki alt ispat yöntemine ayrılır. Öncelikle doğrudan ispat yönteminde, $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin ayrık (nesnel) kanunların bir ya da daha fazla uygulamalarında p önermesi doğru ise q önermesi kesinlikle doğru olmalıdır kabulüyle başlanır. Önermenin doğrudan ispatında, p önermesi doğrudur ifadesi ile başlanır. Daha sonra, $p \Rightarrow q$, $q_1 \Rightarrow q_2$, $q_n \Rightarrow q$ koşullu önermelerinin bir veya birkaç adımında q önermesinin doğru olduğu elde edilir (Mishra, 2004, akt: Dede, 2013). Doğrudan ispata ilişkin örnekler ve bazı açıklamalar aşağıda verilmiştir.

Örnek 1: İki tek tamsayının çarpımı tektir.

Çözüm: Burada ilk önce hipotezin ne olduğu ve neyin ispat edileceği analiz edilmelidir. x ve y tek tamsayılar olsun.

Hipotez: p: $x \times y$ tek tamsayılardır.

Hüküm: q: $x \times y$ tektir.

x tek tamsayı ise $\exists m \in Z$ için $x = 2m+1$ ve benzer şekilde, y tek tamsayı ise $\exists m \in Z$ için $y = 2n+1$'dir. O zaman $x \times y = (2m+1)(2n+1) = 2(2mn+m+n)+1$ olur. Burada, $(2mn+m+n) \in Z$ ve $2(2mn+m+n)+1$ tek sayıdır. Dolayısıyla, $x \times y$ tektir. Böylece $p \Rightarrow q$ olduğu gösterilmiştir (Mishra, 2004, akt: Dede, 2013).

Tümdengelim yönteminin ikinci alt yöntemi olan dolaylı ispat yönteminde, teoremin kendisini ispatlamak yerine teoremin doğruluğunu kanıtlayacak başka bir önermenin doğruluğu ispatlanır (Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel ve Sabuncuoğlu, 1988). Dolaylı ispat yöntemi de üçe ayrılır.

Dolaylı ispat yöntemlerinden *olmayana ergi (contraposition)* yönteminde hükmün olumsuzundan hareketle varsayımın olumsuzuna ulaşılır. Olumsuz ifadeden başlangıçta verilen teoremin doğruluğu ispatlanmış olur. $p \Rightarrow q$ *teoreminin* olmayana ergi yöntemine göre doğruluğunu kanıtlamak için $\sim q \Rightarrow \sim p$ önermesini kanıtlamak yeterlidir (Bayazıt, 2013). Örneğin, "*Karesi çift olan bir sayının kendisi de çifttir.*" teoreminin varsayım kısmı *p: "a sayısının karesi çifttir*;" hüküm kısmı *q: "a sayısının kendisi çifttir*." .İspatta hükmün olumsuzundan hareket edip varsayımın olumsuzuna ulaşılacaktır. Olmayana ergi yöntemiyle ispat:

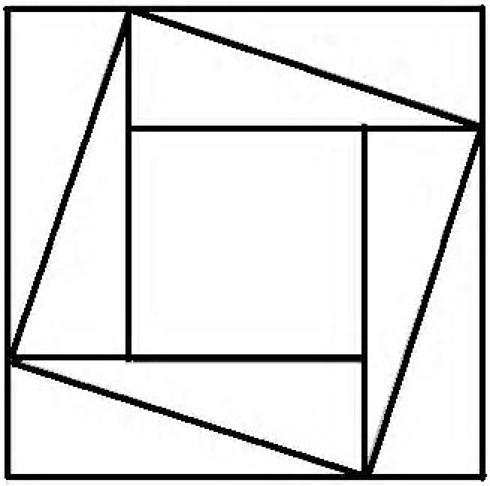
"$a=2k+1$, ($\forall k \in Z$ için $2k$ çift, $2k+1$ ise tek sayıdır)
$\Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$
$\Rightarrow a^2=2(2k^2+2k)+1$, ($\forall k \in Z$ için $2k^2+2k=t \in Z$ dir)
$\Rightarrow a^2=2t+1$ olur ($t \in Z$ için $2t$ çift,$2t+1$ ise tek sayıdır)
$\Rightarrow a^2$ *bir tek sayıdır."* (Bayazıt, 2013).

Olmayana ergi yöntemine verilen örnek ispatta *a* sayısı tek kabul edilip karesinin de tek sayı olduğu gösterilmektedir. İspat edilmek istenen teorem ise "*Karesi çift olan bir sayının kendisi de çifttir.*" ve olmayana ergi yöntemiyle ispatlanmıştır.

Dolaylı ispat yöntemlerinin üçüncü alt yöntemi *çelişki bulma yönteminde* ise verilen önermenin doğru olmadığı kabul edilerek ispata başlanır. İspatın sonunda başlangıçtaki kabulle çelişki gösterilir. Başlangıçta verilen önermenin doğruluğu ispatlanır.

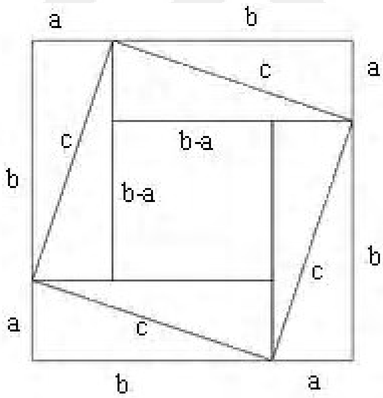
2.1.2. İnformel İspat

İnformel ispat Şekil 1'de verildiği üzere üç alt kola ayrılmaktadır (Dede, 2013). Görsel ispatlar; sözel dilde hiçbir yorum olmadan (yani kelimesiz) sunulan, bununla birlikte gerektiğinde sayılar, harfler, oklar noktalar veya bazen sembolik ifadelerle ilişkili diğer işaretlerle donatılan sadece diyagramlara dayanan ve ispatın yeniden oluşturulması okuyucuya bırakılan ispatlardır (Bardelle, 2010).



Şekil 2. Pisagor Teoreminin İnformel İspatı

Görsel ispat yöntemine örnek olarak Şekil 2 Pisagor teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir. Şekil 2'de verilen bu ispatı göstermek için görsel ispat yöntemini kullanmak için öncelikle kenar uzunluklarına aşağıdaki gibi harfler verilir. Şekillerin benzerliği göz önüne alındığında aşağıdaki gibi bir harflendirme ortaya çıkacaktır.



*Şekil 3.*Pisagor Teoreminin İspatı

Burada amaç $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu göstermektir. En dıştaki karenin alanı $(a + b)^2$ ifadesine eşittir. Aynı zamanda bu karenin alanı kenar uzunluğu c olan içteki kare ile kenar uzunlukları a ve b olan dört dik üçgenin alanlarının toplamına eşittir. Bu durumda aşağıdaki ifade yazabilir.

$$(a + b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2$$

Yukarıdaki ifadede gerekli sadeleştirmeler yapıldığında, $a^2 + b^2 = c^2$ ifadesi elde edilir. Açıklayan ispatlar ile ispatlayan ispatlar arasındaki fark Hanna (1990) tarafından aşağıdaki şekilde ortaya konmuştur.

> *"Açıklayan ispat ile ispatlayan ispatın her ikisi de geçerli ispatlardır. İspatın bu her iki çeşidi de bir matematiksel ispat için gereklilikleri karşılamaktadır*

ve böylece bir matematiksel iddianın geçerliğini sağlamada eşit ölçüde yardımcıdır. Her ikisi de, ya aksiyomlar ya da çıkarımlara dayalı oluşturulan kuralların doğru uygulamalarının bir sonucu olarak önceki ifadelerden (nihayetinde aksiyomlardan) türetilmiştir. Kesinliğin derecelerinde farklılık göstermeleri gerekli değildir ve her ikisi de matematik toplumunca geçerli olarak tanımlanır. Bununla beraber, bu iki ispat çeşidinin arasında çok önemli bir fark vardır. İspatlayan ispat, bir teoremin sadece doğru olduğunu gösterir ve yalnızca delile dayalı gerekçeler sunar. Diğer taraftan açıklayan ispat, bir teoremin niçin doğru olduğunu gösterir ve olaydan türetilen gerekçelerin bir kümesini sunar. İspatlayan ispat, matematiksel tümevarıma veya sadece söz dizimsel düşüncelere dayanmaktadır. Fakat açıklayan ispat, mutlaka çalışılan matematiksel fikirlere dayalı bir mantıksal temel sunmalıdır" (s. 9).

2.2. Matematiksel İspat Yapma Süreci

Bu bölümde matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya karşı tutumları, ispat yapabilme yeterlikleri, ispat süreçleri ve geometrik kavramları bilme yeterlikleri ile ilgili araştırmalara yer verilmiştir.

2.2.1 Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Karşı Görüş ve Tutumları

İskenderoğlu (2010) sınıf seviyeleri farklı 187 öğretmen adayının katılımıyla fonksiyonlar konusunda kullanılan ispat şemalarını tespit etmeyi, sınıf seviyesi değiştikçe ispat şemalarının değişimini belirlemeyi, öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini tespit etmeyi ve bunun sınıf seviyesi değiştikçe nasıl değiştiğini incelemeyi, kullanılan ispat şemaları ile ispat hakkındaki görüşleri arasında bir ilişkiyi belirlemeyi amaçlamıştır. 16 kişiyle klinik görüşme yapmıştır. Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini tespit etmek için "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" adıyla geliştirilmiş ölçeği kullanmıştır. Öğretmen adaylarının ispata yönelik bakış açılarının olumlu olduğu ve sınıf seviyesi arttıkça analitik şemaların kullanımının arttığı tespit etmiştir. Öğretmen adaylarının sınıf seviyeleri ile ispata yönelik görüşleri arasında pozitif ilişki olduğu ortaya konulmuştur.

Bayazıt (2013) öğretmen adaylarının matematiksel ispat ve tanımlar hakkındaki düşüncelerini belirlemiş, başkaları tarafından yapılmış ispatları değerlendirebilme ve ispatı yaparken matematiksel tanımları kullanabilme becerilerini incelemiştir. Lineer Cebir dersi almış 4 öğretmen adayı ile bir araştırma yapmıştır. Öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkında farklı görüşlere sahip oldukları, bu farklı görüşlerin ispat yaklaşımını etkilediği ve benimsedikleri matematiksel tanımlar hakkındaki düşüncelerinin kavram imajı oluşturma esnasında fayda sağladığı tespit etmiştir. Matematik öğretmen adaylarının ispata yapma yaklaşımlarının farklı olduğu, ispata karşı olumlu düşüncelere sahip olsalar bile ispatın önemi ve yapım aşamaları konusunda eksik noktalarının olduğunu ifade emiştir.

Doruk, Özdemir ve Kaplan (2014) dördüncü sınıfa devam eden 76 öğretmen adayının ispat yapma hakkındaki fikirlerini ve matematiğe karşı öz-yeterlik algılarını incelemişlerdir. Bu iki değişken arasındaki ilişkiyi belirlemişlerdir. Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma hakkındaki fikirleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algı düzeylerinin orta seviyede ilişkili olduğu belirlenmiştir.

Gökkurt ve Soylu (2012) birinci sınıfa devam eden 150 fen bilgisi, 94 matematik öğretmen adayının katılımıyla farklı bölümlerdeki öğretmen adaylarının ispata yönelik düşüncelerini ve ispatla ilgili düşünce düzeylerini belirlemek amacıyla bir çalışma yapmışlardır. Farklı bölümlerdeki öğretmen adaylarının ispata yönelik düşünceleri arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. İki bölümdeki öğretmen adaylarının da ispata yönelik düşünce düzeylerinin düşük olduğu tespit edilmiştir.

Güler ve Dikici (2012) dördüncü sınıfa devam eden 12 matematik öğretmen adayının ispata yönelik görüşlerini incelemişlerdir. Araştırmanın verileri yarı-yapılandırılmış "Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu (MİGMF)" kullanılarak toplanmıştır. Katılımcıların çoğunun matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin olumlu olduğu bulunmuştur.

Güler, Özdemir ve Dikici (2012) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerini, matematiksel ispat hakkındaki düşüncelerini ve değişkenler arasındaki ilişkiyi belirlemeyi amaçlamışlardır. Öğretmen adaylarının ispat hakkındaki düşüncelerinin tam oluşmadığını, tümevarım yöntemini kullanarak ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğunu ve ispat hakkındaki düşünceleri ile tümevarım yöntemi kullanarak ispat yapabilme becerileri arasındaki ilişkinin anlamlı ve pozitif olduğu belirlenmişlerdir.

İmamoğlu (2010) birinci ve son sınıf öğretmen adaylarının; matematiksel ispata karşı inanç ve tutumlarını, kullandıkları akıl yürütme şekillerini ve ispat yöntemlerini, başka kişiler tarafından yapılan ispatları nasıl değerlendirdiklerini incelemiştir. “Tutum ve İnanç Ölçeği (TİÖ), İspat Sınavı (İS) ve İspat Değerlendirme Sınavı (İDS)” kullanılarak veri toplanılmıştır. Birinci ve son sınıf öğretmen adaylarının ispata yönelik inanç ve tutumları arasında farkın anlamlı olduğu, son sınıf öğretmen adaylarının İS puanlarının birinci sınıflara göre daha yüksek olduğu, birinci sınıfların ispat yaparken çoğunlukla tümevarımsal akıl yürütme yöntemini kullandıkları, son sınıfların ise tümdengelimsel akıl yürütme yollarını kullanmaya eğilimli oldukları tespit edilmiştir. Son sınıf öğretmen adaylarının ispat yapma ve değerlendirmede güçlükler yaşadıkları belirlenmiştir.

İskenderoğlu, Baki ve Palancı (2011) sınıf seviyeleri farklı 187 öğretmen adayının katılımıyla matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla ölçek geliştirmek için çalışma yapmışlardır. Geliştirilen ölçekte 29 Likert tipi, 3 tane de açık uçlu soru yer almaktadır. Geliştirilen ölçeğin matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik “güven, tutum-inanç ve öz değerlendirme” süreçlerini ortaya çıkarmada kolaylıklar sağlayacağı belirtilmiştir.

Karaoğlu (2010) matematik öğretmeni adaylarının “anahtar nokta ve fikirlerle” desteklenmiş ispatları yapabilme becerilerini incelemek, bu fikirlere karşı görüşlerini belirlemek, bu fikirleri kullanmanın teorem ispatlarını yapmaya etkisini incelemiştir. Araştırmanın verileri “anahtar nokta fikirlerle” desteklenmiş çalışma kâğıtları kullanılarak toplanmıştır. Matematik öğretmen adaylarıyla mülakatlar yapılmıştır. Matematik öğretmen adaylarının “anahtar nokta fikirlerden” faydalandıklarından ispat yapabilme yeterliklerinin arttığı ve teorem ispatlarını yapmaya daha istekli oldukları gözlenmiştir. Öğretmen adayları matematik derslerinde ispat öğretiminde “anahtar nokta ve fikirlerle” desteklenmiş ispatların kullanımının ispat yapma becerilerini olumlu yönde etkileyeceğini belirtmiştir. Öğretmen adayının ispatı tamamlayabilmesi için yeterli düzeyde kavramsal bilgiye sahip olması ve bunu teoremin ispatında nasıl kullanacağını bilmesi gerektiğini belirtmiştir. İspat yaparken öğretmen adayının kaygı durumunun da etkili olduğunu, kaygı taşımayan öğretmen adaylarının ispatı başarıyla sonuçlandırdığını dolayısıyla özgüveninde artış olduğunu ve teorem ispatlarına karşı olumlu tutum geliştirebildiğini tespit etmiştir.

Kayagil (2012) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri cinsiyet, mezun olunan lise türü, sınıf seviyesi ve matematikle ilgili bilimsel bir etkinliğe katılma durumu değişkenlerine göre incelenmiştir. İlköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 357 öğretmen adayına ispata ilişkin görüş ölçeği uygulanmıştır. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik ne olumlu ne de olumsuz görüşlerinin olduğu tespit edilmiştir. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının görüşleri cinsiyete ve matematikle ilgili bilimsel etkinliğe katılma durumuna göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Ayrıca sınıf ve mezun olunan lise türü değişkenlerine göre anlamlı farklılık tespit edilmemiştir.

Miral (2013) 10 öğretmen adayının katılımıyla matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yöntemleri hakkında görüşlerini incelemiştir. Araştırmanın verileri "Matematiksel İspat Yöntemlerine İlişkin Görüş Formu ve Kişi Tanıtım Formu" kullanılarak toplamıştır. Öğretmen adaylarıyla mülakatlar gerçekleştirilmiş ve veriler "içerik analizi ve betimsel analiz" kullanılarak analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatları önceden belirleyip ispat yapmanın gerekliliği hakkındaki görüşlerinin olumlu olduğu bulunmuştur. Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006) 337 birinci ve son sınıf öğretmen adayının ispat yapmaya ilişkin görüşlerini incelemişlerdir. Öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapamaya ilişkin görüşlerinin olmadığı veya görüşlerinin yetersiz olduğu belirlenmiştir.

Öçal ve Güler (2010) 22 matematik öğretmen adayının katılımıyla öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla "kavram haritası" yöntemi kullanarak bir araştırma yapmışlardır. Verileri "beyin fırtınası" tekniği kullanılarak toplamışlardır. Matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin bilgi düzeylerinin yeterli olmadığı ve ispata ilişkin düşünceleri arasındaki ilişkinin net olmadığı belirlenmiştir.

2.2.2 Öğretmen Adaylarının İspat Yapabilme Yeterlikleri ve İspat Süreçleri

Güler, Özdemir ve Dikici (2012) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerini incelemişlerdir. Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi (MTBT) ve yarı-yapılandırılmış mülakatlar kullanılmıştır. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu saptanmıştır. Baki ve İskenderoğlu (2010), birinci sınıf öğretmen adaylarının nasıl ispat yaptıklarını ve kullandıkları ispat şemalarını belirlemek amacıyla 40 öğretmen adayıyla çalışma yapmışlardır. Öğretmen adaylarına yazılı sınav uygulandıktan sonra 6 öğretmen adayıyla mülakat yapılmıştır. Öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarını belirlemek amacıyla Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemaları sınıflandırılması kullanılmıştır. Mülakatlar betimsel yöntem kullanılarak analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının kendilerine yöneltilen ispatları çeşitli yollardan yaptıkları belirlenmiştir. Mülakatlarda ise öğretmen adaylarının bütün ispat şemalarını kapsayan cevaplar verdiği görülmüştür.

Oflaz, Bulut ve Akçakın (2016) öğretmen adaylarının geometrik ispatları yaparken kullandıkları ispat şemalarını belirlemek, ispatı yaparken karşılaştıkları güçlükleri ve derslerde kullanılan ispata karşı görüşlerini belirlemek amacıyla 3 öğretmen adayıyla çalışma yapılmıştır. Öğretmen adaylarının yaptıkları ispatı belirlemek ve derslerde kullanılan ispata yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarının ders başarıları ile ispat yapabilme becerileri arasında negatif bir ilişki olduğu belirlenmiştir. Ayrıca çalışmaya katılan öğretmen adaylarının temel geometrik kavramlara yönelik bilgilerinde eksiklikler olduğu tespit edilmiştir.

Polat ve Akgün'ün (2016) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik ispat yapma sürecini ve ispat kavramı ile ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşlerini araştırmışlardır. Ortaöğretim matematik öğretmen adayları uzun ispatları, kabule dayalı ispatları ve daha önce hiç karşılaşmadıkları ispatları yapamamaktadırlar. İspatı ezberlemeye çalıştıkları için uzun ispatlarda zorluk yaşamaktadırlar. Araştırmaya katılan ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tamamı ispata nasıl başlayacağını bilemediklerini ve benzer ispatlar olmadan ilk defa karşılaştıkları bir ispatı yapamayacaklarını belirtmişlerdir.

Şengül ve Güner (2013) birinci ve son sınıf öğretmen adaylarının ispatı yaparken kullandıkları ispat şemalarını tespit etmek, kullandıkları ispat şemaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığını belirlemek amacıyla tarama modeli kullanarak 135 öğretmen adayı ile çalışma yapmışlardır. Öğretmen adaylarına 5 problem sorulmuş ve kullanılan ispat şemalarını belirlemek için Harel ve Sowder'ın (1998) İspat Şemaları Sınıflandırılması kullanılmışlardır. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının hepsi (dışsal, deneysel, analitik) tespit edilmiş, sınıf seviyesine göre kullanılan deneysel ve analitik ispat şemalarında anlamlı bir fark olduğu görülmüştür. Birinci sınıf öğretmen adayları çoğunlukla deneysel ispat şemasını kullanırken, son sınıf öğretmen adaylarının çoğunlukla analitik ispat şemalarını kullandıkları görülmüştür.

Uygan, Tanışlı ve Köse (2014) son sınıf matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispatın anlamına ve özelliklerine karşı inançlarını, ispat yapma ve örnek ispatların geçerliliğini değerlendirirken yaptıkları akıl yürütme süreçlerini incelemek amacıyla 3 öğretmen adayının katılımıyla nitel bir çalışma yapmışlardır. Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış görüşme ve klinik görüşme tekniğiyle toplanmıştır. Verilerin analizinde Miles ve Huberman'ın (1984) üç aşamalı nitel veri analiz yöntemi kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının; ispatı bir tür problem çözme ve bilginin nereden geldiğini araştırma olarak gördükleri, ispatın tümdengelimsel sonucu genelleştirilebilir ve anlaşılır olması gerektiğini vurguladıkları görülmüştür. Öğretmen adayları ispatı yapmaya ilişkin yeterli bilgilerinin olmadığı kanaatindedir. Öğretmen adaylarının ispat süreçleri incelendiğinde ezberlemiş oldukları stratejileri kullandıkları görülmüş, ispatı değerlendirme sürecinde katılımcıların bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulamaları matematiksel ispat için yeterli olarak gördükleri ve aksiyomatik yapıyı bozan gereçleri değerlendirmekte hata yaptıkları belirlenmiştir.

Ceylan (2012) ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf adaylarının GeoGebra matematik yazılımı ile geometriye yönelik ispat yapma becerilerini ve kullanmış oldukları ispat biçimlerini incelemiştir. Durum çalışması yöntemi kullanarak 6 matematik öğretmeni adayı ile çalışılmıştır. Uygulama sürecinde öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerini belirlemek için yarı yapılandırılmış görüşmelerden yararlanılmıştır. İlköğretim matematik öğretmen adayları verilen bir ispat probleminde GeoGebra yazılımını amaçları doğrultusunda kullanabilmişlerdir. Çözüm sürecinde doğru sonuca ulaşmak için yazılımda yer alan birçok araçtan yararlanmışlardır. Böylece ilköğretim matematik öğretmen adaylarının farklı çözüm yolları arama, geometrik özelikleri keşfetme, genelleme ve akıl yürütme becerilerinin desteklendiği görülmüştür. Ayrıca GeoGebra yazılımı birçok özelliği ve araçları sayesinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının varsayım yapmalarına yardımcı olmuş ve onları ispat yapmaya teşvik etmiştir.

Demiray (2013) öğretmen adaylarının; "aksine örnek verme, olmayana ergi ve çelişki bulma" ispat yöntemlerindeki yanlış anlamlandırmalarının nedenlerini belirlemek, kullandıkları kanıt yöntemini belirlemek ve geçersiz kanıtların nedenlerini bulmak için bir çalışma yapmıştır. Öğretmen adaylarının "aksine örnek verme ve çelişki bulma " ispat yöntemindeki başarılarının yüksek olduğu, geçersiz kanıtları incelendiğinde "ifadeyi ispatlamak için sayıları kullanmak" geçersiz kanıt yapma sebeplerinden en sık görüleni olarak ortaya konulmuştur.

2.2.3 Öğretmen Adaylarının Geometrik Kavramları Bilme Yeterlikleri

Cilavdaroğlu (2012) ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin iki boyutlu geometrik kavramların tanımları ve şekillerine dair bilgilerini incelemiştir. 2010 - 2011 eğitim öğretim yılında güneyde bir üniversitenin birinci sınıfına devam eden 151 ilköğretim matematik öğretmeni adayına temel geometrik kavramları içeren bir bilgi toplama formu verilmiştir. Formda bulunan geometrik kavramlar için tanım yapmaları ve ilgili kavrama ait şekli çizmeleri istenmiştir. Kavramlardan iki boyutlu olanların verileri nitel olarak analiz edilmiştir. Katılımcıların hiyerarşik yapıdan veya başka bir kavramdan yararlanarak tanım yaptıkları görülmüştür. Tanımlar yapılırken çoğu zaman kısmen doğru olacak şekilde bir ifade kullanılmıştır. Katılımcıların bir kısmı geometrik kavramlara ait şekilleri eksik ve/veya hatalı çizmişlerdir. Ancak genel olarak doğru çizim yapan katılımcı sayısının doğru tanım yapan katılımcılara göre daha fazla olduğu gözlenmiştir. Diğer taraftan, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kullandıkları matematiksel dile ve seçtikleri terimlere dikkat etmedikleri, belirsiz ifadelerle veya yanlış terimler kullanarak tanım yaptıkları görülmüştür. Özellikle yanlış veya kısmen doğru kategorisinde değerlendirilen tanımlardan katılımcıların alan bilgisinin eksik olduğu anlaşılmaktadır.

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının geometri bilgilerini inceleyen çalışmalarda çoğunlukla Van Hiele düzeyleri kullanılarak katılımcıların geometrik düşünme yapıları incelenmeye çalışılmıştır (Duatepe, 2005; Halat, 2008; Halat ve Şahin, 2008; Kılıç, Köse, Tanışlı ve Özdaş, 2007). Bunun yanı sıra son yıllarda ülkemizdeki ilköğretim okullarında da yaygın olarak kullanılan fiziksel matematik araç ve gereçlerinin ve matematiksel yazılımların kullanımı da geometrik düşünmeyi arttırmak için bir araç olarak seçilmiştir (Baki, Kösa ve Güven, 2009; Işıksal ve Aşkar, 2005). Diğer bazı çalışmalarda ise öğretmen adaylarının uzamsal düşünme alanında yaşadıkları zorluklar tespit edilmiştir. Delice, Ertekin, Yazıcı ve Aydın (2009) sınıf öğretmeni adaylarının prizmaları ve piramitleri tanımakta zorluk çektiklerini ve de açınımları verilen 3 boyutlu şekillerin çizimini yapmada yeterince başarılı olamadıklarını bulmuşlardır.

Kaplan ve Hızarcı (2005) üçüncü sınıfa devam eden 45 matematik öğretmen adaylarının üçgenle ilgili bilgi düzeylerini belirlemek amacıyla çalışma yapmıştır. Matematik öğretmen adaylarının üçgen kavramına ait doğru tanımlara ulaşmada zorluk yaşadığı tespit edilmiştir.

Bukova-Güzel (2010) son sınıfta üç matematik öğretmen adayının katılımıyla yapılan durum çalışmasında yarı yapılandırılmış görüşmeler, öğretmen adaylarının hazırladıkları ders planları ve öğretmenlik uygulaması sırasındaki video kayıtları kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının konu anlatımını desteklemek için sıkça somut materyaller ve nesneler kullandıkları görülmüştür. Bununla birlikte, öğrencilerin kavramlarla ilgili olası kavram yanılgılarını öğretim sürecinde çok dikkate almadıkları ve alternatif değerlendirme tekniklerinden faydalanmadıkları dikkati çekmiştir. Araştırmada, öğrencilerin sahip olabilecekleri kavram yanılgılarının öğretim sürecinde göz önünde bulundurulmasını sağlamaya yönelik olarak şu hususlar önerilmiştir: Öğretmen adayları geometrik kavramlarla ilgili muhtemel kavram yanılgılarının neler olabileceğinden haberdar olmalıdır. Bu kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için dersi nasıl tasarlayabileceklerini, ne gibi örnek, etkinlik ve materyallerle konuyu destekleyebileceklerini bilmelidirler.

Bir öğretmenin öğrencinin bir konuyu anlamasında ona yardımcı olabilme seviyesi öğretmenin o konuda kendi sahip olduğu kavramsal yapının ve algılama seviyesinin üzerine çıkamaz (Ma, 1999, Akt: Bukova-Güzel, 2010).

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Araştırma Modeli

Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yapabilme yeterliklerinin ortaya çıkarılması hedeflenmiştir. Bunun için ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yeterlikleri derinlemesine incelenmiştir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları ispat yönteminin başarı değerlendirilmesinin yapılabilmesi, ispat yöntemlerine yönelme sürecinin ve katılımcıların bu süreçteki düşüncelerinin derinlemesine çalışılmasını gerektirdiği için bu araştırmada olguları ve olayları derinlemesine inceleme fırsatı sunan nitel araştırma yaklaşımı tercih edilmiştir.

Nitel araştırma, algıların ve olayların doğal ortamında gerçekçi ve bütüncül bir yaklaşımla ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama araçlarının kullanıldığı, araştırma yöntemi olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Nicel araştırma yöntemlerinin amacı, araştırmada elde edilen bulgulara göre genelleme yapmak iken nitel araştırma yöntemlerinde amaç elde edilen bulgulara göre derinlemesine açıklama yapmaktır (Bilgili, 2008). Nitel araştırmalar nicel araştırmalarda olduğu gibi sayılar yoluyla sonuçlara ulaşmaya çalışmaz ve araştırılan konu ile ilgili okuyucuya betimsel yani olabildiğince gerçekçi bir resim sunmaya çalışır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu sebepler nedeniyle araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışmasının kullanılmasının uygun olduğu düşünülmektedir. Yıldırım ve Şimşek (2016) durum çalışmasını "Neden", "Niçin" ve "Nasıl" soruları odağında bir konu ya da olayı derinlemesine inceleme ve araştırma fırsatı sunan bir yöntem olarak tanımlamaktadır. Diğer bir tanımı Yin (1984), güncel bir olguyu kendi gerçekliği içinde araştıran, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarla çizilemediği ve birden fazla veri kaynağının yer aldığı durumlarda kullanılan araştırma yöntemi olarak açıklamaktadır.

3.2. Çalışma Grubu

Araştırma A ve B Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde 3. ve 4. Sınıfta öğrenim gören 228 öğretmen adayı ile yapılmıştır. Araştırmada A Üniversitesindeki 5 öğretmen adayı A1, A2, A3, A4, A5; B Üniversitesindeki 6 öğretmen adayı ise B1, B2, B3, B4, B5, B6 şeklinde kodlanmıştır. A üniversitesinden araştırmaya katılan 3. sınıf öğretmen adaylarının 10'u erkek, 41'i kız 4. sınıf öğretmen adaylarının ise 11'i erkek 69'u kızdır. B üniversitesinden araştırmaya katılan 3. sınıf öğretmen adaylarının 9'u erkek 39'u kız 4. sınıf öğretmen adaylarının 6'sı erkek 43'ü kızdır. Üçüncü ve dördüncü sınıf öğrencilerinin almış oldukları dersler açısından alt sınıflara göre daha donanımlı oldukları düşüncesinden hareketle bu sınıf seviyesindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarıyla çalışılmıştır. Özellikle almış oldukları Genel Matematik, Soyut Matematik, Analiz 1, Analiz 2, Analiz 3, Cebire Giriş, Düzlem Geometri, Analitik Geometri 1 ve Analitik Geometri 2 gibi derslerin ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapabilme düzeylerini artırdığı söylenebilir. Ayrıca bu sınıf düzeylerindeki adayların mesleği icra etmeye yakın olmaları nedeniyle üzerinde araştırma yapılmasının daha önem arz etmesidir.

Araştırmaya katılan 228 öğretmen adayına önceden hazırlanmış 6 adet problemden oluşan Geometri İspat Testi uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının yazılı sınavları ön analiz edildikten sonra yapılan ispatlara bakılarak iki ayrı üniversiteden belirlenen toplam 11 öğretmen adayı ile yarı yapılanırılmış görüşmeler yapılmıştır. Mülakat yapılan adaylar belirlenirken başarı açısından düşük orta ve yüksek olmak üzere her gruptan öğrenci seçilmesine özen gösterilmiştir. Bununla birlikte mülakat grubu heterojen yapıda olmuştur.

3.3. Veri Toplama Araçları

Çalışma kapsamında veriler iki kaynaktan toplanmıştır. Birinci kaynak olarak düşünülen yazılı sınavda çözümü sırasında ek çizim, farklı alt alanlardan bilgi transferi, geçmiş geometri bilgilerinin sentezini gerektiren geometri alanından 6 adet ispat problemine yer verilmiştir. Yazılı sınavın ispat yapma sürecinde ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının düşüncelerini ortaya çıkarmada eksik kalabileceği düşünüldüğünden ikinci veri kaynağı olarak her iki üniversiteye devam eden ilköğretim matematik öğretmeni adayları arasından rastgele seçilen toplam 11 ilköğretim matematik öğretmeni adayıyla 6 problemden oluşan yarı yapılandırılmış mülakat yapılmıştır. Yarı yapılandırılmış mülakat soruları Ek 2'de verilmiştir. Bu şekilde ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ek çizim, farklı alt alanlardan bilgi transferi, geçmiş geometri bilgilerinin sentezini gerektiren sorularda zorlandığı aşamaların ortaya çıkarılması, seçilen ispat türünün tercih edilme nedenlerinin sorgulanması, seçilen ispat türünün kilit noktalarının farkında olup olmama ve benzer ya da farklı ispat türlerinin geliştirilip geliştirilemeyeceği gibi unsurlarında değerlendirilebileceği düşünülmüştür.

Araştırmada kullanılan soruların geçerlik ve güvenirliğinin sağlanması için ana çalışmadan önce 2018-2019 öğretim yılında B Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü öğrencilerinden oluşan 20 öğretmen adayı ile pilot çalışma yapılmıştır. Yapılan pilot çalışma Ek 3'de verilmiştir. Pilot çalışma sonucunda 2, 5 ve 8. problemler süre sıkıntısı sebebiyle Geometri İspat Test'inden tamamen çıkarılmıştır. Problemleri daha net bir anlatımla ifade edebilmek için sözel olarak verilen 1. problem şekil olarak verilmiştir ve 6. problemde dil ve anlatım yönünden anlaşılma güçlüğü yaratan bölümler çıkarılmıştır. Geometi İspat Testinin son hali Ek 1'de verilmiştir.

6 problemden oluşan Geometri İspat Testi iki ayrı devlet üniversitesinde iki hafta arayla farklı sınıf seviyelerindeki 228 öğretmen adaylarına eş zamanlı olarak uygulanmıştır. Araştırmanın geçerliği ve güvenirliğini sağlamak amacıyla öğretmen adaylarına soruları boş bırakmak yerine düşüncelerini yazmaları uyarısında bulunulmuştur. Katılımcıların birbirlerini etkilememeleri için gerekli önlemler alınmıştır.

Çeşitleme nitel çalışmalarda geçerlik ve güvenirliği artırmanın farklı yollarından biridir. Ulaşılan sonuçların geçerliği ve güvenirliğini artırmanın yolu doküman analizi, gözlem ve görüşme gibi farklı yöntemlerle elde edilen verilerin birbirlerini onaylamak amacıyla kullanılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek 2016). Bu nedenle yapılan tez çalışmasında verileri çeşitleme amacıyla yazılı sınavlar sonuçlarına göre orta düşük ve yüksek seviyelerde A Üniversitesinden 6, B Üniversitesinden 5 ilköğretim matematik öğretmeni seçilmiştir. Seçilen 11 ilköğretim matematik öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış mülakat yapılmıştır. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının yaptıkları ispatları derinlemesine incelemek, kullandıkları ispat yöntemini bilip bilmediklerini tespit etmek ve temel geometrik kavramlara ilişkin teorik bilgilerini ölçmek amacıyla belirlenen 11 öğretmen adayıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Mülakat yapılan öğretmen adayları belirlenirken yazılı sınav kağıtları derinlemesine incelenmiş ve ispat başarıları açısından (düşük-orta-yüksek) olacak şekilde seçilmiştir. Her bir katılımcı ile yapılan mülakatlar ortalama 50-60 dakika sürmüştür. Katılımcıların izni dâhilinde yapılan görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayda alınmıştır. Ayrıca katılımcıların soruları sesli bir şekilde tekrar çözebilmeleri amacıyla kâğıt ve kalem temin edilmiştir.

Yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarından problemlerin çözümlerini sesli bir şekilde anlatmaları istenmiştir. Konuşmanın akışı öğretmen adaylarının verdikleri cevaplara göre şekillenmiş ve bu cevaplara yönelik yeni sorular yöneltilerek sürdürülmüştür. Mülakatlarda öğretmen adaylarına yöneltilen sorular eldeki sorunun çözüm yoluna göre değişmiştir. Bu sorularla öğretmen adaylarının düşünme süreçlerine ulaşılmaya çalışılmıştır. Böylece öğretmen adaylarının ispat sürecinde zorlandığı noktaların belirlenmesi, ispatı yaparken yaptıkları ek çizimlerin kullandıkları geçmiş bilgilerinin sorgulanması, tercih ettikleri ispat yönteminin farkında olup olmadıkları ve temel geometrik kavramlara ilişkin bilgi düzeylerinin belirlenmesi amaçlanmıştır.

3.4. Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verileri öğretmen adaylarına tek oturumda uygulanan "Geometri İspat Testi" uygulanarak toplanmıştır. "Geometri İspat Testi" uygulandıktan sonra seçilen 11 öğretmen adayıyla görüşmeler yapılmıştır.

3.4.1. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları

Araştırmada öğretmen adaylarının geometri alanındaki ispat yeterliklerini belirlemek, kullandıkları ispat türünü tespit etmek ve temel geometrik kavramlar hakkındaki bilgi düzeylerini ölçmek amacıyla yarı yapılandırılmış görüşme soruları kullanılmıştır. Görüşme soruları öğretmen adaylarının cevapları detaylı bir şekilde incelenerek ve uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır.

Görüşme formu, araştırmacı tarafından hazırlandıktan sonra kapsam geçerliği için iki alan uzmanının görüşü alınarak gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Daha sonra bir öğretmen adayı ile pilot çalışma yapılmış ve görüşme süresi belirlenmiştir. Son olarak görüşme sorularında pilot çalışmadan elde edilen veriler ışığında bazı değişiklikler yapılmış ve aynı uzmanlarla tekrar görüşüldükten sonra görüşme formuna son hali verilmiştir. Görüşme formu Ek 2'de ayrıntılı olarak sunulmuştur.

3.4.2.Görüşme Sorularına Yönelik Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirliği sağlamak nicel araştırmalara göre daha zordur (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bunun en önemli sebebi insan davranışlarının ölçülmesinin zorluğu ve tekrarlanmasının pek mümkün olmamasıdır (Şahin, 2016). Nitel araştırmalarda geçerlik, "Araştırmacının araştırdığı olguyu, olduğu biçimiyle ve olabildiğince yansız gözlemesi anlamına gelmektedir." (Kirk ve Miller, 1986; akt: Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 269) ve "gözlem, teorik çerçeveye bağlı verilerin toplanması, alan uzmanlarının incelemesi, katılımcıların teyidi, çeşitleme gibi yöntemlerle sağlanabilmektedir." (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Nitel araştırmalarda güvenirliği sağlamak için de araştırmanın ön yargılardan arınması, veri analizinde kuramsal çerçeveye bağlı kalınması, verilerin analizinde çeşitli tekniklerin kullanılması, akran teyidi, uzman görüşü ve pilot çalışma gibi yöntemler kullanılır (Merriam, 1998; akt: Şahin, 2016). Araştırmanın nitel kısmının güvenirliğini sağlamak için yapılan çalışmalar: teorik çerçeve doğrultusunda verilerin analizi, görüşme sorularının araştırmaya uygun hazırlanması, pilot çalışma, uzman onayı ve görüşmelerin kaydedilmesidir. Geçerliğini sağlamak için yapılan çalışmalar ise ilgili alan yazın incelenmesi, uzman kişilerin görüşü, pilot çalışma ve uzman değerlendirmesi şeklindedir (Şahin, 2016).

Araştırmanın güvenirlik ve geçerliğini artırmak için araştırmanın amacına uygun İlköğretim matematik öğretmeni adayları seçilmiştir.Bu öğretmen adaylarına aynı sorular sorulmuş, rahat hissettikleri ortamda ve istedikleri zamanda görüşmeler yapılmıştır. Yapılan bütün görüşmeler öğretmen adaylarının izinleri doğrultusunda ses kaydı ile kaydedilmiştir. Görüşme verileri araştırmacı tarafından farklı zamanlarda iki defa kodlanmış ve bu kodlar iki uzman görüşüne de sunularak görüşme sorularına son hali verilmiştir.

3.5. Pilot Çalışma

Uzman görüşü alınarak hazırlanan yarı yapılandırılmış görüşme sorularında gerekli düzenlemeleri yapmak ve görüşmenin süresini belirlemek için B Üniversitesinde

İlköğretim Matematik Öğretmenliği 3. sınıfta öğrenim gören bir öğretmen adayı ile pilot çalışma yapılmıştır. Görüşme yaklaşık olarak 55 dakika sürmüştür. Öğretmen adayı görüşme esnasında oldukça rahat ve sakin davranmıştır.

3.6. Verilerin Toplanması

Araştırmayı yapabilmek için üniversitelerden gerekli izinler alınmıştır. Araştırma sürecinde Geometri İspat Testinin uygulanması, yarı yapılandırılmış görüşmelerin yapılması ve yapılan görüşmelerin ses kayıtlarının tutulması süreci araştırmacı tarafından bizzat yürütülmüştür. Gönüllülük esasına göre ve geometri ispat testinden alınan notlara göre yüksek orta düşük seviyelerde belirlenen A ve B üniversitesinden belirlenen toplam 11 öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerden önce öğretmen adaylarına araştırmanın amacı ve yapılacak uygulama hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarının uygun oldukları bir zamanda görüşmeler yapılmıştır.

Etik ilkeler doğrultusunda katılımcıların ses kayıtlarının gizli kalacağı katılımcılara söylenmiştir. Görüşmeler yaklaşık 60 dakika sürmüş ve katılımcılara diledikleri zaman görüşmeyi sonlandırabilecekleri belirtilmiştir. Böylelikle öğretmen adaylarına kendi düşüncelerini net bir şekilde açıklayacakları güven ortamı oluşturulmaya çalışılmıştır.

3.7. Verilerin Analizi

Geometri İspat Testinin çözümünün sonuçları yazılı kağıtların değerlendirilmesiyle yapılmıştır. Mülakat verilerinin analizi Geometri İspat Testi verilerinin analizindeki yöntem ve yaklaşımlar kullanılarak yapılmıştır. Bu bağlamda katılımcılarla görüşmelerden elde edilen veriler konuşmanın akışında bir bütün olarak değerlendirilmiş olup söylem analizi yöntemi kullanılmıştır. Öğretmen adaylarına ait ses kayıtları önce bilgisayara aktarılmış daha sonra transkript edilmiştir. Elde edilen yazılı dokümanlar birkaç kez okunarak öğretmen adaylarının ispat yapma yeterlikleri, kullandıkları ispat türünün farkında olup olmadıkları, temel geometrik kavramlar hakkındaki bilgi düzeylerine dair özetleyici notlar alınmıştır. Araştırma soruları sırasıyla öğretmen adaylarının verdikleri cevaplara göre incelenmiş ve genel açıklayıcı analiz yapılmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Matematik eğitiminin nihai amacı aklı etkili kullanabilen, sorgulayabilen, sentez ve analiz yapabilen, eleştirel ve yaratıcı düşünceyi işe koşarak sıra dışı problemlere özgün çözümler üretebilen, eldeki durumları sebep-sonuç ilişkisi çerçevesinde irdeleyerek çıkarımlarda bulunabilen ve bu sayede yeni bilgilere ulaşabilen bireyler yetiştirmektir. Bu amaçlara ulaşılabilmesi öğrencilerdeki düşünce gelişimini önceleyen, kavramlar arası ilişkilerin kurulmasına özen gösteren ve eldeki problemler üzerinde kolektif düşünmeye imkân tanıyan yansıtıcı (tefekkür içerikli) öğrenme-öğretme etkinlikleri (reflective teaching-learning activities) ile mümkün olabilir (Bayazıt, 2013).

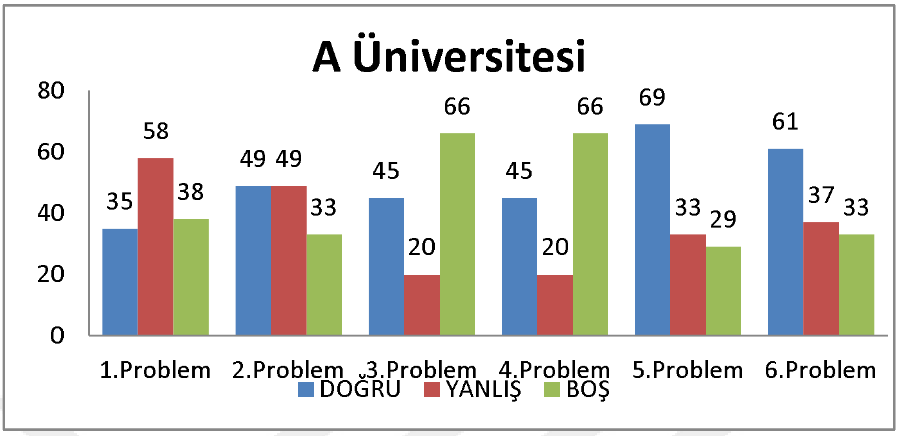
Matematiksel bilgileri diğer bilgilerden ayıran en temel özellik sadece akılla anlaşılabilen soyut bilgiler olmasıdır. Matematiksel bilgilerin büyük çoğunluğu zaman içerisinde akıl yürütme yoluyla ispatlanarak üretilmiştir. Matematiksel bir bilginin anlaşılabilmesi bu bilgiye temel teşkil eden ön bilgilerin kavranıp aralarındaki sebep sonuç ilişkisinin ispat mantığıyla irdelenip anlaşılmasına bağlıdır. Matematiksel kavramların ilgili kurallarla öğrencilere sunulup ardından bol örneklerle yapılan matematik öğretimi ezberin ötesine geçemez. Bu nedenle öğrencilerin düşünce gelişimlerini desteklemek için seviyelerine uygun ispat uygulamalarına yer verilmelidir. Dolayısıyla matematik derslerinin önemli bir parçası haline gelen ispat yapabilme yaklaşımından öğretim sürecinde faydalanabilmek ve öğrencilerin formel ve informel ispat yapabilme becerilerinin de buna paralel olarak geliştirilmesi konusunda matematik öğretmenlerine büyük rol düşmektedir. Bu sebeple matematik öğretmen adaylarının formel ve informel ispat yapabilme konusundaki bilgi, beceri ve yeterliliklerinin geliştirilmesi, göreve başladıklarında matematiksel ispat yapabilmeyi etkin kullanabilme ve öğretim sürecinde ispat türlerinden yararlanabilme açısından ihtiyaç halini almıştır. Matematik öğretmen adaylarındaki formel ve informel ispat yapabilme becerilerinin ne ölçüde geliştirilmesi gerektiği ise öncelikle bu beceriler ve yeterlilikler konusunda ne kadar bilgi ve beceri sahibi olduklarının ortaya çıkarılması ile mümkündür.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarındaki formel ve informel ispat yapabilme yeterliklerini ve becerilerini incelemesi, bu konudaki donanımlarını ortaya koyması önem arz etmektedir. Ayrıca araştırmanın sonuçlarının Eğitim Fakülteleri Matematik Öğretmenliği Bölümünde okutulan ders içeriklerinin belirlenmesi ve öğretmen adaylarının yetiştirilmesi konusunda katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişiminde öğretmenin rol aldığını ve matematik öğretmen adaylarının bu konuda donanımlı yetiştirilmesinin önemini vurgulamak açısından da faydalı bir kaynak olma özelliğini taşımaktadır. Alan yazında yapılan çalışmalar ispata yönelik görüşler, güçlükler, yeterlikler üzerine yapıldığı görülmektedir. Bu yönüyle araştırmanın alan yazında olan bu boşluğu dolduracağı söylenebilir. En genel manada ise tezden elde edilecek bulguların öğretmen adaylarını geometri alt alanında formel ve informel ispat yapabilme yeterlikleriyle alakalı ulusal ve uluslararası alan yazına katkı sağlayacağı umulmaktadır.

Bu bölümde araştırmanın problem ve alt problemlerine ilişkin bulgular ile yorumlara yer verilmiştir.

