E.Ü FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EGE ÜNİVERSİTESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Özlem ARSLAN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 09. 10. 2018

Bornova-İZMİR
2018

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Özlem ARSLAN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.04.01

Sunuş Tarihi: 09. 10. 2018

Bornova-İZMİR

2018

Özlem ARSLAN tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak sunulan **"Esnek Topolojik Uzaylar"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi' nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 09.10.2018 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/ ~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER**	....
Raportör Üye	**: Prof. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR**	....
Üye	**: Dr. Öğr. Üyesi Esra DALAN YILDIRIM**	....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Esnek Topolojik Uzaylar"** başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

09/ 10/ 2018

Özlem ARSLAN

ÖZET

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

ARSLAN, Özlem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER
Ekim 2018, 65 sayfa

Esnek topolojik uzaylar ile ilgili literatürdeki bazı bilgilerin sunulmasını amaçlayan bu tez esas olarak altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusu tanıtılmış, ikinci bölümde tezin anlaşılmasını kolaylaştırmak için esnek küme, esnek nokta, esnek dönüşüm kavramları ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, esnek topolojik uzay kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca, esnek kapanış, esnek iç kavramları ve bu kavramların bazı özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, farklı esnek nokta kavramlarına göre esnek komşuluk özellikleri ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde, farklı esnek nokta kavramlarına göre esnek süreklilik kavramı ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, esnek açık, esnek kapalı dönüşüm kavramları tanıtılmıştır.

Altıncı bölümde ise, esnek teta açık küme tanımı, bu kümeler yardımı ile elde edilen esnek teta topoloji tanımı ve özellikleri sunulmuştur. Ayrıca, esnek teta süreklilik kavramı verilmiştir. Bunlara ek olarak, konuyla ilgili örneklerle çalışmaya katkı sağlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: esnek küme, esnek topolojik uzay, esnek komşuluk, esnek süreklilik, esnek teta topoloji, esnek teta süreklilik

ABSTRACT

SOFT TOPOLOGICAL SPACES

ARSLAN, Özlem

M.Sc in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER
October 2018, 65 pages

This thesis aiming to present some knowledges in the literature about soft topological spaces basically consists of six chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and in the second chapter, in order to make the thesis understand easily, the concepts of soft set, soft point, soft mapping and some properties of these notions are given.

In the third chapter, the concept of soft topology is defined. Moreover, the concepts of soft closure, soft interior and some properties are investigated. In the fourth chapter, soft neighborhood properties in terms of different soft points are expressed.

In the fifth chapter, the concept of soft continuity in terms of different soft points and its some properties are examined. Moreover, the concepts of soft open, soft closed mapping are defined.

In the sixth chapter, the definition of soft theta open set, the definition of soft theta topology by using this notion and its some properties are presented. Moreover, the concept of soft theta continuity is given. Additionally, some examples are given related to the subject.

Keywords: soft set, soft topological spaces, soft neighborhood, soft continuity, soft theta topology, soft theta continuity

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca gösterdiği anlayış ve yardımlarından dolayı saygıdeğer danışmanım Sayın Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, öğrenim hayatım boyunca her türlü desteği için annem Hanife ARSLAN ve babam Mustafa ARSLAN' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER(devam)

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\forall$	Evrensel niceleyici
$\exists$	Varlıksal niceleyici
$\Longrightarrow$	Gerek koşul
$\Longleftarrow$	Yeter koşul
$\Longleftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$S(X)$	Tüm esnek kümelerin kümesi
$\widetilde{\emptyset}$	Boş esnek küme
$\tilde{X}$	Evrensel esnek küme
$\widetilde{\cup}$	Esnek birleşim
$\widetilde{\cap}$	Esnek kesişim
e_F	Esnek nokta
W_e^x	Esnek nokta(eleman)
β	Esnek taban
$\mathcal{N}_\tau(e_F)$	e_F in esnek komşuluklarının ailesi
$\mathcal{N}_\tau(W_e^x)$	W_e^x in esnek komşuluklarının ailesi
$\upsilon(W_e^x)$	W_e^x in esnek açık komşuluklarının ailesi

SİMGELER DİZİNİ(devam)

Simgeler	Açıklama
$\nu_e(x)$	x in e-esnek açık komşuluklarının ailesi
$\nu_{\theta_e}(x)$	x in e-θ esnek açık komşuluklarının ailesi
$Cl\big((F,E)\big)$	(F,E) nin esnek kapanışı
$Int\big((F,E)\big)$	(F,E) nin esnek içi
f_{pu}	Esnek dönüşüm
τ	Esnek topoloji
τ_θ	Esnek $\theta -$ topoloji
$(\tau_X)_\theta$	X üzerindeki esnek $\theta -$ topoloji

1.GİRİŞ

Geçmişten günümüze matematiksel belirsizlikleri ortadan kaldırmaya yönelik olarak birçok teori ortaya atılmıştır. Ancak, matematiksel belirsizlikler konusundaki çalışmaların başlangıcını 17. yy da ortaya atılan olasılık kavramı oluşturur. 1930 lara kadar oran ve limit biçiminde tanımlanmış olan olasılık kavramı Kolmogorov aksiyomları (Kolmogorov, 1933) denen aksiyomlar verilerek dönüşüm biçiminde tanımlanmıştır. Bu tarihten sonra, Kolmogorov' un bu yaklaşım tarzına benzer şekilde çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu çalışmalar içerisinde fuzzy(bulanık) kümeler (Zadeh, 1965) modern anlamdaki belirsizliklerin modellenmesinde dönüm noktası olmuştur. Birçok araştırmacı bu teoriyi kullanarak hem teorik hem de uygulamalı alanda birçok çalışma yapmıştır. Ancak Zadeh' in ortaya attığı bu teoride belirli üyelik derecelerine bağımlılık gerektiğinden belirsizlikler tam olarak yok edilememiştir. Dolayısıyla, bu teorideki eksiklikler farklı teorilerin oluşmasına zemin hazırlamıştır. Son zamanlarda, kaba(rough) küme (Pawlak, 1982) , vague küme (Gau ve Buhrer, 1993) ve aralık matematiği (Atanassov, 1994) gibi kavramlar ortaya atılmıştır. Bu kavramlar karar verme analizi, yapay zeka, bilişim, tıp gibi birçok alanda kullanılmıştır. Ancak üyelik derecelerine bağımlılık bu kavramlarda da bulunduğu için matematiksel belirsizlikler yine tam olarak yok edilememiştir. Daha sonra, Molodstov 1999 yılında belirsizlikleri tam olarak gideren ve diğerlerinden bağımsız bir yaklaşım metodu olan esnek küme kavramını ortaya atmıştır. Aynı zamanda, bu kavramın oyun teorisi, ölçüm teorisi, Riemann integrali ve Perron integrali gibi birçok alanda uygulamasını vermiştir. Bunlara ek olarak, parametrelendirilmiş bir küme yardımıyla oluşturulmuş dönüşüm olan esnek küme kavramı belirli bir üyelik derecesine bağımlılık gerektirmediği için ekonomi, bilişim, tıp, çevre ve karar verme problemleri gibi birçok alanda da kullanılmıştır. Maji ve arkadaşları, 2003 yılında esnek kümelerde işlemleri verip karar verme problemine uygulamışlardır. 2005 yılında, Pei ve Miao esnek kümelerde işlemler üzerine çalışmışlardır. Ali ve arkadaşları, 2009 yılında bir esnek kümenin tümleyen tanımını vermişler, Kharal ve Ahmad, 2011 yılında, bir esnek kümenin görüntü ve ön görüntüsü ile esnek dönüşüm kavramlarını tanımlayıp bir tıp probleminde bu kavramların uygulamasını yapmışlardır.

Esnek topolojik uzaylarla ilgili ilk çalışmayı ise, 2011 yılında, esnek topolojik uzayı tanımlayarak Shabir ve Naz başlatmıştır. Ayrıca bir esnek kümenin kapanışı ve esnek alt uzay kavramlarını tanıtmışlardır. 2012 yılında, Zorlutuna ve arkadaşları, 2013 yılında ise, Nazmul ve Samantha esnek nokta ve esnek süreklilik kavramını farklı biçimde sunmuşlardır. Ayrıca 2013 yılında, Georgiou ve arkadaşları esnek $\theta -$açık kümeyi tanımlayarak bu esnek kümeler yardımıyla esnek $\theta -$topoloji ve esnek $\theta -$süreklilik kavramlarını vermişler ve bu kavramlar üzerine çalışmışlardır. 2014 yılında ise, Georgiou ve Megaritis esnek süreklilik kavramını farklı biçimde ifade etmişlerdir.

Bu tezde, ilk olarak diğer bölümlerde kullanılacak esnek küme, esnek nokta gibi temel kavramlar verilmiştir. Sonrasında, esnek topolojik uzay kavramı tanıtılmış ve bu kavramla ilgili bazı özellikler incelenmiştir. Daha sonra, farklı esnek nokta tanımlarına göre esnek komşuluk özellikleri ve esnek sürekliliklerle ilgili bilgiler verilmiştir. Ayrıca, esnek $\theta -$topoloji ve esnek $\theta -$süreklilik üzerine çalışılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin daha kolay anlaşılması için bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2. 1. Esnek Kümeler

Bu tez boyunca, aksi söylenmedikçe, X boştan farklı evrensel küme, E parametre kümesi ve $A \subset E$ boştan farklı parametre kümesi olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.1. (Molodstov, 1999) X boştan farklı evrensel küme, E parametre kümesi ve $A \subset E$ olsun. Burada F,

$$F: A \longrightarrow P(X)$$

ile verilen bir dönüşüm olmak üzere, (F, A) ikilisine X üzerinde esnek küme denir. Bir esnek küme X in kuvvet kümesine ait değerlerin parametrelendirilmiş ailesi olarak düşünülebilir. Yani, $e \in A$ için $F(e)$ kümeleri (F, A) nın e −yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak düşünülmelidir. O halde, esnek kümeyi klasik anlamda bir küme olarak düşünmek doğru olmayacaktır. Yani, (F, A) esnek kümesi aşağıdaki gibidir:

$$(F, A) = \{(e, F(e)): e \in A, F(e) \in P(X)\}.$$

Örnek 2.1.2. $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ bir ülkede yaşanan trafik kazaları kümesini ve

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{alkol, aşırı\ hız, sürücü\ hatası, kötü\ hava\ \}$$

parametre kümesi bu kazaların nedenlerini göstersin. $A = \{e_1, e_2, e_4\} \subset E$ olmak üzere, (F, A) bu kazaların hangi sebepten kaynaklandığını göstersin. Burada $F: A \longrightarrow P(X)$ dönüşümü aşağıda biçimdedir:

$F(alkol) = \{h_1, h_2\}$; "Alkolün neden olduğu kazalar h_1, $h_2$dir."

$F(aşırı\ hız) = \{h_3\}$; "Aşırı hızın neden olduğu kazalar $h_3$tür."

$F(kötü\ hava\ ) = \{h_4\}$; "Kötü havanın neden olduğu kazalar $h_4$dür. "

O halde, (F, A) esnek kümesi

$$(F, A) = \{(alkol, \{h_1, h_2\}), (aşırı\ hız\ , \{h_3\}), (kötü\ hava\ , \{h_4\})\}$$

biçimindedir.

Bu tez boyunca, boştan farklı X evrensel kümesi üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.3. (Maji et. al. , 2003) $A \subset E$olmak üzere, (F, A) X üzerinde esnek küme olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ koşulu sağlanıyorsa, (F, A) ya boş (null) esnek küme denir ve bu esnek küme $\widetilde{\emptyset}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4.(Maji et. al. , 2003) $A \subset E$olmak üzere, (F, A) X üzerinde esnek küme olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = X$ koşulu sağlanıyorsa, (F, A) ya evrensel esnek küme denir ve bu esnek küme $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. (Nazmul and Samantha, 2014) E evrensel parametre kümesi olmak üzere, (F, E) X üzerinde esnek küme olsun. Her $e \in E$ için $F(e)$ sonlu küme ise, (F, E) ye sonlu esnek küme denir.

Tanım 2.1.6. (Maji et. al. , 2003) $A \subset E$ olmak üzere, (F, A) ve (G, A) X üzerinde iki esnek küme olsun. Her $e \in A$ için $F(e) \subset G(e)$ ise (F, A) (G, A) nınesnek alt kümesidir. Kısaca, $(F, A) \mathrel{\tilde{\subseteq}} (G, A)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.7. (Maji et. al. , 2003) $A \subset E$ olmak üzere, (F, A) ve (G, A) X üzerinde iki esnek küme olsun.(F, A), (G, A) nın esnek alt kümesi ve (G, A), (F, A) nın esnek alt kümesi ise, (F, A) ve (G, A) esnek eşittir denir. Kısaca, $(F, A) = (G, A)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.8. (Maji et. al. , 2003) $A, B \subset E$ boştan farklı parametre kümeleri olmak üzere, (F, A) ve (G, B) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin birleşimi, $C = A \cup B$ olmak üzere, her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \backslash B, \\ G(e), & e \in B \backslash A, \\ F(e) \cup G(e), & e \in A \cap B. \end{cases}$$

ile tanımlı $H: C \longrightarrow P(X)$ dönüşümüyle oluşturulan (H, C) esnek kümesidir ve kısaca, $(H, C) = (F, A) \widetilde{\cup} (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.9. (Pei and Miao, 2005) $A, B \subset E$ boştan farklı parametre kümeleri olmak üzere, (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin farklı kesişimi, $C = A \cap B$ olmak üzere, her $e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ ile tanımlı $H: C \longrightarrow P(X)$ dönüşümüyle oluşturulan (H, C) esnek kümesidir ve kısaca, $(H, C) = (F, A) \widetilde{\cap} (G, B)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.10. (Ali et. al. , 2009) $A \subset E$ olmak üzere, (F, A) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, (F, A) nın $(F, A)^c$ ile gösterilen (F, A) ya göre tümleyeni, her $e \in A$ için $F^c(e) = X \backslash F(e)$ ile tanımlıdır ve kısaca, $(F, A)^c = (F^c, A)$ biçiminde gösterilir. Burada $F^c: A \longrightarrow P(X)$ dönüşümüne F in esnek tümleyen dönüşümü denir. Ayrıca, $(F^c)^c = F$ ve $((F, A)^c)^c = (F, A)$ dır.

Tanım 2.1.11. (Shabir and Naz, 2011) E evrensel parametre kümesi olmak üzere, (F, E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin farkı, her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \backslash G(e)$ ile tanımlı $H: E \longrightarrow P(X)$ dönüşümüyle oluşturulan (H, E) esnek kümesidir. Kısaca, $(H, E) = (F, E) \widetilde{\backslash} (G, E)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.12. (Shabir and Naz, 2011) E evrensel parametre kümesi olmak üzere, Q, X in boştan farklı alt kümesi olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için

$Q(e) = Q$ ile tanımlanan (Q, E) X üzerinde esnek kümedir ve kısaca, $\tilde{Q}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. (Shabir and Naz, 2011) E evrensel parametre kümesi olmak üzere,(F, E) X üzerinde esnek küme ve Q, X in boştan farklı alt kümesi olsun. Bu durumda, Q üzerindeki (F, E) nin esnek alt kümesi, her $e \in E$ için $F_{Q_{(e)}} = Q \cap F(e)$ ile tanımlıdır ve kısaca, $(F_Q, E) = \tilde{Q} \tilde{\cap} (F, E)$ biçiminde gösterilir.

Önerme 2.1.14. (Zorlutuna et. al. , 2012) E evrensel parametre kümesi olmak üzere, (F, E) ve (G, E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olması için gerek ve yeter koşul $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) = (F, E)$ olmasıdır.
ii) $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olması için gerek ve yeter koşul $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) = (G, E)$ olmasıdır.

Teorem 2.1.15. E evrensel parametre kümesi olmak üzere, (F, E) ve (G, E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olması için gerek ve yeter koşul $(G, E)^c \tilde{\subseteq} (F, E)^c$, **(Zorlutuna et. al. , 2012)**
ii) $(F, E) \tilde{\cup} (F, E)^c = \tilde{X}$. **(Ali et. al. , 2012)**

Tanım 2.1.16. (Zorlutuna et. al., 2012) E evrensel parametre kümesi olmak üzere, J herhangi bir indeks kümesi ve $\mathcal{A} = \{(F_k, E) : k \in J\}$ $S(X)$ in boştan farklı alt ailesi olsun.

i) $\mathcal{A}$ ailesine ait esnek kümelerin kesişimi, her $e \in E$ için $H(e) = \bigcap_{k \in J} \big(F_k(e)\big)$ ile tanımlı (H, E) esnek kümesidir. Kısaca, $(H, E) = \tilde{\bigcap}_{k \in J} (F_k, E)$ biçiminde gösterilir.

ii) $\mathcal{A}$ ailesine ait esnek kümelerin birleşimi, her $e \in E$ için $M(e) = \bigcup_{k \in J}\big(F_k(e)\big)$ ile tanımlı (M, E) esnek kümesidir. Kısaca, $(M, E) = \widetilde{\bigcup}_{k \in J}(F_k, E)$ biçiminde gösterilir.

Teorem 2.1.17. (Zorlutuna et. al. , 2012) E evrensel parametre kümesi ve J indeks kümesi olmak üzere, her $k \in J$ için (F_k, E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler vardır:

i) $\left(\widetilde{\bigcap}_{k \in J}(F_k, E)\right)^c = \widetilde{\bigcup}_{k \in J}(F_k, E)^c$,

ii) $\left(\widetilde{\bigcup}_{k \in J}(F_k, E)\right)^c = \widetilde{\bigcap}_{k \in J}(F_k, E)^c$.

Tanım 2.1.18. (Nazmul and Samantha, 2013) $\mathcal{A} = \{(F_k, E) \colon k \in J\}$, X üzerindeki esnek kümelerin boştan farklı alt ailesi olsun. Bu durumda,

i) $\mathcal{A}$ ailesine ait esnek kümelerin kesişimi, her $e \in E$ için

$$\big(\widetilde{\bigcap}_{k \in J} F_k\big)(e) = \bigcap_{k \in J}\big(F_k(e)\big)$$

biçimindedir.

ii) $\mathcal{A}$ ailesine ait esnek kümelerin birleşimi, her $e \in E$ için

$$\big(\widetilde{\bigcup}_{k \in J} F_k\big)(e) = \bigcup_{k \in J}\big(F_k(e)\big)$$

biçimindedir.

Tanım 2.1.19. (Zorlutuna et. al. , 2012) E evrensel parametre kümesi olmak üzere, X üzerindeki (F, E) esnek kümesi için $e \in E$ için $F(e) \neq \emptyset$ ve $e' \in E \backslash \{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ koşulları sağlanıyorsa, (F, E) esnek kümesine X üzerinde esnek nokta denir. Yani:

$$e_F = \begin{cases} F(e) \neq \emptyset, & e \in E \quad , \\ \emptyset, & e' \in E \backslash \{e\}. \end{cases}$$

Tanım 2.1.20. (Zorlutuna et. al. , 2012) E evrensel parametre kümesi olmak üzere, (G, E) X üzerinde esnek küme ve her $e \in E$ için $F(e) \subset G(e)$ ise e_F esnek noktası (G, E) esnek kümesine aittir ve kısaca, $e_F \;\tilde{\in}\; (G, E)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.21. (Zorlutuna et. al. , 2012) E evrensel parametre kümesi olmak üzere,(G, E) X üzerinde esnek küme ve $e_F \;\tilde{\in}\; \tilde{X}$ olsun. Eğer $e_F \;\tilde{\in}\; (G, E)$ ise, $e_F \;\tilde{\notin}\; (G, E)^c$ dir.

Not 2.1.22. Önerme 2.1.21. in tersinin genelde doğru olmayacağına örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1.23. $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. X üzerinde $e_{2_F} = \{(e_2, \{h_2, h_3\})\}$ esnek noktası ve $(G, E) = \{(e_1, X), (e_2, \{h_1, h_3\})\}$ esnek kümesi verilsin. Bu durumda, $e_{2_F} \;\tilde{\notin}\; (G, E)^c = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{h_2, h_4\})\}$ olmasına rağmen $e_{2_F} \;\tilde{\notin}\; (G, E)$ dir.

2012 yılında Zorlutuna ve arkadaşları tarafından verilen esnek nokta tanımını 2013 yılında Nazmul ve Samantha daha özel halde aşağıdaki biçimde ifade etmişlerdir.

Tanım 2.1.24. (Das and Samantha,2013; Nazmul and Samantha, 2013; Lin, 2013) E evrensel parametre kümesi ve $x \in X$ olmak üzere, her $e \in E$ için $W(e) = \{x\}$ ve her $e'(\neq e) \in E$ için $W(e') = \emptyset$ ile tanımlı $W: E \longrightarrow P(X)$ dönüşümüyle oluşturulan X üzerindeki (W, E) esnek kümesine esnek nokta(esnek eleman) denir ve kısaca, W_e^x ile gösterilir. Yani, $W: E \longrightarrow P(X)$ dönüşümü

$$W(e') = \begin{cases} \{x\}, & e = e', \\ \emptyset, & e \neq e'. \end{cases}$$

biçimindedir. X evrensel kümesi üzerindeki tüm esnek noktaların ailesi ε ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.25. (Das and Samantha, 2013; Nazmul and Samantha, 2013) E evrensel parametre kümesi olmak üzere, (G, E) X üzerinde esnek küme ve $x \in G(e)$ olsun. Bu durumda, X üzerindeki W_e^x esnek noktası (G,E) esnek kümesine aittir denir ve kısaca $W_e^x \,\tilde{\in}\, (G,E)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.26. (Das and Samantha, 2013) X üzerindeki her (G,E) esnek kümesi $W_e^x \,\tilde{\in}\, (G,E)$ olacak biçimdeki esnek noktaların birleşimi şeklinde ifade edilebilir.

$$(G,E) = \tilde{\bigcup}_{W_e^x \tilde{\in} (G,E)} W_e^x$$

Tanım 2.1.27. (Kharal and Ahmad, 2011) E ve K sırasıyla boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki evrensel parametre kümeleri olsun. $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$ iki dönüşüm olsun. $S(X)$, $S(Y)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi olmak üzere, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ dönüşümüne esnek dönüşüm denir ve esnek kümelerin görüntüleri ve ön görüntüleri aşağıdaki gibidir:

i) (F,A), X üzerinde esnek küme olmak üzere, $\left(f_{pu}\big((F,A)\big), B\right)$ ile gösterilen (F,A) nın f_{pu} esnek dönüşümü altındaki görüntüsü her $\beta \in B = p(A)$ için

$$f_{pu}\big((F,A)\big)(\beta) = \begin{cases} \bigcup\limits_{\alpha \in p^{-1}(\beta) \cap A} u\big(F(\alpha)\big) & , \quad p^{-1}(\beta) \cap A \neq \emptyset \;, \\ \emptyset & , \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ii) (G,B), Y üzerinde esnek küme olmak üzere, $\left({f_{pu}}^{-1}\big((G,B)\big), D\right)$ ile gösterilen (G,B) nin f_{pu} esnek dönüşümü altındaki ön görüntüsü her $\alpha \in D = p^{-1}(B) \subset E$ için

$${f_{pu}}^{-1}\big((G,B)\big)(\alpha) = \begin{cases} u^{-1}\Big(G\big(p(\alpha)\big)\Big), & p(\alpha) \in B, \\ \emptyset & , \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

Eğer $A = E$ ve $B = K$ ise, (F,A) nın f_{pu} dönüşümü altındaki görüntüsü olan $\left(f_{pu}\big((F,A)\big), B\right)$ esnek kümesi kısaca $f_{pu}\big((F,A)\big)$ biçiminde; (G,B) nin f_{pu} dönüşümü altındaki ön görüntüsü olan $\left({f_{pu}}^{-1}\big((G,B)\big), D\right)$ esnek kümesi ise ${f_{pu}}^{-1}\big((G,B)\big)$ biçiminde gösterilecektir.

