T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

KONİK METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

BURCU ALPER

Matematik Anabilim Dalı Adı

İzmir
2019

T.C.

EGE ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

KONİK METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

Burcu ALPER

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Yüksek Lisans Programı

İzmir

2019

Burcu ALPER tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan **"Konik Metrik Uzaylar Üzerine"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **06.12.2019** tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Doç .Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER**	
Raportör Üye	**: Prof. Dr. Oya ÖZBAKIR**	
Üye	**: Dr. Öğr. Üyesi Esra DALAN YILDIRIM**	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Konik Metrik Uzaylar Üzerine"** başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

06/12/2019

Burcu Alper

B. Alper

ÖZET

Konik Metrik Uzaylar Üzerine

ALPER, Burcu

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER
December 2019, 62 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin konusu tanıtılmış, ikinci bölümde ise bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir

Üçüncü bölümde, Huang ve Zhang tarafından, 2007 yılında tanımlanan, metrik uzayların genellemesi olan konik metrik uzaylar kavramıyla ilgili temel tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde $\Im$ ve $\Im^*$-yakınsaklık ile $\Im$ ve $\Im^*$-ıraksaklık kavramları verilmiş ve bu kavramlar konik metrik uzaylarda da incelenmiştir.

AnahtarKelimeler : Konik Metrik Uzay, Yakınsaklık, $\Im$-Yakınsaklık, $\Im$-Iraksaklık

ABSTRACT

On Cone Metric Spaces

ALPER, Burcu

MSc. in Mathematics Department
Supervisor: Ass. Doç.Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER

December 2019, 62 pages

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced, in the second chapter devoted to basic definitions and theorems that are used in this study.

In the third chapter, the fundamental definitions and theorems related the cone metric spaces which is one of the generalizations of metric spaces and was introduced in 2007 by Huang and Zhang are handled.

In fourth chapter, the concept of $\Im$ and $\Im^*$-convergence, $\Im$ and $\Im^*$-divergence are introduced and this concepts also are investigated on cone metric spaces.

Key Words: Cone Metric Spaces, Convergence, $\Im$-Convergence, $\Im$-Divergence.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması metrik uzayların genellemesi olan konik metrik uzaylar üzerine olmuştur. Yüksek lisans ders döneminde aldığım İdeal Topolojik Uzaylar dersi ile $\mathfrak{I}$-yakınsaklık konusunu tanımış olmak ve danışman hocam sayın Doç.Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER'in yönlendirmesiyle, bu tezde konik metrik uzaylarda $\mathfrak{I}$ -yakınsaklık konusuna da değinebilmem mümkün olmuştur.

Çalışma konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın hazırlanma sürecinin her aşamasında bilgilerini, tecrübelerini ve değerli zamanlarını esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan değerli hocam Sayın Doç.Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER'e teşekkürü bir borç bilirim.

İZMİR
06/12/2019

Burcu Alper

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
θ	Sıfır Vektörü
$\mathbf{B}$	Banach Uzay
$\mathcal{C}([a,b])$	$[a,b]$ aralığında türevi sürekli, reel değişkenli, reel değerli fonksiyonlar uzayı
l_p	$\{\{x_n\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_n\rvert^p < \infty\}$, $0 < p < \infty$
$\lVert . \rVert$	norm
$\mathcal{P}$	Konik
$Int\mathcal{P}$	P nin içi
L	P nin Normal Sabiti
(X,d)	Metrik Uzay
KMU	Konik Metrik Uzay

1 GİRİŞ

Metrik uzay tanımı ilk olarak 1906 yılında Maurice Frechet tarafından verilmiştir. Bugüne kadar metrik uzay kavramı genelleştirilerek yeni birçok uzay tanımlanmış, literatüre çok sayıda çalışma kazandırılmıştır. Metrik uzayların genelleştirilmişi olan uzaylardan bazıları; fuzzy metrik uzaylar, menger uzaylar, modular metrik uzaylar, konik metrik uzaylardır.

2007 yılında Huang ve Zhang metrik uzayların genellemesi olan konik metrik uzay kavramını tanımlamışlardır. Bu tanımlamayı metrik uzay tanımında yer alan $\mathbb{R}$ Banach uzay yerine sıralı Banach uzayı alarak yapmışlardır. Bu tanımda X üzerindeki bir konik metrik sıralı bir Banach uzayı üzerinde değer alır. Sıralı Banach uzayı elde edebilmek için de koniklerden yararlanılmıştır. Huang ve Zhang konik metrik uzaylarda yakınsaklık kavramını da çalışmışlardır. Daha sonra birçok matematikçi tarafından konik metrik uzaylar üzerine günümüze kadar farklı çalışmalar yapılmıştır.

Bu tezin amacı konik metrik uzaylar hakkında bilgi vermektir. Tezde ilk olarak bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Tezin diğer bölümünde konik metrik uzayların genel tanım ve teoremleri açıklanmış, örnekleri verilmiştir.

Ayrıca, $\Im$ bir ideal iken dizilerin $\Im$-yakınsaklığı kavramı verilmiştir. Buna ek olarak $\Im$-yakınsaklıkla ilişkili olan $\Im^*$-yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve $\Im$-yakınsaklık ile $\Im^*$-yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak $\Im$-yakınsaklık konusu konik metrik uzaylar üzerinde çalışılmış ve örnekler verilmiştir. $\Im$-ıraksaklık kavramına da değinilmiş, konik metrik uzaylardaki tanım ve teoremleri verilmiştir.

2 GENEL BİLGİLER

Tanım 2.0.1. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *X boştan farklı bir küme, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $(x, y) \longrightarrow d(x, y)$ dönüşümü her x,y,z $\in X$ için ,*

$M1)$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$M2)$ $d(x, y) = d(y, x)$

$M3)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa, d dönüşümüne X üzerinde metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 2.0.2. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *(X, d) metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun.*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı küre denir.

Tanım 2.0.3. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *Bir (X, d) uzayında $A \subset X$ ve $x_0 \in A$ olsun. $B(x_0, r) \subset A$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa x_0 a A nın iç noktası denir.*

Tanım 2.0.4. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *Bir P cismi üzerinde bir X vektör uzay olsun. $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ için*

(N1) $\|x\| \geq 0$ (pozitiflik aksiyomu)

(N2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N3) $\alpha \in F$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ dönüşümüne X üzerinde bir norm denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.0.5. ***(Kumar, A. and Dey, A.,2008)*** *(X, d) metrik uzay, $\{x_n\} \subset$*

X bir dizi olsun. Eğer $n \to \infty$ için $d(x_n, x) \to \infty$ olacak şekilde $x \in X$ elemanı varsa $\{x_n\}$ dizisi ıraksaktır denir.

Tanım 2.0.6. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *(X, d) metrik uzay, $(x_n) \subset X$ dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $n > n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ile gösterilir.*

Teorem 2.0.1. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *(X, d) metrik uzay, (x_n) X de bir dizi olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*
$i)$ (x_n) dizisinin $x \in X$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $n \to \infty$ iken $d(x_n, x) \to 0$ olmasıdır.
$ii)$ Yakınsak her dizinin limiti tektir.
$iii)$ Yakınsak her dizi sınırlıdır.
$iv)$Yakınsak bir dizinin her alt dizisi yakınsaktır.

Tanım 2.0.7. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *(X, d) metrik uzay, (x_n) X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $n, m > n_0$ özelliğindeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.*

Uyarı 2.0.1. *Yakınsak her dizi Cauchy dizisidir.*

Tanım 2.0.8. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu metrik uzaya tam metrik uzay denir.*

Tanım 2.0.9. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *X, normlu doğrusal uzay olsun. X normlu doğrusal uzayı tam ise X ye tam normlu uzay ya da Banach uzay denir.*

Örnek 2.0.1. ***(Kreyszıg, E., 1978)*** *Reel $\mathcal{C}[a, b]$ olmak üzere her $f \in \mathcal{C}[a, b]$ için*

$$\|f\|_\infty = sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

normu verilsin. Bu norm ile $\mathcal{C}[a, b]$ bir Banach uzaydır.

Tanım 2.0.10. ***(Fridy, J.A., 1985)*** *K, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi n den büyük olmayan elemanlarının* *sayısını göstermek üzere,*

$$d(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

limiti varsa $d(K)$ sayısına K kümesinin yoğunluğu (doğal yoğunluğu) denir.

Tanım 2.0.11. ***(Fast, H., 1951)*** *$x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her ε için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon| = 0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |k \leq n : |x_k - L| < \varepsilon| = 1$$

olacak şekilde L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - lim x_k = L$ ile gösterilir.

Uyarı 2.0.2. *Yakınsak herhangi bir dizi istatistiksel yakınsaktır.*

Tanım 2.0.12. ***(Engelking, R., 1989)*** *(X, τ) bir topolojik uzay,$x \in X$ ve $\mathcal{B}_x$ de x noktasını içeren açık kümelerin bir koleksiyonu olsun. $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \tau$ için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}_x$ varsa $\mathcal{B}_x$ koleksiyonuna x noktasının bir yerel tabanı denir.*

Tanım 2.0.13. ***(Engelking, R., 1989)*** *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir yerel tabanı varsa (X, τ) uzayına birinci sayılabilir uzay denir.*

Tanım 2.0.14. ***(Engelking, R., 1989)*** *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde x in komşuluğu bir $U \in \tau$ ve y nin komşuluğu bir $V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) uzayına Hausdorff uzay denir.*

3 KONİK METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

3.1 Konik Metrik Uzayların Temel Tanım ve Özellikleri

Bu bölümde reel sayılar Banach uzayı yerine, reel sayılardan daha genel olan sıralı Banach uzayı alınarak, Huang ve Zhang tarafından ortaya atılmış olan metrik uzayların bir genellemesi incelenecektir. Sıralı Banach uzayı elde edebilmek için, üzerinde tanımlı konikler kullanılacaktır.

