

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK PROBLEMLERLE
İLGİLİ OLUŞTURDUKLARI DIŞ TEMSİLLERLE İÇ TEMSİLLER
ARASINDAKİ ETKİLEŞİMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Fadime BAYIK

Ankara
Mart, 2010

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK PROBLEMLERLE
İLGİLİ OLUŞTURDUKLARI DIŞ TEMSİLLERLE İÇ TEMSİLLER
ARASINDAKİ ETKİLEŞİMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Fadime BAYIK

Danışman: Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Ankara
Mart, 2010

Fadime BAYIK'ın “11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK PROBLEMLERLE İLGİLİ OLUŞTURDUKLARI DIŞ TEMSİLLERLE İÇ TEMSİLLER ARASINDAKİ ETKİLEŞİMLER” başlıklı tezi tarihinde, jürimiz tarafından ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı): Prof. Dr. Ziya ARGÜN

.....

Üye : Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

.....

Üye : Doç. Dr. Musa SARI

.....

ÖZET

11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK PROBLEMLERLE İLGİLİ OLUŞTURDUKLARI DIŞ TEMSİLLERLE İÇ TEMSİLLER ARASINDAKİ ETKİLEŞİMLER

BAYIK, Fadime

Yüksek Lisans, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ziya Argün

Mart–2010, 177 sayfa

Bu araştırmanın amacı, öğrencilerin verilen geometrik kavramlar ve problemlerle uğraşırken sergiledikleri davranışlar, konuşmalar ve düşünceler aracılığıyla sahip oldukları iç ve dış temsillerin neler olduğunu ve bu temsiller arasındaki etkileşimin durumunu ortaya koymaktır. Araştırmaya, amaçlı örneklem tekniği kullanılarak seçilen bir Anadolu Lisesi'nin 11. sınıfında okuyan ve geometri başarı düzeyleri zayıf, orta ve iyi olan birer öğrenci katılmıştır. Bu üç katılımcı; araştırmacının hazırladığı geometri yazılı sınavından edinilen sonuçlar, geçmiş döneme ait geometri yazılı not ortalaması ve geometri derslerine giren öğretmenin görüşleri alınarak seçilmiştir.

Araştırma verilerini toplamak için sesli düşünme protokolü, öğrencilere uygulanan üç geometri sorusu ve görüşmelerdir. Verilerin analizi; sesli düşünme sürecindeki video kayıtları, öğrencilerle yapılan görüşmeler, öğrencilerin soru çözümünde verdikleri yazılı dokümanlar ve araştırmacının aldığı notlar kullanılarak, nitel çalışma tasarımına sahip olan “durum çalışması”na göre yapılmış ve toplanan veriler sabit bir kıyaslama metoduna göre kategorize edilmiştir. Verilerin analizinde kullanılacak kod ve temalar, Goldin'in (1998a) temsil modeli ve araştırmacının verileri defalarca incelemesi yoluyla oluşturulmuştur. Kod ve temalara göre incelenen veriler ışığında katılımcılarda gözlenen temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşime ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Katılımcılar problemleri çözerlerken, dış temsillerden şekilleri, cebirsel ve yazılı ifadeleri üretmişlerdir. Fakat bu temsiller geometrik problem türüne ve öğrenciye göre çeşitlilik göstermiştir. İç temsillerden ise sözel, formel ve imgesel sistemlere giren iç temsiller üretmişlerdir.

Elde edilen verilerin analizi sonrasında, temsiller arasında yatay ve dikey boyutlu olmak üzere iki tür etkileşim olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrenciler; aynı tür (iç temsil-iç temsil/ dış temsil-dış temsil) temsiller arasında geçiş yaptıklarında, temsiller arasında yatay boyutlu, farklı tür (iç temsil- dış temsil) temsiller arasında geçiş yaptıklarında ise dikey boyutlu etkileşimler meydana gelmiştir. Temsiller arasındaki etkileşim süreçlerinde kimi zaman benzerlikler kimi zaman da farklılıklar olduğu gözlenmiştir. Gözlenen farklılıkların öğrencilerin algıları ve ürettikleri temsil türleriyle ilgili olabileceği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İç temsil, dış temsil, temsil, temsil sistemleri, geometri, problem çözme

ABSTRACT
INTERACTIONS BETWEEN INTERNAL REPRESENTATIONS AND
EXTERNAL REPRESENTATIONS GENERATED BY 11. CLASS SECONDARY
STUDENTS' RELATED WITH GEOMETRIC PROBLEMS

BAYIK, Fadime

M.S., Department of Mathematic Education

Supervisor: Prof. Dr. Ziya Argün

March–2010, 177 pages

The purpose of this study is to investigate possible interactions between internal and external representations generated by 11. class secondary students' related with geometric problems. The participants of this research were three high school students chosen by a purposeful sampling. While we were choosing the participants, we also considered via results of geometry achievement exam prepared by researcher, average of written examinations which were belong to first semester, and geometry teacher's opinions about students.

The data were collected using by the methods which were think aloud method, three geometry problems focused on polygons, and unstructured interviews. Each student practiced the think aloud method before solving three geometry problems. After that, students worked on each problem separately and they were interviewed at the end of each problem solving sessions. These data were analyzed using the within-case and cross-case techniques. Data gathered were categorized using a constant comparative method to conceptualize a model of interactions between representation. Codes and theme used in analyzing data were generated via Goldin's (1998a) representational model.

The findings of this study show that while participant were solving geometry problems, they generated some external representations such as "geometric figures", "written expressions" and "algebraic expressions". However, these representations

varied according to students and the nature of geometric problems. On the other hand students' internal representations which were generated by them such as "verbal", "formal" and "imagistic" systems.

The other consequence of the research is that there were two type interactions between internal and external representations. If students pass on the same kind of representations (internal-internal / external-external) in problem solving process, there will be a "*horizontal interaction*" between these kind of representations. However, if they pass on the different kind of representations (internal-external), there will be a "*vertical interaction*" between them. These interaction processes varied according to students' perceptions and representations generated by students while solving geometric problems.

Keywords: internal representation, external representation, representation, systems of representation, geometry, problem solving

TEŞEKKÜR

Araştırma ve tez dönemi boyunca yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Ziya Argün'e teşekkür ederim.

Ayrıca araştırmanın gerçekleştiği Süleyman Demirel Lisesi'nin müdürüne ve fikirlerini benimle paylaşan değerli geometri öğretmenleri ile araştırma süresince gereken her durumda severek çalışmaya dâhil olduklarını hissettiğim katılımcı öğrencilere çok teşekkür ediyorum.

Lisans ve yüksek lisans eğitimi süresince derslerini aldığım ve fikirleriyle her zaman çalışmamda bana destek olan tüm hocalarım ile çalışmam esnasında fikirleriyle bana ilham veren sevgili arkadaşım Begüm Özgür'e teşekkür ediyorum.