Tanım 2.1.28. (Kharal and Ahmad, 2011) E ve K sırasıyla, boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki evrensel parametre kümeleri olsun. $S(X)$, $S(Y)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi, $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ olmak üzere, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun. $A, B \subset E$ olmak üzere, (F, A), (G, B) X üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda, her $\beta \in K$ için aşağıdakiler tanımlıdır:

i) $\Big(f_{pu}\big((F,A)\big)\tilde{\cup} f_{pu}\big((G,B)\big)\Big)(\beta) = f_{pu}\big((F,A)\big)(\beta) \cup f_{pu}\big((G,B)\big)(\beta),$

ii) $\Big(f_{pu}\big((F,A)\big)\tilde{\cap} f_{pu}\big((G,B)\big)\Big)(\beta) = f_{pu}\big((F,A)\big)(\beta) \cap f_{pu}\big((G,B)\big)(\beta).$

Tanım 2.1.29. (Kharal and Ahmad, 2011) E ve K sırasıyla, boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki evrensel parametre kümeleri olsun. $S(X)$, $S(Y)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi; $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ olmak üzere, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun. $D, R \subset K$ olmak üzere, (F, D), (G, R) Y üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda, her $\alpha \in E$ için

i) $\big({f_{pu}}^{-1}\big((F,D)\big)\tilde{\cup}\, {f_{pu}}^{-1}\big((G,R)\big)\big)(\alpha) = {f_{pu}}^{-1}\big((F,D)\big)(\alpha) \cup {f_{pu}}^{-1}\big((G,R)\big)(\alpha),$

ii) $\Big({f_{pu}}^{-1}\big((F,D)\big)\tilde{\cap} {f_{pu}}^{-1}\big((G,R)\big)\Big)(\alpha) = {f_{pu}}^{-1}\big((F,D)\big)(\alpha) \cap {f_{pu}}^{-1}\big((G,R)\big)(\alpha).$

Teorem 2.1.30. (Kharal and Ahmad, 2011) E ve K sırasıyla, boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki evrensel parametre kümeleri olsun. $S(X)$, $S(Y)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi, $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ olmak üzere, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun. Bu durumda, her $k \in J$ için $A_k \subset E$ ve $A, B \subset E$olmak üzere, X üzerindeki her (F_1, A), (F_2, B) esnek kümeleri ve her $k \in J$ için, her (F_k, A_k) esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır:

i) $f_{pu}\big(\tilde{\emptyset}\big) = \tilde{\emptyset},$

ii) $f_{pu}\big(\tilde{X}\big) \tilde{\subseteq} \tilde{Y},$

iii) $(F_1, A) \tilde{\subseteq} (F_2, B)$ ise $f_{pu}\big((F_1, A)\big) \tilde{\subseteq} f_{pu}\big((F_2, B)\big)$ dir,

iv) $f_{pu}\Big((F_1, A)\tilde{\cup}(F_2, B)\Big) = f_{pu}\big((F_1, A)\big)\tilde{\cup} f_{pu}\big((F_2, B)\big)$,

v) $f_{pu}\big((F_1, A)\big)\tilde{\cap} f_{pu}\big((F_2, B)\big) \tilde{\subseteq} f_{pu}\Big((F_1, A)\tilde{\cap}(F_2, B)\Big)$,

vi) $f_{pu}\left(\tilde{\bigcup}_{k\in J}(F_k, A_k)\right) = \tilde{\bigcup}_{k\in J}\left(f_{pu}\big((F_k, A_k)\big)\right)$,

vii) $f_{pu}\left(\tilde{\bigcap}_{k\in J}(F_k, A_k)\right) \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcap}_{k\in J}\left(f_{pu}\big((F_k, A_k)\big)\right)$.

Tanım 2.1.31. (Zorlutuna et. al. , 2012) E ve K sırasıyla, boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki evrensel parametre kümeleri olmak üzere, $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ dönüşümleri verilsin. u ve p dönüşümleri örtense $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşümüne örten, u ve p 1-1 ise f_{pu} dönüşümüne 1-1 dir denir.

Teorem 2.1.32. (Kharal and Ahmad, 2011) E ve K sırasıyla boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki evrensel parametre kümeleri olsun. $S(X)$, $S(Y)$; X ve Y üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi olmak üzere, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun. Bu durumda, her $k \in J$ için $D_k \subset K$ ve $D, R \subset K$ olmak üzere, Y üzerindeki her (G_1, D), (G_2, R) ve her $k \in J$ için (G_k, D_k) esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır:

i) $f_{pu}{}^{-1}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$,

ii) $f_{pu}{}^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$,

iii) $(G_1, D) \tilde{\subseteq} (G_2, R)$ ise $f_{pu}{}^{-1}\big((G_1, D)\big) \tilde{\subseteq} f_{pu}{}^{-1}\big((G_2, R)\big)$ dir,

iv) $f_{pu}{}^{-1}\left((G_1, D)\tilde{\cup}(G_2, R)\right) = f_{pu}{}^{-1}\big((G_1, D)\big)\tilde{\cup} f^{-1}\big((G_2, R)\big)$,

v) $f_{pu}{}^{-1}\left((G_1, D)\tilde{\cap}(G_2, R)\right) = f_{pu}{}^{-1}\big((G_1, D)\big)\tilde{\cap} f^{-1}\big((G_2, R)\big)$,

vi) $f_{pu}{}^{-1}\left(\tilde{\bigcup}_{k\in J}(G_k, D_k)\right) = \tilde{\bigcup}_{k\in J}\left(f_{pu}{}^{-1}\big((G_k, D_k)\big)\right)$,

vii) $f_{pu}{}^{-1}\left(\tilde{\bigcap}_{k\in J}(G_k, D_k)\right) = \tilde{\bigcap}_{k\in J}\left(f_{pu}{}^{-1}\big((G_k, D_k)\big)\right)$.

Önerme 2.1.33. (Zorlutuna et. al. , 2012) E ve K boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki evrensel parametre kümeleri olsun. $S(X)$, $S(Y)$ sırasıyla, X ve Y üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi olmak üzere, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun**.** Bu durumda, Y üzerindeki her (G, K) esnek kümesi için aşağıdakiler sağlanır:

i) $f_{pu}{}^{-1}((G,K)^c) = \left(f_{pu}{}^{-1}\big((G,K)\big)\right)^c$,

ii) $f_{pu}f_{pu}{}^{-1}\big((G,K)\big) \tilde{\subseteq} (G,K)$.

Ayrıca, f_{pu} esnek dönüşümü örtense $f_{pu}f_{pu}{}^{-1}\big((G,K)\big) = (G,K)$ dir.

Önerme 2.1.34. (Zorlutuna et. al. , 2012) E ve K boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki evrensel parametre kümeleri olsun. $S(X)$, $S(Y)$ sırasıyla, X ve Y üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi olmak üzere, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun**.** Bu durumda, X üzerindeki her (F,E) esnek kümesi için

i) $(F,E) \tilde{\subseteq} f_{pu}{}^{-1}f_{pu}\big((F,E)\big)$,

ii) f_{pu} esnek dönüşümü $1-1$ ise $f_{pu}{}^{-1}f_{pu}\big((F,E)\big) = (F,E)$.

2012 yılında Zorlutuna ve arkadaşları tarafından iki esnek küme ailesi arasında tanımlanan esnek dönüşüm tanımı yerine, 2013 yılında Nazmul ve Samantha boştan farklı iki küme arasında bir dönüşüm vererek bir esnek kümenin esnek görüntü ve ters görüntülerini aşağıdaki biçimde tanımlamışlardır.

Tanım 2.1.35.(Nazmul and Samantha, 2013) X ve Y boştan farklı iki küme, $u: X \longrightarrow Y$ dönüşüm olsun. Bu durumda, X üzerindeki (F,E) esnek kümesinin esnek görüntüsü ve Y üzerindeki (G,E) esnek kümesinin ters görüntüsü aşağıdaki gibidir:

i) Her $e \in E$ için $[u(F)](e) = u[F(e)]$ olmak üzere, $u(F,E) = (u(F),E)$;

ii) Her $e \in E$ için $[u^{-1}(G)](e) = u^{-1}[G(e)]$ olmak üzere, $u^{-1}(G,E) = (u^{-1}(G),E)$.

Önerme 2.1.36. (Nazmul and Samantha, 2013) X ve Y boştan farklı iki küme, $u: X \longrightarrow Y$ dönüşüm olsun. Bu durumda, X üzerindeki (F,E) ve (G,E) esnek kümeleri için aşağıdakiler vardır:

i) $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $u\big((F,E)\big) \tilde{\subseteq} u\big((G,E)\big)$ dir,

ii) $u\Big((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\Big) = u\big((F,E)\big)\tilde{\cup}u\big((G,E)\big)$,

iii) $u\Big((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\Big) \tilde{\subseteq} u\big((F,E)\big)\tilde{\cap}u\big((G,E)\big)$,

iv) u 1-1 bir dönüşümse $u\Big((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\Big) = u\big((F,E)\big)\tilde{\cap}u\big((G,E)\big)$ dir.

Önerme 2.1.37. (Nazmul and Samantha, 2013) X ve Y boştan farklı iki küme, $u: X \longrightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda, Y üzerindeki (H,E) ve (M,E) esnek kümeleri için aşağıdakiler vardır:

i) $(H,E) \tilde{\subseteq} (M,E)$ ise $u^{-1}\big((H,E)\big) \tilde{\subseteq} u^{-1}\big((M,E)\big)$ dir,

ii) $u^{-1}\Big((H,E)\tilde{\cup}(M,E)\Big) = u^{-1}\big((H,E)\big)\tilde{\cup}u^{-1}\big((M,E)\big)$,

iii) $u^{-1}\Big((H,E)\tilde{\cap}(M,E)\Big) = u^{-1}\big((H,E)\big)\tilde{\cap}u^{-1}\big((M,E)\big)$.

Önerme 2.1.38. (Nazmul and Samantha, 2013) X ve Y boştan farklı iki küme, $u: X \longrightarrow Y$ bir dönüşüm olsun**.** Bu durumda, Y üzerindeki (H,E) esnek kümesi için aşağıdakiler sağlanır:

i) $uu^{-1}\big((H,E)\big) \tilde{\subseteq} (H,E)$.

ii) u esnek dönüşümü örtense $uu^{-1}\big((H,E)\big) = (H,E)$ dir.

Önerme 2.1.39. (Nazmul and Samantha, 2013) X ve Y boştan farklı iki küme ve $u: X \longrightarrow Y$ bir dönüşüm olsun**.** Bu durumda, X üzerindeki (F,E) esnek kümesi için

i) $(F,E) \tilde{\subseteq} u^{-1}u\big((F,E)\big)$ dir,

ii) u dönüşümü $1-1$ ise $u^{-1}u\big((F,E)\big) = (F,E)$ dir.

3. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

3.1. Esnek Topolojik Uzay

Bu bölümde, ilk olarak 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından verilen esnek topolojik uzay kavramı tanıtılmıştır. Daha sonra, esnek topolojik uzaylarla ilgili bazı temel kavramlar ve teoremler sunulmuştur.

Bu bölüm ve sonrasında, boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki boştan farklı evrensel parametre kümeleri sırasıyla E ve K ile gösterilmiştir.

Tanım 3.1.1. (Shabir and Naz, 2011) τ, X üzerindeki esnek kümelerin bir ailesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde esnek topoloji,(X, τ, E) üçlüsüne ise esnek topolojik uzay denir.

i) $\widetilde{\emptyset}, \widetilde{X} \in \tau$,

ii) τ ya ait iki esnek açık kümenin kesişimi τ ya aittir,

iii) τ ya ait herhangi sayıda esnek açık kümenin birleşimi τ ya aittir.

Burada τ nun elemanlarına X üzerinde esnek açık küme ya da τ −esnek açık küme denir. $(F, E)^c$ nin esnek açık küme olması durumunda ise (F, E) ye X üzerinde esnek kapalı küme ya da τ −esnek kapalı küme denir. Esnek kapalı kümelerin ailesi kısaca $\mathcal{K}$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.2. (Shabir and Naz, 2011) (X, τ, E) esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, aşağıdakiler vardır:

i) $\widetilde{\emptyset}, \widetilde{X} \in \mathcal{K}$,

ii) $\mathcal{K}$ ye ait iki esnek kapalı kümenin birleşimi $\mathcal{K}$ ye aittir,

iii) $\mathcal{K}$ ye ait herhangi sayıda esnek kapalı kümenin kesişimi $\mathcal{K}$ ye aittir.

Not 3.1.3. (Shabir and Naz, 2011) X üzerindeki tüm esnek kümeleri içeren esnek topolojiye esnek ayrık topoloji ve sadece $\widetilde{\emptyset}$, $\tilde{X}$ yı içeren esnek topolojiye esnek kaba topoloji denir.

Örnek 3.1.4. $X = \{h_1, h_2, h_3\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\tau = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \{h_2\})\}, \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \{h_3\}), (e_3, \{h_1, h_2\}\}, \{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_2, X), (e_3, \{h_1, h_2\})\}, \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \emptyset), (e_3, \{h_2\})\}\}$ olsun. O halde, τ ailesi X üzerinde esnek topolojidir.

Önerme 3.1.5. (Nazmul and Samantha, 2014) X sonsuz küme, E boştan farklı parametre kümesi ve $\tau = \{(F, E): (F, E)^c \ sonlu\ \} \cup \{\widetilde{\emptyset}\}$ olsun. Bu durumda, τ ailesi X üzerinde esnek topolojidir.

İspat:

$\boldsymbol{t_1}$**)** $\tilde{X}^c = \widetilde{\emptyset}$ sonlu olduğundan $\tilde{X} \in \tau$ dur.

$\boldsymbol{t_2}$) (F, E) ve (G, E), $\tau -$esnek açık kümeler olsun. Bu durumda, $(F, E)^c$ ve $(G, E)^c$ sonludur. Dolayısıyla, $(F, E)^c \ \widetilde{\cup}\ (G, E)^c = \left((F, E) \widetilde{\cap} (G, E)\right)^c$ de sonlu esnek kümedir. Yani, $(F, E) \widetilde{\cap} (G, E)$ $\tau -$esnek açık kümedir.

$\boldsymbol{t_3}$) $\{(F_k, E): k \in J\} \widetilde{\subseteq} \tau$ olsun. Bu durumda, her $k \in J$ için (F_k, E) $\tau -$esnek Açık kümedir. Yani, her $k \in J$ için $(F_k, E)^c$ sonludur. Dolayısıyla,

$\widetilde{\cap}_{k \in J} \ ((F_k, E)^c) = \left(\widetilde{\cup}_{k \in J} (F_k, E)\right)^c$ sonludur. O halde, $\widetilde{\cup}_{k \in J} (F_k, E)$ $\tau -$ esnek açık kümedir.

Sonuç olarak, verilen τ ailesi X üzerinde esnek topolojidir.

Not 3.1.6. (Nazmul and Samantha, 2014) Önerme 3. 1. 5. te verilen esnek topolojiye esnek sonlu tümleyenler (cofinite) topolojisi denir.

Önerme 3.1.7. (Shabir and Naz, 2011) (X, τ, E) esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için

$$\tau^e = \{F(e): (F, E) \in \tau\}$$

ailesi X üzerinde topolojidir.

İspat:

$\boldsymbol{t_1}$) $\widetilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$ olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için $\emptyset, X \in \tau^e$ dir.

$\boldsymbol{t_2}$) Her $e \in E$ için $F(e), G(e) \in \tau^e$ olsun. Bu durumda, $(F,E), (G,E)$ $\tau-$esnek açık kümeleri vardır ve τ, X üzerinde esnek topoloji olduğundan $(F,E)\widetilde{\cap}(G,E)$ $\tau-$esnek açık kümedir. Dolayısıyla, her $e \in E$ için $F(e) \cap G(e) \in \tau^e$ dir.

$\boldsymbol{t_3}$) $\{F_k(e): k \in J\}$ τ^e deki kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda, her $k \in J$ için $F_k(e) \in \tau^e$ dir. Dolayısıyla, her $k \in J$ için (F_k, E) $\tau-$esnek açık kümesi vardır ve τ, X üzerinde esnek topoloji olduğundan $\widetilde{\bigcup}_{k \in J}(F_k, E)$ $\tau-$esnek açık küme elde edilir. O halde, her $e \in E$ için, $\bigcup_{k \in J}\big(F_k(e)\big) \in \tau^e$ dir.

Yani, her $e \in E$ için τ^e aileleri X üzerinde topolojidir.

Not 3.1.8. (Shabir and Naz, 2011) Önerme 3.1.7. deki τ^e topolojisine X üzerinde e-parametre topolojisi denir.

Not 3.1.9. Önerme 3.1.7. deki durumun tersinin genelde doğru olmayacağına ait örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.1.10. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda, $\tau^{e_1} = \{\emptyset, X\} \cup \big\{\{h_1\}, \{h_2, h_3\}\big\}$ ve $\tau^{e_2} = \{\emptyset, X\} \cup \big\{\{h_1\}, \{h_1, h_3\}\big\}$ aileleri X üzerinde topolojidir. Ancak, $\tau = \big\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\big\} \cup \big\{\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_3\})\}, \{(e_1,\{h_2,h_3\}), (e_2, (e_2,\{h_1\})\}, (e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1,\{h_2,h_3\}), (e_2,\{h_1,h_3\})\}\big\}$ X üzerinde esnek topoloji değildir. Çünkü, $\{(e_1,\{h_1\}), (e_2,\{h_1,h_3\})\} \cap \{(e_1,\{h_2,h_3\}), (e_2,\{h_1\})\} \notin \tau$ dur.

Not 3.1.11. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzayı verildiğinde, Önerme 3.1.7. den E parametre kümesinden X üzerindeki tüm topolojilerin ailesine $e \longrightarrow \tau^e$ şeklinde bir dönüşümün var olduğu elde edilir. Önerme 3.1.7. deki durumun tersinin de sağlanması için gerekli önerme ise, aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.1.12. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzay olsun. τ^e, Önerme 3.1.7. deki biçimde verilsin. Ayrıca,

$$\tau^* = \{(G,E) \in S(X): G(e) \in \tau^e, \forall e \in E\}$$

olsun. Bu durumda, τ^* ailesi X üzerinde her $e \in E$ için $[\tau^*]^e = \tau^e$ koşulunu sağlayan esnek topolojidir.

İspat:

i) Her $e \in E$ için $\widetilde{\emptyset}(e) = \emptyset \in \tau^e$ olduğundan $\widetilde{\emptyset} \in \tau^*$ dır ve her $e \in E$ için $\tilde{X}(e) = X \in \tau^e$ olduğundan $\tilde{X} \in \tau^*$ dır.

ii) (F_1, E), (F_2, E) τ^* $-$esnek açık küme olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için $F_1(e), F_2(e) \in \tau^e$ dir. Dolayısıyla, her $e \in E$ için $F_1(e) \cap F_2(e) \in \tau^e$ olduğundan $H(e) = \left(F_1 \widetilde{\cap} F_2\right)(e) \in \tau^e$ elde edilir. O halde, (H, E) τ^* $-$ esnek açık kümedir.

iii) Her $k \in J$ için (F_k, E) τ^* $-$esnek açık küme olsun. Her $k \in J$ için $F_k(e) \in \tau^e$ olduğundan $\bigcup_{k \in J}\left(F_k(e)\right) \in \tau^e$ dir. Bu yüzden, her $e \in E$ için $H(e) = \left(\widetilde{\bigcup}_{k \in J} F_k\right)(e) \in \tau^e$ elde edilir. O halde, her $e \in E$ için (H, E) τ^* $-$esnek açık kümedir.

Yani τ^*, X üzerinde esnek topolojidir. $[\tau^*]^e = \tau^e$ olduğunu gösterelim. G, $[\tau^*]^e$ $-$açık küme olsun. Bu durumda, $G = U(e) \in \tau^e$ olacak biçimde bir (U, E) τ^* $-$esnek açık kümesi vardır. Dolayısıyla, $[\tau^*]^e \subset \tau^e$ elde edilir. Diğer yandan, G, τ^e $-$ açık küme olsun. Bu durumda, $G = U(e)$ olacak biçimde bir (U, E) τ $-$ esnek açık kümesi vardır. Dolayısıyla, her $e' \neq e$ için $F(e) = U(e)$ ve $F(e') = \emptyset$ olacak biçimde bir (F, E) esnek kümesi elde edilir. O halde, (F, E) τ^* $-$esnek açık kümedir ve her $e \in E$ için $G = F(e) = U(e) \in [\tau^*]^e$ olur. Yani, $\tau^e \subset [\tau^*]^e$ dir. Sonuç olarak, her $e \in E$ için $[\tau^*]^e = \tau_e$ elde edilir.

Önerme 3.1.13. (Shabir and Naz, 2011) (X, τ_1, E), (X, τ_2, E) iki esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, $\tau_1 \cap \tau_2$ ailesi X üzerinde esnek topolojidir.

Not 3.1.14. X üzerindeki iki esnek topolojinin birleşiminin genelde esnek topoloji olmayacağına ait aşağıda örnek verilmiştir.

Örnek 3.1.15. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. X üzerindeki esnek kümelerin iki ailesi sırasıyla

$\tau_1 = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\}$ ∪ $\{\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_2\}),(e_3,\{h_3\})\}$, $\{(e_1,\{h_2\}$, $(e_2$, $\{h_2$, $h_3\})$, $(e_3,\{h_1\})\}$, $\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X),(e_3,\{h_1,h_3\})\}$, $\{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_2\})$, $\{(e_3$, $\emptyset)\}\}$ ve $\tau_2 = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_2\}),(e_3,\{h_3\})\}\}$ olsun. Bu durumda, τ_1 ve τ_2 aileleri X üzerinde esnek topolojidir. Ancak, $\tau_1 \cup \tau_2$ ailesi X üzerinde esnek topoloji değildir. Çünkü, $\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_2\}),(e_3,\{h_3\})\}$ $\widetilde{\cap}$ $\{(e_1,\{h_2\})$, $(e_2,\{h_1,h_2\})$, $(e_3,\{h_3\})\} \notin \tau$ dur.