Bu tezde tüm gösterimlerde $\mathbf{B}$ bir Banach uzayı, $\mathcal{P}$ kümesi $\mathbf{B}$ de içi boştan farklı olan bir konik ve $\preceq$ sembolü $\mathcal{P}$ ye göre kısmi sıralama olarak ifade edilecektir.

Tanım 3.1.1. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** $\mathbf{B}$ *bir reel Banach uzayı,* $\mathbf{B}$*'nin bir alt kümesi* $\mathcal{P}$ *ve* θ *sıfır vektörü olsun.*

i) $\mathcal{P}$ *kapalı, boştan farklı ve* $\mathcal{P} \neq \{\theta\}$,

ii) Her $x, y \in \mathcal{P}$ *için* $\lambda x + \mu y \in \mathcal{P}$ *olacak şekilde bir* $\lambda, \mu \geq 0$ *reel sayısı vardır.*

iii) $x \in \mathcal{P}$ *ve* $-x \in \mathcal{P} \Rightarrow x = \theta$

özellikleri sağlanırsa $\mathcal{P}$*'ye konik denir.*

Örnek 3.1.1. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** $\mathbf{B} = \mathbb{R}^3$ *olmak üzere* $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbf{B} : x,y,z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ *kümesi* $\mathbf{B}$ *'de bir koniktir. Çünkü,*

i) $\mathcal{P}$ *kapalı ve* $0 = (0,0,0) \in \mathcal{P}$ *olduğundan* $\mathcal{P}$ *boştan farklıdır.*

$(x,y,z) = (0,1,1) \in \mathcal{P}$ *alınırsa* $\mathcal{P}$ *sıfırdan farklıdır.*

ii)$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $x = (x_1, y_1, z_1)$, $y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{P}$ *olsun.* $\mathcal{P}$ *nin tanımından* $\lambda x_1 \geq 0$, $\lambda y_1 \geq 0$, $\lambda z_1 \geq 0$ $\mu x_2 \geq 0$, $\mu y_2 \geq 0$, $\mu z_2 \geq 0$ *dir.*

$\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \in \mathcal{P}$ *elde edilir.*

iii) $t = (x,y,z)$, $-t = (-x,-y,-z) \in \mathcal{P}$ *olsun.*

$x, y, z \geq 0$ *ve* $-x, -y, -z \geq 0$ *olduğundan* $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, -x \geq 0, -y \geq 0, -z \geq 0$ *dir. Bu da* $x = 0$, $y = 0$ *ve* $z = 0$ *anlamına gelir.* $t = (0,0,0) \in \mathcal{P}$ *dir.*

Örnek 3.1.2. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$ *olmak üzere* $\mathcal{P} = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n\}$ *kümesi* $\mathbf{B}$*' de bir koniktir.*

Örnek 3.1.3. ***(Rezapour, S. and Hamlbarani, R., 2008)*** $\mathbf{B} = (\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0, \infty], \|\|_\infty)$ *Banach uzay olsun.* $\mathcal{P} = \{f \in \mathbf{B} \mid f(t) \geq 0\}$ *kümesi* $\mathbf{B}$*' de bir koniktir. Çünkü,*

i) $\mathcal{P}$ *kapalı ve* $f = 0 \in \mathcal{P}$ *alınırsa* $\mathcal{P}$ *boştan farklıdır.*

$f = \dfrac{1}{2} \in \mathcal{P}$ *alınırsa* $\mathcal{P}$ *sıfırdan farklıdır.*

ii) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda, \mu \geq 0$ $f, g \in \mathcal{P} \Rightarrow f \geq 0$ *ve* $g \geq 0$ *dır.*

Her $0 \leq t \leq 1$ *için* $(\lambda f)(t) \geq 0$ *ve* $(\mu g)(t) \geq 0$ *dır. O halde* $\lambda f + \mu g \in \mathcal{P}$ *dir.*

iii) $\mathcal{P}$ *nin tanımından* f , $-f \in \mathcal{P}$ *ise* $f = 0$ *elde edilir.*

Örnek 3.1.4. ***(Rezapour, S. and Hamlbarani, R., 2008)*** $\mathbf{B} = l_1 = \{\{x_n\} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ *ve* $\mathcal{P} = \{\{x_n\}_{n\geq 1} \in \mathbf{B} :$ *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \geq 0\}$ *olmak üzere* $\mathcal{P} \subset \mathbf{B}$ *kümesi bir koniktir. Çünkü;*

i) $\mathcal{P}$ *kapalı,* $\mathcal{P}$ *boştan farklı ve* $\mathcal{P}$ *sıfırdan farklıdır.*

ii) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda, \mu \geq 0$, $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{P}$ *olsun.*

Her $n \in \mathbb{N}$ *ve* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *için* $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0 \Rightarrow \lambda x_n \geq 0$, $\mu y_n \geq 0$

$\Rightarrow \lambda x_n + \mu y_n \geq 0 \Rightarrow \lambda(x_n)_{n\geq 1} + \mu(y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{P} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in P$ *dir.*

iii) $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $-x = (-x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{P}$ *olsun.*

Her $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \geq 0$ *ve* $-x_n \geq 0 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow x = 0$ *olur. O halde* $\mathcal{P}$ *koniktir.*

Tanım 3.1.2. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** $\mathbf{B}$ *Banach uzay ve bir* $\mathcal{P} \subset \mathbf{B}$ *koniğinde,*

$$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{P}$$

biçiminde tanımlı $\preceq$ *bağıntısı* $\mathcal{P}$*'ye göre bir kısmi sıralama bağıntısıdır.* $x \preceq y$ *fakat* $x \neq y$ *ise bu durum* $x \prec y$ *ile ifade edilir.* $x \ll y$ *gösterimi* $y - x \in Int\mathcal{P}$ *anlamına gelir.*

Teorem 3.1.1. ***(Huang, H. and Xu, S.,2015)*** *$\mathbf{B}$ bir reel Banach uzayı, $\mathcal{P}$ kümesi $\mathbf{B}$'de bir konik olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

i) $Int\mathcal{P} \neq \emptyset$

ii)Eğer $x \in \mathcal{P}$ ve $y \in Int\mathcal{P}$ ise $x + y \in Int\mathcal{P}$ dir. Yani $\mathcal{P} + Int\mathcal{P} \subseteq int\mathcal{P}$ dir.

iii)Eğer $x \in Int\mathcal{P}$, $\lambda > 0$ ise $\lambda x \in Int\mathcal{P}$ yani $\lambda Int\mathcal{P} \subseteq Int\mathcal{P}$ dir.

Tanım 3.1.3. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *$\mathbf{B}$ bir reel Banach uzayı, $\mathcal{P}$ de $\mathbf{B}$'de bir konik olsun. Sabit $L > 0$ sayısı, her $x, y \in \mathbf{B}$ için $\theta \preceq x \preceq y$ iken $\|x\| \leq L\|y\|$ koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{P}$'ye normal denir.*

Yukarıdaki özelliği sağlayan en küçük pozitif L tamsayısına $\mathcal{P}$'nin normal sabiti denir.

Örnek 3.1.5. ***(Rezapour, S. and Hamlbarani, R., 2008)*** *$\mathbf{B} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$ ve $\mathcal{P} = \{f \in \mathbf{B} \mid f(t) \geq 0\}$ koniği verilsin. $\mathcal{P}$, L=1 normal sabitli bir koniktir. Çünkü,*

$\theta \preceq f \preceq g$ biçimindeki $f, g \in \mathbf{B}$ alınsın. $\|f\| = sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$, $\|g\| = sup_{t\in[0,1]}|g(t)|$ dir. $0 \preceq f \preceq g$ olduğundan $g - f \succeq 0$, $g - f \in P$ dir.

Her $t \in [0,1]$ için $f(t) \leq g(t) \Rightarrow |f(t)| \leq |g(t)| \Rightarrow sup_{t\in[0,1]}|f(t)| \leq sup_{t\in[0,1]}|g(t)| \Rightarrow \|f(t)\| \leq \|g(t)\|$ olup $\|f(t)\| \leq L\|g(t)\|$ olacak şekilde $L = 1$ dir. Yani, $\mathcal{P}$, $L = 1$ normal sabitli bir koniktir.

Tanım 3.1.4. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *Üstten sınırlı ve monoton artan her dizi yakınsak ise $\mathcal{P}$ koniğine regüler konik denir. Yani, $\{x_n\}$ dizisi için;*

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ... \leq y$$

olacak şekilde bir $y \in \mathbf{B}$ varsa, bu durumda $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbf{B}$ vardır.

Benzer şekilde bir $\mathcal{P}$ koniğinin regüler olması için gerek ve yeter koşul, monoton azalan ve alttan sınırlı her dizinin yakınsak olmasıdır.

Tanım 3.1.5. ***(Ilic, D. and Rakocevic, V.,2009)*** *$\mathcal{P}$ kümesi* $\mathbf{B}$ *Banach uzayında bir konik olsun.*

i) Her $a, b \in \mathbf{B}$ için $\theta \preceq a \preceq b$ iken $\|a\| \leq \|b\|$ oluyorsa $\mathcal{P}$'ye monoton denir.

ii) Her $a, b \in \mathbf{B}$ için $\theta \preceq a \preceq b$ olmak üzere $\|a\| \leq L\|b\|$ olacak şekilde bir $L > 0$ varsa $\mathcal{P}$'ye yarı monoton denir.

Teorem 3.1.2. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *Her regüler konik normaldir.*

İspat: Bir regüler $\mathcal{P}$ koniğinin normal olmadığı kabul edilsin.

$\mathcal{P}$ normal olmadığından her $n \geq 1$ için $t_n - s_n \in \mathcal{P}$ ve $n^2 \mid\mid t_n \mid\mid < \mid\mid s_n \mid\mid$ olacak şekilde $t_n, s_n \in \mathcal{P}$ seçilebilir.

Her $n \geq 1$ için $y_n = \frac{t_n}{||t_n||}$ ve $x_n = \frac{s_n}{||t_n||}$ dizileri tanımlansın.