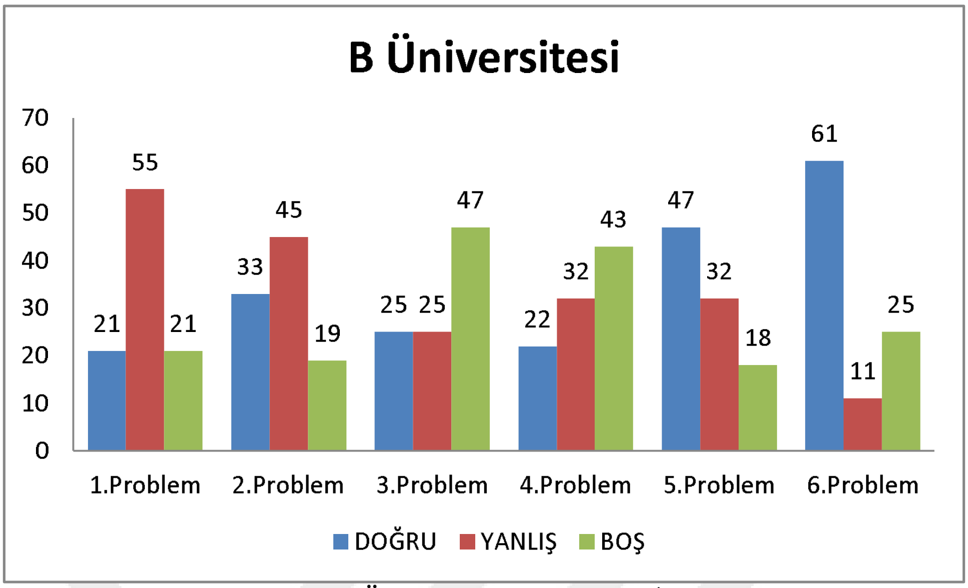
4.1. Geometri İspat Testinin Sonuçları

A üniversitesinde 3. ve 4. sınıfta öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problem bazında doğru yanlış ve boş sayıları verilmiştir. Şekil 4'de verilen grafiğe bakıldığında araştırmaya katılan 131 öğretmen adayının yaklaşık % 27'si 1. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %44'ü yanlış yapmıştır. %29'u ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık % 37'si 2. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %37'si yanlış yapmış, %26'sı ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %34'ü 3. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %15'i yanlış yapmış, %51'i ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %34'ü 4. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %15'i yanlış yapmış, %51'i ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %53'ü 5. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %25'i yanlış yapmış, %22'si ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %47'si 6. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %28'i yanlış yapmış, %25'i ise boş bırakmıştır. Bu sonuçlara bakıldığında öğretmen adayları en çok 1. problemi ispatlamakta güçlük yaşarken ispatını en kolay yaptıkları problem 5. problem olmuştur.



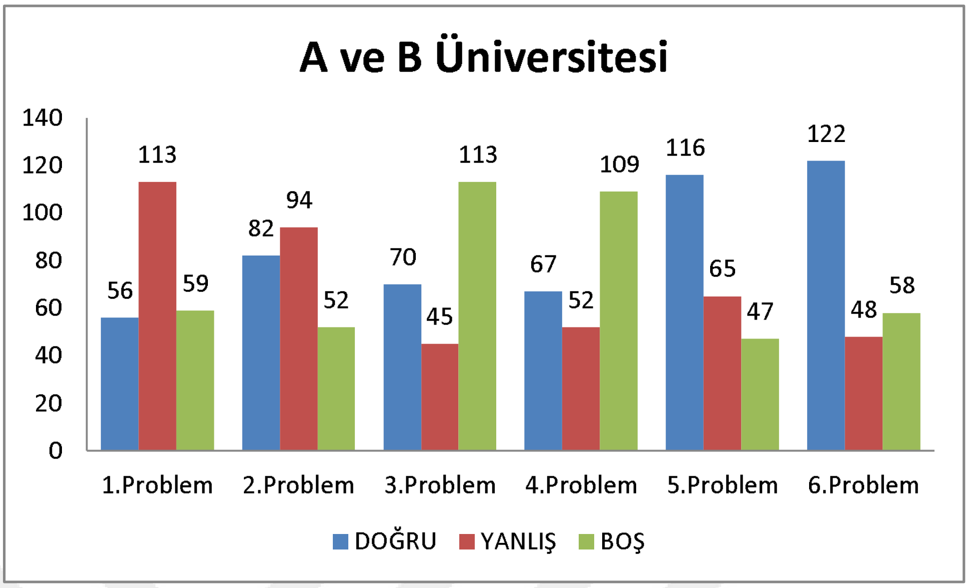
Şekil 4. A Üniversitesi Geometri İspat Testi

B üniversitesinde 3. ve 4. sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının problem bazında doğru yanlış ve boş sayıları verilmiştir. Şekil 5'de verilen grafiğe bakıldığında araştırmaya katılan 97 öğretmen adayının yaklaşık %22'si 1. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %56'sı yanlış yapmış, %22'si ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %34'ü 2. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %46'sı yanlış yapmış, %20'si ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %26'sı 3. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %26'sı yanlış yapmış, %48'i ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %23'ü 4. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %33'ü yanlış yapmış, %44'ü ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %48'i 5. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %33'ü yanlış yapmış, %19'u ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %63'ü 6. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %11'i yanlış yapmış, %26'sı ise boş bırakmıştır. Bu sonuçlara bakıldığında öğretmen adayları en çok 1. problemi ispatlamakta güçlük yaşarken ispatını en kolay yaptıkları problem 6. problem olmuştur.



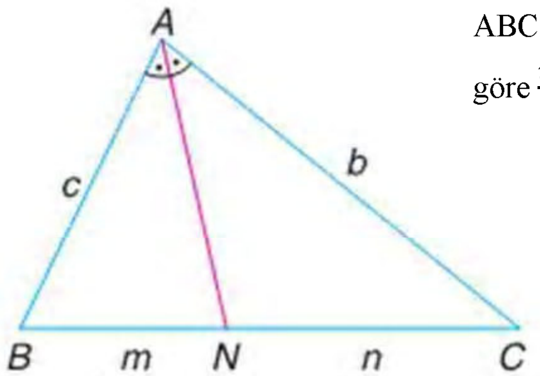
Şekil 5. B Üniversitesi Geometri İspat Testi

A ve B üniversitelerinde 3. ve 4. sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının problem bazında doğru yanlış ve boş sayıları verilmiştir. Grafiğe bakıldığında araştırmaya katılan 228 öğretmen adayının yaklaşık %25'i 1. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %50'si yanlış yapmış, yaklaşık %25'i ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %36'sı 2. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %41'i yanlış yapmış, yaklaşık %23'ü ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %31'i 3. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %20'si yanlış yapmış, yaklaşık %49'u ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %29'u 4. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %23'ü yanlış yapmış, yaklaşık %48'i ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %51'i 5. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %29'u yanlış yapmış, yaklaşık %20'si ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık % 54'ü 6. problemin ispatını doğru yapmış, yaklaşık %21'i yanlış yapmış, yaklaşık %25'i ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının doğru cevap yüzdelerine bakılırsa öğretmen adaylarının en çok zorlandığı problem 1. problem olurken ispatı en çok yapılan problem ise 6. problem olmuştur. Öğretmen adaylarının 6 problemde ispatı doğru yapabilme yüzdesi yaklaşık %38'dir. Buradan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yeterliklerinin düşük olduğu sonucuna varılabilir. Öğretmen adaylarının ispatı yaparken zorlandığı noktalar ve ispat aşamaları aşağıdaki mülakatlarda detaylı bir şekilde incelenmiştir.



Şekil 6. A ve B Üniversitesi Geometri İspat Testi

4.2. Birinci Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar



ABC üçgeninde [AN] açıortay olduğuna göre $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$'dir. İspatlayınız.

Bu araştırmada kullanılan birinci alt problem:

4.1.1. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A1 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Hocam şimdi ilk baştaki şu eşitliğimizde ben şuraya yazmak istiyorum. Burası açıortay olduğundan dolayı üçgen alanından ben bu eşitliği bulmak istedim. Şuralara dikmeler indirdim.
Araştırmacı: Üçgeni isimlendir misiniz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben burada şunu kullanmak istedim. Buradan buraya bir dikme indirdiğimde N'den AB ve AC kenarına dikme indiriyorum. Ben burada

biliyorum ki buralar eğer 90 derece ise buralar açıortay ise direkt deltoide gidiyorum.
Araştırmacı: Peki bu uzunlukların ölçüleri eşittir mi diyorsunuz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet uzunlukların ölçüleri eşittir çünkü indirdiğim dikmeler ve açıortaylar olduğundan dolayı direkt deltoide gidiyorum. Deltoidin özelliklerinden burası k gibi bir değer ise burasıda k'dır. Ondan sonra ben bir de ABC üçgeninde alanlardan ABN üçgeninin alanı aynı zamanda (c.d)/2'dir. Aynı zamanda ANC üçgeninin alanı (d.b)/2'dir. Bu eşitlikleri buldum.
Araştırmacı: Ayrı bir üçgen çizebilir misiniz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben ABN ve ANC üçgenleri içinde ortak olan bir özelliği biliyorum ikisi içinde yükseklikleri aynıdır. Bu yüksekliğe h dediğimde üçgenin alanı (yükseklik.taban)/2 olur. Buradan ABN üçgeninin alanı (h.m)/2'dir. Aynı zamanda ANC üçgeninin alanı (h.n)/2'dir. Başta bulduğum alanlarla şimdi bulduğum alanları eşitlemek istiyorum. Buradan gerekli işlemler yapıldığında m/n=c/b elde edilir.

A1 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü verilmiştir. Birinci araştırma probleminde ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çözümü yaparken genişletme yani ek çizim kullanacaklarını düşündük. A1 Kodlu Öğretmen Adayının çözümüne bakıldığında geçmiş bilgilerin sentezini (alan bilgisi, açıortay bilgisi) kullandığı bir çözüm görülmektedir.

Araştırmacı: Burada ispata nasıl başladınız? Hipoteziniz ve hükmünüz nedir?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: İspata şu şekilde başladım açıortay olduğunda genelde alanlardan gidebilirim diye düşündüm.
Araştırmacı: Peki alanı kullanınca ön bilgilerinizi mi kullandınız?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet ön bilgilerimi kullandım. Bir üçgen iki üçgene ayrıldıysa ikisi içinde aynı yüksekliğe sahip iki üçgen vardır. Bu yükseklikleri eşitleyebileceğimi düşündüm Bu yükseklikleri eşitleyerek çıkardım.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı araştırmacının birinci problemde ispata nasıl başladınız sorusuna verdiği cevapla aslında açıortay kavramını gördüğünde aklına alan kavramının geldiğini söylemek istemiştir.

Araştırmacı: Peki burada hipotez ve hüküm nedir ya da önce tanımlarını yapabilir misiniz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Hani tam olarak hipotezi bilmiyorum.

A1 Kodlu Öğretmen Adayının hipotez ve hüküm tanımına verdiği cevap bu kavramları bilmediğini göstermektedir. A1 Kodlu Öğretmen Adayı tanım yapmayı yani genelleme becerisine sahip olmayabilir.

Araştırmacı: Peki burada hipoteziniz ve hükmünüz nedir?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Burada hipotezimi alanların eşitliğini kullanarak yürüttüm, hüküm olarak da aynı bölgenin alanını iki farklı şekilde bulmaya çalıştım.

A1 Kodlu Öğretmen Adayının bu soruda hipotez ve hüküm kavramlarının neler olduğuna verdiği cevap aslında soruyu çözme yollarını açıklamasıdır.

Araştırmacı: Peki burada kullandığınız ispat yöntemi nedir?

A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Burada kullandığım ispat yöntemi aynı bilgilerin değişik versiyonlarla eşitlenmesi.

A1 Kodlu Öğretmen Adayının ispat yöntemleri nedir sorusuna verdiği cevap aslında problemi çözme aşamasında kullandığı yoldur. A1 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği bu cevapla ispat yöntemlerini bilmediği ortaya çıkmaktadır.

Araştırmacı: İspat ne demektir?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Doğruluğunu gerekli bilgilerle gösterme biçimidir.
Araştırmacı: Nasıl gösterirsek gösterelim ispat olur mu?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Belli şartları sağlaması gerekir.
Araştırmacı: Yaptığımız şeyin ispat olabilmesi için hangi özellikleri sağlaması gerekir?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir kere matematiksel olarak bir değeri olması gerekir bir şeylere dayandırmam gerekir yaptıklarımın herkes için aynı şeyleri ifade etmesi gerekir.

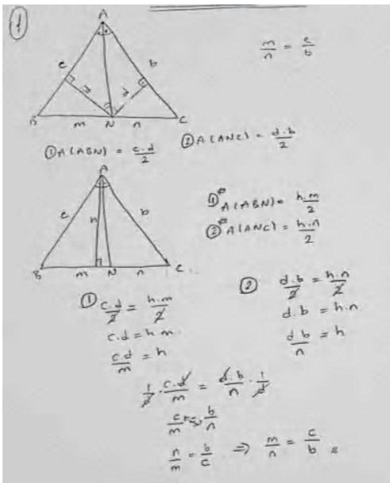
A1 Kodlu Öğretmen Adayının ispat ne demektir sorusuna verdiği yanıt aslında doğrudur ama araştırmacının sorduğu soruya verilen cevapla daha da anlam kazanmıştır. (*Bir kere matematiksel olarak bir değeri olması gerekir bir şeylere dayandırmam gerekir yaptıklarımın herkes için aynı şeyleri ifade etmesi gerekir).*

Araştırmacı: Burada bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: İspat olarak evet düşünüyorum ispatın bir yolla olduğunu düşünmüyorum benim yaptığım gösterimde olabilir.
Araştırmacı: İspatla gösterimin farkı var mıdır?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: İkisinin de birbirine paralel olduğunu düşünüyorum ama ispat daha kesindir.
Araştırmacı: Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet kesinlikle çünkü muallakta kalacak hiçbir şey yok herkes için geçerli olan şeyleri kullandım

A1 Kodlu Öğretmen Adayı açıklamalarını geçmiş bilgilerine dayandığından doğruluğundan emin olmaktadır. Bundan dolayı da yaptıklarıyla karşıdakileri ikna edebileceğini ifade ediyor.

Araştırmacı: Burada kullandığınız yöntem nedir?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Tümevarım yöntemi
Araştırmacı: Tümevarım yöntemini açıklayabilir misiniz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Tümevarım derken elimdeki küçük bilgilerimi kullanarak genelleme yapmaya çalıştım.
Araştırmacı: Bu ispatı farklı şekilde yapabilir misiniz?

<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı</u>: Olabilir biraz uğraşsam belki olabilir.



Şekil 7. A1 Kodlu Öğretmen Adayı Birinci Problem Çözümü

A1 Kodlu Öğretmen Adayı, ispat türlerinden tümevarım yöntemini kullandığını ifade ederek aslında ispat türlerini bildiğini göstermektedir. Farklı ispat yöntemlerini kullanmakta kendisine güvenmektedir. Bir durumun ispatında birden fazla ispat yönteminin uygulanabileceğini düşünmektedir. Bu ilköğretim matematik öğretmen adayının esnek düşünmeye sahip olduğunu göstermektedir. Şekil 7'de A1 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü verilmiştir.

4.1.2. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A2 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> AC kenarına ve AB kenarına N noktasından dik indirdim. Bu yükseklikler açıortayın koluna çizildiği için uzunlukları eşit olur dedim. BC kenarına da A köşesinden bir yükseklik indirdim buna da h dedim. Oluşan üçgenlerin alanlarını yazarsam:

$$A(ABN) = \frac{c.|HN|}{2} = \frac{|BN|.h}{2}$$

$A(ANC) = \frac{|AC|.|NK|}{2} = \frac{|NC|.h}{2}$ *dedim. Sonra* $|HN|=|NK|$ *olduğundan bu eşitlikleri birbirine oranladım.*

$\frac{c.|HN|}{|NK|} = \frac{m}{n}$, $|HN|=|NK|$ *olduğundan sadeleştirme yaparsam* $\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$ *elde edilir.*

Bu problemde ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çözümü yaparken genişletme yani ek çizim kullanacaklarını düşündük. A2 Kodlu Öğretmen Adayının çözümüne bakıldığında geçmiş bilgilerin sentezini (alan bilgisi, açıortay bilgisi) kullandığı bir çözüm görülmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> İspata nasıl başladınız?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Dikmeler çizdim.

A2 Kodlu Öğretmen Adayının dikmeler çizerek ispata başlaması alanların eşitliğini kullanacağını göstermektedir. Nitekim A2 Kodlu Öğretmen Adayının alanların eşitliğini kullanarak ispatını tamamlamıştır.

Araştırmacı: Bu soruda hipotez ve hükmün nedir?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Bilmiyorum.

A2 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaptan da anlaşılacağı üzeri hipotez ve hüküm kavramlarını bilmediği anlaşılmaktadır. Genelleme becerisine sahip olmayabilir.

Araştırmacı: Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: İspat türleri neydi ki?
Araştırmacı: İspat türlerini sayın hocam.
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Tümevarım, tümden gelim, dolaylı, doğrudan. Bu dolaylı oluyor o zaman dikmeler çizdiğim için doğrudan gelmedim. Bilmiyorum.

A2 Kodlu Öğretmen Adayının bu ispatta kullandığınız ispat türü nedir sorusuna verdiği yanıttan anlaşılacağı üzere A2 Kodlu Öğretmen Adayının ispat türlerini hatırlayamamış ve araştırmacıya sormuştur. Araştırmacının ispat türlerini nedir sorusuna ise bildiği ispat türlerini sayarak cevap vermiştir. Bu soruda ilköğretim matematik öğretmeni adayı soruda verilenlerin dışında bir şeyler (dikme çizme, alan bilgisi) kullandığından dolayı yaptığı ispatın dolaylı ispat olduğunu söylemiştir.

Araştırmacı: İspat ne demektir?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Formüllerin nereden geldiğini bulmak için yaptığımız şeyler.

A2 Kodlu Öğretmen Adayının ispatın tanımına ilişkin verdiği cevap tam anlamıyla ispat tanımını karşılamamaktadır bu da A2 Kodlu Öğretmen Adayının ispatın tanımını bilmediğini gösterir.

Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Farklı. Geometri dersinden hatırlıyorum. Yapabilirim.

A2 Kodlu Öğretmen Adayının araştırmacının ispatı farklı şekilde yapabilir misiniz sorusuna verdiği geometri dersinden hatırlıyorum ifadesi yapılan ispatların ne anlama geldiğinin bilinmediği, önceden yapılan ispatların ezberlenildiği, yeni karşılaşılan ispat problemlerinde fikir yürütülemeyeceği anlamı taşıyabilir.

Araştırmacı: Altına ikinci yol deyip yapabilirsiniz.
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: AN'yi uzattım ve C köşesinden AB'ye paralel çizdim. İçters açılardan NKC açısı da noktalı olur. Bu durumda AKC üçgeni ikizkenar olduğundan $|AC| = |KC| = b$ oluyor. Daha sonra kelebek desem bir şey olur mu?
Araştırmacı: Kelebek dediğimiz benzerlik türü ne benzerliğidir?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Şu an ki mi?
Araştırmacı: Evet.
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Açı-açı-açı benzerliği.

A2 Kodlu Öğretmen Adayının açı-açı-açı benzerliğine verdiği kelebek benzerliği liseden kalan bir ifadedir.

Araştırmacı: Açı-açı-açı benzerliği bize ne diyor?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Aynı açıların karşılarındaki kenarlar orantılıdır. Bu durumda ABN üçgeni ile KNC üçgeni benzer üçgenler oldu. Kenarları oranlarsam $\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$

A2 Kodlu Öğretmen Adayı bu soruyu araştırmacının istediği şekilde ek çizim (yardımcı doğru) çizerek başarılı bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: Bu soruda neden benzerlik kullandınız?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Açıortay olduğu için.

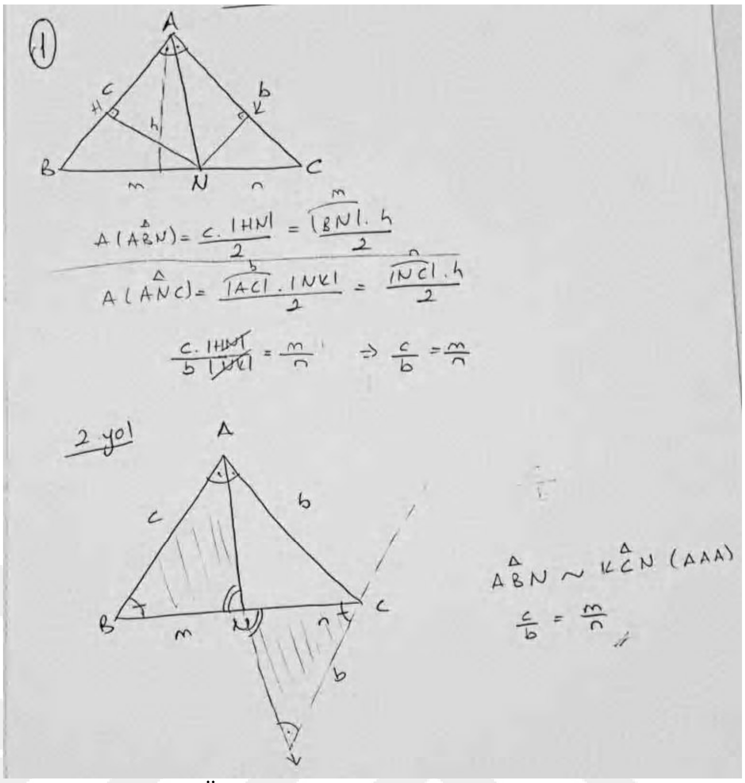
Açıortay kavramı A2 Kodlu Öğretmen Adayına benzerlik kavramını çağrıştırmaktadır.

Araştırmacı: İki durumda da bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Bazı paraleller çizerek ya da olmayan şeyler çizerek formülleri bulduk. Neden böyle olduğunu.
Araştırmacı: Yaptığınız şeylerin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Mantıksal şeyler olması lazım herkesin anlayabileceği türden.

A2 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevapla yapılanların ispat olabilmesi için *mantıksal şeyler olması lazım herkesin anlayabileceği türden i*fadesi aslında kullanılan bilgilerin herkes için aynı şeyleri ifade etmesi anlamı taşımaktadır.

Araştırmacı: Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Ederim. Birinci yol bence daha mantıklı ikisi de düşünmeyi gerektiriyor.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı birinci çözüm yönteminde sadece dikmeler indirerek üçgenin alan formülünü kullanarak ispat yapıyor. İkinci çözüm yönteminde AB doğru parçasına paralel çiziyor ama bu paralel çizme eyleminde ezbere yapıyor. O sebeple aslında kendisi de ispat yapmadığının farkındadır. AC doğru parçasının uzunluğu b ama KC doğru parçasının uzunluğunun neden b olduğu belli değil. A2 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü Şekil 8'de verilmiştir.



Şekil 8. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

4.1.3. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A3 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> *Araştırmacı:* *Birinci soruyu sesli bir şekilde okuyup çözebilir misiniz?*
> *A3 Kodlu Öğretmen Adayı:* *Tamam hocam. Birinci soruda iç açıortayı benzerlikten çözmeye çalıştım. N noktasından |AB|'ye paralel çizdim. BAN ve NAC açılarına α dersem NHC açısı 2α olur. İç açıortayın özelliklerinden hatırladığım kadarıyla ABN açısına x dersem HNC açısı da x oluyor ve |AB|=|AH|=c olur. Bu durumda da |HC|=b-c olur. Bunları yazdıktan sonra benzerlik yapmaya çalıştım aslında.*
> *Araştırmacı:* *Hangi üçgenler benzerdir?*
> *A3 Kodlu Öğretmen Adayı:* *CHN üçgeni ile CAB üçgeni benzerdir dedim.*
> *Araştırmacı:* *Ne benzerliği var bu iki üçgen arasında?*
> *A3 Kodlu Öğretmen Adayı:* *Açı benzerliği var. Açı-açı-açı benzerliği var daha doğrusu. Bu üçgenler arasında benzerlik yapacak olursak* $\frac{b-c}{b}=\frac{n}{m+n}=\frac{m}{c}$ *yaptım ama devamını getiremedim.*

A3 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümüne bakıldığında açıortay kavramının benzerliği çağrıştırdığı görülmektedir. A3 Kodlu Öğretmen Adayı ek çizim yapmış fakat çözüme ulaşamamıştır. Açı açı benzerliği kuracağının bilincindedir ama benzerliği verilen birinci üçgen durumunda uygulayamamıştır.

> *Araştırmacı:* *İspata başlayamama devam ettirememe ve ispatı tamamlayamama sebebiniz nedir?*

A3 Kodlu Öğretmen Adayı: *İşin doğrusu bu sorunun ispatını hiç görmedim o yüzden aklıma gelmedi, akılıma direk benzerlik geldi.*

A3 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaba bakılırsa daha önceden ispatını gördüğü soruların ispatlarını yapabileceği ilk defa gördüğü soruların ispatına yönelik fikir yürütemeyeceği anlaşılmaktadır. A3 Kodlu Öğretmen Adayı gördüğü ispatları anlayıp kavramak yerine ezberlemeyi tercih etmektedir. Problem çöme becerisi değil, aslında alıştırma statüsünde olan durumlarda belki kuralları uygulayabilecektir**.**

Araştırmacı: *Bu soruda sizi benzerlik kullanmaya iten sebep nedir?*
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: *AB kenarını gördüğümde paralel çizesim geldi. Paralel çizersem bir oran yakalayabilirim dedim iç açıortaydan bir oran yakalayabildiğimizden oranları yazarak benzerliği düşündüm.*

A3 Kodlu Öğretmen Adayı paralellik sembolünü anımsatan doğru parçalarına paralel doğru parçaları çizme gereksinimi duymuştur. Ders kitaplarında genellikle benzerlik anlatılırken bir paralel kenar bulma ya da inşası gerekmektedir. A3 Kodlu Öğretmen Adayı burada ders kitaplarında genel gördüğü benzerlik kuralını uygulamaya çalışmıştır.

Araştırmacı: *Bu soruda hipotez ve hükmünüz nedir?*
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yani yapamadım.*

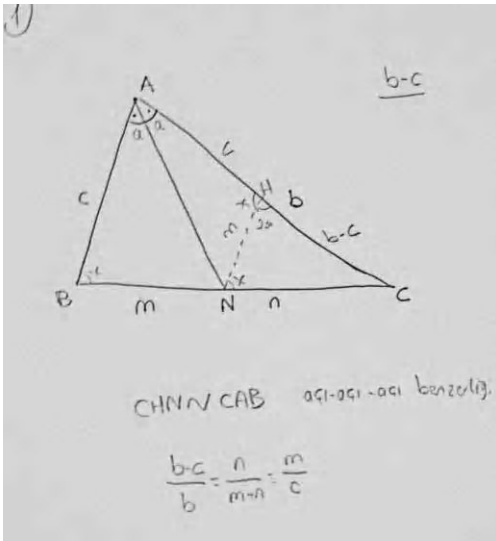
A3 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez ve hüküm kavramlarını bilmemektedir. A3 Kodlu Öğretmen Adayı birinci probleminin ispatını yapamadığı için hipotez ya da hükümlerin farkında olmayabilir.

Araştırmacı: *Bu soruyla ilgili neden bir strateji geliştiremediniz?*
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Dediğim gibi hiç görmedim ve hiç aklıma gelmedi.*

A3 Kodlu Öğretmen Adayı bu verdiği cevapla sadece önceden görüp ezberlediği ispatları yapabileceğini söylemektedir. Derslere ya da kitaplarda karşılaşmış olduğu bir durum olduğunda hatırladığı çözüm yöntemi aynen uygulayacaktır.

Araştırmacı: *Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?*
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Immm. Ne olabilirdi. Bilmiyorum. Büyük ihtimalle bir yerden paralel çizeceğim ama bilmiyorum yani.*

Aslında A3 Kodlu Öğretmen Adayı paralel çizeceğinin farkında ama doğru yerden paralel çizmeyi başaramadığından dolayı ispatı yapamamıştır. A3 Kodlu Öğretmen Adayı benzerlik kavramı tam olarak oluşmadığı için bir şekilde bir yere paralel doğru çizeceğini düşünüyor ama çizdiği doğru parçasının doğruluğuna karar veremiyor. Şekil 9'da A3 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümünde kullandığı çizim verilmiştir.



Şekil 9. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

4.1.4. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A4 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> AN'nin açıortay olduğunu vermiş bende BAN ve NAC açılarının ölçülerine α dedim. Bir şey dememize de gerek yok aslında. ABN ve ANC üçgenlerinin yükseklikleri eşit olduğundan bu iki üçgenin alanları oranı tabanları oranına yani $\frac{m}{n}$*'ye eşit olur.*

1. *Nereden bu kanıya vardım.* $|AN| = a$ *diyorum. Ben bu üçgenlerin alanını sinüsten de bulabilirim. Bu durumda* A(ABN) = c.a.sinα.$\frac{1}{2}$, A(ANC) = a.b.sinα.$\frac{1}{2}$. Bu iki alanı oranlarsak $\frac{A(ABN)}{A(ANC)} = \frac{c.a.sin\alpha.\frac{1}{2}}{a.b.sin\alpha.\frac{1}{2}}$ elde ederiz. Buradan gerekli sadeleştirmeleri yaparsak alanlar oranı $\frac{c}{b}$ çıkar.
2. *1 ve 2 nolu eşitliklerden* $\frac{A(ABN)}{A(ANC)} = \frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ *elde ederiz böylelikle ispat tamamlanmış olur.*

Bu soruda ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ek çizim yapmalarını beklemiştik ama A4 Kodlu Öğretmen Adayının çözümüne bakıldığında geçmiş geometri bilgilerini (sinüs kullanarak alan formülü, alan bağıntısı) kullandığı görülmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> İspata nasıl başladınız?

<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bazı şeyler düşündüm. Kosinüsü de düşündüm ama oradan çıkmayacağını anladım. Yükseklikleri aynı oluğundan alandan gittim.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı yükseklikle alan kavramını ilişkilendirmiştir. İspata başlamadan önce aslında bildiği yöntemler aklından geçiyor. Kosinüs bağıntısı ile de alan kullanarak ispat yapabilir ama bu ispatın bu durum için uygun olmadığı kararına varıyor. A4 Kodlu Öğretmen Adayı aslında en az üç farklı ispat yönünden problem durumunu inceliyor.

Araştırmacı: *Bu soruda hipotez ve hüküm nedir?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Hipotez* $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$. *Hükmü bilmiyorum.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı ispatlanacak ifadenin hüküm olduğunu karıştırmış ve hükme hipotez demiştir. Hipotez ve hüküm tanımlarını büyük olasılıkla karıştırıyor.

Araştırmacı: *Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Bu ispatta bence tümden geldim.*
Araştırmacı: *Ne demek tümdengelim?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Genel bilgilerden daha özel bilgilere ulaşmak.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı burada ispat türlerini biliyor. Yaptığı ispatı tümdengelim olarak açıklamaktadır. Yaptığı ispatı tümdengelim olarak nitelendirmesinin sebebi verilen bilgileri kullanarak kenarları karşılaştırmasını yapmasından ötürüdür.

Araştırmacı: *Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet.*
Araştırmacı: *Neden?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Bence her şey açık ve anlaşılır.*
Araştırmacı: *Yaptığınız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Bazı şeyleri önceden yapılmış ispat ve teoremlere dayandırarak sonuca varmak.*

Yaptığı şeyleri önceden yapılmış ispat ve teoremlere dayandıran A4 Kodlu Öğretmen Adayı birinci problemde bir ispat yaptığını düşünmektedir.

Araştırmacı: *Bu soruda neler kullandınız?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Alan formülünü ve sinüs teoremini kullandım bunları önceden biliyordum.*

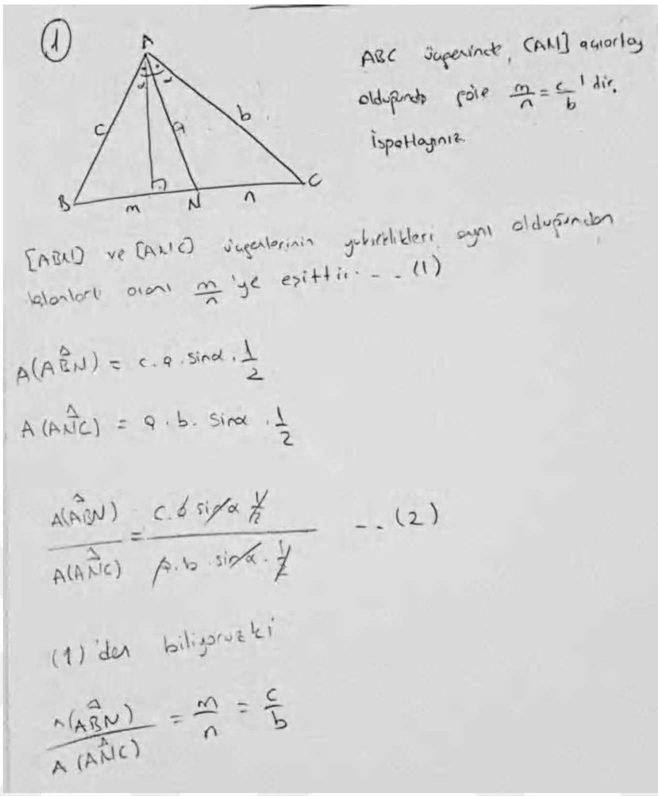
A4 Kodlu Öğretmen Adayı verdiği bu cevapla birinci problemin çözümünde geçmiş bilgilerini kullandığını söylemiştir.

Araştırmacı: *Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet.*
Araştırmacı: *Neden?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Sinüs teoremini kullanarak sonuca ulaştım.*

Herkes tarafından kabul edilen bir teoremi (formülü) kullandığı için karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edeceğini savunmaktadır.

Araştırmacı: *Bu soruyu farklı bir şekilde ispatlayabilir misiniz?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Şu an aklıma gelen bir yol yok ama düşünürsem bulabilirim.*

Şekil 10'da A4 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü verilmiştir.



Şekil 10. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

4.1.5. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A5 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Yaptığınız ispatı sesli olarak anlatabilir misiniz?*
<u>*A5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Tabi ki. Benzer üçgenler oluşturabilmek için N noktasından AB kenarına paralel olacak şekilde bir NK doğru parçası çizdim. Bu NK doğru parçasının AC kenarını kestiği noktaya da K noktası dedim. Paralelliğin özelliğini kullanarak iç ters açılardan NAC açısı ile ANK açısı eşit olur dedim. ANK üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan |NK|=|AK|=m yazdım ve bu durumda |KC|=b-m oldu. Bundan sonra benzerlik yapmam gerekiyor.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Hangi üçgenler benzer hocam?*
<u>*A5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *CKN üçgeni ile CAB üçgeni benzer üçgenlerdir.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Bu üçgenler arasında ne benzerliği var?*
<u>*A5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Kenar-açı-kenar oluyor bir dakika (açı-açı-açı) benzerliği oluyor. Şimdi oluşturalım o zaman bir dakika. Aynı açıların gördüğü kenar uzunluklarını oranlarsam* $\frac{m}{c} = \frac{b-m}{b} = \frac{n}{m+n}$ *elde ederim. Bu eşitliklerden denklemler oluşturarak sonuca ulaşabilirim. Denklemlerimi oluşturursam;*
1-) $m.b=c.b-m.c$
2-) $n.b=b.m-m^2+n.b-m.n$
3-) $m^2+m.n=n.c$

Bu eşitliklerden ikinci eşitliği düzenlersem m^2+n.m=m.b elde ederim. 3 numaralı eşitliği de düşündüğümde

m^2+n.m=m.b=n.c elde ederim. Buradan da

m.b=n.c olur. Bu da $\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$'dir. İspat tamamlanmış olur.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı birinci problemin çözümünde ek çizim yapıp benzerlik kullanarak sorunun ispatını doğru bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: İspata nasıl başladınız?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Bizden istenen ispatı yapabilmem için yardımcı bir doğru kullandım.
Araştırmacı: Bu ispatta hipotez ve hüküm nedir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hipotezim benzerlik kurarak istenileni elde edebilmek. Hükmüm de ulaştığım sonuçtur.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı hüküm kavramını doğru açıklarken hipotez kavramını yanlış tanımlamıştır.

Araştırmacı: Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Biz burada tüme vardık. Doğrudan ispat yaptık sanırım. Daha farklı bir yöntemle bu soruyu ispatlayamayız bence.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat yöntemini söylediği halde bundan emin değildir. Farklı ispat yöntemlerini düşünerek kuşkusunu belirtmiştir.

Araştırmacı: Bu soru da bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet düşünüyorum.
Araştırmacı: Neden?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Sonuca ulaştım.
Araştırmacı: Sonuca ulaştığınız her şey ispat mıdır? İspat nedir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: İspat bu formülün böyle olduğunu göstermektir.
Araştırmacı: Nasıl gösterirsek gösterelim ispat olur mu?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Biz ispatlamış olmadık mı burada. İspat düşündüğümüz şeylerin teorik olarak da var olduğunun gösterilebilmesidir bence.
Araştırmacı: Peki yaptığımız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Kanıtlanabilir olmalı ben bunu kanıtladım şimdi.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı şeylerin kanıtlanabilir olduğundan dolayı burada bir ispat yaptığını düşünmektedir.

Araştırmacı: Kanıtla ispat aynı şey midir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Değildir. İspat onun öyle olduğunu gösterebilmektir. Kanıtta ise delil olmalıdır.
Araştırmacı: İspatta delil yok mudur?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Vardır ispata ulaşmak için kanıtı kullanıyorum.
Araştırmacı: Aynı şeyler midir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Tam olarak aynı şeyler değildir.
Araştırmacı: Farkı nedir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: İspat göstermek kanıtta daha somut daha nesnel. Anlayamadım aynı kapıya mı çıkıyor yoksa.

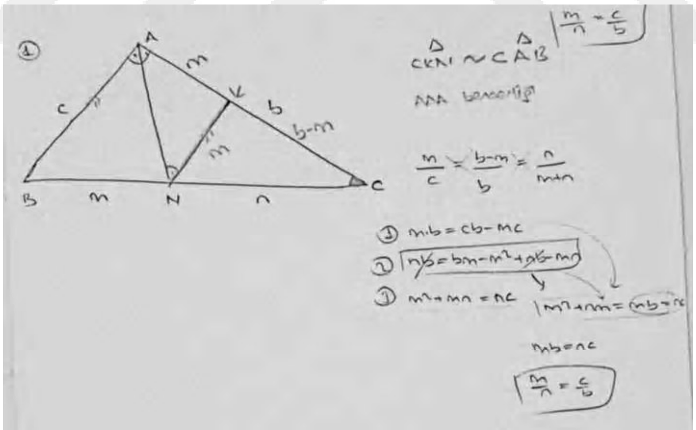
A5 Kodlu Öğretmen Adayının kanıt ve ispat aynı anlamda kelimeler olmasına rağmen ayrı yarı sorulunca kuşkulanarak anlamlarının farklı olduğunu düşünmüştür. A5 Kodlu Öğretmen Adayının kuşkucu yaklaşımı büyük olasılıkla aslında konuya tam olarak hakim olmamasından kaynaklanmaktadır.

> *Araştırmacı:* *Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?*
> *A5 Kodlu Öğretmen Adayı:* *Evet düşünüyorum. Bana aksini gösterebilirse o beni çökertmiş olur. Şu an ben bu soruyu ispatla gösterebildim.*

A5 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı şeylerin doğru olduğunu düşündüğünden dolayı karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edeceğini söylemektedir.

> *Araştırmacı:* *Bu soruyu farklı bir yoldan ispatlayabilir misiniz?*
> *A5 Kodlu Öğretmen Adayı:* *Ya benim aklıma farklı bir yol gelmiyor açıkçası. Ama illaki vardır. Matematikte birçok şeyin farklı yolları vardır önemli olan nereden baktığın bence.*

A5 Kodlu Öğretmen Adayı farklı bakış açılarıyla sorunun farklı çözüm yollarının olacağını düşünmektedir. Matematikte farklı yolların olduğunu bu sebeple bu problemde olabileceğini belirtiyor. A5 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü Şekil 11'de verilmiştir.



Şekil 11. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

A üniversitesinde öğrenim gören beş ilköğretim matematik öğretmeni adayının birinci problemin çözümüne ilişkin mülakat verilerinden genel bir sonuca ulaşılabilir. Mülakata katılan beş ilköğretim matematik öğretmeni adayının dördü soruyu doğru ispatlamıştır. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının biri soruyu iki farklı şekilde ispatlamıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adayları ispatı yapabilmişler fakat yaptıkları ispat türünü ve ispatın ne anlama gediğini bilmemektedirler. İlköğretim matematik öğretmeni adayların kullandıkları geometri kurallarının nereden çıktığını anlamlandıramayıp kuralların şekline ilişkin isimler verdiği görülmüştür. İlköğretim matematik öğretmeni adayları hipotez ve hüküm kavramını bilmemektedirler.

4.1.6. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B1 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *Evet hocam birinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *AC doğrusuna paralel olacak şekilde AN'yi uzatıyorum.*
Araştırmacı: *Tamam. İsimlerini verirseniz bizim için iyi olur hocam.*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet AN'yi uzattığım noktaya E noktası diyorum en son. Sonra A ile E'yi birleştiriyorum. Şu an paralel olmadı pek ama.*
Araştırmacı: *Olsun devam edin hocam önemli değil.*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Paralel çizdiğim için bu açı ile bu açı birbirine eşit oluyor.*
Araştırmacı: *Onların isimlerini söylerseniz iyi olur hocam.*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *ACB açısı ile CBE açısı birbirine eşit oluyor. Z kuralından da oluyor. Yine şöyle baktığım zaman.*
Araştırmacı: *Peki Z kuralı dediğimiz şey nedir hocam?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Z kuralı dediğimiz şey yani…*
Araştırmacı: *Öyle bir şey var mı yani?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Aslında belki de öğrencilerin daha kolay anlaması için verilmiş bir tabir olabilir. Z harfine benzediği için aldı bence.*
Araştırmacı: *Normalde siz onu nasıl ifade edebilirsiniz?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yani çizersem eğer ters açılardan olabilir. Yine ters açılardan dolayı ACB açısı ile CBE açısı ne ANE açısı ile BNE açısı birbirine eşit oluyor. ABE ikizkenar üçgen oldu dolayısıyla BE uzunluğu da c oldu. EBN üçgeni ile ACN üçgeni benzer üçgenler oldu.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı ters açıların eşitliği kuralını Z kuralı şeklinde ifade etmiştir. Z kuralı dediğimiz kural Z harfine benzediğinden dolayı verilen bir isimdir. Akılda kalması kolay olması açısından lise de öğretilen bir kuraldır. B1 Kodlu Öğretmen Adayı aslında sorgulamadan bildiği kuralı problem üzerinde uygulamıştır.

Araştırmacı: *Bu üçgenler arasında ne benzerliği var?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Açı-açı-açı benzerliği. Dolayısıyla benzerliği kullanarak aynı açıların karşılarındaki kenarları oranladığımda* $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ *olur.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı birinci problemin çözümünü ek çizim yaparak çözmüştür.

Araştırmacı: *İspata nasıl başladınız?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *AC doğrusuna paralel bir BE doğrusu uzatarak başladım.*
Araştırmacı: *Peki buna nasıl karar verdiniz?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Doğrusunu söylemek gerekirse ilk başta çember çizmeye yeltendim, oradan çıkaramayacağım için paralellikten benzerlik kurabilir miyim diye düşündüm.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı birinci problemde benzerlik kurmak için paralellik şartı olduğunu düşünmüştür.

Araştırmacı: Bu soruda hipotez ve hüküm nedir?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: İstediği şey hüküm oluyor yani $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ hüküm olur. Hipotezim bulmak istediğim şey açıortay olduklarını göstermek mi?

B1 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez ve hüküm kavramlarının tanımının aynı olduğunu söylemiştir yani hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırmıştır. Hipotez ve hüküm tanımlarını büyük olasılıkla bilmiyor olabilir.

Araştırmacı: Bunlara nasıl karar verdiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Çok güzel bir soru. Son istenilen şeyin hüküm olduğunu biliyorum ondan yola çıkarak bulduğum şey de hipotezdir.
Araştırmacı: Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Benzerlik.
Araştırmacı: İspat yöntemlerinden hangisini kullandınız?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: İspat yöntemlerinden yani
Araştırmacı: İspat yöntemlerini sayabilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Çelişki yöntemi. Burada doğrudan bence.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir aynı zamanda araştırmacı ispat yöntemlerini sorduğunda sadece iki tanesini söylemiştir. Hangi ispat türünün kullandığının farkında olmadığı gibi kaç tür ispat var ve ispat türleri arasında nasıl bir farklılık var bilmemektedir.

Araştırmacı: Doğrudan ispat nedir?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Direk verileri kullandım.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı doğrudan ispatı tanımlarken doğrudan kelimesinin sözlük anlamına göre bir cevap vermiştir.

Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Sonuç verilmiş ama bu sonucun nasıl olduğu verilmemiş benden bunu bulmamı istiyor. Sonuca nasıl gideceğim.
Araştırmacı: Yaptığınız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Belirli bir verilerin olması gerekli ve ben bu verileri kullanarak sonuca gitmeliyim. Bu soruda elimde yeteri kadar veri var.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı eldeki verileri kullanarak sonuca gittiği her şeyin ispat olduğunu söylemiştir.

Araştırmacı: Bu soruda yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet ikna edebilirim.
Araştırmacı: Neden?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü benzerlik yani ben karşımdakine benzerliği kullanarak bunu anlatabilirim.

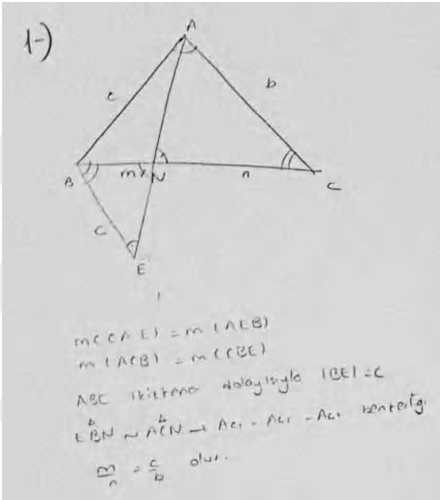
B1 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı benzerliğin doğru olduğunu düşündüğünden dolayı karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini söylemiştir.

Araştırmacı: *Peki benzerliği neden kullandınız?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Çünkü bir oran var, açı vermiş uzattığım zaman direk aklıma benzerlik geldi.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayıda oran kavramı benzerlik kullanacağını çağrıştırmıştır.

Araştırmacı: *Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Denedim ama çemberden yapamadım. Yapılır aslında.*
Araştırmacı: *Şu anda yapabilir misiniz?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yapamam.*

Şekil 12'de B1 kodlu öğretmen adayının birinci problem çözümü verilmiştir.



*Şekil 12.*B1 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

4.1.7. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B2 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *Birinci soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tabi ki hocam. $|MN| = c.k$ ve $|NC| = b.k$ olur.*
Araştırmacı: *Tamam peki bunu neye göre söylediniz?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Açıortay teoreminden. Ben formülleri çok iyi biliyorum.*
Araştırmacı: *Bu oranı zaten biz soruda verdik.*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tamam hocam ispatlayacağız.* $\frac{b.k}{b} = \frac{c.k}{c}$
Araştırmacı: *Bizim soruda verdiğimiz şey bu zaten.*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tamam da hocam benden başka bir şey çıkmaz bu kadar.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayının soruya yaklaşımına bakıldığında bildiği teoremi kullandığını söyleyebiliriz.