Tanım 3.1.16. (Shabir and Naz, 2011) X boştan farklı küme, E boştan farklı parametre kümesi olsun. τ_1 ve τ_2 , X üzerinde iki esnek topoloji ve $\tau_1 \subset \tau_2$ olsun. Bu durumda, τ_2 esnek topolojisi τ_1 esnek topolojisinden daha incedir denir.

Tanım 3.1.17. (Shabir and Naz, 2011) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve Q, X in boştan farklı alt kümesi olsun. Bu durumda,

$$\tau_Q = \{(F_Q,E) : (F,E) \in \tau\}$$

ailesine Q üzerinde esnek relatif topoloji denir. Burada, $(F_Q,E) = \tilde{Q} \widetilde{\cap} (F,E)$ şeklindedir. (Q,τ_Q,E) ye ise (X,τ,E) nin esnek alt uzayı denir.

Önerme 3.1.18. (Shabir and Naz, 2011) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (Q,τ_Q,E), (X,τ,E) nin esnek alt uzayı, (F,E) $\tau_Q -$ esnek açık küme olsun. Eğer $\tilde{Q}$, $\tau -$esnek açık küme ise (F,E) $\tau -$esnek açık kümedir.

Teorem 3.1.19. (Shabir and Naz, 2011) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (Q,τ_Q,E) , (X,τ,E) nin esnek alt uzayı ve (F,E), Q üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda,

i) (F,E) nin $\tau_Q -$esnek açık küme olması için gerek ve yeter koşul $(F,E) = \tilde{Q} \widetilde{\cap} (G,E)$ olacak biçimde (G,E) $\tau -$ esnek açık kümesinin bulunmasıdır.

ii) (F,E) nin Q üzerinde esnek kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde $(F,E) = \tilde{Q} \widetilde{\cap} (L,E)$ olacak biçimde (L,E) esnek kapalı kümesinin bulunmasıdır.

Tanım 3.1.20. (Nazmul and Samantha, 2013) X ve Y boştan farklı küme, τ_X ve τ_Y sırasıyla, X ve Y üzerindeki esnek topolojiler, $u: X \longrightarrow Y$ dönüşüm olsun. Bu durumda, τ_Y nin u dönüşümü altındaki ön görüntüsü ve τ_X in ualtındaki görüntüsü sırasıyla $u^{-1}(\tau_Y)$ ve $u(\tau_X)$ ile gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlıdır:

i) $u^{-1}(\tau_Y) = \{u^{-1}\big((G,E)\big) = (u^{-1}(G),E) : (G,E) \in \tau_Y\}$,

ii) $u(\tau_X) = \{(G,E) \in S(Y) : u^{-1}\big((G,E)\big) = (u^{-1}(G),E)\}$.

Teorem 3.1.21. (Nazmul and Samantha, 2013) X, Y boştan farklı küme, τ_X ve τ_Y sırasıyla, X ve Y üzerindeki esnek topolojiler, $u: X \longrightarrow Y$ dönüşüm olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) $u^{-1}(\tau_Y)$ X üzerinde esnek topolojidir.

ii) $u(\tau_X)$ Y üzerinde esnek topolojidir.

İspat:

i) $\boldsymbol{t_1}$) $\widetilde{\emptyset} \in \tau_Y$ olsun. Tanım 2.1.35. ten her $e \in E$ için $[u^{-1}(\widetilde{\emptyset})](e)$ = $u^{-1}\big(\emptyset(e)\big)$ = $u^{-1}(\emptyset)$ = $\emptyset$ dir. Dolayısıyla, $u^{-1}\big(\widetilde{\emptyset},E\big)$ = $(u^{-1}\big(\widetilde{\emptyset}\big),E) = \widetilde{\emptyset} \in$ $u^{-1}(\tau_Y)$ elde edilir. Benzer şekilde, $\tilde{Y} \in \tau_Y$ alalım. Tanım 2.1.35 ten her $e \in E$ için $[u^{-1}(\tilde{Y})](e)$ = $u^{-1}\big(Y(e)\big)$ = $u^{-1}(Y)$ = X olduğundan $\tilde{X} \in$ $u^{-1}(\tau_Y)$ dir. Dolayısıyla, $u^{-1}\big(\tilde{Y},E\big) = u^{-1}\big(\tilde{Y}\big) \in u^{-1}(\tau_Y)$ elde edilir.

$\boldsymbol{t_2}$) $(H_1,E),(H_2,E) \in u^{-1}(\tau_Y)$ olsun. Bu durumda, (H_1,E) = $u^{-1}\big((G_1,E)\big)$ = $(u^{-1}(G_1),E)$ ve (H_2,E) = $u^{-1}\big((G_2,E)\big) = (u^{-1}(G_2),E)$ olacak biçimde $(G_1,E),(G_2,E)$ τ_Y −esnek açık kümeleri vardır. $(G_1,E),(G_2,E)$ τ_Y −esnek açık küme olduğundan $(G_1,E)\widetilde{\bigcap}(G_2,E)$ de τ_Y −esnek açık kümedir ve her $e \in E$ için $G_1(e) \bigcap G_2(e)$ = $H(e)$ şeklindedir. Yani, $(G_1,E)\widetilde{\bigcap}(G_2,E)$ = (H,E) şeklindedir. Dolayısıyla, Tanım 2.1.35. ten $(H_1,E)\widetilde{\bigcap}(H_2,E)$ = $u^{-1}\big((G_1,E)\big)\widetilde{\bigcap}u^{-1}\big((G_2,E)\big)$ = $(u^{-1}(G_1),E)\widetilde{\bigcap}(u^{-1}(G_2),E)$ elde edilir. Ayrıca Önerme 2.1.37. den $u^{-1}\big((G_1,E)\big) \widetilde{\bigcap}$ $u^{-1}\big((G_2,E)\big)$ = $u^{-1}\big((G_1,E)$ $\widetilde{\bigcap}$

$(G_2, E)) = u^{-1}((H,E))$ ve Tanım 2.1.35. ten $u^{-1}((H,E)) = (u^{-1}(H),E)$ dir. O halde, $(H_1,E)\tilde{\cap}(H_2,E) \in u^{-1}(\tau_Y)$ dir.

$\boldsymbol{t_3}$) Her $k \in J$ için $(H_k,E) \in u^{-1}(\tau_Y)$ olsun. Bu durumda, her $k \in J$ için $(H_k,E) = u^{-1}((G_k,E)) = (u^{-1}(G_k),E)$ olacak biçimde $(G_k,E)\tau_Y -$ esnek açık kümeleri vardır. Her $k \in J$ için (G_k,E) τ_Y −esnek açık küme olduğundan $\tilde{\cup}_{k\in J}(G_k,E)$ de τ_Y −esnek açık kümedir ve her $e \in E$ için $\tilde{\cup}_{k\in J}\big(G_k(e)\big) = H(e)$ şeklindedir. Yani, $\tilde{\cup}_{k\in J}(G_k,E) = (H,E)$ dir. Dolayısıyla, $\tilde{\cup}_{k\in J}(H_k,E) = \tilde{\cup}_{k\in J}u^{-1}((G_k,E)) = \tilde{\cup}_{k\in J}(u^{-1}(G_k),E)$ elde edilir. Ayrıca, $\tilde{\cup}_{k\in J}u^{-1}((G_k,E)) = \tilde{\cup}_{k\in J}(u^{-1}(G_k),E)$ ve u^{-1} $(\tilde{\cup}_{k\in J}$ $(G_k,E)) = u^{-1}((H,E))$ dir. Tanım 2.1.35. ten $u^{-1}((H,E)) = (u^{-1}(H),E)$ dir. O halde, $\tilde{\cup}_{k\in J}(H_k,E) \in u^{-1}(\tau_Y)$ dir.

Sonuç olarak, $u^{-1}(\tau_Y)$ X üzerinde esnek topolojidir.

ii) Benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.1.22. (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve (F,E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, (F,E) nin esnek içi ve esnek kapanışı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

i) (Zorlutuna et. al. , 2012)

$$Int((F,E)) = \tilde{\cup}\{(G,E): (G,E) \tilde{\subseteq} (F,E), (G,E) \in \tau\}.$$

ii) (Shabir and Naz, 2011)

$$Cl((F,E)) = \tilde{\cap}\{(K,E): (F,E) \tilde{\subseteq} (K,E), \forall (K,E) \in \mathcal{K}\}.$$

Dolayısıyla, $Int((F,E))$ nin (F,E) nin kapsadığı en büyük τ −esnek açık küme olduğu ve $Cl((F,E))$ nin de (F,E) yi içeren en küçük τ −esnek kapalı küme olduğu açıktır.

Önerme 3.1.23. (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (F,E) ve (G,E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $Int\big((F,E)\big)\tilde{\subseteq} Int\big((G,E)\big)$, **(Zorlutuna et. al. , 2012)**

ii) $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $Cl\big((F,E)\big)\tilde{\subseteq} Cl\big((G,E)\big)$ dir. **(Shabir and Naz, 2011)**

Önerme 3.1.24. (Nazmul and Samantha, 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (F,E) ve (G,E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) $\big((F,E)\big)$ nin $\tau-$esnek açık küme olması için gerek ve yeter koşul $Int\big((F,E)\big)=(F,E)$ olmasıdır,

ii) $Int\Big(Int\big((F,E)\big)\Big)=Int\big((F,E)\big)$,

iii) $Int(\tilde{\emptyset})=\tilde{\emptyset}$, $Int(\tilde{X})=\tilde{X}$,

iv) $Int\big((F,E)\big)\tilde{\cap}\, Int\big((G,E)\big)=Int\Big((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\Big)$.

Teorem 3.1.25. (Shabir and Naz, 2011) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (F,E) ve (G,E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) $Cl(\tilde{\emptyset})=\tilde{\emptyset}, Cl(\tilde{X})=\tilde{X}$;

ii) (F,E) nin X üzerinde esnek kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $(F,E)=Cl\big((F,E)\big)$ olmasıdır,

iii) $Cl\Big(Cl\big((F,E)\big)\Big)=Cl\big((F,E)\big)$,

iv) $Cl\Big((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\Big)=Cl\big((F,E)\big)\tilde{\cup}\, Cl\big((G,E)\big)$,

v) $Cl\Big((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\Big)\tilde{\subseteq} Cl\big((F,E)\big)\tilde{\cap}\, Cl\big((G,E)\big)$.

İspat: **v)** $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ ve $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ den $Cl\big((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\big)\tilde{\subseteq} Cl\big((F,E)\big)$ ve $Cl\Big((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\Big)\tilde{\subseteq} Cl\big((G,E)\big)$ elde edilir. Yani, $Cl\Big((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\Big)\tilde{\subseteq} Cl\big((F,E)\big)\tilde{\cap}\, Cl\big((G,E)\big)$ dir.

Tanım 3.1.26. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve e_F, X üzerinde esnek nokta olsun. Eğer $e_F \tilde{\in} (H,E) \tilde{\subset} (G,E)$ olacak biçimde (H,E) $\tau-$ esnek açık kümesi varsa e_F e (G,E) nin esnek iç noktası denir. Yani:

$e_F, (G,E)$ nin esnek iç noktasıdır $\quad :\Leftrightarrow \quad (\exists (H,E) \in \tau)$: $e_F \tilde{\in} (H,E) \tilde{\subset} (G,E)$

Önerme 3.1.27. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (G,E) X üzerinde esnek küme ve her $e \in E$ için $e_F \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) Her $e_F \tilde{\in} (G,E)$ esnek noktası esnek iç noktadır,

ii) Her $e \in E$için $[e]_G: E \longrightarrow P(X)$ dönüşümü

$$[e]_G(e') = \begin{cases} G(e), & e = e' \\ \emptyset, & e \in E \backslash \{e'\} \end{cases} ,.$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda, $[e]_G (G,E)$ nin esnek iç noktasıdır. Yani, (G,E) nin her e_F esnek iç noktası için $[e]_G = \tilde{\bigcup} e_F$ tir,

iii) $\tilde{\bigcup}_{e\in E}[e]_G = (G,E)$.

İspat:

ii) (G,E) $\tau-$esnek açık küme olduğundan $[e]_G$ esnek iç noktası, (G,E) nin $e \in E$ ile belirlenen en büyük esnek iç noktasıdır. O halde, $[e]_G = \tilde{\bigcup} e_F$ tir.

Önerme 3.1.28. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve (G,E), X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, $Int\big((G,E)\big)$ her $e \in E$ için (G,E) deki e_F esnek noktalarının birleşimidir.

İspat: $(S,E) \tilde{\subset} (G,E)$ olacak biçimdeki her (S,E) $\tau-$esnek açık kümesi için $H(e) = \bigcup_{e\in E} \; S(e)$ olmak üzere, $Int\big((G,E)\big) = (H,E)$ olsun. $Int\big((G,E)\big)$ $\tau-$esnek açık küme olduğundan Önerme 3.1.27. gereğince $Int\big((G,E)\big) = \tilde{\bigcup}_{e\in E}[e]_H$ dir ve her $[e]_H$ için $[e]_H \tilde{\in} Int\big((G,E)\big) \tilde{\subset} (G,E)$ olduğundan $[e]_H$

(G,E) nin esnek iç noktasıdır. Bu yüzden, $Int\big((G,E)\big) \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcup}_{e\in E}\{e_F: her\ e \in E\ için\ e_F, (G,E)\ nin$ esnek $iç\ noktası\}$ dır.

Diğer yandan, her $e \in E$ için e_{F_k} (G,E) nin esnek iç noktası olsun. Bu durumda, $e_{F_k} \tilde{\in} \big(K^e_{F_k}, E\big) \tilde{\subseteq} (G,E)$ olacak biçimde $\big(K^e_{F_k}, E\big)$ $\tau -$ esnek açık kümesi vardır ve her $e \in E$ için $\tilde{\bigcup}_k e_{F_k} \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcup}_k\big(K^e_{F_k}, E\big) \tilde{\subseteq} (G,E)$ dir. Dolayısıyla, $\tilde{\bigcup}_{e\in E}\tilde{\bigcup}_k\{e_{F_k}\} \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcup}_{e\in E}\tilde{\bigcup}_k\big(K^e_{F_k}, E\big) \tilde{\subseteq} (G,E)$ elde edilir. O halde, $\tilde{\bigcup}_{e\in E}$ $\tilde{\bigcup}_k$ $\big(K^e_{F_k}, E\big)$ $\tau -$esnek açık kümedir ve $Int\big((G,E)\big)$ (G,E) nin kapsadığı en büyük $\tau -$esnek açık küme olduğundan $\tilde{\bigcup}_{e\in E}\{e_F: Her\ e \in E\ içine_F, (G,E)\ nin$ esnek $iç\ noktası\} \tilde{\subseteq} Int\big((G,E)\big)$ elde edilir. Yani, $Int\big((G,E)\big)$ her $e \in E$ için (G,E) deki e_F esnek noktalarının birleşimidir.

Önerme 3.1.29. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve (G,E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, her $e_F \tilde{\in} (G,E)$ için $[e]_G = \tilde{\bigcup} e_F$ olması için gerek ve yeter koşul (G,E) nin $\tau -$ esnek açık küme olmasıdır.

İspat: Önerme 3.1.27. ve Önerme 3.1.28. gereğince ispat açıktır.

4.ESNEK KOMŞULUKLAR ÜZERİNE

Bu bölümde, 2012 yılında Zorlutuna ve arkadaşları ile 2013 yılında Nazmul ve Samantha tarafından farklı esnek nokta tanımlarına göre verilen esnek komşuluk özellikleri incelenmiştir.

4.1. Zorlutuna ve Arkadaşlarına Göre Esnek Komşuluklar

Tanım 4.1.1. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X, τ, E) esnek topolojik uzay, (F, E) ve (G, E) X üzerinde esnek küme olsun. Eğer $(G, E) \,\tilde{\subset}\, (H, E) \,\tilde{\subset}\, (F, E)$ olacak biçimde (H, E) τ −esnek açık kümesi varsa (F, E) ye (G, E) nin bir esnek komşuluğu denir. Yani:

$(F, E), (G, E)$ nin esnek komşuluğudur	$:\Leftrightarrow$	$(\exists (H, E) \in \tau) : (G, E) \,\tilde{\subset}\, (H, E) \,\tilde{\subset}\, (F, E)$

Tanım 4.1.2. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X, τ, E) esnek topolojik uzay ve (G, E) X üzerinde esnek küme olsun. Eğer $e_F \,\tilde{\in}\, (H, E) \,\tilde{\subset}\, (G, E)$ olacak biçimde (H, E) τ −esnek açık kümesi varsa (G, E) ye $e_F \,\tilde{\in}\, \tilde{X}$ esnek noktasının bir esnek komşuluğu denir. Yani:

$$(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F) \quad :\Leftrightarrow \quad (\exists (H, E) \in \tau) : e_F \,\tilde{\in}\, (H, E) \,\tilde{\subset}\, (G, E)$$

Burada $\mathcal{N}_\tau(e_F)$ e_F esnek noktasının tüm komşuluklarının ailesidir ve bu aileye e_F esnek noktasının komşuluklar sistemi denir.

Örnek 4.1.3. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1, \{h_3\}), (e_2, \{h_2\})\}, \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \{h_3\})\}, \{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_2, \{h_2, h_3\})\}\}$ olsun. $(H, E) = \{\{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_2, \{h_2, h_3\})\}\}$ olmak üzere, $e_{2_H} = \{(e_2, \{h_2, h_3\})\}$ biçimindeki $e_{2_H} \,\tilde{\in}\, \tilde{X}$ esnek noktası alındığında e_{2_H} esnek noktasının tüm esnek komşulukları $\mathcal{N}_\tau(e_{2_H}) = \{\{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_2, X)\}, \{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_2, \{h_2, h_3\})\}, \{(e_1, X), (e_2, \{h_2, h_3\})\}, \tilde{X}\}$ dır.

Önerme 4.1.4. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X, τ, E) esnek topolojik uzay ve $e_F \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bu durumda, $\{\mathcal{N}_\tau(e_F): e_F \tilde{\in} \tilde{X}\}$ ailesi için aşağıdakiler vardır:

i) Her $(F, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ için $e_F \tilde{\in} (F, E)$ dir,

ii) $(F, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ ve $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ ise $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ tir,

iii) $(G, E), (H, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ ise $(G, E) \tilde{\cap} (H, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ tir,

iv) $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ ise her $e'_H \tilde{\in} (M, E)$ için $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e'_H)$ olacak biçimde bir $(M, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ vardır.

İspat:

i) Açıktır.

ii) Açıktır.

iii) $(G, E), (H, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ olsun. Bu durumda, $e_F \tilde{\in} (M, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ ve $e_F \tilde{\in} (U, E) \tilde{\subseteq} (H, E)$ olacak biçimde $(M, E), (U, E)$ snek açık kümeleri vardır. τ, X üzerinde esnek topoloji olduğundan $(M, E) \tilde{\cap} (U, E)$ τ −esnek açık kümedir. Ayrıca, $e_F \tilde{\in} (M, E) \tilde{\cap} (U, E) \tilde{\subseteq} (G, E) \tilde{\cap} (H, E)$ dir. Yani, $(G, E) \tilde{\cap} (H, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ elde edilir.

iv) $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ olsun. Bu durumda, $e_F \tilde{\in} (H, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olacak biçimde bir (H, E) τ −açık kümesi vardır. $(H, E) = (M, E)$ alalım. Dolayısıyla, her $e'_H \tilde{\in} (M, E)$ için $e'_H \tilde{\in} (M, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ dir. O halde, $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e'_H)$ elde edilir.

4.2. Nazmul ve Samantha' ya Göre Esnek Komşuluklar

Tanım 4.2.1. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzay, (F, E) X üzerinde esnek küme olsun. Eğer $(G, E) \tilde{\subseteq} (H, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$ olacak biçimde bir (H, E) τ −esnek açık kümesi varsa (F, E) ye (G, E) nin bir esnek komşuluğu denir. $(G, E) = W_e^x$ ise (F, E) ye W_e^x in esnek komşuluğu denir. W_e^x in tüm esnek komşuluklarının ailesi kısaca $\mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ ile gösterilmektedir. Yani:

$$(F, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x) \quad :\Longleftrightarrow \quad (\exists (H, E) \in \tau): W_e^x \tilde{\in} (H, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$$

Örnek 4.2.2. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\emptyset)\}\}$ olsun. O halde, $W_{e_2}^{h_2} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek noktası alındığında $W_{e_2}^{h_2}$ esnek noktasının tüm esnek komşulukları $\mathcal{N}_\tau(W_{e_2}^{h_2}) = \{\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_2,h_3\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,X)\}, \{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\{h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}), (e_2,X)\}, \{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\{h_2,h_3\})\}, \{(e_1,X),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2,h_3\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,X),(e_2,\{h_2\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,X)\}, \{(e_1,X),(e_2,\{h_2,h_3\})\}, \tilde{X}\}$ dır.

Önerme 4.2.3.(Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzay, (F, E) X üzerinde esnek küme olsun. (F, E) nin $\tau -$esnek açık küme olması için gerek ve yeter koşul her $W_e^x \tilde{\in} (F, E)$ için (F, E) nin W_e^x in esnek komşuluğu olmasıdır

İspat: (F, E) $\tau -$esnek açık küme ve $W_e^x \tilde{\in} (F, E)$ olsun. Bu durumda, $W_e^x \tilde{\in} (F, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$ olduğundan (F, E) W_e^x in esnek komşuluğudur. Diğer yandan, $W_e^x \tilde{\in} (F, E)$ ve (F, E) W_e^x in esnek komşuluğu olsun. O zaman, $W_e^x \tilde{\in} (G, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$ olacak biçimde bir (G, E) $\tau -$esnek açık kümesi vardır. Ayrıca, $(F, E) = \bigcup \{e_F : e_F \tilde{\in} (F, E)\}$ olduğundan (F, E) $\tau -$esnek açık kümelerin bir birleşimidir. O halde, (F, E) $\tau -$esnek açık kümedir.

Önerme 4.2.4. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzay ve $W_e^x \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bu durumda, $\{\mathcal{N}_\tau(W_e^x) : W_e^x \tilde{\in} \tilde{X}\}$ ailesi için aşağıdakiler vardır:

i) Her $W_e^x \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\mathcal{N}_\tau(W_e^x) \neq \widetilde{\emptyset}$,

ii) Her $(F, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ için $W_e^x \tilde{\in} (F, E)$,

iii) $(F, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ ve $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ ise $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ dir,

iv) $(F, E), (G, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ ise$(F, E) \tilde{\cap} (G, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ dir,

v) $(F, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ ise her $W_{e'}^y \tilde{\in} (G, E)$ için $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_{e'}^y)$ ve $(G, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$ olacak biçimde bir $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ vardır.

