EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

İKİ KATLI DİZİLERİN AĞIRLIKLI ORTALAMALARI İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Ece YARAŞGİL

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 29.06.2018

Bornova-İZMİR

2018

Ece YARAŞGİL tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan **"İki katlı dizilerin ağırlıklı ortalamaları için Tauber tipi teoremler"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **29.06.2018** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK**	İ Canak
Raportör Üye	**: Doç. Dr. Tahsin ÖNER**	TÖner
Üye	**: Dr. Öğr. Üyesi Yılmaz ERDEM**	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "İki katlı dizilerin ağırlıklı ortalamaları için Tauber tipi teoremler" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

29/06/2018

İmzası

Ece YARAŞGİL

ÖZET

İKİ KATLI DİZİLERİN AĞIRLIKLI ORTALAMALARI İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

YARAŞGİL, Ece

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK
Haziran 2018, 43 sayfa

Bu çalışma esas olarak üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Tauber teorisinin tarihsel gelişim sürecinden ve kısaca toplanabilme metotlarından bahsedilerek, tek katlı ve iki katlı dizilerde ağırlıklı ortalamalar metodu için yapılan çalışmalar ile tezde yapılacak olan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak tek katlı dizilerde ağırlıklı ortalamalar metodu için temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ardından iki katlı diziler için ağırlıklı toplanabilme alanına ait kavramlar tanıtılarak Tauber tipi teoremler ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde, iki katlı dizilerin üreteci kavramı tanıtılmış ve daha sonra bu üreteç kavramı kullanılarak Tauber tipi teoremler ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: İki katlı diziler, ağırlıklı ortalamalar toplanabilme metodu, Tauber tipi teoremler, yavaş azalan diziler, yavaş salınımlı diziler, üreteç dizileri.

ABSTRACT

TAUBERIAN THEOREMS FOR WEIGHTED MEANS OF DOUBLE SEQUENCES

YARAŞGİL, Ece

MSc in Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK
June 2018, 43 pages

This thesis essentially consists of three chapters.

In the first chapter, the historical development of Tauberian theory and brief introduction of summability methods are mentioned, and then previous works on the weighted mean method of single and double sequences and the results obtained in this thesis are included.

In the second chapter, firstly basic definitions and theorems with regard to weighted mean method of single sequences are given. Later, concepts related to the weighted mean summability of double sequences are introduced and Tauberian theorems are demonstrated.

In the third chapter, the concept of generator sequence for double sequences is presented and Tauberian theorems are proved by using generator sequences.

Key Words: Double sequences, the weighted means method of summability, Tauberian theorems, slowly decreasing sequences, slowly oscillating sequences, generator sequences.

TEŞEKKÜR

İki yıllık bir çalışmanın ürünü olan bu tezin hazırlanması sürecinde,

- şahsım adına tanıdığı fırsat, öneri ve eleştirilerin yanı sıra uçsuz bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşıp, daima desteğini ve bana olan inancını hissettirerek başarıya olan inancımı arttıran, akademik kariyerime ismi önderliğinde başlamaktan onur duyduğum değerli danışmanım Prof. Dr. İbrahim ÇANAK'a,
- çalışmalarım esnasında beni maddi açıdan "BİDEB 2210/A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" aracılığı ile destekleyen, bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a,
- akademik kariyerime attığım ilk adımlarda destekleri ve bana olan inançları ile bağlılık ve motivasyonumu arttıran, bulgularımı dinleyerek ilgilerini daima ilk gün olduğu gibi koruyan, maddi ve manevi desteği ile bu yolda yükümü hafifleterek yürümemi sağlayan aileme ve dostlarıma

sonsuz teşekkürlerimle.

ECE YARAŞGİL

Haziran 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simge	**Açıklama**
(u_n)	**tek katlı reel ya da kompleks sayı dizisi**
$u_n = o(1)$	(u_n) **dizisinin sıfıra yakınsak olması**
$u_n = O(1)$	(u_n) **dizisinin sınırlı olması**
(t_n)	**bir dizinin ağırlıklı ortalamalar dizisi**
$(\overline{N}, p)$	**ağırlıklı ortalamalar metodu**
Δu_n	(u_n) **dizisinin geri farkı**
$V_n(\Delta u)$	(u_n) **dizisinin üreteci**
λ_n	λn **nin tam kısmı**
$\liminf u_n$	(u_n) **dizisinin alt limiti**
$\limsup u_n$	(u_n) **dizisinin üst limiti**
$\mathbb{N}$	**doğal sayılar kümesi**
$\mathbb{R}$	**reel sayılar kümesi**
$\tau_{\lambda,n}(u)$	(u_n) **dizisinin ağırlıklı hareketli ortalaması**
(P_n)	(p_n) **dizisinin kısmi toplamlar dizisi**
(u_{mn})	**iki katlı reel ya da kompleks sayı dizisi**
$u_{mn} = o(1)$	(u_{mn}) **dizisinin sıfıra P-yakınsak olması**
$u_{mn} = O(1)$	(u_{mn}) **dizisinin sınırlı olması**
$(\overline{N}, p, q; 1, 1)$	**(1,1) anlamında ağırlıklı ortalamalar metodu**
$(\overline{N}, p, *; 1, 0)$	**(1,0) anlamında ağırlıklı ortalamalar metodu**
$(\overline{N}, *, q; 0, 1)$	**(0,1) anlamında ağırlıklı ortalamalar metodu**
(t_{mn}^{11})	(u_{mn}) **dizisinin** $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ **ortalama dizisi**
(t_{mn}^{10})	(u_{mn}) **dizisinin** $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ **ortalama dizisi**
(t_{mn}^{01})	(u_{mn}) **dizisinin** $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ **ortalama dizisi**
$\Delta_{11} u_{mn}$	(u_{mn}) **dizisinin (1,1) anlamında geri farkı**
$\Delta_{10} u_{mn}$	(u_{mn}) **dizisinin (1,0) anlamında geri farkı**
$\Delta_{01} u_{mn}$	(u_{mn}) **dizisinin (0,1) anlamında geri farkı**
$V_{mn}^{11}(\Delta u)$	(u_{mn}) **dizisinin (1,1) anlamında üreteci**
$V_{mn}^{10}(\Delta u)$	(u_{mn}) **dizisinin (1,0) anlamında üreteci**
$V_{mn}^{01}(\Delta u)$	(u_{mn}) **dizisinin (0,1) anlamında üreteci**
$\tau_{mn}(u)$	(u_{mn}) **dizisinin ağırlıklı hareketli ortalaması**

1 GİRİŞ

Toplanabilme teorisi başlığı altında 18. yüzyıldan günümüze kadar ıraksak dizilerin davranışları ve toplanabilme metotları hakkında birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların başlıca amacı bazı koşullar altında ıraksak diziler hakkında bilgi edinmektir. Bu kapsamda birçok toplanabilme metodu tanımlanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Abel, Cesàro, Hölder, Nörlund ve ağırlıklı ortalamalar bu metotlara örnek olarak verilebilir.

Yakınsak olan her dizi regüler bir toplanabilme metoduyla yakınsadığı değere toplanabilirdir. Fakat bir metot tarafından bir değere toplanabilen dizinin, aynı değere yakınsak olması gerekmez. Bu durumun gerçekleşmesi için uygun koşullara ihtiyaç duyulur. Bu alandaki ilk çalışma Avusturyalı matematikçi Alfred Tauber (1897) tarafından Abel metodu için yapılmıştır. Bundan dolayı gereken bu koşullara Tauber koşulları ve bu koşullar altında oluşturulan teoremlere de Tauber tipi teoremler denir. A. Tauber'in başlattığı çalışmalar ışığında toplanabilme teorisi çeşitli toplanabilme metotları ile gelişerek günümüze kadar gelmiştir. Bu alandaki çalışmalar kapsamında tek katlı dizilerde birçok araştırma yapılmış fakat son zamanlarda çalışmalar iki katlı diziler üzerine yoğunlaşmıştır.

Bu tez kapsamında tek katlı ve iki katlı diziler için ağırlıklı ortalamalar toplanabilme metodu ele alınacak ve ağırlıklı ortalamalar metodu ile toplanabilir iki katlı diziler için Tauber tipi teoremler verilecektir.

Bu süreç içersinde tanıtılmış olan ağırlıklı ortalamalar metodu klasik toplanabilme metotlarındandır. Benzer olarak bu metot için de pek çok Tauber tipi teoremler elde edilmiştir. Tek katlı dizilerde ağırlıklı ortalamalar için toplanabilme alanına katkı sağlayan başlıca isimler; Ananda-Rau (1930), Hardy (1956), Tietz (1990), Mòricz ve Rhoades (1995), Tietz ve Zeller (1998), Çanak ve Totur (2011) olmuştur. Daha sonra Stadtmüller (1999), Chen ve Hsu (2000), Mòricz ve Rhoades (2004), Belen (2017) ile Totur ve Çanak (2018) gibi başlıca isimler tek katlı diziler için verilen Tauber koşulları ve Tauber tipi teoremleri genişleterek iki katlı diziler için vermişlerdir. Totur ve Çanak (2018) daha sonra düzenli üreteç dizilerinden yararlanarak iki katlı diziler için zayıflatılmış yeni Tauber tipi koşullar elde etmişlerdir.

Bu tezin amacı, iki katlı diziler için ağırlıklı ortalamalar metodunu tanıtmak ve daha önce tek katlı diziler için verilmiş olan bazı Tauber tipi teoremlerin iki katlı diziler için benzerlerini ispatlamaktır. Günümüzde iki katlı dizilerin ağırlıklı ortalamalar metodu ile toplanabilirliği hakkında yeterli çalışma bulunmamaktadır. Hazırlanan bu yüksek lisans çalışmasının iki katlı diziler için toplanabilme teorisine katkıda bulunması beklenmektedir.

2 AĞIRLIKLI ORTALAMALAR METODU İÇİN TANIM VE TEOREMLER

2.1 Tek Katlı Dizilerin Ağırlıklı Ortalamaları

Bu bölümde ilk olarak, tez boyunca kullanılacak ağırlıklı ortalamalar metodu için tek katlı dizilerdeki temel tanım ve özellikler verilecektir. Ardından, toplanabilme teorisindeki bazı metot ve kavramlardan bahsedilecek ve bu metot ve kavramları içeren bazı Tauber tipi teoremlere yer verilecektir.

2.1.1 Tek Katlı Dizilerde Ağırlıklı Ortalamalar Metodu İçin Temel Tanımlar

Tanım 2.1 *Tanım kümesi doğal sayılar ve görüntü kümesi reel sayılar olan bir fonksiyona reel sayı dizisi denir. Eğer görüntü kümesi kompleks sayılar ise diziye kompleks sayı dizisi denir. Reel ya da kompleks sayı dizisi* (u_n) *ile gösterilir.*

Tanım 2.2 *Bir* (u_n) *reel sayı dizisi verilsin. Her* $\varepsilon > 0$ *için* $n \geq N$ *iken* $|u_n - s| < \epsilon$ *olacak şekilde en az bir* $N = N(\epsilon)$ *varsa* (u_n) *reel sayı dizisi* $s \in \mathbb{R}$ *sayısına yakınsaktır denir ve*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = s$$

veya $u_n \to s$ *ile gösterilir.*

$u_n = o(1)$ ifadesi (u_n) dizisinin sıfıra yakınsak olduğunu belirtir.

Tanım 2.3 *Her* n *doğal sayısı için* $|u_n| \leqslant C$ *olacak şekilde en az bir* $C > 0$ *reel sayısı bulunuyorsa* (u_n) *dizisine sınırlı dizi denir.*

$u_n = O(1)$ ifadesi (u_n) dizisinin sınırlı olduğunu belirtir.

Tanım 2.4 *(Mòricz and Rhoades, 1995) $p = (p_n)$ terimleri negatif olmayan bir dizi olmak üzere, $p_0 > 0$ ve*

$$P_n := \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \ , \ n \to \infty \tag{1}$$

şeklinde tanımlansın.