Araştırmacı: *İspata başlayamama, ispatı devam ettirememe ve tamamlayamama sebebiniz nedir?*

<u>*B2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Ben bu formülü biliyorum ama yapamadım.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Bu soruda hipotez ve hüküm nedir.*
<u>*B2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Hipotezimiz* $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ *hükmümüzü bilmiyorum.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez ve hüküm kavramlarını bilmemektedir.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Bu soruda neden bir strateji geliştiremediğinizi düşünüyorsunuz?*
<u>*B2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Bilmiyorum hocam.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?*
<u>*B2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> $|AN|$ *uzunluğu.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Tamam* $|AN| = 5$ *olsun. Yapabilir misiniz?*
<u>*B2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Yok hocam yapamam.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı AN uzunluğu verilseydi yapabilirim yanıtını verdiği halde araştırmacı AN uzunluğu 5 cm olsun ispatı yapabilir misiniz dediğinde yapamam demiştir.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Bu ispatı yapamamanızın sebebi nedir?*
<u>*B2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Bu şekilde öğrendim dershanede formülü verdi geçtiler hiç sorgulamadım kolayıma geldiği için sorgulamadım. Ezberledim. Önemli olan benim için soruyu yapmak.*

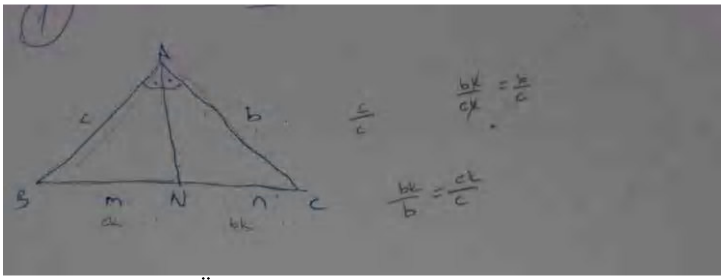
B2 Kodlu Öğretmen Adayı üniversite sınavına hazırlanırken formülleri çok iyi ezberlediğini, sorgulama yapamadan kabul ettiğini, kendisi için önemli olan şeyin soruyu çözmek olduğunu belirtmiştir. Bu da B2 Kodlu Öğretmen Adayının akıl yürütme yapmadığını göstermektedir.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Öğrencileriniz size öğretmenim bu formül nereden geliyor diye sorsa ne söylersiniz?*
<u>*B2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Sorgulamayın. Sadece soruları çözün derim.*

Öğretmen adayı olan B2 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaba bakılırsa gelenekselci yaklaşımı benimseyen, sorgulamadan uzak, araştırmayan, koşulsuz kabul eden bir öğretmen adayıdır diyebiliriz.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Sorgulamayın deyince öğrencilerinizin merak duygusunu köreltmiş olmaz mısınız?*
<u>*B2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Olurum ama benim için önemli olan testlerde yapmaları. Ezberlesinler. Çok test çözsünler unutmazlar.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı sadece sonuca odaklı olduğunu, öğrencilerinin merak duygusu körelse bile onların sınava odaklı çalışmaları gerektiğini, çok test çözmelerinin öğrencileri için yeterli olacağını savunmuştur. Şekil 13'de B2 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 13. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

4.1.8. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B3 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Birinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Verilen şekli tamamlayıp açıları yazdım. Ben ispatımın doğru olup olmadığından emin değilim fikir yürüterek yapamaya çalıştım. TAB üçgeni ile DAC üçgeninin benzer olabileceğini düşündüm yani benzerdir dedim.
<u>Araştırmacı:</u> Benzerliğe nasıl karar verdiniz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Açı-kenar-açı benzerliği vardır dedim. Daha sonra benzerliği yazdığımda $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ *yazdım emin değilim.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı benzer olmayan iki üçgeni benzer kabul edip ispata başlamış verilen sonuca ulaşmış fakat yanlış yoldan girmiş.

<u>Araştırmacı:</u> İspata nasıl başladınız?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Şekli tamamlayıp açıları yazarak başladım.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda hipotez ve hüküm nedir?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hipotez varsaymak. Hüküm de ulaştığımız sonuç.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez kavramının tanımını akademik açıdan yapamamış kendince bir tanım yapmıştır. Tanımlarına bakılırsa mantıklı olabilir ama B3 Kodlu Öğretmen Adayının hüküm tanımı doğrudur.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda neyi varsaydınız?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ben TAB üçgeni ile DAC üçgeninin benzer olduğunu varsaydım. Hüküm olarak da benzerlikten $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ *elde etmeye çalıştım bu da hüküm oldu.*
<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Deneme yanılma yöntemi tümden gelim yöntemi.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı ispat yöntemlerini bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu sorunun ispatını farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yaparım herhalde hocam sonuçta geometri yani. Şekli paralelkenara tamamladım. AC ve AB kenarlarına paralel çizdim. Paralelkenardan eşit kenar uzunluklarını yazdım. Açıortay teoremini kullanarak $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$ *b ile m'yi yer değiştirirsem* $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ *elde ederim.*

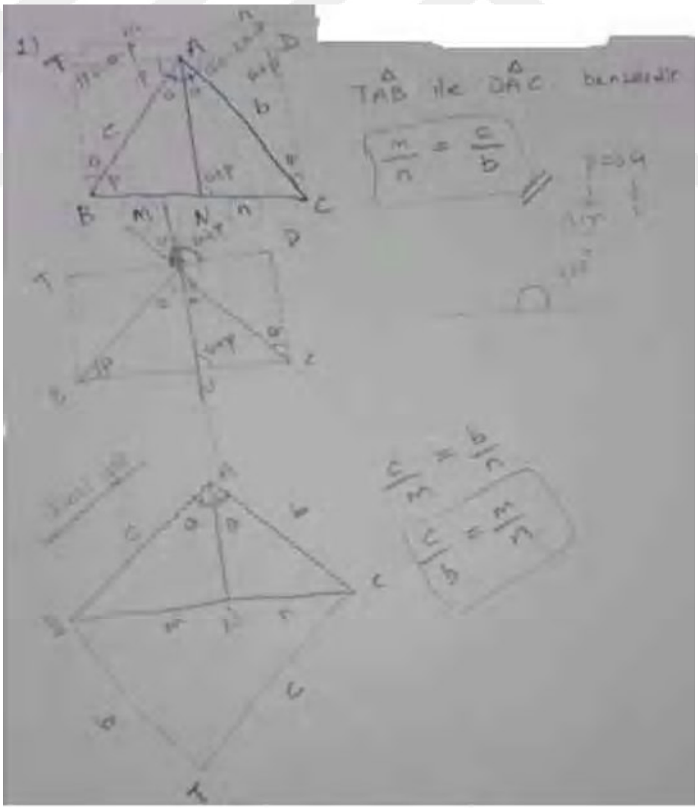
B3 Kodlu Öğretmen Adayı soruyu farklı bir yoldan ispatlamaya çalışmış fakat yine doğru yapamamıştır.

Araştırmacı: *Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *İspat değil de var olan bir şeyi tamamlamış gibi düşünüyorum.*
Araştırmacı: *Yaptıklarınızın ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Herkesin benim yaptıklarımı anlaması.*
Araştırmacı: *Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet.*
Araştırmacı: *Neden?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Benzerlik kullandım yaptıklarımın matematiksel olarak doğru olduğunu düşünüyorum.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarının ispat olmadığını düşünmesine rağmen yaptıklarıyla karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini söylemektedir.

Araştırmacı: *Benzerlik kullanamaya nasıl karar verdiniz?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Açıortayı gördüğüm an aklıma benzerlik geldi.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı'da açıortay kavramı benzerlik kullanmayı çağrıştırmaktadır. Şekil 14'de B3 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 14. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

4.1.9. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B4 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Birinci soruyu yapamamışsınız. Size bu soru ile ilgili sorular sorayım.
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Tamam hocam.
Araştırmacı: İspata başlayamama, ispatı devam ettirememe ve tamamlayamama sebebiniz nedir?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Yeteri kadar bilgi sahibi değilim. Neler yapacağımı biliyorum ama uygulama konusunda eksiklerim olduğundan yapamadım.

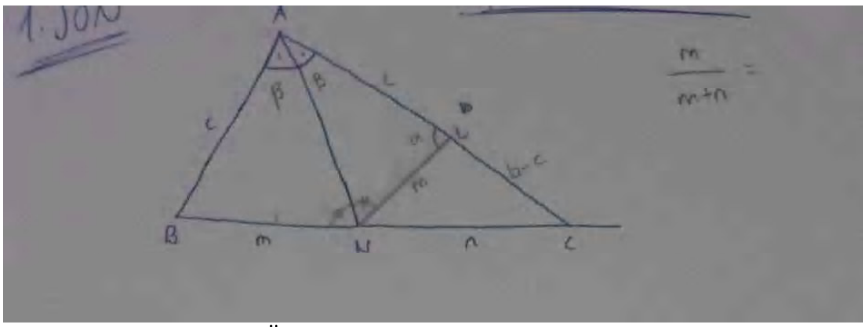
B4 Kodlu Öğretmen Adayı birinci sorunun ispatını yapamamış ve bunu bilgi eksikliğine dayandırmıştır.

Araştırmacı: Peki şu anda size süre versem bu soruyu yapabilir misiniz?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Yapamam.
Araştırmacı: Bu soruda hipotez ve hükmünüz nedir?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Hipotezim AN'nin açıortay olması. Hükmüm ise $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$*'dir.*

B4 Kodlu Öğretmen Adayı sorudaki hipotez ve hüküm kavramlarını doğru söylemiştir.

Araştırmacı: Bu soruyla ilgili neden bir strateji geliştiremediniz?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Nerede ne yapacağımı bilmiyorum. Yeteri kadar bilgiye sahip değilim.
Araştırmacı: Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Bu üçgenlerle ilgili benzer olanları söyleseydi mesela. Alandan gidebilirdim belki. Açılardan çıkar gibi sanki
Araştırmacı: Şu an deneseniz yapabilir misiniz?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: AB'ye paralel bir NL doğru parçası çizdim. Açıları yazdım. NL uzunluğu da m olur dedim. Devamını getiremiyorum hocam yapamam.

Araştırmacı B4 Kodlu Öğretmen Adayına yeteri kadar süre vermiş denemesine rağmen ispatı yapamamıştır. Şekil 15'de B4 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü verilmiştir.



*Şekil 15.*B4 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

4.1.10. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B5 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Soruyu sesli bir şekilde okuyup ispatını yapar mısınız?

<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tabi ki. Bize $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ eşitliği verilmiş. Ben açıortayın kestiği iki açıya a, a isimlerini verdim; ama bir şey elde edemedim. Açıortayın özelliğini kullanarak benzerlik yapmaya çalışmak istedim. Açıları isimlendirdim. Bu yaptıklarımdan bir şeye ulaşamadım.
<u>Araştırmacı:</u> ABN üçgeni ile ANC üçgeninin benzer olduğu görülür demişsiniz buna nasıl karar verdiniz?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Eş açılardan yazmaya çalıştım ama olmadı.

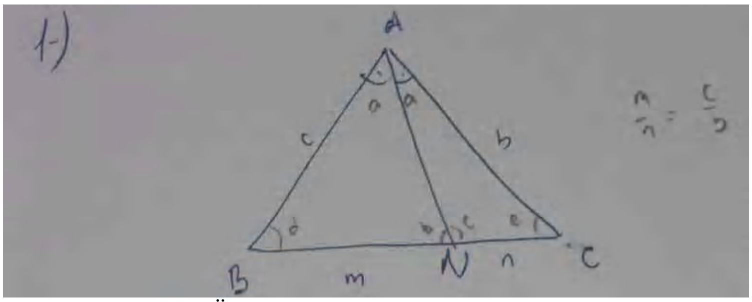
B5 Kodlu Öğretmen Adayı benzer üçgenleri yazmıştır ama o üçgenler benzer değildir ispatı yapamamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Hipotez ve hüküm ne demektir?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hipotez, bizim savunduğumuz ve ya ortaya attığımız düşüncedir. Hüküm ise bu düşünceyi ispatlamaya çalışmaktır yani bir sonuca varmak gibi.
<u>Araştırmacı:</u> Peki bu soruda hipotez ve hükmünüz nedir?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Soruda bize $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ verilmiş benzerlik kullanarak bunu ispatlamaya çalıştım ama yapamadım. Bu soruyu çözmek için hipotezim buydu ama çözümü yapamadığım için hükmünü bilmiyorum.
<u>Araştırmacı:</u> İspata başlayamama, devam ettirememe ve ispatı tamamlayamama sebebiniz nedir?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ben bilgi eksikliğimden kaynaklandığını düşünüyorum. Açıortayın özelliğini kullanarak eşlik-benzerlik yazmam gerekiyordu ama başaramadım bu da geometri bilgimin zayıf olmasından kaynaklanıyor olabilir. Normal matematiksel bir ispat olsa teorem tarzında yapabilirdim ama geometri işin içerisine girdiği için yapamadım. Geometri de eksiklerim olduğunu düşünüyorum.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı geometri de eksiklerinin olduğundan dolayı ispatı yapamadığını söylemiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soru benzerlik kullanılmadan yapılabilir mi?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yapılabilir hocam ekstradan bir çizgi daha çizilebilir ama nereden çizileceğini bilmiyorum
<u>Araştırmacı:</u> Şu anda yapabilir misiniz?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yapamam hocam.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda hipotez hüküm ilişkisini neden kuramadınız?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hipotezi oluşturdum mantıken benzerlikten gidilecek çünkü açıortay var ama geometri de eksiklerim olduğundan pratiğe döküp yapamadım bu soruyu.
<u>Araştırmacı:</u> Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlik yapılacağını anladım iki açının eşit olduğu açıortayla verilmiş diğer eşit açıları bulamadım en azından diğer iki açının eşitliğini bulabileceğim bir bağlantı verilebilirdi.

Şekil 16'da B5 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 16. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

4.1.11. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B6 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Birinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: C köşesini uzatıp dış açıortay çizdikten sonra AB'ye paralel bir doğru parçası çizdim. Ters açılardan eşit olan açıları yazdım. Bu durumda ABN üçgeni ile TCN üçgeni açı-açı-açı benzerliğinden dolayı benzer üçgenler oldu. Eşit açılar karşısındaki kenarları oranladım. $\frac{|AB|}{|TC|} = \frac{|AN|}{|TN|} = \frac{|BN|}{|CN|}$
$\frac{c}{b} = \frac{y}{|TN|} = \frac{m}{n}$
$\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$ *İspatı tamamladım.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayı ek çizim yapıp paralellikten dolayı eş olan açıları yazmış ve doğru bir benzerlik teoremi kullanarak sorunun ispatını doğru bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: İspata nasıl başladınız?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Paralel doğru çizip benzerlik kullanarak başladım.
Araştırmacı: Neden benzerliği kullandınız?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Açılar eşitse bu açıların karşılarındaki kenarlar orantılıdır dedim.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı ölçüleri eşit olan açıların kendisinde benzerlik kullanmayı çağrıştırdığını söylemiştir.

Araştırmacı: Bu soruda hipotez ve hüküm nedir?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: AN'nin açıortay olması hipotez, bulunması gerekende hükümdür.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı sorudaki hipotez ve hükmü doğru olarak bilmektedir.

Araştırmacı: Hipotez ve hükmün tanımını yapabilir misiniz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Bize verilen kısım hipotez, ispatlanması istenen kısım da hükümdür.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez ve hüküm kavramlarının tanımını bilimsel olmasa bile doğru yapmıştır.

Araştırmacı: Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Verilenlerden yola çıkarak yaptım. Olmayana ergi olabilir mi?

B6 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir.

> *<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
> *<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.*
> *<u>Araştırmacı:</u> Neden?*
> *<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Verilenlerden yola çıkarak benzerlik kullanarak yaptığım için.*

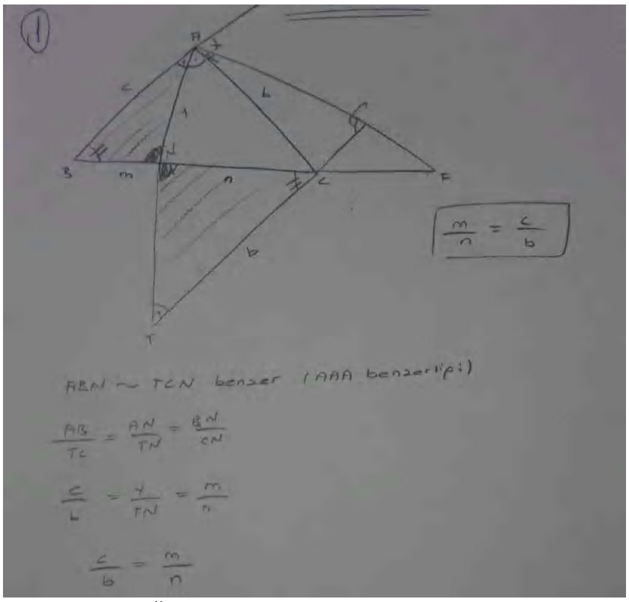
B6 Kodlu Öğretmen Adayı verilenleri doğruluğunu bildiği teoremlerde kullanarak soruyu çözdüğü için ispat yaptığını düşünmektedir.

> *<u>Araştırmacı:</u> Yaptığınız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?*
> *<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Kanıtlanabilir olmalı, geçerli olmalı, diğer insanlarda gerçekten böyle olmalı demeli.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarının ispat olabilmesi için herkes tarafından anlaşılır ve geçerli olması gerektiğini söylemiştir.

> *<u>Araştırmacı:</u> Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?*
> *<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.*
> *<u>Araştırmacı:</u> Neden?*
> *<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yaptıklarımın mantıklı olduğunu düşünüyorum.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarının belli bir mantık çerçevesinde olduğundan karşısındakini yaptıklarının doğruluğuna ikna edebileceğini söylemiştir. Şekil 17'de B6 Kodlu Öğretmen Adayının birinci problem çözümü verilmiştir.



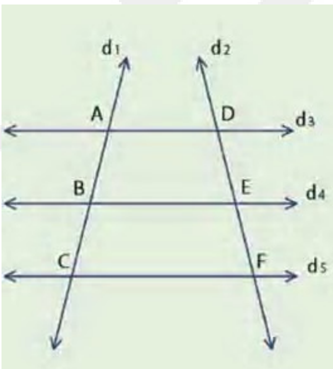
Şekil 17. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Birinci Problem Çözümü

B üniversitesinde öğrenim gören altı ilköğretim matematik öğretmeni adayının birinci problemin çözümüne ilişkin mülakat verilerinden genel bir sonuca ulaşılabilir. Mülakata katılan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ikisi soruyu doğru ispatlarken dördü ispatı doğru bir şekilde yapamamıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adayları yaptıkları ispat türünü ve ispatın ne anlama gediğini bilmemektedirler. İlköğretim matematik öğretmeni adayların kullandıkları geometri kurallarının nereden çıktığını anlamlandıramayıp kuralların şekline ilişkin isimler verdiği görülmüştür. İlköğretim matematik öğretmeni adayları hipotez ve hüküm kavramını bilmemektedirler.

A ve B üniversitesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının birinci probleminin çözümüne ilişkin verileri birlikte değerlendirilirse A üniversitesindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının daha başarılı olduğu söylenebilir. Her iki üniversitedeki öğretmen adaylarının yaptıkları ispat türünü, ispat tanımını, hipotez ve hüküm kavramını bilmedikleri söylenebilir.

4.2. İkinci Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

Bu araştırmada kullanılan ikinci alt problem:



Şekilde $d_3//d_4//d_5$ ise $\frac{IABI}{IBCI} = \frac{IDEI}{IDFI}$'dur.

4.2.1. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A1 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> *Araştırmacı:* *Evet hocam ikinci soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?*
> *A1 Kodlu Öğretmen Adayı:* *Tabi ki de. Bana soruda şunları vermiş. d3 d4 ve d5 doğruları birine paralel ve bunları kesen d1, d2 doğruları ilerde bir yerde kesişiyor. A noktasından d5 doğrusuna bir dikme indirdim ve indirdiğim bu dikmenin ayağına H1 dedim D noktasından da d5'e bir dikme indirdim buna da H2 dedim. A noktasından d5'e indirdiğim dikme aynı zamanda d4'e de diktir çünkü paralel iki doğrudan birine dik olan doğru diğer doğruya da diktir. A noktasından indirdiğim dikmenin d4'ü kestiği noktaya Z1 dedim. Aynı şekilde d noktasından d5'e indirdiğim dikmenin d4'ü kestiği noktaya da Z2 dedim. Ben iki paralel doğru arasındaki uzaklığın her yerde aynı olduğunu biliyorum. Bundan dolayı ben lAZ1l=m, lDZ2l=m ve lZ1H1l=n, lZ2H2l=n eşitliklerini yazdım. Paralel iki doğru*

arasında kalan ve aynı yöne bakan (yöndeş) açılar eşit olduğundan açılarımı isimlendirdim. Açılar aynı olduğundan ben benzerliğe gidebilirim buradan (ABZ1)~(ACH1) (açı-açı-açı)
<u>*Araştırmacı:*</u> *Açı açı açı benzerliğini açıklar mısınız?*
<u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Tabi ki iki üçgende ölçüleri eşit olan açıların karşılarındaki kenar uzunluklarını oranlayabiliriz. Buradan aynı açıların karşılarındaki kenarları oranlarsam*
$\frac{m}{AB} = \frac{m+n}{AC}$ *Diğer üçgenlerde (DEZ2)~(DFH2) (açı-açı-açı) benzerliğini yazabilirim. Buradan aynı açıların karşılarındaki kenarları oranlarsam* $\frac{m}{DE} = \frac{m+n}{DF}$
Eşitliklerini yazabilirim. İlk eşitliğime 1 ikinci eşitliğime 2 dersem ben bunları eşitlemek istiyorum. Bu eşitlemeyi yapmadan önce 1 ve 2 nolu ifadeyi düzenlemek istiyorum.

1. $\frac{m}{AB} = \frac{m+n}{AC}$ *ise* $\frac{m}{m+n} = \frac{AB}{AC}$
2. $\frac{m}{DE} = \frac{m+n}{DF}$ *ise* $\frac{m}{m+n} = \frac{DE}{DF}$

1 ve 2 nolu ifadelerde $\frac{m}{m+n}$ *ifadesi ortak olduğundan*
$\frac{m}{m+n} = \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ *yazabilirim. Buradaki iki eşitlikten birini almak istiyorum.* $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$
$\frac{AB}{AB+BC} = \frac{DE}{DE+EF}$ *(yukarıdaki üçgenlerden AC yerine AB+BC ve DF yerine DE+EF yazdım ve bu eşitliği elde ettim). Ben bu ifadeleri ters çevirirsem*
$\frac{AB+BC}{AB} = \frac{DE+EF}{DE}$ *ifadelerini elde ederim. Burada ikisi içinde ortak paydaya sahip olduklarından ayırmak istiyorum.*
$\frac{AB}{AB} + \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{DE} + \frac{EF}{DE}$
$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$ *ise* $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

A1 Kodlu Öğretmen Adayı ikinci problemin çözümünde öncelikli olarak ek çizim yapıp ardından benzerlik kullanarak çözüme ulaşmıştır.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Peki hocam bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?*
<u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Ben bu ispatta üçgenlerin eşitlik benzerliğini kullandım.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Yok ispat türlerinden hangisini kullandınız.*
<u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Genel olarak bilmiyorum.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *İspat türlerini sayabilir misiniz?*
<u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Tümevarım ve tümdengelim ben bunları biliyorum.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı ikinci problemin çözümünde kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir. Araştırmacı ispat türlerini sorduğunda ispat yöntemlerinden sadece iki tanesini söylemiştir.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
<u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Evet yaptığımı düşünüyorum.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Neden?*
<u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Kesin sonuçlarla kesin bulgularla sonuca ulaştığımı düşünüyorum.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı ikinci problemin çözümünde kullandığı benzerlik kurallarının kesin olduğunu düşündüğünden ikinci problemde bir ispat yaptığını söylemektedir.

Araştırmacı: Bu ispatta ne kullandınız?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Üçgen eşlik benzerliğini kullandım paralel doğrular arasındaki uzaklıkların eşit olduğunu kullandım.
Araştırmacı: Bu soruda sizi benzerlik kullanmaya iten sebep nedir?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Genelde şu şekilde düşündüm paralel doğrular arasındaki yöndeş açılar olduğunu ve bu açılardan benzerliğe gidebileceğimi fark ettim.

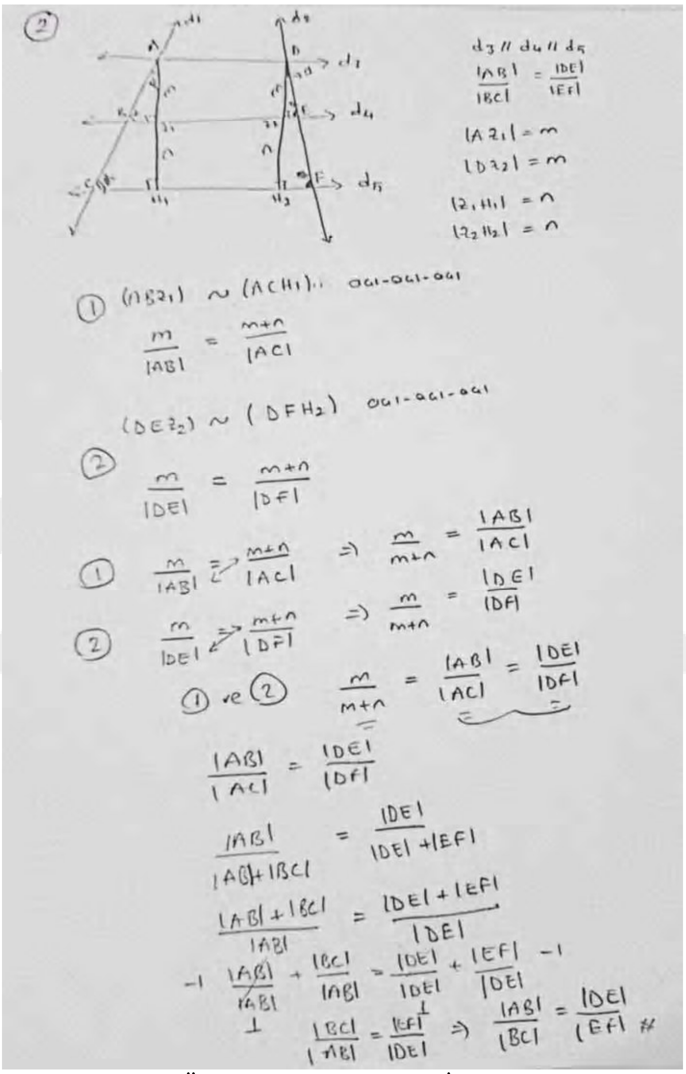
İkinci problemde paralel doğrular arasındaki yöndeş açıların olması A1 Kodlu Öğretmen Adayının benzerlik kullanmaya yöneltmiştir.

Araştırmacı: Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet kesinlikle ederim.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı ispatta kullandığı kuralların herkes için geçerli olduğunu düşündüğünden karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini düşünmektedir.

Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir yoldan yapabilir misiniz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Başka yoldan alandan gidebiliriz. Aynı şekilde benzerlikteki indirdiğim dikmelerden dolayı alanı kullanabilirim.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı farklı yolları kullanabileceğini ifade ediyor ama bu yolların ne olduğunu ifade etmemiştir. Farklı yolları bilerek mi bilmeden mi söylediğine karar verilememiştir. A1 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problem çözümünde yazdıkları Şekil 18'de verilmiştir.



*Şekil 18.*A1 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.2. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A2 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> *A2 Kodlu Öğretmen Adayı: C'den D'ye bir doğru çiziyoruz. Bu doğrunun d_4'ü kestiği noktaya T dedim. Eşit olan açıları yazıyorum. DAC açısı ile EBC açısı, DTE açısı ile DCF açısı, DET açısı ile DFC açıları birbirine eşittir.*
> *Araştırmacı: Neden dolayı bu açılara eşit dediniz?*
> *A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Yöndeş açılar olduğundan.*
> *Araştırmacı: Yöndeş açı ne demek?*

<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Nasıl açıklayayım bilmiyorum onu.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı yöndeş açıların eşit olduğunu bildiği halde yöndeş açı tanımını bilmemektedir. A2 Kodlu Öğretmen Adayı yöndeş açıları kullanacağını bilmesine rağmen ifade edemiyor ise ezberlediği için genelleme ya da tanım yapamamaktadır.

<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> CBT üçgeni ile CAD üçgeni benzer (açı-açı-açı benzerliği. Buradan oran yazacak olursak. $\frac{|BC|}{|CA|} = \frac{|CT|}{|CD|}$

$\frac{x}{x+y} = \frac{z}{z+t}$ *bu oranları ters çevirirsek*

$\frac{x+y}{x} = \frac{z+t}{z}$ *bölme yaparsak*

$1+\frac{y}{x} = 1+\frac{t}{z}$*, 1'ler gider.*

$\frac{y}{x} = \frac{t}{z}$*. Yan tarafa bakarsak. DTE üçgeni ile DCF üçgenleri benzerdir.(açı-açı-açı benzerliği) Oranları yazarsak* $\frac{|DT|}{|DC|} = \frac{|DE|}{|DF|}$

$\frac{t}{t+z} = \frac{a}{a+b}$ *bu oranları ters çevirirsek*

$\frac{t+z}{t} = \frac{a+b}{a}$ *bölme yaparsak*

$1+\frac{z}{t} = 1+\frac{b}{a}$*, 1'ler gider.*

$\frac{z}{t} = \frac{b}{a}$ *yine ters çevirirsek*

$\frac{t}{z} = \frac{a}{b}$ *elde ederiz. İki benzerlik yaptık bu benzerliklerin sonucunda bulduğumuz eşitliklere bakarsak* $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ *elde ederiz.*

A2 Kodlu Öğretmen Adayı ikinci problemin çözümünde ek çizim yapıp yöndeş açıları kullanarak açı açı açı benzerlik uygulayıp ikinci problemi ispatlamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yine doğrudan olabilir.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı birinci problemin ispatında belirttiği gibi kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir. Doğrudan ispat yöntemi olarak bahsettiği aslında direk ispat yaptım anlamında kullanmaktadır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> F'den A'ya çizerim ama yine aynı kapıya çıkar.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yine aynı şekilde doğrular falan çizerek benzerlik kullandım.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda sizi benzerlik kullanmaya iten sebep nedir?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Zaten ispatını aradığımız şey oran şeklinde olduğundan benzerlik kullanmak mantıklı geldi.

İkinci problemin içeriğinde oran olması A2 Kodlu Öğretmen Adayının benzerlik kullanmaya itmiştir.

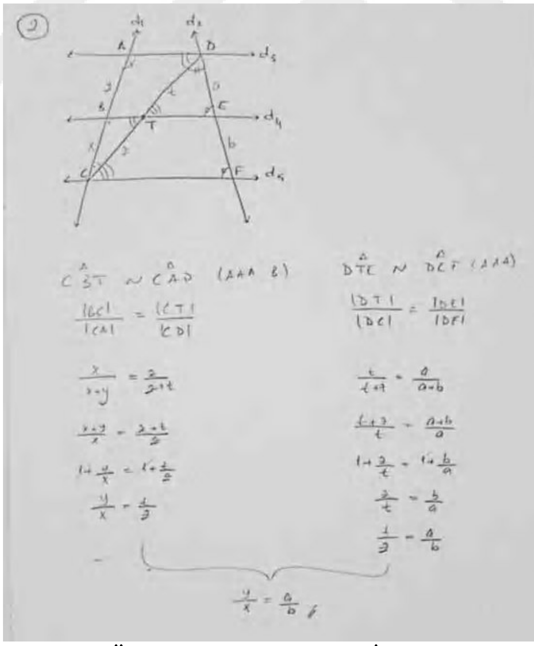
<u>Araştırmacı:</u> Yaptıklarınızın ispat olduğuna inanıyor musunuz?

<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet
<u>Araştırmacı:</u> Ne tür özellikleri sağladığı için yaptıklarınızın ispat olduğunu düşünüyorsunuz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hani verdiği şeyi kullanmadan sonucu bulmaya çalıştık.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı şeyin ispat olduğunu düşünmekte fakat bunu dayandırdığı nokta ispat ile gerekçelendirilmemiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı yaparken neler kullandınız?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlik kullandık yeni bir doğru inşa ettik.
<u>Araştırmacı:</u> Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı ikinci problemin çözümünde kullandığı ispatı ifade edebileceğini ve ikna edebileceğine inanmaktadır. İspatı nasıl yapabileceğini konusunda özgüveninin olması ispatı doğru olarak karşı tarafa anlatabilmesini garantilememektedir. A2 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci probleminin çözümü Şekil 19'da verilmiştir.



*Şekil 19.*A2 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.3. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A3 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> İlk başta d_1 doğrusuna D noktasından geçecek şekilde bir paralel çizdim. ABE açısına x dersem DKE açısı da x olur.
<u>Araştırmacı:</u> Bu eşitliği neye göre söylediniz?

<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Paralellikten dolayı. Bu açılar yöndeş açılar olduğundan eştir dedim. ACF açısına y dedim yöndeş açılardan dolayı DLF açısı da y oldu. DEB açısına m dedim yine yöndeş açılardan dolayı DFC açısı da m olur. Çizdiğim paralel doğruyla oluşan üçgenden şöyle bir kanıya vardım paralel ve yöndeş olduğundan dolayı x=y oldu. Paralellik ve yöndeş olduğundan |AB|=v dersem |DK|=v olur aynı şekilde |BC|=z dersem |KL|=z olur. Açıların hepsi eşit olduğundan dolayı DKE üçgeni ile DLF üçgenleri benzerdir dedim. (açı-açı-açı benzerliği). Benzerlikten; $\frac{|DK|}{|DL|} = \frac{|DE|}{|DF|} = \frac{|KE|}{|KF|}$ *eşitliklerini yazdım. Bu eşitliklerden* $\frac{v}{v+z} = \frac{a}{a+b}$ *ise* $\frac{v+z}{v} = \frac{a+b}{a}$

$1 + \frac{z}{v} = 1 + \frac{b}{a}$

$\frac{z}{v} = \frac{b}{a}$ *ise* $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ *olur.*

İkinci problemin ispatında A3 Kodlu Öğretmen Adayı ilk önce ek çizim yapmış ardından geçmiş bilgilerini (yöndeş açıların eşitliği ve benzerlik) kullanarak sorunun ispatını doğru bir şekilde yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda ispata nasıl başladınız.
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> d_1 *doğrusunu görünce yine benzerlik yakalayacağımı düşünüp* d_6 *doğrusunu çizdim.*
<u>Araştırmacı:</u> Peki sizi bu soruda benzerlik kullanmaya iten sebep nedir?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Aynı açılar olduğu için, paralellik olduğu için açı-açı-açı benzerliğini yakalayacağımı düşündüm.

A3 Kodlu Öğretmen Adayının aynı açılar demesi paralellik çizince yöndeş açı elde edip bu açıların eşitliğini kullanmasıdır.

<u>Araştırmacı:</u> Hipotez ve hükmünüz nedir?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hipotez ve hükmüm ımm benzerlik yani soruyu çözüyor yani.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez ve hüküm kavramlarını bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlik yani.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı benzerlik aksiyomunu ispat yöntemi olarak söylemiştir. A3 Kodlu Öğretmen Adayı ikinci problemin çözümünde ispat yöntemlerini aslında bilmediğinden benzerlik aksiyomunu ispat türü olarak ifade etmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Yok ispat yöntemlerinden hangisini kullandınız?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Doğrudan ispat galiba tam bilmiyorum ama.
<u>Araştırmacı:</u> Doğrudan ispat ne demek?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Doğrudan ispat; belli şeyleri belli yerlere yazarak yapılan ispat galiba tam bilmiyorum da.

A3 Kodlu Öğretmen Adayının araştırmacının sorusuna verdiği cevapla yaptığı ispat türünün bilmediği anlaşılmaktadır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Düşünüyorum.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?

A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü belli şeyleri yakaladım yani paralelliği gördüm bu ispattan herkes bir şey anlar yöndeş açıları gösterdim, belirli bir oran olduğunu gösterdim. Yani temel şeylerden bu ispatı çıkarabildiğimi düşünüyorum.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarının ispat olduğunu savunmaktadır ve bu savunmasını da kullandığı benzerlik, yöndeş açıların eşitliği, paralellik kavramlarının herkes için aynı şeyleri ifade ettiğine dayandırmaktadır.

Araştırmacı: Yaptığınız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: İspat olabilmesi için belli şeyleri kanıtlayabilmeli bu soruda benzerlikten belli oranları yakaladık ve ispatladık yani.

A3 Kodlu Öğretmen Adayının benzerlikten oranları yakaladık ifadesi aslında yaptığım şeylerin bilinen aksiyom ve teoremlere dayanması anlamı taşımaktadır.

Araştırmacı: İspat ne demektir?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: İspat belli bir şeyin doğruluğunu göstermek kanıtlamak yani.

A3 Kodlu Öğretmen Adayının yaptığı ispat tanımı eksiktir. Sadece doğruluğunu göstermek değil doğruluğunu önceden kanıtlanmış ifadelere dayandırarak göstermek olmalıdır.

Araştırmacı: Gösterirken hangi yolları kullandınız?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Benzerlik gibi mi?
Araştırmacı: Yok ispat türlerinden.
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Bilmiyorum.

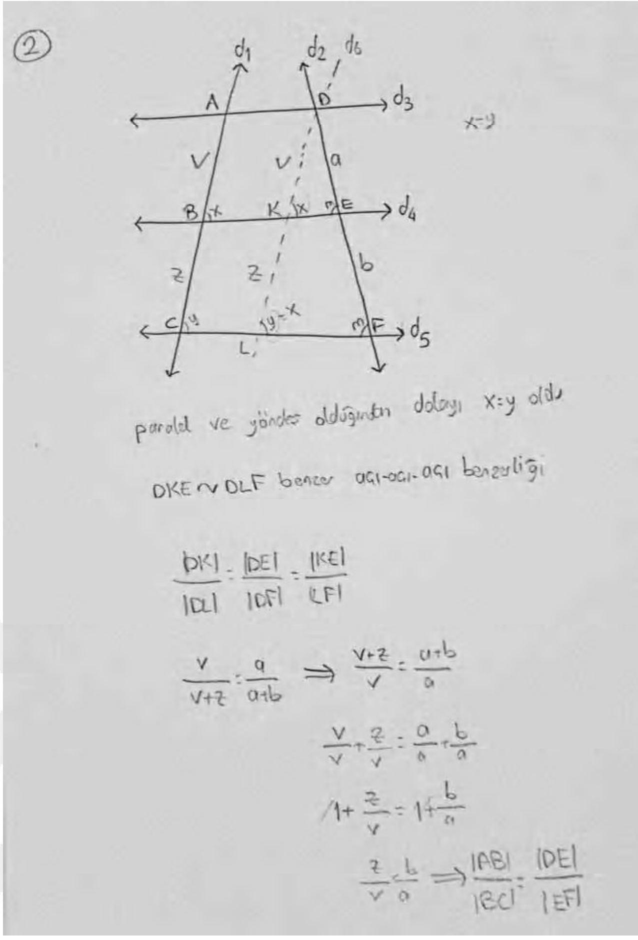
A3 Kodlu Öğretmen Adayı ispat türlerini bilmemektedir.

Araştırmacı: Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Düşünüyorum.
Araştırmacı: Neden?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü bu soruda her şeyi kuralına göre anlattığım için anlar.

A3 Kodlu Öğretmen Adayının her şeyi kuralına göre anlattım ifadesi aslında geçmişte ispatı yapılmış ifadeleri kullandım demektir.

Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır.

A3 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümünde farklı çözüm ya da ispat türlerinin kullanamayacağı ifade etmesi ispat türlerini ve ispat kavramını tam bilmemesinden kaynaklanmaktadır. A3 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problem çözümünde yazılı kâğıt Şekil 20'de verilmektedir.



Şekil 20. A3 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.4. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A4 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> *<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> d_2 doğrusuna paralel bir d_6 doğrusu çizdim. Ben bu soruda açı-açı-açı benzerliğini kullanacağım. Açılarımı isimlendiriyorum. α, β, ABE' ve ACF' açıları birbirine eşit olur.*
> *<u>Araştırmacı:</u> Neden?*
> *<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü bu açılar yöndeş açılardır. ABE ve ACF üçgenleri benzerdir.*
> *<u>Araştırmacı:</u> Ne benzerliği vardır?*
> *<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Açı-açı-açı benzerliği vardır. Daha sonra benzerlikten yola çıkarak aynı açıların gördüğü kenarları oranlarsam $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ise içler dışlar yaparsam*
> *a.(c+d) = c.(a+b) elde ederim her iki tarafı a.c'ye bölersem*
> *$\frac{a.(c+d)}{a.c} = \frac{c.(a+b)}{ac}$ olur. Buradan gerekli sadeleştirmeleri yaptığımızda*
> *$1+\frac{d}{c} = 1+\frac{b}{a}$*
> *$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$*

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *ise* $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|DE|}{|EF|}$ *olur ve ispat tamamlanır.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı ikinci problemin çözümünde ek çizim yaptıktan sonra geçmiş geometrik bilgilerini (yöndeş açıların eşitliği, benzerlik) kullanarak sorunun ispatını doğru bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: *Bu soruda ispata nasıl başladınız?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Paralellikler olduğu için benzerlik yapmayı düşündüm.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı geçmiş bilgilerini yeni problem durumuna entegre ettiğinden paralel doğrular benzerlik yapmayı çağrıştırmıştır.

Araştırmacı: *Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tümevarım yapmışım.*
Araştırmacı: *Tümevarım ne demek?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yani elimizde var olan bilgilerle daha geniş daha genel bilgilere ulaşmak. Her değer için denemiyoruz da bazı değerler için deniyoruz.*
Araştırmacı: *Bu soruda hangi değerler için denediniz?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Denemedim.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaba (*Her değer için denemiyoruz da bazı değerler için deniyoruz)* bakarak tümevarım basamaklarını hatırladığını söyleyebiliriz.

Araştırmacı: *Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet.*
Araştırmacı: *Neden?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Çünkü paralellikleri kullandım, benzerliği kullandım.*
Araştırmacı: *Yaptığınız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Şöyle yani ben ne değer verirsem vereyim bu oranı bulurum.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı aksiyom ve teoremlerin doğru olduğunu düşündüğünden ikinci problemin çözümünün bir ispat yaptığını savunmaktadır.

Araştırmacı: *Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Ederim evet.*
Araştırmacı: *Neden?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yani benzerlik kullandım benzerliği bilen birisini ikna edebilirim.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı aksiyom ve teoremleri bilen kişileri yaptıklarının doğruluğuna ikna edebileceğini söylemektedir.

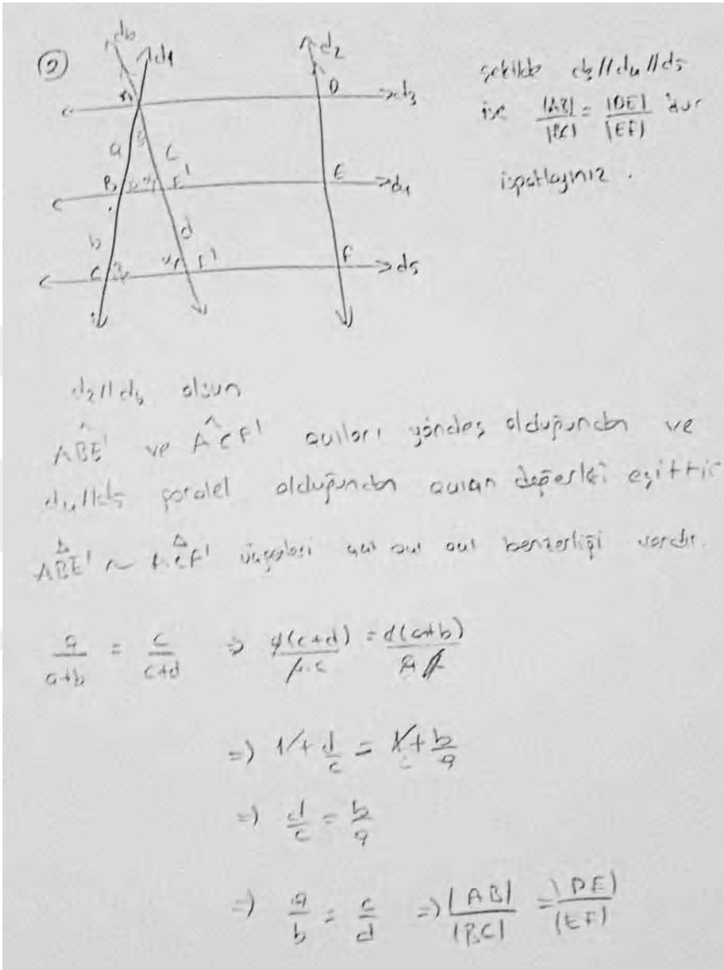
Araştırmacı: *Bilmiyorsa?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Açıklarım.*
Araştırmacı: *Ne demek benzerlik?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Aynı oranda büyütülmüş ya da küçültülmüş yani.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı benzerlik tanımını oranla ilişkilendirerek sade ve doğru tanımlamıştır.

Araştırmacı: *Bu soruyu farklı bir yoldan yapabilir misiniz?*

<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> *Şu an aklıma gelmiyor.*

İkinci problemin çözümünü tek yol ile yapılacağını fakat farklı çözüm yolları aklına gelmemiştir. Problemin çözümünün tek olmasını düşünerek kısıtlayıcı bir açıklama yapmıştır. A4 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problem çözümü Şekil 21'de verilmiştir.



Şekil 21. A4 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.5. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A5 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> *Ben bunu düşündüm ama sonucuna ulaşamadım. d_1 ve d_2 doğrularını uzattığımda aslında bunlar uzayda bir noktada kesişecek. Kesiştikleri nokta K noktası olsun. Burada paralel doğrulardan benzerliği kullanarak sonuca ulaşabiliriz ama yapamadım.*

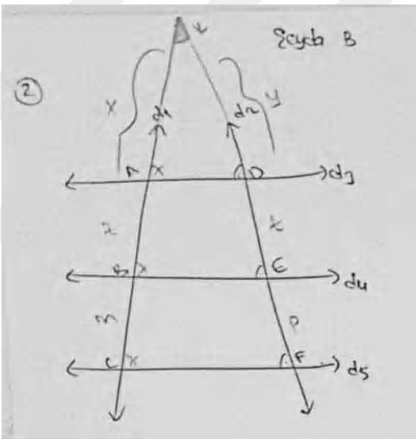
A5 Kodlu Öğretmen Adayı ek çizim yapmış ancak sonuca ulaşamamıştır ama benzerlik kullanılarak sonuca ulaşılabileceğini söylemektedir.

Araştırmacı: *İspata başlayamama devam ettirememe ve tamamlayamama sebebiniz nedir?*
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Zaman yetersizliğiydi. Uğraşamadım devamını getirmedim.*
Araştırmacı: *Neden bir strateji geliştiremediniz?*
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Sanırım o an düşündüğümde çok fazla denklem çıkıyordu.*

A5 Kodlu Öğretmen Adayı ek çizimi doğru yerden yapamadığı için sonuca ulaşamamıştır fakat zamanım yetişseydi yaparım demiştir.

Araştırmacı: *Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi.*
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Soruda verilenler yeterliydi.*

A5 Kodlu Öğretmen Adayı problem durumunda verilenleri ve istenilenleri tanımlayabilmiştir. Denklem çözümlerinde kaynaklı olarak ispatı yapamamıştır. A5 Kodlu Öğretmen Adayının problemin çözümü için yaptığı görsel çizim Şekil 22'de verilmiştir.



Şekil 22. A5 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

A üniversitesinde öğrenim gören beş ilköğretim matematik öğretmeni adayının ikinci problemin çözümüne ilişkin mülakat verilerinden genel bir sonuca ulaşılabilir. Mülakata katılan beş ilköğretim matematik öğretmeni adayının dördü ispatı doğru yaparken biri ispatı yapamamıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları ispat yönteminiz nedir sorusunun cevabına bakılırsa ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yöntemlerini bilmediklerini söyleyebiliriz. İspatı doğru yapan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının hepsinin kullandığı çözüm yolu aynıdır yani önce ek çizim yapılmış ardından benzerlik kullanılarak ispatı tamamlamışlardır.

4.2.6. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B1 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *İkinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet. Soruda d3, d4, d5 doğrularının paralel olduğunu vermiş. Bende o yüzden A ve F'den bir doğru daha çizdim ve bu doğrunun d4 doğrusu ile kesişen kısmına da P ismini verdim. B ve C açıları birbirine eşit oluyor. Soruda* $|AB|$ *ile* $|BC|$ *ve* $|AP|$ *ile de* $|PF|$ *ile birbirine eşit oluyor diye düşündüm paralellikten dolayı.*
Araştırmacı: *Nasıl hocam? Diğer açıları da yazsaydınız.*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *O zaman APB açısı ile AFC açısı da birbirine eşit oluyor. Bu mantıktan* $|AB|$ *ile* $|BC|$ *ve* $|AP|$ *ile de* $|PF|$ *ile birbirine eşit oluyor.*
Araştırmacı: *Bu eşitliği nasıl söylediniz?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Çünkü birbirine paraleldir ve açıları da eşit olduğu için.*
Araştırmacı: *Peki aralarında bir benzerlik var mı?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet var.* $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PF}$
Araştırmacı: *Bunu nerden yazdınız hocam?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Bunu ABP üçgeni ile ACF üçgeninin benzerliğinden yazdım. Açı-açı-açı*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı benzer üçgenleri doğru yazdığı halde eşit açıların karşılarındaki kenarların oranını doğru yazamamıştır.

Araştırmacı: *Peki hangi kenarların orantılı olduğunu da yazar mısınız?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CF} = \frac{AD}{AF}$

Araştırmacının yönlendirmesi ile orantılı kenarları yazar mısınız sorusunda B1 Kodlu Öğretmen Adayı orantılı kenarları doğru bir şekilde yazmıştır.