İspat: Önerme 4.1.4. e benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.2.5. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzay olsun. $P\big(S(X)\big)$ X üzerindeki esnek kümeler ailesinin bütün alt kümelerinin ailesi olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $\nu: \varepsilon \longrightarrow P\big(S(X)\big)$ dönüşümüne ε üzerinde bir esnek komşuluk operatörü denir.

i) Her $W_e^x \in \varepsilon$ için $\nu(W_e^x) \neq \widetilde{\emptyset}$ dır,

ii) Her $(F, E) \in \nu(W_e^x)$ için $W_e^x \widetilde{\in} (F, E)$ dir,

iii) $(F, E) \in \nu(W_e^x)$ ve $(F, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ ise $(G, E) \in \nu(W_e^x)$ dir,

iv) $(F, E), (G, E) \in \nu(W_e^x)$ ise $(F, E) \widetilde{\cap} (G, E) \in \nu(W_e^x)$ dir,

v) $(F, E) \in \nu(W_e^x)$ ise her $W_{e'}^y \widetilde{\in} (G, E)$ için $(G, E) \in \nu\big(W_{e'}^y\big)$ ve $(G, E) \widetilde{\subset} (F, E)$ olacak biçimde bir $(G, E) \in \nu(W_e^x)$ vardır.

İspat: v) $(F, E) \in \nu(W_e^x)$ olsun. Bu durumda, $(F, E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ dir. Ayrıca, Önerme 4.2.4. (v) ve $\nu: \varepsilon \longrightarrow P\big(S(X)\big)$ tanımı gereğince her $W_{e'}^y \widetilde{\in} (G, E)$ için $(G, E) \in \nu\big(W_{e'}^y\big)$ ve $(G, E) \widetilde{\subset} (F, E)$ olacak biçimde bir $(G, E) \in \nu(W_e^x)$ vardır.

Önerme 4.2.6. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzay olsun. $\nu: \varepsilon \longrightarrow P\big(S(X)\big)$ dönüşümü, her $W_e^x \widetilde{\in} \varepsilon$ için $\nu(W_e^x) = \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ ile tanımlı bir esnek komşuluk operatörüdür.

Önerme 4.2.7. (Nazmul and Samantha, 2013) $\nu: \varepsilon \longrightarrow P\big(S(X)\big)$ dönüşümü ε üzerinde esnek komşuluk operatörü ve her $W_e^x \widetilde{\in} \varepsilon$ için $\nu(W_e^x)$ W_e^x in tüm $\tau -$ esnek komşuluklarının ailesi olmak üzere, X üzerinde bir esnek topoloji vardır.

İspat: $\tau = \{(F, E) \in S(X): (F, E) \in \nu(W_e^x),\ \forall W_e^x \widetilde{\in} (F, E)\}$ olsun. Bu durumda,

i) $\widetilde{\emptyset}$ hiçbir esnek elemanı içermediğinden her $W_e^x \widetilde{\in} \widetilde{\emptyset}$ için $\widetilde{\emptyset} \in \nu(W_e^x)$ dir. Yani, $\widetilde{\emptyset} \in \tau$ dur. $W_e^x \in \tilde{X}$ olsun. Bu durumda, ν komşuluk operatörü olduğundan $\nu(W_e^x) \neq \widetilde{\emptyset}$ dır. $(F, E) \in \nu(W_e^x)$ olsun. $(F, E) \widetilde{\subset} \tilde{X}$ olduğundan $\tilde{X} \in \nu(W_e^x)$ elde edilir. O halde, $\tilde{X} \in \tau$ dur.

ii) $(F,E),(G,E) \in \tau$ ve $W_e^x \tilde{\in} (F,E)\tilde{\cap}(G,E)$ olsun. Bu durumda, $(F,E),(G,E) \in \nu(W_e^x)$ dir. Dolayısıyla, ν komşuluk operatörü olduğundan $(F,E)\tilde{\cap}(G,E) \in \nu(W_e^x)$ elde edilir. Yani, $(F,E)\tilde{\cap}(G,E) \in \tau$ dur.

iii) Her bir $k \in J$ için $(F_k,E) \in \tau$ olsun. $\tilde{\bigcup}_{k\in J}(F_k,E) = (F,E)$ alalım. $W_e^x \tilde{\in} (F,E)$ alındığında $W_e^x \tilde{\in} \left(F_{k_0},E\right)$ olacak biçimde bir $k_0 \in J$ vardır. Ayrıca, $\left(F_{k_0},E\right) \in \tau$ olduğundan $\left(F_{k_0},E\right) \in \nu(W_e^x)$ dir. Dolayısıyla, $W_e^x \tilde{\in} \left(F_{k_0},E\right) \tilde{\subset} (F,E)$ elde edilir ve her $W_e^x \tilde{\in} (F,E)$ için $(F,E) \in \nu(W_e^x)$ dir.

O halde, τ ailesi X üzerinde esnek topolojidir. $(F,E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ olsun. Bu durumda, $W_e^x \tilde{\in} (G,E) \tilde{\subset} (F,E)$ olacak biçimde (G,E) $\tau-$ esnek açık kümesi vardır. Dolayısıyla, $(G,E) \in \nu(W_e^x)$ dir. Ayrıca, $(G,E) \tilde{\subset} (F,E)$ olduğundan $(F,E) \in \nu(W_e^x)$ elde edilir. Diğer yandan, $(F,E) \in \nu(W_e^x)$ olsun. O zaman, ν bir esnek komşuluk operatörü olduğundan her $W_{e'}^y \tilde{\in} (G,E)$ için $(G,E) \tilde{\subset} (F,E)$ ve $(G,E) \in \nu\left(W_{e'}^y\right)$ olacak biçimde bir $(G,E) \in \nu(W_e^x)$ vardır. Yani, (G,E) $\tau-$esnek açık kümedir. $(G,E) \in \nu(W_e^x)$ alalım. Bu durumda, $W_e^x \tilde{\in} (G,E)$ dir ve buradan $W_e^x \tilde{\in} (F,E)$ elde edilir. Dolayısıyla, $(F,E) \in \mathcal{N}_\tau(W_e^x)$ dir. O halde, $\nu(W_e^x)$ W_e^x in tüm $\tau-$ esnek komşuluklarının ailesidir.

Tanım 4.2.8. (Nazmul and Samantha, 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ ailesine ait her esnek küme β ya ait esnek kümelerin bir birleşimi şeklinde yazılabilirse β ya τ için açık tabandır denir.

Örnek 4.2.9. X boştan farklı küme, E parametre kümesi ve τ, X üzerinde esnek ayrık topoloji olsun. $\beta = \{W_e^x : W_e^x \tilde{\in} \tilde{X}\}$ ailesi τ için açık tabandır.

Önerme 4.2.10. (Nazmul and Samantha, 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve β, τ nun esnek açık kümelerden oluşan alt ailesi olsun. β nın τ için açık taban olması için gerek ve yeter koşul her (F,E) $\tau-$ esnek açık kümesi ve her $W_e^x \tilde{\in} (F,E)$ için $W_e^x \tilde{\in} (G,E) \tilde{\subset} (F,E)$ olacak biçimde $(G,E) \in \beta$ bulunmasıdır.

İspat: β τ için açık taban, (F,E) $\tau-$ esnek açık küme ve $W_e^x \tilde{\in} (F,E)$ olsun. β τ için açık taban olduğundan (F,E) β daki elemanların bir birleşimi olarak yazılabilir. $W_e^x \tilde{\in} (F,E)$ olduğundan $W_e^x \tilde{\in} (B,E) \tilde{\subset} (F,E)$ olacak biçimde $(B,E) \in \beta$ vardır. Diğer yandan, (F,E) $\tau-$ esnek açık küme ve $W_e^x \tilde{\in} (F,E)$ olsun. Hipotezden, $W_e^x \tilde{\in} (B,E) \tilde{\subset} (F,E)$ olacak biçimde $(B,E) \in \beta$ vardır. Dolayısıyla, $(F,E) = \tilde{\bigcup}_{W_e^x \tilde{\in}(F,E)} W_e^x \tilde{\subset} \tilde{\bigcup}_{W_e^x \tilde{\in}(F,E)} (B,E) \tilde{\subset} (F,E)$ elde edilir. Yani, $(F,E) = \tilde{\bigcup}_{W_e^x \tilde{\in}(F,E)} (B,E)$ dir. O halde, β τ için açık tabandır.

Önerme 4.2.11. (Nazmul and Samantha, 2013) β, X üzerindeki esnek kümelerin bir alt ailesi olsun. β nın X üzerinde verilen bir esnek topolojinin açık tabanı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

i) $\tilde{\emptyset} \in \beta$,

ii) $\tilde{X}$, β daki esnek kümelerin bir birleşimi olarak yazılabilir,

iii) $(F_1,E),(F_2,E) \in \beta$ ise $W_e^x \tilde{\in} (F_3,E) \tilde{\subset} (F_1,E) \tilde{\cap} (F_2,E)$ olacak biçimde bir $(F_3,E) \in \beta$ vardır.

İspat: **(⟹):** β, τ esnek topolojisi için açık taban olsun. Bu durumda, $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$ olduğundan (i) ve (ii) durumu vardır. $(F_1,E),(F_2,E) \in \beta$. olsun. Bu durumda, (F_1,E) ve (F_2,E) $\tau-$ esnek açık kümelerdir. Buradan, τ X üzerinde esnek topoloji olduğundan $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)$ $\tau-$esnek açık küme elde edilir. Ayrıca, β τ için açık taban olduğundan $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)$ de β ya ait esnek kümelerin bir birleşimi şeklinde gösterilebilir. O halde, (iii) durumu da sağlanır.

(⟸): $\tau = \{(F,E): (F,E) = \tilde{\bigcup}_{k\in J}(B_k,E), \exists k \in J, (B_k,E) \in \beta\}$ olsun. (i) ve (ii) durumlarından $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$ dur. Her $k \in J$ için (F_k,E) $\tau-$esnek açık küme ve $(F,E) = \tilde{\bigcup}_{k\in J}(F_k,E)$ olsun. Bu durumda, her $k \in J$ için (F_k,E) esnek kümeleri β_k deki esnek kümelerin bir birleşimi olacak şekilde $\beta_k \subset \beta$ alt ailesi vardır. Dolayısıyla, $\beta = \bigcup_{k\in J}\beta_k$ elde edilir. O halde, (F,E) $\tau-$ esnek açık kümedir. $(F_1,E),(F_2,E)$ $\tau-$esnek açık küme ve $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E) \neq \tilde{\emptyset}$ olsun. Bu durumda, τ ailesinin $W_e^x \tilde{\in} (F_1,E) = \tilde{\bigcup}_{(G,E)\in\beta_1}(G,E)$ ve $W_e^x \tilde{\in} (F_2,E) = \tilde{\bigcup}_{(H,E)\in\beta_2}(H,E)$ olacak biçimde $\beta_1,\beta_2 \subset \beta$ alt aileleri vardır. Dolayısıyla, $W_e^x \tilde{\in} (F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)$

$= \left(\tilde{\bigcup}_{(G,E)\in\beta_1}(G,E)\right) \ \tilde{\cap} \ \left(\tilde{\bigcup}_{(H,E)\in\beta_2}(H,E)\right) = \tilde{\bigcup}_{(G,E)\in\beta_1}\tilde{\bigcup}_{(H,E)\in\beta_2} \ \big((G,E) \ \tilde{\cap} \ (H,E)\big)$ elde edilir. Ayrıca, $(G,E) \in \beta_1$ ve $(H,E) \in \beta_2$ olduğundan (G,E), $(H,E) \in \beta$ dır ve hipotezden $W_e^x \tilde{\in} (P,E) \tilde{\subset} (G,E)\tilde{\cap}(H,E)$ olacak biçimde $(P,E) \in \beta$ vardır. Buradan, $(G,E)\tilde{\cap}(H,E)$ β ya ait esnek kümelerin bir birleşimi şeklinde gösterilir. Yani, $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)$ β ya ait esnek kümelerin bir birleşimi şeklindedir. O halde, $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)$ $\tau -$esnek açık kümedir. Sonuç olarak, τ X üzerinde esnek topolojidir.

5. ESNEK SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE

Bu bölümde, 2012 yılında Zorlutuna ve arkadaşları ile 2013 yılında Nazmul ve Samantha tarafından farklı esnek nokta tanımlarına göre verilen esnek süreklilik kavramları incelenmiştir.

5.1. Zorlutuna ve Diğerlerine Göre Esnek Süreklilik

Tanım 5.1.1. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,K) esnek topolojik uzay, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm ve $e_F \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. $f_{pu}(e_F)$ in her (G,K) esnek komşuluğu için e_F in olacak biçimde bir (F,E) esnek komşuluğu varsa f_{pu} dönüşümü e_F te esnek süreklidir denir.

f_{pu} e_F te esnek süreklidir $:\Leftrightarrow$ $\left(\forall (G,K) \in \mathcal{N}_{\tau_Y}\left(f_{pu}(e_F)\right)\right)\left(\exists (F,E)\right) \in \mathcal{N}_{\tau_X}\left((e_F)\right): f_{pu}\left((F,E)\right) \tilde{\subseteq} (G,E)$

Eğer f_{pu} dönüşümü her $e_F \tilde{\in} \tilde{X}$ için esnek sürekliyse f_{pu} X üzerinde esnek süreklidir denir.

Örnek 5.1.2. $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $Y=\{m_1,m_2,m_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2,e_3\}$, $K=\{k_1,k_2,k_3\}$ sırasıyla X ve Y üzerindeki parametre kümeleri olmak üzere, $p(e_1)=k_1$, $p(e_2)=k_2$, $p(e_3)=k_3$ ile tanımlı $p: E \longrightarrow K$ ve $u(h_1)=m_2, u(h_2)=m_3, u(h_3)=m_1$ ile tanımlı $u: X \longrightarrow Y$ dönüşümleri verilsin. X ve Y üzerindeki esnek topolojiler sırasıyla, $\tau_X = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X}\} \cup \big\{\{(e_1,\{h_1,h_2\}), (e_2,\{h_2,h_3\}), (e_3,\{h_1,h_3\})\}, \{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\}), (e_3,\{h_1,h_3\})\}, \{(e_1,X), (e_2,X), (e_3,\{h_1,h_3\})\}, \{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_2\}),(e_3,\{h_1,h_3\})\}\big\}$ ve $\tau_Y = \{\tilde{\emptyset},\tilde{Y}\} \cup \big\{\{(k_1,\{m_2,m_3\}), (k_2,Y), (k_3,\{m_1,m_2\})\}, \{(k_1,\{m_1,m_3\}),(k_2,\{m_2,m_3\}), (k_3, Y)\}, \{(k_1,\{m_3\}), (k_2,\{m_2,m_3\}), (k_3,\{m_1,m_2\})\}, \{(k_1,Y),(k_2,Y),(k_3,\{m_1, m_2\})\}, \{(k_1,\{m_1,m_3\}), (k_2,\{m_1,m_3\}), (k_3,\{m_1,m_2\})\}, \{(k_1,\{m_1,m_3\}),(k_2,Y), (k_3,Y)\}, \{(k_1,\{m_1,m_3\}), (k_2,\{m_3\}),(k_3,\{m_1,m_2\})\}, \{(k_1,\{m_1,m_3\}), (k_2,\{m_2, m_3\}), (k_3,\{m_1,m_2\})\}, \{(k_1,\{m_3\}), (k_2,\{m_1,m_3\}),(k_3,\{m_1,m_2\})\}, \{(k_1,\{m_3\}), (k_2,\{m_3\}), (k_3,\{m_1,m_2\})\}, \{(k_1,\{m_1,m_3\}),(k_2,Y),(k_3,\{m_1,m_2\})\}, \{(k_1,\{m_3\}), (k_2,Y), (k_3,\{m_1, m_2\})\}\big\}$ olsun. Bu durumda, $e_{1_H} = \{(e_1,\{h_1,h_2\})\}$ esnek noktası alındığında $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşümü e_{1_H} de esnek süreklidir. Çünkü, $f_{pu}(e_{1_H}) = \{(k_1, \{m_2, m_3\})\}$ ün tüm esnek komşulukları $\mathcal{N}_{\tau_2}\left(f_{pu}(e_{1_H})\right)$ = $\{\{(k_1, Y), (k_2, Y), (k_3, \{m_1, m_2\})\}$, $\{(k_1, Y), (k_2, Y), (k_3, \{m_1, m_2\})\}$, $\{(k_1, \{m_2, m_3\}), (k_2, Y), (k_3, \{m_1, m_2\})\}$, $\{(k_1, \{m_2, m_3\}), (k_2, Y), (k_3, Y)\}, \tilde{Y}\}$ ve $e_{1_H} = \{(e_1, \{h_1, h_2\})\}$ nin tüm esnek komşulukları $\mathcal{N}_{\tau_1}(e_{1_H})$ = $\{\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_1, h_3\})\}$, $\{(e_1, X), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, X)\}$, $\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, X), (e_3, X)\}$, $\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, X)\}$, $\{(e_1, X), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_1, h_3\})\}$, $\{(e_1, X), (e_2, X), (e_3, \{h_1, h_3\})\}$, $\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, X), (e_3, \{h_1, h_3\})\}$, $\{(e_1, X), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_1, h_3\})\}$, $\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, X), (e_3, \{h_1, h_3\})\}$, $\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, X)\}, \tilde{X}\}$ biçimindedir. Dolayısıyla, f_{pu} (e_{1_H}) nin her (G, K) esnek komşuluğu için $f_{pu}((F, E)) \tilde{\subseteq} (G, K)$ olacak biçimde bir (F, E) esnek komşuluğu vardır.

Teorem 5.1.4. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

i) f_{pu} e_F te esnek süreklidir,

ii) $f_{pu}(e_F)$ in her (G, K) esnek komşuluğu için e_F in (H, E) $\tilde{\subseteq}$ ${f_{pu}}^{-1}((G, K))$ olacak biçimde bir (H, E) esnek komşuluğu vardır.

iii) $f_{pu}(e_F)$ in her (G, K) esnek komşuluğu için ${f_{pu}}^{-1}((G, K))$ e_F in esnek komşuluğudur.

Teorem 5.1.5. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

i) f_{pu} esnek süreklidir,

ii) Her (G, K) $\tau_Y -$ esnek açık kümesi için ${f_{pu}}^{-1}((G, K))$ $\tau_X -$ esnek açık kümedir,

iii) Her (L,K) τ_Y- esnek kapalı kümesi için ${f_{pu}}^{-1}\big((L,K)\big)$ τ_X- esnek kapalı kümedir.

İspat: i)⟹ii) (G,K) τ_Y $-$esnek açık küme ve $e_F \,\tilde{\in}\, {f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)$ olsun. Bu durumda, $f_{pu}(e_F) \,\tilde{\in}\, f_{pu}{f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)$ dir ve (G,K) $f_{pu}(e_F)$ in esnek komşuluğu olur. Ayrıca, f_{pu} esnek sürekli olduğundan e_F in $f_{pu}\big((H,E)\big) \,\tilde{\subset}\, (G,K)$ olacak biçimde bir (H,E) esnek komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $e_F \,\tilde{\in}\, (H,E) \,\tilde{\subset}\, {f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)$ elde edilir. O halde, ${f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)$ e_F in esnek komşuluğudur.

ii) ⟹iii) (L,K) τ_Y- esnek kapalı küme olsun. Bu durumda, $(L,K)^c$ τ_Y- esnek açık kümedir. Dolayısıyla, hipotez gereğince, ${f_{pu}}^{-1}((L,K)^c)$ τ_X- esnek açık küme elde edilir. O halde, ${f_{pu}}^{-1}((L,K)^c) = \Big({f_{pu}}^{-1}\big((L,K)\big)\Big)^c$ olduğundan ${f_{pu}}^{-1}\big((L,K)\big)$ τ_X- esnek kapalı kümedir.

ii) ⟹ i) $e_F \,\tilde{\in}\, \tilde{X}$ ve (G,K) $f_{pu}(e_F)$ in esnek komşuluğu olsun. Bu durumda, $f_{pu}(e_F) \,\tilde{\in}\, (H,K) \,\tilde{\subset}\, (G,K)$ olacak biçimde bir (H,K) τ_Y- esnek açık kümesi vardır. Dolayısıyla, hipotez gereğince, ${f_{pu}}^{-1}\big((H,K)\big)$ τ_Y- esnek açık kümedir ve $e_F \,\tilde{\in}\, {f_{pu}}^{-1}\big((H,K)\big) \,\tilde{\subset}\, {f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)$ elde edilir. Yani, ${f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)$ e_F in esnek komşuluğudur. O halde, f_{pu} esnek süreklidir.

iii)⟹ii) ii) ⟹iii) önermesine benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.1.6. (Zorlutuna et. al. , 2012) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,K) esnek topolojik uzay, $f_{pu}: S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

i) f_{pu} esnek süreklidir,

ii) X üzerindeki her (F,E) esnek kümesi için $f_{pu}\big((F,E)\big)$ nin her esnek komşuluğunun ters görüntüsü (F,E) nin esnek komşuluğudur,

iii) X üzerindeki her (F, E) esnek kümesi ve $f_{pu}\big((F, E)\big)$ nin her (G, K) esnek komşuluğu için (F, E) nin $f_{pu}\big((H, E)\big) \tilde{\subseteq} (G, K)$ olacak biçimde bir (H, E) esnek komşuluğu vardır.

İspat: i)⟹ii) f_{pu} esnek sürekli dönüşüm olsun. (H, K), $f_{pu}\big((F, E)\big)$ nin esnek komşuluğu olsun. Bu durumda, $f_{pu}\big((F, E)\big)$ nin $f_{pu}\big((F, E)\big) \tilde{\subseteq} (M, K) \tilde{\subseteq} (H, K)$ olacak biçimde (M, K) $\tau_Y -$ esnek açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, ${f_{pu}}^{-1}\left(f_{pu}\big((F, E)\big)\right) \tilde{\subseteq} {f_{pu}}^{-1}\big((M, K)\big) \tilde{\subseteq} {f_{pu}}^{-1}\big((H, K)\big)$ elde edilir. Ayrıca, $(F, E) \tilde{\subseteq} {f_{pu}}^{-1}\left(f_{pu}\big((F, E)\big)\right)$ ve ${f_{pu}}^{-1}\big((M, K)\big)$ τ_X −esnek açık kümedir. O halde, ${f_{pu}}^{-1}\big((H, K)\big)$ (F, E) nin esnek komşuluğudur.

ii)⟹i) (G, K) τ_Y −esnek açık küme olsun. Bu durumda, ${f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ X üzerinde esnek kümedir. (F, E), ${f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ nin esnek alt kümesi olsun. Dolayısıyla, (G, K) $f_{pu}\big((F, E)\big)$ nin τ_Y −esnek açık komşuluğu olur ve hipotez gereğince, ${f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ (F, E) nin esnek komşuluğudur. O halde, Teorem 5.1.5. gereğince ${f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ τ_X −esnek açık kümedir.

ii)⟹iii) (F, E), X üzerinde esnek küme ve (G, K), $f_{pu}\big((F, E)\big)$ nin esnek komşuluğu olsun. Hipotez gereğince, ${f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ (F, E) nin esnek komşuluğudur. Dolayısıyla, $(F, E) \tilde{\subseteq} (H, E) \tilde{\subseteq} {f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ olacak biçimde (H, E) esnek komşuluğu vardır. O halde, (F, E) nin $f_{pu}\big((F, E)\big) \tilde{\subseteq} f_{pu}\big((H, E)\big) \tilde{\subseteq} f_{pu}\left({f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)\right)$ olacak biçimde bir (G, E) esnek komşuluğu vardır.

iii)⟹ii) (G, K), $f_{pu}\big((F, E)\big)$ nin esnek komşuluğu olsun. Bu durumda, (F, E) nin $f_{pu}\big((H, E)\big) \tilde{\subseteq} (G, K)$ olacak biçimde (H, E) esnek komşuluğu vardır. Dolayısıyla, ${f_{pu}}^{-1}\left(f_{pu}\big((H, E)\big)\right) \tilde{\subseteq} {f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ dir ve $(H, E) \tilde{\subseteq} {f_{pu}}^{-1}\left(f_{pu}\big((H, E)\big)\right)$ elde edilir. O halde, ${f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ (F, E) nin esnek komşuluğudur.