Hayatım boyunca beni destekleyen ve aldığım her kararda yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

Fadime BAYIK

İÇİNDEKİLER

JÜRİ ÜYELERİNİN İMZA SAYFASI.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
TABLolar LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xiii
RESİMLER LİSTESİ.....	xvi
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xvii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Problem Cümlesi.....	3
1.3. Alt Problemler.....	3
1.4. Araştırmanın Amacı.....	4
1.5. Araştırmanın Önemi.....	4
1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları.....	6
1.7. Araştırmanın Varsayımları.....	7
1.8. Tanımlar/ Terimler.....	8
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE.....	9
2.1. İç ve Dış Temsil Kavramı.....	9
Matematik Eğitiminde Çoklu Temsil Alanındaki İlk Öncüler:.....	11
Yapılandırmacı Paradigmada Temsil Kavramı:.....	12
2.2. Temsil Kavramıyla İlgili Modeller.....	13
2.2.1. Kaput'un Temsil Modeli.....	13
2.2.2. Janvier'in Temsil Modeli.....	15
2.2.3. Lesh'in Temsil Modeli.....	16
2.2.4. Goldin'in Temsil Modeli.....	18
Goldin'in Modeli'nde Temsil Sistemi.....	18
Goldin'in Modeli'nde Karakterler, Konfigürasyonlar ve Yapılar:.....	20
Goldin'in Modeli'nde Sembolik İlişkiler:.....	21
Goldin'in Modeli'nde Temsiller Arasındaki İlişki:.....	22
Goldin'in Modeli'nde Dış Temsil Sistemleri:.....	22

Goldin'in Modeli'nde İç Temsil Sistemleri:.....	23
2.3. Araştırmada Kullanılan Temsil Çeşitleri ve Modelleri.....	30
2.4. Temsil Kavramıyla İlgili Yapılan Çalışmalar.....	34
3. YÖNTEM.....	38
3.1. Araştırmanın Modeli.....	38
Durum Çalışması.....	38
Katılımcılar.....	41
Katılımcı Belirleme Sınavı (KBS).....	46
3.2. Veri Toplama Araçları.....	50
3.2.1. Sesli Düşünme Protokolü.....	50
3.2.2. Katılımcılara Uygulanan Geometri Soruları.....	52
3.3.3. Görüşmeler.....	53
3.3. Verilerin Toplanması.....	54
3.5. Verilerin Analizi.....	55
3.6. Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik Sağlama Çalışmaları.....	58
4. BULGULAR VE YORUMLAR.....	61
4.1. Birinci Uygulama Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar.....	62
Oluşan Dış Temsiller.....	65
Oluşan İç Temsiller.....	68
Oluşan İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	79
4.2. İkinci Uygulama Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar.....	88
Oluşan Dış Temsiller.....	90
Oluşan İç Temsiller.....	95
Oluşan İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	106
4.3. Üçüncü Uygulama Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar.....	113
Oluşan Dış Temsiller.....	115
Oluşan İç Temsiller.....	117
Oluşan İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	127
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	133
5.1. Sonuçlar.....	133
5.2. Öneriler.....	142
KAYNAKÇA.....	147
EKLER.....	155

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo–2.1	Goldin’in Temsil Sisteminde Yer Alan Karakter ve Konfigürasyon Örnekleri.....	21
Tablo–2.2	İmgesel Sistemlere İlişkin Kosslyn Kategorileri.....	26
Tablo–2.3	Katılımcılarda Gözlenen İç Temsiller.....	31
Tablo–2.4	Şekiller, Yazılı İfadeler ve Cebirsel İfadeler İçin Örnekler.....	33
Tablo–3.1	Katılımcı Belirleme Sınavı (KBS) Puan Aralıkları ve Aralıklarda Yer Alan Kişi Sayısı.....	43
Tablo–3.2	Uygulamada Yer Alan Katılımcı Listesi.....	43
Tablo–3.3	KBS Hazırlama ve Uygulama Planı.....	46
Tablo–3.4	Araştırmada Gerçekleştiren Oturumların Tablosu.....	55
Tablo–4.1	Bulgular ve Yorumların İşlenişindeki Yapı.....	62
Tablo–4.2	Uygulama Sorusu 1’e Göre Katılımcılarda Gözlenen Dış Temsiller.....	66
Tablo–4.3	Katılımcıların Uygulama Sorusu 1’i Çözerken Çizdiği Şekiller.....	66
Tablo–4.4	Birinci Uygulama Sorusuna Göre Katılımcılarda Gözlenen İç Temsiller.....	68
Tablo–4.5	Erdem’in Birinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	80
Tablo–4.6	Asya’nın Birinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	82
Tablo–4.7	Kerem’in Birinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	84
Tablo–4.8	Uygulama Sorusu 2’ye Göre Katılımcılarda Gözlenen Dış Temsiller...	90
Tablo–4.9	Katılımcıların İkinci Uygulama Sorusunu Çizerken Oluşturduğu Şekiller.....	91
Tablo–4.10	Katılımcıların Oluşturduğu Yazılı İfadeler.....	94
Tablo–4.11	İkinci Uygulama Sorusuna Göre Katılımcılarda Gözlenen İç Temsiller.....	95
Tablo–4.12	Erdem’in İkinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	106
Tablo–4.13	Asya’nın İkinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	108

Tablo-4.14	Kerem'in İkinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	110
Tablo-4.15	Uygulama Sorusu 3'e Göre Katılımcılarda Gözlenen Dış Temsiller...	115
Tablo-4.16	Katılımcıların Üçüncü Uygulama Sorusunu Çözerken Çizdiği Şekiller.....	116
Tablo-4.17	Üçüncü Uygulama Sorusuna Göre Katılımcılarda Gözlenen İç Temsiller.....	118
Tablo-4.18	Erdem'in Üçüncü Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	127
Tablo-4.19	Asya'nın Üçüncü Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	129
Tablo-4.20	Kerem'in Üçüncü Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	130
Tablo-5.1	Öğrencilerin Oluşturduğu Temsil Türleri Arasındaki Etkileşimler.....	139
Tablo-5.2	Temsiller Arasındaki Etkileşim Sürecini Örnekleyen Veri Kesiti.....	140

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil-2.1	İç ve Dış Temsiller Arasındaki İlişki.....	14
Şekil-2.2	Janvier'in Temsillerle İlgili Sunduğu Yıldız Modeli.....	16
Şekil-2.3	Lesh'in Çoklu Temsil Dönüşüm Modeli.....	17
Şekil-2.4	Temsiller Arasındaki Etkileşim.....	20
Şekil-2.5	Sezgisel Konfigürasyonlarla Birleştirilmiş Duygusal Durumlar.....	29
Şekil-3.1	Araştırma Deseninin Aşamaları.....	41
Şekil-3.2	Nitel Analizde İzlenen Aşamalar.....	57
Şekil-4.1	Uygulama Sorusu 1.....	63
Şekil-4.2	Birinci uygulama sorusu için katılımcılarda gözlenen dış ve iç temsiller.....	64
Şekil-4.3	Erdem'in sözel temsil oluştururken kullandığı şekiller.....	70
Şekil-4.4	Erdem'in formel temsil oluştururken kullandığı dış temsil.....	71
Şekil-4.5	Katılımcılarda gözlenen imgesel sistem göstergeleri.....	72
Şekil-4.6	<i>Gösterge 3.1.1.1</i> 'in gözlendiği esnada Erdem'in çizdiği şekil.....	73
Şekil-4.7	<i>Gösterge 3.1.1.1</i> 'in gözlendiği esnada Asya'nın çizdiği şekil.....	73
Şekil-4.8	<i>Gösterge 3.1.1.2</i> 'nin gözlendiği esnada Erdem'in çizdiği şekil.....	74
Şekil-4.9	<i>Gösterge 3.1.1.2</i> 'nin gözlendiği esnada Kerem'in çizdiği şekil.....	74
Şekil-4.10	<i>Gösterge 3.1.3.3</i> 'ün gözlendiği esnada Erdem'in şekle uyguladığı dönüşüm.....	75
Şekil-4.11	<i>Gösterge 3.1.3.3</i> 'ün gözlendiği esnada Asya'nın şekle uyguladığı dönüşüm.....	76
Şekil-4.12	<i>Gösterge 3.1.3.3</i> 'ün gözlendiği esnada Kerem'in şekle uyguladığı dönüşüm.....	76
Şekil-4.13	<i>Gösterge 3.1.4.1</i> 'in gözlendiği esnada Erdem'in kullandığı şekil.....	77
Şekil-4.14	<i>Gösterge 3.1.4.1</i> 'in gözlendiği esnada Asya'nın kullandığı şekil.....	77
Şekil-4.15	<i>Gösterge 3.1.4.1</i> 'in gözlendiği esnada Kerem'in kullandığı şekil.....	78
Şekil-4.16	Erdem'in yedigenin içine üçgenleri çizdiği şekil.....	79
Şekil-4.17	Uygulama Sorusu 2.....	88
Şekil-4.18	Birinci Uygulama Sorusu İçin Katılımcılarda Gözlenen Dış ve İç Temsiller.....	89
Şekil-4.19	Katılımcılarda Gözlenen Cebirsel İfadeler.....	91