Araştırmacı: *Tamam bu sizin yaptığınızla aynı şey mi?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Hayır değil.*
Araştırmacı: *Asıl çözümünüzde yazdığınız şeyle aynı mı bu?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Hayır değil aslında çıkmıyor buradan.*
Araştırmacı: *Yan tarafta yazdıklarınızı da yazabilir misiniz önce açılarınızı yazın.*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yan tarafta DAF açısı ile EPF açıcı ve ADF açısı ile de PEF açısı birbirine eşit oluyor.* $\frac{DE}{EF} = \frac{AD}{DF}$

B1 Kodlu Öğretmen Adayı benzer üçgenleri doğru yazdığı halde eşit açıların karşılarındaki kenarların oranını doğru yazamamıştır.

Araştırmacı: *Peki burada hangi üçgenler benzer?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *FEP üçgeni ile FDA üçgeni benzerdir. (açı-açı-açı)*
Araştırmacı: *Burada hangi kenarlar orantılıdır?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: $\frac{FE}{FD} = \frac{EP}{DA} = \frac{FP}{FA}$

Araştırmacı orantılı kenarları yazar mısınız sorusunda B1 Kodlu Öğretmen Adayı orantılı kenarları doğru bir şekilde yazmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Peki bu yazdıklarınız yukarıda yazdıklarınızla aynı mıdır?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Değil.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı araştırmacının mülakat esnasında orantılı kenarları yazar mısınız sorusunun sonucunda orantılı kenarları doğru yazmıştır ama $|AC|= |AB|+|BC|$ olduğunu düşünememiş yani bütünü parçalayamadığından sonuca ulaşamamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Burada bir ispat yapmış oluyor musunuz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır olmuyorum.
<u>Araştırmacı:</u> İspata nasıl başladınız.
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlik kullanmayı denedim.
<u>Araştırmacı:</u> Peki neden benzerlik kullanmayı denediniz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü paralel doğrular vardı ters açılardan yapabileceğimi düşündüm yöndeş açılarda vardı ama yapamadım.

Paralel doğruların, ters açıların ve yöndeş açıların olması B1 Kodlu Öğretmen Adayını benzerlik kullanmaya teşvik etmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Hangi ispat türünü kullandınız?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlik.
<u>Araştırmacı:</u> Hayır öyle değil ispat türlerinden hangisini kullandınız?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> İspatı yapamadığım için herhangi bir yöntem de kullanmadım. Doğrudan ispat.

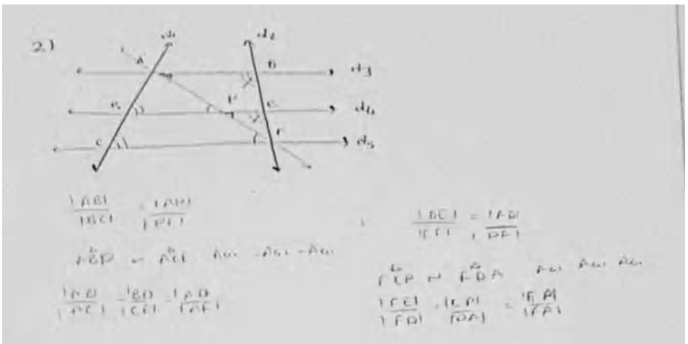
B1 Kodlu Öğretmen Adayı bu soruda bir yöntem kullanmaya çalışmış fakat ispatı başarıyla sonlandıramadığından dolayı herhangi bir yöntem kullanmadığını söylemiştir.

<u>Araştırmacı:</u> İspata başladınız ama ispatı devam ettiremediniz ve tamamlayamadınız bunun sebebi nedir?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü şu an başlangıcı farklı paralel doğrulardan gittim sonra benzerlikten gitmeye çalıştım kafam karıştığı için yapamadım.
<u>Araştırmacı:</u> Kâğıdınızda yaptığınız ispatın doğru olduğunu düşünüyor musunuz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü sonuca ulaşamadım.
<u>Araştırmacı:</u> Peki sizi sonuca ulaştıran yaptığınız her şey doğru mudur acaba?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yaptığım şeyler yanlış olabilir yanlış şeyler yaparak da doğruya ulaşabilirim.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı yanlış şeyler yaparakta ispat yapabileceğini söylemektedir ama bu her defasında mümkün almayabilir.

<u>Araştırmacı:</u> Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Verilenler yeterli, bu ispat yapılabilirdi ama ben yapamadım.
<u>Araştırmacı:</u> İspatı yapamama sebebiniz nedir?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Farklı bir benzerlik kurmalıydım bence iki türlü hem benzerlikten hem de doğrulardan gittiğim için yapamadım.
<u>Araştırmacı:</u> Benzerlik hakkındaki bilgileriniz için ne düşünüyorsunuz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerliği biliyorum ama uygulamada sıkıntı yaşadım.

B1 Kodlu Öğretmen Adayının söylediği gibi benzerliği bilmektedir fakat uygulama noktasında yani orantılı kenarları yazma noktasında sıkıntı yaşamıştır. Araştırmacı orantılı kenarları tekrar yazmasını isteğinde doğru olarak yazmış fakat bütünü parçalayıp sonuca ulaşmayı başaramamıştır. B1 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci probleme yaptığı çözüm Şekil 23'de verilmiştir.



Şekil 23. B1 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.7. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B2 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *İkinci soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz hocam?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *DKF üçgeni oluşturdum. Thales teoreminden |KF|=a, b=* $\frac{a}{2}$ *dedim.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı benzerlik oranını kendi kafasından $\frac{1}{2}$ alarak başlamıştır.

Araştırmacı: *Neye göre söylediniz bunu? O zaman siz |DE| = |EF| mi aldınız?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet hocam ilk başta eşit aldım. Aynı şeyleri solda da yaptım. ACL ve DKF üçgenleri benzer üçgenler. |AD| = |DK| =3x, |CL| = |KF| =a dedim.*
Araştırmacı: *Bu eşitlikleri nereden söylediniz? Yani |AC| = |DF| dediniz peki neden?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Paralellikten eşit.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı AC ve DF uzunluklarının paralellikten dolayı eşit olduğunu söylemiştir ama savunduğu gibi AC ve DF doğruları birbirine paralel değildir.

Araştırmacı: *Devam edin.*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Orta tabandan* $\frac{3x+2a+3x}{2}$ *= 2b+3*

$$6x+2a = 4b+6x$$
$$2a=4b$$
$$b = \frac{a}{2}$$

olduğunu göstermiş oldum. Buradan $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ *olur.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı ispatlamak istediği şeyi kabul ederek işe başlamış fakat yaptıkları bir ispat değildir çünkü kabul ettiği şeyi yamukta bilinen orta taban formülünden ispatladığını söylese de bu bir ispat değildir. Bilinen şeyler doğruluğu kabul edilmiş formülleri zaten sağlar.

Araştırmacı: *Thales Teoremi dediğiniz benzerlik ne benzerliği?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Açı-açı-açı benzerliği aslında.*
Araştırmacı: *Bu soruda hangi ispat yöntemini kullandınız?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Hocam isimlerini sayar mısınız? Ben içinden seçsem.*
Araştırmacı: *Doğrudan, dolaylı, aksine örnek verme,...*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Dolaylı.*

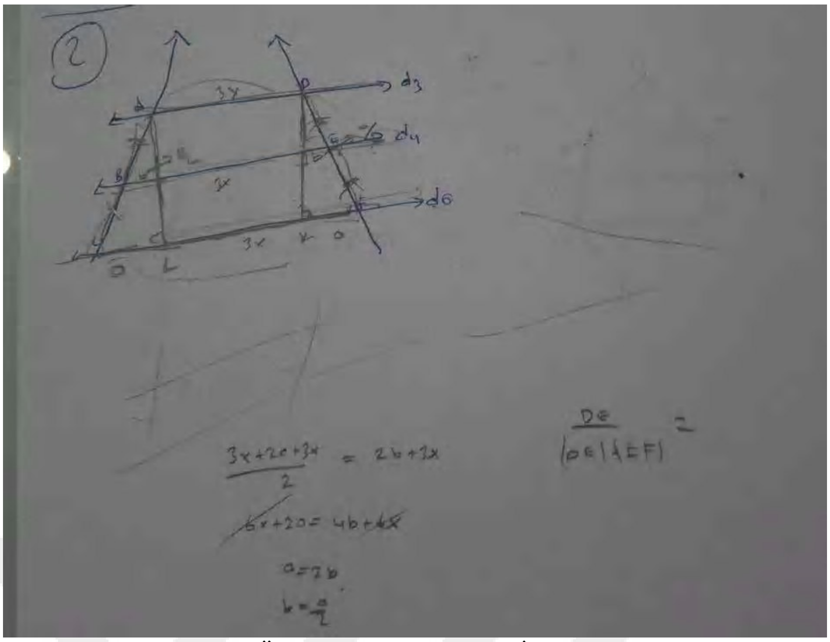
B2 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaba bakılırsa ispat türlerini bilmediğini söyleyebiliriz.

Araştırmacı: *Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Düşünüyorum.*
Araştırmacı: *Neden?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Hocam aslında ben Thales teoremini kullandım ama aslında Thales teoremini ispatlamamız gerekirdi. Ben verileni doğru kabul ettim.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı soruda istenen teoremi bildiğinden dolayı ispat yaparken bu teoremin özelliklerini kullanmış olduğundan yaptıklarının ispat olduğunu düşünmektedir.

Araştırmacı: *Yaptığınız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Mantıklı olması gerekir, herkes tarafından kabul edilmesi gerekir ama bu yaptıklarım ispat olmaz herkes kabul etmeyebilir.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı yukarıda bir ispat yaptığını düşünürken araştırmacının yapılan şeylerin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir sorusuna cevaben bu fikrinden vazgeçmiştir. Yaptıklarının herkes için geçerli olamayacağını savunmaktadır. Şekil 24'de B2 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 24. B2 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.8. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B3 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *İkinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *A ve F noktalarını birleştirip iki üçgen elde ettim ve uzunlukları yazdım. Ben bu sorunun benzerlikten çıkacağını düşünüyorum. ACF üçgeni ile FDA üçgeninin benzer olabileceğini varsayıyorum. ACF üçgeni için* $\frac{a}{a+b} = \frac{d}{k}$ *FDA üçgeninden de* $\frac{c}{c+d} = \frac{l}{p}$ *dedim ama ben değişik şeyler yapmışım. Burda kaldım ileri gidemedim.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayının oluşturduğu iki üçgende benzerlik yapmış fakat doğru sonuca ulaşamamıştır.

Araştırmacı: *Bu soruda ispata nasıl başladınız?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *İki noktayı birleştirip benzerlik yaparak başladım.*
Araştırmacı: *Bu soruda ne benzerliği kullandınız?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Kenar-kenar-kenar benzerliği olabileceğini düşünüyorum.*
Araştırmacı: *Kenar-kenar-kenar benzerliğinde kenarlar orantılı olmak zorunda değil mi? Kenar uzunlukları belli değil.*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet hocam ben hissi açıdan yaklaştım. Benzerlik olabileceğini düşündüm.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı kenarların uzunlukları verilmediği halde bu üçgenler arasında kenar-kenar-kenar benzerliği olabileceğini düşündüm demiştir.

Araştırmacı: *Bu soruda hipotez ve hükmünüz nedir?*

<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> İki noktayı birleştirip iki üçgen elde etmek hipotezim. Benzerlik kurup iki üçgen arasındaki bağlantıyı yorumlamak da hükmüm oldu.

B3 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaplara bakılırsa hipotez ve hüküm kavramını bilmediği söylenebilir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tümden gelimle deneme yanılma.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı ispat türlerini bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır düşünmüyorum. Çünkü yaptıklarım gerçekçi olmadı.
<u>Araştırmacı:</u> Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Düşünmüyorum çünkü yaptıklarım eksik.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarıyla doğru sonuca ulaşamadığından dolayı bir ispat yaptığını düşünmemekte ve haliyle karşısındaki kişiyi yaptıklarının doğruluğuna ikna edemeyeceğini savunmaktadır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruyu farklı bir yoldan yapabilir misiniz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Olabilir hocam. ACF üçgenini düşünürsem.

$$\frac{a}{a+b}=\frac{d}{k}=\frac{h}{h+ç}$$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{h}{h+ç}$$

Aynı şekilde FDA üçgeninden de

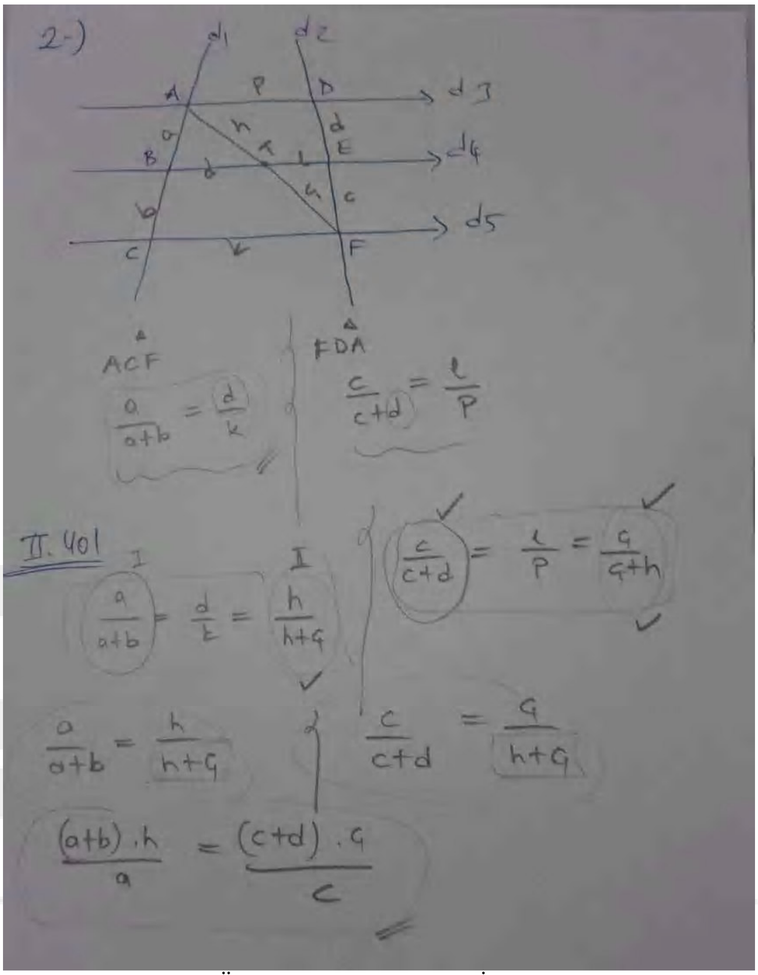
$$\frac{c}{c+d}=\frac{l}{p}=\frac{ç}{ç+h}$$

$$\frac{c}{c+d}=\frac{ç}{ç+h}$$

Elde ettiğim son iki eşitlikleri kullanırsam da

$\frac{(a+b).h}{a}=\frac{(c+d).ç}{c}$ *olur ama devamı gelmez.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı aslında ikinci yoldan doğru bir şekilde gitmiş fakat eşitliğin her iki tarafının -1. kuvvetini alıp işlemine devam edememiştir. Eğer devam etseydi doğru sonuca ulaşacaktı. Şekil 25'de B3 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problem çözümü verilmiştir.



*Şekil 25.*B3 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.9. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B4 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> *Araştırmacı:* *İkinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?*
> *B4 Kodlu Öğretmen Adayı:* *Bu soruda hipotez kısmım d_3, d_4 ve d_5 doğrularımın birbirine paralel olması, hüküm kısmım ise*
> $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ *olması.*
> *Araştırmacı:* *Hipotez ve hüküm kavramlarının tanımını yapabilir misiniz?*
> *B4 Kodlu Öğretmen Adayı:* *Hipotez doğruluğu ispatlanmaya çalışılan. Hüküm ise hipotez yardımıyla verilen ispatın yapılması.*

B4 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez ve hüküm kavramlarının tanımını bilmesine rağmen sorudaki hipotez ve hükmü doğru söyleyememiştir.

> *Araştırmacı:* *Devam edebilirsiniz hocam.*
> *B4 Kodlu Öğretmen Adayı:* *d_1 ve d_2 doğrularını uzatıp bir P noktasında birleştirdim. |PA|=|AB|= |BC|=x ve |PD|= |DE| =|EF|=y dedim. Açıları isimlendirdim. U kuralından.*
> *Araştırmacı:* *U kuralı dediğimiz kural nedir? Açıklayabilir misiniz?*

<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yöndeş açılar olduğundan dolayı.
<u>Araştırmacı:</u> Yani yöndeş açıların ölçüleri toplamı 180 derecedir mi diyorsunuz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yok yöndeş açılar değil. Bütünler açılar.
<u>Araştırmacı:</u> Bütünler açı olduğuna nasıl karar verdiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hep kural ağırlıklı gittiğimden dolayı.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı kuralları sorgulamadan ezbere kullanmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Devam edin hocam.
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bana AB ve BC'yi sormuştu. Ben kabul ederek başladım. $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{x}{x} = 1$ *ve* $\frac{|DE|}{|EF|} = \frac{y}{y} = 1$ *kabul ettim.*

B4 Kodlu Öğretmen Adayı ispatı doğru bir şekilde yapamamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır düşünmüyorum çünkü işlemez.

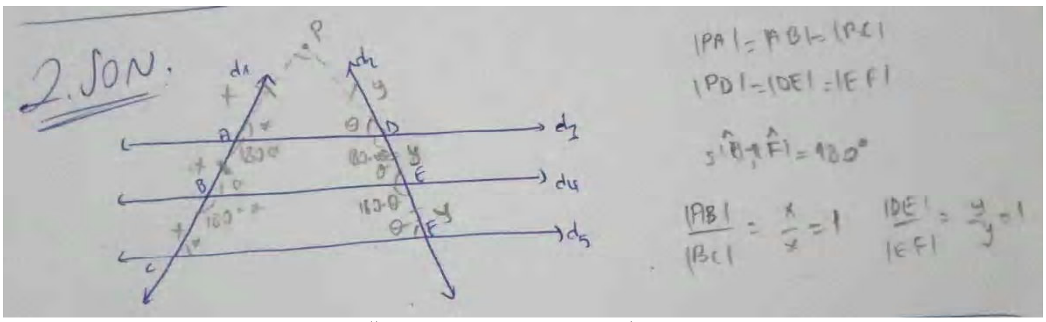
B4 Kodlu Öğretmen Adayı bu soruda bir ispat yaptığını düşünmemektedir çünkü işlemeyeceğini düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Hangi ispat yöntemini kullanmaya çalıştınız?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Doğruluğunu kabul edip ispat yapmaya çalıştığım için doğrudan ispat.
<u>Araştırmacı:</u> Doğrudan ispatın hangi alt kolu?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bilmiyorum hocam.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı ispat yöntemlerini bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır.
<u>Araştırmacı:</u> Yaptığınız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hipotez ve hüküm kısmının tam verilmesi gerekir. Bir önerme olması gerekir.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda neden bir strateji geliştiremediniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bilgi eksikliği. Ezbere bilgilerim var kuralları sorgulamadan direk ezberlediğim için.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı bildiklerini ezberlediğini sorulamadan kabul ettiğini söylemek istemiştir. Şekil 26'da B4 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 26. B4 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.10. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B5 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *İkinci soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?*
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tabi ki hocam şimdi soruda* $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|DE|}{|EF|}$ *eşitliğini ispatlamamızı istemiş. Şimdi ben bu soruda C köşesinden D köşesine bir çizgi çekip iki üçgen oluşturdum. DME üçgeni ile DCF üçgenlerinin benzer olduğunu düşündüm açılarını yazdım benzerlik kullanmaya çalıştım.*
Araştırmacı: *Peki bu üçgenler arasındaki benzerlik türü nedir?*
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Bir açıları ortak yöndeş açılardan açıların eşitliğini yazdım iki açısı eşitse üçüncü açıları da eşittir dedim. Üçgenlerin üç açısı da eşit olduğundan açı-açı-açı benzerliği vardır dedim. İki üçgenin benzerliğinden* $\frac{|DE|}{|DF|}=\frac{|ME|}{|CF|}=\frac{|DM|}{|DC|}$ *eşitliklerini yazdım. Diğer taraftan baktığımızda ise CDA üçgeni ile CMB üçgeni de benzer oldu. Açı-açı-açı benzerliği. Bu iki üçgenin benzerliğini kullanarak* $\frac{|CM|}{|CD|}=\frac{|BM|}{|AD|}=\frac{|CB|}{|CA|}$ *eşitliklerini yazdım. Bu iki eşitlikten yola çıkarak bir bağlantı oluşturabiliriz aslında. Bunları karşılaştırmayı düşünüyorum ama bir şey gelir mi bilmiyorum. Hocam galiba bir şey gelmedi.*

B5 Kodlu Öğretmen Adayının yaptığı şeyler doğru fakat iki eşitliği kullanıp sonuca varamamıştır yani ispatı tamamlayamamıştır.

Araştırmacı: *İspata nasıl başladınız?*
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Mantıken bu soruda iki üçgen oluşturup benzerlik kullanılacak. Benzerlikleri yazdım aynı şeye eşit olacak ifadeler gelmeliydi ama bulamadım.*

B5 Kodlu Öğretmen Adayı sorunun nereden çözüleceğini bildiği halde bir sonuca bağlayamamıştır.

Araştırmacı: *Bu soruda hangi ispat türünü kullanmaya çalıştınız?*
B5 Kodlu Öğretmen Adayı : *İspat türlerini hatırlamıyorum hocam.*

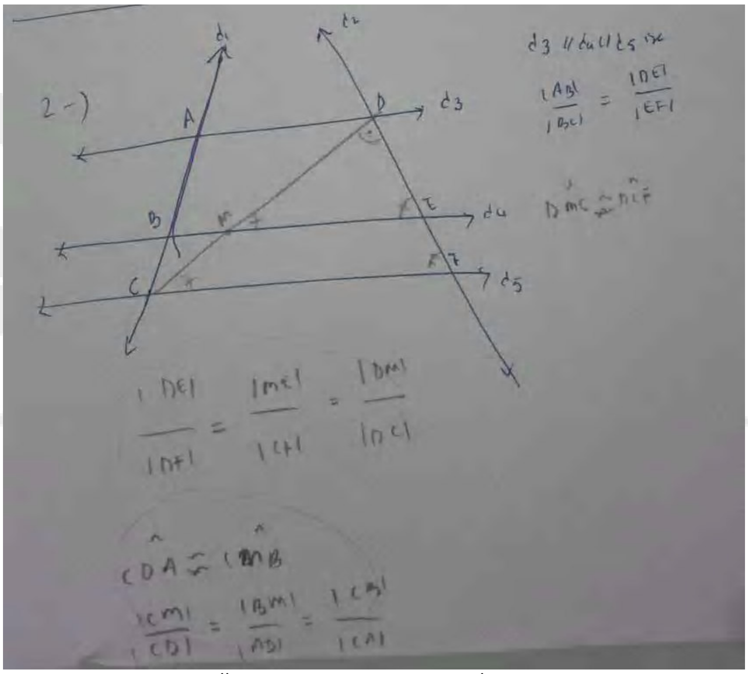
B5 Kodlu Öğretmen Adayı ispat türlerini hatırlamamaktadır.

Araştırmacı: *Yaptığınız şeyin ispat olabilmesi için ne tür özellikler taşıması gerekir?*
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Mantıken matematiksel bir hükmünün olması gerekir burada kullandığım benzerlik gibi temel bir dayanağının olması gerekir benzerlik kullanarak eşitlikleri yazdım sorulan şeyi bulabilseydim ispat yapmış olacaktım çünkü mantıklı şeyler yaptım ama hükme ulaşamadığım için ispat sayılmıyor. Ben yapamadım daha doğrusu.*
Araştırmacı: *Bu soruda neden bir strateji geliştiremediniz?*
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Birinci soruda söylediğim gibi benim geometri bilgim çok üst düzey değil matematiksel bir teorem olsa yapabilirdim ama mesela bir çizgi çektim ama eşitlikleri bulup devam ettiremedim.*

B5 Kodlu Öğretmen Adayı sorunun ispatını tamamlayamamasını geometri bilgilerinin eksikliğine bağlamış fakat geldiği son noktada oran-orantı kurallarını göremediğinden dolayı bir sonuca ulaşamamıştır.

> <u>Araştırmacı:</u> *Bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?*
> <u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> *Hocam biz birinci sınıfta geometri dersi aldık o zaman bu soruyu sormuş olsanız kesin yapardım diye düşünüyorum çünkü geometri bilgilerim tazeydi.*

B5 Kodlu Öğretmen Adayı geometri dersinden yıllar geçtiğinden bilgilerinin taze olmadığını unuttuğunu dile getirmiştir yani ezberlenen bilgiler unutulmuş diyebiliriz. Şekil 27’de B5 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 27. B5 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

4.2.11. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B6 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> <u>Araştırmacı:</u> *İkinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?*
> <u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> *İlk önce d_2’ye bir paralel çizdim. Yöndeş açıların eşitliğinden dolayı eşit olan açıları yazdım. Eşit kenarları yazdım.*
> $|AF| = |DE|$
> $|FG| = |EF|$
> $|AG| = |DF|$
> $|AC| = |AB| + |BC|$
> $|DF| = |DE| + |EF|$
> *Kenarları harflendirdim. ABF ve ACG üçgenleri açı-açı-açı benzerliğinden dolayı benzerdir. Benzerliği kullanarak orantılı kenarları yazarsam.*

$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|CG|} = \frac{|AF|}{|AG|}$

$\frac{|AB|}{|AB|+|BC|} = \frac{|AF|}{|DE|+|EF|}$

$\frac{|AB|+|BC|}{|AB|} = \frac{|DE|+|EF|}{|DE|}$

$1+\frac{|BC|}{|AB|} = 1+\frac{|EF|}{|DE|}$

$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|DE|}$

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ *İspatı tamamladım.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayı ek çizim yaparak iki üçgen arasında oluşan açı-açı-açı benzerliğini doğru bir şekilde kullanıp ispatı tamamlamıştır.

Araştırmacı: *İspata nasıl başladınız?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *d_2'ye paralel çizip yöndeş açıları yazıp başladım.*
Araştırmacı: *Bu ispatta kullandığınızı yöntem nedir?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *Verilenlerden yola çıkarak ispatlamaya çalıştım hatırlamıyorum.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaba bakılırsa kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir.

Araştırmacı: *Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet*
Araştırmacı: *Neden?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *Çünkü tasarlayıp yaptım. Herkes tarafından kabul edilir yaptıklarım.*

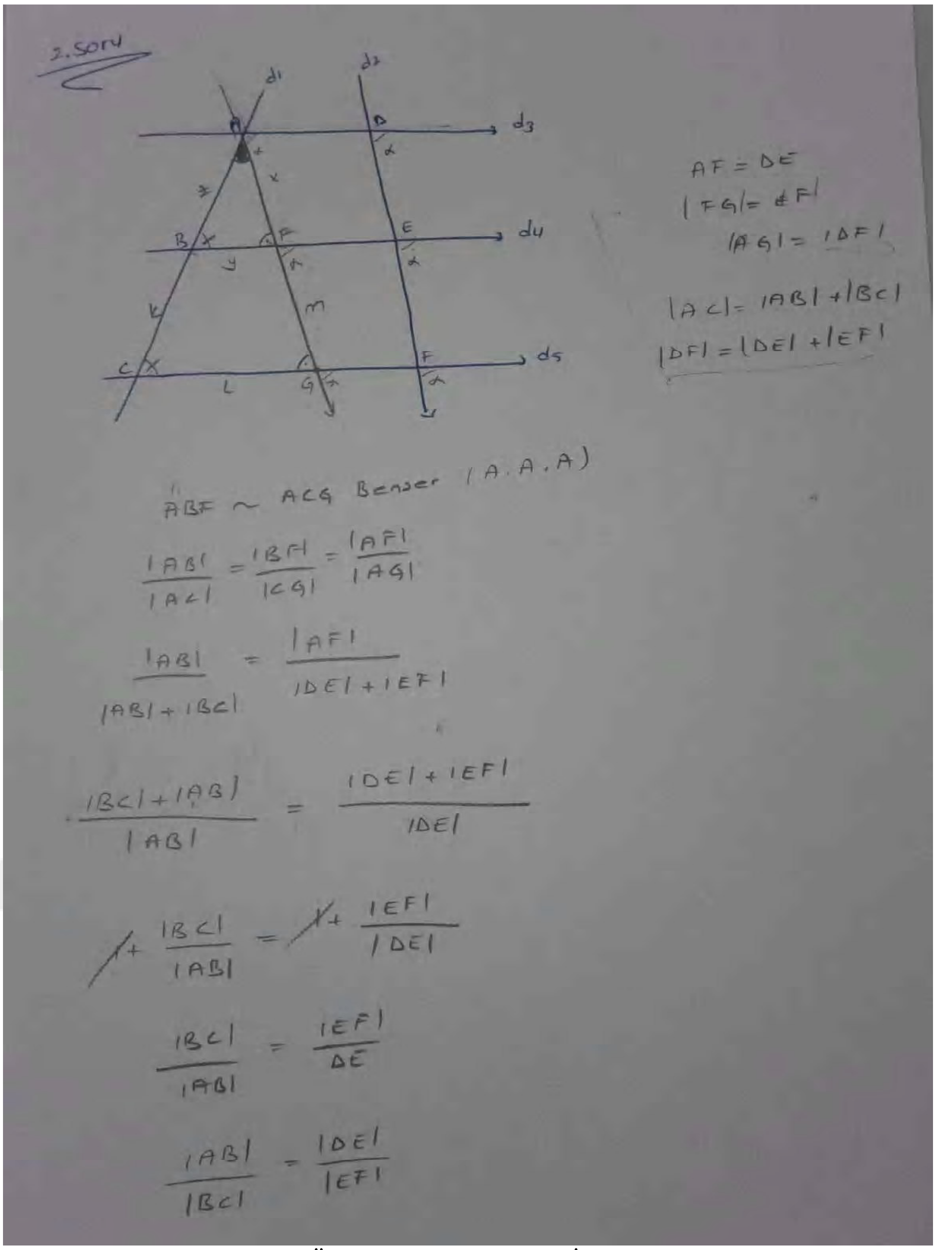
B6 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarının herkes için aynı şeyleri ifade ettiğini söyleyip bu soruda bir ispat yaptığını savunmaktadır.

Araştırmacı: *İspat ne demektir?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *Herkes tarafından kabul edilen aksi bulunana kadar geçerli olan ispattır.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayı ispat kavramı yerine teorem kavramının tanımını yapmıştır.

Araştırmacı: *Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet.*

Şekil 28'de B6 Kodlu Öğretmen Adayının ikinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 28. B6 Kodlu Öğretmen Adayının İkinci Problem Çözümü

B üniversitesinde öğrenim gören altı ilköğretim matematik öğretmeni adayının ikinci probleminin çözümüne ilişkin mülakat verilerinden genel bir sonuca ulaşılabilir. Mülakata katılan altı öğretmen adayının birisi ispatı doğru yaparken beşi ispatı yapamamıştır. İspatı yapamayan öğretmen adaylarının üçü ispata başlamış fakat ispatı tamamlama noktasında orantılı kenarları yazma konusunda, oran-orantı özelliklerini kullanma noktasında sıkıntı yaşadıklarından ispatı tamamlayamamışlardır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları ispat yönteminiz nedir sorusunun cevabına bakılırsa ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yöntemlerini bilmediklerini söyleyebiliriz. İspatı doğru yapan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının hepsinin kullandığı çözüm yolu aynıdır yani önce ek çizim yapılmış ardından benzerlik kullanılarak ispatı tamamlamışlardır.

A ve B üniversitesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ikinci probleminin çözümüne ilişkin verileri birlikte değerlendirilirse A üniversitesindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının daha başarılı olduğu söylenebilir bu başarının sebebi üniversite giriş puanları olabilir. Her iki üniversitedeki öğretmen adayları da kullandıkları ispat türünü bilmemektedir.

4.3. Üçüncü Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

Bu araştırmada kullanılan üçüncü alt problem: "Herhangi bir konveks dörtgende ardışık kenarların orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşan şeklin bir paralelkenar olduğunu ispatlayınız."

4.3.1. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A1 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> *Araştırmacı: Peki ben bir şey sorarak başlamak istiyorum. Konveks ne demek?*
> *A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Dışbükey.*
> *Araştırmacı: Dışbükey ne demek?*
> *A1 Kodlu Öğretmen Adayı: İç bölgesi olmayacak.*
> *Araştırmacı: Yazabilir misiniz?*
> *A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Tabi ki de. Konveks (dışbükey) daha doğrusu dış açısı 180 dereceden büyük olmalıdır.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı konveks kavramının dışbükey olduğunu bildiği halde konveks tanımını yanlış yapmıştır. Araştırmacının konveks bir çokgen çizebilir misiniz sorusuna doğru bir çizim yapmıştır. Bu da bize A1 Kodlu Öğretmen Adayının çokgen kavramını bilmediği halde şeklini hatırlayıp çizmesini gösterir.

> *Araştırmacı: Peki çokgenlerin içi ve dış açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir?*
> *A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Dörtgenler için mi?*
> *Araştırmacı: Hayır çokgenler için.*
> *A1 Kodlu Öğretmen Adayı: 330 derece pardon 180 derece.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı araştırmacının sorusuna doğru cevap vermiştir.

> *Araştırmacı: Peki dış açısı 180 dereceden büyük olması gerekir demişsiniz o nasıl olacak.*
> *A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir köşeyi aldığımızda genel olarak dış açı bayağı geniş olmalı.*

Araştırmacı A1 Kodlu Öğretmen Adayının tanım yapmaya yönlendirici sorular sormuştur ama A1 Kodlu Öğretmen Adayı çokgenlerin iç ve dış açısının toplamının 180 derece olduğunu söylediği halde konveks bir çokgenin dış açısının 180 derece olduğu kanaatinden vazgeçmemiştir.

Araştırmacı: İspatınıza devam edebilirsiniz.
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir tane rastgele konveks çokgen çiziyorum paralellik falan yok. Bana ardışık orta noktaların birleştirilmesi dediğinden ABCD dörtgeninde kenarların orta noktalarını E1, E2, E3, E4 şeklinde isimlendiriyorum. Ben burada şunu düşünüyorum orta noktaları birleştiriyorum. Buradan E1E2E3E4'ün paralelkenar olduğunu şu şekilde ispatlıyorum. ADB üçgenine bakıyorum ADB üçgeninde E1 E2 noktaları ortak olduğundan |E1E2|//|DB| dir.
Araştırmacı: Bunu nereden söylediniz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Bu paralelliği |AD|'nin orta noktası E1'dir. |AB|'nin orta noktası E2'dir. İki tane orta nokta olduğundan benzerlikten dikme indirirsem benzerlikten gelir. DCB üçgeninde aynı şekilde |DB|//|E4E3| ben bu paralelliği kullanmak istiyorum. Yazdığım iki önermeden |E1E2| // |E3E4| yazabilirim.
Araştırmacı: Başka bir şekil çizebilir misiniz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Tabi ki çiziyorum. Burada aynı şekilde 1'de yaptığımız gibi
|E1E4| // |AC| (ancak ve ancak) |AC| // |E2E3| o halde |E1E4| // |E2E3| İlk başta üst kenarların paralel olduğunu sonrada alt kenarların paralel olduğunu gösterdim zaten.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu doğru bir şekilde analiz edip şekli çizmiştir, ispatı iki kısma ayırmış ve geçmiş bilgilerini (benzerlik, yöndeş açıların eşitliği) kullanarak ispatın ilk kısmını tamamlamıştır.

Araştırmacı: Paralelskenarın özelliği nedir?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Karşılıklı kenarların paralel olmasıdır. Paralelkenarımızın özelliğinde karşılıklı açılarını göstermem gerekir.
Araştırmacı: Peki açıları değil de başka bir şeyi göstersek olur mu? Siz açıları gösterdiniz mi?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır ben açıları göstermedim.
Araştırmacı: Tekrar şekil çizebilir misiniz?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Tamam hocam çiziyorum. Karşılıklı açıların ölçülerinin eşit olduğunu bulursam bu şekle paralelkenar diyebilirim. Burada eşkenar dörtgen olabilir mi? |E1E2| ile |E1E4| farklı uzunlukta olduğundan eşkenar dörtgen diyemem.
Araştırmacı: Peki |E1E4| , |E2E3| eşit midir?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet eşittir.
Araştırmacı: Neden?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Paralellikten gelmektedir.
Araştırmacı: Karşılıklı kenarları paralel buldunuz karşılıklı açıları da eşitse paralelkenar olur mu?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır dikdörtgende olabilir.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı paralelkenar ve dikdörtgen kavramlarını karıştırmıştır.

Araştırmacı: Peki dikdörtgen paralelkenar mıdır?

<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Aslında dediğiniz gibi paralelkenardır.$|E1E4| = |E2E3|$ (ADC) üçgeninde $|AC|$ uzunluğunu çizdiğimizde $|DA|$'yı ortadan ikiye ayıran $|E1|$ ve $|DC|$ yi ortadan ikiye ayıran $|E4|$ (ABC) üçgeninde $|AC|$ çizdiğimizde $|AB|$, $|E2|$ yi ikiye bölmekte ve $|AC|$, $|E3|$'ü ikiye bölmektedir. $|E1E4| = |E2E3|$ dur. Aynı şekilde $|E1E2| = |E4E3|$ olur ve ispat tamamlanır.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı başta dikdörtgen paralelkenar değil derken sonradan dikdörtgenin paralelkenar olduğunu söylemiştir. A1 Kodlu Öğretmen Adayı soruyu doğru bir şekilde ispatlamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Arka sayfaya konveks çokgen örneği çizebilir misiniz?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çizebilirim şu şekilde olabilir ABCD dörtgeni konvekstir.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı tanımını yapamadığı konveks kavramına ilişkin doğru bir şekil çizmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Farklı bir konveks çokgen alsaydınız kenar uzunlukları yine eşit çıkar mıydı?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tabi ki de paralellikten dolayı olur.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet ben bu soruda ispat yaptım.

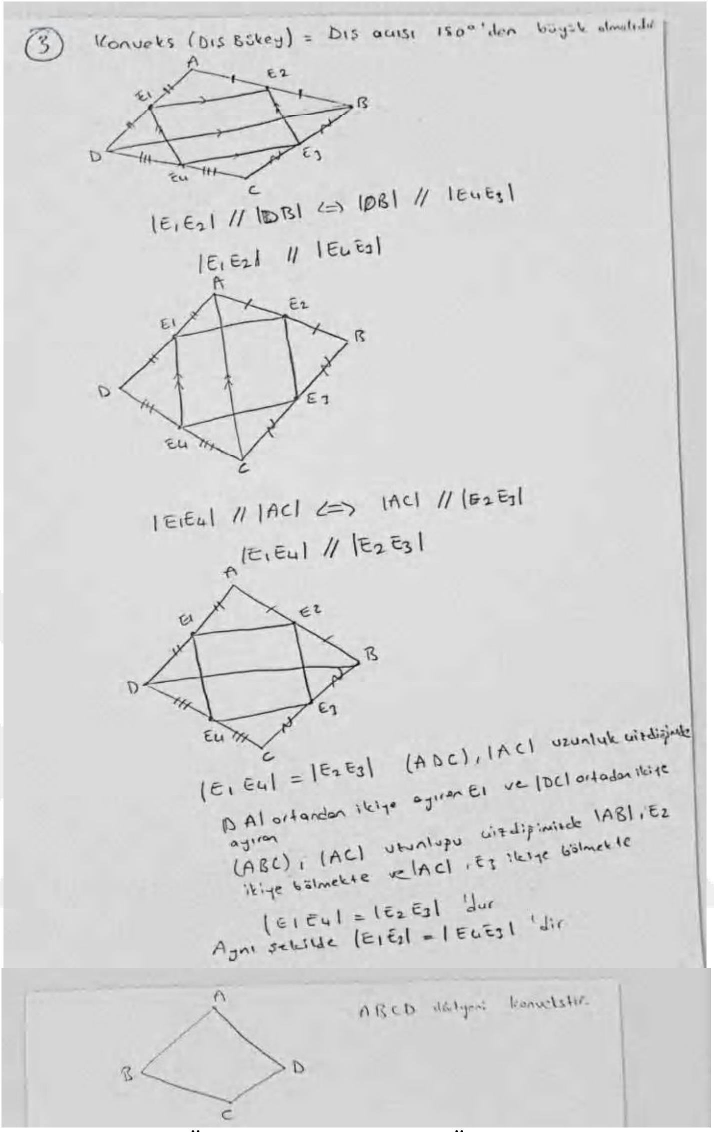
A1 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı özelliklerin doğru olduğundan emin olduğundan bir ispat yaptığını düşünmüştür.

<u>Araştırmacı:</u> Hangi yöntemi kullandınız?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tümevarım kullandım.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı ispat yaparken kullandığı yöntemi bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet ederim. Kesinlikle.
<u>Araştırmacı:</u> Ne kullandınız bu soruda?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bu soruda ben paralelliğin özelliklerini ve temel bilgilerimi kullandım.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı bu soruyu çözerken geçmiş bilgilerini kullanmıştır. A1 Kodlu A1 Kodlu Öğretmen Adayının problemi çözerken kullandığı çizimler Şekil 29'da verilmiştir.



Şekil 29. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

4.3.2. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A2 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir tane konveks dörtgen çizelim, orta noktalarını bulalım. ABCD dörtgeninin orta noktaları K, L, M, N olsun. Bu orta noktaları birleştirdiğimizde oluşan şeklin paralelkenar olduğunu ispatlayacağız. Bunun için benzerlik kullanmak mantıklı olacak diye düşündüm o yüzden A'dan C'ye bir doğru çizdim. Yöndeş açılar eşit olduğundan açıların eşitliklerini yazdım ve DKM üçgeni ile DAC üçgeni benzer oldu.
Araştırmacı: Ne benzerliği var onu da söylerseniz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Açı-açı-açı benzerliği. Oranları yazarsak $\frac{|DK|}{|DA|} = \frac{|DM|}{|DC|} = \frac{|KM|}{|AC|} = k = \frac{1}{2}$
Diğer benzerliği yazacak olursak BLN üçgeni BAC üçgeni benzer üçgenlerdir. (açı-açı-açı benzerliği) oranları yazayım. $\frac{|BL|}{|BA|} = \frac{|BN|}{|BC|} = \frac{|LN|}{|AC|} = k = \frac{1}{2}$ *olur. Yukarıdaki oranla aşağıdaki oranın paydaları aynı olduğundan* $|KM|=|LN|$ *olur dedim. İki kenarın eşitliğini bulduk şimdi diğer iki kenara bakalım. D'den B'ye bir doğru çizdim. Bu durumda ALK üçgeni ile ABD üçgeni benzer oldu (açı-açı-açı benzerliği). Benzerlik oranını yazarsam*

$\frac{|AL|}{|AB|} = \frac{|AK|}{|AD|} = \frac{|KL|}{|DB|} = \frac{1}{2}$. *Sağ taraftaki üçgenlere bakacak olursak. MCN üçgeni ile CDB üçgenleri benzer açı-açı-açı benzerliği. Oranları yazalım.* $\frac{|CM|}{|CD|} = \frac{|NC|}{|CB|} = \frac{|MN|}{|BD|} = \frac{1}{2}, \frac{|KL|}{|BD|} = \frac{|MN|}{|BD|}$ *ise* $|KL| = |MN|$ *elde ederiz. Karşılıklı kenar uzunlukları birbirine paralel ve karşılıklı kenar uzunlukları eşit çıktığından bu şekil bir paralelkenardır diyebiliriz.*

A2 Kodlu Öğretmen Adayı geçmiş geometri bilgilerini kullanarak soruyu doğru bir şekilde ispatlamıştır.

Araştırmacı: Konveks ne demektir?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Köşeleri dışa doğru olan çokgenlerdir.

Düşünüldüğünde A2 Kodlu Öğretmen Adayının tanımı doğrudur fakat akademik bir tanım olmamıştır.

Araştırmacı: Diğer adı nedir?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Dış bükey.
Araştırmacı: Bütün köşeleri dışa doğru mu olmalı?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Konkav ne demek?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Konkav da iç bükey demek. Yani en az bir köşesi içe doğru olan çokgenler.

Benzer şekilde A2 Kodlu Öğretmen Adayı konkav tanımını da doğru yapmış fakat bu tanım akademik bir tanım olmamıştır.

Araştırmacı: Çokgenin tanımını yapabilir misiniz?

<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bütün kenarları doğrusal olan en az 3 kenarı olan geometrik şekiller.
<u>Araştırmacı:</u> 3 kenarı olan her şekil çokgen midir?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Olur ama kenarları doğrusal olacak.
<u>Araştırmacı:</u> Kenarlarının doğrusal olması ne demek?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Kenarlarının aynı doğru üzerinde olması demek.

A2 Kodlu Öğretmen Adayının tanımını incelediğimizde kenarlarının aynı doğru üzerinde olması demek kenarların birleşip bir doğru parçası oluşturması demektir. A2 Kodlu Öğretmen Adayı çokgen tanımını eksik yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda farklı bir konveks dörtgen alsaydınız yine karşılıklı kenarları birbirine eşit çıkar mıydı?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çıkardı.
<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bilmiyorum.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı problemin ispatında kullandığı yöntemlerini bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı yaparken neleri kullandınız?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Verilen sözel ifadeyi şekle döktüm verilenleri şekil üzerinde yazdım geçmiş bilgilerimi kullanarak sonuca ulaştım.

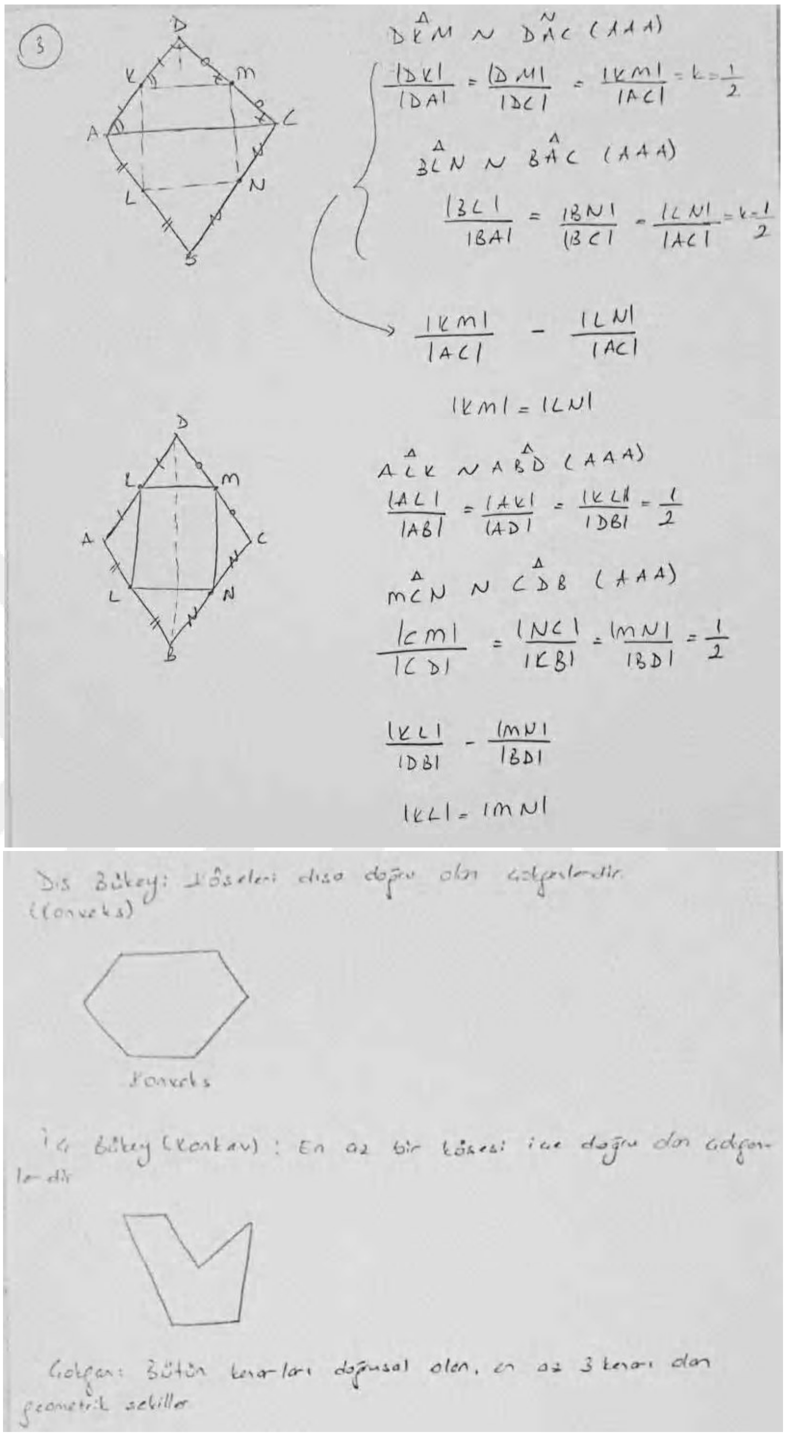
A2 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı şeylerin doğru olduğunu düşündüğünden burada bir ispat yaptığını düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Paralelkenarın özelliklerini söyleyebilir misiniz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Karşılıklı kenarları eşit ve paralel olacak.
<u>Araştırmacı:</u> Peki eşkenar dörtgen bir paralelkenar mıdır?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü onunda karşılıklı kenarları eşit ve paralel.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı eşkenar dörtgenin özelliklerinin aynı zamanda paralelkenarın özellikleri olduğunu düşündüğünden eşkenar dörtgenin paralelkenar olduğunu düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bir şeklin paralelkenar olabilmesi için karşılıklı kenar uzunluklarının birbirine eşit ve karşılıklı kenarlarının birbirine paralel olması yeterli mi?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır. Ardışık açılarının toplamının da 180 derece olması gerekiyor.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı paralelkenar olma şartları olarak karşılıklı kenar uzunluklarının eşit ve paralel olmasının yanında ardışık açılarının toplamının 180 derece olması gerektiğini de belirtmiştir. Şekil 30'da A2 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problem çözümünde kullandığı çözümler verilmiştir.