5. 2. Nazmul ve Samantha' ya Göre Esnek Süreklilik

Tanım 5.2.1. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, E) esnek topolojik uzay, $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ dönüşüm ve $W_e^x \tilde{\in} S(X)$ olsun. $u(W_e^x)$ in her (G, E) esnek komşuluğu için W_e^x in $u\big((F, E)\big) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olacak biçimde bir (F, E) esnek komşuluğu varsa u dönüşümü W_e^xde esnek süreklidir denir. Yani:

u W_e^x de esnek süreklidir $:\Leftrightarrow$ $\big(\forall (G, E) \in \mathcal{N}_{\tau_Y}(u(W_e^x))\big)\big(\exists (F, E) \in \mathcal{N}_{\tau_X}(W_e^x)\big): u\big((F, E)\big) \tilde{\subseteq} (G, E)$

Eğer her $W_e^x \tilde{\in} \tilde{X}$ için u esnek sürekliyse u dönüşümü X üzerinde esnek süreklidir denir.

Örnek 5.2.2. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $Y = \{m_1, m_2, m_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, X ve Y üzerindeki parametre kümesi olmak üzere, $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ dönüşümü $u(h_1) = m_3$, $u(h_2) = m_1$, $u(h_3) = m_2$ biçiminde tanımlansın. X ve Y üzerindeki esnek topolojiler sırasıyla, τ_X = $\{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}\}$ ∪ $\{\{(e_1, \{h_1, h_2\}),(e_2, \{h_3\}), ,(e_3, \{h_1\})\}, \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, \{h_1, h_3\}), (e_3, \{h_2, h_3\})\}, \{(e_1, X), (e_2, \{h_1, h_3\}), (e_3, X)\}, \{(e_1, \{h_2\}), (e_2, \{h_3\}), (e_3, \emptyset)\}\}$ ve τ_Y = $\{\tilde{\emptyset}, \tilde{Y}\}$ ∪ $\{\{(e_1, \{m_1, m_3\}), (e_2, ,\{m_2, m_3\}), (e_3, \{m_3\})\}, \{(e_1, \{m_1, m_2\}),(e_2, \{m_2, m_3\}), (e_3, \{m_1, m_2\})\}, \{(e_1, \{m_1\}), (e_2, \{m_2, m_3\}), (e_3, \emptyset)\}, \{(e_1, Y),(e_2, \{m_2, m_3\}), (e_3, Y)\}\}$ olsun. Bu durumda, $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ dönüşümü $W_{e_3}^{h_2}$ de esnek süreklidir. Çünkü, $u\big(W_{e_3}^{h_2}\big)$ nin tüm esnek komşulukları $\mathcal{N}_{\tau_2}\Big(u\big(W_{e_3}^{h_2}\big)\Big)$ = $\{\{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, \{m_2, m_3\}), (e_3, \{m_1, m_2\})\}, \{(e_1, Y), \{(e_2, \{m_2, m_3\}), (e_3, Y)\}, \{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, Y), (e_3, \{m_1, m_2\})\}, \{(e_1, Y),(e_2, \{m_2, m_3\}), (e_3, \{m_1, m_2\})\}, \{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, Y), (e_3, Y)\}, \{(e_1, Y), (e_2, Y), (e_3, \{m_1, m_2\})\}, \tilde{Y}\}$ ve $W_{e_3}^{h_2}$ nin tüm esnek komşulukları $\mathcal{N}_{\tau_1}\big(W_{e_3}^{h_2}\big)$ = $\{\{(e_1, \{h_2, h_3\}),(e_2, \{h_1, h_3\}), (e_3, \{h_2, h_3\})\}, \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_3, Y)\}, \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, Y), (e_3, \{h_2, h_3\})\}, \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, Y), (e_3, Y)\}, \{(e_1, Y),(e_2, \{h_1, h_3\}), (e_3, \{h_2, h_3\})\}, \{(e_1, Y),(e_2, \{h_1, h_3\}), (e_3, Y)\}, \{(e_1 ,Y), (e_2, Y), (e_3, \{h_2, h_3\})\}, \tilde{Y}\}$ dır. Dolayısıyla, $u\big(W_{e_3}^{h_2}\big)$ nin tüm (G, E) esnek komşulukları için $u\big((F, E)\big) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olacak biçimde bir (F, E) esnek komşuluğu vardır.

Not 5.2.3. (Nazmul and Samantha, 2013) $u:(X,\tau_X,E)\longrightarrow(Y,\tau_Y,E)$ dönüşüm ve $W_e^x \tilde{\in} S(X)$ olsun. $u(W_e^x)$ i içeren her (G,E) $\tau_Y -$ esnek açık kümesi için W_e^x i içeren ve $u\big((F,E)\big) \tilde{\subset} (G,E)$ olacak biçimde bir (F,E) $\tau_X -$ esnek açık kümesi varsa u W_e^x de esnek süreklidir. u dönüşümü her $W_e^x \tilde{\in} S(X)$ de esnek sürekliyse u dönüşümü esnek süreklidir denir.

Teorem 5.2.4. (Nazmul and Samantha, 2013) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,E) esnek topolojik uzay ve $u:(X,\tau_X,E)\longrightarrow(Y,\tau_Y,E)$dönüşüm olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

i) u esnek süreklidir,

ii) Y üzerindeki her (G,E) $\tau_Y -$ esnek açık kümesi için $u^{-1}\big((G,E)\big)$ $\tau_X -$ esnek açık kümedir,

iii) Y üzerindeki her (L,E) $\tau_Y -$ esnek kapalı kümesi için $u^{-1}\big((L,E)\big)$ $\tau_X -$ esnek kapalı kümedir,

iv) X üzerindeki her (F,E) esnek kümesi için $u\Big(Cl\big((F,E)\big)\Big) \tilde{\subset} Cl\Big(u\big((F,E)\big)\Big)$ dir.

İspat: i)⟹ii) u esnek sürekli olsun.(G,E) $\tau_Y -$esnek açık küme ve $W_e^x \tilde{\in} u^{-1}\big((G,E)\big)$ olsun. Bu durumda, $u(W_e^x) \tilde{\in} (G,E)$ dir. (G,E) $\tau_Y -$esnek açık küme olduğundan (G,E) $u(W_e^x)$ in esnek komşuluğudur. u esnek sürekli dönüşüm olduğundan W_e^x in $u\big((F,E)\big) \tilde{\subset} (G,E)$ olacak biçimde (F,E) $\tau_X -$esnek komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $W_e^x \tilde{\in} (F,E) \tilde{\subset} u^{-1}\big((G,E)\big)$ elde edilir. Ayrıca, (F,E) W_e^x esnek komşuluğu olduğundan $u^{-1}\big((G,E)\big)$ W_e^x esnek komşuluğudur. O halde, $u^{-1}\big((G,E)\big)$ $\tau_X -$ esnek açık kümedir.

ii)⟹iii) (L,E) $\tau_Y -$esnek kapalı küme olsun. Bu durumda, $(L,E)^c$ $\tau_Y -$ esnek açık kümedir. Dolayısıyla, hipotezden $u^{-1}((L,E)^c)$ $\tau_X -$esnek açık küme elde edilir. O halde, $u^{-1}((L,E)^c)=u^{-1}\big((L,E)\big)^c$ olduğundan $u^{-1}\Big(\big(L,E\big)\Big)$ $\tau_X -$esnek kapalı kümedir.

iii) ⟹ iv) (F,E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, hipotezden $Cl(u\big((F,E)\big))$ $\tau_Y -$esnek kapalı kümesi için $u^{-1}\Big(Cl(u\big((F,E)\big))\Big)$ $\tau_X -$esnek kapalı kümedir. Dolayısıyla, $(F,E) \tilde{\subset} u^{-1}\Big(Cl\big(u\big((F,E)\big)\big)\Big)$ dir ve buradan $Cl\big((F,E)\big) \tilde{\subset} u^{-1}\Big(Cl\big(u\big((F,E)\big)\big)\Big)$ olur. O halde, Önerme 2.1.38. den $u(Cl\ \big((F,E)\big)\big) \tilde{\subset} u(u^{-1}(Cl(u\ \big((F,E)\big)\big)\Big)\Big) \tilde{\subset} Cl\Big(u\big((F,E)\big)\Big)$ elde edilir.

iv) $\Longrightarrow$ i) $W_e^x \tilde{\in} S(X)$ olmak üzere,(G,E) $u(W_e^x)$ in bir esnek komşuluğu olsun. Bu durumda, $u(W_e^x) \tilde{\in} (H,E) \tilde{\subset} (G,E)$ olacak biçimde bir (H,E) τ_Y −esnek açık kümesi vardır. Bu yüzden, (H^c,E) τ_Y −esnek kapalı kümedir ve hipotezden, $u(Cl(u^{-1}\big[(H^c,E)\big])\big) \tilde{\subset} Cl(u(u^{-1}\big[(H^c,E)\big])\big) \tilde{\subset} Cl([(H^c,E)]) = (H^c,E)$ elde edilir. Dolayısıyla, $u^{-1}[Cl(u^{-1}[(H^c,E)])] \tilde{\subset} u^{-1}\ [Cl(u(u^{-1}\ [(H^c,E)]))\big] \tilde{\subset} u^{-1}[Cl([(H^c,E)])] = u^{-1}[(H^c,E)]$ dir ve buradan $u^{-1}[(H^c,E)]$ τ_X −esnek kapalı küme olur. O halde, $(u^{-1}[(H,E)])^c$ τ_X −esnek kapalı kümedir. Yani, $u^{-1}[(H,E)]$ τ_X −esnek açık kümedir. Ayrıca, $u(W_e^x) \tilde{\in} (H,E) \tilde{\subset} (G,E)$ olduğundan $W_e^x \tilde{\in} u^{-1}[(H,E)] \tilde{\subset} u^{-1}[(G,E)]$ elde edilir. O halde, $u^{-1}[(H,E)]$ W_e^x in esnek komşuluğudur ve Önerme 2.1.38. den $u\big[u^{-1}\big((H,E)\big)\big] \tilde{\subset} (H,E) \tilde{\subset} (G,E)$ elde edilir. Sonuç olarak, u dönüşüm esnek süreklidir.

5.3. Esnek Açık ve Esnek Kapalı Dönüşümler

Bu bölümde, 2013 yılında Nazmul ve Samantha tarafından verilen esnek açık dönüşüm, esnek kapalı dönüşüm ve esnek homeomorfizm kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca, bu kavramların esnek süreklilikle ilişkisi örneklerle açıklanmıştır.

Bu bölüm ve sonrasında, boştan farklı X ve Y kümeleri üzerindeki τ_X −esnek kapalı kümeler ile τ_Y −esnek kapalı kümelerin oluşturduğu esnek topolojiler sırasıyla $\mathcal{K}_X$ ve $\mathcal{K}_Y$ ile gösterilecektir.

Tanım 5.3.1. (Nazmul and Samantha, 2013) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,E)esnek topolojik uzay ve u: $(X,\tau_X,E) \longrightarrow (Y,\tau_Y,E)$ dönüşüm olsun.

i) Her (U,E) τ_X −esnek açık kümesi için $u\big((U,E)\big)$ τ_Y −esnek açık küme ise u ya esnek açık dönüşüm denir. Yani:

u esnek açık dönüşümdür $\quad :\Leftrightarrow \quad (\forall(U,E)\in\tau_X): u\big((U,E)\big)\in\tau_Y$

ii) X üzerindeki her (L,E) τ_X −esnek kapalı kümesi için $u\big((L,E)\big)$ τ_Y −esnek kapalı küme ise u ya esnek kapalı dönüşüm denir. Yani:

u esnek kapalı dönüşümdür $\quad :\Leftrightarrow \quad (\forall(L,E)\in\mathcal{K}_X): u\big((L,E)\big)\in\mathcal{K}_Y$

Teorem 5.3.2. (Nazmul and Samantha, 2013) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,E)esnek topolojik uzay ve $u:(X,\tau_X,E)\longrightarrow(Y,\tau_Y,E)$ dönüşüm olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) u nun esnek açık dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki her (F,E) esnek kümesi için $u\Big(Int\big((F,E)\big)\Big)\,\tilde{\subseteq}\, Int\Big(u\big((F,E)\big)\Big)$ olmasıdır.

ii) u nun esnek kapalı dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki her (F,E) esnek kümesi için $Cl\Big(u\big((F,E)\big)\Big)\,\tilde{\subseteq}\, u\Big(Cl\big((F,E)\big)\Big)$ olmasıdır.

İspat: i) (F,E) X üzerinde esnek küme olsun. u esnek açık dönüşüm olduğundan $u\Big(Int\big((F,E)\big)\Big)$ τ_Y −esnek açık kümedir ve $u\Big(Int\big((F,E)\big)\Big)\,\tilde{\subseteq}\, u\big((F,E)\big)$ elde edilir. Yani, $u\Big(Int\big((F,E)\big)\Big)\,\tilde{\subseteq}\, Int\Big(u\big((F,E)\big)\Big)$ dir. Diğer yandan, (F,E) τ_X −esnek açık küme olsun. Bu durumda, hipotez gereğince $u\big((F,E)\big)=u\Big(Int\big((F,E)\big)\Big)\,\tilde{\subseteq}\, Int\Big(u\big((F,E)\big)\Big)\,\tilde{\subseteq}\, u\big((F,E)\big)$ dir. Dolayısıyla, u esnek açık dönüşümdür.

ii) Benzer şekilde yapılır.

Tanım 5.3.3. (Nazmul and Samantha, 2013) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,E) esnek topolojik uzay ve $u:(X,\tau_X,E)\longrightarrow(Y,\tau_Y,E)$dönüşümü 1-1, örten, esnek sürekli ve tersi esnek sürekli olsun. O halde, u dönüşümüne esnek homeomorfizm denir.

Teorem 5.3.4. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, E) esnek topolojik uzay ve $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ dönüşümü 1-1 ve örten olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

i) u esnek açık dönüşümdür,
ii) u esnek kapalı dönüşümdür,
iii) $u^{-1}: (Y, \tau_Y, E) \longrightarrow (X, \tau_X, E)$ esnek süreklidir.

Teorem 5.3.5. (Nazmul and Samantha, 2013) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, E) esnek topolojik uzay ve $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ dönüşümü 1-1 ve örten olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

i) u esnek homeomorfizmdir,
ii) u ve $u^{-1}: (Y, \tau_Y, E) \longrightarrow (X, \tau_X, E)$ esnek süreklidir,
iii) u esnek sürekli ve esnek açık dönüşümdür,
iv) u esnek sürekli ve esnek kapalı dönüşümdür,
v) X üzerindeki her (F, E) esnek kümesi için $u\Big(Cl\big((F,E)\big)\Big) = Cl\big((F,E)\big)$ dir.

Not 5.3.6. Esnek açık ve esnek kapalı dönüşümlerin genelde esnek sürekli dönüşüm olmayacağına ait örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 5.3.7. $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, $Y = \{m_1, m_2, m_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olsun. X ve Y üzerindeki esnek topolojiler sırasıyla $\tau_X = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_3\})\}, \{(e_1, \{h_3, h_4\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_4\})\}\}$ ve $\tau_Y = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{Y}\} \cup \{\{(e_1, \{m_1, m_3\}), (e_2, \{m_2\})\}, \{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, \{m_1, m_3\})\}, \{(e_1, \{m_1\}), (e_2, \emptyset)\}, \{(e_1, \{m_2\}), (e_2, \{m_1, m_3\})\}, \{(e_1, \{m_3\}), (e_2, \{m_2\})\}, \{(e_1, \{m_2, m_3\}), (e_2, Y)\}\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{K}_X = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1, \{h_3, h_4\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_4\})\}, \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_3\})\}\}$ ve $\mathcal{K}_Y = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{Y}\} \cup \{\{(e_1, \{m_2\}), (e_2, \{m_1, m_3\})\}, \{(e_1, \{m_3\}), (e_2, \{m_2\})\}, \{(e_1, \{m_2, m_3\}), (e_2, Y)\}, \{(e_1, \{m_1, m_3\}), (e_2, \{m_2\})\}, \{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, \{m_1, m_3\}), \{(e_1, \{m_1\}), (e_2, \emptyset)\}\}$ biçimindedir. Dolayısıyla, her $e \in E$ için $u(h_1) = u(h_4) = m_1$, $u(h_2) = m_3$, $u(h_3) = m_2$ ile verilen $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ esnek açık ve esnek kapalı dönüşümdür. Ancak, u esnek sürekli dönüşüm değildir. Çünkü, $u^{-1}(\{(e_1,\{m_1\}),(e_2,\emptyset)\})$ = $\{(e_1,\{h_1,h_4\}),(e_2,\emptyset)\} \notin \tau_X$ dir.

Not 5.3.8. Esnek sürekli dönüşümlerin genelde esnek kapalı ve esnek açık dönüşüm olmayacağına ait örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 5.3.9. $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, $Y = \{m_1, m_2, m_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olsun. X ve Y üzerindeki esnek topolojiler de sırasıyla τ_X = $\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\emptyset)\}, \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1,\{h_3,h_4\}),(e_2,\emptyset)\}, \{(e_1, \{h_2,h_3,h_4\}),(e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1,\{h_2,h_3,h_4\}),(e_2,\emptyset)\}, \{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1, \{h_3,h_4\}),(e_2,\{h_1\})\}\}$ ve τ_Y = $\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{Y}\} \cup \{\{(e_1,\{m_2\}),(e_2,\{m_1\})\}, \{(e_1,\{m_2,m_3\}), (e_2,\emptyset)\}, \{(e_1,\{m_2\}),(e_2,\emptyset)\}, \{(e_1,\{m_2,m_3\}),(e_2,\{m_1\})\}\}$ biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda, $\mathcal{K}_X$ = $\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1,h_3,h_4\}),(e_2,X)\}, \{(e_1,X),(e_2, \{h_2, h_3, h_4\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\}, \{(e_1,\{h_1,h_3,h_4\}),(e_2,\{h_2,h_3,h_4\})\}, \{(e_1,\{h_1\}), (e_2,X)\}, \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_2,h_3,h_4\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2,h_3,h_4\})\}\}$ ve $\mathcal{K}_Y$ = $\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{Y}\} \cup \{\{(e_1,\{m_1,m_3\}),(e_2,\{m_2,m_3\})\}, \{(e_1,\{m_1\}),(e_2,Y)\}, \{(e_1,\{m_1,m_3\}), (e_2,Y)\}, \{(e_1,\{m_1\}),(e_2,\{m_2,m_3\})\}\}$ biçimindedir. Dolayısıyla, her $e \in E$ için $u(h_1) = m_1$, $u(h_2) = m_3$, $u(h_3) = m_2$, $u(h_4) = m_2$ ile verilen $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ esnek sürekli dönüşümdür. Ancak, u esnek açık ve esnek kapalı dönüşüm değildir.

Not 5.3.10. Esnek açık dönüşümlerin genelde esnek kapalı ve esnek sürekli dönüşüm olmayacağına ait örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 5.3.11. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $Y = \{m_1, m_2, m_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olsun. X ve Y üzerindeki esnek topolojiler de sırasıyla τ_X = $\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2,h_3\})\}, \{(e_1,X),(e_2,\{h_3\})\}, \{(e_1,X), (e_2,\{h_2, h_3\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\})\}\}$ ve τ_Y = $\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{Y}\} \cup \{\{(e_1,\{m_1,m_2\}),(e_2,\{m_1\})\}, \{(e_1,\{m_2,m_3\}), (e_2,\{m_1\})\}, \{(e_1,Y),(e_2,\{m_1\})\}, \{(e_1,\{m_2\}),(e_2,\{m_1\})\}\}$ olsun. Dolayısıyla, $\mathcal{K}_X$ = $\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\{h_3\}),(e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1, \{h_3\}), (e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1\})\}\}$ ve $\mathcal{K}_Y$ = $\{\widetilde{\emptyset}, \tilde{Y}\} \cup \{\{(e_1,\{m_3\}), (e_2, \{m_2,m_3\})\}, \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{m_2,m_3\})\}, \{(e_1,\{m_1\}),(e_2,\{m_2,m_3\})\}, \{(e_1,\{m_1,m_3\}),$

$(e_2, \{m_2, m_3\})\}\}$ biçimindedir. Bu durumda, her $e \in E$ için $u(h_1) = m_2$, $u(h_2) = u(h_3) = m_1$ ile verilen $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ esnek açık dönüşümdür. Ancak, u esnek kapalı ve esnek sürekli dönüşüm değildir. Çünkü, $u(\{(e_1, \{h_3\}), (e_2, \{h_1\})\}) = \{\{(e_1, \{m_1\}), (e_2, \{m_2\})\}\} \notin \mathcal{K}_Y$ ve $u^{-1}(\{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, \{m_1\})\}) = \{(e_1, X), (e_2, \{h_2, h_3\})\} \notin \tau_X$dir.