Şekil-4.20	Erdem'in ikinci uygulama sorusunu çözerken ürettiği semboller.....	92
Şekil-4.21	Kerem'in ikinci uygulama sorusunu çözerken ürettiği semboller.....	92
Şekil-4.22	Erdem'in yazılı ifadeler oluşturmaya çalışırken tabloya yazdığı veriler.....	93
Şekil-4.23	<i>Gösterge 1.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekiller.....	97
Şekil-4.24	<i>Gösterge 1.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Asya'nın çizdiği şekil.....	97
Şekil-4.25	<i>Gösterge 1.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Kerem'in çizdiği şekiller.....	98
Şekil-4.26	Katılımcılarda Gözlenen ve Formel Sistemlere Giren Göstergeler.....	98
Şekil-4.27	<i>Gösterge 2.1'</i> in gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekil.....	99
Şekil-4.28	<i>Gösterge 2.3'</i> ün gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekil.....	100
Şekil-4.29	<i>Gösterge 2.4'</i> ün gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekil.....	100
Şekil-4.30	<i>Gösterge 2.4'</i> ün gözlenmesi esnasında Asya'nın çizdiği şekil.....	101
Şekil-4.31	Katılımcılarda Gözlenen İmgesel Sistemlere Giren Göstergeler.....	102
Şekil-4.32	<i>Gösterge 3.1.1.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekil.....	102
Şekil-4.33	<i>Gösterge 3.1.1.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Asya'nın çizdiği şekil.....	103
Şekil-4.34	<i>Gösterge 3.1.1.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Kerem'in çizdiği şekil.....	103
Şekil-4.35	<i>Gösterge 3.1.2.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekle uyguladığı işlemler.....	103
Şekil-4.36	<i>Gösterge 3.1.2.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Asya'nın çizdiği şekle uyguladığı işlemler.....	104
Şekil-4.37	<i>Gösterge 3.1.2.2'</i> nin gözlenmesi esnasında Kerem'in çizdiği şekle uyguladığı işlemler.....	104
Şekil-4.38	<i>Gösterge 3.1.3.1'</i> in gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekle uyguladığı dönüşüm.....	104
Şekil-4.39	Üçüncü Uygulama Sorusu İçin Katılımcılarda Gözlenen Dış ve İç Temsiller.....	114
Şekil-4.40	Erdem'in Üçüncü Uygulama Sorusuyla Uğraşırken Oluşturduğu Cebirsel İfadeler.....	117
Şekil-4.41	Kerem'in Üçüncü Uygulama Sorusuyla Uğraşırken Oluşturduğu Cebirsel İfadeler.....	117
Şekil-4.42	Erdem'in Sözel Temsil Oluştururken Kullandığı Şekil.....	120
Şekil-4.43	Asya'nın Sözel Temsil Oluştururken Kullandığı Şekil.....	120
Şekil-4.44	Kerem'in Sözel Temsil Oluştururken Kullandığı Şekil.....	120

Şekil-4.45	<i>Gösterge 2.1</i> 'in gözlenmesi esnasında Erdem'in ürettiği cebirsel ifadeler.....	121
Şekil-4.46	<i>Gösterge 2.1</i> 'in gözlendiği esnada Kerem'in ürettiği cebirsel ifadeler.....	121
Şekil-4.47	<i>Gösterge 2.3</i> 'ün gözlendiği esnada Erdem'in ürettiği cebirsel ifadeler.....	122
Şekil-4.48	<i>Gösterge 3.1.1.2</i> 'nin gözlendiği esnada Erdem'in ürettiği şekil.....	123
Şekil-4.49	<i>Gösterge 3.1.1.2</i> 'nin gözlendiği esnada Asya'nın ürettiği şekil.....	123
Şekil-4.50	<i>Gösterge 3.1.1.2</i> 'nin gözlendiği esnada Kerem'in ürettiği şekil.....	123
Şekil-4.51	<i>Gösterge 3.1.2.1</i> ve <i>Gösterge 3.1.2.2</i> 'nin gözlendiği esnada Erdem'in incelediği şekil.....	123
Şekil-4.52	<i>Gösterge 3.1.2.1</i> ve <i>Gösterge 3.1.2.2</i> 'nin gözlendiği esnada Asya'nın incelediği şekil.....	124
Şekil-4.53	<i>Gösterge 3.1.2.1</i> ve <i>Gösterge 3.1.2.2</i> 'nin gözlendiği esnada Kerem'in incelediği şekil.....	124
Şekil-4.54	<i>Gösterge 3.1.3.1</i> 'in gözlendiği esnada Erdem'in şekle uyguladığı dönüşüm.....	125
Şekil-4.55	<i>Gösterge 3.1.3.1</i> 'in gözlendiği esnada Kerem'in şekle uyguladığı dönüşüm.....	125
Şekil-4.56	<i>Gösterge 3.2.1</i> 'in gözlendiği esnada Erdem'in kinestetik işlemler uyguladığı şekil.....	126
Şekil-4.57	<i>Gösterge 3.2.1</i> 'in gözlendiği esnada Asya'nın kinestetik işlemler uyguladığı şekil.....	126
Şekil-5.1	İmgesel Temsillerin Oluşum Sırası.....	138
Şekil-5.2	Öğrencilerin Geometrik Problemlerle Uğraşırken Ürettikleri Temsiller ve Bu Temsiller Arasındaki Etkileşimler.....	141

RESİMLER LİSTESİ

Resim-3.1	Araştırmanın Gerçekleştiği Ortam.....	52
-----------	---------------------------------------	----

KISALTMALAR LİSTESİ

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

KBS: Katılımcı Belirleme Sınavı

1. BÖLÜM

1.GİRİŞ

Bu bölümde problem durumu, problem cümlesi, araştırmanın amacı, önemi, sınırlılıkları, varsayımları ve araştırmada ele alınan tanımlar yer almaktadır.

1.1 Problem Durumu

Yapılandırmacı yaklaşıma göre öğrencilerin anlamalarını güçlendirmek için onların zihinsel süreçlerinin anlaşılması gerekmektedir (Steffe, 1991; Goldin, 1998a; Cobb, Yachel ve Wood, 1992). Çünkü öğrencilerin zihinsel süreçlerinin anlaşılmasıyla, matematik ve geometri kavramlarını anlamlı biçimde yapılandırmak mümkün olabilir. Bu bağlamda, öğrencilerin bir bilgiyi, kavramı nasıl algıladıkları ve zihinlerinde nasıl yapılandıklarını anlamak büyük önem kazanmaktadır (Kaput, 1994; Goldin, 1998a; Pape ve Tschoshanov, 2001). Öğrencilerin zihinlerinde bir bilginin nasıl yapılandığını anlamamanın yollarından biri de, onların kavramlar arasında anlamlı ilişkiler kurmalarını sağlayan temsil üretme ve kullanma süreçlerini araştırmaktır.