$u = (u_n)$ reel ya da kompleks sayı dizisinin n. mertebeden ağırlıklı ortalaması

$$t_n(u) := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k u_k \tag{2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.5 *(Mòricz and Rhoades, 1995) (u_n) reel ya da kompleks sayı dizisi, (p_n) terimleri negatif olmayan bir dizi ve $p_0 > 0$ olmak üzere (1) koşulu sağlansın. Sonlu bir s değeri için*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s$$

oluyorsa (u_n) dizisine s ye ağırlıklı ortalamalar metoduna göre toplanabilir denir ve

$$u_n \to s \ (\overline{N}, p)$$

ile gösterilir.

Ayrıca özel durum olarak her n için $p_n = 1$ alınırsa, $(\overline{N}, p)$ metodu $(C, 1)$ (Cesàro) toplanabilme metoduna indirgenecektir.

Tanım 2.6 *Yakınsak olan bir seri ya da dizi yakınsadığı değere, herhangi bir toplanabilme metodu tarafından toplanabiliyorsa, o metoda regülerdir denir.*

$(\overline{N}, p)$ toplanabilme metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart (1) koşulunun sağlanmasıdır. Yani bu koşul altında yakınsak olan her dizi aynı değere $(\overline{N}, p)$ toplanabilirdir. Fakat $(\overline{N}, p)$ toplanabilir olan her dizinin yakınsak olması gerekmez. Özel olarak her n için $p_n = 1$ alınarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.1 $u = (u_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \right)$ *dizisini alalım. Bu dizi yakınsak değildir, fakat $(\overline{N}, p)$ toplanabilirdir:*

(u_n) *dizisini*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1, & n \text{ çift}, \\ 0, & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz, bu taktirde dizinin ıraksak olduğu görülür. Bu dizinin ağırlıklı ortalaması alınırsa,

$$t_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} \frac{n+2}{2(n+1)}, & n \text{ çift}, \\ \frac{1}{2}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

elde edilir ve $\lim_{n\to\infty} t_n(u) = \frac{1}{2}$ *olur. Yani,* (u_n) *dizisi* $\frac{1}{2}$ *ye* $(\overline{N}, p)$ *toplanabilirdir.*

Tek katlı diziler için ağırlıklı ortalamalar toplanabilme metodunda sıkça kullandığımız bazı ifadeleri tanımlayalım:

(i) (u_n) dizisinin geri farkı:

$$\Delta u_n := u_n - u_{n-1} \quad , \; u_{-1} = 0$$

şeklindedir.

(ii) (u_n) dizisinin üreteci:

$$V_n(\Delta u) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} \Delta u_k$$

ile gösterilir.

(iii) (u_n) dizisi için ağırlıklı Kronocker eşitliği:

$$u_n - t_n(u) = V_n(\Delta u) \; , \; n \in 1, 2, ...$$

olarak verilir.

(iv) n yeterince büyük negatif olmayan tam sayı ve λ_n, λ ve n nin çarpımının tam kısmı olmak üzere (u_n) dizisinin hareketli ağırlıklı ortalamaları:

a. $\lambda > 1$ için $\tau^{>}_{\lambda,n}(u) = \dfrac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k u_k$

b. $0 < \lambda < 1$ için $\tau^{<}_{\lambda,n}(u) = \dfrac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \displaystyle\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k u_k$

şeklinde tanımlanır.

Tauber tipi koşulların zayıflatılması sürecinde dizilerle ilgili yeni kavramlara ihtiyaç duyulmuştur. Aşağıdaki verilecek bu kavramlar ilk defa Schmidt (1925) tarafından ortaya atılmıştır.

Landau (1910) nun (u_n) reel sayı dizisi olmak üzere Cesàro ve Abel toplanabilme metodu için tek taraflı Tauber koşulu,

$$k(u_k - u_{k-1}) \geq -H \ , \ (k = 1, 2, ...) \tag{3}$$

olacak şekilde en az bir $H > 0$ sayısının var olmasıdır.

Daha sonrasında Schmidt (1925) her $\epsilon > 0$ için

$$u_k - u_n \geq -\epsilon \ , \ n_1 < n < k \leq \lambda n \tag{4}$$

olacak şekilde $n_1 > 0$ ve $\lambda > 1$ varsa bu diziyi "yavaş azalan dizi" olarak tanımlamıştır.

(u_n) dizisi Landau (1910) nun tek taraflı Tauber koşulunu sağlıyorsa yavaş azalandır (Mòricz, 2004).

(4) koşuluna denk olarak Schmidt anlamında yavaş azalanlığın alternatif bir tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.7 *(Schmidt, 1925)* (u_n) *reel sayı dizisi*

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \liminf_{n \to \infty} \min_{n < k \leq \lambda_n} (u_k - u_n) \geq 0 \tag{5}$$

koşulunu sağlıyorsa (u_n) *dizisine yavaş azalan denir.*

Mòricz (2004) (u_n) reel sayı dizisi için (5) koşulunun

$$\lim_{\lambda \to 1^-} \liminf_{n \to \infty} \min_{\lambda_n < k \leq n} (u_n - u_k) \geq 0$$

koşuluna denk olduğunu ispatlamıştır.

Hardy (1956) sonlu bir değere $(C, 1)$ toplanabilen bir dizinin yavaş azalan olması durumunda aynı değere yakınsadığını ispatlamıştır.

Mòricz and Rhoades (1995) sonlu bir değere $(\overline{N}, p)$ toplanabilen bir dizi yavaş azalan ise dizinin aynı değere yakınsadığını ispatlamışlardır.

Sonuç olarak bir reel sayı dizisinin yavaş azalan olması bir çeşit Tauber koşuludur.

(u_n) kompleks değerli bir dizi olmak üzere Hardy (1910) nin çift taraflı Tauber koşulu olarak bilinen

$$n|u_n - u_{n-1}| \leq H \ , \ (n = 1, 2, ...) \tag{6}$$

koşuludur.

Schmidt (1925) bu koşulu zayıflatarak her $\epsilon > 0$ için

$$|u_k - u_n| \leq \epsilon \ , \ n_0 \leq n < k \leq \lambda_0$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ ve $\lambda_0 = \lambda_0(\epsilon) > 1$ varsa (u_n) dizisini *"yavaş salınımlı dizi"* olarak tanımlamıştır.

Yavaş salınımlılık kavramına denk aşağıdaki tanım da verilebilir.

Tanım 2.8 *(Schmidt, 1925) (u_n) kompleks değerli sayı dizisi*

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_{n \to \infty} \max_{n < k \leq \lambda_n} |u_k - u_n| = 0$$

koşulunu sağlıyorsa (u_n) dizisine yavaş salınımlı dizi denir.

(u_n) dizisi, Hardy (1910) nin çift taraflı Tauber koşulunu sağlıyorsa yavaş salınımlıdır (Mòricz, 2004).

$p = (p_n)$ terimleri negatif olmayan dizisinin kısmi toplamlar dizisi olan (P_n) dizisi için aşağıda bazı tanım ve özellikler verilecektir.

Tanım 2.9 *(Karamata, 1933) $p = (p_n)$ terimleri negatif olmayan bir dizi olmak üzere* (1) *koşulu sağlansın. α pozitif olmak üzere*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} = \lambda^{\alpha} \tag{7}$$

koşulu sağlanıyorsa $P = (P_n)$ dizisine α indeksli düzenli değişimli dizi denir.

(P_n) dizisi pozitif α indeksli düzenli değişimli dizi ise birbirine denk olan aşağıdaki koşullardan birini sağlar:

(i) $\liminf_{n \to \infty} \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1$,

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_{\lambda_n}} < 1$.

Eğer bu koşullardan biri varsa (1) koşulu sağlanır.

Chen ve Hsu (2000), her $n \geq 0$ için $P_n \neq 0$ olmak üzere her $\lambda > 0$ ve $\lambda \neq 1$ için $\liminf_{n\to\infty} \left| \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} - 1 \right| > 0$ koşulunu sağlayan tüm kompleks p sayı dizilerinin oluşturduğu kümeye SVA ismini vermiş ve bu kümenin iki alt kümesini tanımlamışlardır. SVA kümesindeki tüm reel sayı dizilerin oluşturduğu alt kümeye SVA_r, tüm negatif olmayan dizilerin oluşturduğu kümeyi de SVA_+ alt kümesi olarak tanımlanmıştır. Açıkça görülüyor ki $SVA_+ \subset SVA_r \subset SVA$ dır.

Lemma 2.1 *(Chen and Hsu, 2000) $p = (p_n)$ kompleks sayı dizisi ve her n için $P_n \neq 0$ olsun. $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ olmak üzere*

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} - 1 \right| > 0 \Longleftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} - 1 \right| > 0$$

dır. Sonuç olarak,

$$p \in SVA \Longleftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} - 1 \right| > 0 \ , \ \lambda > 0 \ , \ \lambda \neq 1.$$

Lemma 2.2 *(Chen and Hsu, 2000) $p = (p_n)$ terimleri negatif olmayan $(p_0 > 0)$ bir dizi olsun. Eğer $p \in SVA_+$ ise aşağıdaki birbirine denk koşullar sağlanır.*

(i) $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1 \quad , \quad \lambda > 1$

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} < 1 \quad , \quad 0 < \lambda < 1$

(iii) $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_{\lambda_n}} > 1 \quad , \quad 0 < \lambda < 1$

(iv) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_{\lambda_n}} < 1 \quad , \quad \lambda > 1$.

2.1.2 Tek Katlı Dizilerde Ağırlıklı Ortalamalar Metodu İçin Bazı Tauber Tipi Teoremler

Tezin bu kısmında, tek katlı diziler için ağırlıklı ortalamalar metodu ile toplanabilirlikten yakınsaklığa geçen bazı Tauber tipi teoremlerden bahsedilecektir.

Aşağıda teoremlerin ispatlarında önemli rol oynayan bazı eşitlikler verilmiştir.

Lemma 2.3 *(Mòricz and Rhoades, 2004) (P_n) dizisi terimleri pozitif ve azalmayan bir dizi olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:*

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1 \quad , \quad \lambda > 1$

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_{\lambda_n}} > 1 \quad , \quad 0 < \lambda < 1.$

Bu bölümde verilecek olan teoremlerin ispatı aşağıdaki Lemma 2.4 e dayanır.

Lemma 2.4 *(Mòricz and Rhoades, 2004) $p = (p_n)$ terimleri negatif olmayan bir dizi ve $p_0 > 0$ olmak üzere her $\lambda > 1$ için $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1$ koşulunu sağlasın. Eğer kompleks ya da reel sayı dizisi (u_n) sonlu bir L değerine $(\overline{N}, p)$ toplanabilir ise (u_n) dizisinin hareketli ortalamaları da aynı yere yakınsar. Yani,*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k u_k = L \quad , \quad \lambda > 1$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \displaystyle\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k u_k = L \quad , \quad 0 < \lambda < 1 \ .$

Teorem 2.1 *(Mòricz and Rhoades, 2004) $p = (p_n)$ terimleri negatif olmayan bir dizi ve $p_0 > 0$ olmak üzere her $\lambda > 1$ için $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1$ koşulunu sağlasın ve (u_n) reel sayı dizisi sonlu bir L değerine $(\overline{N}, p)$ toplanabilir olsun. (u_n) dizisinin aynı L değerine yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\limsup_{\lambda\to 1^+} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k(u_k - u_n) \geq 0 \tag{8}$$

ve

$$\limsup_{\lambda\to 1^-} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k(u_n - u_k) \geq 0 \tag{9}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Sonuç 2.1 *(u_n) dizisi yavaş azalan ise* (8) *ve* (9) *koşulları sağlanır.*

Sonuç 2.2 *Landau (1910) nun tek taraflı Tauber koşulu* (3)*, dizinin yavaş azalan olması için yeterlidir.*

Sonuç 2.3 (8) *ve* (9) *koşullarının simetrik eşleri aşağıda verilmiştir:*

$$\liminf_{\lambda\to 1^+} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k(u_k - u_n) \geq 0 \tag{10}$$

ve

$$\liminf_{\lambda\to 1^-} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k(u_n - u_k) \geq 0. \tag{11}$$

Yani Teorem 2.1 de (8) ve (9) koşulları yerine sırasıyla (10) ve (11) koşulları alınabilir.

Teorem 2.1 kompleks sayı dizileri için aşağıdaki gibi genişletilebilir.