Bu durumda $x_n, y_n, y_n - x_n \in \mathcal{P}$, her $n \geq 1$ için $\mid\mid y_n \mid\mid = 1$ ve $n^2 < \mid\mid x_n \mid\mid$ gerçekleşir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mid\mid y_n \mid\mid$ serisi yakınsak olup, $\mathbf{B}$ bir Banach uzay olduğundan her mutlak yakınsak seri yakınsak olacağından $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n$ yakınsaktır. $\mathcal{P}$ kapalı olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$ olacak şekilde $y \in \mathcal{P}$ vardır. Her n pozitif tam sayısı için $\frac{1}{n^2} x_n \leq \frac{1}{n^2} y_n$ olduğundan

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{1}{2^2} x_2 \leq x_1 + \frac{1}{2^2} x_2 + \frac{1}{3^2} x_3 \leq ... \leq y$$

olur. $\mathcal{P}$ regüler olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$ serisi yakınsaktır.

Böylece $lim_{n \to \infty} \frac{||x_n||}{n^2} = 0$ bulunur. Bu da her $n \geq 1$ için $n^2 < \mid\mid x_n \mid\mid$ olması ile çelişir. O halde her regüler konik normaldir.

Teorem 3.1.3. ***(Rezapour, S. and Hamlbarani, R., 2008)*** *Normal sabiti $L < 1$ olan bir normal konik yoktur.*

İspat: (X, d) konik metrik uzay ve $\mathcal{P}$, $L < 1$ normal sabitli bir normal konik olsun. $L < 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \varepsilon < 1$ sayısı ve sıfırdan farklı $\lambda \in \mathcal{P}$ alınsın. $(1 - \varepsilon)\lambda \leq \lambda$ iken $(1 - \varepsilon)\|\lambda\| > L\|\lambda\|$ dır. Bu da P koniğinin mormalliği ile çelişir.

Tanım 3.1.6. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *X boştan farklı bir küme ve $\mathbf{B}$ reel Bnach uzayı olsun. $d : X \times X \to \mathbf{B}$ fonksiyonu,*

(d1) Her $x, y \in X$ için $\theta < d(x,y)$ ve $d(x,y) = \theta \iff x = y$

(d2) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$

(d3) Her $x, y.z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

özelliklerini sağlarsa d ye X üzerinde bir konik metrik ve (X,d) ye de konik metrik uzay denir. Bu tezde konik metrik uzay kısaca KMU ile gösterilecektir. Her metrik uzay konik metrik uzaydır.

Örnek 3.1.6. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** $\mathbf{B}= \mathbb{R}^2$, $\mathcal{P} = \{(x,y)\in \mathbf{B}$*: x,y$\geq 0$}$\subset \mathbb{R}^2$ konik, $X = \mathbb{R}$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere $d : X \times X \to \mathbf{B}$ fonksiyonu*

$$d(x,y) = (\mid x-y \mid, \alpha \mid x-y \mid)$$

şeklinde tanımlı olsun. Burada

$\mathcal{P}$' ye göre tanımlanan kısmi sıralama bağıntısı;

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_2 \leq y_2$$

şeklindedir. Her $x, y, z \in X$ için

(d1) $d(x,y) = \theta \iff (\mid x-y \mid, \alpha \mid x-y \mid) = (0,0) \iff x = y$

(d2) $\mid x-y \mid = \mid y-x \mid$ olduğundan $d(x,y) = d(y,x)$ dir.

(d3) $d(x,y) = (\mid x-y \mid, \alpha \mid x-y \mid) = (\mid x+z-z-y \mid, \alpha \mid x+z-z-y \mid)$

$$\leq (\mid x-z \mid + \mid z-y \mid, \alpha(\mid x-z \mid + \mid z-y \mid))$$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ elde edilir.

O halde, (X,d) KMU dır.

Örnek 3.1.7. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** $\mathbf{B}= \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P} = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n\}$ *konik, $X = \mathbb{R}$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere*

$d : X \times X \to \mathbf{B}$ fonksiyonu her $1 \leq i \leq n-1$ için

$$d(x,y) = (\mid x-y \mid, \alpha_1 \mid x-y \mid, ..., \alpha_{n-1} \mid x-y \mid)$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, (X,d) KMU dır.

Örnek 3.1.8. ***(Kadelburg et al., 2009)*** *$\mathbf{B} = (C_{\mathbb{R}}[0,1), || \,.\, ||_\infty)$ ve $\mathcal{P} = \{f \in \mathbf{B} \mid f(t) \geq 0\}$ koniği verilsin. $\mathcal{P}$, L=1 normal sabitli bir koniktir. $d : X \times X \to \mathbf{B}$, $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ ve $\varphi(t) = e^t$ olmak üzere*

$$d(x,y) = \mid x-y \mid \varphi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon olsun. (X,d) KMU dır.

Örnek 3.1.9. ***(Haghi, R.H. and Rezapour, S., 2010)*** *$\mathbf{B} = (C_{\mathbb{R}}[0,\infty), || \,.\, ||_\infty)$, $\mathcal{P} = \{f \in \mathbf{B} \mid f(t) \geq 0\}$ koniği verilsin. (X,ψ) metrik uzay, $\vartheta : [0,1] \to R^+$ sürekli ,*

$$d : X \times X \to \mathbf{B} \qquad d(x,y) = \psi(x,y)\vartheta$$

şeklinde tanımlı fonksiyon olsun. (X,d) KMU dır.

Önerme 3.1.1. ***(Türkoğlu, D. and Abuloha, M., 2009)*** *(X,d) KMU olsun. Her $k \gg \theta$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için $\|x\| < \Delta$, $x \in \mathbf{B}$ iken $(k-x) \in Int\mathcal{P}$ olacak şekilde $\Delta > 0$ vardır.*

İspat: $k \gg \theta$ olduğundan $k \in Int\mathcal{P}$ dir. Bu durumda $\{x \in \mathbf{B} : \|x-k\| < \Delta\} \subset Int\mathcal{P}$ olacak şekilde $\Delta > 0$ vardır.$\|x\| < \Delta$ iken $\|(k-x)-k\| = \|-x\| = \|x\| < \Delta$ olup $(k-x) \in Int\mathcal{P}$ elde edilir.

Önerme 3.1.2. ***(Türkoğlu, D. and Abuloha, M., 2009)*** *(X,d) KMU olsun. $\theta \ll k_1$ ve $\theta \ll k_2$ şeklindeki her k_1,$k_2 \in \mathbf{B}$ için $k \ll k_1$ ve $k \ll k_2$ olacak şekilde $\theta \ll k$, $k \in \mathbf{B}$ vardır.*

İspat: $\theta \ll k_1$ ve $\theta \ll k_2$ şeklinde k_1,$k_2 \in$ $\mathbf{B}$ olsun. $\theta \ll k_1$ olduğundan Önerme 3.1.1. den $\|x\| < \Delta_1$ iken $x \ll k_1$ olacak şekilde $\Delta_1 > 0$ vardır. Benzer şekilde $\theta \ll k_2$ olduğundan Önerme 3.1.1. den $\|x\| < \Delta_2$ iken $x \ll k_2$ olacak şekilde $\Delta_2 > 0$ vardır. $\Delta = min\{\Delta_1, \Delta_2\}$ olsun. $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\Delta}{\|k_1\|}$ ve $k = \dfrac{k_1}{n_0}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı seçilsin. O zaman $\|k\| = \|\frac{c_1}{n_0}\| = \dfrac{\|k_1\|}{n_0} < \Delta$ olduğundan $k \ll k_1$ ve $k \ll k_2$ bulunur ve $\theta \ll k,\;\; k \in \mathbf{B}$ dir.

3.2 Konik Metrik Uzayların Topolojik Özellikleri

Tanım 3.2.1. ***(Gordji et al., 2009)*** (X, d) *KMU,* $x \in X$ *ve* $\theta \ll k$ *şeklindeki her* $k \in \mathbf{B}$ *için*

$$B(x, k) = \{y \in X : d(x, y) \ll k\}$$

kümesine x *merkezli* $k \gg \theta$ *yarıçaplı açık yuvar denir.*

(X, d) *konik metrik uzay,* $x \in X$ *ve* $\theta \ll k$ *şeklindeki her* $k \in \mathbf{B}$ *için*

$$B[x, k] = \{y \in X : d(y, x) \leq k\}$$

kümesine x *merkezli* $k \gg \theta$ *yarıçaplı kapalı yuvar denir.*

Tanım 3.2.2. ***(Gordji et al., 2009)*** (X, d) *KMU,* $A \subset X$ *ve* $x \in X$ *olsun.* $\theta \ll k$ *şeklindeki her* $k \in \mathbf{B}$ *için*

$$B(x, k) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

sağlanıyorsa x *noktası* A *nın bir yığılma noktasıdır denir.*

Tanım 3.2.3. ***(Gordji et al., 2009)*** (X, d) *KMU,* $A \subset X$ *ve* $x \in X$ *olsun.* $\theta \ll k$ *şeklindeki her* $k \in \mathbf{B}$ *için*

$$B(x, k) \cap A \neq \emptyset$$

sağlanıyorsa x noktası A nın bir kapanış noktasıdır denir.