Temsil, en genel anlamda “bir şey” için oluşturulan bir yapı, bir nesne için söylenen kelime, bir problem durumunu tanımlayan cümle, “bir şeyin” düzenlenmesini sağlayan bir şema, bir manzara için bir resim olarak tanımlanabilir (McKendree, Small ve Stenning, 2002). Bu tanım dikkatlice incelendiğinde, temsilin matematik ve geometri eğitimi için ne kadar etkili bir role sahip olduğu açıkça görülmektedir. Çünkü problem çözücüler; bir kavrama, bir probleme ya da onun çözümüne ilişkin düşüncelerini çoğu zaman sembol, cümle, tablo gibi çoklu temsilleri üreterek veya kullanarak ortaya koyabilirler. Böylece, öğrenciler matematik ve geometride bir kavramın farklı biçimlerde nasıl ifade edilebileceğini görebilirler (McKendree ve diğ. , 2002). Öğrenciler bir kavramı farklı biçimlerde ifade ederken temsiller arasında geçişler meydana gelir. Temsiller arasındaki bu geçiş ve öğrencilerin temsiller arasında kurdukları ilişki, matematiksel ve geometrik kavramların öğrenilmesinde büyük önem taşımaktadır. Yapılan birçok çalışmada; matematik eğitiminde çoklu temsil

kullanımının, kavramların derin bir şekilde anlaşılmasına yardımcı olarak problem çözmeyi geliştirdiği vurgulanmaktadır (Borba ve Confrey, 1993; Yerushalmy, 1997; Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Duran, Reed ve Weeb, 1997; Swafford ve Langrall, 2000; Porzio, 1999; Ozgun-Koca, 1998). Örneğin; Dienes (1960) Çoklu Yapı Prensibi'nde (Multiple-Embodiment Principle ya da Perceptual Variability Principle) matematiksel kavramlarla ilgili soyut bir durumun içerdiği anlamı, öğrencilerin kendilerinin elde etmeleri için mümkün olduğunca çeşitli şekillerde sunulması gerektiğini vurgulamaktadır. Ek olarak, öğrenciler çeşitli fiziksel yapılar ve şekiller aracılığıyla matematiksel bir kavramı açıkladıklarında, kavramsal öğrenmenin daha ileri düzeye ulaştığını ifade etmektedir.

Çoklu temsil kavramına ilişkin teori, aşağıdaki karakteristikleri içermektedir.

- a) Farklı temsillerin yer aldığı bir kümede matematiksel bir fikrin tanımlanması,
- b) Farklı temsillerin yer aldığı bir kümede matematiksel bir fikrin manipüle edilmesi,
- c) Düşüncenin bir temsilden başka bir temsile transfer edilmesi,
- d) Bir kişinin zihninde oluşturduğu iç temsiller arasında bağlantının kurulması,
- e) Verilen bir problem için uygun olan temsili kullanmaya karar verilmesi,
- f) Bir kavrama ilişkin çeşitli temsillerin farklılıklarının, benzerliklerinin, güç yanlarının ve kolay yanlarının tanımlanması (Owens ve Clements, 1998).

Yukarıda verilen karakteristikler, temsil kavramını birçok açıdan ele aldığı için çoklu temsil kavramının açıklanmasında çok önemli bileşenler olarak görülebilir. Bu bileşenlere göre bir kavram, birçok farklı temsille ifade edilebilir ve bu ifadelerde temsiller arasında etkileşimler olabilir. Bu bakımdan, kavramları ifade ederken çoklu temsillerin kullanımı derin ve esnek anlamının oluşumuna imkân sağlar (Keller ve Hirsch, 1998). Ayrıca öğrenciler farklı gösterimlerin aynı anlama geldiğini daha rahat bir biçimde anlayabilirler (Erbilgin, 2003).

Temsiller, iç ve dış temsiller olarak iki sınıfa ayrılabilir. İç temsiller, öğrencilerin zihinlerinde var olan ve direk olarak görülemeyen zihinsel

konfigürasyonlardır (Goldin, 1990, 1998a, 2000, 2004). Dış temsiller ise tablo, grafik, resim, denklem ya da bilgisayar sistemleri gibi direk olarak görülebilen konfigürasyonlardır (Goldin ve Kaput, 1996). Yapısalcı yaklaşıma göre iç temsiller, öğrencilerin zihinlerinde; dış temsiller ise öğrencilerin çevrelerinde bulunmaktadır (Cobb, Yachel ve Wood, 1992). Bu araştırmada ele alınan iç temsil kavramı, yapısalcı bir araştırmacı olan Goldin'in teorisine aittir. Bu araştırmacı, teorisinde öğrencilerin zihinlerinde oluşan kavramsallaştırmanın daha net görülmesi açısından iç temsillerin incelenmesinin anlamlı olacağını savunmaktadır (Goldin,1998b). Fakat problem çözmeye ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, öğrencilerin dış temsil kullanımlarına odaklanan araştırmaların yoğunlukta olduğu ortaya çıkmaktadır. Oysa problem çözerken öğrencilerin matematiksel kavramlarla ilgili ürettikleri dış temsillerin yanında iç temsiller de incelenerek, bu temsiller arasındaki etkileşimler için bir model sunulabilir. Çünkü etkileşim süreçlerinin anlaşılması, hazırlanacak öğretim programları ve bu programları uygulayacak öğretmenler için oldukça önemlidir. Böyle bir modeli ortaya koyabilmek için de öğrencilerin ürettiği iç temsiller devreye girmektedir. Üretilen bu iç konfigürasyonlar direk olarak gözlemlenemez; fakat gözlemlenebilir davranışlar sonucu elde edilebilir (Goldin, 1998b).

Sonuç olarak; bu araştırmada öğrencilerin geometrik problemlerle uğraşırken oluşturacağı iç ve dış temsiller ile bu temsiller arasındaki etkileşimlerin bilişsel süreçler içinde nasıl işlediğinin ortaya koyulması, matematiksel problem çözmeye ve kavramsal anlamaya sağlayacağı katkılar nedeniyle odak nokta olarak ele alınmıştır.

1.2. Problem Cümlesi

Öğrencilerin bazı geometrik problemlerle uğraşırken, oluşturdukları dış temsillerle iç temsiller arasında nasıl bir etkileşim meydana gelmektedir?

1.3. Alt Problemler

1.3.1. Öğrencilerin bazı geometrik problemlerle uğraşırken, oluşturdukları dış temsiller nelerdir?

1.3.2. Öğrencilerin bazı geometrik problemlerle uğraşırken, oluşturdukları iç temsiller nelerdir?

1.3.3. Öğrencilerde oluşan bu iç ve dış temsiller arasında bir ilişki var mıdır; varsa bu ilişki nasıldır?

1.4. Araştırmanın Amacı

Araştırmanın amacı, öğrencilerin verilen geometrik problemlerle uğraşırken sergiledikleri davranışlar, konuşmalar ve düşünceleri aracılığıyla sahip oldukları iç ve dış temsillerin neler olduğunun ortaya çıkarılması ve zihinlerindeki temsilsel yapının anlaşılmasıdır. Bu amaç doğrultusunda, öncelikle öğrencilerin oluşturdukları iç ve dış temsiller ele alınmış ve ardından bu temsiller arasındaki etkileşimlere odaklanılmıştır.

Öğrencilerin zihinlerindeki temsillere karşı geliştirdikleri düşüncelere bakarak, onların geometrik kavramlar hakkındaki algıları ve geometri dersine bakış açıları da keşfedilebileceğinden çoklu temsil konusuna odaklanmak anlamlı bulunmaktadır.

1.5. Araştırmanın Önemi

Temsil; öğrencilere kavramları anlama konusunda kelimelerle sözel, tablolarla sayısal, grafiklerle görsel ve sembollerle cebirsel olarak yardımcı olur. Böylece, öğrenciler matematik ve geometride bir kavramın farklı biçimlerde nasıl ifade edilebileceğini görebilirler (McKendree ve diğ., 2002). Çoklu temsil yaklaşımı, öğrencilerin bilişsel süreçlerini etkin hale getirerek kavramsal anlamayı geliştirir. Bu nedenle, matematik ve geometri eğitiminin öğrencilerin temsiller arası geçişlerini sağlayan ve anlamlı öğrenmeye yardımcı olmak için farklı temsil türlerinin kullanılmasına imkân tanıyan bir yapıda sunulması eğitimin etkinliğini artırma adına faydalı olabilir.