Teorem 2.2 *(Mòricz and Rhoades, 2004) $p = (p_n)$ terimleri negatif olmayan bir dizi ve $p_0 > 0$ olmak üzere her $\lambda > 1$ için $\liminf_{n\to\infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1$ koşulunu sağlasın ve (u_n) kompleks sayı dizisi sonlu bir L değerine $(\overline{N}, p)$ toplanabilir olsun. (u_n) dizisinin aynı L değerine yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\liminf_{\lambda\to 1^+} \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k(u_k - u_n) \right| = 0 \tag{12}$$

ve

$$\liminf_{\lambda\to 1^-} \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k(u_n - u_k) \right| = 0 \tag{13}$$

koşullarından en az birinin sağlanmasıdır.

Sonuç 2.4 *Kompleks diziler için klasik çift taraflı Tauber koşulu* (6)*,* (12) *ve* (13) *koşulları için yeterlidir.*

2.2 İki Katlı Dizilerin Ağırlıklı Ortalamaları

Tezin bu bölümünde, ağırlıklı ortalamalar metodunda iki katlı diziler için yeni tanımlamalar yapılmıştır ve bazı Tauber tipi teoremler iki katlı diziler için ispatlanmıştır.

2.2.1 İki Katlı Dizilerde Ağırlıklı Ortalamalar Metodu İçin Temel Tanımlar

Tanım 2.10 *İki katlı dizi, tanım kümesi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olan bir fonksiyondur. Diziler görüntü kümelerine göre adlandırılır. Eğer iki katlı bir dizinin görüntü kümesi reel sayılar ise diziye iki katlı reel sayı dizisi, kompleks sayılar ise diziye iki katlı kompleks sayı dizisi denir ve (u_{mn}) veya $u = (u_{mn})$ ile gösterilir. Ayrıca iki katlı bir (u_{mn}) dizisi, birinci indis satırları, ikinci indis sütunları göstermek üzere bir matris ile temsil edilebilir.*

Tanım 2.11 *(u_{mn}) iki katlı bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ için $m, n \geq N$ iken $|u_{mn} - s| < \epsilon$ olacak şekilde en az bir $N = N(\epsilon)$ varsa (u_{mn}) iki katlı dizisi $s \in \mathbb{R}$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır veya P-yakınsak denir. Kısaca $\lim\limits_{m,n\to\infty} u_{mn} = s$ veya $u_{mn} \to s$ ile gösterilir. Ayrıca $u_{mn} = o(1)$ ifadesi (u_{mn}) dizisinin sıfıra P-yakınsak olduğunu belirtir.*

İki katlı diziler için yakınsaklık kavramı daima P-yakınsak anlamında kullanılır.

Tanım 2.12 *Her negatif olmayan m ve n tam sayısı için $|u_{mn}| \leq C$ olacak şekilde en az bir $C > 0$ reel sayısı bulunuyorsa iki katlı (u_{mn}) dizisine sınırlı dizi denir. Ayrıca $u_{mn} = O(1)$ ifadesi (u_{mn}) dizisinin sınırlı olduğunu belirtir.*

Tek katlı dizilerdekinin aksine iki katlı dizilerde yakınsak olan bir dizinin sınırlı olma zorunluluğu yoktur. Aşağıdaki örnekle P-yakınsak olan bir dizinin sınırlı olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 2.2

$$(u_{mn}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dizisi sıfıra P-yakınsaktır, ancak sınırlı değildir.

Tek katlı dizilerdeki $(\overline{N}, p)$ ortalaması iki katlı diziler için $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$, $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$, $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ ortalamaları olarak üç farklı biçimde incelenir.

Tanım 2.13 *$p = (p_j)$ ve $q = (q_k)$ terimleri negatif olmayan $(p_0, q_0 > 0)$ iki dizi olmak üzere*

$$P_m := \sum_{j=0}^{m} p_j \to \infty \ , \ m \to \infty \tag{14}$$

$$Q_n := \sum_{k=0}^{n} q_k \to \infty \ , \ n \to \infty \tag{15}$$

şeklinde tanımlansın. $u = (u_{mn})$ iki katlı reel ya da kompleks sayı dizisi olmak üzere,

(i) (u_{mn}) *dizisinin* $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ *ortalaması:*

$$t_{mn}^{11} := \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_j q_k u_{jk}$$

(ii) (u_{mn}) *dizisinin* $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ *ortalaması:*

$$t_{mn}^{10} := \frac{1}{P_m} \sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn}$$

(iii) (u_{mn}) *dizisinin* $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ *ortalaması:*

$$t_{mn}^{01} := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k u_{mk}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.14 *(u_{mn}) iki katlı bir dizi olsun. Sonlu bir s sayısı için $(\alpha, \beta) = (1, 1) = (1, 0)$ ya da $(0, 1)$ olmak üzere*

$$\lim_{m,n \to \infty} t_{mn}^{\alpha\beta} = s$$

ise (u_{mn}) *dizisi s ye ağırlıklı ortalamalar metoduyla toplanabilirdir denir ve* $u_{mn} \to s\ (\overline{N}, p, q; \alpha, \beta)$ *ile gösterilir.*

Ayrıca özel durum olarak bu metot da $u_{jk} = u_j$ alınırsa $\dfrac{1}{P_m}\displaystyle\sum_{j=0}^{m} p_j u_j$ elde edilir. Her j için $p_j = 1$ alındığında da $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilme metodu Cesàro (veya $(C, 1)$) toplanabilme metoduna indirgenir.

Ağırlıklı ortalamalar metodunda sıkça karşılaşılan birkaç ifadeyi iki katlı diziler için tanımlayalım:

(i) $u = (u_{mn})$ iki katlı dizisi verilsin. $m, n \geq 1$ tam sayıları için

a. (u_{mn}) dizisinin (1,0) anlamında geri farkı:

$$\Delta_{10} u_{mn} := u_{mn} - u_{m-1,n}$$

b. (u_{mn}) dizisinin (0,1) anlamında geri farkı:

$$\Delta_{01} u_{mn} := u_{mn} - u_{m,n-1}$$

c. (u_{mn}) dizisinin (1,1) anlamında geri farkı:

$$\Delta_{11} u_{mn} := \Delta_{10}(\Delta_{01} u_{mn}) = \Delta_{01}(\Delta_{10} u_{mn})$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta_{11} u_{mn} &:= \Delta_{10}(\Delta_{01} u_{mn}) \\ &:= \Delta_{10}(u_{mn} - u_{m,n-1}) \\ &:= u_{mn} - u_{m,n-1} - u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1} \end{aligned}$$

şeklindedir.

(ii)

a. (u_{mn}) iki katlı dizisinin (1,1) anlamında üreteci:

$$V_{mn}^{(11)}(\Delta u) = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} P_{j-1} Q_{k-1} \Delta_{11} u_{jk}$$

b. (u_{mn}) iki katlı dizisinin (1,0) anlamında üreteci:

$$V_{mn}^{(10)}(\Delta u) = \frac{1}{P_m}\sum_{j=1}^{m} P_{j-1}\Delta_{10}u_{jn}$$

c. (u_{mn}) iki katlı dizisinin (0,1) anlamında üreteci:

$$V_{mn}^{(01)}(\Delta u) = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}\Delta_{01}u_{mk}$$

şeklinde tanımlanır.

(iii) (u_{mn}) iki katlı dizi ve m, n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere (u_{mn}) dizisinin Kronecker eşitliği:

$$\begin{aligned} u_{mn} - t_{mn}^{10} - t_{mn}^{01} + t_{mn}^{11} &= V_{mn}^{(11)}(\Delta u) \\ u_{mn} - t_{mn}^{10} &= V_{mn}^{(10)}(\Delta u) \\ u_{mn} - t_{mn}^{01} &= V_{mn}^{(01)}(\Delta u) \end{aligned}$$

olarak verilir.

(iv) m ve n yeterince büyük negatif olmayan tam sayılar ve λ_n, λn nin tam kısmı olmak üzere, iki katlı bir (u_{mn}) dizisinin hareketli ortalamaları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

a. $\lambda > 1$ için $\tau_{mn}^{>}(u) = \dfrac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \displaystyle\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk}$

b. $0 < \lambda < 1$ için $\tau_{mn}^{<}(u) = \dfrac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \displaystyle\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k u_{jk}$

Tanım 2.15 *(Mòricz, 1994)* (u_{mn}) *iki katlı reel sayı dizisi için*

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\liminf_{m,n\to\infty}\min_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}}(u_{jk} - u_{mk} - u_{jn} + u_{mn}) \ge 0 \qquad (16)$$

koşulu gerçekleniyorsa,

ya da denk olarak,

her $\epsilon > 0$ *için* $n_1 < m < j \le \lambda_m$ *ve* $n_1 < n < k \le \lambda_n$ *iken* $u_{jk} - u_{mk} - u_{jn} + u_{mn} \ge \epsilon$ *olacak şekilde en az bir* $n_1 > 0$ *ve* $\lambda > 1$ *varsa* (u_{mn}) *dizisine (1,1) anlamında yavaş azalan denir.*

(u_{mn}) *iki katlı reel sayı dizisi için,*

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\liminf_{m,n\to\infty}\min_{m<j\le\lambda_m}(u_{jn} - u_{mn}) \ge 0$$

koşulu gerçekleniyorsa (u_{mn}) *dizisi (1,0) anlamında yavaş azalandır,*

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \liminf_{m,n\to\infty} \min_{n<k\leq\lambda_n} (u_{mk}-u_{mn}) \geq 0$$

koşulu gerçekleniyorsa (u_{mn}) *dizisi (0,1) anlamında yavaş azalandır denir.*

Mòricz (1994), (u_{mn}) iki katlı dizisi için (16) koşulunun

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \liminf_{m,n\to\infty} \min_{\substack{\lambda_m<j\leq m\\ \lambda_n<k\leq n}} (u_{jk}-u_{mk}-u_{jn}+u_{mn}) \geq 0$$

koşuluna denk olduğunu ifade etmiştir.

Tanım 2.16 *(Mòricz, 1994)* (u_{mn}) *iki katlı kompleks sayı dizisi için,*

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{\substack{m<j\leq\lambda_m\\ n<k\leq\lambda_n}} |u_{jk}-u_{mk}-u_{jn}+u_{mn}| = 0$$

koşulu gerçekleniyorsa (u_{mn}) *dizisi (1,1) anlamında yavaş salınımlıdır,*

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{m<j\leq\lambda_m} |u_{jn}-u_{mn}| = 0$$

koşulu gerçekleniyorsa (u_{mn}) *dizisi (1,0) anlamında yavaş salınımlıdır,*

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{n<k\leq\lambda_n} |u_{mk}-u_{mn}| = 0$$

koşulu gerçekleniyorsa (u_{mn}) *dizisi (0,1) anlamında yavaş salınımlıdır denir.*

Her P-yakınsak dizi (1,1), (1,0) ve (0,1) anlamında yavaş salınımlıdır. Fakat tersinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örnekle verilmiştir.

Örnek 2.3 $(u_{mn}) = (\log m \log n)$ *dizisi (1,1) anlamında yavaş salınımlı bir dizidir, fakat P-yakınsak değildir: (1,1) anlamında yavaş salınımlık tanımından,*

$$\begin{aligned} u_{jk}-u_{mk}-u_{jn}+u_{mn} &= \log j \log k - \log m \log k - \log j \log n + \log m \log n \\ &= \log k \log\left(\frac{j}{m}\right) - \log n \log\left(\frac{j}{m}\right) \\ &= \log\left(\frac{j}{m}\right)\log\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın maksimumuna geçilirse,

$$\max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} |u_{jk} - u_{mk} - u_{jn} + u_{mn}| = \log\left(\frac{\lambda_m}{m}\right)\log\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. $m, n \to \infty$ *iken yukarıdaki son eşitliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa,*

$$\limsup_{m,n\to\infty} \max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} |u_{jk} - u_{mk} - u_{jn} + u_{mn}| = \log\lambda\log\lambda = \log^2\lambda$$

olur. Son olarak $\lambda \to 1^+$ *iken eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa,*

$$\lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} |u_{jk} - u_{mk} - u_{jn} + u_{mn}| = \lim_{\lambda\to1^+} \log^2\lambda = 0$$

bulunur. Dolayısıyla (u_{mn}) *dizisi (1,1) anlamında yavaş salınımlıdır. Fakat* (u_{mn}) *dizisi* $m, n \to \infty$ *iken sonlu bir limit değerine sahip olmadığından* P*-yakınsak değildir.*

Ağırlıklı ortalamalar metodu (14) ve (15) koşulları altında regüler metottur. Fakat tek katlı dizilerden farklı olarak iki katlı dizilerin regülerliğinde sınırlılık koşulu gerekir. Yani iki katlı (u_{mn}) dizisi sınırlı ve P-yakınsak ise yakınsadığı değere $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilirdir. Fakat sınırlı ve $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir iki katlı bir dizi P-yakınsak olmayabilir. Bazı koşullar altında $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilirlikten iki katlı bir dizinin P-yakınsaklığına geçilebilir. Bu koşullara Tauber koşulları ve sonucunda oluşan teoremlere de Tauber tipi teoremler denir.