Not 5.3.12. Esnek kapalı dönüşümlerin genelde esnek açık ve esnek sürekli dönüşüm olmayacağına ait örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 5.3.13. $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, $Y = \{m_1, m_2, m_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olsun. X ve Y üzerindeki esnek topolojiler de sırasıyla $\tau_X = \{\widetilde{\emptyset}, \widetilde{X}\} \cup \{\{(e_1, \{h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_3\})\}, \{(e_1, \{h_1, h_4\}), (e_2, \emptyset)\}, \{(e_1, \{h_4\}), (e_2, \emptyset)\}, \{(e_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_3\})\}\}$ ve $\tau_Y = \{\widetilde{\emptyset}, \widetilde{Y}\} \cup \{\{(e_1, \{m_3\}), (e_2, \emptyset)\}, \{(e_1, \{m_2, m_3\}), (e_2, \{m_2\})\}\}$ olsun. Dolayısıyla, $\mathcal{K}_X = \{\widetilde{\emptyset}, \widetilde{X}\} \cup \{\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_1, h_4\}), \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, X)\}, \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_2, X)\}, \{(e_1, \{h_2\}), (e_2, \{h_1, h_4\})\}\}$ ve $\mathcal{K}_Y = \{\widetilde{\emptyset}, \widetilde{Y}\} \cup \{\{(e_1, \{m_1\}), (e_2, \{m_1, m_3\})\}, \{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, Y)\}\}$ biçimindedir. Bu durumda, her $e \in E$ için $u(h_1) = u(h_2) = m_1$, $u(h_3) = m_2$, $u(h_4) = m_3$ ile verilen $u: (X, \tau_X, E) \longrightarrow (Y, \tau_Y, E)$ esnek kapalı dönüşümdür. Ancak, u esnek açık ve esnek sürekli dönüşüm değildir. Çünkü, $u(\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_1, h_4\})\}) = u(\{(e_1, \{h_2\}), (e_2, \{h_1, h_4\})\}\}) = \{(e_1, \{m_1\}), (e_2, \{m_1, m_3\})\} \in \mathcal{K}_Y$ ve $u(\{(e_1, \{h_1, h_4\}), (e_2, \emptyset)\}) = u(\{(e_1, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_2, Y)\}) = \{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, Y)\} \in \mathcal{K}_Y$; $u(\{(e_1, \{h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_3\})\} = \{(e_1, \{m_2, m_3\}), (e_2, \{m_1, m_2\})\} \notin \tau_Y$ ve $u^{-1}(\{(e_1, \{m_2, m_3\}), (e_2, \{m_2, m_3\})\}) = \{(e_1, \{h_3, h_4\}), (e_2, \{h_3\})\} \notin \tau_X$ dir.

6. ESNEK θ −TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, Georgiou ve arkadaşlarının 2013 yılında yayımladıkları On Soft Topological Spaces makalesindeki esnek θ −topoloji kavramı tanıtılmış ve bu kavramla ilgili bazı özellikler incelenmiştir. Esnek θ −açık küme kavramını verebilmek için ilk olarak Georgiou ve Megaritis tarafından tanımlanan e −esnek açık komşuluk kavramı ve bu kavramın bazı özellikleri ele alınmıştır.

6. 1. Georgiou ve Megaritis' e Göre Esnek Topolojideki Bazı Özellikler

Tanım 6.1.1. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, $e \in E,\ x \in X$ olsun. $x \in G(e)$ olacak biçimdeki (G,E) τ −esnek açık kümesine x noktasının e −esnek açık komşuluğu denir.

Kolaylık açısından x noktasının e −esnek açık komşuluklarının ailesi $\nu_e(x)$ ile gösterilecektir.

Örnek 6.1.2. $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\widetilde{\emptyset},\widetilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_2,h_3\})\}$ $,\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2\})\}$, $\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2,h_3\})\}$, $\{(e_1,\{h_2\}),\ (e_2,\{h_2\})\}\}$ olsun. Bu durumda, $\nu_{e_1}(h_1)=\{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2\})\}$, $\{(e_1,\{h_1,h_2\}),\ (e_2,\{h_2,h_3\})\},\widetilde{X}\}$ ve $\nu_{e_1}(h_2)=\nu_{e_2}(h_2)=\{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),\ (e_2,\{h_2\})\}$, $\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_2,h_3\})\}$, $\{(e_1,\{h_1,h_2\}),\ (e_2,\{h_2,h_3\})\}$, $\{(e_1,\{h_2\}),\ (e_2,\{h_2\})\}$, $\widetilde{X}\}$ ve $\nu_{e_2}(h_3)=\{\{(e_1,\{h_2\}),\ (e_2,\{h_2,h_3\})\}$, $\{(e_1,\{h_1,h_2\}),\ (e_2,\{h_2,h_3)\},\widetilde{X}\}$ ve $\nu_{e_1}(h_3)=\nu_{e_2}(h_1)=\{\widetilde{X}\}$ dır.

Önerme 6.1.3. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun.(G,E) nin $\tau-$ esnek açık küme olması için gerek ve yeter koşul her $e\in E$ ve $x\in G(e)$ için x noktasının $(G_{(e,x)},E)\ \widetilde{\subseteq}\ (G,E)$ olacak biçimde $(G_{(e,x)},E)$ e −esnek açık komşuluğunun bulunmasıdır.

İspat: (G,E) τ −esnek açık küme olsun. Her $e\in E$ ve $x\in G(e)$ için $G_{(e,x)}=G$ olmak üzere, $(G_{(e,x)},E)$ esnek kümesini alalım. Bu durumda, $(G_{(e,x)},E)$ x noktasının e −esnek açık komşuluğudur. Diğer yandan, her $e\in E$ ve

$x \in G(e)$ için x noktasının $\left(G_{(e,x)}, E\right) \tilde{\subset} (G, E)$ olacak biçimde $\left(G_{(e,x)}, E\right)$ $e-$ esnek açık komşuluğunu alalım. O zaman, her $r \in E$ için $G_{(e,x)}(r) \subset G(r)$ dir. $J = \{(e, x): e \in E, x \in G(e)\}$ olsun. Dolayısıyla, her $(e, x) \in J$ için $G_{(e,x)}(r) \subset G(r)$ elde edilir. Yani, $\bigcup\left\{G_{(e,x)}(r) : (e, x) \in J\right\} \subset G(r)$ dir. $y \in G(r)$ olsun. Hipotez gereğince, y noktasının $\left(G_{(r,y)}, E\right) \tilde{\subset} (G, E)$ olacak biçimde bir $\left(G_{(r,y)}, E\right)$ $e-$esnek açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $y \in G_{(r,y)}(r) \subset \bigcup \left\{G_{(e,x)}(r):(e, x) \in J\right\}$ elde edilir O halde, $(G,E) = \tilde{\bigcup}\left\{\left(G_{(e,x)}, E\right): (e, x) \in J\right\}$ olacağından (G, E) $\tau-$esnek açık kümedir.

Tanım 6.1.4. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X, τ, E) esnek topolojik uzay ve $e \in E$, $x \in X$olsun. x noktasının her (G, E) $e-$esnek açık komşuluğu için $(F, E)\tilde{\bigcap}(G, E) \neq \tilde{\emptyset}$ ise, x noktasına (F, E) nin $e-$kapanış noktası denir. (F, E) nin tüm $e-$kapanış noktalarının kümesi, kısaca $Cl(F, e)$ ile gösterilir. Yani:

$$x \in Cl(F, e) \quad :\Leftrightarrow \quad \left(\forall (G,E) \in \mathcal{V}_e(x)\right) : (F, E)\tilde{\bigcap}(G, E) \neq \tilde{\emptyset}$$

Örnek 6.1.5. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_2\}), (e_3, \{h_1\})\}, \{(e_1, \{h_3\}), (e_2, \{h_1, h_3\}), (e_3, \{h_2, h_3\})\}\}$ olsun. Bu durumda, $\nu_{e_1}(h_1) = \nu_{e_1}(h_2) = \nu_{e_2}(h_2) = \nu_{e_3}(h_1) = \{\{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_2\}), (e_3, \{h_1\})\}, \tilde{X}\}$ ve $\nu_{e_1}(h_3) = \nu_{e_2}(h_1) = \nu_{e_2}(h_3) = \nu_{e_3}(h_2) = \nu_{e_3}(h_3) = \{\{(e_1, \{h_3\}), (e_2,\{h_1,h_3\}), (e_3, \{h_2, h_3\}), \tilde{X}\}$ dır. Dolayısıyla, $(F, E) = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_2\}), (e_3, \{h_1\})\}$ olmak üzere, $Cl(F, e_1) = \{h_1, h_2\}$, $Cl(F, e_2) = \{h_2\}$ ve $Cl(F, e_3) = \{h_1\}$ elde edilir.

Önerme 6.1.6. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X, τ, E) esnek topolojik uzay ve (F, E), X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, $R_{(F,E)}: E \longrightarrow P(X)$ dönüşümü her $e \in E$ için $R_{(F,E)}(e) = F(e) \cup Cl(F, e)$ olmak üzere, $Cl\left((F, E)\right) = \left(R_{(F,E)}, E\right)$ biçimindedir.

İspat: i) Önce, $(F, E) \tilde{\subset} \left(R_{(F,E)}, E\right)$ olduğunu gösterelim. Her $e \in E$ için $F(e) \subset F(e) \cup Cl(F, e) = R_{(F,E)}(e)$ olduğundan $(F, E) \tilde{\subset} \left(R_{(F,E)}, E\right)$ elde edilir.

ii) $\left(R_{(F,E)}, E\right)^c$ nin τ −esnek açık küme olduğunu gösterelim. $p \in E$ ve $x \in R_{(F,E)}{}^c(p) = \left(F(e) \cup Cl(F,e)\right)^c$ olsun. Önerme 6.1.3. gereğince, x noktasının $\left(G_{(p,x)}, E\right) \tilde{\subseteq} \left(R_{(F,E)}, E\right)^c$ olacak biçimde bir $\left(G_{(p,x)}, E\right)$ p-esnek açık komşuluğunun var olduğunu göstermeliyiz. $x \notin Cl(F,e)$ olsun. Bu durumda, x noktasının $(F,E)\tilde{\cap}\left(G_{(p,x)}, E\right) = \tilde{\emptyset}$ olacak biçimde hiçbir $\left(G_{(p,x)}, E\right)$ p-esnek açık komşuluğu yoktur. Yani, her $e \in E$ için $F(e) \cap G_{(p,x)}(e) = \emptyset$ dir. Dolayısıyla, her $e \in E$ için $G_{(p,x)}(e) \subset \left(F(e)\right)^c$ elde edilir. $e \in E$ olmak üzere, $y \in G_{(p,x)}(e)$ alalım. O zaman, $\left(G_{(p,x)}, E\right)$ esnek kümesi y noktasının $(F,E)\tilde{\cap}\left(G_{(p,x)}, E\right) = \tilde{\emptyset}$ olacak biçimdeki e-esnek açık komşuluğudur. Yani, $y \in \left(Cl(F,e)\right)^c$ dir. O halde, her $e \in E$ için $G_{(p,x)}(e) \subset \left(F(e)\right)^c \cap \left(Cl(F,e)\right)^c = \left(F(e) \cup Cl(F,e)\right)^c$ elde edilir.

iii) Son olarak, $(F,E) \tilde{\subseteq} (L,E)$ olacak biçimde (L,E) esnek kapalı kümesini alalım. $\left(R_{(F,E)}, E\right) \tilde{\subseteq} (L,E)$ olduğunu göstermeliyiz. Yani, her $e \in E$ için $R_{(F,E)}(e) = F(e) \cup Cl(F,e)$ ve $F(e) \subset L(e)$ olduğundan her $e \in E$ için $Cl(F,e) \subset L(e)$ veya $\left(L(e)\right)^c \subset \left(Cl(F,e)\right)^c$ olduğunu göstermeliyiz. $y \in \left(L(e)\right)^c$ ve $y \in Cl(F,e)$ olsun. O zaman, $(L,E)^c$ esnek kümesi y noktasının $(F,E)\tilde{\cap}(L,E)^c \neq \tilde{\emptyset}$ olacak biçimdeki e-esnek açık komşuluğudur. Ancak, bu durum $(F,E) \tilde{\subseteq} (L,E)$ olmasıyla çelişeceğinden $y \in \left(Cl(F,e)\right)^c$ elde edilir.

Not 6.1.7. (Georgiou et. al. , 2013) Her $e \in E$ için $F(e) \subset Cl(F,e)$ olduğu Önerme 6.1.6. dan elde edilir. Dolayısıyla, her $e \in E$ için $R_{(F,E)}(e) = Cl(F,e)$ dir.

Tanım 6.1.8. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. Bu durumda, β nın τ için taban olması için gerek ve yeter koşul boştan farklı her (G,E) τ −esnek açık kümesi için $(G,E) = \tilde{\bigcup}\ \{(B_k,E): k \in J\}$ olacak biçimde $k \in J$, $(B_k,E) \in \beta$ bulunmasıdır.

Önerme 6.1.9. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. β nın τ esnek topolojisi için taban olması için gerek ve yeter koşul her $e \in E,\ x \in X$ ve x noktasının her (G, E) e −esnek açık komşuluğu için $(G_{(e,x)}, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olacak biçimde $(G_{(e,x)}, E) \in \beta$ nın bulunmasıdır. Yani:

β τ için tabandır	$\Leftrightarrow$	$(\forall e \in E)(\forall x \in X)(\forall (G, E) \in \upsilon_e(x))(\exists (G_{(e,x)}, E) \in \beta): (G_{(e,x)}, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$

İspat: β, τ esnek topolojisi için taban, $e \in E$, $x \in X$ ve (G, E), x noktasının e-esnek açık komşuluğu olsun. Bu durumda, $x \in G(e)$ dir. β, τ için taban olduğundan $(G, E) = \tilde{\bigcup}\{(B_k, E): k \in J\}$ olacak biçimde $k \in J$, $(B_k, E) \in \beta$ vardır. Dolayısıyla, $G(e) = \bigcup\{B_{k_0}(e): k_0 \in J\}$ ve $k_0 \in J$ olmak üzere, $x \in B_{k_0}(e)$ elde edilir. Yani, (B_{k_0}, E) x noktasının $(B_{k_0}, E) \in \beta$ ve $(B_{k_0}, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olacak biçimde e-esnek açık komşuluğudur. Diğer yandan, $\beta \subset \tau$ olsun. Bu durumda, hipotezden her $e \in E$, $x \in X$ ve x noktasının her (G, E) e-esnek açık komşuluğu için $(G_{(e,x)}, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ olacak biçimde $(G_{(e,x)}, E) \in \beta$ vardır. β nın τ esnek topolojisinin bir tabanı olduğunu göstermek için $(G, E) \neq \tilde{\emptyset}$ olacak biçimde τ −esnek açık kümesi alalım. $I = \{(e, x): e \in E, x \in G(e)\}$ olsun. O zaman, Tanım 6.1.8. den (G, E)= $\tilde{\bigcup}\{(G_{(e,x)}, E): (e, x) \in I\}$ elde edilir. O halde, her $(e, x) \in J$ için $(G_{(e,x)}, E) \in \beta$ olduğundan β, τ için tabandır.

Tanım 6.1.10. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay, $x \in X$ ve $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ iki dönüşüm olsun. Her $e \in E$ ve $u(x)$ in her $p(e)$ −esnek açık komşuluğu için x noktasının $f_{pu}((F,E)) \tilde{\subseteq} (G,K)$ olacak biçimde (F, E) e −esnek açık komşuluğu varsa u dönüşümüne x noktasında esnek e-süreklidir denir. Yani:

u x de esnek e-süreklidir	$:\Leftrightarrow$	$(\forall e \in E)\left(\forall (G, K) \in \nu_{p(e)}(u(x))\right)(\exists (F, E) \in \mathcal{V}_e(x)): f_{pu}((F, E)) \tilde{\subseteq} (G, K)$

Eğer u dönüşümü her $x \in X$ noktasında esnek e-sürekliyse u esnek e-süreklidir denir.

Önerme 6.1.11. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay ve $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ iki dönüşüm olmak üzere, aşağıdakiler denktir:

i) u dönüşümü esnek e −süreklidir,

ii) Her (G, K) τ_Y −esnek açık kümesi için ${f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ τ_X − esnek açık kümedir,

iii) Her (L, K) τ_Y −esnek kapalı kümesi için ${f_{pu}}^{-1}\big((L, K)\big)$ τ_X − esnek kapalı kümedir,

iv) X üzerindeki her (F, E) esnek kümesi için $f_{pu}\Big(Cl\big((F, E)\big)\Big) \tilde{\subseteq} Cl\Big(f_{pu}\big((F, E)\big)\Big)$ dir.

Örnek 6.1.12. (Georgiou and Megaritis, 2014) $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $Y = \{m_1, m_2, m_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $\tau_X = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1, \{h_3\}), (e_2, \{h_1, h_2\})\}, \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{h_3\})\}, \{(e_1, \{h_3\}), (e_2, X)\}\}$ ve $\tau_Y = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{Y}\} \cup \{\{(e_1, \{m_1\}), (e_2, \{m_3\}), (e_3, \emptyset)\}, \{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, \{m_3\}), (e_3, Y)\}\}$ olsun. Bu durumda, $u: X \longrightarrow Y$ dönüşümü $u(h_1) = u(h_2) = m_1$, $u(h_3) = m_3$ ve $p: E \longrightarrow K$ dönüşümü $p(e_1) = e_2$, $p(e_2) = e_1$ biçiminde tanımlı olmak üzere, u dönüşümü esnek e −süreklidir. Ancak, $p_0: E \longrightarrow K$ dönüşümü $p_0(e_1) = e_2$, $p_0(e_2) = e_3$ biçiminde alınırsa $u: X: \longrightarrow Y$ dönüşümü esnek p_0 −sürekli değildir.

Önerme 6.1.13. (Georgiou and Megaritis, 2014) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay ve $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ iki dönüşüm olsun. β_Y, τ_Y için esnek taban olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

i) u dönüşümü esnek e −süreklidir,

ii) Her $(G, K) \in \beta_Y$ için ${f_{pu}}^{-1}\big((G, K)\big)$ τ_X −esnek açık kümedir.

İspat: i)$\Longrightarrow$ ii) Önerme 6.1.11. den ispat açıktır.

ii) $\Longrightarrow$ i) (G, K) τ_Y −esnek açık küme olsun. Bu durumda, Tanım 6.1.8. den $(G, K) = \tilde{\bigcup} \{(B_k, K): k \in J\}$ olacak biçimde $(B_k, K) \in \beta_Y$, $k \in J$ vardır.

Dolayısıyla, Teorem 2.1.32. den ${f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big) = {f_{pu}}^{-1}\big(\tilde{\bigcup}\{(B_k,K): k \in J\}\big) = \tilde{\bigcup}$ $\left\{{f_{pu}}^{-1}\left((B_k,K)\right): k \in J\right\}$ τ_X $-$esnek açık kümedir.

6.2. Esnek θ-Topoloji

Tanım 6.2.1. (Georgiou et. al, 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (F,E) X üzerinde esnek küme ve $e \in E$, $x \in X$ olsun. x noktasının $Cl\big((G,E)\big) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak biçimde bir (G,E) $e-$esnek açık komşuluğu varsa x noktasına (F,E) nin $e-\theta$ iç noktası denir. (F,E) nin tüm $e-\theta$ iç noktalarının kümesi $Int_\theta(F,e)$ ile gösterilir. Yani:

$$x \in Int_\theta(F,e) \quad :\Leftrightarrow \quad \big(\exists (G,E) \in \nu_e(x)\big): Cl\big((G,E)\big) \tilde{\subseteq} (F,E)$$

Tanım 6.2.2. (Georgiou et. al, 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay v (F,E), Xüzerinde esnek küme olsun. Her $e \in E$ için $R_{(F,E)}(e) = Int_\theta(F,e)$ ile tanımlı $R_{(F,E)}: E \longrightarrow P(X)$ dönüşümü ile oluşturulan $Int_\theta\big((F,E)\big) = \big(R_{(F,E)}, E\big)$ esnek kümeye (F,E) nin esnek $\theta-$ içi denir.

Tanım 6.2.2. göz önüne alındığında $Int_\theta\big((F,E)\big) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olduğu açıktır.

Örnek 6.2.3. $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $E = \{e_1,e_2,e_3\}$ ve $\tau = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}), (e_2,\{h_3\}), (e_3,X)\}, \{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_3\}),(e_3,X)\}, \{(e_1,\{h_1,h_3\}), (e_2,\{h_1,h_2\}), (e_3,\emptyset)\}, \{(e_1,\{h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\}),(e_3,\emptyset)\}, \{(e_1,\{h_1\}), (e_2,\emptyset), (e_3,\emptyset)\}, \{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,X),(e_3,X)\}\}$ olsun. Bu durumda, $\nu_{e_1}(h_2) = \nu_{e_2}(h_3) = \nu_{e_3}(h_1) = \nu_{e_3}(h_2) = \nu_{e_3}(h_3) = \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\}),(e_3,X)\}, \{(e_1,\{h_2\}), (e_2,\{h_3\}), (e_3,X)\}, \{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,X),(e_3,X)\},\tilde{X}\}$ ve $\nu_{e_1}(h_3) = \nu_{e_2}(h_1) = \nu_{e_2}(h_2) = \{\{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\}),(e_3,\emptyset)\}, \{(e_1,\{h_3\}), (e_2,\{h_1,h_2\}),(e_{3,},\emptyset)\}, \{(e_1,\{h_2,h_3\}), (e_2,X), (e_3,X)\}, \tilde{X}\}$ ve $\nu_{e_1}(h_1) = \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}), (e_2,\{h_3\}), (e_3,X)\}, \{(e_1,\{h_1,h_3\}), (e_2,\{h_1,h_2\}),(e_3,\emptyset)\}, \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\emptyset),(e_3,\emptyset), \tilde{X}\}$ dır. $(F,E) = \{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\}),(e_3,X)\}$ alınırsa, $Int_\theta(F,e_1) = \{h_1,h_3\}$, $Int_\theta(F,e_2) =$

$\{h_1, h_2\}$, $Int_\theta(F, e_3) = \emptyset$ elde edilir. Dolayısıyla, $Int_\theta\big((F, E)\big)$ = $\{(e_1, \{h_1, h_3\})$, $(e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \emptyset)\}$ biçimindedir.

Tanım 6.2.4. (Georgiou et. al. , 2013) $k \in J$ olmak üzere, (F_k, E) X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, $\bigcap$ $\{F_k: k \in J\}$: $E \longrightarrow P(X)$ ve $\bigcup$ $\{F_k: k \in J\}$: $E \longrightarrow P(X)$ dönüşümleri sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

i) Her $e \in E$ için $\bigcap\{F_k: k \in J\}(e) = \bigcap\{F_k(e): k \in J\}$,

ii) Her $e \in E$ için $\bigcup\{F_k: k \in I\}(e) = \bigcup\{F_k(e): k \in J\}$.

Not 6.2.5. (Georgiou et. al. , 2013) $(\bigcap\{F_k: k \in J\}, E)$ ve $(\bigcup\{F_k: k \in J\}, E)$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır:

i) $(\bigcap\{F_k: k \in J\}, E) = \tilde{\bigcap}\{(F_k, E): k \in J\}$,

ii) $(\bigcup\{F_k: k \in J\}, E) = \tilde{\bigcup}\{(F_k, E): k \in J\}$,

iii) (G, E), X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda,

$(\bigcap\{F_k: k \in J\}, E)\ \tilde{\bigcup}\ (G, E) = (\bigcap\{F_k \bigcup G: k \in J\}, E)$,

iv) (G, E), X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, $(\bigcup\{F_k: k \in J\}, E)\ \tilde{\bigcap}$ (G, E) = $(\bigcup\{F_k \bigcap G: k \in J\}, E)$

Önerme 6.2.6. (Georgiou et. al. , 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzay, (F_1, E) ve (F_2, E) X üzerinde iki esnek küme ve $e \in E$ olsun. Bu durumda,

i) $Int_\theta(F_1, e) \bigcap Int_\theta(F_2, e) = Int_\theta(F_1 \bigcap F_2, e)$,

ii) $\bigcup\{Int_\theta(F_k, e): k \in J\} \subset Int_\theta(\bigcup\{F_k: k \in J\}, e)$.