Dış temsiller, problem çözümler ya da bireylerle ilgili çıkarımlardan ziyade matematiksel anlam ve ilişkiler üzerine konuşmaya izin verir. Bunun yanında iç temsiller, bireylerin bilgi yapılarını ve problem çözme süreçlerini ifade edilmesini

sağlar. İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimlerin anlaşılması ise bireyler hakkında çıkarımlar yaparak, onların öğrenme biçimleri hakkında konuşulmasına imkan tanımaktadır (Goldin ve Kaput,1996). Tüm bunlar göz önünde bulundurularak, bu araştırmada temsiller arasındaki etkileşimi anlamaya çalışmakla, geometri öğretimi ve öğrencilerin öğrenmelerine ilişkin derin bilgiler elde edileceği düşünülmektedir.

Bu araştırma, öğretimin etkinliğini sağlayarak öğrencilerin iç ve dış temsilleri aracılığıyla kavramsal algılarını ve kavram yanlışlarını ortaya koyabilir. Bunun yanında, çalışmanın öğretmenlere öğrencilerindeki iç ve dış temsil yapılarını keşfetme olanağını sağlayacağı düşünülmektedir. Ek olarak, temsiller anlamlı öğrenme, kavramların öğretilmesi, öğrencilerdeki kavram yanlışlarının tespit edilmesi, öğrencilerin problem çözme yöntemini kavrama ve problem çözme becerilerini geliştirme gibi amaçlarla kullanılabilir.

Kaput (1991), öğrencilerin iç temsil oluşturmalarını ve bu oluşuma göre matematiksel ve geometrik kavramları nasıl anladıklarını ortaya koymanın bir yolunun onları dış temsillerle uğraştırmak olduğunu iddia etmektedir. Ek olarak, Janvier (1987a) öğrencilerde oluşan iç temsilleri anlamak için okul kitaplarının, çeşitli öğretim materyallerin öğrencileri dış temsillerle etkileşime geçirecek biçimde düzenlenmesi gerektiğini ifade etmektedir. Yani iç temsilleri direk olarak gözlemlene imkânı olmadığı için oluşumlarını anlama adına, dış temsillerin kullanılması kaçınılmazdır. Böylece öğrencilerin bir kavrama ilişkin zihinlerinde oluşan yapılar daha net bir biçimde ortaya koyulabilir.

Dufour-Janvier, Bednarz ve Belanger (1987), matematik eğitiminde temsilin nasıl bir role sahip olduğu ve önemi üzerine çeşitli bakış açıları sunmaktadırlar. Bu düşünceler, aşağıda yer almaktadır. Temsiller,

- matematiğin ayrılmaz parçalarıdır.
- bir kavramı birçok farklı yoldan somutlaştırabilir.
- karşılaşılan birçok zorluğu kolaylaştırır.
- matematiği daha ilginç ve istenir hale getirme adına önemlidir.

Temsillerin birçok kavramın anlaşılmasını kolaylaştıran yönünü göz önüne alırsak, okulda müfredat programlarının oldukça fazla bir kısmı temsil yeteneklerini öğretmeyi amaçlayarak tasarlanabilir. Öğrencilere çeşitli temsilleri kullanabilecekleri problemler çözdürülürse geometriyi anlamaları daha üst seviyeye taşınabilir. Ayrıca bir öğrencinin kullanacağı özel bir temsil vasıtasıyla problemin daha iyi ifade edilebileceğini kavrayabilmesi, içinde bulunduğu durumun en önemli yönünü belirlemesine ve problemin çözümü için atacağı adımlara karar vermesine yardımcı olabilir.

Temsilleri problem çözerken kullanmanın yanında, öğretmenlerin ve öğrencilerin bir temsil yardımıyla düşüncelerini dışa vurmaları, onların düşündükleriyle ilgili bilgi edinmede oldukça değerli bir işlemdir. Bu durum sağlandığında, öğrenciler daha fazla ve daha farklı bir şekilde bilgi birikimlerini ve düşüncelerini ortaya koyarlar. Sonuç olarak da düşünsel süreçlerle ilgili daha fazla bilgi edinilebilir (McKendree ve diğ. , 2002). Bu nedenle, okullarda temsillerle desteklemiş kaynaklardan öğrencilerin faydalanmaları sağlanabilir ve bu şekilde öğrencilerin kendilerine uygun olan temsili seçmelerine imkan verilebilir.

1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırmada da her araştırmada olduğu gibi çeşitli sınırlılıklar bulunmaktadır. Bu sınırlılıklar, aşağıda yer almaktadır.

1. **Katılımcı Sayısı**: Araştırma nitel bir dizayna sahip olduğundan, katılımcı sayısı üç kişi ile sınırlıdır. Çünkü pek çok nitel araştırma yönteminde olduğu gibi durum çalışmasında yer alacak katılımcılar, diğer araştırma metotlarına kıyasla sayı olarak az kişiden oluşmaktadır. Bunun nedeni, durum çalışmalarında ayrıntılı ve derinlemesine incelemenin yer almasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu araştırma, bireylerin zihinsel süreçlerinin ele alınmasını içermektedir. Bu sürecin karmaşık yapısından ötürü az sayıda kişiyle çalışmak mantıklı bulunmuştur.

2. Araştırmanın Yapıldığı Ortam: Hem araştırmanın amacı hem de araştırmada kullanılan metot, çalışmanın sınıf ortamından farklı bir ortamda gerçekleştirilmesini mecbur kılmıştır. Aynı ortamda bulunan öğrencilerin kendilerini soru çözerken rahat hissedememesi gibi durumların oluşabilme ihtimali, araştırma için bir sınırlılık teşkil etmektedir. Fakat bu durum, katılımcıların kendilerini rahat hissetmeleri sağlanmaya çalışarak aşılmaya çalışılmıştır.
3. Araştırmada Kullanılan Metodoloji: Araştırma verilerinin elde edilme sürecinde, öğrencilerin bazı zamanlar tam olarak düşüncelerini sesli düşünme metoduna uygun olarak yansıtamama ihtimali, araştırmanın bir diğer sınırlılığıdır. Sesli düşünme metodunu kullanmaya alıştırmak ve araştırmayı amacına ulaştırmak için uygulamaya başlamadan önce katılımcılara bu metot hakkında bilgiler verilmiştir. Uygulama sorularına geçmeden önce, katılımcıların sesli düşünme metodunu kullanarak problemler çözmeleri sağlanmıştır.
4. Veri Toplama Araçları: Araştırmada verilerin toplanması amacıyla video kaydedicisi kullanılmıştır. Video kayıt işlemini daha önceden tecrübe etmemiş katılımcıların bazı sıkıntıları söz konusu olabileceği için katılımcılar ve araştırmacı arasında ılımlı bir atmosfer oluşturulmaya çalışılmıştır.
5. Araştırmada Kullanılan Teori: Temsil kavramı üzerine birçok matematik eğitimcisi araştırmalar yapmış ve çeşitli modeller ortaya atmışlardır. Araştırmada, iç temsiller için Goldin ve Kaput'un (1996) önerdiği temsil modellerine, dış temsiller için ise Lesh, Post ve Behr'in (1987) temsil modeli ile Janvier'in (1987a) temsil modeline odaklanılmıştır.

1.7. Araştırmanın Varsayımları

- Araştırmada kullanılan uygulama sorularını öğrencilerin tüm ciddiyet ve samimiyetle cevaplayacakları varsayılmıştır.
- Araştırma sırasında uygulanan sesli düşünme metodunun gerekçelerine öğrencilerin her zaman sadık kalarak davranacakları varsayılmıştır.