Aşağıda sınırlı ve $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir fakat P-yakınsak olmayan bir dizi örneği verilmiştir.

Örnek 2.4 $(u_{mn}) = ((-1)^{m+n})$ *dizisi sınırlıdır ve* P*-yakınsak değildir. Fakat sıfıra* $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ *toplanabilirdir. Özel olarak* $p = q = 1$ *alınırsa*

$$t^{11}_{mn} = \frac{1}{mn}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{j+k}$$

ağırlıklı ortalamalar dizisi elde edilir. $((-1)^{m+n})$ *dizisi sınırlı olduğundan* $m, n \to \infty$ *iken* (t^{11}_{mn}) *dizisinin limiti sıfırdır.*

Tek katlı diziler için verilen Landau (1910) nun tek taraflı Tauber koşulu iki katlı diziler için düzenlenmiştir. Ancak tek katlı dizilerden farklı olarak bu koşul iki katlı (u_{mn}) dizisi için (1,1), (1,0) ve (0,1) anlamında Landau (1910) nun tek taraflı Tauber koşulu olmak üzere üç farklı biçimde incelenmiştir. İki katlı (u_{mn}) dizisi için (1,1) anlamında Landau (1910) nun koşulu $m, n > k_1$ iken

$$mn(u_{mn} - u_{m-1,n} - u_{m,n-1} + u_{m-1,n-1}) \geq -H$$

olacak şekilde en az bir H ve $k_1 > 0$ sabitlerinin mevcut olması olarak verilir. İki katlı (u_{mn}) dizisi (1,1) anlamında Landau (1910) koşulunu sağlıyorsa (1,1) anlamında yavaş azalandır. İki katlı (u_{mn}) dizisi için (1,0) anlamında Landau (1910) nun koşulu $m > k_1$ iken

$$m(u_{mn} - u_{m-1,n}) \geq -H$$

olacak şekilde en az bir H ve $k_1 > 0$ sabitleri vardır. İki katlı (u_{mn}) dizisi (1,0) anlamında Landau (1910) koşulunu sağlıyorsa (1,0) anlamında yavaş azalandır. İki katlı (u_{mn}) dizisi için (0,1) anlamında Landau (1910) nun koşulu $n > k_1$ iken

$$n(u_{mn} - u_{m,n-1}) \geq -H$$

olacak şekilde en az bir H ve $k_1 > 0$ sabitleri vardır. İki katlı (u_{mn}) dizisi (0,1) anlamında Landau (1910) koşulunu sağlıyorsa (0,1) anlamında yavaş azalandır (Mòricz, 1994).

2.2.2 İki Katlı Dizilerde Ağırlıklı Ortalamalar Metodu İçin Bazı Tauber Tipi Teoremler

Bu kısımda ilk olarak iki katlı kompleks sayı dizileri için ağırlıklı ortalamalar metodu ile toplanabilirlik ile yakınsaklık arasında gerek ve yeter koşullar verilecektir. Daha sonrasında bu koşullar iki katlı reel sayı dizileri için incelenecektir.

Aşağıda verilecek olan lemma, Tauber tipi teoremin ispatında önemli rol oynamaktadır.

Lemma 2.5 *(Chen and Hsu, 2000) $p, q \in SVA$ ve (u_{mn}) dizisi sonlu bir s değerine $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir olsun. O halde her $\lambda > 1$ için*

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} = s \qquad (17)$$

ve benzer şekilde her $0<\lambda<1$ *için*

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_jq_ku_{jk}=s \tag{18}$$

olur.

İspat. $\lambda>1$ alalım. Böylelikle $\lambda_m>m$ ve $\lambda_n>n$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_ku_{jk}\\
=&\ \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\left[\left(\sum_{j=0}^{\lambda_m}-\sum_{j=0}^{m}\right)\left(\sum_{k=0}^{\lambda_n}-\sum_{k=0}^{n}\right)\right]p_jq_ku_{jk}\\
=&\ \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\left(\sum_{j=0}^{\lambda_m}\sum_{k=0}^{\lambda_n}p_jq_ku_{jk}-\sum_{j=0}^{\lambda_m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_ku_{jk}\right.\\
-&\left.\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{\lambda_n}p_jq_ku_{jk}+\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_ku_{jk}\right)\\
=&\ \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}(P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}-P_{\lambda_m}Q_nt^{11}_{\lambda_m,n}-P_mQ_{\lambda_n}t^{11}_{m,\lambda_n}+P_mQ_nt^{11}_{mn})\\
=&\ \frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}-\frac{P_{\lambda_m}Q_n}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{11}_{\lambda_m,n}\\
-&\ \frac{P_mQ_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{11}_{m,\lambda_n}+\frac{P_mQ_n}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{11}_{mn}\\
=&\ \left(1+\frac{P_m}{(P_{\lambda_m}-P_m)}+\frac{Q_n}{(Q_{\lambda_n}-Q_n)}+\frac{P_mQ_n}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\right)t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}\\
+&\ \left(-\frac{Q_n}{(Q_{\lambda_n}-Q_n)}-\frac{P_mQ_n}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\right)t^{11}_{\lambda_m,n}\\
+&\ \left(-\frac{P_m}{(P_{\lambda_m}-P_m)}-\frac{P_mQ_n}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\right)t^{11}_{m,\lambda_n}+\frac{P_mQ_n}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{11}_{mn}\\
=&\ t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}+\frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}\right)-1}t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}+\frac{1}{\left(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n}\right)-1}t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}+\frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1\right)\left(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n}-1\right)}t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}\\
-&\ \frac{1}{\left(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n}\right)-1}t^{11}_{\lambda_m,n}-\frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1\right)\left(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n}-1\right)}t^{11}_{\lambda_m,n}-\frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}\right)-1}t^{11}_{m,\lambda_n}\\
-&\ \frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1\right)\left(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n}-1\right)}t^{11}_{m,\lambda_n}+\frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1\right)\left(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n}-1\right)}t^{11}_{mn}\\
=&\ t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}+\frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}\right)-1}(t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}-t^{11}_{m,\lambda_n})+\frac{1}{\left(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n}\right)-1}(t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}-t^{11}_{\lambda_m,n})\\
+&\ \frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1\right)\left(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n}-1\right)}(t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}-t^{11}_{\lambda_m,n}-t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}+t^{11}_{mn})
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.1 den ve (u_{mn}) dizisi sonlu bir s değerine $(\overline{N},p,q;1,1)$ toplanabilir olduğundan

$$\left|\frac{1}{\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1}(t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}-t^{11}_{m,\lambda_n})\right| \ \le\ \frac{|t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n}-t^{11}_{m,\lambda_n}|}{\inf\limits_{k\ge m}\left|\frac{P_{\lambda_k}}{P_k}-1\right|}\ \to\ 0\ ,\ (m,n)\to\infty$$

eşitsizliğine ulaşılır. Aynı durumun eşitliğin 3. ve 4. terimleri içinde geçerli olmasından ve $\lim_{m,n\to\infty} t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n} = s$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafının $m, n \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} = s$$

gösterilmek istenen koşul elde edilir. Her $0 < \lambda < 1$ için de benzer yollar izlenerek ispat yapılabilir. □

Lemma 2.5 $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ ortalamalarının sonlu bir değere yakınsaklığının, hareketli ağırlıklı ortalamalarının da aynı değere yakınsak olması gerektirdiğini gösterir.

Teorem 2.3 *(Chen and Hsu, 2000) $p, q \in SVA$ ve (u_{mn}) iki katlı kompleks sayı dizisi sonlu bir s değerine $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir olsun. (u_{mn}) dizisinin s ye yakınsak olması için gerek ve yeter koşul*

$$\liminf_{\lambda\to 1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \left| \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \right| = 0 \quad (19)$$

veya öyle bir $\lambda > 1$ vardır ki

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) = 0 \quad (20)$$

ve benzer şekilde

$$\liminf_{\lambda\to 1^-} \limsup_{m,n\to\infty} \left| \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (u_{mn} - u_{jk}) \right| = 0 \quad (21)$$

veya öyle bir $0 < \lambda < 1$ vardır ki

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (u_{mn} - u_{jk}) = 0 \quad (22)$$

şartlarından birinin sağlanmasıdır.

(20) koşulu bir tane $\lambda > 1$ için sağlanıyorsa tüm $\lambda > 1$ ler için sağlanır. Aynı durum (22) koşulu için de geçerlidir.

İspat. $\lambda > 1$, $\lambda_m > m$ ve $\lambda_n > n$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \\ = &\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} - u_{mn} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse

$$u_{mn} = -\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn})$$
$$+ \quad \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} \tag{23}$$

olur. Elde edilen son (23) eşitliğinde denklemin her iki tarafına $-s$ eklenirse

$$u_{mn} - s = -\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn})$$
$$+ \quad \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} - s$$

eşitliği bulunur. Elde edilen son eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$|u_{mn} - s| \leq \left| -\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \right|$$
$$+ \quad \left| \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} - s \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $m, n \to \infty$ iken her iki tarafın üst limiti alınırsa,

$$\limsup_{m,n\to\infty} |u_{mn} - s| \leq \limsup_{m,n\to\infty} \left| -\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \right|$$
$$+ \quad \limsup_{m,n\to\infty} \left| \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} - s \right|$$

olur. Bu eşitsizlik her $\lambda > 1$ için sağlandığından

$$\limsup_{m,n\to\infty} |u_{mn} - s|$$
$$\leq \liminf_{\lambda\to 1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \left| -\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \right|$$
$$+ \quad \limsup_{m,n\to\infty} \left| \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} - s \right| \tag{24}$$

eşitsizliği bulunur. (24) eşitsizliği, Lemma 2.5 deki (17) ve (19) koşulundan

$$\limsup_{m,n\to\infty} |u_{mn} - s| \leq 0$$

eşitsizliğine dönüşür. Ayrıca

$$0 \leq \liminf_{m,n\to\infty} |u_{mn} - s| \leq \limsup_{m,n\to\infty} |u_{mn} - s| \leq 0$$

olduğundan

$$\lim_{m,n\to\infty} |u_{mn} - s| = 0$$

bulunur ve buradan $\lim\limits_{m,n\to\infty} u_{mn} = s$ olduğu görülür. Diğer bir taraftan, $0 < \lambda < 1$ için ispat benzer şekildedir. □

Negatif olmayan p ve q dizilerini ele alalım.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn})\right| \\
= &\left|\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mk} - u_{mk} - u_{mn})\right| \\
\leq &\ \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k |u_{jk} - u_{mk}| \\
+ &\ \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k |u_{mk} - u_{mn}|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sağ tarafın maksimumuna geçilirse

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(P_{\lambda_n} - P_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn})\right| \\
\leq &\max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} |u_{jk} - u_{mk}| + \max_{n<k\leq\lambda_n} |u_{mk} - u_{mn}|
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan aşağıdaki (25)-(26) koşulları sağlanırsa (19) koşulunun gerçekleşmesi gerektiği sonucuna ulaşılır:

$$\lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} |u_{jk} - u_{mk}| = 0 \tag{25}$$

$$\lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{n<k\leq\lambda_n} |u_{mk} - u_{mn}| = 0 \tag{26}$$

Eğer (u_{mn}) dizisi (25) koşulunu gerçekliyorsa (u_{mn}) dizisine 1. indise göre kuvvetli, (26) koşulunu gerçekliyorsa (u_{mn}) dizisine 2. indise göre yavaş salınımlı denir. İki katlı dizilerde kuvvetlilik kavramı yavaş salınımlılığı gerektirir (Chen and Chang, 2007; Mòricz, 2003).