İspat:

i) $x \in Int_\theta(F_1, e) \bigcap Int_\theta(F_2, e)$ olsun. Bu durumda, x noktasının $Cl\big((G_1, E)\big) \tilde{\subseteq} (F_1, E)$ ve $Cl\big((G_2, E)\big) \tilde{\subseteq} (F_2, E)$ olacak biçimde (G_1, E), (G_2, E) $e-$esnek açık komşulukları vardır. Dolayısıyla, $(G_1, E) \tilde{\bigcap} (G_2, E)$ x noktasının $e-$esnek açık komşuluğudur ve $Cl\Big((G_1, E) \tilde{\bigcap} (G_2, E)\Big) \tilde{\subseteq}$ $Cl\big((G_1, E)\big)\ \tilde{\bigcap}\ Cl\big((G_2, E)\big) \tilde{\subseteq} (F_1, E) \tilde{\bigcap} (F_2, E) = (F_1 \bigcap F_2, E)$ elde edilir. Yani, $Int_\theta(F_1, e) \bigcap Int_\theta(F_2, e) \subset Int_\theta(F_1 \bigcap F_2, e)$ dir. Diğer yandan, $x \in Int_\theta(F_1 \bigcap F_2, e)$ olsun. Bu durumda, x noktasının $Cl\big((G, E)\big) \tilde{\subseteq} (F_1 \bigcap$

$F_2, E)$ olacak biçimde bir (G, E) $e-$esnek açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla $Cl\big((G,E)\big) \tilde{\subset} (F_1, E), (F_2, E)$ elde edilir. Yani, $Int_\theta(F_1 \cap F_2, e)$ $\subset Int_\theta(F_1, e) \cap Int_\theta(F_2, e)$ dir.

ii) $x \in \bigcup\{Int_\theta\big((F_k, e)\big): k \in J\}$ olsun. Bu durumda, $x \in Int_\theta\big(F_{k_0}, e\big)$ olacak biçimde bir $k_0 \in J$ vardır. Dolayısıyla, x noktasının $Cl\big((G,E)\big) \tilde{\subset} \big(F_{k_0}, E\big) \tilde{\subset}$ $\big(\bigcup_{k \in J} F_k, E\big)$ olacak biçimde (G, E) $e-$esnek açık komşuluğu vardır. O halde, $\bigcup\{Int_\theta(F_k, e): k \in J\} \subset Int_\theta(\bigcup\{F_k: k \in J\}, e)$ dir.

Sonuç 6.2.7. (Georgiou et. al. , 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzayı için aşağıdaki durumlar sağlanır:

i) $Int_\theta\big((F_1, E)\big) \tilde{\cap} Int_\theta\big((F_2, E)\big) = Int_\theta\big((F_1 \cap F_2, E)\big)$,

ii) $\tilde{\bigcup}\{Int_\theta\big((F_k, E)\big): k \in J\} \tilde{\subset} Int_\theta(\bigcup\{F_k : k \in J\}, E)$.

İspat: Önerme 6.2.6. dan ispat açıktır.

Tanım 6.2.8. (Georgiou et. al. , 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzay olsun. $Int_\theta\big((F, E)\big) = (F,E)$ olacak biçimdeki (F, E) esnek kümesine esnek $\theta-$açık küme denir. Yani:

(F, E) esnek $\theta-$açık kümedir $:\Leftrightarrow$ $(\forall e \in E): Int_\theta(F, e) = F(e)$

Önerme 6.2.9. (Georgiou et. al. , 2013) Tüm esnek $\theta-$ açık kümelerin ailesi, X üzerinde esnek topolojidir ve kısaca τ_θ ile gösterilir.

İspat:

$(\boldsymbol{t_1})$ $Int_\theta\big(\tilde{\emptyset}\big) = \tilde{\emptyset}$, $Int_\theta\big(\tilde{X}\big) = \tilde{X}$ olduğundan $\tilde{\emptyset} \in \tau_\theta$, $\tilde{X} \in \tau_\theta$ dır.

$(\boldsymbol{t_2})$ (F, E), (G, E) $\tau_\theta-$esnek açık küme olsun. $(F \cap G, E)$ nin $\tau_\theta-$esnek açık küme olduğunu göstermeliyiz. (F, E), (G, E) $\tau_\theta-$esnek açık küme olduğundan $Int_\theta\big((F, E)\big) = (F, E)$ ve $Int_\theta\big((G, E)\big) = (G, E)$ dir. Ayrıca, Sonuç. 6.2.7. den $(F \cap G, E) = (F, E) \tilde{\cap} (G, E) = Int_\theta\big((F, E)\big) \tilde{\cap} Int_\theta\big((G, E)\big) = Int_\theta\ \big((F$ $\cap\ G, E)\big)$ elde edilir. Yani, $(F, E) \tilde{\cap} (G, E)$ $\tau_\theta -$ esnek açık kümedir.

(t_3) Her $k \in J$ için (G_k, E) τ_θ −esnek açık küme olsun. $(\cup\{G_k: k \in J\}, E)$ nin τ_θ −esnek açık küme olduğunu göstermeliyiz. Yani, $Int_\theta(\cup\{G_k: k \in J\}, E) = (\cup\{G_k: k \in J\}, E)$ olduğunu göstermeliyiz. Her $k \in J$ için (G_k, E) τ_θ −esnek açık küme olduğundan $Int_\theta\big((G_k, E)\big) = (G_k, E)$ dir. Ayrıca, Sonuç 6.2.7. den $(\cup\{G_k: k \in J\}, E) = \widetilde{\cup}\{(G_k, E): k \in J\} = \widetilde{\cup}\{Int_\theta\big((G_k, E)\big): k \in J\} \,\widetilde{\subseteq}\, Int_\theta\ \{\cup\{G_k: k \in J\}, E)\}$ elde edilir. Diğer yandan, $Int_\theta\{\cup\{G_k: k \in J\}, E)\} \,\widetilde{\subseteq}\, \{\cup\{G_k: k \in J\}, E)\}$ dir. O halde, $\widetilde{\cup}_{k\in J}(G_k, E)$ τ_θ −esnek açık kümedir. Yani, τ_θ ailesi X üzerinde esnek topolojidir.

Önerme 6.2.10. (Georgiou et. al. , 2013) (X, τ, E) esnek topolojik uzayı için aşağıdakiler sağlanır:

i) $\tau_\theta \subset \tau$,

ii) $\tau \supset \tau_\theta \supset (\tau_\theta)_\theta \supset ((\tau_\theta)_\theta)_\theta \supset \ldots$,

iii) X üzerindeki her (F, E) esnek kümesi için $Int_\theta\big((F, E)\big) \in \tau$,

iv) X üzerindeki her (F, E) esnek kümesi için $Int_\theta\big((F, E)\big) = \widetilde{\cup}\ \{(G, E) \in \tau : Cl\big((G, E)\big) \,\widetilde{\subseteq}\, (F, E)\}$

İspat:

i) (G, E) τ_θ −esnek açık küme olsun. Önerme 6.1.3. ten her $e \in E$ ve $x \in G(e)$ için x noktasının $\big(G_{(e,x)}, E\big) \,\widetilde{\subseteq}\, (G, E)$ olacak biçimde $\big(G_{(e,x)}, E\big)$ e-esnek açık komşuluğunun var olduğunu göstermeliyiz. $e \in E$ ve $x \in G(e)$ olsun. O zaman, $x \in Int_\theta(G, e)$ dir. Dolayısıyla, x noktasının $Cl\Big(\big(H_{(e,x)}, E\big) \,\widetilde{\subseteq}\, (G, E)$ olacak biçimde bir $\big(H_{(e,x)}, E\big)$ e −esnek açık komşuluğu vardır. Yani, $\big(H_{(e,x)}, E\big) \,\widetilde{\subseteq}\, (G, E)$ elde edilir. O halde, (G, E) τ −esnek açık kümedir.

ii) Önerme 6.2.9. ve (i) den ispat açıktır.

iii) (F, E) X üzerinde esnek küme olsun. Önerme 6.1.3. ten her $e \in E$ ve $x \in G(e)$ için x noktasının $\big(G_{(e,x)}, E\big) \,\widetilde{\subseteq}\, Int_\theta\big((F, E)\big)$ olacak biçimde $\big(G_{(e,x)}, E\big)$ e-esnek açık komşuluğunun var olduğunu göstermeliyiz.$e \in E$,

$x \in Int_\theta(F,e)$ alalım. Bu durumda, x noktasının $Cl\left(\left(G_{(e,x)},E\right)\right) \tilde{\subset} (F,E)$ olacak biçimde $\left(G_{(e,x)},E\right)$ e $-$esnek açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, her $e \in E$ için $G_{(e,x)}(e) \subset Int_\theta(F,e)$ elde edilir. O halde, $Int_\theta\left((F,E)\right)$ τ $-$esnek açık kümedir.

iv) Tanım 6.2.1. , Tanım 6.2.2. ve (iii) ten ispat açıktır.

Not 6.2.11. (Georgiou et. al. , 2013) $Int_\theta\left((F,E)\right)$ nin genelde τ_θ $-$esnek açık küme olmayacağına ait örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 6.2.12. (Georgiou et. al. , 2013) $X = \{1,2,\ \ldots\}$, $E = \{e_1,e_2,e_3\}$ ve $\tau = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X}\} \cup \{(G_n,E): n \in \{1,2,\ \ldots\}\}$ olsun. X üzerindeki (G_n,E) esnek kümeleri her $e \in E$ için $G_n(e) = \{n, n+1, \ldots\}$ biçiminde tanımlı $G_n: E \longrightarrow P(X)$ dönüşümü ile verilsin. Bu durumda, τ X üzerinde esnek topolojidir. Ayrıca, $\tau_\theta = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X}\}$ dır. O halde, $n = 1$ için $Int_\theta\left(\ Int_\theta\left((G_1,E)\right)\right) = Int_\theta\left(\tilde{X}\right) = \tilde{X} \neq (G_1,E)$ ve $n = 2,3, \ldots$, için $Int_\theta\left(\ Int_\theta\left((G_n,E)\right)\right) = Int_\theta\left(\tilde{\emptyset}\right) = \tilde{\emptyset} \neq (G_n,E)$ olduğundan her $n \in \{1,2, \ldots\}$ için $Int_\theta\left((G_n,E)\right)$ τ_θ $-$esnek açık küme değildir.

Örnek 6.2.13. (Georgiou et. al. ,2013) $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $E = \{e_1,e_2\}$ ve $\tau = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_3\})\}\}$ olsun. Bu durumda, $(F,E) = \{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_3\})\}$ olmak üzere, $Int_\theta\left(\ Int_\theta\left((F,E)\right)\right) = Int_\theta(\{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_3\})\}) \neq (F,E)$ olduğundan $Int_\theta\left((F,E)\right)$ τ_θ $-$esnek açık küme değildir.

Not 6.2.14. Önerme 6.2.10. daki (i) ve (ii) durumların tersinin genelde sağlanmayacağına ait örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 6.2.15. Örnek 6.2.12. de verilen (X,τ,E) esnek topolojik uzayı alındığında $\tau_\theta = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X}\}$ dır. X üzerindeki (G_n,E) esnek kümeleri τ $-$esnek açık küme olmasına rağmen τ_θ $-$ esnek açık küme değildir. Çünkü, $n \in \{1,2,\ \ldots\}$ için

$Int_\theta((G_n,E)) \neq (G_n,E)$ dir. Dolayısıyla, $\tau \not\subset \tau_\theta \not\subset (\tau_\theta)_\theta \not\subset ((\tau_\theta)_\theta)_\theta \not\subset \cdots$elde edilir.

Tanım 6.2.16. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (F,E) X üzerinde esnek küme ve $e \in E$, $x \in X$ olsun. x noktasının her (G,E) e −esnek açık kümesi için $(F,E)\widetilde{\sqcap}Cl((G,E)) \neq \widetilde{\emptyset}$ ise x noktasına (F,E) nin $e-$ esnek $\theta-$kapanış noktası denir. (F,E) nin tüm e −esnek θ −kapanış noktalarının kümesi, kısaca $Cl_\theta(F,e)$ ile gösterilmektedir. Yani:

$$x \in Cl_\theta(F,e) \quad :\Leftrightarrow \quad (\forall(G,E) \in \upsilon_e(x)) : (F,E)\widetilde{\sqcap}Cl((G,E)) \neq \widetilde{\emptyset}$$

Dolayısıyla, Tanım 6.2.16. göz önüne alındığında her $e \in E$ için $F(e) \subset Cl_\theta(F,e)$ olduğu açıktır.

Tanım 6.2.17. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde esnek küme olsun. Her $e \in E$ için $R_{(F,E)}(e) = Cl_\theta(F,e)$ ile tanımlı $R_{(F,E)}: E \longrightarrow P(X)$ dönüşümü ile tanımlanan $(R_{(F,E)},E) = Cl_\theta((F,E))$ esnek kümesine (F,E) nin θ −kapanışı denir.

Dolayısıyla, Tanım 6.2.17. göz önüne alındığında $(F,E) \,\widetilde{\subseteq}\, Cl_\theta((F,E))$ ve $Cl((F,E)) \,\widetilde{\subseteq}\, Cl_\theta((F,E))$ olduğu açıktır.

Örnek 6.2.18.$X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $E = \{e_1,e_2,e_3\}$ ve $\tau = \{\widetilde{\emptyset},\widetilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),\ (e_2,\{h_3\}),\ (e_3,\{h_1,h_3\})\},\ \{(e_1,\{h_3\}),\ (e_2,\{h_1,h_2\}),\ (e_3,\{h_2\})\},$ $\{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_2\}),(e_3,\{h_2\})\}$,$\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2,h_3\}),(e_3,\{h_1,h_3\})\}\}$ olsun. Bu durumda, $\nu_{e_1}(h_1) = \nu_{e_1}(h_2) = \nu_{e_3}(h_1) = \nu_{e_3}(h_3) = \nu_{e_2}(h_3) = \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),$ $(e_2,\{h_3\}),(e_3,\{h_1,h_3\})\}\ \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_2,h_3\}),(e_3,\{h_1,h_3\})\},\widetilde{X}\}$; $\nu_{e_1}(h_3)$ $= \nu_{e_2}(h_1) = \{\{(e_1,\{h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\}),(e_3,\{h_2\})\},\widetilde{X}\}$; $\nu_{e_3}(h_2) = \{\{(e_1,\{h_3\}),(e_2,$ $\{h_1,h_2\}),\ (e_3,\{h_2\})\},\ \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_2\}),(e_3,\{h_2\})\},\widetilde{X}\}$ ve $\nu_{e_2}(h_2) = \{\{(e_1,\{h_3\}),$ $(e_2,\{h_1,h_2\})\},(e_3,\{h_2\})\},\ \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_2\}),(e_3,\{h_2\})\},\ \{(e_1,\{h_1,h_2\}),\ (e_2,\{h_2,$ $h_3\}),(e_3,\{h_1,h_3\})\},\widetilde{X}\}$ dır. $(F,E) = \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\}),\ (e_3,\{h_1,h_3\})\}$

alınırsa, $Cl_\theta(F,e_1)=\{h_1,h_2\}$, $Cl_\theta(F,e_2) = \{h_3\}$, $Cl_\theta(F,e_3)=\{h_1,h_3\}$ elde edilir. Dolayısıyla, $Cl_\theta\big((F,E)\big) = \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\}),(e_3,\{h_1,h_3\})\}$ dür.

Tanım 6.2.19. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. $Cl_\theta\big((F,E)\big)=(F,E)$ olacak biçimdeki (F,E) esnek kümesine esnek θ −kapalı küme denir.

Bu kısım ve sonrasında esnek θ −kapalı kümelerin ailesi $\mathcal{K}_\theta$ ile gösterilecektir.

Önerme 6.2.20. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, aşağıdakiler vardır:

i) $\widetilde{\emptyset},\tilde{X}\in\mathcal{K}_\theta$,

ii) $\mathcal{K}_\theta$ ya ait iki esnek kapalı kümenin birleşimi $\mathcal{K}_\theta$ ya aittir,

iii) $\mathcal{K}_\theta$ ya ait herhangi sayıda esnek kapalı kümenin kesişimi $\mathcal{K}_\theta$ ya aittir.

İspat: Önerme 6.2.9 a benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 6.2.21. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) (F_1,E) ve (F_2,E), X üzerinde esnek küme ve $e\in E$olsun. Bu durumda,

$$Cl_\theta(F_1,e)\bigcup Cl_\theta(F_2,e)=Cl_\theta(F_1\bigcup F_2)(e)$$

dir,

ii) Her $k\in J$ için (F_k,E) X üzerinde esnek küme ve $e\in E$ olsun. Bu durumda,

$$Cl_\theta(\bigcap\{F_k\colon k\in J\},e)\subset\bigcap\{Cl_\theta(F_k,e)\colon k\in J\}$$

dir.

İspat: i) $x\in Cl_\theta(F_1,e)\cup Cl_\theta(F_2,e)$ ve (G,E), x noktasının e- esnek açık komşuluğu olsun. $x\in Cl(F_1,e)$ alalım. Bu durumda, $Cl\big((G,E)\big)\widetilde{\bigcup}(F_1,E)\neq\widetilde{\emptyset}$ dır. Dolayısıyla, $(F_1,E)\widetilde{\bigcap}Cl\Big(\big(G,E\big)\Big)\neq\widetilde{\emptyset}$ olur. Yani, $(F_1\bigcup F_2,E)\widetilde{\bigcap}Cl\Big(\big(G,E\big)\Big)\neq\widetilde{\emptyset}$ dır. O halde, $x\in Cl_\theta(F_1\bigcup F_2,e)$ elde edilir. Diğer yandan, $x\in Cl_\theta(F_1\bigcup F_2,e)$ ve

(G,E) x noktasının e-esnek açık komşuluğu olsun. Bu durumda, $(F_1 \cup F_2, E)\tilde{\cap} Cl((G,E)) \neq \tilde{\emptyset}$ dır. Dolayısıyla, $(F_1,E)\tilde{\cap} Cl((G,E)) \neq \tilde{\emptyset}$ veya $(F_2,E)\tilde{\cap} Cl((G,E)) \neq \tilde{\emptyset}$ elde edilir. O halde, $x \in Cl_\theta(F_1,e) \cup Cl_\theta(F_2,e)$ dir.

ii) $x \in Cl_\theta(\cap\{F_k : k \in J\}, e)$ ve (G,E), x noktasının e-esnek açık komşuluğu olsun. Bu durumda, $(\cap\{F_k : k \in J\}, E)\tilde{\cap} Cl((G,E)) \neq \tilde{\emptyset}$ dır. Dolayısıyla, her $k \in J$ için $(F_k,E)\tilde{\cap} Cl((G,E)) \neq \tilde{\emptyset}$ ve $x \in \cap\{Cl_\theta(F_k,e) : k \in J\}$ elde edilir.

Sonuç 6.2.22. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) $Cl_\theta((F_1,E))\tilde{\cup} Cl_\theta((F_2,E)) = Cl_\theta((F_1 \cup F_2, E))$,

ii) $Cl_\theta(\cap(\{F_k : k \in J\}, E)) \tilde{\subseteq} \tilde{\cap}\{Cl_\theta((F_k,E)) : k \in J\}$.

İspat: Önerme 6.2.21. gereğince ispat açıktır.

Önerme 6.2.23. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, (F,E) X üzerinde esnek küme ve $e \in E$olsun. Bu durumda, $Cl_\theta(F^c,e) = X \backslash Int_\theta(F,e)$ dir.

İspat: $x \in Cl_\theta(F^c,e)$ olsun. Bu durumda, x noktasının her (G,E) $e-$esnek açık komşuluğu için $Cl((G,E))\tilde{\cap}(F,E)^c \neq \tilde{\emptyset}$ dır. $x \in Int_\theta(F,e)$ alalım. O halde, x noktasının $Cl((H,E)) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak biçimde bir (H,E) $e-$esnek açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $Cl((H,E))\tilde{\cap}(F,E)^c = \tilde{\emptyset}$ elde edilir. Bu ise, $x \in Cl_\theta(F^c,e)$ olmasıyla çelişir. Yani, $x \in X \backslash Int_\theta(F,e)$ dir. Tersine, $x \in X \backslash Int_\theta(F,e)$ ve (G,E) x noktasının $e-$esnek açık komşuluğu olsun. Bu durumda, $x \notin Int_\theta(F,e)$ olduğundan x noktasının $Cl((G,E)) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak biçimde (G,E) $e-$esnek açık komşuluğu yoktur. Bu yüzden, $Cl(G,e_0) \not\subset F(e_0)$ olacak biçimde bir $e_0 \in E$ vardır ve buradan $(X \backslash F(e_1)) \cap Cl(G,e_1) \neq \emptyset$ elde edilir. O halde, $(F,E)^c \tilde{\cap} Cl((G,E)) \neq \tilde{\emptyset}$ dır. Yani, $x \in Cl_\theta(F^c,e)$ dir.

Sonuç 6.2.24. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) $Cl_\theta((F,E)^c) = Cl_\theta(F^c,E) = \left(Int_\theta((F,E))\right)^c$,

ii) (F,E) nin esnek $\theta -$ açık küme olması için gerek ve yeter koşul $(F,E)^c$ nin esnek $\theta -$kapalı küme olmasıdır.

İspat: Önerme 6.2.23. ten ispat açıktır.

Önerme 6.2.25. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

i) $\mathcal{K}_\theta \subset \mathcal{K}$,

ii) $\mathcal{K} \supset \mathcal{K}_\theta \supset (\mathcal{K}_\theta)_\theta \supset \cdots$,

iii) X üzerindeki her (F,E) esnek kümesi için $Cl_\theta\big((F,E)\big)$ esnek kapalı kümedir.

Not 6.2.26. $Cl_\theta\big((F,E)\big)$ nin τ_θ ya göre esnek kapalı küme olmayacağına ve $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_\theta$ve $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_\theta \subset (\mathcal{K}_\theta)_\theta \subset \cdots$ durumlarının genelde sağlanmayacağına ait Örnek 6.2.27. verilmiştir.

Örnek 6.2.27. (Georgiou et. al. , 2013) $X = \{h_1, h_2,h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\},\{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_3\})\}\}$ olsun. Bu durumda, $\nu_{e_1}(h_1) = \nu_{e_2}(h_1) = \nu_{e_2}(h_2) = \{\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \tilde{X}\}$ ve $\nu_{e_1}(h_2) = \nu_{e_1}(h_3) = \nu_{e_2}(h_3) = \{\{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_1\})\},X\}$ dır. $(F,E) = \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_2\})\}$ alınırsa, $Cl_\theta(F,e_1) = \{h_1\}$, $Cl_\theta(F,e_2) = \{h_1,h_2\}$ dir. Dolayısıyla, $Cl_\theta\big((F,E)\big) = \{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\} \neq (F,E)$ elde edilir.Yani, $\mathcal{K} \not\subset \mathcal{K}_\theta$ dır. Ayrıca, $Cl_\theta\Big(Cl_\theta\big((F,E)\big)\Big) = Cl_\theta(\{(e_1,\{h_1\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}) \neq (F,E)$ dir. O halde, $Cl_\theta\big((F,E)\big)$ $\tau_\theta$ya göre esnek kapalı küme değildir.