Örnek 3.2.1. $\mathbf{B}=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}=\{(x,y)\in\mathbf{B}: x,y\geq 0\}\subset\mathbb{R}^2$ *koniği verilsin,* $X=\mathbb{R}$, $\alpha\geq 0$ *ve* $d: X\times X\to\mathbf{B}$ $d(x,y)=(|x-y|,\alpha|x-y|)$ *şeklinde tanımlı fonksiyon olmak üzere* (X,d) *KMU olsun.*

a=1 merkezli k=(1,2) yarıçaplı açık yuvar:

$$B(1,k)=\{x\in\mathbb{R}: d(1,x)\ll(1,2)\}=\{x\in\mathbb{R}:(|1-x|,\alpha|1-x|)\ll(1,2)\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}: 1-(|1-x|)\in Int\mathcal{P}\ \ ve\ \ 2-\alpha(|1-x|)\in Int\mathcal{P}\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}: 1-|1-x|>0 \quad ve \quad 2-\alpha|1-x|>0\}$$

$\alpha=5$ *için*

$0<x<2$ *ve* $\frac{3}{5}<x<\frac{7}{5}$ *olur. O halde* $B(a,k)=(\frac{3}{5},\frac{7}{5})$ *elde edilir.*

Yukarıdaki örnekte $A=(0,1)$ *olsun.* $1\in A'$ *dir. Gerçekten,*

$$B(1,k)=\{x\in\mathbb{R}: d(1,x)\ll(1,2)\}=\{x\in\mathbb{R}:(|1-x|,\alpha|1-x|)\ll(1,2)\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}: 1-(|1-x|)\in Int\mathcal{P}\ \ ve\ \ 2-\alpha(|1-x|)\in Int\mathcal{P}\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}: |1-x|<1 \quad ve \quad |1-x|<\frac{2}{\alpha}\}$$

olduğundan $min\{1,\frac{2}{\alpha}\}=\beta$ *alınsın. Buradan* $-\beta<1-x<\beta$ *olup,* $x\in(1-\beta,1+\beta)$ *dir. O halde* $(1-\beta,1+\beta)\cap(0,1)\neq\emptyset$ *elde edilir ve* $1\in A'$ *dir.*

Teorem 3.2.1. ***(Türkoğlu, D. and Abuloha, M., 2009)*** *Her* (X,d) *KMU topolojik uzaydır.*

İspat: $\theta\ll k$ şeklindeki her $k\in\mathbf{B}$ için $\beta=\{B(x,k): x\in X, k\gg\theta\}$ olsun. O zaman

$\tau_k=\{U\subset X:$ *her* $x\in U$ için $x\in B\subset U$ *olacak* şekilde *bir* $B\in\beta$ vardır.$\}$

kümeler ailesi X üzerinde bir topolojidir. Gerçekten;

τ_1) $\emptyset$,$X \in \tau_k$

τ_2) $U, V \in \tau_k$ ve $x \in U \cap V$ olsun. $x \in U$ ve $x \in V$ olduğundan $x \in B(x, k_1) \subset U$ ve $x \in B(x, k_2) \subset V$ olacak şekilde $k_1 \gg 0$, $k_2 \gg 0$ vardır. Önerme 3.1.2 den $k \ll k_1$ ve $k \ll k_2$ olacak şekilde $k \gg \theta$ vardır. O zaman $x \in B(x, k) \subset B(x, k_1) \cap B(x, k_2) \subset U \cap V$ sağlanır. Böylece $U \cap V \in \tau_k$ elde edilir.

τ_3) Her $\alpha \in \Lambda$ için $U_\alpha \in \tau_k$ olmak üzere $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ olsun. O zaman $x \in U_{\alpha_0}$ olacak şekilde $\alpha_0 \in \Lambda$ vardır. Böylece $x \in B(x, k) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ olacak şekilde $k \gg \theta$ bulunur. O halde $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \tau_k$ elde edilir.

Teorem 3.2.2. ***(Türkoğlu et al., 2009)*** *(X, d) KMU ve $A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \subset X$ olsun. $x \in \bar{A}$ olması için gerek ve şart $d(x, A) = inf\{d(x, y) : y \in A\} = \theta$ olmasıdır.*

İspat: $x \in \bar{A}$ olsun. O zaman her $\theta \ll k$, $k \in \mathbf{B}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $B(x, \frac{k}{n}) \cap (A) \neq \emptyset$ dır. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta \leq d(x, A) \leq d(x, a_n) < \frac{k}{n}$$

olacak şekilde $a_n \in A$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\|d(x, A)\| \leq K\frac{\|k\|}{n}$ dir. O halde $d(x, A) = \theta$ dır.

Tersine $U \in \tau_k$, $x \in U$ olsun. O zaman $B(x, k) \subset U$ olacak şekilde $\theta \ll k$, $k \in \mathbf{B}$ vardır. $\theta = d(x, A) < k$ olduğundan $d(x, a) < k$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Yani, $a \in A \cap B(x, k) \subset A \cap U$ dır.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, (X, d) KMU, $A \subset X$ kapalı bir küme olsun. O halde $a \notin A$ için $d(a, A) > \theta$ dır.

Önerme 3.2.1. ***(Türkoğlu, D. and Abuloha, M., 2009)*** *Her (X, d) KMU birinci sayılabilirdir.*

İspat: $p \in X$ ve $\theta \ll k$, $k \in \mathbf{B}$ olsun. $\beta_p = \{B(p, \frac{k}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ p noktasında sayılabilir bir lokal bazdır. Gerçekten, p yi içeren U açık kümesi olsun. Bu durumda, $p \in B(p, k_1) \subset U$ olacak şekilde $\theta \ll k_1$, $k_1 \in \mathbf{B}$ vardır. Önerme 3.1.1. den $\dfrac{k}{n_0} \ll k_1$ olacak şekilde n_0 pozitif tamsayısı bulunur. Böylece $B(p, \dfrac{c}{n_0}) \subset B(p, k_1) \subset U$ sağlanır. O halde β_p sayılabilir olup (X, d) birinci sayılabilirdir.

3.3 Konik Metrik Uzaylarda Yakınsaklık ve Limit

Tanım 3.3.1. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *(X, d) KMU, $\{x_n\}$ $\subset X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için ve $n > N$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \ll k$ olacak şekilde bir N pozitif sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsaktır denir. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ veya $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ile gösterilir.*

Örnek 3.3.1. $\mathbf{B} = \mathbb{R}^2$, *$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbf{B}: x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ koniği verilsin, $X = \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ ve $d : X \times X \to \mathbf{B}$ $d(x, y) = (\mid x - y \mid, \alpha \mid x - y \mid)$ biçiminde tanımlı fonksiyon olmak üzere (X, d) konik metrik uzay olsun. $(x_n) = (\dfrac{1}{n})$ dizisi (X, d) konik metrik uzayında θ noktasına yakınsar. Gerçekten ;*

$(x_n) \longrightarrow \theta :\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{B}, \theta \ll k)(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n > N, d(x_n, \theta) \ll k)$ olduğunu göstermek gerekir.

Bunun için $\theta \ll k$ olacak şekilde her $k \in \mathbf{B} = \mathbb{R}^2$, $k = (k_1, k_2)$ için

$d(x_n, \theta) \ll k \Leftrightarrow k - d(x_n, \theta) \in Int\mathcal{P}$ yani

$$k - d(x_n, \theta) = (k_1, k_2) - (\frac{1}{n}, \alpha\frac{1}{n}) = (k_1 - \frac{1}{n}, k_2 - \alpha\frac{1}{n}) \in IntP$$

sağlanması gerekir.

Bu da $k_1 - \frac{1}{n} > 0$ ve $k_2 - \alpha\frac{1}{n} > 0$ anlamına gelir.

Buradan $n > \frac{1}{k_1}$ ve $n > \frac{\alpha}{k_2}$ bulunur.

O halde her $n > N$ olacak şekilde $N = max\{\frac{1}{k_1}, \frac{\alpha}{k_2}\}$ vardır.

$(x_n) = (\frac{1}{n})$ *dizisi* (X,d) *konik metrik uzayında sıfır noktasına yakınsar.*

Teorem 3.3.1. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** (X,d) *KMU,* $\{x_n\} \subset X$ *bir dizi ve* $\mathcal{P}$ *de* L *normal sabitli konik olsun.* $\{x_n\}$ *dizisinin* x *e yakınsaması için gerek ve yeter koşul* $n \to \infty$ *iken* $d(x_n, x) \to \theta$ *olmasıdır.*

İspat: $\{x_n\} \to x$ olsun. Her reel ε için $L\|k\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\theta \ll k$, bir $k \in \mathbf{B}$ alınabilir. O zaman her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll k$ olacak şekilde bir N pozitif sayısı vardır. $\mathcal{P}$ normal sabiti L olan normal konik olduğundan her $n > N$ için $\|d(x_n, x)\| \leq L\|k\| < \varepsilon$ sağlanır. Böylece $(n \to \infty)$ iken $d(x_n, x) \to \theta$ dir.

Tersine $(n \to \infty)$ iken $d(x_n, x) \to \theta$ olsun. Bu durumda $\theta \ll k$ biçiminde her $k \in \mathbf{B}$ için $\|x\| < \delta$ iken $k - x \in Int\mathcal{P}$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Bu δ için her $n > N$ için $\|d(x_n, x)\| < \delta$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ pozitif sayısı vardır. Böylece $k - d(x_n, x) \in Int\mathcal{P}$ dir. Bu da $d(x_n, x) \ll k$ anlamına gelir. O halde $\{x_n\} \to x$ dir.

Teorem 3.3.2. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** (X,d) *KMU,* $\{x_n\} \subset X$ *bir dizi ve* $x \in X$ *olsun ve* $\mathcal{P}$ *de* L *normal sabitli konik olsun.* $\{x_n\} \to x$ *ve* $\{x_n\} \to y$ *ise o zaman* $x = y$ *dir, yani* $\{x_n\}$ *dizisinin limiti tektir.*

İspat: $\theta \ll k$ şeklinde $k \in \mathbf{B}$ alalım. $\{x_n\} \to x$, $\{x_n\} \to y$ olsun. Bu durumda her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll k$ ve $d(x_n, y) \ll k$ olacak şekilde bir N pozitif sayısı vardır. Buradan

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \leq 2k$$

dir. Böylece $\|d(x, y)\| \leq 2L\|k\|$ olur. k keyfi sabit olduğundan $d(x, y) = \theta$ dolayısıyla $x = y$ dir.