Sonuç 2.5 *(Chen and Hsu, 2000) $p, q \in SVA_+$ ve (u_{mn}) iki katlı kompleks sayı dizisi s değerine $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir olsun.* (25)-(26) *koşulları sağlanıyorsa (u_{mn}) dizisi s ye yakınsar.*

H sabit ve $n_1 > 0$ olmak üzere

$$j|u_{jn} - u_{j-1,n}| \leq H \ , \ (j, n > n_1) \tag{27}$$

$$k|u_{mk} - u_{m,k-1}| \leq H \ , \ (m, k > n_1) \tag{28}$$

koşulları sırasıyla (25)-(26) koşullarını gerektirir. (27) koşulunun (25) koşulunu gerektirdiğini gösterelim:

H sabit ve $n_1 > 0$ olmak üzere $j|u_{jn} - u_{j-1,n}| \leq H$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} u_{jn} - u_{mn} &= u_{jn} - u_{j-1,n} + u_{j-1,n} - u_{j-2,n} + u_{j-2,n} + ... - u_{mn} \\ &= \sum_{k=m+1}^{j} (u_{kn} - u_{k-1,n}) \end{aligned}$$

eşitliğinde her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$|u_{jn} - u_{mn}| \leq \sum_{k=m+1}^{j} |u_{kn} - u_{k-1,n}|$$

eşitsizliği bulunur. Kabulümüzden dolayı $|u_{kn} - u_{k-1,n}| \leq \dfrac{H}{k}$ olduğundan

$$\begin{aligned} |u_{jn} - u_{mn}| &\leq \sum_{k=m+1}^{j} \frac{H}{k} \\ &= H \left(\sum_{k=m+1}^{j} \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $m+1 < k$ olduğundan $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{m+1}$ dir. Son eşitsizlikte $\dfrac{1}{k}$ yerine $\dfrac{1}{m+1}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} |u_{jn} - u_{mn}| &\leq H \frac{1}{m+1}(j-m) \\ &\leq H \frac{1}{m}(j-m) \end{aligned}$$

olur. Öyleyse her iki tarafın maksimumuna geçilirse,

$$\begin{aligned} \max_{m<j\leq\lambda_m} |u_{jn} - u_{mn}| &\leq \max_{m<j\leq\lambda_m} \frac{H}{m}(j-m) \\ &= \frac{H}{m} \max_{m<j\leq\lambda_m} (j-m) \\ &\leq \frac{H}{m}(\lambda_m - m) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafın $m, n \to \infty$ iken üst limiti alınırsa,

$$\limsup_{m,n\to\infty} \max_{m<j\leq\lambda_m} |u_{jn} - u_{mn}| \leq H \limsup_{m,n\to\infty} \frac{\lambda_m - m}{m}$$

bulunur. Sandviç teoreminden $\lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m}{m} = \lambda$ olduğundan

$$\limsup_{m,n\to\infty} \max_{m<j\leq\lambda_m} |u_{jn} - u_{mn}| \leq H(\lambda - 1)$$

olduğu görülür. Son olarak $\lambda \to 1^+$ iken her iki tarafın limitine geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{m<j\leq\lambda_m} |u_{jn} - u_{mn}| \leq \lim_{\lambda\to1^+} H(\lambda - 1) = 0$$

bulunur.

$$\lim_{\lambda\to1^+} \liminf_{m,n\to\infty} \max_{m<j\leq\lambda_m} |u_{jn} - u_{mn}| \leq \lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{m<j\leq\lambda_m} |u_{jn} - u_{mn}| \leq 0$$

olduğundan sandviç teoreminden

$$\lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{m,n\to\infty} \max_{m<j\leq\lambda_m} |u_{jn} - u_{mn}| = 0$$

elde edilir. Yani (25) koşulu gerçekleşmiş olur.

Yapılan işlemler doğrultusunda Sonuç 2.5 aşağıda verilecek olan sonucu doğurur.

Sonuç 2.6 *(Chen and Hsu, 2000) $p, q \in SVA_+$ ve (u_{mn}) iki katlı kompleks sayı dizisi s değerine $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir olsun.* (27)-(28) *koşulları öyle bir $n_1 > 0$ ve H sabiti için sağlanıyorsa (u_{mn}) dizisi s ye yakınsar.*

$p, q \in SVA_+$ ve $\{P_m\}_{m=0}^{\infty}$ ile $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif indeksli düzenli değişimli olsun. ρ, $\{P_m\}_{m=0}^{\infty}$ ile ilişkili indeks olmak üzere $\lim_{m\to\infty} \frac{P_{\lambda_m}}{P_m} = \lambda^\rho$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{m\to\infty} \sum_{m<j\leq\lambda_m} \frac{p_j}{P_j} \\ &\leq \limsup_{m\to\infty} \frac{P_{\lambda_m} - P_m}{P_m} \\ &= \limsup_{m\to\infty} \frac{P_{\lambda_m}}{P_m} - 1 \\ &= \lambda^\rho - 1 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının $\lambda \to 1^+$ iken limiti alınırsa,

$$0 \leq \lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{m\to\infty} \sum_{m<j\leq\lambda_m} \frac{p_j}{P_j} \leq \lim_{\lambda\to1^+} \lambda^\rho - 1 = 0$$

elde edilir. Ve sandviç teoreminden

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{m\to\infty}\sum_{m<j\leq\lambda_m}\frac{p_j}{P_j}=0 \tag{29}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{n\to\infty}\sum_{n<k\leq\lambda_n}\frac{q_k}{Q_k}=0 \tag{30}$$

olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak aşağıda verilecek olan iki koşul sırasıyla (25)-(26) koşullarını gerektirir.

$$|u_{jn}-u_{j-1,n}|\leq H\frac{p_j}{P_j}\ \ ,\ \ (j,n>n_1) \tag{31}$$

$$|u_{mk}-u_{m,k-1}|\leq H\frac{q_k}{Q_k}\ \ ,\ \ (m,k>n_1) \tag{32}$$

Her j için $p_j=1$ alınırsa (31) koşulu (27) koşuluna, her k için $q_k=1$ alınırsa (32) koşulu (28) koşuluna indirgenir.

(31) koşulunun (25) koşulunu gerektirdiğini gösterelim:

$$\begin{aligned}|u_{jn}-u_{mn}| &\leq \sum_{k=m+1}^{j}|u_{kn}-u_{k-1,n}|\\ &\leq \sum_{k=m+1}^{j}H\frac{p_k}{P_k}\\ &= H\sum_{k=m+1}^{j}\frac{p_k}{P_k}\end{aligned}$$

(31) koşulu ile yukarıdaki eşitsizlik elde edilir. Her iki tarafın maksimumuna geçilirse

$$\max_{m<j\leq\lambda_m}|u_{jn}-u_{mn}|\leq H\sum_{m<j\leq\lambda_m}\frac{p_j}{P_j}$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafın $m\to\infty$ iken üst limiti alınırsa

$$\limsup_{m\to\infty}\max_{m<j\leq\lambda_m}|u_{jn}-u_{mn}|\leq H\limsup_{m\to\infty}\sum_{m<j\leq\lambda_m}\frac{p_j}{P_j}$$

olur. Son olarak her iki tarafın $\lambda\to 1^+$ iken limitine geçilirse

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{m\to\infty}\max_{m<j\leq\lambda_m}|u_{jn}-u_{mn}|\leq H\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{m\to\infty}\sum_{m<j\leq\lambda_m}\frac{p_j}{P_j}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, (29) eşitsizliğinden yararlanarak son elde edilen eşitsizliğin sağ tarafı 0 olacağından

$$0\leq\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{m\to\infty}\max_{m<j\leq\lambda_m}|u_{jn}-u_{mn}|\leq 0$$

olur ve son olarak sandviç teoreminden istenilen

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_{m \to \infty} \max_{m < j \leq \lambda_m} |u_{jn} - u_{mn}| = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 2.7 *(Chen and Hsu, 2000) p, q negatif olmayan iki dizi, $\{P_m\}_{m=0}^{\infty}$ ile $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif indeksli düzenli değişimli dizi olmak üzere (u_{mn}) iki katlı kompleks sayı dizisi s değerine $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir olsun.* (31)-(32) *koşulları sağlanıyorsa (u_{mn}) dizisi de aynı s değerine yakınsar.*

$(\overline{N}, p, q; 1, 0)$ toplanabilme için (t_{mn}^{10}) dizisi tanımlanırken $(\overline{N}, p, q; 1, 0)$ metodunda q bağımsız değişkendir. Bunun sonucu doğrultusunda $(\overline{N}, p, q; 1, 0)$ yerine $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ yazılabilir. Benzer şekilde $(\overline{N}, p, q; 0, 1)$ metodunda p bağımsız değişken olduğundan $(\overline{N}, p, q; 0, 1)$ yerine $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ yazılabilir.

Lemma 2.6 *(Chen and Hsu, 2000) $p \in SVA$ ve (u_{mn}) dizisi s değerine $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilir olsun. O halde her $\lambda > 1$ için*

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{P_{\lambda_m} - P_m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j u_{jn} = s \tag{33}$$

ve benzer şekilde her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{P_m - P_{\lambda_m}} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} p_j u_{jn} = s \tag{34}$$

olur.

İspat. $\lambda > 1$ ve $\lambda_m > m$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{P_{\lambda_m}-P_m}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j u_{jn} &= \frac{1}{P_{\lambda_m}-P_m}\left(\sum_{j=0}^{\lambda_m} - \sum_{j=0}^{m}\right) p_j u_{jn} \\
&= \frac{1}{P_{\lambda_m}-P_m}\sum_{j=0}^{\lambda_m} p_j u_{jn} - \frac{1}{P_{\lambda_m}-P_m}\sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn} \\
&= \frac{P_{\lambda_m}}{P_{\lambda_m}(P_{\lambda_m}-P_m)}\sum_{j=0}^{\lambda_m} p_j u_{jn} - \frac{P_m}{P_m(P_{\lambda_m}-P_m)}\sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn} \\
&= \left(\frac{1}{P_{\lambda_m}} + \frac{P_m}{P_{\lambda_m}(P_{\lambda_m}-P_m)}\right)\sum_{j=0}^{\lambda_m} p_j u_{jn} - \frac{P_m}{P_{\lambda_m}-P_m} t_{mn}^{10} \\
&= \frac{1}{P_{\lambda_m}}\sum_{j=0}^{\lambda_m} p_j u_{jn} + \frac{P_m}{P_{\lambda_m}(P_{\lambda_m}-P_m)}\sum_{j=0}^{\lambda_m} p_j u_{jn} \\
&- \frac{P_m}{P_{\lambda_m}-P_m} t_{mn}^{10} \\
&= t_{\lambda_m,n}^{10} + \frac{P_m}{P_{\lambda_m}-P_m} t_{\lambda_m,n}^{10} - \frac{P_m}{P_{\lambda_m}-P_m} t_{mn}^{10} \\
&= t_{\lambda_m,n}^{10} + \frac{1}{\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1}\left(t_{\lambda_m,n}^{10} - t_{mn}^{10}\right) \qquad (35)
\end{aligned}
$$

eşitliği vardır. Lemma 2.3 (i) şıkkı kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{P_n}{P_{\lambda_n}}} \\
&= \left\{\liminf_{n\to\infty}\left(1-\frac{P_n}{P_{\lambda_n}}\right)\right\}^{-1} \\
&= \left\{1-\limsup_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{\lambda_n}}\right\}^{-1} \\
&= \left\{1-\frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{\lambda n}}{P_n}}\right\}^{-1} < \infty \qquad (36)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. (36) eşitsizliğinden ve (u_{mn}) dizisinin s ye $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilir oluşundan, $m, n \to \infty$ iken (35) eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa, eşitliğin sağ tarafı s ye eşit olur. Böylelikle sonuç olarak,

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{P_{\lambda_m}-P_m}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j u_{jn} = s$$

elde edilir. $0 < \lambda < 1$ durumu için ispat benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 2.4 *(Chen and Hsu, 2000) $p \in SVA$ ve (u_{mn}) iki katlı kompleks sayı dizisi s değerine $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilir olsun. (u_{mn}) dizisinin s ye yakınsak* *olması için gerek ve yeter koşul*

$$\liminf_{\lambda\to 1^+}\limsup_{m,n\to\infty}\left|\frac{1}{P_{\lambda_m}-P_m}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}p_j(u_{jn}-u_{mn})\right|=0 \tag{37}$$

ya da öyle bir $\lambda>1$ *vardır ki*

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{P_{\lambda_m}-P_m}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}p_j(u_{jn}-u_{mn})=0 \tag{38}$$

ve benzer şekilde

$$\liminf_{\lambda\to 1^-}\limsup_{m,n\to\infty}\left|\frac{1}{P_m-P_{\lambda_m}}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}p_j(u_{mn}-u_{jn})\right|=0 \tag{39}$$

ya da öyle bir $0<\lambda<1$ *vardır ki*

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{P_m-P_{\lambda_m}}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}p_j(u_{mn}-u_{jn})=0 \tag{40}$$

şartlarından birinin sağlanmasıdır.