1.8. Tanımlar / Terimler

Temsil: Genel anlamıyla bir temsil, bir amaçla başka bir şeyi temsil edebilen bir konfigürasyondur (Goldin ve Kaput, 1996).

Temsil Sistemi: Yazılı semboller, konuşma dilinde kullanılan semboller, durgun şekilsel modeller ya da resimler, manipülatif modeller ve gerçek dünya durumlarını içeren bir sistemdir (Goldin, 1998a).

İç Temsil: Öğrencilerin zihinlerinde var olan ve direk olarak görülemeyen zihinsel konfigürasyonlardır (Goldin, 1990).

Dış Temsil: Tablo, grafik, resim, denklem ya da bilgisayar sistemleri gibi fiziksel olarak temsilştirilmiş, direk olarak gözlenebilen konfigürasyonlardır (Goldin ve Kaput, 1996).

2. BÖLÜM

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. İç ve Dış Temsil (Gösterim) Kavramı

Temsillerle alakalı literatür tarandığında, “temsil” kavramına ilişkin bir çok tanım yer almaktadır (diSessa ve Sherin, 2000; Eisner, 1997; Goldin, 1998b; Janvier, 1987b; Kaput, 1994; Lesh ve diğ. , 1987; Seeger, Voight, ve Werschescio, 1998) bu tanımları genel terimlerle aşağıdaki gibi özetlemektedirler.

“Temsil,

- Özel bir içerikle ilgili zihinsel aktivitenin bir çeşididir.
- Var olan zihinsel durumun bir kopyasını çıkarmaktır.
- Bir resim, sembol ya da bir işaretir.
- Herhangi bir şeyin yerini alan başka bir şeydir.”

Çoklu temsillerin kullanımı, birçok matematik eğitimcisi tarafından konu olarak ele alınmış ve aynı zamanda NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) standartları tarafından desteklenmiştir (NCTM, 1989). Matematik öğretim programları, matematiğin daha iyi anlaşılmasına olan katkısından dolayı çoklu temsillere vurgu yapmaktadır. Matematik öğretim programlarında tüm öğrenciler tarafından,

- Matematiksel fikirleri organize etmede, kaydetmede ve kavramlar arasında bağlantı kurmada temsillerin üretilmesi ve kullanılması,
- Problemleri çözmek için matematiksel temsiller arasında seçim yapma, onları uygulama ve aralarında transfer etme,
- Fiziksel, sosyal ve matematiksel fenomenleri yorumlama ve onlara model oluşturulması amacıyla temsillerin kullanılması üzerine vurgu yapılmaktadır (NCTM, 1998).

Adı geçen NCTM-1989 ve NCTM-1998’de yer alan standartlardan farklı olarak, NCTM-2000’de yer alan standartlarda göze çarpan yeni çoklu temsil yaklaşımının başlı başına ele alınmış olmasıdır. Bu sürece kadar matematik eğitimiyle ilgili yapılan

araştırmalar sonucunda, çoklu temsiller farklı bir standart olarak kendini göstermiştir. Bu standartlara göre, öğrenciler sadece çoklu temsilleri kullanmaya cesaretlendirilmemeli; aynı zamanda onları üretmeye, matematiği öğrenme adına araçlar olarak kullanmaya, matematiksel durumlara uygulamaya ve bu temsiller arasında dönüşümler yapmaya cesaretlendirilmelidir (NCTM, 2000).

Palmer (1978), temsili bir şeylerin yerine geçen başka bir şey olarak ifade etmektedir. Bu araştırmacıya göre, temsil edilen ve temsil eden olmak üzere iki önemli kavram bulunmaktadır. Ayrıca, temsil edilen ya da temsil eden dünyadan birinin soyut olabileceğini belirtmektedir. Bu görüşe benzer olarak, Vergnaud (1987), bir temsil sisteminde yer alan üç bileşenden söz etmektedir. Bunlar; gönderge (referent), gösterilen (the signified) ve gösteren (the signifier) olarak ifade edilmektedir. Gösterilen dünya, Palmer'in belirttiği “*temsil edilen dünya*”, gösteren dünya ise “*temsil eden dünya*” kavramlarıyla özdeş anlamlar taşımaktadır.

Temsilleri kavramsallaştırmak için dört temel düşünce vardır. Bunlardan birincisine göre temsil, matematik alanında öğrencinin tecrübeleri aracılığıyla geliştirdiği bilişsel şemalar ya da soyut içselleştirilmiş düşüncelerdir. İkinci düşünceye göre temsil, önceki zihinsel durumun yerine yeni bir zihinsel durumun üretilmesi olarak ifade edilebilir. Üçüncü olarak; bir resim, şekil, sembol ya da bir işaret de temsil anlamına gelir. Son olarak da temsil, bir şeylerin yerine geçen başka bir şey olarak tanımlanabilir (Pape ve Tchoshanov, 2001).

Temsiller, iç ve dış temsiller olarak iki sınıfta kategorize edilebilir. İç temsiller, problem çözme ve matematiksel süreçleri tanımlamak için bireyin davranışlarından elde edilen bireysel bilişsel konfigürasyonlardır. Diğer taraftan dış temsiller; tablo, grafik, resim, diyagram gibi somut yapılardır (Goldin ve Janvier, 1998). İç ve dış temsillere yapısalcı yaklaşımın sunduğu bakış açısı da bu tanıma yakın bir anlam taşımaktadır. Yapısalcı yaklaşıma göre iç temsiller, öğrencilerin zihinlerindedir; dış temsiller ise öğrencilerin çevrelerinde bulunmaktadır (Cobb ve diğ. , 1992).

İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimler konusunda matematikçiler birbirinden farklı görüşler sunmaktadır. Wileman (1980), iç temsillerle dış temsiller arasında bir farkın olmadığını savunmaktadır. Onun düşüncesine göre, çizilen şey ile zihinde görselleştirilen şey birbirinin aynıdır. Diğer taraftan, Arnheim (1969) dış temsillerin iç temsillerden farklı olduğunu iddia etmektedir. Örneğin; kâğıda çizilen şey ile zihinden geçen şeyin birbirinden farklı olabileceğini savunmaktadır.

Matematik Eğitiminde Çoklu Temsil Alanındaki İlk Öncüler:

Matematik eğitiminde çoklu temsil kavramı, ilk olarak Dienes'in (1960) çalışmalarında matematik öğretimi için çeşitli materyaller tasarlamasıyla önem kazanmaya başlamıştır. Dienes, çalışmalarında çocukların günlük yaşam içindeki matematiksel kavramlara alışkın olmadığını; bu nedenle de kavramların onlara somut örnekler ve tecrübe edindirilerek verilmesi gerektiğini savunmaktadır (Resnick ve Ford, 1981). Dienes, bu düşüncesinden yola çıkarak çeşitli aritmetik blokları ya da Dienes blokları diye isimlendirilen farklı taban sistemleri göstermek üzere planlanmış tahta bloklar tasarlamıştır. Bu materyaller farklı taban sistemleri göstermek üzere planlanmış tahta bloklardan oluşmaktadır.

Bruner (1960), çoklu temsil teorisine katkı sağlayan bir diğer isimdir. Bruner, çocukların öğrenme durumları üzerine çalışmalar yürüterek, bilişsel süreçlerini ve kavramları zihinlerinde nasıl algıladıklarını ortaya koymaya çalışmıştır (Resnick ve Ford, 1981). Bu araştırmacı, yaptığı çalışmada bir çocuğun geçmiş yaşantılarında edindiği tecrübeleri, gerektiğinde kullanmak üzere zihninde kodlandığını ve işlendiğini ifade etmektedir. Ayrıca, bu kodlama ve işleme sürecini temsil olarak isimlendirmektedir.