Tanım 6.2.28. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay, $e \in E$ ve $x \in X$ olsun. $x \in F(e)$ olacak biçimdeki (F,E) $\tau_\theta -$esnek açık kümesine x noktasının $e -$esnek $\theta -$ açık komşuluğu denir.

Kolaylık olması açısından, x noktasının tüm $e -$esnek $\theta -$ açık komşuluklarının ailesi kısaca $\upsilon_{\theta_e}(x)$ ile gösterilecektir. Yani:

$$(F,E) \in \upsilon_{\theta_e}(x) \quad :\Leftrightarrow \quad (\exists (F,E) \in \tau_\theta) : x \in F(e)$$

Örnek 6.2.29. $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $E = \{e_1,e_2\}$ ve $\tau = \{\widetilde{\emptyset}, \tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\})\}, \{(e_1,\{h_3\},(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1,h_2\}), \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\}\}$ olsun. Bu durumda, $Int_\theta(\{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1,h_2\})\}) = \widetilde{\emptyset} \neq \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1,h_2\})\}$ ve $Int_\theta(\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X\}) = \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\})\} \neq \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\}$ olduğundan $\{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1,h_2\})\} \notin \tau_\theta$ ve

$\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\} \notin \tau_\theta$ dır. Dolayısıyla, $\tau_\theta = \{\widetilde{\emptyset},\tilde{X}\} \cup \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\})\},\{(e_1,\{h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}\}$ dir. O halde, $\nu_{\theta_{e_1}}(h_1) = \nu_{\theta_{e_1}}(h_2) = \nu_{\theta_{e_2}}(h_3) = \{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2\{h_3\})\},\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\},\tilde{X}\}$ ve $\nu_{\theta_{e_1}}(h_3) = \{\{(e_1,\{h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\},\tilde{X}\}$ ve $\nu_{\theta_{e_2}}(h_1) = \nu_{\theta_{e_2}}(h_2) = \{\{(e_1,\{h_3\},(e_2,\{h_1,h_2\})\},\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\},\tilde{X}\}$ elde edilir.

Önerme 6.2.30. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, (G,E) nin τ_θ −esnek açık küme olması için gerek ve yeter koşul her $e \in E$ ve $x \in G(e)$ için x noktasının $(G_{(e,x)},E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ olacak biçimde $(G_{(e,x)}E)$ e −esnek θ − açık komşuluğunun bulunmasıdır.

İspat: Önerme 6.1.3. ispatına benzer şekilde yapılır.

Önerme 6.2.31. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. (G,E) nin τ_θ −esnek açık küme olması için gerek ve yeter koşul her $e \in E$ ve her $x \in G(e)$ için x noktasının $Cl\left(\left(G_{(e,x)},E\right)\right) \tilde{\subseteq} (G,E)$ olacak biçimde $(G_{(e,x)},E)$ e −esnek açık komşuluğunun bulunmasıdır.

İspat: Önerme 6.1.6. ispatına benzer şekilde yapılır.

6.3. Esnek θ −Süreklilik

Bu bölümde, esnek θ −süreklilik kavramı tanıtılmış ve esnek θ −süreklilikle ilgili bazı özellikler incelenmiştir.

Tanım 6.3.1. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,K) esnek topolojik uzay, $x \in X$ ve $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ dönüşüm olsun. Her $e \in E$ ve $u(x)$ in her (G,K) $p(e)$ − esnek açık komşuluğu için x noktasının $f_{pu}\left(Cl\big((F,E)\big)\right) \tilde{\subseteq} Cl\big((G,K)\big)$ olacak biçimde bir (F,E) e −esnek açık komşuluğu varsa u dönüşümü x noktasında esnek e−θ −süreklidir denir. Yani:

u x de esnek e- θ −sürekli dir $:\Longleftrightarrow$ $(\forall x \in X)(\forall e \in E)\left(\forall (G,K) \in \upsilon_{p(e)}\big(u(x)\big)\right):\big(\exists (F,E) \in \upsilon_e(x)\big):$ $f_{pu}\left(Cl\big((F,E)\big)\right) \tilde{\subseteq} Cl\big((G,K)\big)$

Her $x \in X$ için u dönüşümü esnek $e-\theta$ −sürekliyse u dönüşümü esnek $e-\theta$ −süreklidir denir.

Örnek 6.3.2. $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $Y=\{m_1,m_2,m_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$, $K=\{k_1,k_2\}$ sırasıyla X ve Y üzerindeki evrensel parametre kümeleri olmak üzere $p: E \longrightarrow K$ ve $u: X \longrightarrow Y$ dönüşümleri $p(e_1)=k_1$, $p(e_2)=k_2$ ve $u(h_1)=m_1$, $u(h_2)=m_2$, $u(h_3)=m_3$ biçiminde verilsin. X ve Y üzerindeki esnek topolojiler sırasıyla, $\tau_X = \{\widetilde{\emptyset},\tilde{X}\} \cup \big\{\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\})\}, \{(e_1,\{h_3\}),(e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\}, \{(e_1,X),(e_2,\{h_1,h_3\})\}, \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\{h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}, \{(e_1,\emptyset),(e_2,\{h_1\})\}, \{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_1,h_3\})\}\big\}$ ve $\tau_Y = \{\widetilde{\emptyset},\tilde{Y}\} \cup \big\{\{(k_1,\{m_1,m_2\}),(e_2,\{m_3\})\},\{(k_1,\{m_2\}),(k_2,\{m_3\})\}\big\}$ olsun. Bu durumda, u dönüşümü h_2 noktasında esnek $e_1-\theta$ ve esnek $e_2-\theta$ süreklidir. Çünkü, $\upsilon_{p(e_1)}(m_2) = \big\{\{(k_1,\{m_1,m_2\}),(k_2,\{m_3\})\},\{(k_1,\{m_2\}),(k_2,\{m_3\})\},\tilde{Y}\big\}$ ve $\upsilon_{p(e_2)}(m_2) = \{\tilde{Y}\}$ biçimindedir. Ayrıca, $u(h_2)=m_2$ noktasının tüm (G,K) $p(e_1)$ ve $p(e_2)$ −esnek komşulukları için $f_{pu}\big(Cl(\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_3\})\})\big) = \{(k_1,\{m_1,m_2\}),(k_2,\{m_3\})\} \tilde{\subseteq} Cl\big((G,K)\big)$ dir.

Önerme 6.3.3. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,K) esnek topolojik uzay, $x \in X$ ve $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ iki dönüşüm olsun. Bu durumda, u dönüşümü esnek e- sürekliyse esnek $e-\theta-$ süreklidir.

İspat: $e \in E$, $x \in X$ ve (G,K) $u(x)$ in $p(e)$ −esnek açık komşuluğu olsun. u dönüşümü x noktasında esnek e −sürekli olduğundan x noktasının $f_{pu}\big((F,E)\big) \tilde{\subseteq} (G,K)$ olacak biçimde bir (F,E) e −esnek açık komşuluğu vardır. Önerme 6.1.11. gereğince $f_{pu}\left(Cl\big((F,E)\big)\right) \tilde{\subseteq} Cl\left(f_{pu}\big((F,E)\big)\right)$ dir. Dolayısıyla, $f_{pu}\left(Cl\big((F,E)\big)\right) \tilde{\subseteq} Cl\big((G,K)\big)$ elde edilir. Yani, u dönüşümü esnek $e-\theta-$ süreklidir.

Önerme 6.3.4. (Georgiou et. al. , 2013) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay, $x \in X$ ve $u: X \longrightarrow Y$, $p: E \longrightarrow K$ iki dönüşüm olsun. Her $e \in E$ ve $u(x)$ in her (G, K) $p(e)-$esnek açık komşuluğu için x noktasının $f_{pu}((F, E)) \tilde{\subseteq} Cl((G, K))$ olacak biçimde (F, E) $e-$esnek $\theta-$açık komşuluğu varsa u dönüşümü x noktasında esnek $e - \theta -$ süreklidir.

İspat: $e \in E$ ve (G, K) $u(x)$ in $p(e)-$esnek açık komşuluğu olsun. Bu durumda, hipotez gereğince, x noktasının $f_{pu}((F, E)) \tilde{\subseteq} Cl((G, K))$ olacak biçimde (F, E) $e-$esnek $\theta-$açık komşuluğu vardır. Ayrıca, Önerme 6.2.31. gereğince, x noktasının $Cl\left(\left(H_{(e,x)}, E\right)\right) \tilde{\subseteq} (F, E)$ olacak biçimde bir $\left(H_{(e,x)}, E\right)$ $e-$esnek açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, Teorem 2.1.30. dan $f_{pu}(Cl\left(\left(H_{(e,x)}, E\right)\right)) \tilde{\subseteq} f_{pu}((F, E)) \tilde{\subseteq} Cl((G, K))$ elde edilir. O halde, u dönüşümü x noktasında esnek $e - \theta -$ süreklidir.

Önerme 6.3.5. (Georgiou et. al. , 2013) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay, $x \in X$ ve $u: X \longrightarrow Y, p: E \longrightarrow K$ iki dönüşüm olsun. Her (G,K) $\tau_Y -$ esnek açık kümesi için ${f_{pu}}^{-1}\left(Cl((G, K))\right)$ $(\tau_X)_\theta$ $-$esnek açık küme ise u dönüşümü esnek $e - \theta -$süreklidir.

İspat: $x \in X$ olsun. Önerme 6.3.4. ü kullanarak her $e \in E$ ve $u(x)$ in her (G, K) $p(e)-$esnek komşuluğu için x noktasının $f_{pu}((F, E)) \tilde{\subseteq} Cl((G, K))$ olacak biçimde bir (F, E) $e-$esnek $\theta-$açık komşuluğunun var olduğunu göstermeliyiz. $e \in E$ ve (G, K) $u(x)$ in $p(e) -$ esnek açık komşuluğu olsun. Bu durumda, $u(x) \in G(p(e))$ veya $x \in u^{-1}\left(G(p(e))\right) \subset u^{-1}\left(Cl\left(G, p\,(e)\right)\right)$ dir. $(F, E) = {f_{pu}}^{-1}\left(Cl((G, K))\right)$ olduğunu göstermek için her $e \in E$ için $F(e) = u^{-1}(Cl(G, p\,(e)))$ olduğunu göstermeliyiz. Yani, $x \in u^{-1}(Cl(G, p\,(e))) = F(e)$ olduğunu gösterelim. ${f_{pu}}^{-1}\left(Cl((G, K))\right)$ $(\tau_X)_\theta$ $-$esnek açık küme olduğundan hipotez gereğince, x noktasının $e - \theta$ esnek açık komşuluğudur. Ayrıca, Önerme 2.1.33.ten $f_{pu}((F, E)) = f_{pu}\left({f_{pu}}^{-1}(Cl((G, K)))\right) \tilde{\subseteq} Cl((G, K))$ dir. O halde, u dönüşümü x noktasında esnek $e - \theta -$ süreklidir.

Sonuç 6.3.6. (Georgiou et. al. , 2013) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay, $x \in X, p : E \longrightarrow K,\ u: X \longrightarrow Y$ iki dönüşüm olsun. Her (L, K) $\tau_Y -$ esnek kapalı kümesi için ${f_{pu}}^{-1}\big((L, K)\big)$ $(\tau_X)_\theta$ $-$esnek kapalı küme ise u dönüşümü esnek $e - \theta -$ süreklidir.

Önerme 6.3.7. (Georgiou et. al. , 2013) (X, τ_X, E), (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzay, $x \in X$, $p: E \longrightarrow K$, $u: X \longrightarrow Y$ iki dönüşüm olsun. u dönüşümü esnek $e - \theta$ $-$sürekli ise X üzerindeki her (F, E) esnek kümesi için $f_{pu}\left(Cl_\theta\big((F, E)\big)\right) \tilde{\subseteq} Cl_\theta\left(f_{pu}\big((F, E)\big)\right)$ dir.

İspat: Her $e_Y \in K$ için

$$M(e_Y) = \begin{cases} \bigcup\{u\big(Cl_\theta(F, e)\big): e \in p^{-1}(e_Y)\}, & p^{-1}(e_Y) \neq \emptyset, \\ \emptyset &, \quad p^{-1}(e_Y) = \emptyset. \end{cases}$$

ve

$$N(e_Y) = \begin{cases} \bigcup\{u\big(F(e)\big): e \in p^{-1}(e_Y)\}, & p^{-1}(e_Y) \neq \emptyset, \\ \emptyset &, \quad p^{-1}(e_Y) = \emptyset. \end{cases}$$

olmak üzere, $f_{pu}\left(Cl_\theta\big((F, E)\big)\right) = (M, K)$ ve $f_{pu}\big((F, E)\big) = (N, K)$ alalım. İspat için $(M, K) \tilde{\subseteq} Cl_\theta\big((N, K)\big)$ olduğunu ya da buna denk olarak her $e_Y \in K$ için $M(e_Y) \subset Cl_\theta(N, e_Y)$ olduğunu göstermeliyiz. $e_Y \in K$ olsun. $p^{-1}(\{e_Y\}) = \tilde{\emptyset}$ ise$M(e_Y) = Cl_\theta(N, e_Y) = \emptyset$ dir. $p^{-1}(\{e_Y\}) \neq \tilde{\emptyset}$ olsun ve $y \in M(e_Y)$ alalım. Bu durumda, $y \in u\big(Cl_\theta(F, e)\big)$ olacak biçimde bir $e \in p^{-1}(\{e_Y\})$ vardır. $x \in Cl_\theta(F, e)$ olmak üzere, $y = u(x)$ olsun. $y \in Cl_\theta(N, e_Y)$ olduğunu göstermek için y nin (G, K) e_Y $-$esnek komşuluğunu alalım. $(N, K) \tilde{\cap} Cl\big((G, K)\big) \neq \tilde{\emptyset}$ olduğunu gösterirsek ispat biter. $e_Y = p(e)$ ve u x noktasında esnek $e - \theta$ $-$sürekli olduğundan x noktasının $f_{pu}\left(Cl\big((H, E)\big)\right) \tilde{\subseteq} Cl\big((G, K)\big)$ olacak biçimde (H, E) e $-$esnek açık komşuluğu vardır. Ayrıca, $x \in Cl_\theta(F, e)$ olduğundan $Cl\big((H, E)\big) \tilde{\cap}$ $(F, E) \neq \tilde{\emptyset}$ dır. Dolayısıyla, Teorem 2.1.30.dan $f_{pu}\left((F, E) \tilde{\cap} Cl\left((H, E)\right)\right) \tilde{\subseteq} f_{pu}$

$\big((F,E)\big)\ \tilde{\cap}\ f_{pu}\Big(Cl\big((H,E)\big)\Big) = (N,K)\ \tilde{\cap}\ f_{pu}\Big(Cl\big((H,E)\big)\Big)$ dir ve $(N,K)\ \tilde{\cap}\ f_{pu}\Big(Cl\big((H,E)\big)\Big) \neq \tilde{\emptyset}$ elde edilir. O halde, $f_{pu}\Big(Cl\big((H,E)\big)\Big) \tilde{\subset} Cl\big((G,K)\big)$ olduğundan $(N,K)\tilde{\cap}Cl\big((G,K)\big) \neq \tilde{\emptyset}$ dır.

Sonuç 6.3.8. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,K) esnek topolojik uzay olsun. $p{:}\,E \longrightarrow K$, $u{:}\,X \longrightarrow Y$ dönüşümleri verilsin. u dönüşümü esnek $e-\theta-$sürekli ise Y üzerindeki her (G,K) esnek kümesi için $Cl_\theta\Big({f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)\Big) \tilde{\subset} {f_{pu}}^{-1}\Big(Cl_\theta\Big(\big(G,K\big)\Big)\Big)$ dir.

İspat: (G,K) Y üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda, Önerme 6.3.7. den $f_{pu}\bigg(Cl_\theta\Big({f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)\Big)\bigg) \tilde{\subset} Cl_\theta\bigg(f_{pu}\Big({f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)\Big)\bigg) \tilde{\subset} Cl_\theta\Big(\big(G,K\big)\Big)$ dir. O halde, Önerme 2.1.34. ten $Cl_\theta\Big({f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)\Big) \tilde{\subset} {f_{pu}}^{-1}\Big(f_{pu}\big(Cl_\theta\big({f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big)\big)\big)\Big) \tilde{\subset} {f_{pu}}^{-1}\Big(Cl_\theta\big((G,K)\big)\Big)$ elde edilir.

Önerme 6.3.9. (Georgiou et. al. , 2013) (X,τ_X,E), (Y,τ_Y,K) esnek topolojik uzay, $u{:}\,X \longrightarrow Y$ ve $p{:}\,E \longrightarrow K$ iki dönüşüm ve u dönüşümü esnek $e-\theta-$ sürekli olsun. Bu durumda, her (G,K) τ_Y-esnek açık kümesi için ${f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big) \tilde{\subset} Int_\theta\Big({f_{pu}}^{-1}\big(Cl_\theta\big((G,K)\big)\big)\Big)$ dir.

İspat: Her $e \in E$ için $F(e) = u^{-1}\Big(G\big(p(e)\big)\Big)$ ve $H(e) = u^{-1}\Big(Cl_\theta\big(H(p(e))\big)\Big)$ olmak üzere, ${f_{pu}}^{-1}\big((G,K)\big) = (F,E)$, ${f_{pu}}^{-1}\Big(Cl_\theta\big((G,K)\big)\Big) = (H,E)$ alalım. $(F,E) \tilde{\subset} Int_\theta\big((H,E)\big)$ olduğunu ya da buna denk olarak her $e \in E$ için $F(e) \subset Int_\theta(H,e)$ olduğunu göstermeliyiz. $e \in E$ için $x \in F(e)$ olsun. Bu durumda, $u(x) \in u\big(F(e)\big)$ dir. Ayrıca, u dönüşümü x noktasında esnek $e-\theta-$ sürekli olduğundan $u(x)$ in her (G,K) $p(e)-$esnek komşuluğu için x noktasının $f_{pu}\Big(Cl\big((M,E)\big)\Big) \tilde{\subset} Cl\big((G,K)\big)$ olacak biçimde (M,E) $e-$esnek açık komşuluğu vardır. O halde, Teorem 2.1.30, Teorem 2.1.32 Önerme 2.1.34 ve

$f_{pu}\left(Cl\big((M,E)\big)\right) \tilde{\subseteq} Cl\big((G,K)\big)$ olduğundan $Cl\big((M,E)\big) \tilde{\subseteq} f_{pu}{}^{-1}\big(f_{pu}(Cl\big((M,E))\big)\big) \tilde{\subseteq} f_{pu}{}^{-1}\left(Cl\big((G,K)\big)\right) \tilde{\subseteq} f_{pu}{}^{-1}(Cl_{\theta}\left((G,K)\right)\big)$ = (H,E) elde edilir.

7.SONUÇ

Molodstov un 1999 yılında ortaya attığı esnek küme teorisiyle ilgili günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Esnek topolojik uzay kavramı ise, 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından ortaya atılmıştır. Bu konuyla ilgili çalışmalar da kısa süre içerisinde gelişme göstermiştir.

Biz de bu tezde esnek küme, esnek topolojik uzay kavramları ile bu kavramların bazı özelliklerini verdik. Ayrıca, esnek komşuluk özellikleri, esnek süreklilik, esnek $\theta -$topoloji ve esnek $\theta -$süreklilik kavramları ile ilgili literatürdeki bilgilerin sunulmasını amaçladık.

Esnek topolojik uzayla ilgili çalışmaların ileride çok daha fazla gelişme göstereceğini düşünüyoruz. Ayrıca, belirsizlikleri yok etmedeki elverişliliğinden dolayı disiplinler arası çalışmalarda da esnek küme teorisi daha çok kullanılacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ali M. I. , Feng F. , Liu, X. , Min W.K. and Shabir M. , 2009, On some new operations in soft set theory, *Computer and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.

Ali M. I. , 2012**,** Another view on reduction parameters in soft sets, *Applied Soft Computing*, 12(6), 1814-1821.

Atanassov, K. , 1994, Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 64, 159-174.

Aygünoğlu, A. and Aygün, H. , 2011, Some notes on soft topological spaces, *Neural Comput. Applic.* , Kocaeli, DOI 10. 1007/s, 00521-011-0722-3.

Das. S. and Samantha, S.K. , 2013, Soft metric, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(1) ,77-94.

Feng, F. , Jun, Y.B. and Zhao, X. Z. , 2008, Soft semirings, *Computer and Mathematics with Applications*, 56, 2621-2628.

Gau, W. L. and Buehrer, D. J. , 1993, Vague sets, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* 23(2), 610-614.

Georgiou D. N. , Megaritis, A. C. and Petropoulos, V. I. , 2013, On Soft Topological Spaces, *Applied Mathematics and Information Sciences,* 7(5), 1889-1901.

Georgiou D. N. and Megaritis, A.C. , 2014, Soft Set Theory and Topology, *Applied General Topology*, 14.

Kharal, A. and Ahmad, B. , 2011, Mappings on soft classes, *New Mathematics and Natural Computation,* Vol. 7 No. 3, 471-481.

Kolmogorov, A.N. , 1933, The Foundations of the theory of probability, *Chelsea Publishing Company*: New York.

Lin F. , Soft connected spaces and soft paracompact spaces, 2013, *Int. J. Math.*

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Comput. Sci. Eng. , 7(2) , 37-43.

Maji P. K. , Biswas R. and Roy A. R. , 2003, Soft set theory, *Computer and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.

Molodstov, D. , 1999, Soft set theory- first results, *Computer and Mathematics with Applications*, 37, 19-31.

Nazmul S. K. and Samanta, S. K. , 2013, Neighborhood properties of soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, ISSN: 2093–9310.

Nazmul S.K. and Samanta, S. K. , 2014, Some properties of soft topologies and group soft topologies, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,* ISSN 2093–9310.

Pawlak, Z. , 1982, Rough sets, *International Journal of Computer Science*, 11, 341-356.

Pei, D. and Miao, D. , 2005, From soft sets to information systems, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.

Shabir, M. and Naz, M. , 2011, On soft topological spaces, *Computer and Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799.

Zadeh, L. A. , 1965, Fuzzy sets, *Information and control*, 8, 338-353.

Zorlutuna, I. , Akdağ, M. , Min, W. K. and Atmaca, S. , 2012, Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,* 3(2) , 171-185.

ÖZGEÇMİŞ

16.09.1988 tarihinde Çanakkale'de doğdu. İlk ve orta öğrenimlerini Turgut Reis İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Lise öğrenimini Çanakkale İbrahim Bodur Anadolu Lisesi'nde (Y.D.A) tamamladı. Matematik bölümündeki lisans eğitimini Balıkesir Üniversitesi'nde tamamladı. Daha sonra, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. Halen öğrenimine burada devam etmektedir.