(38) *koşulu bir tane* $\lambda>1$ *için sağlanıyorsa tüm* $\lambda>1$ *ler için sağlanır. Aynı durum* (40) *koşulu için de geçerlidir.*

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 2.3 ile benzer şekilde verilebilir. □

Negatif olmayan p dizileri için (27) koşulu sağlanıyorsa (25) koşulu sağlanır. Dolayısıyla (33) koşulu sağlanır. Böylece Teorem 2.4 ün aşağıdaki genelleştirilmiş sonucunu verebiliriz.

Sonuç 2.8 $p\in SVA_+$ *ve* (u_{mn}) *iki katlı kompleks sayı dizisi* s *değerine* $(\overline{N},p,*;1,0)$ *toplanabilir olsun.* (25) *veya* (27) *koşullarından biri sağlanıyorsa* $m,n\to\infty$ *iken* (u_{mn}) *dizisi* s *ye yakınsar.*

İki katlı kompleks değerli sayı dizileri için verilen teorem ve sonuçlar iki katlı reel sayı dizilerine indirgenebilir.

Teorem 2.5 *(Chen and Hsu, 2000)* $p,q\in SVA_r$ *ve* (u_{mn}) *iki katlı reel sayı dizisi* s *değerine* $(\overline{N},p,q;1,1)$ *toplanabilir olsun. O halde her* $\lambda>1$ *için*

$$\liminf_{m,n\to\infty}\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_k(u_{jk}-u_{mn})=s-\limsup_{m,n\to\infty}u_{mn} \tag{41}$$

ve benzer şekilde her $0 < \lambda < 1$ *için*

$$\liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (u_{mn} - u_{jk}) = \liminf_{m,n\to\infty} u_{mn} - s \tag{42}$$

şeklindedir.

İspat. $\lambda > 1, \lambda_m > m$ ve $\lambda_n > n$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \\ = & \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} - u_{mn} \end{aligned}$$

dir. Her iki tarafın alt limitine geçilirse

$$\begin{aligned} & \liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \\ = & \liminf_{m,n\to\infty} \left(\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} - u_{mn} \right) \\ = & \liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} + \liminf_{m,n\to\infty} (-u_{mn}) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $u_{mn} \to s\ (\overline{N}, p, q; 1, 1)$ olduğundan Lemma 2.5 gereğince hareketli ağırlıklı ortalamaları da aynı s değerine yakınsaktır. Öyleyse

$$\begin{aligned} & \liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \\ & \qquad = s + \liminf_{m,n\to\infty} (-u_{mn}) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Son olarak $\liminf(-u_{mn}) = -\limsup(u_{mn})$ olduğundan

$$\liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) = s - \limsup_{m,n\to\infty} u_{mn}$$

istenilen sonuca ulaşılır. □

(41) ve (42) koşullarında $\lambda \to 1^+$ ve $\lambda \to 1^-$ iken üst limit alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.9 *(Chen and Hsu, 2000)* $p, q \in SVA_r$ *ve* (u_{mn}) *iki katlı reel sayı dizisi s değerine* $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ *toplanabilir olsun. O halde*

$$\limsup_{\lambda\to 1^+} \liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$s \geq \limsup_{m,n\to\infty} u_{mn}$$

ve

$$\limsup_{\lambda\to 1^-} \liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (u_{mn} - u_{jk}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\liminf_{m,n\to\infty} u_{mn} \geq s$$

olur.

Sonuç 2.10 *(Chen and Hsu, 2000)* $p, q \in SVA_r$ *ve* (u_{mn}) *iki katlı reel sayı dizisi* s *değerine* $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ *toplanabilir olsun.* (u_{mn}) *dizisinin* s *ye yakınsak olması için gerek ve yeter koşul*

$$\limsup_{\lambda\to 1^+} \liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk} - u_{mn}) \geq 0 \qquad (43)$$

ve

$$\limsup_{\lambda\to 1^-} \liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (u_{mn} - u_{jk}) \geq 0 \qquad (44)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

3 AĞIRLIKLI ORTALAMALAR METODUNDA ÜRETEÇ DİZİLERİ İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde ilk olarak, iki katlı (u_{mn}) dizisinin üreteci olan $(V^{11}_{mn}(\Delta u))$ dizisinin bazı özelliklerinden bahsedilecektir. Daha sonra bu üreteç dizisi üzerine özel koşullar koyarak $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilme metodu için bazı Tauber tipi teoremler ispatlanacaktır.

3.1 Üreteç Dizileri İçin Bazı Lemmalar

Çalışmanın bu kısmında, ana teoremlerin ispatlarında kullanılacak bazı lemmalara yer verilmiştir.

Tek katlı diziler için verilen ağırlıklı Kronecker eşitliği aşağıdaki gibi iki katlı dizilere genişletilebilir.

Lemma 3.1 *(Çanak and Totur, 2018) (u_{mn}) iki katlı dizisinin üreteci*

$$V^{(11)}_{mn}(\Delta u) = \frac{1}{P_m Q_n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_{j-1}Q_{k-1}\Delta_{11}u_{jk}$$

olmak üzere

$$u_{mn} - t^{(10)}_{mn} - t^{(01)}_{mn} + t^{(11)}_{mn} = V^{(11)}_{mn}(\Delta u)$$

dir.

İspat. Tanımlardan yararlanarak,

$$\begin{aligned} & u_{mn} - t^{(10)}_{mn} - t^{(01)}_{mn} + t^{(11)}_{mn} \\ = \;& u_{mn} - \frac{1}{P_m}\sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn} - \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k u_{mk} + \frac{1}{P_m Q_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} u_{jk} \\ = \;& \frac{1}{P_m Q_n}\left(P_m Q_n u_{mn} - Q_n\sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn} - P_m\sum_{k=0}^{n} q_k u_{mk} + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_j q_k u_{jk}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_jq_k(u_{mn}-u_{jn}-u_{mk}+u_{jk}) \\
&= \frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_jq_k[(u_{mn}-u_{mk})-(u_{jn}-u_{jk})] \\
&= \frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} P_{j-1}\Delta_{10}q_k(u_{mk}-u_{jk}) \\
&= \frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_{j-1}Q_{k-1}\Delta_{11}u_{jk}
\end{aligned}
$$

gösterilmek istenen eşitlik elde edilir. □

Sonuç 3.1 *(Çanak and Totur, 2018)* $V_{mn}^{(10)}(\Delta u) = \dfrac{1}{P_m}\sum_{j=0}^{m} P_{j-1}\Delta_{10}u_{jn}$ *ve* $V_{mn}^{(01)}(\Delta u) = \dfrac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} Q_{k-1}\Delta_{01}u_{mk}$ *olmak üzere Lemma 3.1 deki eşitliğe benzer olarak ağırlıklı Kronecker eşitliği aşağıdakiler gibi de verilebilir:*

(i) $u_{mn} - t_{mn}^{(10)} = V_{mn}^{(10)}(\Delta u)$

(ii) $u_{mn} - t_{mn}^{(01)} = V_{mn}^{(01)}(\Delta u)$.

İspat. Eşitliklerin ispatları Lemma 3.1 ispatı ile benzer şekilde verilebilir. □

Sıradaki Lemma $(V_{mn}^{(10)}(\Delta u))$, $(V_{mn}^{(01)}(\Delta u))$ ve $(V_{mn}^{(11)}(\Delta u))$ dizileri arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Lemma 3.2 *(Çanak and Totur, 2018)*

$$V_{mn}^{(10)}(\Delta V^{(01)}(\Delta u)) = V_{mn}^{(11)}(\Delta u)$$

ve

$$V_{mn}^{(01)}(\Delta V^{(10)}(\Delta u)) = V_{mn}^{(11)}(\Delta u)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Kronecker eşitliklerinden ve $t_{mn}^{(10)}\left(t_{mn}^{(01)}\right) = t_{mn}^{(11)}$ olmasından yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
V_{mn}^{(10)}(\Delta V^{(01)}(\Delta u)) &= V_{mn}^{(01)}(\Delta u) - t_{mn}^{(10)}(V^{(01)}(\Delta u)) \\
&= u_{mn} - t_{mn}^{(01)}(u) - t_{mn}^{(10)}(u_{mn} - t_{mn}^{(01)}) \\
&= u_{mn} - t_{mn}^{(01)}(u) - t_{mn}^{(10)}(u) + t_{mn}^{(11)}(u) \\
&= V_{mn}^{(11)}(\Delta u).
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. İkinci eşitliğin ispatı da birinci ile benzer şekildedir. □

Lemma 3.3 *(Çanak and Totur, 2018) Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

(i) $\dfrac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}t_{mn}^{(10)}(u) = V_{mn}^{(10)}(\Delta u)$

(ii) $\dfrac{Q_{n-1}}{q_n}\Delta_{01}t_{mn}^{(01)}(u) = V_{mn}^{(01)}(\Delta u)$.

İspat. $t_{mn}^{(10)}$ dizisinin geri farkını m ye göre alırsak,

$$\begin{aligned}
\Delta_{10}t_{mn}^{(10)}(u) &= \Delta_{10}\left(\frac{1}{P_m}\sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn}\right) \\
&= \frac{1}{P_m}\sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn} - \frac{1}{P_{m-1}}\sum_{j=0}^{m-1} p_j u_{jn} \\
&= \frac{1}{P_m P_{m-1}}\left(P_{m-1}\sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn} - P_m\sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn}\right) \\
&= \frac{1}{P_m P_{m-1}}\left(P_{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} p_j u_{jn} + P_{m-1}p_m u_{mn}\right. \\
&\left. - P_{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} p_j u_{jn} - p_m\sum_{j=0}^{m-1} p_j u_{jn}\right) \\
&= \frac{1}{P_m P_{m-1}}\left(P_{m-1}p_m u_{mn} - p_m\sum_{j=0}^{m-1} p_j u_{jn}\right) \\
&= \frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\left(P_{m-1}u_{mn} - \sum_{j=0}^{m-1} p_j u_{jn}\right) \\
&= \frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j u_{mn} - \sum_{j=0}^{m-1} p_j u_{jn}\right) \\
&= \frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j (u_{mn} - u_{jn})\right) \\
&= \frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\sum_{j=1}^{m} P_{j-1}\Delta_{10}u_{jn}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $V_{mn}^{(10)}(\Delta u) = \dfrac{1}{P_m}\sum_{j=1}^{m} P_{j-1}\Delta_{10}u_{jn}$ olduğundan

$$V_{mn}^{(01)}(\Delta V^{(10)}(\Delta u)) = V_{mn}^{(11)}(\Delta u)$$

istenilen eşitliğe ulaşılır. (ii) şıkkının ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Lemma 3.4 *(Çanak and Totur, 2018)* (u_{mn}) *iki katlı dizi olsun. Yeterince büyük* m *ve* n *ler için*