Tanım 3.3.2. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** (X,d) *KMU,* $\{x_n\} \subset X$ *bir dizi olsun.* $\theta \ll k$ *şeklindeki her* $k \in \mathbf{B}$ *ve* $n, m > N$ *özelliğindeki* *her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) \ll k$ olacak şekilde bir N pozitif sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir denir.*

Teorem 3.3.3. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *(X, d) KMU, $\{x_n\}$ $\subset X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak ise $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.*

İspat: $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak olsun. Bu durumda $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ ve her $n, m > N$ için $d(x_n, x) \ll \frac{k}{2}$ ve $d(x_m, x) \ll \frac{k}{2}$ olacak şekilde bir N pozitif sayısı vardır. Buradan

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \ll k$$

bulunur. O halde $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 3.3.3. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *(X, d) KMU olsun. Her Cauchy dizisi X de yakınsak ise (X, d) ye tam KMU denir.*

Teorem 3.3.4. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *(X, d) KMU, $\mathcal{P}$ de L normal sabitli konik ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to \theta$ olmasıdır.*

İspat: $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\theta \ll k$ ve $L\|k\| < \varepsilon$ biçiminde $k \in \mathbf{B}$ seçilsin. O zaman her $n, m > N$ için, $d(x_n, x_m) \ll k$ olacak şekilde bir N pozitif sayısı vardır. $\mathcal{P}$ de normal sabiti K olan konik olduğundan

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq L\|k\| < \varepsilon$$

dir. O halde $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to \theta$ elde edilir.

Tersine, $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to \theta$ olsun. $\theta \ll k$ biçiminde her $k \in \mathbf{B}$ alınsın. $\|x\| < \delta$ iken $k - x \in Int\mathcal{P}$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Her $n, m > N$ için $\|d(x_n, x_m)\| < \delta$ olacak şekilde bir N pozitif sayısı vardır.

Böylece $k - d(x_n, x_m) \in Int\mathcal{P}$ dir. Bu da $d(x_n, x_m) \ll k$ anlamına gelir.

O halde $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Teorem 3.3.5. ***(Huang, L. G. and Zhang, X., 2007)*** *(X, d) KMU, $\mathcal{P}$ de L normal sabitli konik, $\{x_n\}$,$\{y_n\} \subset X$ iki dizi ve $x_n \to x$, $y_n \to y$ olsun. Bu durumda $n \to \infty$ iken $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ dir.*

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için $\theta \ll k$ ve $\|k\| < \frac{\varepsilon}{4L+2}$ biçiminde $k \in \mathbf{B}$ olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ olduğundan her $n > N$, $d(x_n, x) \ll k$ ve $d(y_n, y) \ll k$ olacak şekilde bir N pozitif sayısı vardır. O halde

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \leq d(x, y) + 2k$$

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y_n) + d(y_n, y) \leq d(x_n, y_n) + 2k$$

elde edilir. Buradan

$$0 \leq d(x, y) + 2k - d(x_n, y_n) \leq 4k$$

ve

$$\begin{aligned}
\|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| &= \|d(x, y) + 2k - d(x_n, y_n) - 2k\| \\
&\leq \|d(x, y) + 2k - d(x_n, y_n)\| + \|2k\| \\
&\leq 4L\|k\| + 2\|k\| \\
&= (4L + 2)\|k\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n \to \infty$, $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$dir.

4 KONİK METRİK UZAYLARDA $\Im$-YAKINSAKLIK

Konik metrik uzaylarda $\Im$-yakınsaklık kavramına geçmeden önce, ideal ve metrik uzaylarda $\Im$-yakınsaklık kavramları verilecektir.

4.1 İdeal

Tanım 4.1.1. ***(Kuratowski, K., 1933)*** *$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer X in altkümelerinin $\Im \subset 2^X$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\Im$ ailesine X de bir idealdir denir.*

(i) $A \in \Im$, $B \subset A$ iken $B \in \Im$

(ii) $A, B \in \Im$ iken $A \cup B \in \Im$

Eğer $\Im \neq \emptyset$ ve $X \notin \Im$ ise $\Im$ idealine gerçek (proper,nontrivial) ideal denir. Eğer $\Im$ gerçek ideali X in tüm sonlu altkümelerini içeriyorsa $\Im$ idealine admissible (uygun) ideal denir.

Örnek 4.1.1. ***(Jankovic, D. and Hamlet, T.R., 1990),(Kostyrko et al.,2000)*** *X boştan farklı bir küme olsun.*

i) $\Im = \{\emptyset\}$ minimal idealdir.

ii) $\Im_F = \{A \subset X : A \ \ sonlu\}$ ailesi sonlu kümeler idealidir.

iii) $\Im_C = \{A \subset X : A \ \ sayilabilir\}$ ailesi sayılabilir kümeler idealidir.

iv) $\Im = P(X)$ maksimum idealdir.

v) $\Im_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ ailesi yoğunluğu sıfır olan kümeler ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir.

vi) $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, m doğal sayısını bulundurmayam kümelerin oluşturduğu aile bir maksimal idealdir. Bu ideal, uygun ideal değildir. Çünkü $\{m\}$ kümesi bu ideale ait değildir.

Örnek 4.1.2. ***(Das et al., 2008)*** $\Im_0 = \{A \subset \mathbb{N} : (\exists j \in \mathbb{N})(\forall i \geq j) \Rightarrow i \notin A\}$

ailesi $\mathbb{N}$ *de idealdir.*

Tanım 4.1.2. ***(Kuratowski, K., 1933)*** $X \neq \emptyset$ *olsun.* $\mathcal{F} \subset 2^X$ *ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa* X *de bir süzgeçtir denir.*

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ii) $A, B \in \mathcal{F}$ *iken* $A \cap B \in \mathcal{F}$

iii) $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ *iken* $B \in \mathcal{F}$ *dir.*

$\Im$, X *üzerinde bir gerçek ideal ise,*

$$\mathcal{F}(\Im) = \{X \setminus A : A \in \Im\}$$

sınıfı X *üzerinde bir süzgeç olup,* $\mathcal{F}(\Im)$ *süzgecine* $\Im$ *idealine karşılık gelen süzgeç denir.*

Önerme 4.1.1. ***(Kuratowski, K., 1933)*** $\Im \subset 2^X$ *idealinin gerçek ideal olması için gerek ve yeter şart*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Im) = \{X \setminus A : A \in \Im\}$$

kümesinin X *de bir süzgeç olmasıdır.*

4.2 $\Im$ ve $\Im^*$ -Yakınsaklık

$\Im$-yakınsaklık konusu, ideal kavramına bağlı olan istatistiksel yakınsaklığın en önemli genellemesidir. P. Kostyrko, T. Salat ve W. Wilczynski tarafından 2000 yılında tanıtılmıştır. Bu bölümde $\Im$-yakınsaklık tanımlanarak özellikleri verilecektir. Bu bölüm ve sonrasında $\Im$ ideali $\mathbb{N}$ üzerinde alınacaktır.

Tanım 4.2.1. ***(Kostyrko et al.,2000)*** (X, d) *metrik uzay,* $\{x_n\} \subset X$ *bir dizi olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$\{n \in \mathbb{N}; d(x_n, x_0) \geq \varepsilon\} \in \Im$$

şartını sağlıyorsa, $\{x_n\}$ *dizisi* $x_0 \in X$ *noktasına* $\Im$- *yakınsaktır denir ve* $\Im - lim x_n = x_0$ *ile gösterilir.* x_0, $\{x_n\}$ *dizisinin* $\Im$*-limit noktasıdır.*

Tanım 4.2.2. ***(Das, P. and Ghosal, S.K., 2010)*** (X, d) *metrik uzay,* $\{x_n\} \subset X$ *bir dizi olsun. Her* G *pozitif reel sayısı için*

$$A(x, G) = \{n \in \mathbb{N} : d(x, x_n) \leq G)\} \in \Im$$

olacak şekilde $x \in X$ *elemanı varsa* $\{x_n\}$ *dizisi* $\Im$*-ıraksaktır denir.*

Tanım 4.2.3. ***(Kostyrko et al.,2000)*** $\Im$ *bir admissible ideal olsun.* $\Im$ *idealine ait karşılıklı ayrık ve sayılabilir her* $\{A_1, A_2, ...\}$ *kümeleri için,* $A_j \Delta B_j$, $j \in \mathbb{N}$ *sonlu küme ve*

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \Im$$

olacak şekilde $\{B_1, B_2, ...\}$ *kümeler ailesi varsa* $\Im$ *ideali* (AP) *şartını sağlar denir.*

Her $j \in \mathbb{N}$ *için* $B_j \in \Im$ *dır.*

Tanım 4.2.4. ***(Dems, K., 2004)*** (X, d) *metrik uzay,* $\{x_n\} \subset X$ *bir dizi olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$A(x, G) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) \geq \varepsilon\} \in \Im$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ *varsa* $\{x_n\}$ $\Im$*-Cauchy dizisidir denir.*

Teorem 4.2.1. ***(Kostyrko et al.,2000)*** $\Im$ *admissible ideal ise o zaman her yakınsak dizi* $\Im$*-yakınsaktır.*

İspat: Yakınsaklık tanımından ispatı açıktır.