Şekil 30. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

4.3.3. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A3 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> <u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> *İlk önce bir ABCD dörtgeni çizdim. Bu dörtgenin orta noktalarını birleştirerek KLMN dörtgeni oluşturdum. KL'ye paralel olacak şekilde A'dan C'ye bir doğru parçası çizdim. BLK üçgeni ile BCA üçgenleri benzerdir.*

<u>Araştırmacı:</u> Ne benzerliği var?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Burada kenar-kenar pardon Açı-açı-açı benzerliği var. Buradan oranları yazarsam; $\frac{|BK|}{|BA|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|KL|}{|AC|}$ $\frac{b}{2b} = \frac{x}{|AC|=2x}$
Başka bir benzerlik daha yaptım. DNM üçgeni ile DAC üçgeni benzerdir.(açı-açı-açı) buradan oranları yazarsam
$\frac{|DN|}{|DA|} = \frac{|NM|}{|AC|} = \frac{|DM|}{|DC|}$
$\frac{d}{2d} = \frac{|NM|=x}{2x}$
Bu eşitliklerden |KL| = |NM| olur.
D ile B köşelerini birleştirip KN'ye paralel çizersem ANK üçgeni ile ADB üçgeni benzer olur (açı-açı-açı).
$\frac{|AN|}{|AD|} = \frac{|NK|}{|DB|} = \frac{|AK|}{|AB|}$
$\frac{a}{2a} = \frac{y}{|DB|=2y}$ *Tersten baktığımızda CML üçgeni ile CDB üçgeni benzer olur (açı-açı-açı benzerliği.*
$\frac{|CM|}{|CD|} = \frac{|ML|}{|DB|} = \frac{|CL|}{|CB|}$
$\frac{d}{2d} = \frac{|ML|=y}{|DB|=2y}$ *Bu eşitliklerden |NK|= |ML| olur. Buradan karşılıklı kenarların birbirine eşit ve paralel olduğunu bulduk bundan dolayı paralelkenar olduğunu gösterir.*

A3 Kodlu Öğretmen Adayı ispatı iki aşamada yapıp geçmiş bilgilerini kullanarak çözümü doğru yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Farklı bir konveks çokgen alsaydık aynı şeyler çıkar mıydı?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çıkardı yine. Konveks. Çıkmazdı.
<u>Araştırmacı:</u> Konveks ne demek?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Konveks bir iç açısı nasıl tanımlasam… Şu an aklıma gelmedi de. Bilmiyorum.

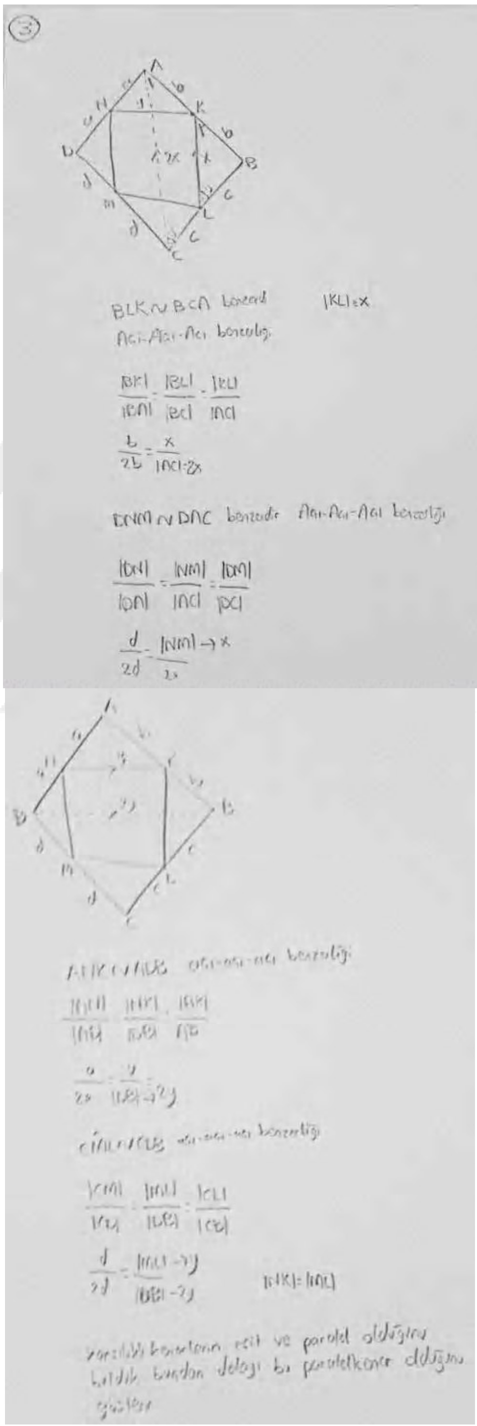
A3 Kodlu Öğretmen Adayı konveks tanımını bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Genel olarak benzerlik oldu yine çizdiğim paralellerden benzerliği kullandım.
<u>Araştırmacı:</u> İspat yöntemlerinden hangisini kullandınız?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tam bilmiyorum.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı üçüncü problemin ispatında kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yapamam.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Düşünüyorum.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yine oranlardan paralellikten yöndeşlikten belli bir paralel çizdim bu yaptıklarım belli kurallar çerçevesinde. Geçmiş bilgilerimi kullandım. Paralelkenarın tanımını biliyorum.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı geçmiş bilgilerinin doğru olduğundan emin olduğu için burada bir ispat yaptığını düşünmektedir. A3 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin ispatında kullandığı yazılı kâğıtları Şekil 31'de verilmiştir.



Şekil 31. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

4.3.4. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A4 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Bu soruyu yapamadınız herhalde.
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet yapamadım.
Araştırmacı: İspata başlayamama, devam ettirememe ve ispatı tamamlayamama sebebiniz nedir?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Aslında dörtgen dediği için bu çok geniş bir kavram olur kare değil dikdörtgen değil... Benzerlik falan bulamadığım için yapamadım.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı kare ve dikdörtgenin dörtgen olduğunu düşünmemektedir. Benzerlik olmayan bir durumda ya da kendisinin benzerliği göremediği durumlarda ispat yapamayacağını düşünmektedir.

Araştırmacı: Neden bir strateji geliştiremediniz?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Dediğim gibi benzerlik bulamadım, paralellik bulamadım eşit açı bulamadım.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı verdiği cevaplarla her ispatın benzerlikten ve paralellik özelliklerini kullanarak yapılabileceğini düşünmektedir.

Araştırmacı: Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Belki bir şekil falan olsaydı.
Araştırmacı: Şekli çizmişsiniz ama hocam.
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Çizdim ama doğruluğundan emin değilim bilmiyorum biraz daha görsel bir şeyler olsaydı yapabilirdim sanki.

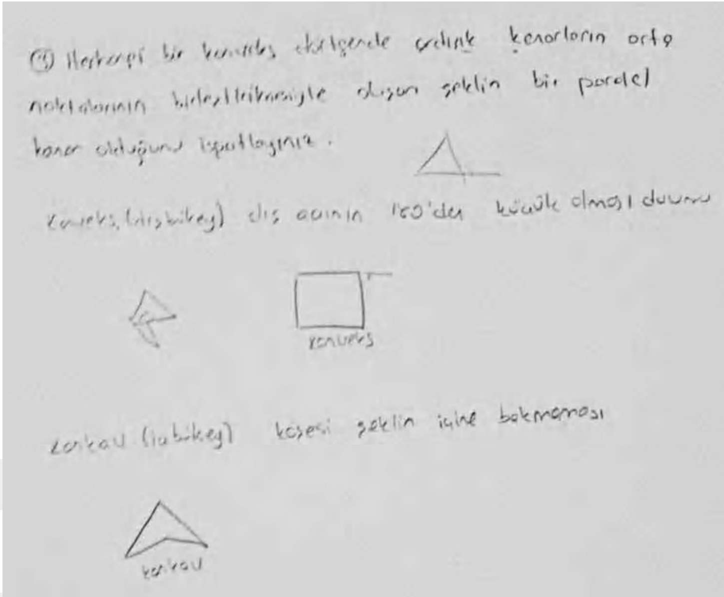
A4 Kodlu Öğretmen Adayı istenilen konveks çokgeni doğru çizdiği halde çizdiği şeklin doğruluğundan emin olamadığından şekil verilseydi yapabilirim demiştir.

Araştırmacı: Konveks ne demek?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Dışbükey.
Araştırmacı: Dışbükey ne demek?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Konveks (dışbükey) dış açının 180 dereceden küçük olması.
Araştırmacı: 180 dereceden büyük olursa ne olur?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Şu şekilde olur (şekil çizdi).

A4 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaba ve çizdiği şekle bakılırsa dış açı kavramını bilmediği söylenebilir. A4 Kodlu Öğretmen Adayı dış açısının ölçüsü 180 dereceden küçük olmalı demiştir. Bu da A4 Kodlu Öğretmen Adayının çokgenin bir iç ve dış açısının toplamının 180 derece olduğunu bilmediğini göstermektedir.

Araştırmacı: Konveks bir şekil çizebilir misiniz?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Tabi ki.
Araştırmacı: Konkav ne demek?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Konkav (içbükey): köşesi hiçbir şekilde içeri doğru bakmayacak nasıl anlatayım?

A4 Kodlu Öğretmen Adayı verdiği cevaba ters bir şekil çizmiştir. A4 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problem çözümünde kullandığı çizim Şekil 32'de verilmiştir.



Şekil 32. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

Araştırmacı: *Dış açısının ölçüsü 180 dereceden büyük olabilir mi?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Olmuyor sanırım olabilir mi?*
Araştırmacı: *Neden?*
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Burada zorlandım aslında tam olarak anlamlarını öğrenememişiz.*

Sonuç olarak A4 Kodlu Öğretmen Adayı konveks ve konkav kavramlarını şekil olarak çizebilmekte fakat tanım noktasında sıkıntı yaşamaktadır diyebiliriz.

4.3.5. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A5 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı: *Herhangi bir konveks dörtgen çizip orta noktalarını birleştirdim. Ben bu soruda yine benzerlik kullandım, aklıma benzerlik geldi. İlk başta çizdiğim konveks çokgene ABCD ve içinde oluşan paralelkenara da KLMN dedim. B ile D köşelerini birleştirip |KL|'na bir paralel doğru parçası çizdim. Bunu neden çizdim? Kenarların orta noktası olduğundan* $\frac{1}{2}$ *vardır. Yani benzerlik kullandım.*
Araştırmacı: *Hangi üçgenler benzerdir? Yazabilir misiniz?*
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: *AKL üçgeni ile ABD üçgeni yine aynı şekilde tersten baktığımızda da CNM üçgeni ile CBD üçgeni benzerdir. Paralelkenarın üst kenarlarına bakmak için bunları çizdim aynı şekilde sağdan da var.*
Araştırmacı: *Bu çizimi yapınca ne yapmış oldunuz?*

<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı</u>: Ben buradan $\frac{1}{2}$ oran olduğunu buldum. Buradan |KL|=m dersem |BD|=2m olması gerekir. Alt taraftan baktığımızda da |BD|=2m ise |NM|= m çıkar. Yukarıda yaptıklarımın aynısını A köşesi ile C köşesini birleştirerek yaparsam da |ML|=n ise |AC|=2n olur. |AC|=2n ise de |KN|=n olur. Paralelkenarda karşılıklı iki kenar birbirine eş ve paralel olduğundan dörtgenin içine çizdiğim şekil paralelkenar olmuş oldu.
<u>Araştırmacı:</u> Peki hocam paralelliği gösterdiniz mi?
<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı</u>: Evet paralelliği göstermiş olduk.
<u>Araştırmacı:</u> Nasıl?
<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlikten dolayı.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle dökmüş ardında iki aşamada (hem karşılıklı kenarların eşit uzunlukta hem de paralel olduğunu gösterip) ispatını tamamlamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tümdengelim.

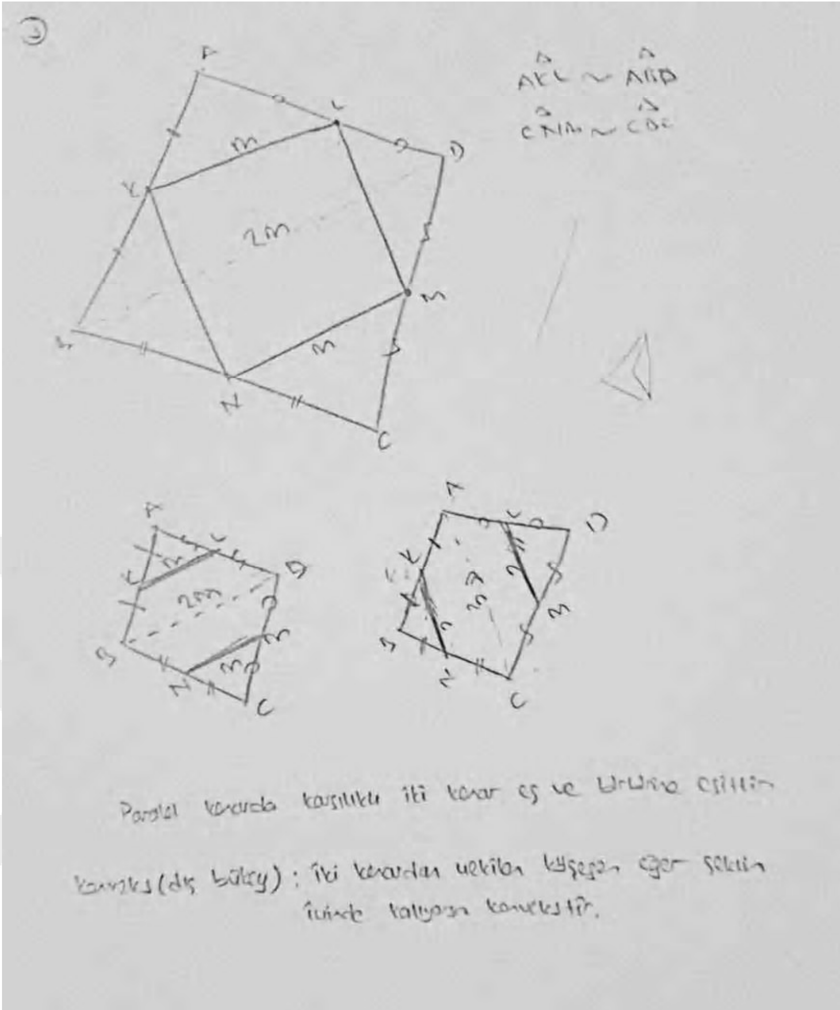
A5 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı yöntem hakkında genel bir şey söylemiştir. İspat sürecinde kullandığı yöntemi bilmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yapamam.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet düşünüyorum.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bana verilen tüm özellikleri göstermiş oldum.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı istenilenleri gösterince ispat yaptığını düşünmektedir bunların bir bilimsel temele dayanmasını yok saymış gibi görünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Karşınızdakini yaptıklarınızın doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet edebilirim.
<u>Araştırmacı:</u> Konveks ne demek?
<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Konveks dış bükey. İki kenardan çekilen köşegen eğer şeklin içinde kalıyorsa konvekstir. Ama konkav çokgenlerde köşegen şeklin dışında kalır.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı konveks ve konkav tanımlarını doğru yapmıştır. A5 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problem çözümünde kullandığı çizimler ve yazılı kâğıt Şekil 33'de verilmiştir.



Şekil 33. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

A üniversitesinde öğrenim gören beş ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının üçüncü problemin çözümüne bakılırsa öğretmen adaylarının dördü sözel olarak verilen ifadeyi doğru bir şekilde şekle döküp ispatı yapmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının biri ise soruyu şekle dökememiş ve ispatı yapamamıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandığınız ispat yöntemi nedir sorusuna verdikleri cevaplara bakılırsa ilköğretim matematik öğretmeni adayları ispat yapabildikleri halde kullandıkları ispat yöntemini bilmemektedirler. Problemi cevaplayamayan ilköğretim matematik öğretmeni adayları soru sözel olarak değil de şekil olarak verilseydi yapabilirdim cevabını vermiştir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının konveks ve konkav nedir sorusuna verdikleri cevaba bakılırsa bazılarının doğru tanım yaptığı ama tanımlarının akademik olarak eksik olduğu bazılarının tanımı doğru yapıp şekil çizme konusunda yanlış yaptıkları bazılarının ise tanımı yanlış yaptıkları görülmektedir.

4.3.6. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B1 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Bu ispatı yapamadınız boş bıraktınız.
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet yapamadım. Boş bıraktım.
Araştırmacı: Peki hocam konveks ne demektir?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Ya şekil olarak.
Araştırmacı: Yok tanım olarak sordum?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Yani nasıl söyleyeceğimi bilemedim ama şekil olarak gösterebilirim.
Araştırmacı: Tamam hocam konveks şekiller çizebilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Tabi ki.
Araştırmacı: Konkav ne demek ona da örnek şekil çizebilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Tabi ki.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı üçüncü problemde sorulan konveks ve konkav kavramlarının tanımını bilmediği gibi şekillerini de yanlış çizmiştir.

Araştırmacı: Bu soruda ispata başlayamama ve devam ettirememe sebebiniz nedir?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Konveks konkava göre biraz daha zor geldiği için başlayamadım. Paralelkenar olduğunu ispatlayamadım.
Araştırmacı: Peki neden bir strateji geliştiremediniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Belli bir sebebi yok ama bu ispatı yapamazdım.
Araştırmacı: Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Konveks bir şekil verilebilirdi.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı bu problemde konveks bir dörtgen verilseydi soruyu yapabileceğini söylemiştir. B1 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemde kullandığı görsel çizimler Şekil 34'de verilmiştir.

Şekil 34. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

4.3.7. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B2 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Üçüncü soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz hocam? İspata başlamadan önce konveks ne demektir?
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: Dış bükey iç bükey değil yani kenarları dışarda olacak.

B2 Kodlu Öğretmen Adayının dışbükey kavramının tanımına ilişkin verdiği cevaba bakılırsa dışbükeyin isminden yola çıkarak kenarları dışarda olacak yanıtını vermiştir.

<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> ABCD dörtgeni çizdim. Kenar orta noktaları belirleyip birleştirdim. AEF üçgeni ile ABF üçgeninde açı-açı-açı benzerliğinden dolayı

$\frac{2k}{a+b+c} = \frac{1}{2}$

4k= a+b+c oldu.

GCH üçgeni ile BCD üçgeninde açı-açı-açı benzerliğinden dolayı

$\frac{2m}{a+b+c} = \frac{1}{2}$

4m= a+b+c oldu.

Yukarıdaki eşitlikleri kullanırsam

4k=4m

k=m buldum.

Aynı şeyleri DFH üçgeni ile DAC üçgeninde açı-açı-açı benzerliğinden dolayı

$\frac{2t}{x+y+z} = \frac{1}{2}$

4t= x+y+z oldu.

EBG üçgeni ile ABC üçgeninde açı-açı-açı benzerliğinden dolayı

$\frac{2n}{x+y+z} = \frac{1}{2}$

4n= x+y+z oldu.

Yukarıdaki eşitlikleri kullanırsam

4t=4n

t=n oldu.

Paralellikten açılarda eşit oldu. Karşılıklı kenarları birbirine eşit, paralel ve karşılıklı açıları birbirine eşit olduğundan paralelkenar oldu.

B2 Kodlu Öğretmen Adayının çözümüne bakılırsa bir ispat yaptığı söylenebilir. B2 Kodlu Öğretmen Adayı ilk önce sözel olarak verilen soruyu şekle dökmüş, ispatını iki aşamada inşa etmiş ve gerekli benzerlikleri doğru olarak kullanarak kenar orta noktaların birleşimiyle oluşan şeklin karşılıklı kenar uzunluklarının eşit olduğunu ve karşılıklı açıların ölçülerinin eşit olduğunu gösterip ispatını tamamlamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu yaptığınızın ispat olduğuna inanıyor musunuz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet inanıyorum.

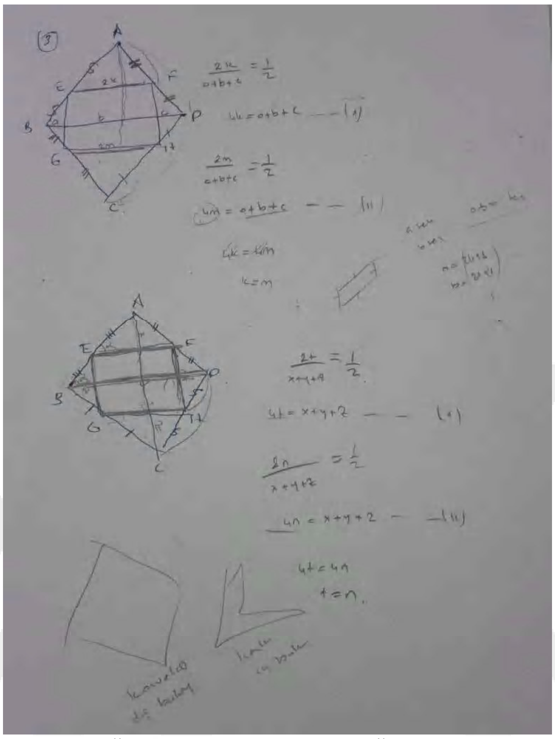
B2 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarının eski bilgilerine dayandığından dolayı bir ispat yaptığını düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı farklı bir yöntemle yapabilir misiniz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yapamam hocam.
<u>Araştırmacı:</u> Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ederim evet.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı ispatı yaparken kullandığı benzerlik teoremlerinden emin olduğundan karşısındaki kişiyi bu ispatın doğruluğuna ikna edebileceğini düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda hangi ispat yöntemini kullandınız?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlik. Thales teoremi.
<u>Araştırmacı:</u> Bu söyledikleriniz ispat yöntemi mi?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır hocam.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı aslında ispat türlerini bilmemektedir ve bildiği teoremleri ispat türü olarak kabul etmektedir. Şekil 35'de B2 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 35. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

4.3.8. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B3 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> *Araştırmacı:* *Üçüncü soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?*
> *B3 Kodlu Öğretmen Adayı:* *İlk önce bir çokgen çizdim daha sonra çokgenimi isimlendirdim, LNTM. Çokgenin karşılıklı kenar uzunlukları eşittir. Bu çokgeni nasıl paralelkenara dönüştürürüm diye düşündüm ve bunu çizdim. Paralelkenar oluşturduğumu varsaydım. Açıları isimlendirdim. MCL üçgeni ile NAT üçgenleri eş üçgenlerdir. Buna kenar-açı-kenar bağıntısına göre karar verdim. Diğer üçgenler için düşünürsem NDL üçgeni ile MBT üçgenleri de eş üçgenlerdir. Bu eşliğe de kenar-açı-kenar bağıntısını kullanarak karar verdim. İlk eşliği düşünürsek*
> $|NT| = |ML|$
> *İkinci eşliğe bakarsam da*
> $|NL| = |TM|$
> *Olacak şekilde iki veri elde ettim. Bu uzunluklar eşit olduğundan şekil paralelkenardır diyebilirim.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı ilk önce dışbükey bir şekil çizeceği yerde önce içerde oluşan şekli yani paralelkenarı çizmiş bu şeklin karşılıklı açıların ölçüsünün eşit olduğunu varsayıp ispatını yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda hangi ispat yöntemini kullandınız?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Aynı şekilde deneme-yanılma yaptım.

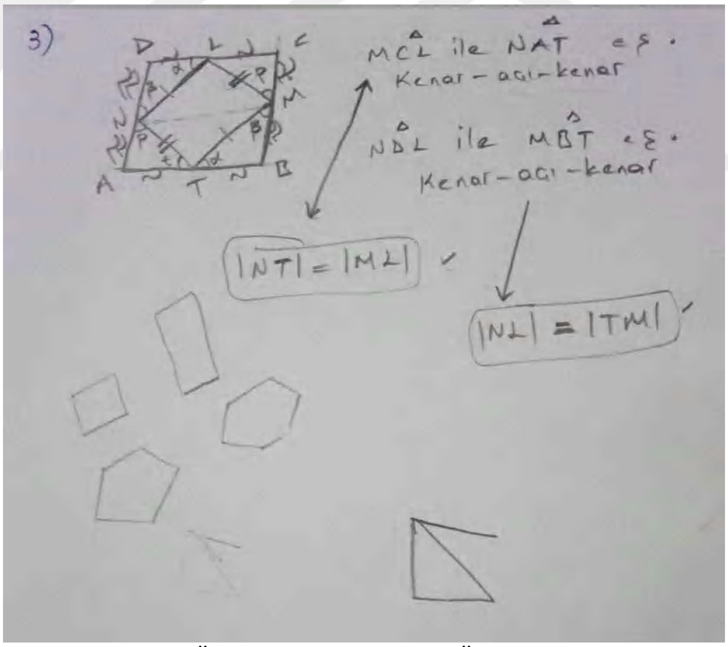
B3 Kodlu Öğretmen Adayı ispat türlerini bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruyu farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yapamam hocam.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı</u>: Evet hocam. Çünkü iki eşlik kullanıp ispatladım.
<u>Araştırmacı:</u> Konveks ne demektir?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bunun tersi de var konkav. Konveks kavramı kare, dikdörtgen gibi yani içine bükülmeyendir.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı konveks kavramının tanımını bilmemektedir fakat kare ve dikdörtgenin konveks olduğunu bildiğinden dolayı bu çokgenlerin şeklini düşünerek bir tanım yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet. Çünkü ben mantıken iki üçgenin eşliğinden bahsettim içime sindi yani.

Şekil 36'da B3 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 36. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

4.3.9. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B4 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Üçüncü soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tabi hocam.
<u>Araştırmacı:</u> İlk önce konveks ne demektir? Tanımını yapabilir misiniz?

B4 Kodlu Öğretmen Adayı: İç açılarının ölçüleri toplamının 360 derece olması ve karşılıklı açılarının ölçülerinin birbirine eşit olmaması.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı konveks kavramını bilmemektedir.

Araştırmacı: Bütün dörtgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı 360 derece o zaman bütün dörtgenler konveks mi?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet konvekstir.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı bütün dörtgenleri konveks kabul ederek hatalı bir söylemde bulunmuştur.

Araştırmacı: Peki konveksin zıttı bir kavram duydunuz mu?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Duydum konkav.
Araştırmacı: Konkavlık tanımını yapabilir misiniz?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: İç açılarının ölçülerinin toplamı 360 derece ve karşılıklı kenar uzunlukları eşit olması.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı konkav tanımını da bilmemektedir.

Araştırmacı: Tamam devam edebilirsiniz?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben önce bir dikdörtgen çizdim. Kenar orta noktalarını birleştirdim ve eşit olan uzunlukları x ve y olarak yazdım. Pisagor teoreminden $|GL| = |HK|$ ve $|KL| = |GH|$ yazdım. Şeklin karşılıklı kenarları birbirine paralel dedim.
Araştırmacı: Bu paralelliğe nasıl karar verdiniz?

B4 Kodlu Öğretmen Adayı kendi istekleri doğrultusunda paralellik almıştır.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Bilmiyorum hocam.
Araştırmacı: İçerde oluşan GHKL dörtgeni nasıl bir dörtgen?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Paralelkenar.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı oluşan şekle paralelkenar demiştir ama oluşan şekil karedir.

Araştırmacı: Neden? Bu şeklin bütün kenarları mı eşit yoksa karşılıklı kenarları mı eşit?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Karşılıklı kenarları. Paralelkenar olmuyor.
Araştırmacı: Bu soruda ispatı tamamladığınızı düşünüyor musunuz?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Düşünmüyorum çünkü yeteri kadar açıklama yapmamışım.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı bu soruda bir ispat yapmadığını düşünmektedir ki yapmamıştır.

Araştırmacı: İçerde oluşan şekle paralelkenardır mı diyorsunuz?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Yani.
Araştırmacı: Bence içerde oluşan şekil bir kare.
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet kare çünkü kenar uzunlukları eşit.
Araştırmacı: Kare bir paralelkenar mıdır?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Dikdörtgen özel bir paralelkenar olduğuna göre.
Araştırmacı: Neden?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben buraya bir dikdörtgen çizdim bu şekli çevirirsem bir paralelkenar olur.
Araştırmacı: Dikdörtgenin özelliklerini sayabilir misiniz?
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: İç açılarının ölçüleri toplamı 360 derece, bir kenarının ölçüsü 90 derece, karşılıklı kenarları birbirine eşit.

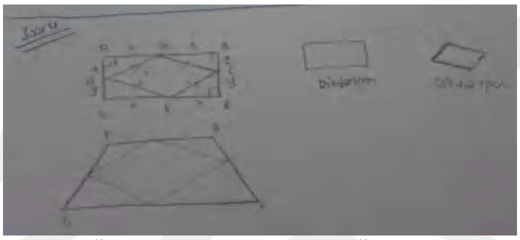
B4 Kodlu Öğretmen Adayı kenarının ölçüsü 90 derece deyip hatalı bir söylemde bulunmuştur.

<u>Araştırmacı:</u> Paralelkenarın özelliklerini söyleyebilir misiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Karşılıklı kenarları birbirine paralel, iç açılarının ölçüleri toplamı 360 derece, fakat bir kenarı 90 derece değil.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı yine "kenarının ölçüsü" ifadesini kullanmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Her dikdörtgen bir paralelkenar mıdır?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Dikdörtgenin tanımını özel bir paralelkenardır diye hatırlıyorum.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yok hocam.

Şekil 37'de B4 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 37. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

4.3.10. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B5 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Üçüncü soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tabi hocam.
<u>Araştırmacı:</u> İspata başlamadan önce konveks ve konkav kavramlarının tanımını yapabilir misiniz?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tamam hatırlamıyorum ama konveks dışa bükük konkav içe büküktü galiba. Bunun için bir kare alıp ispatı yapmaya çalıştım.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı konkav ve konveks kavramlarının tanımını bilmiyor ama diğer adlarına göre tanım yaptığını düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Peki her çizdiğimiz çokgen konveks olur mu?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Olmaz.
<u>Araştırmacı:</u> Aşağıya konveks ve konkav çokgen örnekleri çizebilir misiniz?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çizdim hocam. Konveks kare, konkav yıldız.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı konveks ve konkav şekillerinin örneklerini doğru bir şekilde çizmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Devam edebilirsiniz.
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çokgeni çizip orta noktaları birleştirdim. Çizdiğim şekil kare olduğundan bütün parçaların uzunlukları eşit oldu. Karenin bir açısı 90 derece olduğundan iç tarafta kalan çokgeninde bütün kenarları eşit oldu. Mantıken

düşünürsek orta noktaları birleştiren iki tane uzunluk mantıken paralelmiş gibi duruyor. Diğer kenarlar içinde aynı şeyi söyleyebilirim.
Araştırmacı: İçeride kalan şekil kare mi oldu?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Kare oldu hocam.
Araştırmacı: Açılarının 90 derece olduğuna nasıl karar verdiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Kare olduğu için dedim gerçi eşkenar dörtgende de eşit yanlışlık yapmış olabilirim.
Araştırmacı: Açıları yazın?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Açıları yazarsam 90 derece oldu.
Araştırmacı: Dışarıda aldığımız şekil kare değil de başka bir şekil olsaydı orta noktalarını birleştirip elde ettiğimiz şekil yine kare mi olurdu?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hocam dikdörtgen alsak mantıken çıkardı.
Araştırmacı: Dikdörtgende de çıkar özel bir çokgen olmasın yine kare mi çıkar?

B5 Kodlu Öğretmen Adayı özel bir çokgen alıp ispatı yapmaya çalışmıştır içerde oluşan şekil kare çıkmıştır şekli değiştirip yamuk aldığında sonuca ulaşamamıştır.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Yamuk aldım çıkmadı hocam.
Araştırmacı: Yukarıda kare çıktı değil mi?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Kare bir paralelkenar mı?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet hocam. Çünkü karşılıklı kenarları birbirine paralel.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı karenin bir paralelkenar olduğunu söyleyerek yanlış yapmıştır.

Araştırmacı: Kare ve paralelkenarın özelliklerini ayrı ayrı sayabilir misiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Kare de bütün kenarlar birbirine eşit, açılar 90 derece, karşılıklı kenarlar paralel paralelkenarda ise; karşılıklı kenarlar birbirine paralel karşılıklı açılarda U kuralından 180 dereceye tamamlar.
Araştırmacı: Bu soruda kullandığınız ispat yöntemi nedir?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Yöntemlerin ismini tam hatırlamıyorum hocam söyleseniz hatırlayabilirim.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı ispat yöntemlerini hatırlayamamıştır.

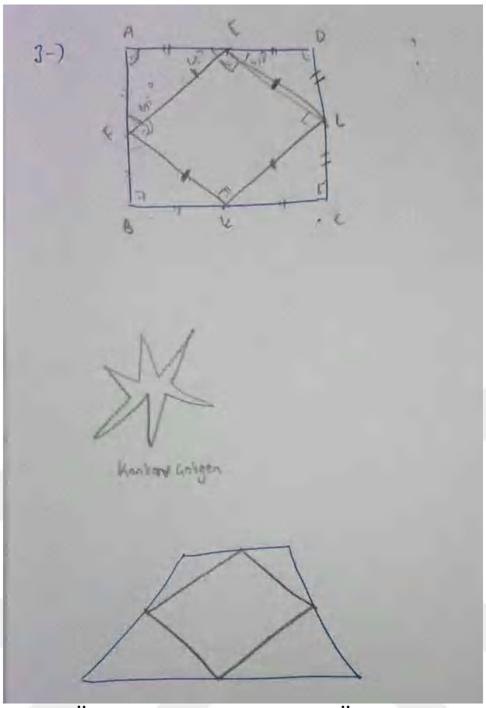
Araştırmacı: Doğrudan, dolaylı, aksine örnek,...
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Doğrudan ispat yaptım.
Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet hocam. Çünkü verilenleri geçmiş bilgilerimi de kullanarak hükme ulaştım.
Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Dikdörtgen alarak da yaparım.
Araştırmacı: Yamuk alsanız yapabilir misiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Yapamazdım hocam.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığının ispat olduğunu söylemesine rağmen farklı bir şekil aldığında sonucun çıkmayacağını söylemiştir.

Araştırmacı: Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hocam yamuğu kullanarak yapın derseniz ikna edemem.

Araştırmacı: *Yok bu yaptıklarınızla?*
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: *İkna edebilirim çünkü bir mantığa dayandırdım eksik bilgiler olabilir ama yanlış bilgi kullandığımı düşünmüyorum.*

Şekil 38'de B5 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 38. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

4.3.11. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

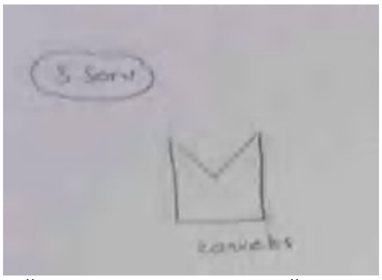
B6 Kodlu Öğretmen Adayı ile üçüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *Konveks ne demektir?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *İç bükey.*
Araştırmacı: *İç bükey ne demek?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *İç tarafına bükülen demek. Çizeyim hocam.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayı konveks kavramının tanımını bilmemektedir.

Araştırmacı: *İspata başlayamama, ispatı devam ettirememe ve tamamlayamama nedeniniz nedir?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *Ben soruyu anlamadım mesela daha açık olabilirdi?*
Araştırmacı: *Nasıl olabilirdi mesela soruyu çizip verse yapabilir miydiniz?*
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet yapabilirdim. Sözel ifadelerden ziyade şekil verilse daha kolay yapılabilir.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayı problemin yeteri kadar açık olmadığını belirtmiştir. Şekil olarak çizilip verilse yapabilirim demiştir. Sözel olarak verilen soruyu şekle dökememiştir bunun nedeni konveks ve konkav kavramlarını bilmemesi olabilir. Şekil 39'da B6 Kodlu Öğretmen Adayının üçüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 39. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Üçüncü Problem Çözümü

B üniversitesinde öğrenim gören altı ilköğretim matematik öğretmeni adayının üçüncü problemin çözümüne bakılırsa birisi sözel olarak verilen ifadeyi doğru bir şekilde şekle döküp ispatı yapmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının beşi ise soruyu şekle dökme de sıkıntı yaşamış ve ispatı yapamamıştır. İspatı doğru bir şekilde yapan ilköğretim matematik öğretmeni adayı kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir ve ispatı yaparken kullandığı benzerlik teoremini kullandığı ispat yöntemi olarak düşünmektedir. Problemi cevaplayamayan ilköğretim matematik öğretmeni adayları soru sözel olarak değil de şekil olarak verilseydi yapabilirdim cevabını vermiştir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının konveks ve konkav nedir sorusuna verdikleri cevaba bakılırsa konveks ve konkav kavramlarının tanımını bilmedikleri söylenebilir. Bazı öğretmen adayları konveks ve konkav şekilleri doğru çizebilmişlerdir.

A ve B üniversitesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının üçüncü probleminin çözümüne ilişkin veriler birlikte değerlendirilirse A üniversitesindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının daha başarılı olduğu söylenebilir. Her iki üniversitedeki öğretmen adaylarının konveks ve konkav kavramlarının tanımını bilmediği söylenebilir. Öğretmen adaylarından bazıları konveks ve konkav şekilleri doğru çizebildikleri halde bu kavramların tanımlarını yapamamışlardır.

4.4. Dördüncü Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

Bu araştırmada kullanılan dördüncü alt problem: “Bir üçgende ağırlık merkezi kenarortayları tepeye 2, kenara 1 oranında böler. İspatlayınız.”

4.4.1. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A1 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben bu soruda rastgele bir ABC üçgeni çizdim. BC kenarına A noktasından kenarortay çiziyorum. Kenarortay |BC|'yı iki eş parçaya böldü ve ben bu noktaya E diyorum. Aynı şekilde C köşesinden |AB|'ye çiziyorum ve bu noktaya da F diyorum. B köşesinden de |AC|'ye çiziyorum ve bu noktaya da D diyorum. Bunların üçünün de kesim noktası ağırlık merkezi. Ben ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası olduğunu biliyorum.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı ağırlık merkezinin tanımını bilmektedir. Dördüncü problemde ağırlık merkezini doğru olarak göstermiştir.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Bizim buradan ulaşmak istediğimiz $\frac{AG}{GE}$ = 1'dir. Ben burada şu şekilde ilerledim. F ve D noktalarını birleştirirsem |FD|//|BC| olur. Burada |AE| ile |FD|'nin kesim noktasına N dedim. Paralel iki doğru arasında iç ters açılar vardır. Ters açılardan dolayı bu açı eşitliklerini yazabilirim. Ben burada açıları yazınca benzerliği yakaladım. 2'ye 1 oranından dolayı |AG|=2k, |GE|= k kabul edelim. |NG| = x dersek |AN| = 2k-x olur.
Ben burada benzerliğe gitmek istiyorum. Benzer olan üçgenleri yazıyorum.

$$(AFN) \sim (ABE) \quad (\text{açı-açı açı})$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{FN}{BE} \text{ ise } \frac{1}{2} = \frac{FN}{2a} \text{ ise } |FN| = a \text{ olur.}$$

Benzer olan diğer üçgenleri kullanırsa

$$(FNG) \sim (CEG) \quad (\text{açı-açı açı})$$

$$\frac{x}{a} = \frac{k}{2a} \text{ ise } \frac{2a}{a} = \frac{k}{x} \text{ ise } 2 = \frac{k}{x}$$

$$|AN| = 2k\text{-}x \text{ ise } |AN| = 2k - \frac{k}{2} = \frac{3k}{2}$$ *olur ve ispatım tamamlanır.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle dökmüş ve ek çizim yapıp geçmiş bilgilerini kullanarak ispatı doğru bir şekilde yapmıştır.

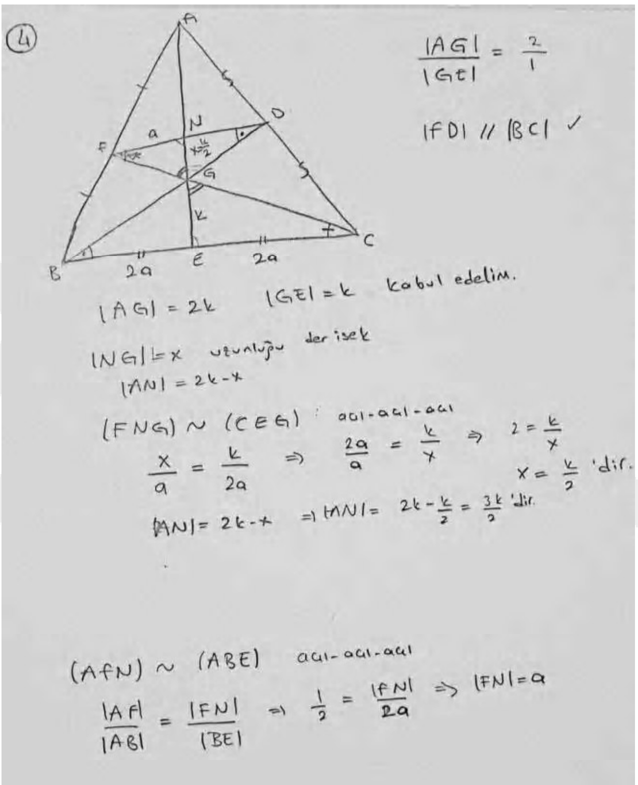
<u>Araştırmacı:</u> Bu soru da hangi ispat yöntemini kullandınız?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Üçgen benzerliğine yönlendim. Tümdengelim kullandım.
<u>Araştırmacı:</u> Tümdengelim nedir?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Verilen bilgileri kullandım.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı tümdengelim kullandığını söyleyip soruyu geçiştirmiştir. Tümdengelimin hangi alt dalını kullandığını söylememiştir. Tümdengelim nedir sorusuna verdiği cevapsa tamamen alakasız bir cevaptır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Düşünmüyorum çünkü karşımdakini ikna edebileceğimi düşünmüyorum.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Aslında ikna edebilirim?
<u>Araştırmacı:</u> Neden?

<u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Kullandığım bilgilerin hepsi geçmişten gelen ve net bilgilerdi.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayının kullandığı bilgilerin geçmişteki doğru bilgiler olduğunu düşündüğünden başta ispat yapmış olmadığını düşündüğü halde sonradan bir ispat yaptığını ve karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini söylemiştir. A1 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü sorunun ispatında kullandığı çizimler ve ispatı Şekil 40'de verilmiştir.



Şekil 40. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem

4.4.2. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A2 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>*A2 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Önce bu soruyu şekle dökelim. Bir üçgen çizdim sonra bu üçgenin kenarortaylarını çizdim. Kenarortayları kullanarak eşit kenar uzunluklarını yazdım. Daha sonra açı-açı-açı benzerliğinden AHC üçgeni ile AKC üçgeni benzerdir dedim ve oranları yazdım.*

$\frac{2c}{4c} = \frac{|HL|}{|KC|}$ *ise |KC| = 2b olduğundan |HL| = b çıkar.*

Yine AMH üçgeni ile ABK üçgeni açı-açı-açı benzerliğinden dolayı benzerdir. Oranları yazdım $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|HM|}{|KB|}$

$\frac{2a}{4a} = \frac{|HM|}{|KB|}$ ise $|HM| = b$ olur. Daha HGL üçgeni ile KGB üçgenleri benzerdir (açı-açı-açı) oranları yazalım.
$\frac{|HG|}{|GK|} = \frac{|HL|}{|BK|} = \frac{b}{2b}$ ise $|HG| = k$ ve $|GK| = 2k$ olur. Yine AMH üçgeni ile ABK üçgenleri benzerdir, (açı-açı-açı benzerliği) oranlara bakalım.
$\frac{|AH|}{|AK|} = \frac{2a}{4a}$ oranına eşit $\frac{1}{2}$ oranı olduğundan $|AH| = |HK| = 3k$ oldu. Ağırlık merkezi tepeye 2 kenara 1 oranında böler demişti. Kenara 2k, köşeye 4k oldu. İspat tamamlanmış oldu (G ağırlık merkezi).

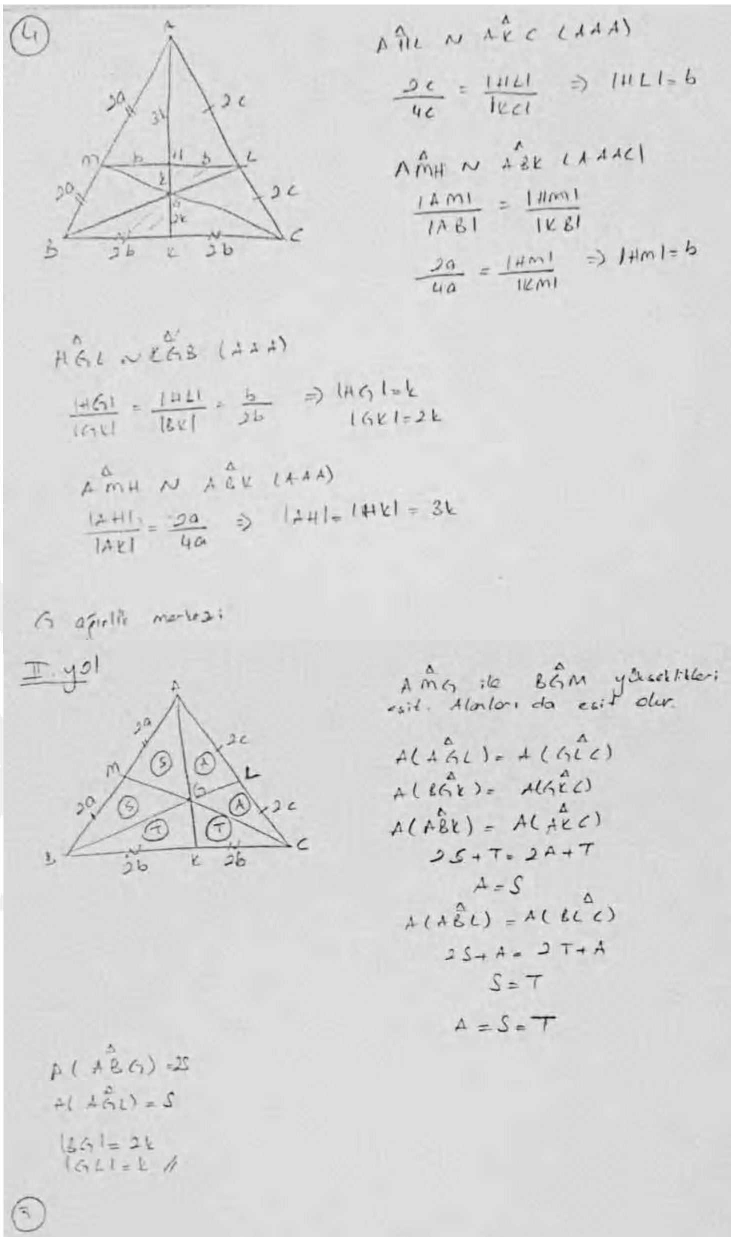
A2 Kodlu Öğretmen Adayı ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası olduğunu bilmektedir. A2 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle döküp ek çizim yaparak ve geçmiş geometri bilgilerini kullanarak soruyu doğru bir şekilde ispatlamıştır.