(i) $\lambda > 1$ *ise*

$$\begin{aligned}
&u_{mn} - t_{mn}^{(11)}(u)\\
&= \frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\left(t_{\lambda_m,\lambda_n}^{(11)}(u) - t_{\lambda_m,n}^{(11)}(u) - t_{m,\lambda_n}^{(11)}(u) + t_{mn}^{(11)}(u)\right)\\
&+ \frac{P_{\lambda_m}}{P_{\lambda_m}-P_m}\left(t_{\lambda_m,n}^{(11)}(u) - t_{mn}^{(11)}(u)\right) + \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_{\lambda_n}-Q_n}\left(t_{m,\lambda_n}^{(11)}(u) - t_{mn}^{(11)}(u)\right)\\
&- \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (u_{jk}-u_{mn}),
\end{aligned}$$

(ii) $0 < \lambda < 1$ *ise*

$$\begin{aligned}
&u_{mn} - t_{mn}^{(11)}(u)\\
&= \frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\left(t_{mn}^{(11)}(u) - t_{\lambda_m,n}^{(11)}(u) - t_{m,\lambda_n}^{(11)}(u) + t_{\lambda_m,\lambda_n}^{(11)}(u)\right)\\
&+ \frac{P_{\lambda_m}}{P_m-P_{\lambda_m}}\left(t_{mn}^{(11)}(u) - t_{\lambda_m,n}^{(11)}(u)\right) + \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n-Q_{\lambda_n}}\left(t_{mn}^{(11)}(u) - t_{m,\lambda_n}^{(11)}(u)\right)\\
&+ \frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (u_{mn}-u_{jk})
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (u_{mn}) dizisinin hareketli ortalamasından yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
\tau_{mn}^{>}(u) &= \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk}\\
&= \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\left[\left(\sum_{j=0}^{\lambda_m}-\sum_{j=0}^{m}\right)\left(\sum_{k=0}^{\lambda_n}-\sum_{k=0}^{n}\right)\right] p_j q_k u_{jk}\\
&= \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\left(\sum_{j=0}^{\lambda_m}\sum_{k=0}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} - \sum_{j=0}^{\lambda_m}\sum_{k=0}^{n} p_j q_k u_{jk}\right.\\
&\left. - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_j q_k u_{jk}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\Big(P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}t^{(11)}_{\lambda_m,\lambda_n}(u)-P_{\lambda_m}Q_nt^{(11)}_{\lambda_m,n}(u)\\
&- P_mQ_{\lambda_n}t^{(11)}_{m,\lambda_n}(u)+P_mQ_nt^{(11)}_{mn}(u)\Big)\\
&= \frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{(11)}_{\lambda_m,\lambda_n}(u)-\Big[\frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{(11)}_{\lambda_m,n}(u)\\
&- \frac{P_{\lambda_m}}{P_{\lambda_m}-P_m}t^{(11)}_{\lambda_m,n}(u)\Big]-\Big[\frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{(11)}_{m,\lambda_n}(u)\\
&- \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_{\lambda_n}-Q_n}t^{(11)}_{m,\lambda_n}(u)\Big]+\Big[\frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}t^{(11)}_{mn}(u)\\
&- \frac{P_{\lambda_m}}{P_{\lambda_m}-P_m}t^{(11)}_{mn}(u)-\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_{\lambda_n}-Q_n}t^{(11)}_{mn}(u)+t^{(11)}_{mn}(u)\Big]
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\tau^{>}_{mn}(u)-t^{(11)}_{mn}(u)$ farkı yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\tau^{>}_{mn}(u)-t^{(11)}_{mn}(u)\\
&= \frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\Big(t^{(11)}_{\lambda_m,\lambda_n}(u)-t^{(11)}_{\lambda_m,n}(u)-t^{(11)}_{m,\lambda_n}(u)+t^{(11)}_{mn}(u)\Big)\\
&+ \frac{P_{\lambda_m}}{P_{\lambda_m}-P_m}\Big(t^{(11)}_{\lambda_m,n}(u)-t^{(11)}_{mn}(u)\Big)+\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_{\lambda_n}-Q_n}\Big(t^{(11)}_{m,\lambda_n}(u)-t^{(11)}_{mn}(u)\Big)
\end{aligned}
\tag{45}
$$

bulunur. Ayrıca

$$
u_{mn}=\tau^{>}_{mn}(u)-\frac{1}{(P_{[\lambda m]}-P_m)(Q_{[\lambda n]}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{[\lambda m]}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}p_jq_k(u_{jk}-u_{mn})
$$

olduğundan ve (45) eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
u_{mn}-t^{(11)}_{mn}(u) &= (\tau^{>}_{mn}(u)-t^{(11)}_{mn}(u))\\
&- \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_k(u_{jk}-u_{mn})
\end{aligned}
$$

dir. □

Sonuç 3.2 *(Çanak and Totur, 2018) Lemma 3.4 e benzer olarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:*

(i) $\lambda>1$ *için*

$$
\begin{aligned}
u_{mn}-t^{(10)}_{mn}(u) &= \frac{P_{\lambda_m}}{P_{\lambda_m}-P_m}\Big(t^{(10)}_{\lambda_m,n}(u)-t^{(10)}_{mn}(u)\Big)\\
&- \frac{1}{P_{\lambda_m}-P_m}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}p_j(u_{jn}-u_{mn}).
\end{aligned}
$$

(ii) $0 < \lambda < 1$ *için*

$$\begin{aligned} u_{mn} - t_{mn}^{(10)}(u) &= \frac{P_{\lambda_m}}{P_m - P_{\lambda_m}} \left(t_{mn}^{(10)}(u) - t_{\lambda_m,n}^{(10)}(u) \right) \\ &+ \frac{1}{P_m - P_{\lambda_m}} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} p_j (u_{mn} - u_{jn}). \end{aligned}$$

Benzer yolla $u_{mn} - t_{mn}^{(01)}(u)$ farkı da verilebilir.

Lemma 3.5 *(Çanak and Totur, 2018)* (P_m) *ve* (Q_n) *regüler değişimli pozitif indeksli diziler olmak üzere*

(i) (u_{mn}) *dizisi* s *ye* $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ *toplanabilir ve öyle bir* $C > 0$ *için* $\frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}u_{mn} \geq -C$ *koşulu sağlanıyorsa* (u_{mn}) *dizisi de aynı* s *ye* P*-yakınsaktır.*

(ii) (u_{mn}) *dizisi* s *ye* $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ *toplanabilir ve öyle bir* $C > 0$ *için* $\frac{Q_{n-1}}{q_n}\Delta_{01}u_{mn} \geq -C$ *koşulu sağlanıyorsa* (u_{mn}) *dizisi de aynı* s *ye* P*-yakınsaktır.*

İspat. Bu lemmanın ispatı Teorem 3.1 in ispatına benzer şekilde yapılacaktır.

3.2 Üreteç Dizileri İçin Tauber Tipi Teoremler

Bu başlık altında, ağırlıklı ortalamalar metodu için üreteç dizileri kullanılarak elde edilen bazı Tauber tipi teoremler incelenecektir.

Teorem 3.1 *(Çanak and Totur, 2018)* (P_m) *ve* (Q_n) *pozitif indeksli düzenli değişimli diziler olmak üzere* (u_{mn}) *iki katlı dizisi sınırlı ve* s *değerine* $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ *toplanabilir olsun. Öyle bir* $C > 0$ *için*

$$\frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}V_{mn}^{(11)}(\Delta u) \geq -C \quad ve \quad \frac{Q_{n-1}}{q_n}\Delta_{01}V_{mn}^{(11)}(\Delta u) \geq -C, \tag{46}$$

$$\frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}V_{mn}^{(10)}(\Delta u) \geq -C \quad ve \quad \frac{Q_{n-1}}{q_n}\Delta_{01}V_{mn}^{(01)}(\Delta u) \geq -C \tag{47}$$

koşulları sağlanıyorsa (u_{mn}) *dizisi* s *değerine* P*-yakınsaktır.*

İspat. (u_{mn}) dizisi sınırlı ve s değerine $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir olduğundan $(t_{mn}^{(11)})$ dizisi s ye P-yakınsaktır. Ayrıca (u_{mn}) sınırlı olduğundan $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$, $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$

ve $(\overline{N},*,q;0,1)$ toplanabilme metotları regülerdir. Dolayısıyla $(t_{mn}^{(11)})$ s ye $(\overline{N},p,q;1,1)$, $(t_{mn}^{(10)})$ s ye $(\overline{N},p,q;1,1)$ ve $(t_{mn}^{(01)})$ s ye $(\overline{N},p,q;1,1)$ toplanabilirdir. Bu bilgiler ve Lemma 3.1 göz önünde bulundurulursa,

$$(V_{mn}^{(11)}(\Delta u)) \to 0 \ \ (\overline{N},p,q;1,1) \tag{48}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi Lemma 3.4 (i) şıkkında u_{mn} yerine $(V_{mn}^{(11)}(\Delta u))$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&V_{mn}^{(11)}(\Delta u) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \\
&= \frac{P_{[\lambda m]}Q_{[\lambda n]}}{(P_{[\lambda m]}-P_m)(Q_{[\lambda n]}-Q_n)} \Big(t_{[\lambda m],[\lambda n]}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{[\lambda m],n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \\
&\quad - t_{m,[\lambda n]}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) + t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \Big) \\
&+ \frac{P_{[\lambda m]}}{P_{[\lambda m]}-P_m} \Big(t_{[\lambda m],n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \Big) \\
&+ \frac{Q_{[\lambda n]}}{Q_{[\lambda n]}-Q_n} \Big(t_{m,[\lambda n]}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \Big) \\
&- \frac{1}{(P_{[\lambda m]}-P_m)(Q_{[\lambda n]}-Q_n)} \sum_{j=m+1}^{[\lambda m]} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} p_j q_k (V_{jk}^{(11)}(\Delta u) - V_{mn}^{(11)}(\Delta u))
\end{aligned} \tag{49}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (P_m) ve (Q_n) pozitif ρ indeksli düzenli değişimli diziler olduğundan her $\lambda > 1$ ve yeterince büyük $m,n \geq 0$ için

$$\frac{\lambda^\delta}{2(\lambda^\delta-1)} \leq \frac{P_{[\lambda m]}}{P_{[\lambda m]}-P_m} \leq \frac{3\lambda^\alpha}{2(\lambda^\delta-1)} \tag{50}$$

$$\frac{\lambda^\delta}{2(\lambda^\delta-1)} \leq \frac{Q_{[\lambda n]}}{Q_{[\lambda n]}-Q_n} \leq \frac{3\lambda^\delta}{2(\lambda^\delta-1)}. \tag{51}$$

dir. (48)- (50) ve (51) koşullarından her $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{m,n\to\infty} \frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} &\Big(t_{\lambda_m,\lambda_n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{\lambda_m,n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \\
&- t_{m,\lambda_n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) + t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \Big) = 0,
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{P_{\lambda_m}}{P_{\lambda_m}-P_m} \Big(t_{\lambda_m,n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \Big) = 0, \tag{53}$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_{\lambda_n}-Q_n} \Big(t_{m,\lambda_n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) \Big) = 0 \tag{54}$$