Örnek 4.2.1. ***(Kostyrko et al.,2000)***

i)$\Im = \{\emptyset\}$ *bir minimal idealdir.* (x_n) *dizisinin* $\Im$*-yakınsak olması için gerek ve* *yeter şart sabit olmasıdır.*

ii) $\Im_F$, $\mathbb{N}$ *in tüm sonlu alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda* $\Im_F$*, bir uygun idealdir ve* $\Im_F$*-yakınsaklık, alışılmış yakınsaklık ile çakışır.*

iii) $\Im_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ *ailesi bir uygun idealdir.* $\Im_d$*-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklıkla çakışır.*

iv) $m \in \mathbb{N}$ *olmak üzere, m doğal sayısını bulundurmayam kümelerin oluşturduğu aile bir maksimal idealdir. Bu ideal, uygun ideal değildir. Çünkü* $\{m\}$ *kümesi bu ideale ait değildir.*

Herhangi bir x dizisi m inci elemanına bu ideal üzerinden $\Im$*-yakınsaktır.*

Tanım 4.2.5. ***(Kostyrko et al.,2000)*** (X, d) *metrik uzay,* $\{x_n\} \subset X$ *bir dizi ve* $x \in X$ *olsun.* $\lim_{n\to\infty} x_{m_t} = x$ *olacak şekilde* $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_t < ...\}$, $M \in \mathcal{F}(\Im)$ *(yani,* $\mathbb{N} \setminus M \in \Im$*) kümesi varsa* $\{x_n\}$ *dizisi x noktasına* $\Im$***-*yakınsaktır denir.* $\Im^*\text{-}\lim x_n = x$ *ile gösterilir.*

Teorem 4.2.2. ***(Kostyrko et al.,2000)*** $\Im$ *admissible ideal ise o zaman* $\Im^*$-$\lim x_n = x$ *ise* $\Im\text{-}\lim x_n = x$ *dir.*

İspat: $\Im$ admissible ve $\Im^*\text{-}\lim x_n = x$ olsun. Bu durumda $M = \mathbb{N} \setminus K = \{m_1 < m_2 < ... < m_t < ...\}$ olacak şekilde $K \in \Im$, $M \in \mathcal{F}(\Im)$ vardır ve $\lim_{t\to\infty} x_{m_t} = x$ dir. Limit tanımından her $\varepsilon > 0$ ve her $t > t_0$ iken $d(x_t, x) < \varepsilon$ olacak şekilde $t_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\{n : d(x_n, x) > \varepsilon\} \subset K \cup \{m_1 < m_2 < ... < m_{t_0}\} \in \Im$$

dir. O halde $\Im\text{-}\lim x_n = x$ dir.

Teorem 4.2.3. ***(Kostyrko et al.,2000)***

(X, d) *metrik uzay olsun. Aşağıdakiler vardır.*

i) $\Im$ *admissible ideal olsun.* (X, d) *metrik uzayında ise* $\Im^*\text{-}\lim x_n$ *tektir.*

ii) X limit noktasına sahip değilse, o zaman her $\Im$ *admissible ideali için* $\Im$ *ve*

$\Im^*$ yakınsaklık denktir.

iii) $\Im$ admissible ideal, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\Im$, (AP) koşulunu sağlar ve (X, τ) birinci sayılabilir uzay ise $\Im$-$\lim x_n = x$ iken $\Im^*$-$\lim x_n = x$ dir.

iv) (X, τ) en az bir limit noktası içeren T_1 birinci sayılabilir uzay olsun. Her $x \in X$ için $\Im$-$\lim x_n = x$ iken $\Im^*$-$\lim x_n = x$ sağlanıyorsa o zaman $\Im$ ideali (AP) koşulunu sağlar.

İspat: *i)* $\Im$ admissible, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi, $x_0 \neq y_0$ $d(x_0, y_0) = \varepsilon$ olmak üzere x_0 ve y_0 noktaları da $\{x_n\}$ dizisinin $\Im^*$-limit noktaları olsun.
$\lim\limits_{t\to\infty} x_{m_t} = x_0$ olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_t < ...\}$, $M \in \mathcal{F}(\Im)$ $(yani, \mathbb{N} \setminus M \in \Im)$ kümesi vardır. Benzer şekilde
$\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_t} = y_0$ olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_t < ...\}$, $M \in \mathcal{F}(\Im)$ $(yani, \mathbb{N} \setminus M \in \Im)$ kümesi vardır.
Limit tanımından;
$t > t_0$ özelliğindeki her $t \in \mathbb{N}$ için $d(x_t, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $t_0 \in \mathbb{N}$ vardır
$t > t_0$ özelliğindeki her $t \in \mathbb{N}$ için $d(x_t, y_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $t_0 \in \mathbb{N}$ vardır.
Bu da üçgen eşitsizliğiyle çelişir. O halde $x_0 = y_0$ dır.

ii) $\Im$ admissible ideali için $\Im^*$-yakınsak ise $\Im$-yakınsak olduğu Teorem 4.2.2 de gösterilmiştir. Tersine $\Im$-$\lim x_n = x$ olsun. X limit noktasına sahip olmadığından $U \cap (X \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir $U = B(x_0, r) \in \mathcal{U}(x_0)$ vardır. Bu durumda $U = \{x_0\}$ olmalıdır. $\{n : d(x_n, x_0) > r\} \in \Im$ olduğundan

$$\{n : d(x_n, x_0) > r\} = \{n : x_n = x_0\} \in \mathcal{F}(\Im)$$

dir. O halde $\Im^*$-$\lim x_n = x$ dir.

iii) $\Im$-$\lim x_n = x$ olsun. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}(x_0)$ için $\{n : x_n \notin U\} \in \Im$ dir.(X, τ) birinci sayılabilir uzay olduğundan $x \in X$ noktasının $B_{n+1} \subset B_n$

koşulunu sağlayan $\{B_n(x)\}$ monoton azalan açık bazı vardır.

$x \in B_1(x) \in \{B_n(x)\}$ için

$A_1 = \{n : x_n \notin B_1(x)\}$ ve m>1 için $A_m = \{n : x_x \notin B_m(x)$ ama $x_n \in B_{m-1}(x)\}$ olsun. O zaman her n için $B_n(x)$ sayılabilir olduğundan $\{A_1, A_2, ...\}$ küme dizisi sayılabilirdir ve her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ dir.

(AP) koşulundan her j için $A_j \Delta B_j$ sonlu ve $B = \bigcup B_j \in \Im$ olacak şekilde bir $\{B_1, B_2, ...\} \in \Im$ sayılabilir ailesi vardır.

$M \in \mathbb{N} \setminus B = \{m_1 < m_2 < ...\} \in \mathcal{F}(\Im)$ dır.

$\lim\limits_{k \to \infty} x_{m_t} = x$ olduğunu göstermek gerekir:

$U \in \mathcal{U}(x_0)$ olsun. Her $n \geq t_1$, $B_n(x \subset U)$ olacak şekilde bir $t_1 \in \mathbb{N}$ vardır. $\{n : x_n \notin U\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{t_1} A_j$ dir. $A_j \Delta B_j$ sonlu olduğundan,

$$\bigcup_{j=1}^{t_1} B_j \cap \{n; n > n_0\} = \bigcup_{j=1}^{t_1} A_j \cap \{n; n > n_0\}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$m_l > n_0$ olacak şekilde $m_l \in \mathbb{N}$ seçilsin.

Her $p > 1$ için $m_p \notin B = \bigcup B_j \in \Im$ dir.

Buradan $m_p \notin \bigcup\limits_{j=1}^{t_1} A_j$ dir. Böylece $x_{m_p} \in B_{t_1}(x) \subset U$ dir. O halde $\lim\limits_{t \to \infty} x_{m_t} = x$ dir. O halde $\Im$*-lim $x_n = x$ dir.

4.3 Konik Metrik Uzaylarda $\Im_C$ ve $\Im_C$*-Yakınsaklık

Tanım 4.3.1. ***(Pal et al., 2013)*** *(X, d) KMU, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\theta \ll k$ (yani, $k - \theta \in Int\mathcal{P}$) şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için*

$$\{n \in \mathbb{N} : k - d(x_n, x) \notin Int\mathcal{P}\} \in \Im$$

sağlanıyorsa o zaman $\{x_n\}$ dizisi $\Im_K$-yakınsaktır denir ve $\Im_K - \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

Örnek 4.3.1. $\mathbf{B}=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}=\{(x,y)\in\mathbf{B}$: $x,y\geq 0\}\subset\mathbb{R}^2$ *koniği verilsin,* $X=\mathbb{R}$, $\alpha\geq 0$ *ve* $d: X\times X\to\mathbf{B}$, $d(x,y)=(\mid x-y\mid,\alpha\mid x-y\mid)$ *biçiminde tanımlı fonksiyon olmak üzere* (X,d) *KMU olsun.*

$\{x_n\}\subset X$ *dizisi,*

$$x_n=\begin{cases}\sqrt{n}, & n=t^2, t\in\mathbb{N}\\ 1, & n\neq t^2\end{cases} \tag{1}$$

ve

$\Im_d=\{A\subset\mathbb{N}: d(A)=0\}$ *ailesi* $\mathbb{N}$ *de ideal olmak üzere* x_n *dizisi* $\Im_{d_K}$-*yakınsaktır. Çünkü;*

$(x_n)\to^{\Im-yak} x :\Leftrightarrow (\forall k\in\mathbf{B},\theta\ll k):\{n\in\mathbb{N}: k-d(x_n,x)\notin Int\mathcal{P}\}\in\Im_d$

$$\Leftrightarrow (\forall k\in\mathbf{B},\theta\ll k):\{n\in\mathbb{N}: d(x_n,x)\gg k\}\in\Im_d$$

Her $k\in\mathbf{B}$, $\theta\ll k$, *x=1 için*

$$d(x_n,1)=\begin{cases}(|x_n-1|,\alpha|x_n-1|), & n=t^2, t\in\mathbb{N}\\ (0,0), & n\neq t^2\end{cases} \tag{2}$$

olur.