Bruner, eylemsel, imgesel ve sembolik olmak üzere üç temsil türünü ortaya koymaktadır. Eylemsel temsil, duyu motor hareketleri içine alan bir temsil türüdür. Örneğin; çocuklar sayıları sayarken ya da aritmetik işlemler yaparken parmaklarını kullanırlar. Bu, bir motor duyusal harekettir. İmgesel (iconic) temsil, bir işlemi ya da bir manipülasyonu zihinde görsel hale getirme esnasında oluşmaktadır. Örneğin, bir öğrenci 1 ile 10 sayıları arasında bir ilişki kurarken, zihninde 1 ve 10 sayılarına dair oluşturduğu resimlerde miktarsal bir kıyaslama yapabilir. Böylece, sayıları zihninde

oluşturduğu resme göre inceler ve yorumlar (Resnick ve Ford, 1981). Sembolik temsil ise, daha soyut bir yapıya sahiptir. Bu temsil türünde, bir işaret ya da kelime ele alınan başka bir şeyin yerine geçer. Fakat bu işaret ya da kelime, yerine geçtiği şeyle biçimsel anlamda benzerlik göstermez. Sayıların yazılışlarının sayılara benzememesi, bu duruma örnek teşkil etmektedir (Cramer ve Karnowski, 1995).

Yapılandırmacı Paradigmada Temsil Kavramı:

Yapısalcı teori, her öğrencinin edindiği bilgiyi aktif bir biçimde kendisinin inşa ettiğini savunmaktadır (Goldin, 1990; von Glasersfeld, 1987). Bu nedenle, tüm öğrencilerin bir temsilden aynı kavramı anlaması ya da o temsille ilgili aynı algıya sahip olması beklenemez. Yapılandırmacı paradigmaya göre temsil, “zihnin temsilsel görünüşü” olarak isimlendirilen aktif bir yapıdır (von Glasersfeld, 1987).

Temsil türleri; konuşma ve yazmada kullanılan semboller, statik modeller ve resimler, gerçek dünya durumlarını içermektedir (Goldin, 2000). Temsiller; aynı zamanda rakamlar, harfler ve rakam ya da harflerle yapılan işlemleri de içine alır. Harfler kullanılarak kelimelerin oluşturulması ya da rakamlar kullanılarak çok basamaklı sayıların elde edilmesi, bu işlemlere örnek olarak verilebilir. Matematikte problem çözme ve öğrenmeyi geliştirmek için temsiller ve aralarındaki geçişle ilgili bir teori sunmak oldukça önemlidir (Goldin, 1990).

Temsil kendi başına bir anlam ifade etmez. Temsilin anlamlı olabilmesi için yorumlanması gerekir. Bunun için de bir yorumlayıcıya gerek vardır. Örneğin; zambağın resim olarak çizimini gören bir kişi, resimle daha evvel karşılaşmışsa, direk olarak resimde gördüğü çiçeği zihninde canlandırır. Ayrıca, bu resmin zambaktan farklı olduğunu ve sadece onu temsilen çizildiğini kavrar. Oysa zambakla daha evvel karşılaşmamış bir kişide çizilen resimle ilgili aynı izlenimler oluşmayabilir (von Glasersfeld, 1987). Örnekte de görüldüğü gibi yapısalcı paradigmada bilgi, bu bilgiyi öğrenen kişiden ayrı olarak düşünülemez. Öğrencilerin matematiksel fikirleri yorumlamaları, iç temsil olarak zihinlerinde oluşur. Eğer anlamlı öğrenme isteniyorsa, öğrenciler zihinlerinde oluşan iç temsilleri dışsallaştırırlar. İşte bu noktada iki temsil arasında bir köprü, bir etkileşim kurulmuş olur. İki temsil türü arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak için öğrencilerin matematik sembollerden konuşma diline kadar tüm temsil

türlerini kullanabilecekleri ya da üretebilecekleri ortamlar düzenlenmelidir (Goldin, 1990). Bizim de bu çalışmada amacımız, bu etkileşimin nasıl olduğunu ve oluşumunda ne gibi durumların etkin olduğunu ortaya koymaktır.

2.2. Temsil Kavramıyla İlgili Başlıca Modeller

Bu bölümde temsil kavramıyla ilgili geliştirilen modeller yer almaktadır. Bunlar;

- Kaput'un Temsil Modeli
- Janvier'in Temsil Modeli
- Lesh'in Temsil Modeli
- Goldin'in Temsil Modeli

başlıkları altında açıklanmıştır. Daha sonra, araştırmada ele alınan temsil çeşitleri ve modellerinin neler olduğuna yer verilmiştir.

2.2.1. Kaput'un Temsil Modeli

Kaput (1989, 1991, 1994), temsil kavramıyla ilgili teknoloji boyutunu ön plana çıkaran bir teori sunmaktadır. Tablo, grafik, formüller gibi matematiksel temsiller arasında teknoloji kullanılarak bağlantı kurulmasının daha kolay olacağı savunulmaktadır (Blanton ve Kaput, 2003; Kaput, 1994). Kaput'a göre öğrenciler, zihinlerinde var olan temsilleri bilgisayarlar aracılığıyla daha kolay dışa yansıtabilirler. Teknoloji kullanılarak öğrencilere yeni temsil türlerini kullanma ve üretme imkanı verilmesi iki temsil sistemi arasındaki etkileşimi daha iyi anlamalarına imkan tanınabilir (Kaput, 1994).

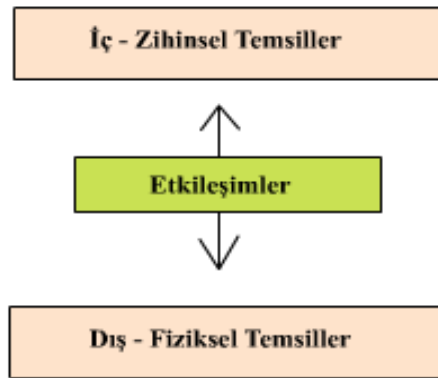
Kaput'un (1991, s.55) ortaya koyduğu temsil modeline göre, iç temsiller “zihinsel yapılar”; dış temsiller ise “notasyonal yapılar” olarak adlandırılmaktadır. Zihinsel yapılar, bireylerin problem çözmeyi organize etme ve yönetme esnasında ortaya koydukları düşünceleri içerirken, notasyonal yapılar belli bir dile ya da kültüre sahip topluluklar tarafından paylaşılan kültürel ya da dilsel somut yapıları içermektedir. Ek olarak, notasyonal sistemler bireylerin zihinsel yapılarını organize etmek için kullandıkları kağıt üzerindeki ya da bilgisayardaki herhangi bir şey olabilir. Bu

arařtırmacı, notasyonel sistemlerin kiřinin zihinsel yapılarından ayrı olarak dūřünülemeyeceęi konusunda von Glasersfeld'in (1987, s.216) dūřüncelerini desteklemektedir. Bu dūřünceye göre temsil kendi bařına bir anlam ifade etmez. Temsilin anlamlı olabilmesi için yorumlanması gerekir.

Kaput (1987), ortaya koyduęu modelde beř bileřene ayırdıęı bir temsilsel sūreçten söz etmektedir. Bu sūreç içindeki beř bileřen ařaęıda yer almaktadır.

1. temsil eden dūnya
2. temsil edilen dūnya
3. temsil eden dūnyadan bakıř aęıları
4. temsil edilen dūnyadan bakıř aęıları
5. iki dūnya arasındaki iliřki

Bu arařtırmacı, temsil edenle temsil edilen arasındaki iliřkiyi içine alan sūrele ilgili yapısal bir bakıř aęısı sunmaktadır. Matematikte sūrekli ve anlamlı bir öğrenmenin saęlanması için bu iliřkinin kurulması gerektięini savunmaktadır. Arařtırmacının grūřüne göre temsiller arasında Őekil 2.1'deki gibi sūrekli bir etkileřim mevcuttur (Kaput, 1991).