eşitliklerine ulaşılır. (49) eşitliğinin her iki tarafının $m, n \to \infty$ iken üst limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m,n\to\infty}(V_{mn}^{(11)}(\Delta u) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)))\\
&\leq \limsup_{m,n\to\infty} \frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} \Big(t_{\lambda_m,\lambda_n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{\lambda_m,n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u))\\
&\quad - t_{m,\lambda_n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) + t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u))\Big)\\
&\quad + \limsup_{m,n\to\infty} \frac{P_{\lambda_m}}{P_{\lambda_m}-P_m}\Big(t_{\lambda_m,n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u))\Big)\\
&\quad + \limsup_{m,n\to\infty} \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_{\lambda_n}-Q_n}\Big(t_{m,\lambda_n}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u))\Big)\\
&\quad + \limsup_{m,n\to\infty}\left(-\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (V_{jk}^{(11)}(\Delta u) - V_{mn}^{(11)}(\Delta u))\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ve bu eşitsizlik, (52)-(53) ve (54) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m,n\to\infty}(V_{mn}^{(11)}(\Delta u) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)))\\
&\leq \limsup_{m,n\to\infty}\left(-\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (V_{jk}^{(11)}(\Delta u) - V_{mn}^{(11)}(\Delta u))\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür. (46) koşulundan öyle bir $C > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m,n\to\infty}(V_{mn}^{(11)}(\Delta u) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)))\\
\leq\ & \limsup_{m,n\to\infty}\left(-\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k \left(\sum_{r=m+1}^{j} \Delta_{10} V_{rk}^{(11)}(\Delta u)\right.\right.\\
+\ & \left.\left.\sum_{s=n+1}^{k} \Delta_{01} V_{ms}^{(11)}(\Delta u)\right)\right)\\
\leq\ & C \limsup_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k \left(\sum_{r=m+1}^{j} \frac{p_r}{P_{r-1}} + \sum_{s=n+1}^{k} \frac{q_s}{Q_{s-1}}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla buradan,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m,n\to\infty}(V_{mn}^{(11)}(\Delta u) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u)))\\
&\leq C \limsup_{m,n\to\infty} \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k \left(\frac{P_j - P_m}{P_m} + \frac{Q_k - Q_n}{Q_n}\right)\\
&\leq C \limsup_{m,n\to\infty} \left(\frac{P_{\lambda_m}-P_m}{P_m} + \frac{Q_{\lambda_n}-Q_n}{Q_n}\right) \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k\\
&= C \limsup_{m,n\to\infty} \left(\frac{P_{\lambda_m}-P_m}{P_m} + \frac{Q_{\lambda_n}-Q_n}{Q_n}\right) \qquad (55)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (P_m) ve (Q_n) pozitif ρ indeksli düzenli değişimli diziler olduğundan elde edilen son (55) eşitsizliği

$$\limsup_{m,n\to\infty}(V_{mn}^{(11)}(\Delta u) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u))) \leq 2C(\lambda^{\delta} - 1)$$

eşitsizliğine dönüşür. $\lambda \to 1^{+}$ iken her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\limsup_{m,n\to\infty}(V_{mn}^{(11)}(\Delta u) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u))) \leq 0 \tag{56}$$

elde edilir. Benzer yollarla Lemma 3.4 (ii) şıkkı kullanılarak,

$$\liminf_{m,n\to\infty}(V_{mn}^{(11)}(\Delta u) - t_{mn}^{(11)}(V^{(11)}(\Delta u))) \geq 0 \tag{57}$$

eşitsizliği elde edilir. (56)-(57) eşitsizlikleri doğrultusunda

$$V_{mn}^{(11)}(\Delta u) = o(1) \tag{58}$$

sonucuna ulaşılır. (u_{mn}) dizisi s ye $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir olduğundan $(t_{mn}^{(01)}(u))$ ağırlıklı ortalama dizisi s ye $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilir ve $(t_{mn}^{(10)}(u))$ ağırlıklı ortalama dizisi s ye $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ toplanabilirdir. Sonuç olarak Sonuç 3.1 (i) şıkkındaki eşitlikten $(t_{mn}^{(01)}(V^{(10)}(\Delta u)))$ dizisi sıfıra $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilir ve (ii) şıkkındaki eşitlikten ise $(t_{mn}^{(10)}(V^{(01)}(\Delta u)))$ dizisi sıfıra $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ toplanabilirdir. Yine Sonuç 3.1 (i) eşitliğini kullanarak,

$$\frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}V_{mn}^{(01)}(\Delta u) - \frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}t_{mn}^{(10)}(V^{(01)}(\Delta u)) = \frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}V_{mn}^{(11)}(\Delta u)$$

eşitliği elde edilir. (46) ile (58) den ve Lemma 3.2 ile Lemma 3.3 (i) şıkkından öyle bir $C > 0$ için

$$\frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}V_{mn}^{(01)}(\Delta u) \geq -C, \tag{59}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Hatta öyle bir $C > 0$ için $\frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}t_{mn}^{(01)}(V^{(01)}(\Delta u)) \geq -C$ dir. $(t_{mn}^{(01)}(V^{(01)}(\Delta u)))$ dizisi sıfıra $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilir olduğundan ve Lemma 3.5 (i) şıkkı göz önünde bulundurulursa $(t_{mn}^{(01)}(V^{(01)}(\Delta u)))$ dizisinin sıfıra P-yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $(V_{mn}^{(01)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ toplanabilirliği bulunur. (47) koşulu ve Lemma 3.5 (ii) şıkkı doğrultusunda

$$V_{mn}^{(01)}(\Delta u) = o(1) \tag{60}$$

elde edilir. Benzer şekilde Sonuç 3.1 (ii) şıkkı, (58) koşulu, Lemma 3.2 ve Lemma 3.3 (ii) şıkkını kullanarak öyle bir $C > 0$ için

$$\frac{Q_{n-1}}{q_n}\Delta_{01}V_{mn}^{(10)}(\Delta u) \geq -C \tag{61}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Hatta öyle bir $C > 0$ için $\frac{Q_{n-1}}{q_n}\Delta_{01}t_{mn}^{(10)}(V^{(10)}(\Delta u)) \geq -C$ dir. $(t_{mn}^{(10)}(V^{(10)}(\Delta u)))$ dizisi sıfıra $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilir olduğundan ve Lemma 3.5 (ii) şıkkından $(t_{mn}^{(10)}(V^{(10)}(\Delta u)))$ dizisi sıfıra P-yakınsaktır. Ve sonucunda $(V_{mn}^{(10)}(\Delta u))$ dizisi sıfıra $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilirdir. (47) koşulu ve Lemma (3.5) (i) şıkkından

$$V_{mn}^{(10)}(\Delta u) = o(1) \tag{62}$$

dir. Son olarak Lemma 3.1 göz önüne alınırsa (58)-(60)-(62) koşulları ile birlikte $u_{mn} \to s$ ispatlanmış olur. □

Aşağıda verilecek olan sonuç Chen and Hsu (2000) nun çalışmasında $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilme metodu için verilen Hardy-Landau teoreminin bir versiyonudur.

Sonuç 3.3 *(Çanak and Totur, 2018)* (P_m) *ve* (Q_n) *pozitif* ρ *indeksli düzenli değişimli diziler olmak üzere* (u_{mn}) *iki katlı dizisi sınırlı olsun. Eğer* (u_{mn}) *dizisi* s *değerine* $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ *toplanabilir ve öyle bir* $C > 0$ *için*

$$\frac{P_{m-1}}{p_m}\Delta_{10}u_{mn} \geq -C, \tag{63}$$

$$\frac{Q_{n-1}}{q_n}\Delta_{01}u_{mn} \geq -C \tag{64}$$

koşulları gerçekleniyorsa (u_{mn}) *dizisi de aynı* s *değerine* P*-yakınsaktır.*

İspat. (u_{mn}) dizisi s ye $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilir olduğundan $(t^{(11)}_{mn}(u))$ dizisi de s değerine P-yakınsaktır. Teorem 3.1 in ispatında $V^{(11)}_{mn}(\Delta u)$ için yapılan işlemler (u_{mn}) dizisi için uygulanırsa (u_{mn}) dizisinin s ye P-yakınsak olduğu görülür. □

Yukarıdaki sonuçta her m, n için $p_m = q_n = 1$ alınırsa aşağıdaki $(C, 1, 1)$ toplanabilme metodu için klasik Tauber koşulu ortaya çıkar.

Sonuç 3.4 *(Mòricz, 1994)* (u_{mn}) *iki katlı dizisi sınırlı ve* s *değerine* $(C, 1, 1)$ *toplanabilir olsun. O halde öyle bir* $C > 0$ *için*

$$m\Delta_{10}u_{mn} \geq -C, \tag{65}$$

$$n\Delta_{01}u_{mn} \geq -C \tag{66}$$

koşulları gerçekleniyorsa (u_{mn}) *dizisi* s *ye yakınsar.*

Teorem 3.2 *(Çanak and Totur, 2018)* (P_m) *ve* (Q_n) *pozitif* ρ *indeksli düzenli değişimli diziler olmak üzere* (u_{mn}) *iki katlı dizisi sınırlı olsun. Eğer (46) koşulu sağlanıyor ve* (u_{mn}) *dizisi* s *ye* $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ *ve* $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ *toplanabilir ise* (u_{mn}) *dizisi aynı* s *değerine* P*-yakınsaktır.*

İspat. (u_{mn}) dizisinin s değerine $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ ve $(\overline{N}, *, q; 0, 1)$ toplanabilir olma koşullarından (u_{mn}) dizisi s ye $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilirdir. Teorem 3.1 in ispatında olduğu gibi (46) koşulu ve Lemma 3.4 den $(V_{mn}^{(11)}(\Delta u))$ dizisi sıfıra $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilirdir. $(t_{mn}^{(10)}(u))$ ve $(t_{mn}^{(01)}(u))$ dizileri s ye P-yakınsak olduğundan Lemma 3.1 yardımıyla ispat tamamlanır. $\square$

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ananda-Rau, K., 1930, An example in the theory of summation of series by Riesz's typical means, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 30(2):367–372pp.

Belen, C., 2017, Some Tauberian theorems for weighted means of bounded double sequences, *An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S)*, 63(1): 115–122pp.

Chen, C. and Chang, C., 2007, Tauberian conditions under which the original convergence of double sequences follows from the statistical convergence of their weighted means, *J. Math. Anal. Appl.*, 286:340–350pp.

Chen, C. and Hsu, J., 2000, Tauberian theorems for weighted means of double sequences, *Analysis Mathmematica*, 21:243–262pp.

Çanak, İ. and Totur, Ü., 2011, Some Tauberian theorems for weighted mean of summability, *Comput. Math. Appl.*, 62:2609–2615pp.

Hardy, G. H., 1956, Divergent series, Oxford University Press USA.

Hardy, G. H., 1991, Divergent series, Second Edition, AMS Chelsea Publishing, 396 p. USA.

Karamata, J., 1933, Sur un mode de croissance réguliére théorémes fondamentaux *Bull. Soc. Math. France*, 61:55–62pp.

Landau, E., 1910, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, *Prace Mat-Fiz,* 21:97–177pp.

Móricz, F., 1994, Tauberian theorems for Cesáro summable double sequences, *Studia Math.*, 110(1):83–96pp.

Móricz, F. and Rhoades, B.E., 1995, Necessary and sufficient Tauberian conditions for certain weighted mean methods of summability, *Acta Mathematica Hungarica,* 66(1-2):105–111pp.

Móricz, F., 2003, Tauberian theorems for double sequences that are statistically summable (C,1,1), *J. Math. Anal. Appl.*, 286:340–350pp.

Móricz, F., 2004, Ordinary convergence follows from statistical summability (C,1) in the case of slowly decreasing or oscillating sequences, *Colloq. Math.*, 99(2):207–219pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Móricz, F. and Rhoades, B.E., 2004, Necessary and sufficient Tauberian conditions for certain weighted mean methods of summability II., *Acta Mathematica Hungarica,* 102(4):279–285pp.

Schmidt, R., 1925, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, *Mathematische Zeitschrift,* 22:89–152pp.

Stadtmüller, U., 1999, Tauberian theorems for weighted means of double sequences, *Anal. Math.,* 25(1):57–68pp.

Tietz, H., 1990, Schmidtsche Umkehrbedingungen für Potenzreihenverfahren, *Acta Sci. Math.*, 54(3-4):355–365pp.

Tietz, H. and Zeller, K., 1998, Tauber-Bedingungen für Verfahren mit Abschnittskonvergenz, *Acta Math. Hungar.*, 81(3):241–247pp.

Totur, Ü. and Çanak, İ., 2018 (erişim tarihi), Some Tauberian theorems for the weighted means method of summability of double sequences, *Ukrainian Math. J.*

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad: Ece YARAŞGİL
- Adres: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
  35100, Bornova, İzmir
- Doğum Tarihi: 25.05.1993
- Doğum Yeri : Karşıyaka/İZMİR

Öğrenim Durumu

- 1999-2004 : Selçuk Yaşar İlköğretim Okulu (İlkokul eğitimi - İzmir)
- 2004-2007 : Cumhuriyet İlköğretim Okulu (Ortaokul eğitimi - İzmir)
- 2007-2011 : İzmir Bornova Anadolu Lisesi
- 2011-2016 : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Programı
- 2016- : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı

Burslar ve Ödüller

- 2016 Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Birinciliği
- 2016-2018 TÜBİTAK 2210/A Yurt İçi Yüksek Lisans Bursiyerliği