Araştırmacı: Bu ispatta hangi yöntemi kullandınız?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Dolaylı ispat.
Araştırmacı: Dolaylı ispat ne demek?

A2 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı ispatın türünü ve ispat çeşitlerini bilmemektedir.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Bize verilmeyen şeyleri ortaya çıkardık.
Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Karşınızdakini ikna edebilir misiniz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı kullandıkları kuralların doğruluğundan emin olduğundan bu soruda bir ispat yaptığını ve karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini düşünmektedir. Şekil 41'de A2 kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 41. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet yapabilirim.
<u>Araştırmacı:</u> Tamam arka tarafa yapabilirsiniz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Şekli çizip kenar orta noktalarını belirledim. Alandan yapacak olursak AMG üçgeni ile BMG üçgenlerinin yükseklikleri eşit o yüzden alanları da eşit olur. BMG üçgeninin alanına S dersek AMG üçgeninin alanı da S olur. Diğer üçgenlerde alanları eşit olanları yazarsak
A(AGL) = A(GLC)
A(BGK) = A(GKC)
A(ABK) = A(AKC) yükseklikleri eşit olduğundan
2S + T = 2A + T
A = S
Diğer üçgenlerden

A(ABL) = A(BLC)
2S + A = 2T +A
S =T
A = S = T çıktı.
Araştırmacı: A = S dediniz S = T dediniz ve sonunda A = S = T dediniz. Bunu hangi özellikten söylediniz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Bilmiyorum. A(ABG) = 2S, A(AGL) = S
Alanlar 2S'e S olduğundan kenarlarda |BG| = 2k ve |GL| = k olur.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı geçişme özelliğini bilmemektedir. A2 Kodlu Öğretmen Adayı problemin çözümünü iki farklı yoldan yapmıştır.

4.4.3. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A3 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Şimdi dördüncü soruyu ispatlayalım. Önce şeklini çizeyim. Bir ABC üçgeni çizdik.
Araştırmacı: Ağırlık merkezi ne demek?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Yani şöyle söyleyeyim. Tam olarak bilmiyorum aslında biliyorum da ifade edemiyorum. AC kenarı üzerinde bir K noktası, AB kenarı üzerinde bir N noktası ve BC kenarı üzerinde bir M noktası aldım. Bu noktalar kenar orta noktalar. Bu noktaları birleştirdim. Eşit kenar uzunluklarını çizgiyle, noktayla gösterdim. Bu soruda ben kabulle başladım ağırlık merkezi a'ya 2a ayırsın dedim. BC doğrusuna NK'dan bir paralel çizdim. Bundan sonra oranları kullanmaya çalıştım. Buradan BCG üçgeni ile KNG üçgeni benzer oldu yine (açı-açı-açı) benzerliğinden. Kenarların oranını yazayım yine

$\frac{|NG|}{|GC|} = \frac{|KG|}{|BG|} = \frac{|NK|}{|BC|}$

$\frac{a}{2a} = \frac{b}{2b} = \frac{|NK|=2c}{4c}$

Diğer bir benzerliği de şöyle yaptım. ANK üçgeni ile ABC üçgeni benzerdir (açı-açı-açı benzerliği). Bu iki üçgen arasında da 1'e 2 oran olduğu aşikâr.

$\frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|AL|}{|AM|}$ *ise* $\frac{1}{2} = \frac{|AL|}{3k}$ *olduğundan* $|AL| = \frac{3k}{2}$ *olur.*

$|AL| = \frac{3k}{2}$

$2k - \frac{3k}{2} = |LG| = \frac{k}{2}$

$|GM| = k$

Buradan 3-1-2 olduğunu bulduk ve ispatı tamamladık.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı ağırlık merkezinin tanımını bilmemektedir ama sözel olarak verilen soruyu şekle döküp doğru bir şekilde ispatlamıştır.

Araştırmacı: Bu ispatta hangi yöntemi kullandınız?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Deneme yanılma yani soruya göre 2'ye 1 oranını verdiği için ben direk bunun üzerinden ispatladım.
Araştırmacı: Peki bu hangi ispat yöntemi olur?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Deneme yanılma olur.

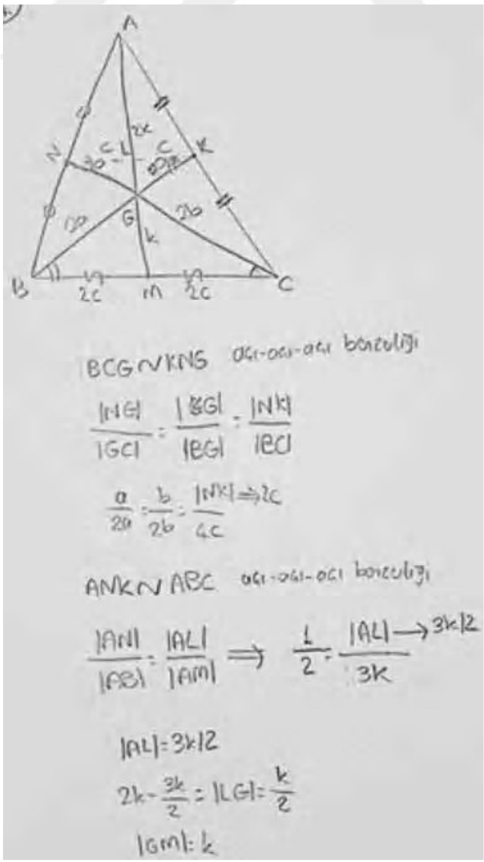
A3 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir. İspat türlerini bu problemde belki de hiç uyuşturamamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Düşünüyorum.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Aslında ben kenarortayın özelliklerini biliyordum ve bu bildiklerimi kullandım.
<u>Araştırmacı:</u> Peki bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Az çok edebileceğimi düşünüyorum.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı ispat yaptığını düşündüğü halde karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinden emin değildir. İspat konusunda şüpheleri olduğunda ikna edemeyeceğini düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı farklı bir yoldan yapabilir misiniz?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır yapamam.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı problemin çözümünün sadece bir tane olduğunu farklı yollardan yapılabileceğini düşünmemektedir. A3 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problem çözümünde kullandığı yazılı kâğıt Şekil 42'de verilmiştir.



Şekil 42. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

4.4.4. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

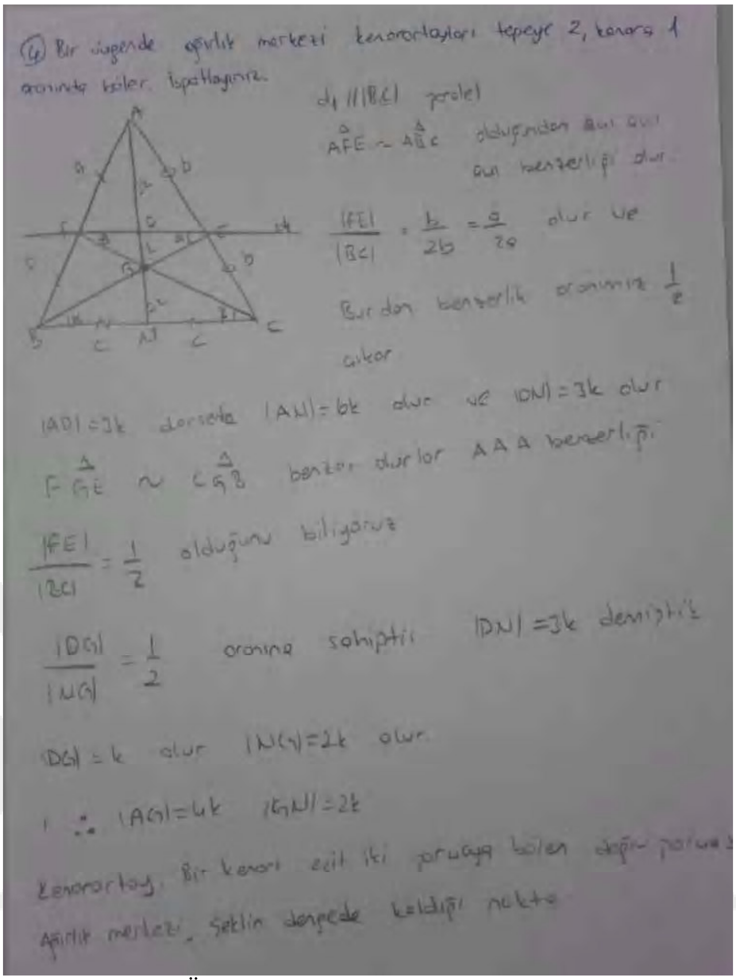
A4 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bir üçgen çiziyorum. Ağırlık merkezinden geçen kenarortayları çiziyorum. Bu üçgen ABC üçgeni olsun. Kenar orta noktaları F, E, N diye isimlendiriyorum. F ve E noktalarını birleştirip bir doğru çiziyorum. Bu doğruya d_1 diyorum. d_1 doğrusu BC kenarına paralel olur. AFE üçgeni ile ABC üçgeni benzer olur.
<u>Araştırmacı:</u> Ne benzerliği?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Kenar-kenar-kenar benzerliği olur yok açı-açı-açı benzerliği olur. Daha sonra kenarortaylar ikiye böldüğünden kenarları isimlendirdim. Benzerlikten oranları yazarsam $\frac{|FE|}{|BC|} = \frac{b}{2b} = \frac{a}{2a}$ olur ve buradan benzerlik oranımız $\frac{1}{2}$ çıkar. d_1 doğrusu ile AN doğru parçasının kesiştiği yere D dedim. |AD|= 3k dersem |AN|=6k olur ve buradan |DN|=3k olur. d_1 // |BC| olduğundan Z kuralı var.
<u>Araştırmacı:</u> Z kuralı ne demek?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Z kuralı paralel olduğundan dolayı ters açılar eşit olur. Bir benzerlik daha çıkar.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı ters açıların eşitliğini Z harfine benzediğinden çağrışım yapmasından dolayı bu şekilde isimlendirmiştir. Z kuralı ortaöğretimde ve üniversiteye giriş hazırlık sınavlarında sıklıkla ezberletilen kurallardan biridir.

<u>Araştırmacı:</u> Hangi üçgenler benzer olur?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> FGE üçgeni ile CGB üçgeni benzer olur. (açı-açı-açı benzerliği). $\frac{|FE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ olduğunu bulmuştuk. Buradan $\frac{|DG|}{|NG|} = \frac{1}{2}$ oranına sahiptir. |DN|= 3k demiştik. |DG|= k ve |NG|= 2k olur. Buradan da tepeye 2 kenara 1 oranında bölmüş oldu.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle döküp doğru bir şekilde ispatlamıştır. A4 Kodlu Öğretmen Adayının çözüm sırasında kullandığı çizimler Şekil 43'de verilmiştir.



Şekil 43. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

<u>Araştırmacı:</u> Kenarortay ne demektir?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Kenarortay kenarları eşit iki parçaya bölen ağırlık merkezinden geçen doğru parçası.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı kenarortay tanımını bilmektedir. Ağırlık merkeziyle ilişki kurarak kenarortay tanımını yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Ağırlık merkezi ne demek?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ağırlık merkezi: şeklin dengede kaldığı nokta.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı ağırlık merkezi tanımını bilimsel olarak değil de kelimelerin gerçek anlamını düşünerek yapmıştır. Fizik derslerinde tanım yerine yapılan günlük hayattan verilen örneklerden birisini matematiksel tanım gibi söylemiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tümdengelim mi tümevarım mı karar veremedim benzerlikleri kullandım.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir. Benzerlik aslında bir ispat türü değil ama yöntemleri bilmediğinden cevap verirken kullandığı çözüm stratejisini söylemiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Neden benzerlik kullandınız?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Daha kolay ulaşacağımı düşündüğüm için.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı benzerliğin kendisini sonuca daha kolay ulaştıracağını düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlik kullandım.
<u>Araştırmacı:</u> Benzerlik kullanılan her şey ispat mı oluyor?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı benzerlik kullandığı her şeyin ispat olmadığını söylediği halde benzerlik kullandığı için (yani geçmişte öğrendiği bir şey) ispat yaptığını düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> İspat ne demektir?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bir hipotezin belgelerle ispatlanması herkes tarafından kabul edilen bir sonuca varılması.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı tam olmasa da ispat tanımını yapabilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Hipotez ne demektir?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Doğruluğu veya yanlışlığı fark etmeksizin bir fikir ortaya atma.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez tanımını kısmen de olsa doğru yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Hüküm?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hatırlamıyorum.
<u>Araştırmacı:</u> Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü gayet anlaşılır bir yoldan yaptım.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarının anlaşılır olduğunu ve karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini düşünmektedir.

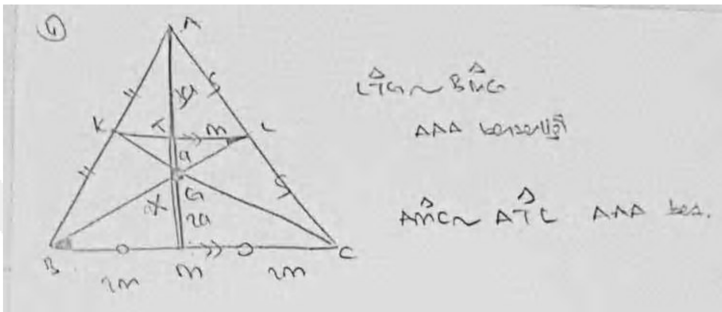
4.4.5. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A5 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>A5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bir tane ABC üçgeni çizelim. Hemen kenarortaylarını çizelim. Kenarortayların kesim noktasına ağırlık merkezi denir. Ağırlık merkezini G harfi ile gösterelim. Kenarortayların kenarları kestiği noktaları K, L, M şeklinde isimlendirelim. K ve L noktalarını birleştirip |BC|'na paralel bir doğru parçası elde ettim. |AC| iki eş parçaya bölündüğünden |TL| ile |MC| arasında da 1'e 2 oran vardır. Buradan |TL|=m ise |MC|=2m olur. |KL| ile |BC| birbirine paralel olduğundan iç ters açılardan dolayı KLB açısı LBC açısına eşit olur. Buradan LTG üçgeni ile BMG üçgeni benzer üçgenlerdir (açı-açı-açı benzerliği). Bu iki üçgen arasındaki benzerlikten |TG|=a dersem |GM|=2a olur. AMC üçgeni ile ATC üçgeni

benzer üçgenlerdir.(açı-açı-açı benzerliği). Bu iki üçgen arasındaki benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olduğundan $|TM|=3a$ ise $|AT|=3a$ olur. Buradan ispat tamamlanmış olur ağırlık merkezi tepeye 2 kenara 1 oranında böldü.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası olduğunu bilmektedir. Kenarlara olan uzunlukların oranlarından bahsetmiştir. A5 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle döküp geçmiş bilgilerini kullanarak soruyu doğru bir şekilde ispatlamıştır. Şekil 44'de A5 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problem çözümünde kullandığı çizimler verilmiştir.



Şekil 44. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

Araştırmacı: Bu ispatta hangi yöntemi kullandınız?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Tümevarım.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı ispatın çeşidini bilmemektedir.

Araştırmacı: Tümevarım ne demek?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Yani ben burada parçalardan küçük üçgenlerden büyük üçgendeki kenarlara ulaşmış oldum.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı tümevarım ispat yönteminin tanımını sözlük anlamına göre yapmıştır.

Araştırmacı: İspat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır bana verilen şeyleri kullanarak istenilen şeyi göstermek istedim.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı ispatı doğru yaptığı halde ispat yaptığını düşünmemektedir.

Araştırmacı: Neyi kullanarak gösterdiniz
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Benzerlik.
Araştırmacı: Neden?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Paralel çekerek benzerliği kullandım.
Araştırmacı: Bu soruyu farklı bir yoldan ispatlayabilir misiniz hocam?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır ispatlayamam.

A üniversitesinde öğrenim gören beş ilköğretim matematik öğretmeni adayının dördüncü problemin çözümüne bakıldığında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının beşi de sorunun ispatını doğru bir şekilde yapmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dördü ispatı bir yoldan yaparken biri iki yoldan ispat yapmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ağırlık merkezi nedir sorusuna verdiği cevaplara bakılırsa dördü ağırlık merkezinin tanımını bilirken biri ağırlık merkezinin tanımını bilmemektedir. İlköğretim matematik öğretmeni adayları yaptıkları ispat türünü bilmemektedirler. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının hepsi ispatı doğru bir şekilde yaptığı halde birisi yaptığı şeyin ispat olmadığını düşünmektedir. İspatı yapan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğu karşısındakileri ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini söylemiştir.

4.4.6. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B1 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *Soruyu sesli bir şekilde okuyup çözebilir misiniz?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tabi ki.*
Araştırmacı: *İspata başlamadan önce bir şey sormak istiyorum. Ağırlık merkezi ne demektir?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Ağırlık merkezi: üçgenin tam ortasındaki noktadır ve bulduğum nokta üçgeni 2'ye 1 oranında ortalar.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı merkez kelimesinin anlamına göre ağırlık merkezi tanımı yapmıştır. Ağırlık merkezinin kenarlara olan uzaklığının oranını ifade edebilmiştir.

Araştırmacı: *O zaman bu nokta üçgenin tam ortasında olur mu?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Olmuyor.*
Araştırmacı: *Tamam hocam ispatınızı yapmaya başlayabilirsiniz.*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *İlk olarak bir ABC üçgeni çizdim daha sonra BC kenarını ortalayacak şekilde A noktasından bir doğru parçası çizdim. Aynı şekilde diğer kenarları ortalayacak şekilde de böldüm.*
Araştırmacı: *Burada ağırlık merkezi neresi oldu?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Burada ağırlık merkezi üçünün kesiştiği nokta.*
Araştırmacı: *Peki neden bu üç doğru parçasının kesiştiği nokta ağırlık merkezi oldu?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yani çünkü yıllardır bize öyle öğrettiler.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası olduğunu bildiği halde bunu ifade edememiş ve yıllardır bize bu şekilde öğrettiler demiştir.

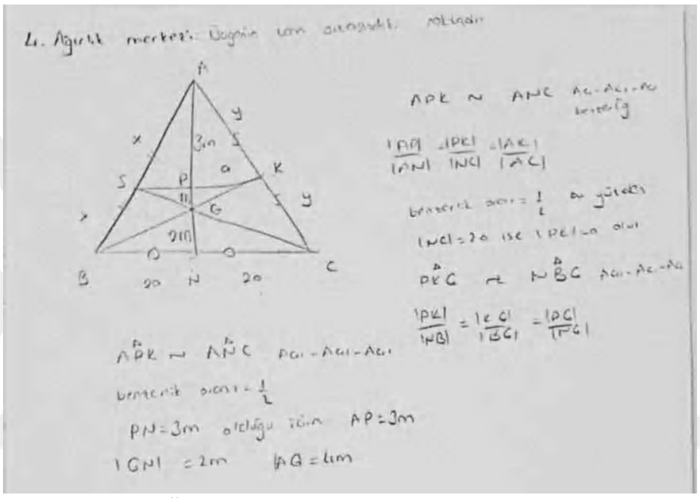
Araştırmacı: *O çizdiğiniz doğru parçaları neydi?*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Kenarortaylar. Kenarortayların kesim noktası olduğu için.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı araştırmacının yönlendirmesiyle ağırlık merkezinin tanımını anlamıştır.

Araştırmacı: *Tamam hocam devam edebilirsiniz.*
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Çizdiğim üç doğru parçasının kesiştiği notaya P noktası diyorum. Daha sonra* $|AK|= y$ $|KC|=y$ $|AS|= x$ $|SB|=x$ $|BN|= 2a$ $|NC|=2a$ *diyorum.*
$|NC|=2a$ *olduğundan* $|PK|=a$ *olur.*

<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü APK üçgeni ile ANC üçgeni benzerdir (açı-açı-açı). Bu benzerlikten dolayı $\frac{AP}{AN}=\frac{PK}{NC}=\frac{AK}{AC}$ oranlarını yazabilirim. Benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olduğundan dolayı $|PK|$=a olur. Aynı şekilde PKG üçgeni ile NBG üçgeni benzer olduğundan kelebek var (açı-açı-açı) $\frac{PK}{NB}=\frac{KG}{BG}=\frac{PG}{NG}$ yazabilirim. Benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olduğundan $|PG| = m$ dersem $|GN|$=2m oldu. Son olarak APK üçgeni ile ANC üçgeni benzer olduğundan dolayı (açı-açı-açı) benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ dir. $|PN|$=3m olduğundan $|AP|$=3m olur. $|GN|$=2m ve $|AG|$=4m oldu ve ispatım bitti.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle döküp doğru bir şekilde ispatlamıştır. B1 Kodlu Öğretmen Adayının çizimleri Şekil 45'de verilmiştir.



Şekil 45. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

<u>Araştırmacı:</u> İspata nasıl başladınız?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Herhangi bir üçgen çizdim ağırlık merkezi dediği için kenarortaylarını kesiştirdim ve ispata başladım.

B1 Kodlu Öğretmen Adayının ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası olduğunu bilmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Hangi ispat yöntemini kullandınız?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Doğrudan ispat.

B1 Kodlu Öğretmen Adayının kullandığı ispat yönteminin doğrudan ispat demesine rağmen doğrudan ispatın hangi çeşidi olduğunu söylememiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Peki bu soruda neden benzerlik kullandınız?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü ağırlık merkezi kenarortayların kesim noktası olduğundan bir eşitlik görüp benzerlik kullandım.
<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır.
<u>Araştırmacı:</u> Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü benzerlik oranlarını kullanarak benden istenen sonucu buldum.

<u>Araştırmacı:</u> Peki sizden istenen sonucu her bulduğunuzda bir ispat yapmış olur musunuz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır olmam.
<u>Araştırmacı:</u> Peki bu yaptıklarınızın hangi özellikleri sağladığı için bir ispat yaptığınızı düşünüyorsunuz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Çünkü yaptıklarımın hepsi bir delile dayanıyor açıortay, kenarortay, ağırlık merkezi. Geçmiş bilgilerimi kullandım.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarını geçmiş bilgilerine dayandırdığından ispat yaptığını düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet edebilirim.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>B1 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Karşıdaki insanın bilgi düzeyi buna müsaitse açıortayı kenarortayı benzerliği bildiği için algılamakta zorluk yaşamayacaktır.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı kullandıkları kuralları karşıdaki insan biliyorsa yaptıklarımla karşıdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilirim demiştir.

4.4.7. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B2 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Dördüncü soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bir ABC üçgeni çizdim. A'dan F'ye kenarortay çizdim. G noktasını ağırlık merkezi aldım. D ile E noktalarını birleştirdim. $|BF|=|FC| = 2x$ dedim. ADE üçgeni ile AFC üçgeni arasında açı-açı-açı benzerliği uyguladım.
$\frac{|DE|}{2x} = \frac{1}{2}$
$2.|DE| = 2x$
$|DE| = x$ oldu.
DEG üçgeni ile FGB üçgeni arasında açı-açı-açı benzerliği uygularsam
$\frac{x}{2x} = \frac{|DG|}{|GF|}$
$2.|DG| = |GF|$
ADE üçgeni ile AFC üçgeni arasındaki benzerliği tekrar kullanırsam
$\frac{a}{a+3t} = \frac{x}{2x}$
$2a=a+3t$
$a=3t$ oldu ve ispatı tamamlamış oldum.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu doğru bir şekilde şekle döküp ispatlamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda hangi ispat yöntemini kullandınız?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Dolaylı ispat.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat türünü bilmemektedir.

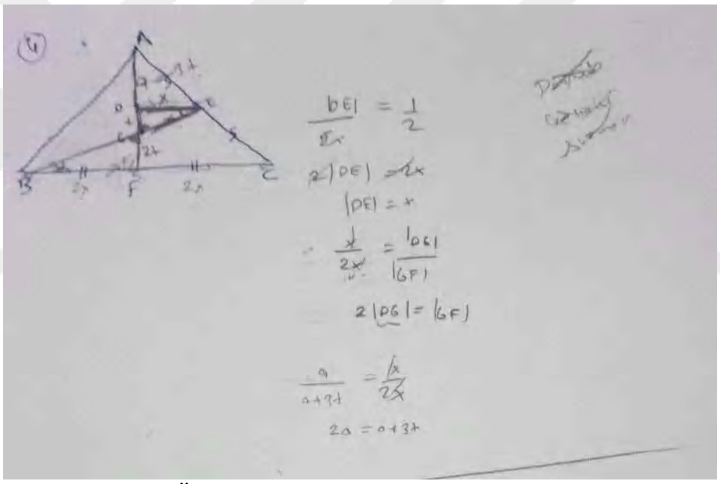
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruyu farklı bir yoldan yapabilir misiniz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yapamam hocam.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Benzerlik kullandım yani bilinen şeyleri kullandım.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı problemin çözümünde doğruluğu ispatlanmış bir benzerlik kullandığından dolayı ispat yaptığını düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Karşınızdakini ifadenin doğruluğunu ikna edebilir misiniz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Karşımdaki benzerliği biliyorsa doğruluğunu kabul eder.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarıyla benzerlik teoremlerini bilen birisini bulduğu sonucun doğruluğuna ikna edebileceğini düşünmektedir. Şekil 46'da B2 Kodlu Öğretmen Adayı'nın dördüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 46. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

4.4.8. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B3 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Dördüncü soruda ispata başlayamama, ispatı devam ettirememe ve tamamlayamama sebebiniz nedir?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ben bu soruda hazır bulunuşluk düzeyimin yeterli olmadığını düşünüyorum. Temel kavramlarda yeterli bilgiye sahip değilim. Bu kuralı biliyordum ama ispatlayamadım.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı temel geometrik kavramlarda yeteri bilgiye sahip olmadığından dolayı bu ispatı yapamadığını söylemiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatı yapabilmeniz için hangi bilgilere sahip olmanız gerekirdi?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Eşlik benzerlik olabileceğini düşündüm ama yapamadım.

Araştırmacı: *Bu soruyla ilgili neden bir strateji geliştiremediniz?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Gördüğümde ben bunu yapamam dedim.*
Araştırmacı: *Size göre bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Üçgeni çizip ağırlık merkezini verse, kenar uzunluklarını verse yapabilirdim diye düşünüyorum. Bu üçgeni, bende çizebildim ama kenar uzunlukları olsa belki yapabilirdim.*
Araştırmacı: *Şu anda versek yapabilir misiniz?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Şu anda yapamam hocam.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı kenar uzunlukları verilse bu soruyu yapabilirim dediği halde araştırmacının şu anda kenar uzunluklarını versem yapabilir misin sorusuna yapamam yanıtını vermiştir.

Araştırmacı: *Kendiniz kenar uzunluğu vererek yapamaz mıydınız?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Üretilebilir gibi geliyor ama işlem karmaşası gözümü korkutuyor.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı dördüncü problemin çözümünü yapmadığı için verilmemiştir.

4.4.9. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B4 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *Dördüncü soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?*
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Ben bu soruda çember çizerek yapmayı düşündüm.*
Araştırmacı: *Çizdiğiniz çember nasıl bir çember oldu?*
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: *İç teğet çember çizdim.*
Araştırmacı: *İç teğet çember dışardan mı teğet olur? Bu üçgene göre nasıl bir çember çizdiniz?*

B4 Kodlu Öğretmen Adayı dış teğet çember çizmesine rağmen karıştırıp içteğet çember çizdim demiştir.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Dış teğet çember oluyor karıştırdım. Çemberin ağırlık merkezini çizdim eşit kenarları yazdım.* $|GO| = |OD|$ *GON açısının ölçüsüne* α *dersem GN yayının uzunluğu da* α *olur. Buradan MN yayının ölçüsü de* α *olur.*
Araştırmacı: *Bunu nereden söylediniz? Yani GON açısı ile MON açısı eşittir mi diyorsunuz?*
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet hocam.*
Araştırmacı: *Neden?*
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Çünkü aynı yayı görürler.*

GON ve MON açıları aynı yayı görmemektedir ama B4 Kodlu Öğretmen Adayı aynı yayı gördüklerini iddia etmiştir.

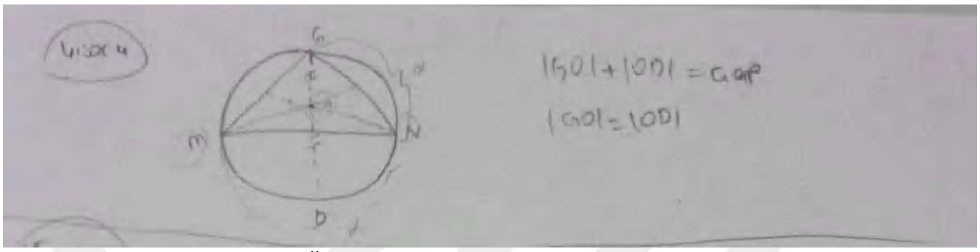
Araştırmacı: *Siz bu üçgeni başlangıçta ikizkenar üçgen mi aldınız?*
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet hocam.*
Araştırmacı: *Neden?*
B4 Kodlu Öğretmen Adayı: *Bilmiyorum hocam.*
Araştırmacı: *Peki bir strateji geliştiremediniz?*

<u>*B4 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Bilgi düzeyimin yeterli olmaması.*

B4 Kodlu Öğretmen Adayı diğer sorularda olduğu gibi kendinin geometri bilgilerinin eksik olduğunu belirtmiştir.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Bu ispatın yapılabilmesi için ne verilmesi gerekirdi?*
<u>*B4 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Her şey yeterli ama benden kaynaklı bilgi düzeyimin yeterli olmamasından dolayı yapamadım.*

Şekil 47'de B4 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 47. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

4.4.10. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B5 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Evet hocam dördüncü soruyu sesli olarak yapabilir misiniz?*
<u>*B5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Ben bu bilgiyi biliyordum birinci sınıfta yapmıştık ama şimdi yapamadım. Şekli çizdim alanlardan yola çıkarak yapılabilirdi ama yapamadım.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Hipotez hüküm ilişkisini neden kuramadınız?*
<u>*B5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Hocam burada hipotez belli aslında söylemiş. Hüküm ulaşmak istediğimiz şey zaten üretemedim yapamadım. Alandan gitmeye çalıştım ama olmadı.*

B5 Kodlu Öğretmen Adayı hipotez ve hüküm kavramlarının tanımını bilmektedir.

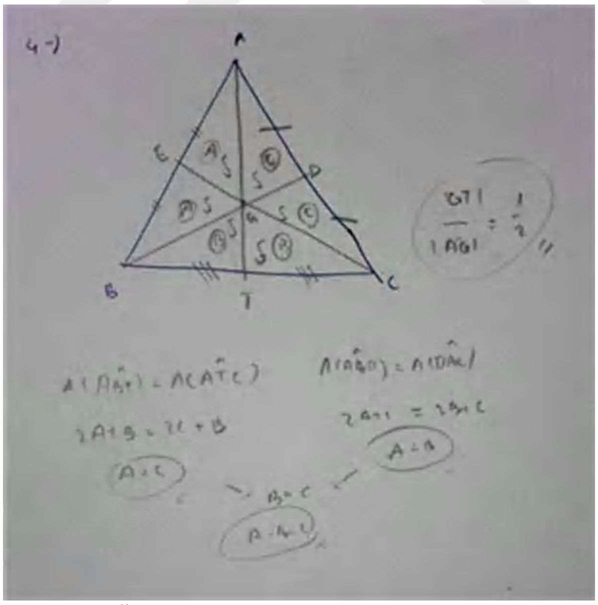
<u>*Araştırmacı:*</u> *Neden bir strateji geliştiremediğinizi düşünüyorsunuz?*
<u>*B5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Geometri bilgim zayıf pratik noktasında eksiklerim olduğu için yapamadım.*

B5 Kodlu Öğretmen Adayı geometri bilgilerinin eksik olduğundan dolayı ispatı yapamadığını söylemiştir.

<u>*Araştırmacı:*</u> *Bu ispatın yapılabilmesi için ne gerekliydi?*
<u>*B5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Birinci sınıfta olsa yapabilirdim ama şu an yapamadım. Bilgisi zayıf olanlar için ekstra bir benzerlik verilebilirdi.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Nasıl bir benzerlik?*
<u>*B5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Açı benzerliği. Şu anki bilgilerde yeterli ama ben çıkaramadım.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Alandan devam ettirseydiniz acaba sonuca ulaşabilir miydiniz?*
<u>*B5 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Alanlar oranını benzerlik oranının karesi diye hatırlıyorum ama.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Tekrar çizip alanlarını yazabilir misiniz?*

B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Alanlarını kendi aralarında eşitliğinden dolayı A, B, C diye isimlendirelim.
Araştırmacı: Tamam alan eşitliklerini yazabilir misiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Tabi hocam.
A(ABT) = A(ATC) olur. Yani
2A+B=2C+B
A=C
Araştırmacı: Başka eşit alanlar var mı?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Var hocam.
A(ABD)= A(DBC)
2A+C= 2B+C
A=B
İki eşitlikten A=B=C oldu.
Araştırmacı: Bu alan eşitliklerini kullansanız sonuca ulaşabilir miydiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: A=B=C=S yazdım.
Araştırmacı: AT doğru parçasından parçalanmış gibi düşünseniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: 1'e 2 oran varmış gibi duruyor hocam. O halde $\frac{|GT|}{|AG|} = \frac{1}{2}$ *olur.*

B5 Kodlu Öğretmen Adayı alanlardan gidileceğini biliyor denemiş ve alandan sonuca ulaşmıştır. Şekil 48'de B5 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 48. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

4.4.11. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B6 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Dördüncü soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?

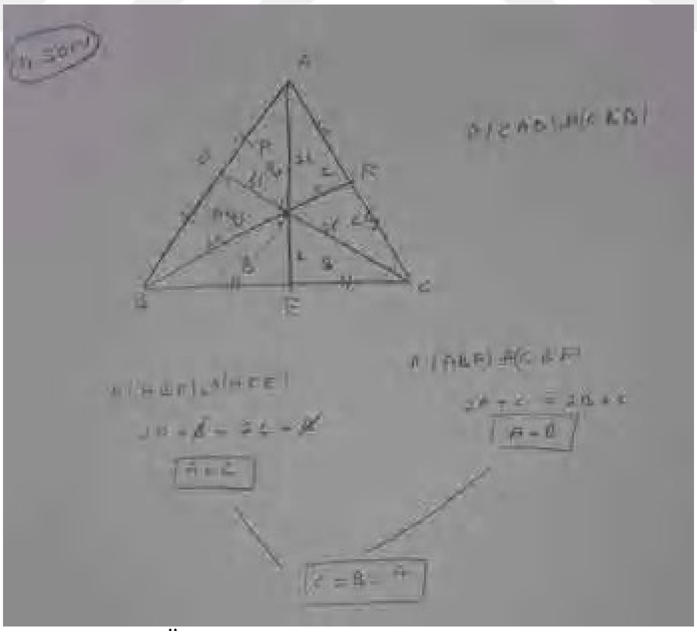
<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ben alan yardımıyla ispatlanabilir yazdım.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruyu yapamamışsınız.
<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet hocam sürem yetmedi yapamadım.
<u>Araştırmacı:</u> Peki şu an süre versek yapabilir misiniz?

<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yaparım hocam
<u>Araştırmacı:</u> Buyurun yapın.
<u>B6 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> İlk önce bir üçgen çizdim. Kenar orta noktaları birleştirdim. Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları kenarlarıyla orantılıdır. Bu özellikten dolayı alanları yazdım.

$A(ABE) = A(ACE)$	$A(ABF) = A(CBF)$
$2A+B = 2C + B$	$2A + C = 2B + C$
$2A = 2C$	$2A = 2B$
$A = C$	$A=B$

Yukarıdaki eşitliklerden C = B = A elde ederim. Geçişme özelliğinden dolayı. Bu eşitlikten dolayı alanları yerine yazarsam ispatı tamamlamış olurum.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı bu soruya zamanım yetmedi yazmış araştırmacının şimdi yeterli zaman versem yapabilir misiniz sorusuna evet yapabilirim deyip, alan yardımıyla soruyu doğru bir şekilde ispatlamıştır. Şekil 49'da B6 Kodlu Öğretmen Adayının dördüncü problem çözümü verilmiştir.



Şekil 49. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Dördüncü Problem Çözümü

B üniversitesinde öğrenim gören altı ilköğretim matematik öğretmeni adayının dördüncü probleminin çözümüne bakıldığında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ikisi de sorunun ispatını doğru bir şekilde yapmış dördü ise ispatı yapamamıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarından bir tanesi soruyu yapamama nedeni olarak zamanım yetmedi demiş araştırmacının şimdi zaman versem yapabilir misin sorusuna evet deyip soruyu doğru bir şekilde ispatlamıştır. Öğretmen adaylarından bir tanesi ise sorunun üçgenlerin alan eşitliğinden yapılacağını söylemiş araştırmacının yönlendirici sorularıyla ispatı doğru bir şekilde yapabilmiştir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ağırlık merkezi kavramının tanımını bilmediği söylenebilir. İlköğretim matematik öğretmeni adayları yaptıkları ispat türünü bilmemektedirler.

A ve B üniversitesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dördüncü probleminin çözümüne ilişkin veriler birlikte değerlendirilirse A üniversitesindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının daha başarılı olduğu söylenebilir. Her iki üniversitedeki öğretmeni adaylarının genel olarak ağırlık merkezi tanımını bilmedikleri söylenebilir.

4.5. Beşinci Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

Bu araştırmada kullanılan beşinci alt problem: "n kenarlı dışbükey bir çokgenin köşegen sayısı $\frac{n.(n-3)}{2}$'dir. İspatlayınız."

4.5.1. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A1 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben bu soruda herhangi bir çokgen çiziyorum. Bunları A, B, C, D, E, F, G diye isimlendiriyorum, bunlar devam ediyor. Herhangi bir köşe seçiyorum bu köşe C olsun.
Araştırmacı: Köşegen ne demek?
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Köşegen; hiçbir şekilde karşılıklı olarak birleştirilmesidir.
Araştırmacı: Tamam onu en son sorup size tanımını yazdırayım.
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Tamam ben bu soruda C köşesinden A, E, F ve G'ye köşegenler çiziyorum. Çizdiğim çokgenim n kenarlı olsun burada C köşesinden B ve D köşelerine köşegen çizemiyorum. Bundan dolayı C köşesinden (n-2) tane köşegen çizilir.
Araştırmacı: (n-2) nereden geldi.
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: Komşularına köşegen çizemediğimiz için. Kendisini de çıkardığımızda bir köşeden (n-3) tane köşegen çizebiliriz. Bu çokgenin bütün köşeleri geçerli olduğundan burada toplam n.(n-3) tane köşegen vardır. Buradaki köşegenleri iki defa saydığımızdan köşegen sayısı $\frac{n.(n-3)}{2}$ *olur.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı (n-3)'ün nereden geldiğini bilmektedir. Köşegen tanımını yapabilmektedir. A1 Kodlu Öğretmen Adayı bir köşeden geçen köşegen sayısından yola çıkarak genelleme yaparak ispatı doğru bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: *Bu ispatta hangi yöntemi kullandınız?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tümevarım.*
Araştırmacı: *Tümevarım yöntemini anlatır mısınız?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tabi ki. Küçük ifadelerden büyük ifadelere ulaşmaktır yani genellemektir.*

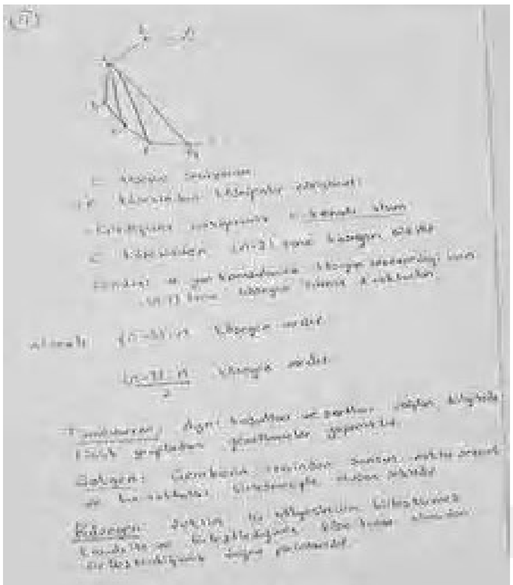
A1 Kodlu Öğretmen Adayı tümevarım kavramının tanımını aşamalarını anlatmadan sözlük anlamıyla yapmıştır.

Araştırmacı: *Tümevarım yöntemi, çokgen ve köşegen kavramlarının tanımını yapabilir misiniz?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tümevarım: Aynı koşulları ve şartları sağlayan bilgilerden küçük gruplardan genellemeler yapmaktır. Çokgen: Çemberin üzerinden sonsuz nokta seçerek ve bu noktaların birleşmesiyle oluşan şekildir.*
Araştırmacı: *Bütün çokgenler sonsuz kenarlı mıdır?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yok sonsuzdan kastım istediğimiz kadar nokta seçebiliriz.*
Araştırmacı: *En az kaç nokta seçeriz?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Dört. Köşegen: Şeklin iç bölgesinden birleştirmek koşulu ile birleştirdiğimiz köşe kenar olmadan birleştirdiğimiz doğru parçalarıdır.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı çokgen kavramını yanlış tanımlamıştır. A1 Kodlu Öğretmen Adayı köşegenin doğru parçası olduğunu bildiği halde tanımını yanlış yapmıştır.

Araştırmacı: *Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet tümevarım yaptım.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı beşinci problemin ispatında hangi ispat yöntemini kullandığının farkındadır. Tümevarım yönteminin tanımını yapabilmektedir. A1 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümünde kullandığı gösterimler Şekil 50'de verilmiştir.



Şekil 50. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

4.5.2. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A2 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bu soru için bir çokgen çizmedim ben. n kenarlı bir çokgende n tane köşe olduğunu biliyoruz. Her köşeden (n-3) tane köşegen çizilir bunu da önceden biliyoruz.

<u>Araştırmacı:</u> Neden bunu açıklayabilir misiniz? Önce köşegenin tanımını yapabilir misiniz?

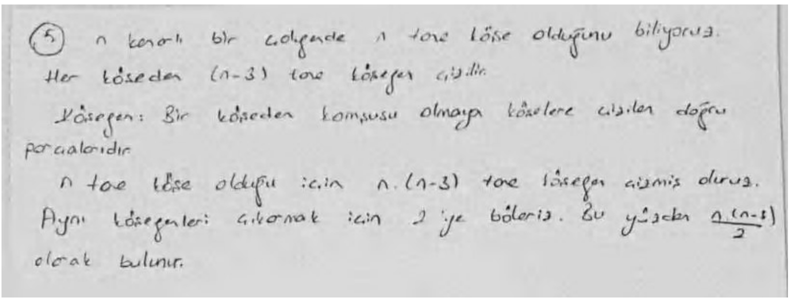
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Köşegen bir köşeden komşusu olmayan köşelere çizilen doğru parçalarıdır.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen tanımını doğru yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Neden (n-3) olduğunu açıklayabilirsiniz?

<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Komşularına çizilemediğinden 2 tanesini çıkardık. 1 tanede kendisine çizilemediğinden çıkardık. Toplamda 3 çıkarmış olduk. n tane köşe olduğu için toplamda n.(n-3) tane köşegen çizilir. Aynı köşegenlerden 2 tane olduğundan 2'ye böleriz.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı formüldeki (n-3)'ün nereden geldiğinin mantığını köşegen tanımından faydalanarak açıklamıştır. A2 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen tanımını doğru bildiğinden ispatı doğru bir şekilde yapmıştır. A2 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problem çözümü Şekil 51'de verildiği üzere çizim yapmadan sadece sözel ifadeler kullanarak yapmıştır.


5 n kenarlı bir çokgende n tane köşe olduğunu biliyoruz.
Her köşeden (n-3) tane köşegen çizilir.
Köşegen: Bir köşeden komşusu olmayan köşelere çizilen doğru parçalarıdır.
n tane köşe olduğu için n.(n-3) tane köşegen çizmiş oluruz.
Aynı köşegenleri çıkarmak için 2 ye böleriz. Bu yüzden $\frac{n.(n-3)}{2}$ olarak bulunur.

Şekil 51. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bilmiyorum.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı beşinci problemin ispatında kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bildiğimiz şeyleri kullanarak sonuca ulaştık.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı herkes tarafından bilinen şeyleri kullandığından bir ispat yaptığını düşünmektedir. Matematiksel ispat yapma konusunda eksiklikleri vardır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet ederim.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruyu farklı bir yoldan ispatlayabilir misiniz?
<u>A2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Hayır ispatlayamam.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı problemin çözümünde kullanabileceği başka bir yöntem ya da yol olmadığını düşünmektedir. Matematiksel problemlerin çözümünde ya da gösteriminde esnek düşünememektedir.

4.5.3. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A3 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı</u>: Ben bu soruda ispatı şöyle yaptım. Önce bir altıgen çizdim ve bir köşeden çizilen köşegen sayısına baktım. A kenarından çizilen köşegenlere baktım zaten komşu olanlar köşegen olmuyor. 6 kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı 3 eksik oluyor.
<u>Araştırmacı:</u> Neden 3 eksik olur?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Aynı kenarlara köşegen çizemeyeceğim için.
<u>Araştırmacı:</u> Köşegenleri kenarlara mı çiziyorsunuz?
<u>A3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Daha doğrusu kenarların birleşimi olan köşelere çiziyoruz. Yukarıda yanlış söyledim de. Aynı kenar üzerindeki köşelere çizemeyeceğim için.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı köşegenleri kenarlara çiziyoruz demiş ama sonrasında köşelere çizdiğimizi söyleyerek düzeltmiştir.

Araştırmacı: Tamam iki tanesine çizemiyoruz dediniz ama (n-3) yazdınız.
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: (n-3) aslında ben bunu deneme yanılma yoluyla buldum. Bir tanede beşgen çizdiğimde mesela hep 3 eksiği çıktı.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı bir köşeden (n-3) tane köşegen çizileceğinin mantığını bilmediği için deneyerek bulduğunu söylemiştir.

Araştırmacı: Tamam hocam devam edebilirsiniz.
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir köşeden çizilen köşegen sayısı (n-3)'tür. Tamamında çizilen köşegen sayısına bakarsak n tane köşeden çizilen köşegen sayısı n.(n-3)'tür. A kenarını baz aldığımızda A köşesinden E köşesine çizdiğimizle E köşesinden A köşesine çizdiğimiz köşegen aynı oluyor bundan dolayı 2'ye böleriz. Köşegen sayısı $\frac{n.(n-3)}{2}$ *olur.*

A3 Kodlu Öğretmen Adayı ispatı yaptıklarını tam olarak bir mantığa dayandıramadan doğru bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: Köşegen ne demektir?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Komşu olmayan bir kenarın köşesinden diğer köşeye çizilen doğru parçasına denir.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen tanımını matematiksel olarak doğru ifadeler kullanmadan soyut olmayan bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: Peki çokgenin tanımını yapabilir misiniz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Çokgen: en az üç kenarı olan kapalı şekle denir.

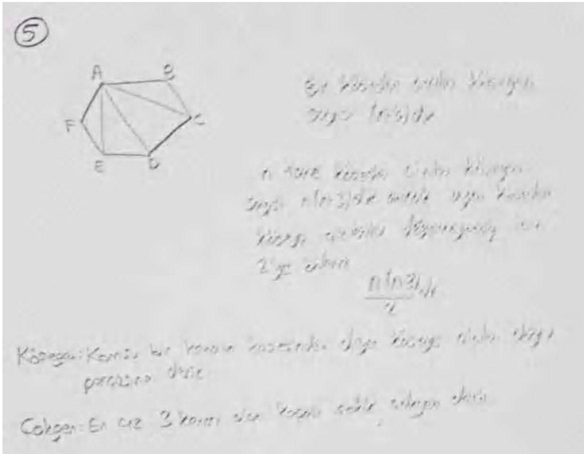
A3 Kodlu Öğretmen Adayı çokgen tanımını doğru yapmıştır.

Araştırmacı: Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Deneme-yanılma önce altıgen aldım sonra beşgen aldım ve genelledim.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı bildiği çokgenlerden başlıyor. Önce aslında beşgenden başlaması gerekiyor ama altıgen ve beşgen üzerinde söylediği $\frac{n.(n-3)}{2}$'nin çalıştığını görünce formülün bütün çokgenler için doğru olduğunu ifade ediyor. Bu yönteme deneme yanılma olarak isimlendiriyor. Bildiklerinden genel formülü göstermiş oluyor.

Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Yok herhalde yapamam.
Araştırmacı: Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Tam olarak değil aslında
Araştırmacı: Neden?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Deneme yanılma yoluyla bulduğum için
Araştırmacı: Peki deneme-yanılma bir ispat yolu değil mi?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: İspat yolu ama yani her zaman çıkar ama karşıdaki kişiyi ikna edemeyebilirim.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı ispatı deneme-yanılma yoluyla yaptığı için bir ispat yapmadığını düşünmektedir. Beşinci problemin çözümünde kullandığı çizimler Şekil 52’de verilmiştir.



Şekil 52.A3 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

4.5.4. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A4 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> *<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> n kenar sayısı zaten (n-3) de bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısı.*
> *<u>Araştırmacı:</u> Neden (n-3) oldu?*
> *<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Komşu köşeler ve kendisi yok.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısının (n-3) olduğunu söylemiştir ve (n-3) ifadesinde 3’ü neden çıkardığımızı mantıklı bir şekilde açıklayabilmiştir**.**

> *<u>Araştırmacı:</u> Köşegen ne demek?*
> *<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bir köşeden komşu olmayan köşeye çizilen doğru parçası. n kenarlı olduğu için toplam köşegen sayısı (n-3) olur. İkiye neden bölüyoruz? Tokalaşma gibi düşünüyoruz mesela ben sizinle tokalaştığımda siz de benimle tokalaşmış olduğunuzdan 2’ye bölüyoruz.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen tanımını en genel ve matematiksel hali ile doğru bir şekilde yapmıştır. A4 Kodlu Öğretmen Adayı bir köşeden başka bir köşeye çizilen köşegen sayısını iki defa saydığımızı tokalaşma örneği vererek açıklamıştır.

> *<u>Araştırmacı:</u> Çokgen ne demek?*
> *<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> 3 ve üçten fazla kenar sayısı olan şekiller.*
> *<u>Araştırmacı:</u> Her şekil olabilir mi?*
> *<u>A4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Olabilir neden olmasın.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı çokgen tanımını eksik olarak yapmıştır.

> *<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Tümevarım.

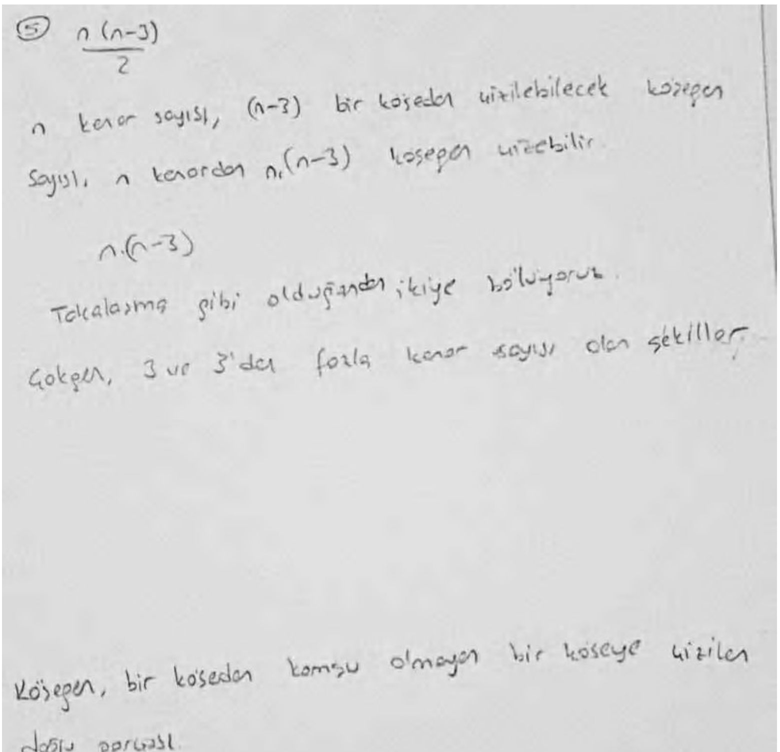
A4 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı yöntemi tümevarım olarak tanımlamıştır.

Araştırmacı: Tümevarım ne demek?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Bunu konuşmuştuk.
Araştırmacı: Bir daha söyleyin hocam.
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Az sayıda deneyerek daha genele ulaşabildiğimiz.
Araştırmacı: Tümevarım basamakları var mı?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Var.
Araştırmacı: Ne var?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Hatırlamıyorum.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı tümevarım tanımını yapamamış ve tümevarım basamaklarını da sayamamıştır.

Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır.
Araştırmacı: Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Güzel bir şekilde açıkladığımı düşünüyorum.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarını mantıklı bir şekilde açıkladığını düşündüğünden bir ispat yaptığını söylemektedir. Farklı yöntemlere ihtiyaç duymamıştır. Şekil 53'de A4 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü sırasında kullandığı yazılar verilmiştir.


5 $\frac{n(n-3)}{2}$

n kenar sayısı, (n-3) bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısı. n kenardan n.(n-3) köşegen çizebilir

n.(n-3)

Tokalaşma gibi olduğundan ikiye bölüyoruz.

Çokgen, 3 ve 3'den fazla kenar sayısı olan şekiller.

Köşegen, bir köşeden komşu olmayan bir köşeye çizilen doğru parçası

Şekil 53. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

4.5.5. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A5 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Aslında ben bunu şekiller üzerinde gösterdim. Bir tane ABCD dikdörtgeni aldım. A kenarından 1 tane köşegen çıkartabiliriz aynı şekilde b kenarından da 1 tane köşegen çıkartabiliriz. O zaman dikdörtgenin iki tane köşegeni vardır. Yani bunu formüle edecek olursak bir kenardan (n-3) adet köşegen çıkar.
Araştırmacı: Neden (n-3) tane köşegen çizilebilir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Bakalım dikdörtgen 4 kenarlı A kenarından 1 tane köşegen çıkıyordu. (n-3) formülünü uyguladığımızda çıkar.
Araştırmacı: Peki dikdörtgende oluyor ama diğer çokgenlerde de olur mu?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Diğer çokgenlerde de uyar zaten ben ispatımı buna göre yaptım altıgen olsun mesela A kenarından (n-3) tane yani 6-3=3 tane köşegen çıkar.
Araştırmacı: Peki hocam bir-iki tanesinde sağlıyor diye hepsinde sağlıyor diyebilir miyiz?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: İstediğimiz kadar bakalım hepsinde sağlar.
Araştırmacı: Bu bakmakla biter mi?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Bitmez ama genelleyebiliriz.
Araştırmacı: 3'ü neden çıkardığımızı biliyor musunuz?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Üçgenden geliyor.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı çeşitli çokgenlerde bir köşeden çizilen köşegen sayılarını sayıp bunun (n-3) olduğunu genelleyebiliriz dediği halde (n-3) ifadesinin mantığını bilmemektedir. Çıkardığı üç sayısını üçgenden geldiğini iddia etmektedir. Üçgen ve 3 sayısı çağrışım yapmaktadır.

Araştırmacı: Tamam hocam devam edebilirsiniz.
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir kenardan (n-3) tane köşegen çıktığını bulduk. Toplamda n tane kenar olduğundan köşegen sayısı n.(n-3) olmalıdır. Ama şöyle bir ayrıntıyı gözden kaçırıyoruz bir köşegeni iki defa saydığımız için toplam köşegen sayısını ikiye bölersek $\frac{n.(n-3)}{2}$ *formülüne ulaşırız.*

A5 Kodlu Öğretmen Adayı olayın mantığını bilmeden ispatı doğru bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: Peki köşegen ne demek hocam?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Komşu olmayan iki köşeyi birleştiren doğrudur.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen tanımının mantığını bildiği halde tanımını yaparken doğru ve doğru parçası tanımını karıştırdığından dolayı tanımını yanlış yapmıştır.

Araştırmacı: Çokgen ne demektir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Çokgen: En az üç doğru ile oluşturulan kapalı şekillerdir.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen tanımında olduğu gibi çokgen tanımının mantığını bildiği halde aynı şekilde doğru ve doğru parçası kavramlarını karıştırdığından dolayı çokgen tanımını yanlış yapmıştır.

Araştırmacı: Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben burada ispattan ziyade gösterme gibi bir şey yaptım.
Araştırmacı: İspatla gösterme farklı mıdır? Ya da gösterme dediğiniz şey nedir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Biz bunu daha teorik olarak gösterecek olursak bir kenardan n'in ikilisi kadar doğru yani iki noktadan şey yani kombinasyondan geliyor zannedersem.
Araştırmacı: Yapabilir misiniz kombinasyondan?

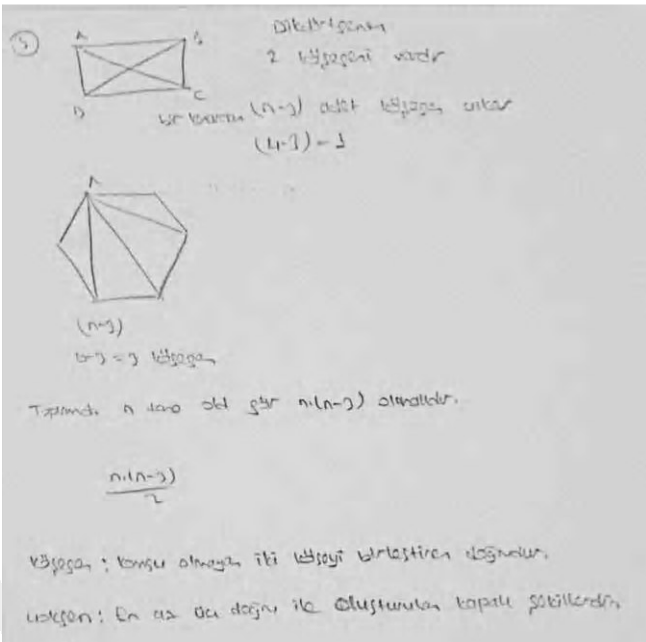
A5 Kodlu Öğretmen Adayı ispatın kombinasyondan geleceğini doğru söylediği halde bunu ikinci yoldan ispatlayamamıştır.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır yapamam.
Araştırmacı: Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Doğruluğunu göstermiş oldum çünkü.

A5 Kodlu Öğretmen Adayına göre bir ifadenin doğruluğunu göstermesi ispat yapmış sayılması için kâfidir.

Araştırmacı: Köşegen uzunluğu ölçülebilir mi?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Gerçeğe uygun çizimler yaptığımızda ölçülebilir.
Araştırmacı: Doğrunun uzunluğu ölçülebilir mi?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır ölçülemez.
Araştırmacı: Peki köşegen bir doğru mudur?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır doğru değil doğru parçasıdır.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı araştırmacının yönlendirici sorularıyla köşegenin bir doğru değil doğru parçası olduğunu söylemiştir. A5 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problem çözümünde kullanmış olduğu çizimleri içeren çözüm kâğıdı Şekil 54'de verilmiştir.



Şekil 54. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

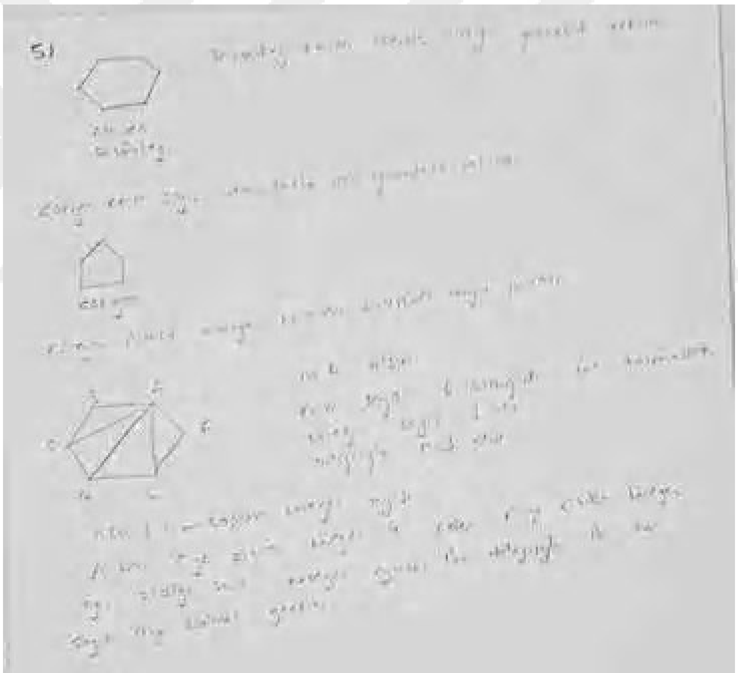
A üniversitesinde öğrenim gören beş ilköğretim matematik öğretmeni adayının beşinci probleminin çözümüne bakıldığında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının beşi de problemi doğru bir şekilde ispatlamıştır. Araştırmacı beşinci problemin tümevarım ispat türünü kullanarak ispatlamalarını beklerken ilköğretim matematik öğretmeni adayları örnekler üzerinden genelleme yaparak ispatlarını tamamlamışlardır, bu durum ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının aldıkları geometri dersinde bu soruyu bu şekilde ispatladıklarından kaynaklanıyor olabilir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının üçü formüldeki (n-3) ifadesinin mantığını açıklarken ikisi açıklayamamıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının birisine çokgen tanımı sorulmamıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ikisi çokgen tanımını doğru yaparken birisi eksik tanım yapmış, birisi de yanlış tanım yapmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğu doğru, doğru parçası, kenar, köşe kavramlarını birbiriyle karıştırmaktadır bu yüzden köşegen tanımını yapmakta zorlanmışlardır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dördü ispat yaptığını düşündüğü halde biri ispat yaptığı halde deneme-yanılma yoluyla yaptım diye ispat yapmadığını düşünmektedir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının verdikleri cevaplara bakılırsa kullandıkları ispat türünü bilmedikleri söylenebilir.

4.5.6. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B1 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Beşinci soruyu sesli bir şekilde okuyup çözebilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: ...
Araştırmacı: Evet dışbükey ne demektir.
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Şekil çizebilirim. Mesela altıgen dışbükeydir.
Araştırmacı: Peki tanımını biliyor musunuz hocam?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Kapalı geometrik şekil yani nokta içerde olmayan şekil olarak gösterebilirim ancak. Kenarları içerde olmayan geometrik şekiller.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı dış bükey tanımını yanlış yapmıştır ancak dış bükey şekli doğru örnek çizim yapmıştır. B1 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci probleme ilişkin yaptığı çözüm ve çizimler Şekil 55'de verilmiştir.



Şekil 55. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

Araştırmacı: Tamam peki çokgen ne demektir?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Kenar sayısı 3'ten fazla olan geometrik şekillere çokgen denir.
Araştırmacı: Örnek verebilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Mesela beşgen.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı çokgen tanımını eksik yapmıştır. Çokgenin kapalı olma durumunu göz ardı etmiştir.

Araştırmacı: Köşegen ne demektir.
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Ardışık olmayan kenarları birleştiren doğru parçası.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı köşegenin tanımını bildiği halde kenar ve köşe kavramlarını karıştırıp yanlış bir tanım yapmıştır.

Araştırmacı: İspata başlayabilirsiniz.
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Dışbükey çokgen dediği için ben bir altıgen çizdim daha sonra bu altıgeni ABCDE diye isimlendirdim. Sonra kenar sayısı 6 olduğundan n=6 olsun dedim. Bir köşesinden çizilen köşegen sayısı 3 oluyor. Dolayısıyla kenar sayısının 3 eksiği oldu. Yani (n-3) oldu.
Araştırmacı: Peki hocam neden (n-3) oldu bütün çokgenlerde (n-3) olur mu? Kenar sayısından 3'ü neden çıkardık sizce?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü ardışık olmayan 3 tane köşe olduğu için. Ya da aynı şekilde ardışık olmayan 3 köşeye gidebildiğim için.
Araştırmacı: Peki bütün çokgenlerde 3 köşeye mi gideceksiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır. Formül olarak bildiğim için yazdım. Toplam köşegen sayısı seçtiğim köşegen 6 kenarlı olduğundan toplam köşegen sayısı 6.(n-3) yani n.(n-3) oldu. A'dan C'ye çizdiğim köşegenle C'den A'ya çizdiğim köşegen aynı olduğu için bu köşegenleri 2 kere saymış olduk bu yüzden de 2'ye bölmem gerekir.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı altıgenin köşegen sayısından yola çıkarak bir köşeden çizilen köşegen sayısının (n-3) olduğunu söylemiştir. Araştırmacı bunun her çokgende doğru olup olmayacağını sorduğunda ise formülü bilip ona göre yazdığını ifade etmiştir. B1 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı ispatın mantığını bilmediği halde problemi doğru bir şekilde ispatlamıştır.

Araştırmacı: Bu ispatta hangi yöntemi kullandınız?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Doğrudan ispat.
Araştırmacı: Ne demek doğrudan ispat?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Burada dolaylı ispat yaptığımı düşünüyorum çünkü yardımcı verilerle buldum cevabımı.

B1 Kodlu Öğretmen Adayının yaptığı ispatın çeşidinden emin değildir. Bu da ispat yöntemlerini bilmediğini göstermektedir.

Araştırmacı: Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü ben herhangi bir geometrik şekil çizerek buldum.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı bir şekil üzerinden deneyerek yaptığı ispatı bütün çokgenlere genelleyebileceğini düşünmektedir.

Araştırmacı: Karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Farklı bir tane daha geometrik şekil çizip ispatlarım.
Araştırmacı: Peki bir tane daha çizdiniz formül sağlandı, bir tane daha çizdiniz formül sağlandı, bir tane daha çizdiniz formül sağlandı. Bu ifadenin doğruluğunu genelleyebilir misiniz? Bütün geometrik şekillerde bu formül işler diyebilir misiniz?

B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Genelleyemem. Bir tane de olsa istisna olabilir. Onu bulamam.
Araştırmacı: Peki o istisnayı çıkarırsak yaptığımız ispat olur mu?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Olabilir.
Araştırmacı: Yani aksi, bir örnek verilirse sizin yaptığınız yine de ispat olur mu?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Olmaz yani olabilir aslında.
Araştırmacı: O zaman hipoteziniz çürür mü?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Aksi bir örnek verildiğinde zaten ispatım kabul olmamış olur. Yaptığım şey ispat olmaz.

B1 Kodlu Öğretmen Adayının ispat hakkında fazlaca çelişkileri vardır. Sürekli olarak başka bir örnek gösterebileceğini savunurken aslında olmayan farklı bir örnek bulunduğundan ispatının çürüyeceğinin farkındadır.

Araştırmacı: Peki bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır yapamam.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı problemin çözümünün sadece bir tane olduğunu farklı yollardan yapılabileceğini düşünmemektedir.

4.5.7. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B2 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Beşinci soruyu sesli bir şekilde çözer misiniz? Bu soruda hangi yöntemi kullandınız?
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: Tümevarım kullandım.
Araştırmacı: Tümevarım yöntemini açıklayabilir misiniz?
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: n'nin herhangi bir değeri için doğru olduğu gösteriyorum. n=k için doğru olduğunu kabul ediyorum, n=k+1 için doğru olduğunu ispatlamam lazım.

B2 Kodlu Öğretmen Adayının verdiği cevaba bakılırsa, tümevarım yöntemini ve tümevarım basamaklarını bildiğini söyleyebiliriz.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı: n=3 ile başladım.
Araştırmacı: Neden üç?
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü çokgen olabilmesi için n en az 3 olur.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı ispatına n=3 diyerek başlamıştır bu düşüncesini ise çokgenin en az 3 kenarlı olması gerektiğini bilmesiyle desteklemiştir. Oysaki bu soruda köşegen sayısı ile ilgilenildiğinden n=4 ile başlanılması gerekmekteydi.

Araştırmacı: Köşegen ne demektir?
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir köşeden ardışık olmayan köşeye çizilen doğru parçası.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen tanımını bilmektedir.

Araştırmacı: Devam edebilir misiniz?

B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *n=3 için* $\frac{3.(3-3)}{2}$ *=0 üçgende köşegen çizilemez doğrudur.*
n=k için $\frac{k.(k-3)}{2}$ *doğru olduğunu kabul edelim.*
n=k+1 için $\frac{(k+1).(k-2)}{2} = \frac{k2-k-2}{2}$ *paya +2k, -2k eklersem.*

$$\frac{k2-k-2-2k+2k}{2}$$

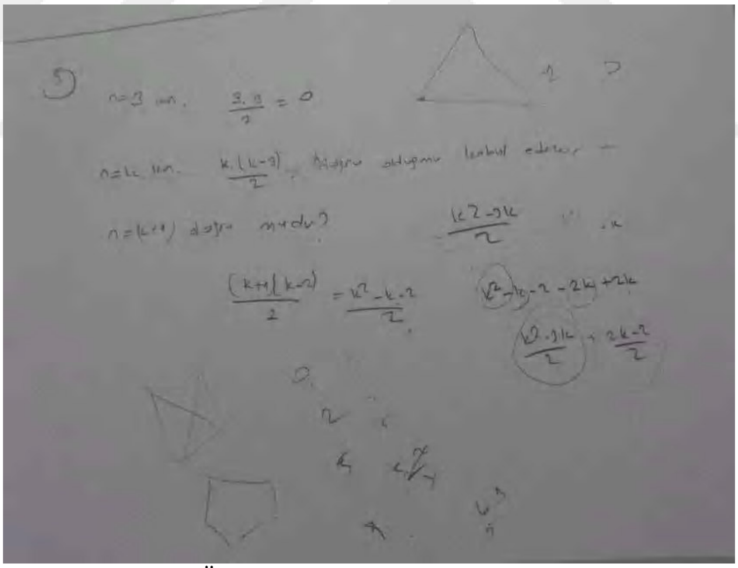
$$\frac{k2-3k}{2} + \frac{2k-2}{2}$$

Burada kaldım.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı tümevarımla ispat adımlarını doğru bir şekilde ilerletmiş fakat n=k+1 için olan son kısmına geldiğinde takılmıştır. Tümevarımla ispatın en zor aşaması olan n=k+1 için doğru olduğunu göstermek kısmı bir önceki aşamada n=k için doğruluğunu kabul etme aşamasını kullanmayı gerektirir. Bu aşamada çoğu kişi zorlanır.

Araştırmacı: *Tümevarım adımları neden ilerletemediniz?*
B2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Çünkü bir sonuca bağlayamadım.*

Şekil 56'da B2 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 56. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

4.5.8. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B3 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: *Beşinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz? İspata başlamadan önce dışbükey ne demektir?*
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: *Bilmiyorum hocam. Ben ilk önce bir altıgen çizdim. Köşegen elde edebilmem için kenar sayısının minimum dört olmalıdır. Çünkü üçgenin köşegeni yoktur.*

Araştırmacı: Köşegen ne demektir?
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Herhangi bir çokgende herhangi iki köşeyi birleştiren doğru parçasıdır.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen kavramının tanımını yanlış yapmıştır.

Araştırmacı: Üçgende de ardışık köşeler var ama siz üçgenin köşegeni yoktur dediniz?
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Karşılıklı köşeleri birleştiren doğru parçası desek daha doğru olur sanki.
Araştırmacı: Karşılıklıdan kastınız nedir?
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Örneğin altıgen çizdim. Bir köşeden 3 tane köşegen çizebilirim. Yani E köşesinin karşısında A, B, C köşegeni vardır.
Araştırmacı: Peki karşı kavramını daha doğru açıklayabilir misiniz? Ya da köşegen elde edebilmek için minimum kenar sayısı dört olur demişsiniz neden?
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü üçgende karşılıklı köşeler yoktur.

B3 Kodlu Öğretmen Adayının aslında karşılıklı köşe söyleminden kastı ardışık olmayan köşedir. Bunu bildiği halde açıklamasını yapamamıştır.

Araştırmacı: Devam edin hocam.
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Dörtgen için köşegen sayısı 2
Beşgen için köşegen sayısı 5
Altıgen için köşegen sayısı 9
Yedigen için köşegen sayısı 14
Sekizgen için köşegen sayısı 20
Ben burada köşegen sayılarına baktım aralarında bir ilişki olup olmadığına baktım ama bir genellemeye ulaşamadım.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı tek tek değer vererek gitmiş bulduğu sonuçlar arasında bir ilişki (örüntü) olup olmayacağını kontrol etmiş bir ilişki bulamadığından devamını getirip genelleyememiştir.

Araştırmacı: Nasıl bir yöntem kullandınız?
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Deneme-yanılma.

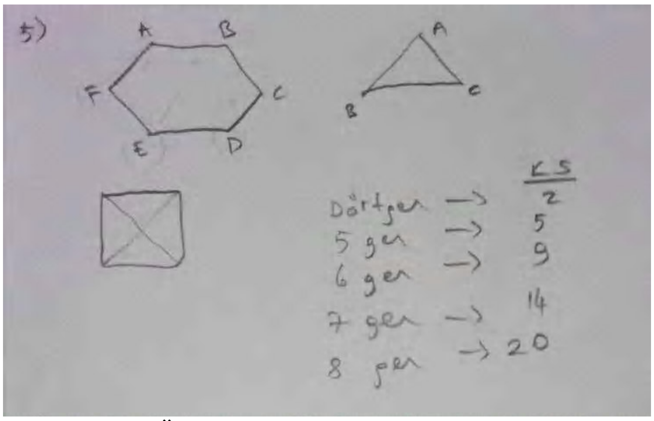
B3 Kodlu Öğretmen Adayı aslında deneme- yanılma yapmış ama genelleme noktasında sıkıntı yaşamıştır.

Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Hayır hocam düşünmüyorum. Çünkü somut ve nesnel bir veri elde edemedim.
Araştırmacı: Sizce bu soruda neden bir strateji geliştiremediniz?
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Bilgi eksikliğimden dolayı.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı bilgilerinin eksikliğinden dolayı bir strateji geliştiremediğini söylemiştir.

Araştırmacı: Bu soruda başka bir şeyler verilse ben bu ispatı yapabilirdim der misiniz?
B3 Kodlu Öğretmen Adayı: Her şey yeterliydi ama ispatlaması zor olduğu için yapamadım.

Şekil 57'de B3 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 57. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

4.5.9. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B4 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Beşinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz hocam?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Tabi ki. Ben bu soruda tümevarım kullanarak yani deneme yaparak sonuca ulaşmaya çalıştım.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı tümevarım yöntemini deneme-yanılma olarak görmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Peki tümevarım yöntemini açıklayabilir misiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> p ve q şeklinde bir önerme verilsin. Bu önermenin doğruluğunu kabul ederek sonuca varmaya çalışmak.
<u>Araştırmacı:</u> Tümevarım adımlarını sayabilir misiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Birincisi doğrulama basamağı. İkincisi tümevarım hipotezi yani kabulü. Tümevarım basamağı. Aslında ben bu soruda tümevarımla ispat yapmamışım.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı tümevarım basamaklarını hemen hemen bilmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Devam edin hocam.
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> n yerine 3 koyarsak çokgenimiz üçgen olur üçgenin köşegeni yoktur.
<u>Araştırmacı:</u> Köşegen tanımını yapabilir misiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bir şekil çizeyim. Ardışık olmayan köşelerin bir doğru yardımıyla ölçülmesi.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen kavramının tanımını yanlış yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Köşegenin uzunluğunu ölçebilir miyiz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ölçebiliriz.
<u>Araştırmacı:</u> Siz köşegene doğru dediniz. Doğrunun uzunluğu ölçülebilir mi?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yok. Doğru parçası.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı araştırmacının yönlendirici sorularıyla köşegenin bir doğru değil doğru parçası olduğunu söylemiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Üçgenin neden köşegeni yok?

<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Kenarlarının hepsi ardışık. Ben dikdörtgeni aldım. Bunu da genelledim.
<u>Araştırmacı:</u> Nasıl genellediniz? Üçgen, dörtgen, beşgen… denediniz arasından sağlamayan olsa ne olur hepsi sağlar mı?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Sağlamayabilir.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı sınırlı sayıda eleman için deneme yapmıştır ama bunu genelleyememiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Tümevarım kullanarak ispatınızı yapabilir misiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> n= 3 için üçgenin 0 tane köşegeni var bu doğru
1-) doğrulama basamağı
n=k için doğruluğunu kabul edelim. $\frac{k.(k-3)}{2}$ *doğru olsun.*
2-) n=k+1 olsun. $\frac{(k+1).(k-2)}{2} = \frac{k2-k-2}{2}$

$\frac{k2-k-2-2k+2k}{2}$ *pay kısmına -2k, +2k eklersem*

$\frac{k2-3k-2+2k}{2}$

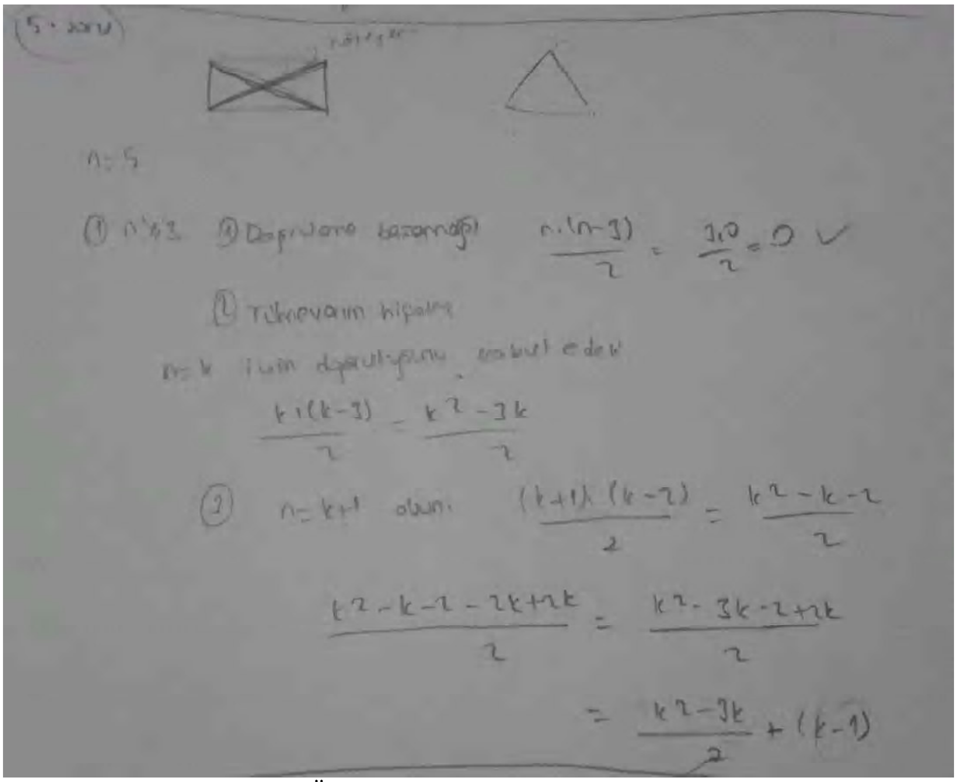
$\frac{k2-3k}{2} + (k\text{-}1)$

<u>Araştırmacı:</u> Tümevarımla ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Düşünüyorum ama son kısmını yapamadım.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı tümevarımın son basamağında ispatı tamamlayamamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Hipotezden üçüncü adıma neden geçemediniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Aldığım değer sağlamadığı için.

Şekil 58'de B4 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problem çözümü verilmiştir



Şekil 58. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

4.5.10. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B5 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Beşinci soruyu tekrardan sesli olarak çözebilir misiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Hipotezi vermiş bunu ispatlamamızı istemiş. Ben altıgenden yola çıkarak yapmaya çalıştım.
Araştırmacı: Tamam hocam dışbükey ve içbükey kavramlarını açıklayabilir misiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Bunlar bende konkav ve konveks kavramlarını çağrıştırıyor.
Araştırmacı: Hangisi konkav hangisi konveks?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Dışbükey- konveks, içbükey –konkav.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı dışbükey kavramının konveks olduğunu, içbükey kavramının ise konkav olduğunu bildiği halde tanımlarını yapamamıştır.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Altıgen çizdim. Bir köşesini ele alalım bir köşeden ardışık olmayan köşeye çizilen doğruya daha doğrusu ışına köşegen denir.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen kavramının tanımındaki doğru parçasını ışın ve doğru olarak yanlış söylemiştir.

Araştırmacı: Köşegenin uzunluğu ölçülebilir mi?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Ölçülebilir hocam.
Araştırmacı: Işın uzunluğu ölçülebilir mi?
Araştırmacı: Ölçülemez hocam o zaman ışın demememiz lazım çizgi mi dememiz lazım?

B5 Kodlu Öğretmen Adayı köşegene çizgi demiştir.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Bilmiyorum.
Araştırmacı: Doğrunun uzunluğu da ölçülemez o zaman doğru parçası deriz.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı araştırmacının yönlendirici sorularıyla köşegenin uzunluğunun ölçülebilir olmasından dolayı doğru parçası olduğunu söylemiştir.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Altıgenin bir köşesinden çizilebilecek köşegenleri çizdim. Verileni kullandım.
Araştırmacı: Hangi ispat türünü kullandınız?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Doğrudan ispat. Altıgende bir köşeden üç tane köşegen çizilir.
Araştırmacı: Neden üç tane?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Ardışık olmayan köşeleri birleştirdiğimde üç tane oldu. Mantıken diğer köşelerden de üç tane çizilir. Verdiğiniz hipotezi doğru kabul ettim. n= 6 dersem formül sağlandı.
Araştırmacı: n-3 nerden gelir?

B5 Kodlu Öğretmen Adayı altıgende bir köşeden n-3 tane köşegen çizileceğini söylediği halde n-3 ifadesinin nereden gediğini bilmemektedir.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Bilmiyorum hocam.
Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?

B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Deneme yanılmayla daha doğrusu tümevarımla buldum.
Araştırmacı: Tümevarım olur mu bu? Tümevarım adımları nelerdir?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: İlk değer için doğru olduğunu gösteririz n=k için doğru kabul edip n=k+1 için doğruluğu gösterilir.
Araştırmacı: Bu yaptıklarınızın ispat olduğunu düşünüyor musunuz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet hocam düşünüyorum. Hipotezi doğru kabul edip genelledim. Bütün değerleri denemem lazımdı bazıları hepsini denemeden tümevarımla ispat yapmış olduğumuzu söylüyor ama ben ispat yaptım.
Araştırmacı: Siz bir değer için denediniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Beşgen, yedigen, ongenle de yapılır. Bir çokgenden yola çıkıp genelledim burada.

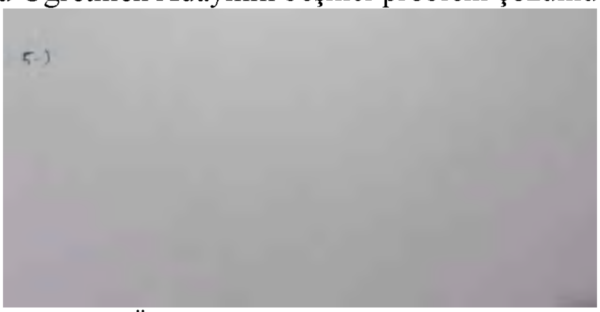
B5 Kodlu Öğretmen Adayı sınırlı sayıda değer için genelleme yapabileceğini söylemiştir.

Araştırmacı: Bu soruyu tümevarımla yapabilir misiniz?
n =4 olsun $\frac{4.(4-3)}{2} = 2$ …………………………….. *doğru*
n =k olsun $\frac{k.(k-3)}{2}$ ……………………………………… *doğru olsun.*
n =k+1 olsun $\frac{(k+1).(k+1-3)}{2}$
$\frac{(k+1).(k-2)}{2}$ *gelir.*
Araştırmacı: Buradan sonuca ulaşabilir misiniz?

B5 Kodlu Öğretmen Adayı soruyu tümevarımla yapmaya çalışmış tümevarım adımlarını doğru bir şekilde yazmış ama son basamağı ispatlayamamıştır.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Devam ettiremem hocam.

Şekil 59'da B5 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 59. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

4.5.11. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B6 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Beşinci soruyu sesli olarak çözebilir misiniz? Ya da başlamadan önce köşegen tanımını yapabilir misiniz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Ardışık olmayan köşeleri birleştiren doğru parçasına köşegen denir. Şeklini de çizdim.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı köşegen kavramının tanımını doğru yapmıştır.

Araştırmacı: Devam edin hocam.
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben bu soruyu tümevarım yöntemini kullanarak ispatladım.
Araştırmacı: Tümevarım ne demektir?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: n=1 için sağlıyor, n=k için sağladığını kabul ediyoruz n=k+1 için doğruluğunu ispatlarsak ispatı tamamlamış oluyoruz. Şimdi ben köşegen sayısı olması için n=4 ten başlamamız lazım dedim.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı tümevarımın tanımını doğru olarak yapmıştır.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı: n=4 için $\frac{4.1}{2} = 2$ *doğru*
n=k için $\frac{k.(k-3)}{2}$ *doğru olduğunu kabul edelim.*
$P(k) = \frac{k.(k-3)}{2} = \frac{k2-3k}{2}$ *k+1= n k=n-1 yerine yazalım.*
$P(k+1) = \frac{(k+1).(k-2)}{2}$
$= \frac{(n-1+1).(n-1-2)}{2}$
$P(k+1) = \frac{n.(n-3)}{2}$ *elde ederim.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayının ispatın son aşamasının doğru olup olmadığından emin değiliz.

Araştırmacı: Bu soruda hangi ispat yöntemini kullandınız?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Tümevarım.

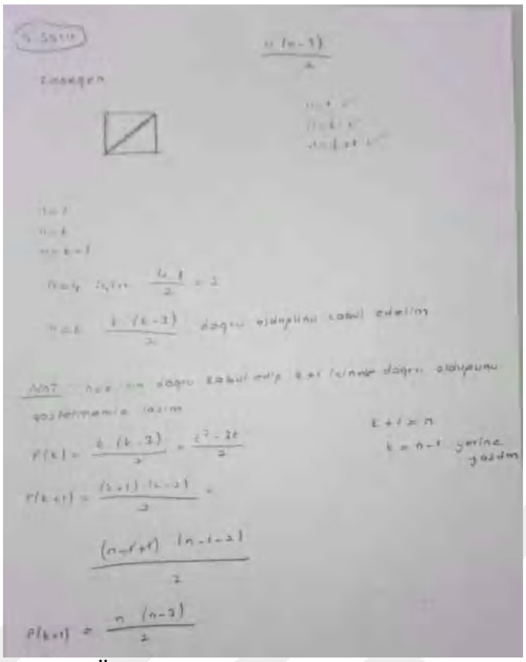
B6 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat yöntemini bilmektedir.

Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir yoldan yapabilir misiniz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Tek tek deneyip genellemeye varabilirdim.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı tek tek deneyip genellemeye varabileceği bir yolu ispat olarak algılamıştır fakat bu şekilde bir ispat olmaz.

Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet hocam.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarının doğru olduğundan emin olduğundan hem bir ispat yaptığını düşünmekte hem de yaptıklarıyla karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini savunmaktadır. Şekil 60'da B6 Kodlu Öğretmen Adayının beşinci problem çözümü verilmiştir.



Şekil 60. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Beşinci Problem Çözümü

B üniversitesinde öğrenim gören altı ilköğretim matematik öğretmeni adayının beşinci probleminin çözümüne bakıldığında öğretmen adaylarının ikisi problemi doğru bir şekilde ispatlarken dördü problemin ispatını yapamamıştır. Tümevarım yöntemini kullanan öğretmen adaylarının çözümüne bakıldığında son basamakta zorlanıp ispatı tamamlayamadıkları söylenebilir. Tümevarım yöntemini kullanmaya çalışan öğretmen adayları tümevarım basamaklarını bilmektedir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğu köşe, kenar, ışın, doğru, doğru parçası, köşe kavramlarını karıştırdığından dolayı köşegen ve çokgen kavramlarının tanımını yapamamışlardır.

A ve B üniversitesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının beşinci probleminin çözümüne ilişkin veriler birlikte değerlendirilirse A üniversitesindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının daha başarılı olduğu söylenebilir. A ve B üniversitelerindeki öğretmen adaylarının çözümüne bakıldığında A üniversitesindeki ve B üniversitesindeki öğretmen adaylarının sorunun çözümünde kullandıkları çözüm yolu farklıdır. bu durumun sebebi öğretmen adaylarının aldıkları Geometri dersinde ispatı bu şekilde öğrenmeleridir. Yani her iki üniversitedeki öğretmen adaylarının yapılan ispatı ezberledikleri söylenebilir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının temel geometrik kavramların tanımlarını karıştırdıkları söylenebilir.

4.6. Altıncı Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

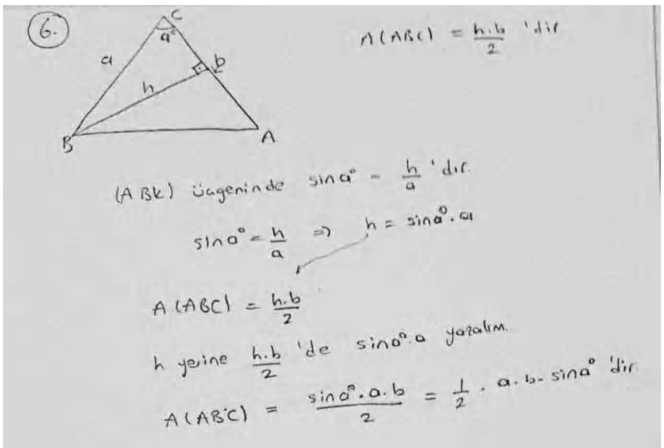
Bu araştırmada kullanılan altıncı alt problem: “Herhangi iki kenar uzunluğu a, b ve bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü α derece olan bir üçgenin alanı A = $\frac{1}{2}$.a.b.sinα’dır. İspatlayınız.”

4.6.1. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A1 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

> <u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Şimdi herhangi bir üçgen çizip bu üçgeni isimlendiriyorum. C köşesindeki açıya α diyorum ve B köşesinden |AC|’na bir dikme indiriyorum. Üçgenin alanından gideceğim. A(ABC) = $\frac{h.b}{2}$’dir. ABK üçgeninde sin α = $\frac{h}{a}$’dır.*
> *Trigonometri bilgilerimi kullanarak Sin α = $\frac{h}{a}$ ise h= a.sin α’dır.*
> *A(ABC) = $\frac{h.b}{2}$ eşitliğinde h= a.sin α yazmak istiyorum.*
> *A(ABC)= $\frac{a.b.sin\alpha}{2}$ = $\frac{1}{2}$. a.b.sin α sonucuna ulaşılır.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle döküp farklı alt alan (trigonometri) bilgisini kullanarak soruyu doğru bir şekilde ispatlamıştır. A1 Kodlu Öğretmen Adayının kullandığı çizimler Şekil 61’de verilmiştir.



Şekil 61. A1 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

> <u>*Araştırmacı:*</u> *Üçgenin alanının bir tabanı ile o tabana ait yüksekliğin çarpımının yarısı olduğunun nereden geldiğini biliyor musunuz?*
> <u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Yok bu ezberlediğim bir bilgi.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı üçgenin alanının mantığını bilmemekle birlikte bunu ezbere bildiğini söylemektedir.

> <u>*Araştırmacı:*</u> *Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?*
> <u>*A1 Kodlu Öğretmen Adayı:*</u> *Evet.*

Araştırmacı: *Hangi yöntemi kullandınız?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Tümevarım yok tümevarım değil hangi yöntemi kullandığımı bilmiyorum ama bir ispat yaptım.*

A1 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir.

Araştırmacı: *Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Yok yapamam.*
Araştırmacı: *Ne kullandınız burada?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Trigonometri bilgilerimi ve alanı kullandım.*
Araştırmacı: *Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?*
A1 Kodlu Öğretmen Adayı: *Evet kesinlikle. Çünkü herkes için genel geçerliliği aynı olan bilgileri kullandım.*

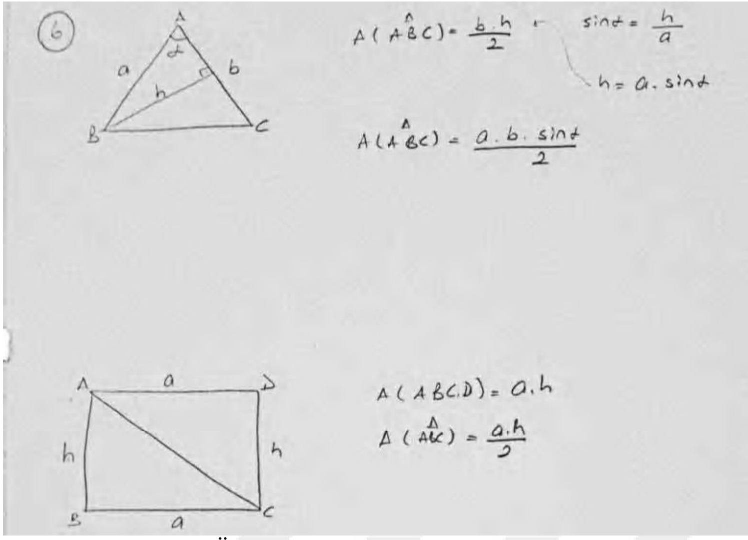
A1 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı bilgilerin herkes tarafından kabul edilen bilgiler olduğunu düşündüğünden karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini düşünmektedir.

4.6.2. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A2 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı: *Bir ABC üçgeni çizelim ve kenarları isimlendirelim. Üçgenin alanını bulmak için yüksekliğe ihtiyacım var bunun için AC kenarına ait yüksekliği çizelim bu yüksekliğe h diyelim. O halde;* $A(ABC) = \frac{b.h}{2}$. *Aynı zamanda sinα'yı yazacak olursak* $\sin\alpha = \frac{h}{a}$ *buradan h'ı çekersek* $h = a.\sin\alpha$ *olur. Yukarıdaki alan formülünde sinα'yı yerine yazarsak* $A(ABC) = \frac{a.b.\sin\alpha}{2}$ *olur.*

A2 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen ifadeyi şekle dökerek soruyu doğru bir şekilde ispatlamıştır. A2 Kodlu Öğretmen Adayının kullandığı çizimler Şekil 62'de verilmiştir.



Şekil 62. A2 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

Araştırmacı: Bu soruda hangi ispat yöntemini kullandınız?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Bilmiyorum.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı ispatı doğru bir şekilde yaptığı halde kullandığı ispat yöntemini bilmemektedir.

Araştırmacı: Bu soruyu farklı bir şekilde ispatlayabilir misiniz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: İspatlayamam.
Araştırmacı: Peki üçgenin alan formülünün nereden geldiğini biliyor musunuz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Dikdörtgenin alanından. Bir ABCD dikdörtgeni çizelim. A köşesinden C köşesine bir doğru parçası çizelim. $|AB| = h$ ve $|BC| = a$ olsun. Bu dikdörtgenin alanı a.h olur. Köşegen uzunluğu alanı iki eş parçaya böldüğünden $A(ABC) = \frac{a.h}{2}$ olur.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı üçgenin alanının nereden geldiğini mantıklı bir şekilde açıklayabilmiştir.

Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Bu ispatı yapmak için ne kullandınız?
A2 Kodlu Öğretmen Adayı: Sözel ifadeyi şekle döküp önceden bildiğim alan ve trigonometrik bilgiyi kullanarak ispatımı yaptım.

A2 Kodlu Öğretmen Adayı altıncı problemin ispatında önceden bildiği trigonometri ve alan formüllerini bildiğini ifade etmiştir.

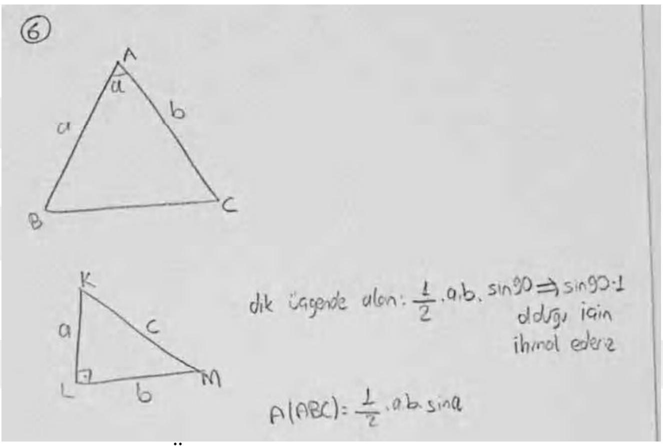
4.6.3. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A3 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben ilk önce bir tane ABC üçgeni çizdim. A köşesinin olduğu açıya α, $|AB| = a$ ve $|AC| = b$ dedim. Ben bu soruyu da aslında deneme yanılma yoluyla yaptım. Bir tane dik üçgen olduğunu varsaydım. Bu üçgen KLM

üçgeni olsun dedim. Bu KLM üçgeninin kenar uzunluklarına da a, b, c dedim. Dik üçgende alan = $\frac{1}{2}$*.a.b.sin90 olur. Sin90 = 1 olduğu için biz bunu ihmal ederiz. A(ABC) =* $\frac{1}{2}$*.a.b.sinα olur dedim.*
Araştırmacı: Bu alan formülü dik üçgende sağlar diye bütün üçgenlerde sağlar mı dediniz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet aynen öyle düşündüm yani. Diğerlerinde de genelleştirdim.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle dökmüştür fakat tek deneme yaparak bunu genelleştirdiğini söylemiştir. A3 Kodlu Öğretmen Adayı burada bir ispat yapmış olmamaktadır. A3 Kodlu Öğretmen Adayının kullandığı çizimler Şekil 63'de verilmiştir.