Buradan $\{n\in\mathbb{N}: d(x_n,x)\gg k\}=\{1,4,9,...\}$ *bulunur.*

$B=\{1,4,9,...\}$ *olsun.*

$d(B)=lim\dfrac{|B(n)|}{n}$ *ve* $B(n)=\{m\in B: m\leq n\}$ *olmak üzere*

$|B(n)|\leq\sqrt{n}$

$d(B)=0$ *dır.*

O halde $\{n\in\mathbb{N}: d(x_n,x)\gg k\}=\{1,4,9,...\}\in\Im_d$ *olduğundan* x_n *dizisi* $\Im_{d_K}$-*yakınsaktır fakat sınırlı olmadığından yakınsak değildir.*

Örnek 4.3.2. $\mathbf{B}=C_{\mathbb{R}}[0,1]$ *ve* $\mathcal{P}=\{f\in\mathbf{B}\mid f(t)\geq 0\}$ *koniği verilsin.* $X=\mathbb{R}$, $d: X\times X\to\mathbf{B}$, $\varphi:[0,1]\to R^+$ *ve* $\varphi(t)=e^t$ *olmak üzere* $d(x,y)=\mid x-y\mid\varphi$

şeklinde tanımlı fonksiyon olmak üzere (X, d) *KMU olsun.*

$\{x_n\} \subset X$ *dizisi,*

$$x_n = \begin{cases} 5, & n \neq 1 \\ 10, & n = 1 \end{cases} \tag{3}$$

biçiminde ve $\Im = \Im_0 = \{A \subset \mathbb{N} : (\exists j \in \mathbb{N})(\forall i \geq j) \Rightarrow i \notin A\}$ *ailesi* $\mathbb{N}$ *de bir ideal olsun.* x_n *dizisi* $\Im_{0_K}$*-yakınsaktır. Çünkü;*

$\forall k \in \mathbf{B}, \theta \ll k$ *,* x*=5 için*

$$d(x_n, 5) = \begin{cases} |x_n - 5|e^t, & n \neq 1, \\ |x_n - 5|e^t, & n = 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ 5e^t, & n = 1 \end{cases} \tag{4}$$

dir. Buradan da $\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, 5) \gg k\} = \{1\}$ *bulunur.* $A = \{1\}$ *alınırsa,* $i \notin A$ *için her* $i \geq j$ *olacak şekilde bir* $j \in \mathbb{N}$ *vardır. Yani* $\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, 5) \gg k\} \in \Im_0$ *dır. O halde* x_n *dizisi* $\Im_{0_K}$*-yakınsaktır. Ayrıca* x_n *dizisi sınırlı ve ıraksaktır.*

Diğer yandan, bu örnekte $\Im = \{A \subset \mathbb{N} : A \subset \{2n : n \in \mathbb{N}\}\}$ *ailesi* $\mathbb{N}$ *de bir ideal olsun.* $A = \{1\}$ *ve* $\{1\} \notin \Im$ *olduğundan,* $\{x_n\}$ *dizisi bu ideale göre* $\Im_K$*-yakınsak değildir.*

Teorem 4.3.1. $\Im$ *admissible ideal olmak üzere, konik metrik uzaylardaki yakınsak her dizi* $\Im_K$*- yakınsaktır.*

İspat: (X, d) KMU, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için ve $n > n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \ll k$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ pozitif sayısı vardır. O halde $\Im$ admissible ideal olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : k - d(x_n, x) \notin Int\mathcal{P}\} \in \Im$ elde edilir. $\{x_n\}$ dizisi $\Im_K$-yakınsaktır.

Tanım 4.3.2. ***(Pal et al., 2013)*** (X, d) *KMU,* $\{x_n\} \subset X$ *bir dizi olsun.*

$\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : k - d(x_n, x_j) \notin Int\mathcal{P}\} \in \Im$$

olacak şekilde bir J varsa o zaman $\{x_n\}$ dizisi $\Im_K$-Cauchy dizisidir denir.

Teorem 4.3.2. ***(Pal et al., 2013)*** *$\Im$ keyfi bir admissible ideal olsun. $\Im_K - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ ise $\{x_n\}$ dizisi bir $\Im_K$-Cauchy dizisidir.*

İspat: $\Im_K - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ olsun. O zaman $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için $A(k)$ =$\{n \in \mathbb{N} : k - d(x_n, x) \notin Int\mathcal{P}\} \in \Im$ sağlanır. $\Im$ admissible ideal olduğundan $n_0 \notin A(k)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.
$B(k)$ =$\{n \in \mathbb{N} : 2k \leq d(x_n, x_{n_0})\}$ olsun.
Eğer $n \in B(k)$ ise

$$d(x_n, \xi) + d(x_{n_0}, \xi) \geq d(x_n, x_{n_0}) \geq 2k$$

ve $d(x_{n_0}, \xi) \ll k$ sağlanır. Böylece $d(x_n, \xi) \geq k$ olması gerekir. Bu da $k - d(x_n, \xi) \notin Int\mathcal{P}$ anlamına gelir. O halde $n \in A(k)$ dir.
Bu durumda her $\theta \ll k$ için $B(k) \subset A(k) \in \Im$ sağlanır.
O halde, $B(k) \in \Im$ olduğundan dolayı $\{x_n\}$ dizisi bir $\Im_K$-Cauchy dizisidir.

Tanım 4.3.3. ***(Pal et al., 2013)*** *(X, d) KMU, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_t} = x$ olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_t < ...\}$, $M \in \mathcal{F}(\Im)$ kümesi varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına $\Im_K$*-yakınsaktır denir.*
Diğer bir deyişle, $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için

$$k - d(x_{m_{t,x}}) \in Int\mathcal{P}$$

olacak şekilde $k \geq p$ özelliğinde bir $p \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına $\Im_K$-yakınsaktır denir.*

Tanım 4.3.4. ***(Pal et al., 2013)*** *(X, d) KMU, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\{x_{m_t}\}_{t\in\mathbb{N}}$ altdizisi X de Cauchy dizisi olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_t < ...\}$, $M \in \mathcal{F}(\Im)$ kümesi varsa $\{x_n\}$ $\Im_K^*$-Cauchy dizisidir denir.*

Teorem 4.3.3. ***(Pal et al., 2013)*** *(X, d) KMU, $\Im$ admissible ideal ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\Im_K^*$-Cauchy dizisi ise o zaman $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\Im_K$-Cauchy dizisidir.*

İspat: Teorem 4.2.2. den ispatı açıktır.

Teorem 4.3.4. ***(Pal et al., 2013)*** *$\Im$ ideali (AP) şartını sağlarsa o zaman $\Im_K$ ve $\Im_K{}^*$-Cauchy koşulları çakışır.*

İspat: $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $k \in Int\mathcal{P}$ için

$$A(k) = \{n \in \mathbb{N} : k - d(x_n, x_j) \notin Int\mathcal{P}\} \in \Im$$

olacak şekilde bir $J \in J(k)$ vardır. $x \in \mathcal{P} \setminus \{\theta\}$ olsun.

$$A_i = \{n \in \mathbb{N} : k - d(x_n, x_{m_j}) < \frac{x}{i}\},\ i = 1, 2, 3, ...$$

$n_i = J(\frac{x}{i})$ olacak şekilde A_i kümesi tanımlansın. i=1,2,3,... için $A_i \in \mathcal{F}(\Im)$ dır. $\Im$ ideali, (AP) özelliğini sağladığından, her i için $Q \in \mathcal{F}(\Im)$ ve $Q \setminus A_i$ sonlu olacak şekilde $Q \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır.
$k \in Int\mathcal{P}$ ve $\frac{2x}{j} \ll k$ olacak şekilde bir $j \in \mathbb{N}$ olsun. $Q \setminus A_j$ sonlu olduğundan her $m, n \in A(j)$ için $m, n > l(j)$ olacak şekilde bir $l = l(j)$ vardır. Her $m, n > l(j)$ için $d(x_n, x_{m_j}) < \frac{x}{j}$ ve $d(x_m, x_{m_j}) < \frac{x}{j}$ elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden her $m, n > l(j)$ $d(x_m, x_n) \ll k$ dir. O halde $\{x_n\}_{n\in Q}$ bir Cauchy dizisidir.

Teorem 4.3.5. ***(Pal et al., 2013)*** *(X, d), en az bir yığılma noktasını içeren KMU ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisi $\Im_K$-Cauchy iken $\Im_K^*$-Cauchy koşullarını sağlıyorsa o zaman $\Im$ ideali (AP) şartını sağlar.*

4.4 Konik Metrik Uzaylarda $\Im_C$ ve $\Im_C$*-Iraksaklık

Tanım 4.4.1. ***(Pal et al., 2013)*** *(X, d) KMU, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için ve $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$d(x_n, x) - k \in Int\mathcal{P}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine ıraksaktır denir.

Örnek 4.4.1. ***(Kumar, A. and Paul, A., 2018)*** $\mathbf{B} = \mathbb{R}^2$ *ve* $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbf{B}$*: $x,y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ koniği verilsin. $X = \mathbb{R}^2$ ve $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere $d : X \times X \to \mathbf{B}$*

$$d(x, y) = (| x_1 - y_1 |, | x_2 - y_2 |)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon olsun. $x_n = (n, n)$ şeklinde $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. O zaman $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$, $k = (k_1, k_2)$ için $x = (0, 0)$ vardır. Her $n \geq n_0$,

$$d(x, x_n) - k = (n, n) - k \in Int\mathcal{P}$$

olacak şekilde bir $n_0 = max\{k_1, k_2\} + 1$ vardır. $\{x_n\}$ dizisi ıraksaktır.

Örnek 4.4.2. ***(Kumar, A. and Paul, A., 2018)*** *Iraksak bir dizi, konik metrik uzaydaki yakınsak bir altdiziye sahip değildir.*

İspat: $\{x_n\}$, konik metrik uzayda ıraksak bir dizi ve $\theta \ll k$ şeklinde $k \in \mathbf{B}$ olsun. $\{x_n\}$ ıraksak olduğundan $k \in \mathbf{B}$ için ve $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) - k \in Int\mathcal{P}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $x \in X$ e yakınsayan $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi $\{x_{n_t}\}_{t \in \mathbb{N}}$ alınsın. Bu durumda $k \in \mathbf{B}$ için ve $n_t \geq n_p$ özelliğindeki her $t \in \mathbb{N}$ için $d(x, x_{n_t}) \ll k$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ vardır.
$r = max\{n_0, n_p\}$ olsun. O zaman $d(x, x_r) - k \in Int\mathcal{P}$ ve $k - d(x, x_r) \in Int\mathcal{P}$ yani $-(d(x, x_r) - k) \in Int\mathcal{P}$ dir. Böylece $0 \in Int\mathcal{P}$ dir, ki bu da çelişkidir.