Şekil 63. A3 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

Araştırmacı: Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Deneme yanılma yani dik üçgende oluyorsa hepsinde olur diye genelledim.
Araştırmacı: Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Pek sayılmaz.
Araştırmacı: Neden?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Burada dikliğe göre düşündüm. Dik üçgenden dolayı yazdığım alan doğrudur dedim.

A3 Kodlu Öğretmen Adayı ispat yaptığını düşünmemektedir çünkü yaptığı şeyleri sadece dik üçgen üzerinden yapmıştır.

Araştırmacı: Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Bunun doğru olduğuna inanıyorum da karşıdaki bundan tatmin olur mu sadece dik üçgeni varsaydım farklı bir üçgen olsa olmayabilirdi.
Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
A3 Kodlu Öğretmen Adayı: Aslında h1 h2 yani dik çizilse ispatlanabilir ama tam bilmiyorum olmaz herhalde.

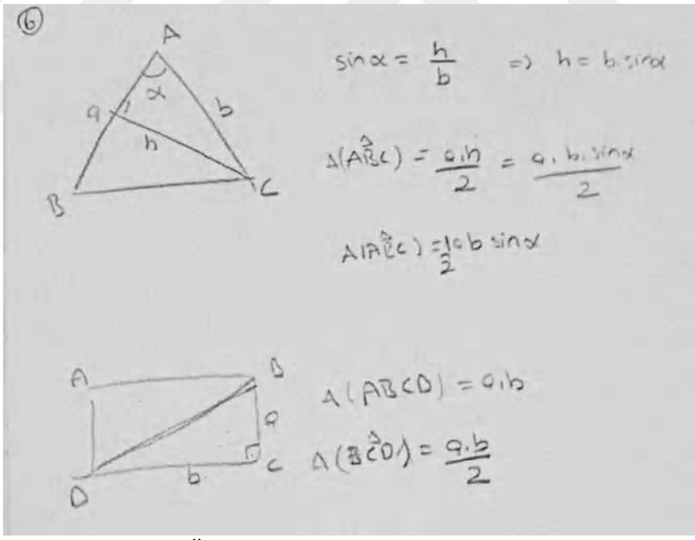
A3 Kodlu Öğretmen Adayı altıncı problemin ispatında kendisine güvenememektedir. İspat yaptığını düşünmemiştir. Farklı yollar ile ispat yapılabileceğini düşünerek esnek düşündüğünü göstermiştir ama nasıl farklı ispat yapacağı konusunda emin değildir.

4.6.4. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A4 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Bu soruda ben bir kenar uzunluğu a bir kenar uzunluğu b bu iki kenarının arasındaki açısının ölçüsü α olan bir ABC üçgeni çiziyorum. Bu ABC üçgenine bir yükseklik atarsam ve bu yüksekliğe h denilir. $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ *ben bu eşitlikten h'ı çekersem eğer* $h= b.\sin\alpha$ *olur. ABC üçgeninin alanı* $A(ABC) = \frac{a.h}{2}$ *bu ifadede h'ı yerine yazarsam* $A(ABC) = \frac{1}{2}.a.b.\sin\alpha$ *elde etmiş olurum.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle döküp ispatı doğru bir şekilde yapmıştır. A4 Kodlu Öğretmen Adayının problemin çözümünde kullandığı yazılı kâğıdı Şekil 64'de verilmiştir.



Şekil 64. A4 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

Araştırmacı: Bu ispatta hangi yöntemi kullandınız?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Tümevarım. Geçmişteki bilgilerimi kulandım trigonometri kullandım.
Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Yaptığım şeyler gayet açık.

A4 Kodlu Öğretmen Adayı yaptığı şeylerin açık olduğunu düşündüğünden bir ispat yaptığını söylemektedir.

Araştırmacı: Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Üçgenin alan formülünün nereden geldiğini biliyor musunuz?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet biliyorum.
Araştırmacı: Anlatır mısınız?
A4 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir dikdörtgen düşünelim kenarları a ve b ise dikdörtgenin alanı a.b olur. Köşegeni çizersem iki eş üçgen elde ederim. Bu üçgenin alanı $\frac{a.b}{2}$ *olur.*

A4 Kodlu Öğretmen Adayı üçgenin alanının nereden geldiğinin mantığını bilmektedir.

4.6.5. A5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

A5 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Ben bu soruyu yapamadım.
Araştırmacı: İspata başlayamama devam ettirememe ve tamamlayamama sebebiniz nedir?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Aslında ispata başlayabildim. Üçgenin çevrel çemberinden yapılacak. Zaman yetersizliği.
Araştırmacı: Şu an zamanınız olsa yapabilir misiniz?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Yapamam.
Araştırmacı: Neden bir strateji geliştiremediniz?
A5 Kodlu Öğretmen Adayı: Aslında biraz uğraşmıştım.

A üniversitesinde öğrenim gören beş ilköğretim matematik öğretmeni adayının altıncı probleminin çözümüne bakıldığında öğretmen adaylarının üçü ispatı doğru bir şekilde yapabilmiş biri soruyu boş bırakırken birisi de ispatı yanlış yapmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adayları kullandıkları ispat yöntemini bilmemektedirler. İspatı doğru bir şekilde yapan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının hepsi ispat yaptığını düşünmektedir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarına üçgenin alan formülünün mantığı sorulduğunda ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dördü mantığı bilirken birisi mantığı bilmediğini bu bilgiyi ezberlediğini söylemiştir.

4.6.6. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B1 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı: İlk önce bir tane ABC üçgeni çizdim. Daha sonra BC uzunluğuna dik bir h uzunluğu çizdim. ABC açısına α, AB uzunluğuna a ve BC uzunluğuna da b dedim. A(ABC) = $\frac{b.h}{2}$ *oluyor. Çizdiğim üçgende sinα=* $\frac{h}{AB}$ *oluyor. Bu eşitlikte h'ı yalnız bırakırsam h=sinα.|AB| elde ederim. ABC üçgeninin alanında* *h'ı yerine yazıyorum A(ABC)=* $\frac{b.sin\alpha.|AB|}{2}$ *olur.* $|AB|$*= a demiştim buradan A(ABC)=* $\frac{a.b.sin\alpha}{2}$ *olur.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle döküp ispatı doğru bir şekilde yapmıştır. Şekil 65'de B1 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problem çözümünde kullandığı çizimler verilmiştir.

Şekil 65. B1 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

Araştırmacı: Bu ispatta hangi yöntemi kullandınız?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Doğrudan ispat.
Araştırmacı: Doğrudan ispat ne demektir?

B1 Kodlu Öğretmen Adayı doğrudan ispat kullandığını söylediği halde bu ispatın tanımını bilmemektedir.

B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Hipotez ve hükmün açık olarak verilmesidir.
Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir şekilde yapabilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Belki çemberden çıkabilir ama şu an yapabileceğimi düşünmüyorum.
Araştırmacı: Bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü bana verilenleri kullanarak sonuca ulaştım.
Araştırmacı: Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Alanı biliyorsa ikna edebilirim.
Araştırmacı: Bir üçgenin alanının herhangi bir kenarı ile o kenara ait yüksekliğin yarısı olduğunu söylediniz doğru mudur?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Peki bu ifadenin nereden geldiğini biliyor musunuz?
B1 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir dikdörtgen aldım kenar uzunluklarıma a ve b derim dikdörtgenin alanı a.b olur. B ve D köşelerinin birleştiren köşegeni çizerim bu köşegen toplam alanı iki eş parçaya böler, bu alanda aslında üçgenin alanıdır. O yüzden A(BDC)= $\frac{a.b}{2}$ *olur.*

B1 Kodlu Öğretmen Adayı üçgenin alan formülünü mantıklı bir şekilde nereden geldiğini açıklamıştır.

4.6.7. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B2 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Altıncı soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bir ABC üçgeni çizdim. BAC açısına αdedim. B köşesinden AC kenarına dikme çizdim bu dikmeye de h dedim. Üçgenin alanını yazdım.
$A(ABC) = \frac{b.h}{2}$
$Sin\alpha = \frac{h}{a}$
h= a.sinα yukarıdaki alan formülünde h'ı yerine yazarsam
$\frac{b}{2}.a.sin\alpha$
$\frac{a.b.sin\alpha}{2}$ *elde ettim ve ispatı tamamladım.*

B2 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen ifadeyi doğru bir şekilde şekle döküp üçgende alan ve trigonometri bilgilerini kullanarak ispatı doğru bir şekilde yapmıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet bilinen bir şeyi ispatladım.

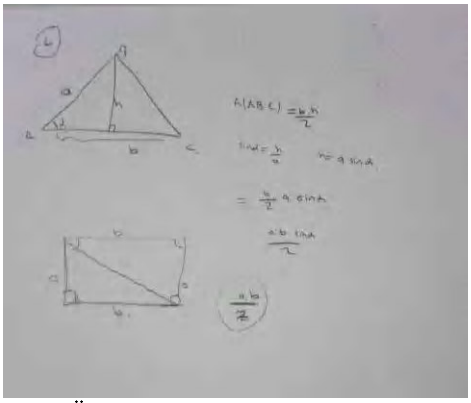
B2 Kodlu Öğretmen Adayı bilinen bir şeyi ispatladığını düşündüğü için ispat yaptığını düşünmektedir oysaki yaptığı şeyler mantık olarak doğru olduğundan ispattır.

<u>Araştırmacı:</u> Karşınızdaki kişiyi yaptıklarınızın doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Trigonometriyi bilen birisi anlar.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı trigonometri bilen bir kişiye yaptıklarının doğruluğuna ikna edebileceğini düşünmektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Peki üçgenin alan formülünün bir kenar ile o kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısı olduğunun nereden geldiğini biliyor musunuz?
<u>B2 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet hocam. Dikdörtgenin alanı a.b'dir. Bu alanı 2'ye bölersek üçgenin alanı çıkar.

B2 Kodlu Öğretmen Adayı üçgenin alan formülünün bir kenarı ile o kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısı olduğunu dikdörtgenin alan formülünü kullanarak göstermiştir. Şekil 66'da B2 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problem çözümü verilmiştir.



Şekil 66. B2 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

4.6.8. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B3 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Altıncı soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> İlk önce bir üçgen çizdim. Bu üçgenin köşelerini adlandırdım. Üçgenin yüksekliğini çizdim. Kenar uzunluklarını a ve b şeklinde adlandırdım. Önceki bilgilerimden üçgenin alanının (taban. Yükseklik)/2 olduğunu biliyorum.
$A(ABC) = \frac{h.b}{2}$
$Sin\alpha = \frac{h}{a}$
$h = a.sin\alpha$
Alan formülünde h'ı yerine yazıyorum.
$A(ABC) = \frac{h.b}{2} = \frac{1}{2}.a.b.sin\alpha$ *çıkar ve ispatı tamamlamış olurum.*

B3 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu şekle döküp doğru bir şekilde ispatlamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda ispata nasıl başladınız?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Soruda verilenlere göre bir üçgen çizip yüksekliğini indirerek başladım.
<u>Araştırmacı:</u> Üçgenin alan formülünün nerden geldiğini biliyor musunuz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Yanlış değilse dikdörtgenden geldiğini biliyorum hocam. Dikdörtgenin alanı a.b iken köşegenden dolayı iki eş parçaya bölünen üçgenin alanı $\frac{a.b}{2}$ olur.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı üçgenin alan formülünün mantığını çıkarımını bilmektedir.

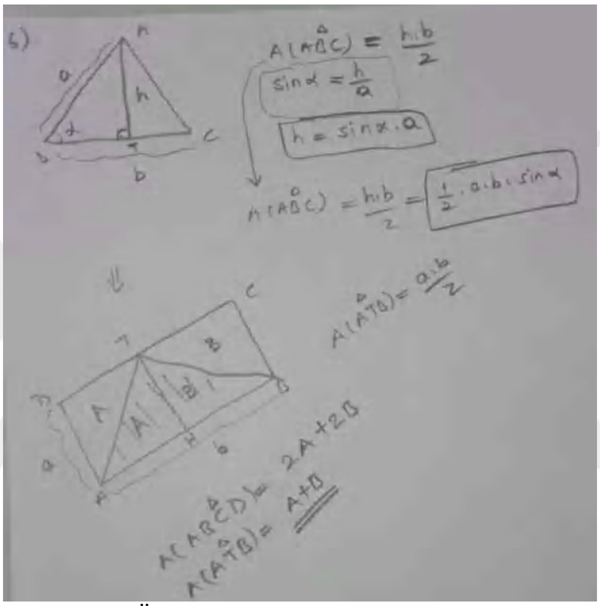
<u>Araştırmacı:</u> Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Deneme-yanılma.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı ispat yöntemlerini bilmemektedir.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?

<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Düşünüyorum hocam çünkü ben bu soruda bildiğimiz herkesin bildiği temel şeyleri kullandım.
<u>Araştırmacı:</u> Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>B3 Kodlu Öğretmen Adayı</u>: Evet hocam. Çünkü yaptığım gerçekçi bir ispat.

B3 Kodlu Öğretmen Adayı herkes tarafından anlaşılır şeyler yaptığından bir ispat yaptığını ve yaptıklarıyla karşısındaki kişiyi ispatın doğruluğuna inandırabileceğini söylemiştir. Şekil 67'de B3 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problem çözümü verilmiştir.



Şekil 67. B3 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

4.6.9. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B4 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

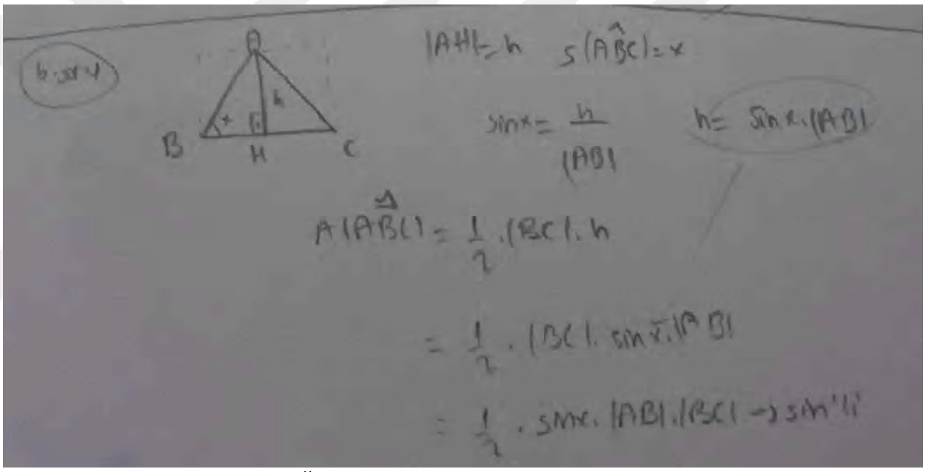
<u>Araştırmacı:</u> Altıncı soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> İlk önce bir tane ABC üçgeni çizdim. A köşesinden BC kenarına bir dikme çizdim ve bu dikmenin uzunluğuna da h dedim. ABC açısına x dedim. Daha sonra
$sinx=\frac{h}{|AB|}$, $h= sinx.|AB|$ olur. Üçgenin alanını yazdım.
$A(ABC) = \frac{1}{2}.|BC|.h$ h yerine yukarıdaki değerini yazarsam
$= \frac{1}{2}.|BC|.sinx.|AB|$
$= \frac{1}{2}.sinx.\ |AB|.|BC|$ ……………. Sin'li alan formülü.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu doğru bir şekilde şekle döküp ispatını tamamlamıştır.

<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?

<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Evet ilk defa düşünüyorum.
<u>Araştırmacı:</u> Neden?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Mesela doğru sonuç buldum.
<u>Araştırmacı:</u> Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebilir misiniz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ederim hocam.
<u>Araştırmacı:</u> Bu soruda hangi ispat yöntemini kullandınız?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bilmiyorum hocam
<u>Araştırmacı:</u> Üçgenin alan formülünün nereden geldiğini biliyor musunuz?
<u>B4 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Bir tane dikdörtgen çizdim. Bu şeklin içine bir üçgen çizdim. Bu üçgenin alanı dikdörtgenin alanının yarısına eşittir. Üçgenin alan formülü buradan gelir.

B4 Kodlu Öğretmen Adayı üçgenin alan formülünün nereden geldiğinin mantığını bilmektedir. Şekil 68'de B4 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problem çözümü verilmiştir.



Şekil 68. B4 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

4.6.10. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B5 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

<u>Araştırmacı:</u> Altıncı soruyu sesli bir şekilde çözebilir misiniz?
<u>B5 Kodlu Öğretmen Adayı:</u> Ben öncelikle bir ABC üçgeni çizdim. A köşesinden BC tabanına bir dikme indirdim. ABC açısını α olarak isimlendirdim. Kenar uzunluklarını yazdım. Hipotezi doğru kabul ettim.
Yani A= $\frac{1}{2}$ a.b.sinα (doğru olsun)
Üçgenin alan formülü alt taban çarpı yükseklik bölü iki
A=$\frac{b.c}{2}$
İki eşitliği eşitledim.
$\frac{1}{2}$ a.b.sinα = $\frac{b.c}{2}$
a.b.sinα = b.c
a.sinα = c   (sinα ' nın değerini yerine yazdım)

$a.\frac{c}{a} = c$

c=c olur, o halde ispat tamamlanır.

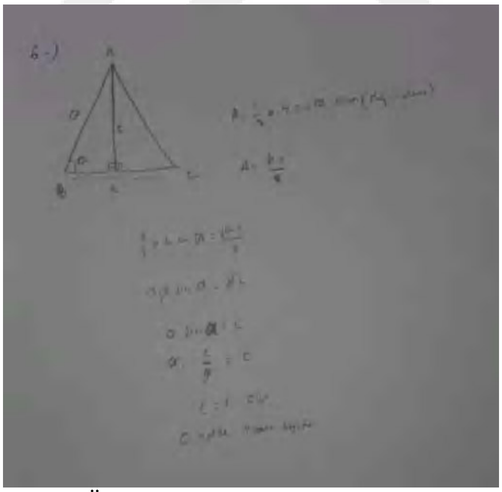
B5 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu doğru bir şekilde şekle dökmüş, ispatlanması gereken ifadeyi doğru kabul edip ispatı doğru bir şekilde yapmıştır.

Araştırmacı: Bu soruda hangi ispat yöntemini kullandınız?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Doğrudan ispat.
Araştırmacı: Bu soruyu farklı bir şekilde ispatlayabilir misiniz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Çember çizersem gelir diye düşündüm ama yapamadım hatırlayamadım o çözümü.
Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Düşünüyorum hocam. Çünkü hipotezi doğru kabul edip bildiğim alan formülünü kullanıp eşitleyerek sonuca ulaştım.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı yaptıklarından emin olduğundan ispat yaptığını düşünmektedir.

Araştırmacı: Üçgenin alan formülünün nereden geldiğini, biliyor musunuz?
B5 Kodlu Öğretmen Adayı: Biliyorum ama yapamam hocam hatırlamıyorum.

B5 Kodlu Öğretmen Adayı üçgenin alan formülünün nereden geldiğini bildiği halde yapamayacağını söylemiştir. Şekil 69'da B5 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problem çözümü verilmiştir.



Şekil 69. B5 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

4.6.11. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Çözümü

B6 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problemin çözümü esnasında yapılan mülakatlar verilmiştir.

Araştırmacı: Altıncı soruyu sesli olarak çözebilir misiniz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Bir ABC üçgeni çizdim. B açısına α dedim. A'dan BC kenarına yükseklik çizidim. Yüksekliğe h dedim.
$Sin\alpha = \frac{h}{b}$
$h = b.sin\alpha$ olur.
Üçgenin alan formülünü yazdım.

$A = \frac{Taban.h}{2}$

$\frac{a.b.sin\alpha}{2}$

$\frac{1}{2}$.*a.b.sinα olur. İspat biter.*

B6 Kodlu Öğretmen Adayı sözel olarak verilen soruyu doğru bir şekilde şekle döküp geçmiş bilgilerini kullanarak ispatı doğru olarak tamamlamıştır.

Araştırmacı: İspata nasıl başladınız?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Trigonometri bilgilerimi kullanarak başladım.
Araştırmacı: Bu ispatta kullandığınız yöntem nedir?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Verilenlerden yola çıktım.

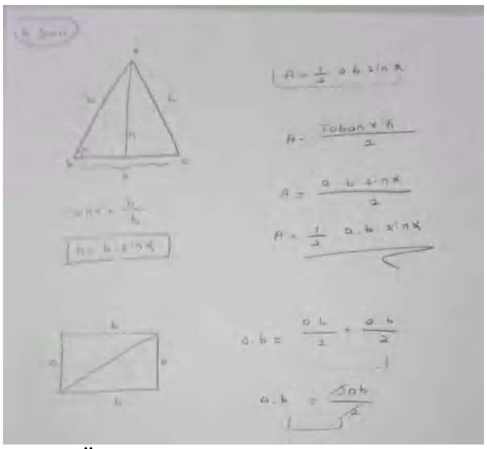
B6 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı ispat türünü bilmemektedir.

Araştırmacı: Bu ispatı farklı bir yoldan yapabilir misiniz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Yapamam hocam.
Araştırmacı: Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet.
Araştırmacı: Neden?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Verilenlerden yola çıkarak yerine koyarak yaptım.
Araştırmacı: Bu yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet hocam.
Araştırmacı: Neden?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Çünkü bilinen trigonometri bilgilerini kullandım.

B6 Kodlu Öğretmen Adayı kullandığı bilgilerin herkes tarafından geçerli olduğunu bildiğinden dolayı yaptığının bir ispat olduğunu ve bu yaptıklarıyla karşısındakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğini düşünmektedir.

Araştırmacı: Peki hocam üçgenin alan formülünün bir kenarı ile o kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır dediniz bunun nereden geldiğini biliyor musunuz?
B6 Kodlu Öğretmen Adayı: Evet hocam. Dikdörtgenin alanından gelir. Dikdörtgenin alanının yarısına eşittir üçgenin alanı.

Şekil 70'de B6 Kodlu Öğretmen Adayının altıncı problem çözümü verilmiştir.



Şekil 70. B6 Kodlu Öğretmen Adayının Altıncı Problem Çözümü

B üniversitesinde öğrenim gören altı ilköğretim matematik öğretmeni adayının altıncı probleminin çözümüne bakıldığında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının altısı da sözel olarak verilen problemi doğru bir şekilde şekle döküp ispatı tamamlamıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adayları kullandıkları ispat yöntemini bilmemektedirler. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümü ispat yaptığını düşünmektedir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarına üçgenin alan formülünün mantığı sorulduğunda ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının beşi mantığı bilirken biri mantığı bildiğini fakat açıklayamayacağını söylemiştir.

A ve B üniversitesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının altıncı probleminin çözümüne ilişkin verileri birlikte değerlendirilirse B üniversitesindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının daha başarılı olduğu söylenebilir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğu üçgenin alan formülünün çıkış noktasını açıklayabilmiştir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA – SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yeterliklerini incelemek amacıyla öğretmen adaylarına altı problemden oluşan Geometri İspat Testi uygulanmış ardından öğretmen adaylarının ispat problemlerinin çözümü esnasında izledikleri yolları daha detaylı incelemek için çeşitli başarı düzeylerinden belirlenen 11 öğretmen adayı ile mülakatlar yapılmıştır. 228 öğretmen adayının çözümleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve problem çözümleri doğru, yanlış, boş şeklinde değerlendirilip elde edilen sonuçlara ilişkin bulgular sütun grafiği ile gösterilmiştir.

Birinci problemin çözümüne bakıldığında öğretmen adaylarının yaklaşık %25'i ispatı doğru yapmış, yaklaşık %50'si yanlış yapmış, yaklaşık %25'i ise boş bırakmıştır. Geometri İspat Testinde doğru yapılma oranı en düşük olan problem birinci problem olmuştur. Öğretmen adaylarının çözümleri ve yapılan mülakatlar incelendiğinde öğretmen adayları ek çizim yapmada ve benzerlik kullanma da zorlanmışlardır. Ayrıca ispatı doğru yapan öğretmen adayları genel olarak iki farklı çözüm yolu kullanmışlardır. Bu çözüm yollarından birincisi yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları oranı ikincisi ise ek çizim yapıp benzerlik teoremini kullanmaktır.

İkinci problemin çözümüne bakıldığında öğretmen adaylarının yaklaşık % 36'sı ispatı doğru yapmış, yaklaşık %41'i yanlış yapmış, yaklaşık %23'ü ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının çözümleri ve yapılan mülakatlar incelendiğinde öğretmen adayları benzerlik kullanmak için gerekli olan ek çizim yapmakta zorlanmışlardır. Problemin çözümünü yanlış yapan öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu bildikleri teoremi probleme yanlış aktarmışlardır. İspatı doğru yapan öğretmen adaylarının hepsinin çözüm yolu aynıdır, yani öğretmen adayları ek çizim yaptıktan sonra benzerlik kullanarak çözüme ulaşmışlardır.

Üçüncü problemin çözümüne bakıldığında öğretmen adaylarının yaklaşık %31'i ispatı doğru yapmış, yaklaşık %20'si yanlış yapmış, yaklaşık %49'u ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının çözümleri ve yapılan mülakatlar incelendiğinde problemi yanlış yapan ve boş bırakan öğretmen adaylarının oranının fazla olma sebebi sözel olarak verilen ifadenin şekle doğru aktarılamaması ve konveks, konkav kavramlarının tanımının bilinmemesi olabilir. İspatı doğru yapan öğretmen adaylarının hepsinin çözüm yolu aynıdır, yani öğretmen adayları sözel olarak verilen ifadeyi şekle doğru olarak aktarmışlar gerekli ek çizimleri yapıp geçmiş geometrik bilgilerini kullanarak oluşan şeklin karşılıklı kenar uzunluklarının ve karşılıklı açılarının ölçülerinin birbirine eşit olduğunu gösterip ispatı tamamlamışlardır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %49'u problem hakkında fikir yürütemeyip boş bırakmışlardır. Bunun sebebi konveks ve konkav kavramlarının bilinmemesi olabilir.

Dördüncü problemin çözümüne bakıldığında öğretmen adaylarının yaklaşık %29'u ispatı doğru yapmış, yaklaşık %23'ü yanlış yapmış, yaklaşık %48'i ise boş bırakmıştır. Öğretmen adaylarının çözümleri ve yapılan mülakatlar incelendiğinde problemi yanlış yapan ve boş bırakan öğretmen adaylarının oranının fazla olma sebebi sözel olarak verilen ifadenin şekle doğru aktarılamaması ve ağırlık merkezi kavramının tanımının bilinmemesi olabilir. İspatı doğru yapan öğretmen adayları iki farklı çözüm yolu kullanmışlardır. Bu çözüm yollarından biri şekli çizip gerekli ek çizimler yaparak geçmiş geometrik bilgileri kullanmak diğeri ise yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanlarının aynı olduğunu bilip alanlar oranını kullanmaktır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %48'i problem hakkında fikir yürütemeyip boş bırakmışlardır. Bunun sebebi sözel olarak verilen ifadeyi şekle aktarmada sıkıntı yaşamaları olabilir.

Beşinci problemin çözümüne bakıldığında öğretmen adaylarının yaklaşık %51'i ispatı doğru yapmış, yaklaşık %29'u yanlış yapmış, yaklaşık %20'si ise boş bırakmıştır. İspatı doğru yapan öğretmen adayları iki farklı çözüm yolu kullanmışlardır. Bu çözüm yolarından biri tümevarım yöntemi diğeri ise köşegen tanımını kullanarak bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısını bulup bunu n kenar için genellemektir. Tümevarımla ispatı sonuçlandıramayan öğretmen adaylarının hepsi tümevarım yönteminin son basamağını ispatlayamamıştır. Yapılan mülakatlara bakıldığında ise öğretmen adaylarının bir köşeden (n-3) tane köşegen çizilebileceğini teorik olarak bildikleri halde bu ifadedeki kenar sayısından neden 3 çıkarıldığının mantığını genel olarak bilmediğini söyleyebiliriz. A üniversitesinde öğrenim gören öğretmen adayları ispatı köşegen tanımını kullanarak bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısını bulup bunu n kenar için genelleyerek yaparken B üniversitesinde öğrenim gören öğretmen adayları ise tümevarım yöntemini kullanarak ispat yapmaya çalışmışlardır. Yapılan mülakatlarda bunun sebebinin öğretmen adaylarının aldıkları geometri dersinde ispatı bu şekilde öğrendikleri sonucuna varılmıştır yani öğretmen adayları yapılan ispatların mantığını sorgulayıp öğrenmek yerine ezberlemişlerdir.

Altıncı problemin çözümüne bakıldığında öğretmen adaylarının yaklaşık % 54'ü ispatı doğru yapmış, yaklaşık %21'i yanlış yapmış, yaklaşık %25'i ise boş bırakmıştır. Geometri İspat Testinde doğru yapılma oranı en yüksek olan problem altıncı problem olmuştur. İspatı doğru yapan öğretmen adaylarının hepsi farklı alt alanlardan (Trigonometri) bilgi transferi yapıp, geçmiş geometrik bilgilerini kullanarak sonuca ulaşmıştır. Yapılan mülakatlarda öğretmen adaylarının üçgenin alan formülünün mantığını bildiği sonucuna varılmıştır.

Genel olarak altı ispat probleminin doğru yapılabilme oranı yaklaşık %38'dir. Buradan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yapabilme yeterlikleri düşüktür sonucuna varılabilir. Bahtiyari-Albayrak (2010) yaptığı çalışmada benzer sonuç bulmuş ve öğrencilerin ispat ve muhakeme açısından yeterli deneyime sahip olmadıklarını tespit etmiştir. Doruk ve Kaplan (2013) da öğretmen adaylarının ispat yapmada ve değerlendirme de başarısız olduklarını, bu başarısızlığın sebebinin de ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmeden ve ispatı öğrenmek için düşünce sürecine girmeden sadece ezberleme yoluna gittiklerini belirtmişlerdir. Nitekim yapılan araştırmalarda öğrencilerin ispat yapamamalarının sebepleri ispatla ilgili bilgi eksikliklerine sahip olmaları, tanımları ve tanımları nerde kullanacaklarını bilmemeleri, ispat teknik ve stratejilerini bilmemeleri ve başarılı olamayacaklarına inanmaları ve korkmaları şeklinde tespit edilmiştir (Almeida, 2003; Anapa ve Şamkar, 2010; Baker ve Campbell, 2004; Edwards ve Ward, 2004; Gibson, 1998; Güler, 2013; Jones, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006).

Ayrıca ilgili alan yanı incelendiğinde öğrencilerin, ispata nasıl başlayacağını belirleme (Moore, 1990, 1994; Selden ve Selden, 2003, 2007), ispatta kullandıkları tanımları ifade etme (Azrou, 2013; Bayazıt, 2009; Knapp, 2005), ispatı kendi cümleleri ile ifade etme

(Dubinsky, 2000), mantık ve ispat yöntemi kullanımı (Harel ve Sowder, 2007; Knapp, 2005; Selden ve Selden, 2007; Stylianides, Stylianides, Philippou, 2004, 2007), matematiksel dil ve notasyon kullanımı (Biehler ve Kempen, 2013; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2007) güçlüklerinin de olduğu görülmüştür. Böylece araştırma sonuçları ile alan yazında yer alan çalışmalar birbiriyle tutarlıdır.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yeterliklerinin düşük çıkma sebeplerinden biri de öğretmen adaylarının temel geometrik kavramlara ilişkin bilgi eksikliği olabilir. Cilavdaroğlu (2012) öğretmen adaylarının geometrik kavramlara ilişkin şekilleri eksik veya hatalı çizdikleri, şekli doğru çizenlerin sayısının tanımını doğru yapanların sayısından fazla olduğu, katılımcıların kullandıkları matematiksel dile ve seçtikleri dile dikkat etmedikleri, belirsiz ifadeler veya yanlış terimler kullanarak ispat yaptıkları belirtmişlerdir. Kaplan ve Hızarcı (2005) öğretmen adaylarının üçgen kavramına ait doğru tanımlara ulaşmada zorluk yaşadıklarını bulmuşlardır. Oflaz, Bulut ve Akçakın (2016) öğretmen adaylarının temel geometrik kavramlara yönelik bilgilerinde eksiklikler olduğunu tespit etmişlerdir.

5.1 Öneriler

Öğretmen adaylarının ispat yeterliklerinin artırılabilmesi için öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumları ezberden öteye geçerek sorgulama, akıl yürütme temelli olmalıdır. Öğretmen adaylarına bunun için uygun öğrenme ortamları hazırlanabilir. Öğretmen adaylarının ispat sürecine bakıldığında ispatın anlatımında öğretmen adaylarını ezberden uzaklaştırmayı amaçlayan çalışmalara yer verilebilir.

5.2 İleriki Çalışmalar

1. İleri ki yapılacak çalışmalarda ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometri alanındaki formel ve informel alandaki ispat yeterlikleri karşılaştırılarak alan yazındaki boşluk bir nebze olsa da doldurulabilir.

2. Bu çalışma öğretmen adaylarına her sınıf düzeyinde uygulanıp öğretmen adaylarının yıllara göre gelişimleri karşılaştırılabilir.

3. Öğretmen adaylarının aldıkları geometri ders başarıları ile ispat yeterlikleri karşılaştırılabilir.

4. Öğretmen adaylarının öğretmenliğe başladıkları ilk yıllarındaki öz-yeterlikleri ile karşılaştırma yapılabilir.

KAYNAKÇA

Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, 8, 31-35. İnternet adresinden alınmıştır http://flm-journal.org/Articles/723802C7D911A64F1F2E59C4CD92E9.pdf

Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H. H., Özel, Z. ve Sabuncuoğlu, A. (1988). *Soyut matematik (İkinci Baskı).* Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.

Almeida, D. (1996). Variation in proof standards: Implication for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27,* 659–665. doi:10.1080/0020739960270504.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869–890.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything*? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4), 479-488.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemeni gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, *6*(1), 25–37.

Anapa, P., and Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical prof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. 2, 2700–2706.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi*, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, *35*(156), 17-31.

Bahtiyari Albayrak, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Baker, D., and Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Primus*. *14* (4), 345–353.

Baki, A., Güven, B., & Karataş, İ. (2002). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile keşfederek öğrenme. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 2,* 884-890.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi (4. Baskı).*Ankara: Derya Kitabevi.

Baki, A., Kösa, T. & Güven, B. (2009). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualization skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology*, doi: 10.1111/j.1467-8535.2009.01012.x.

Bardelle, C. (2010). *Visual proofs: an experiment*. In V. Durand-Guerrier et al (Eds), Paper presented at the annual meeting of CERME6, Lyon, France. INRP, 251-260.

Bayazıt, İ. (2013). İspat'ın önemi ve ispat konusundaki öğretmen yeterliklerinin incelenmesi. *International Periodical for the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic, 12(14), 19-40.*

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies,7*(1/2), 23-40.

Biehler, R., and Kempen, L. (2013). *Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof.* Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey.

Bilgili, S. A. (2008). *Bilimsel araştırma yöntemleri.* İstanbul: Lisans Yayıncılık, Editör: Orhan Kılıç, Mustafa Cinoğlu.

Bukova-Güzel, E. (2010). An investigation of pre-service mathematics teachers' pedagogical content knowledge, using solid objects. *Scientific Research and Essays*, 5(14):1872-1880.

Ceylan, T. (2012). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Cilavdaroğlu, A. K. (2012). *İlköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin bazı iki boyutlu geometrik kavramların tanımları ve şekillerine dair bilgilerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep.

Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3. sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi, 16*(2), 495-506.

Dede. Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat E. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (ss. 14-34). Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Delice, A., Ertekin, E., Yazici, E. ve Aydin, A. (2009). Preservice primary teachers' three dimensional thinking skills. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 2666-2672.

Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations*. Yayımlanmamış Yüksek lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Doruk, M., ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(1), 241-252.

Doruk, M., Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz yeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *23*(2), 861-874.

Duatepe, A. (2005). The effects of drama-based instruction on seventh grade students' geometry achievement, van Hiele geometry thinking levels, attitudes toward mathematics and geometry. *Research in Drama Education*, *10*(1), 65-66.

Dubinsky, E. (1986). Teaching mathematical induction. *I. Journal of Mathematical Behavior, 5*, 305–317.

Edwards, B.S., and Ward, M.B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*. *111*, 411–424.

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof.* (NCTM year book 1938). New York: Teachers' College, Columbia University.

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics, 8*(5), 269–274.

Gibson, D. (1998). *Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. Students' proof schemes*. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, and J.Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education*, 3,* 284–307. AMS.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *1*(4), 56-64.

Güler, G., Kar, T., Öçal, M. F. ve Çiltaş, A. (2011). Prospective mathematics teachers' difficulties in proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences,15,* 336-340.

Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici. R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20*(1), 219-236.

Güler, G., ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *20*(2), 571-590.

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi, 30,* 319.

Halat, E. (2008). Webquest-temelli matematik öğretiminin sınıf öğretmeni adaylarının geometrik düşünme düzeylerine etkisi. *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, (25*), 115-30.

Halat, E. & Şahin, O. (2008). Van Hiele levels of pre- and in service Turkish elementary school teachers and gender related differences in geometry. *The Mathematics Educator, 11*(1/2), 143-158.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5-23.

Harel, G., and Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics (Vol. 2). NCTM.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 389–399.

Işıksal, M., ve Aşkar, P. (2005). The effect of spreadsheet and dynamic geometry software on the achievement and self-efficacy of 7th-grade students. *Educational Research, 47(*3), 333-350.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları ispat şemaları.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

İskenderoğlu, T., Baki, A., ve İskenderoğlu, M.(2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *9*, 531-536.

İskenderoğlu, T. A., Baki, A., ve Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5*(1), 181-203.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 53-60.

Kaplan, A. ve Hızarcı, S. (2005). Matematik öğretmen adaylarının üçgen kavramı ile ilgili bilgi düzeyleri. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 472-478

Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education, 1*(2), 134-141.

Kılıç, Ç., Köse, N., Y., Tanışlı, D. ve Özdaş, A. (2007). Determining the fifth grade students' van Hiele geometric thinking levels in tessellation. *İlköğretim Online E-Dergi, 6*(1),11-23.

Kitcher, P.(1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford university press.

Knuth, E. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Köğce, D. ve Yıldız, C. (2011). A comparison of freshman and senior mathematics student teachers' views of proof concept. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 15,* 1266-1270.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martin, G. W. ve Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 41-51.

Miral, D. (2013). *Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249-266.

Morash, R. P. (1987). *Bridge to abstract mathematics: Mathematical proof and structures,* New York: Random House.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(1), 147-160.

Nasibov, F. ve Kaçar, A. (2005). Matematik ve matematik eğitimi hakkında. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *13*(2). 339- 346.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Roston, Virginia.

Norby, K. (2013). Investigating viable arguments: pre-service mathematics teachers' construction and evaluation of arguments (Doctoral Dissertation, Montana State University, Bozeman, Montana). Retrieved from https://scholarworks.montana.edu/xmlui/handle/1/2903.

Oflaz, G., Bulut, N., ve Akçakın, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, *63*, 133-152.

Öçal, M. F., ve Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 9,* 318–323.

Özer, Ö., ve A. Arıkan (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, *2,* 1083-10989.

Padula, J. (2006). The Wording of a proof: Hardys' second "elegant" proof, *Australian Mathematics Teacher, 62,* 2, 18-24.

Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualizing teachers' mathematical knowledge in teaching. T. Rowland & K. Ruthven (Eds.) içinde, Mathematical knowledge in teaching (pp. 9-25). Springer.

Polat, K. & Akgün, L. (2016). Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Kavramına ve İspat Yapmanın Zorluklarına Yönelik Görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies,* 43, 423-438. doi.org/10.9761/JASSS3219

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (5th ed.). Princeton University Press.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof*? Educational Studies in Mathematics, 52*, 319–325.

Rav, Y. (1999). Why do we proof theorems? *Philosophia mathematica, 7*(1), 5-41.

Riley, K. J. (2003). An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations. Unpublished Doctoral Dissertation, Montana State University, Bozeman, Montana.

Selden, A. ve Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36.

Schoenfeld, A. (1994). What we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behaviour, 13*, 55-80.

Stylianides, A. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

Şengül, S., ve Güner, P. (2013). DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi, *International Journal of Social Science, 6*(2), 869-878.

Toluk, Z. (2003) Üçüncü uluslararası matematik ve fen araştırması (TIMMS): Matematik nedir? *İlköğretim Online Dergisi, 2*(1), 36-41.

Umay, A. (1996). Matematik eğitimi ve ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 1*2, 145-149.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi* Dergisi, *24*, 234–243.

Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N.Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(2), 137-157.

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme.* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (10.Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. (1984). Case study research: Design and methods. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

Yoo, S. (2008). Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers. Unpublished doctoral dissertation, The University of Texas, Austin.

EKLER

EK 1. GEOMETRİ İSPAT TESTİ

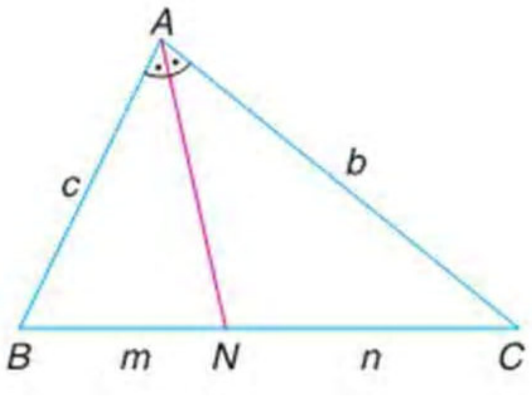
Adı Soyadı :

Okulu, Bölümü :

Sınıfı :

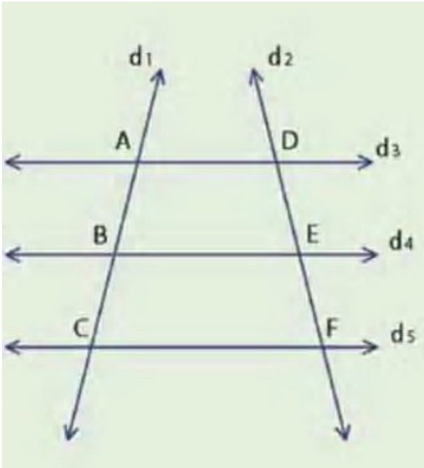
Değerli katılımcılar, aşağıda "*Öğretmen Adaylarının Geometri Alanında İspat Yapabilme Yeterliklerinin Ölçülmesine*" yönelik hazırlanan ölçeğin soruları yer almaktadır. Çalışmadan elde dilecek bilgi ve bulgular tamamen bilimsel amaçlarla kullanılacak olup sizlerle alakalı bilgilerin gizliliğine dikkat edilecektir. Çalışmada, yapacağınız ispatların doğruluğundan ziyade eldeki durumlarla alakalı gerçek düşüncelerinizi yansıtması bizim için daha önemlidir. Bu nedenle, her bir problemi dikkatli bir şekilde çözmenizi ve mümkünse boş bırakmamanızı rica ediyoruz. Hassasiyetiniz ve verdiğiniz katkı için teşekkür ederim.

PROBLEMLER



1. ABC üçgeninde [AN] açıortay olduğuna göre $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$'dir. İspatlayınız.

2.



Şekilde $d_3 // d_4 // d_5$ ise

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|DF|}$ 'dur.

İspatlayınız.

3. Herhangi bir konveks dörtgende ardışık kenarların orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşan şeklin bir paralelkenar olduğunu ispatlayınız.

4. Bir üçgende ağırlık merkezi kenarortayları tepeye 2, kenara 1 oranında böler. İspatlayınız.

5. n kenarlı dışbükey bir çokgenin köşegen sayısı $\frac{n.(n-3)}{2}$ dir. İspatlayınız.

6. Herhangi iki kenar uzunluğu a, b ve bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü α derece olan bir üçgenin alanı A = $\frac{1}{2}$.a.b.sinα ' dır. İspatlayınız.

EK-2 YARI YAPILANDIRILMIŞ GÖRÜŞME SORULARI

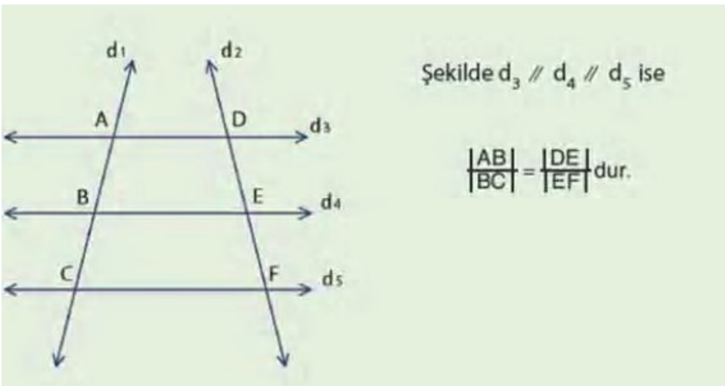
1. İspata nasıl başladınız?
2. İspat ne demektir?
3. Hipotez ve hüküm ne demektir?
4. Bu soruda hipotez ve hükmünüz nedir?
5. Bu soruda kullandığınız ispat yöntemi nedir?
6. Çokgen ne demektir?
7. Köşegen ne demektir?
8. Konveks ve konkav kavramlarının tanımını yapabilir misiniz?
9. Üçgenin alan formülünün nereden geldiğin, biliyor musunuz?
10. Çokgenin köşegen sayısı bağıntısındaki (n-3)'ün nereden geldiğini biliyor musunuz?
11. Bu soruda bir ispat yaptığınızı düşünüyor musunuz?
12. Yaptıklarınızla karşınızdakini ifadenin doğruluğuna ikna edebileceğinizi düşünüyor musunuz?

EK 3. GEOMETRİ İSPAT TESTİ

Değerli katılımcılar, aşağıda "*Öğretmen Adaylarının Geometri Alanında İspat Yapabilme Yeterliklerinin Ölçülmesine*" yönelik hazırlanan ölçeğin soruları yer almaktadır. Çalışmadan elde dilecek bilgi ve bulgular tamamen bilimsel amaçlarla kullanılacak olup sizlerle alakalı bilgilerin gizliliğine dikkat edilecektir. Çalışmada, yapacağınız ispatların doğruluğundan ziyade eldeki durumlarla alakalı gerçek düşüncelerinizi yansıtması bizim için daha önemlidir. Bu nedenle, her bir problemi dikkatli bir şekilde çözmenizi ve mümkünse boş bırakmamanızı rica ediyoruz. Hassasiyetiniz ve verdiğiniz katkı için teşekkür ederim.

PROBLEMLER

1. Bir üçgende bir açının iç açıortaylarının kenarlar üzerinde ayırdığı doğru parçalarının uzunluklarının oranının bu parçalara komşu olan kenarların uzunlukları oranına eşit olduğunu ispatlayınız.
2. Kenar uzunluları a, b, c ve çevrel çemberinin yarıçapı R olan bir ABC üçgeninin alanı $\frac{a.b.c}{4.R}$ ‘dir. İspatlayınız.



3. Herhangi bir dışbükey dörtgende kenar orta noktaların birleştirilmesiyle oluşan şeklin bir paralelkenar olduğunu ispatlayınız.
4. Bir çemberde çapı gören çevre açının ölçüsü 90^0'dir. İspatlayınız.
5. Bir üçgende ağırlık merkezi kenarortayları 2:1 oranında böler. İspatlayınız.
6. n kenarlı konveks bir çokgenin köşegen sayısı $\frac{n.(n-3)}{2}$ dir. İspatlayınız.
7. İki üçgenin karşılıklı ikişer açısı eşitse bu üçgenler benzerdir. İspatlayınız.
8. Herhangi iki kenar uzunluğu a, b ve bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü α olan bir üçgenin alanı $\frac{1}{2}$.a.b.sinα ‘ dır. İspatlayınız.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı:	Murat Coşkun
Uyruğu:	Türkiye (T.C)
Doğum Tarihi ve Yeri:	01.07.1989-Yozgat
Medeni Durum:	Evli
e-mail:	muratcoskun0866@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü	2020
Lisans	Atatürk Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2012
Lise	Boğazlıyan Anadolu Lisesi Boğazlıyan/Yozgat	2007

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2012-Halen	MEB Yozgat Toki Şehit Adem Cankurtaran Ortaokulu	İlköğretim Matematik Öğretmeni

YABANCI DİL

İngilizce