Tanım 4.4.2. ***(Kumar, A. and Paul, A., 2018)*** *(X, d) KMU, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için*

$$A(x, k) = \{n \in \mathbb{N} : k - d(x_n, x) \in Int\mathcal{P}\} \in \Im$$

sağlanıyorsa o zaman $\{x_n\}$ dizisi x e $\Im_K$-ıraksaktır denir.

Tanım 4.4.3. ***(Kumar, A. and Paul, A., 2018)*** *(X, d) KMU, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisi ıraksak olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\Im)$ (yani, $\mathbb{N} \setminus M \in \Im$) var ise $\{x_n\}$ dizisi $\Im_K^*$-ıraksaktır denir.*
Diğer bir deyişle;
$\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için ve $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in M$ için

$$d(x, x_n) - k \in Int\mathcal{P}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $\Im_K^*$-ıraksaktır denir.

Teorem 4.4.1. ***(Kumar, A. and Paul, A., 2018)*** *$\Im$ admissible ideal $\{x_n\}$ X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisi $\Im_K^*$-ıraksak ise o zaman $\{x_n\}$ $\Im_K$-ıraksaktır.*

İspat: $\{x_n\}$ $\Im^*$-ıraksak olsun. $\{x_n\}$ dizisi ıraksak olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\Im)$ (yani, $\mathbb{N} \setminus M \in \Im$) vardır. Bu durumda $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için ve $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in M$ için ve

$$d(x, x_n) - k \in Int\mathcal{P}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda,

$$A(x, k) = \{n \in \mathbb{N} : k - d(x, x_n) \in Int\mathcal{P}\} \subset (\mathbb{N} \setminus M) \cup \{1, 2, ..., n_0\}$$

olur. $\Im$ admissible olduğundan $\mathbb{N} \setminus M \cup \{1, 2, ..., n_0\} \in \Im$ dir.Böylece $A(x, k) \in \Im$ bulunur. O halde, $\{x_n\}$ $\Im_K$-ıraksaktır.

Teorem 4.4.2. ***(Kumar, A. and Paul, A., 2018)*** *(X, d), en az bir yığılma noktasını içeren KMU ve $\{y_n\} \subset X$ olsun. $\{y_n\}$ $\Im_K$-Iraksak dizisi , $\Im_K^*$-Iraksak ise o zaman $\Im$ ideali (AP) şartını sağlar.*

İspat: (X, d) KMU, $\{x_n\} \subset X$ ıraksak bir dizi olsun. O zaman $\theta \ll k$ şeklindeki her $k \in \mathbf{B}$ için $n \geq p$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x, x_n) - k \in Int\mathcal{P}$$

olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ vardır. $\{A_i : i = 1, 2, ...\}$ boştan farklı ayrık kümeler dizisi olsun. Aşağıdaki gibi bir $\{y_n\}_n \in \mathbb{N}$ dizisi tanımlansın:

$$y_n = \begin{cases} y_n = x_j \quad , & n \in A_j \\ y_n = x_n \quad , & n \notin A_j \qquad \forall j \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5}$$

$\theta \ll k$, $k \in \mathbf{B}$ olsun.

$A(x, k) = \{n \in \mathbb{N} : d(x, y_n) \ll k\} \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k \cup \{1, 2, ..., k\} \in \Im$ dır. Böylece $\{y_n\}_n \in \mathbb{N}$ dizisi $\Im_K$-Iraksaktır. $\{y_n\}_n \in \mathbb{N}$, $\Im_K^*$-Iraksak olsun. Böylece $M \in \mathcal{F}(\Im)$ ve $\{y_n\}_n \in M$ ıraksak olacak şekilde $M \subset \mathbb{N}$ vardır. $B = \mathbb{N} \setminus M$ olsun. Bu durumda $B \in \Im$ dır. $\forall j \in \mathbb{N}$ için $B_J = A_j \cap B$ alınsın. Dolayısıyla $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \subset B$; $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \Im$ dır. O zaman $A_j \cap M$ sonlu bir kümedir.

Eğer $A_j \cap M$ sonlu bir küme olmasaydı, o zaman M, $\{m_t\}$ şeklinde sonlu olmayan bir dizi içermek zorundadır. Böylece her $t \in \mathbb{N}$ için $y_{m_t} = x_j$ dir. Bu ise $\{y_n\}_n \in M$ dizisinin yakınsak altdizisidir. Bu durum $\{y_n\}_n \in \mathbb{N}$ dizisinin ıraksak olmasıyla çelişir. Böylece

$$A_i \Delta B_i = A_i \setminus B_i = A_i \cap B_i^C = A_i \cap (M \cup A_i^C) = A_i \cap B$$

kümesi $\mathbb{N}$ nin sonlu altkümesidir.

O halde (AP) şartı sağlanır.

5 SONUÇ

2007 yılında Huang ve Zhang tarafından ortaya atılmış olan metrik uzayların genellemesi olan konik metrik uzay kavramı, günümüze kadar genişletilmiş ve ilerletilmiştir. Huang ve Zhang tarafından konik metrik uzaylarda yakınsaklık kavramı detaylı olarak araştırılmıştır. Son zamanlarda da yakınsaklığın farklı türleri konik metrik uzaylarda araştırılmaya ve bununla ilgili yeni çalışmalar yapılmaya devam edilmektedir.

Bu tezde konik metrik uzayların temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Buna ek olarak konik metrik uzaylar üzerinde yakınsaklık (ıraksaklık) kavramı ve yakınsaklıkla (ıraksaklıkla) ilişkili olan $\Im$-yakınsaklık (ıraksaklık) kavramı incelenmiş ve farklı örneklerle aralarındaki ilişki detaylıca verilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Das, P. and Ghosal, S.K., 2010, Some further result on I-Cauchy sequences and condition (AP), Comp. Math. Appl, 59, 2597-2600p.

Das, P., Kostyrko, P., Wilczyński, W. and Malik, P., 2008, I and I*-convergence of double sequences, Math. Slovaca 58, 5, 605–62p.

Dems, K., 2004/2005, On I-cauchy sequences, Real Analysis Exchange, 30 (1), 123–128p.

Engelking, R., 1989, General topolgie, Sigma series in pure mathematics, 6, Berlin.

Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicae, 2, (3-4), 241-244p.

Fridy, J.A., 1985, On statistical convergence, Analysis 5, 301 - 313p.

Gordji, M.E., Ramezani, M., Khodaei, H. and Baghani, H., 2009, Cone normed spaces, arXiv:0912.0960 [math.FA].

Huang, H. and Xu, S., 2015, Some new topolojical properties in cone metric spaces, J.of Math.(PRC), 35 (3).

Haghi, R.H. and Rezapour, S., 2010, Fixed points of multifunctions on regular cone metric spaces, Expositiones Mathematicae, 28 (1) 71-77p.

Huang, L. G. and Zhang, X., 2007, Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 332, 1468–1476p.

Ilic, D. and Rakocevic, V., 2009, Quasi–contraction on a cone metric space, Appl. Math. Lett., 2: 728–731p.

Jankovic, D. and Hamlet, T.R., 1990, New topolojical from old via ideals, The American Mathematical Monthly, 97 (4), 295-310p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

Kadelburg, Z.,Radenovic S. and Rakocevic V., 2009, Remarks on "Quasi-contraction on a cone metric space", Applied Mathematics Letters, 22 (11), 1674-1679p.

Kostyrko, P. Salat, T. and Wilczynski, W., 2000, I-Convergence,Real Analysis Exchange, 26(2), 669–686p.

Kreyszıg, E., 1978, Introductory functional analysis with applications, John Wiley Sons, New York.

Kumar, A. and Dey, A., 2008, Metric spaces and complex analysis, New Age International(P) Ltd, Publishers.

Kumar, A. and Paul, A., 2018, I-Divergence and I*-Divergence in cone metric spaces, arXiv:1806.09188[math.GN].

Kuratowski, K., 1933, Topolgie 1, Warszawa.

Pal , S.K., Savas, E. and Cakallı, H., 2013, I–Convergence on cone metrıc spaces, Sarajevo Journal Of Mathematics, 9 (21), 85–93p.

Rezapour, S. and Hamlbarani, R., 2008, Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", Journal of Mathematical Analysis and Applications,345 (2), 719-724p.

Türkoğlu, D. and Abuloha, M., 2009, Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings, Acta Mathematica Sinica English Series, 26 (3), 489–496p.

Türkoğlu D., Abuloha, M. and Abdeljawad, T., 2009, Some theorems in cone metric spaces, Journal of Elesvier Science, 10.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında büyük bir titizlik, sabır ve özveriyle bana destek olan, ne zaman olursa olsun,her ihtiyacım olduğu zaman yardımlarını, değerli görüş ve katkılarını esirgemeyen, yollar gösteren, iyi bir bilimsel çalışma ortamı sağlayan, sadece tezimde değil yaşamımım her noktasına güzel dokunuşları olan, kendisini tanımış olmaktan çok mutlu olduğum danışman hocam sayın Doç. Dr. Ayşegül Çaksu Güler 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında değerli görüş ve bilgilerini esirgemeyen, burada olmayı kendisine borçlu olduğum değerli hocam sayın Prof.Dr. Oya Özbakır'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım sırasında manevi desteğini esirgemeyen, hayatımın her aşamasında bana destek olan aileme, sevgili eşime ve gülücükleri için Akif bebeğimize teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad-Soyad : Burcu ALPER

Doğum Yeri : İstanbul

Doğum Tarihi : 22.09.1990

Uyruğu: T.C.

Eğitim

1997-2005: Yunus Emre İlköğretim Okulu-İSTANBUL

2005-2009: Fatih Kız Lisesi-İSTANBUL

2009-2014: Kocaeli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Lisans Programı–KOCAELİ

2012:Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü Lisans Programı (Farabi Programı ile)-ANKARA

2017:Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Topoloji Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı-İZMİR

Yabancı Dil

İngilizce, YÖKDİL Eylül 2018 Puanı:87,5

Sertifikalar

Pedagojik Formasyon- Kocaeli Üniversitesi Mayıs 2015