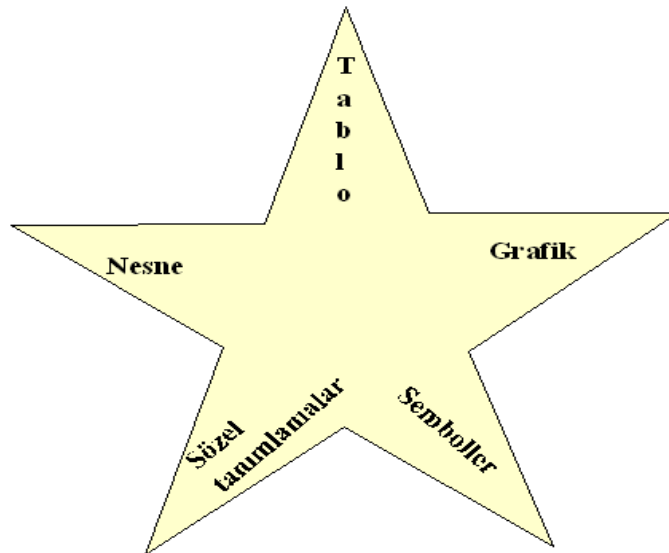


Şekil 2.1: İ ve Dış Temsiller Arasındaki İlişki

2.2.2. Janvier'in Temsil Modeli

“Matematik Öğrenmede Temsil Problemleri” adlı kitabı yazan Claude Janvier, temsil konusunda derin araştırmalar yapmıştır. Bu araştırmacıya göre temsil; kağıt üzerinde yazılı olan bazı şeylerin kombinasyonu, fiziksel nesnelere var olan bazı şeyler ve bir kişinin kendi dūřüncesini düzenlenmesi olabilir (Janvier, 1987a, s.67). Yukarıda yer alan ifadeye göre temsil; yazılı ifadeler, nesnelere ve zihinsel imgenin bir kombinasyonu olabilir.

Janvier de temsilleri, iç ve dış temsiller olarak iki gruba ayırmaktadır. Dış temsiller, kavramlar ve dūřüncelerin yapılarındaki ya da anlamlarındaki uyarıcı eylemlerdir. İç temsiller ise, direk olarak gözlemlenemeyen bilişsel ya da zihinsel modeller, kavramlar, şemalar ve zihinsel nesnelere (Janvier, Girardon ve Morand, 1993). Janvier, daha çok dış temsillere odaklı tanımlamalar ortaya koymaktadır. Bu tanımlar, çeşitli zihinsel süreçleri modelleyen ya da onlarla ilgili olan tablo, diyagram, grafik gibi sembollerin organizasyonlarını içine alır. Janvier ele aldığı temsilleri şekil 2.2'deki gibi yıldız modeliyle ifade etmektedir.



Şekil 2.2: Janvier'in Temsillerle İlgili Sunduğu Yıldız Modeli

Bu arařtırmacı, Őekil 2.4'te yer alan temsiller arasında geçiŐleri ifade eden bir yapıyı da ortaya koymaktadır. Yıldız modelinde her bir temsil, bir buz dađında bir nokta olarak dűŐünűlűrse; temsiller arasındaki geçiŐ, bir noktadan diđer noktaya olan geçiŐtir. Janvier (1987b, 27), bu geçiŐe Őematizasyon ismini vermektedir. Őrneđin; tablodan grafiđe giderken “okuma” faaliyetinin gerçekteŐtiđini ifade etmektedir.

Janvier (1998), sunduđu temsil modeline ek olarak, iki tip temsil dűnűŐümü olduđunu iddia etmektedir. Bunlar, direk dűnűŐüm ve direk olmayan dűnűŐümdür.

- Direk dűnűŐümler, bir temsilden diđerine geçiŐ esnasında arada baŐka temsilin kullanılmamasıdır. Buna örnek olarak; bir denklemden bir tabloya geçiŐ verilebilir.
- Direk olmayan dűnűŐümler ise bir temsilden diđerine geçiŐ yaparken arada baŐka bir temsil kullanılması durumudur. Bir denklemden tabloya geçerken arada grafik kullanılması, bu dűnűŐümün örneklerinden biridir.

Temsiller arasındaki geçişte kaynak ve hedef önemli noktalaradır. Herhangi bir temsilsel geçişte en az iki temsil çeşidi bulunur. Bu temsiller arasındaki geçiş, kişinin temsilleri anlamlandırması ve amacına göre deđiŐebilir. Bu nedenle, öğretmenler derslerinde kullanacakları her bir temsili, kaynak ve amaca uygunluk bakımından gözden geçirerek derslerini tasarlamalıdırlar (Janvier, 1987a).

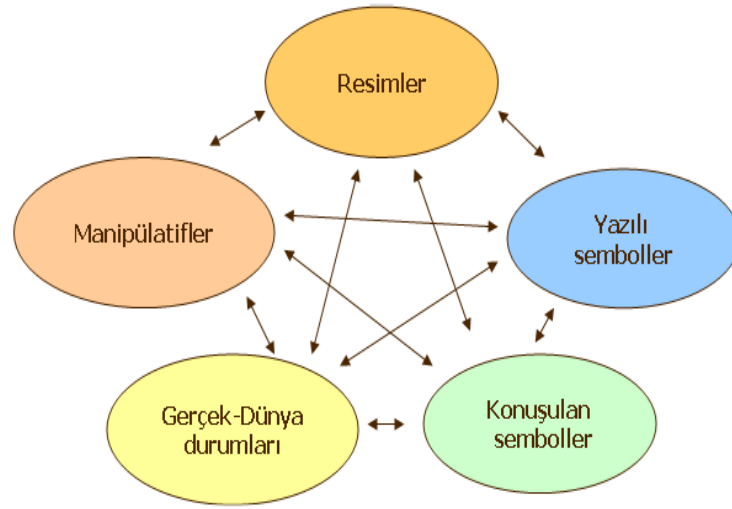
2.2.3. Lesh'in Temsil Modeli

Lesh'in (1979) Çoklu Temsil DűnűŐümleri Modeli (Lesh Multiple Representation Translations Model (LMRTM)), çoklu temsiller için ortaya atılmış önemli modellerden biridir. Bu modelde, temsiller arasındaki geçiŐler ve bunların ders planlarında nasıl uygulanacađına dair bilgiler yer almaktadır.

Lesh, Post ve Behr'e (1987, s.34) göre temsiller, matematiksel kavramları anlama adına çok büyük önem taşımaktadır. Temsil, öğrencilerin içsel olarak kavramsallaŐtırdıklarının dıŐsal olarak ifade edilmesinde kullanılan somut yapılarıdır. Bu modele göre, bir öğrenci matematiksel bir kavramı anlamıŐsa, o kavrama ait temsil

türleri arasında geçiş yapabilmelidir. Bu araştırmacıların sunduğu modelde, matematiği öğrenme ve problem çözmeye ortaya çıkan beş temsil türü, şekil 2.5'te ifade edilmektedir. Bu temsil türlerinin neler olduğu, aşağıda verilmiştir.

1. Gerçek dünya durumları: gerçek dünya durumları aracılığıyla organize edilen bilgiler
2. Manipülatifler: Somut modeller (küp modeli gibi)
3. Resimler ve diyagramlar: Statik biçimsel modeller
4. Konuşma dili (Günlük dil ifade edilmektedir.)
5. Yazılı semboller: Özel cümleler ve deyimler (Lesh ve diğ. , 1987, s.38).



Şekil 2.3: Lesh'in Çoklu Temsil Dönüşüm Modeli

Bu modelde sadece beş temsil türü değil aynı zamanda bu temsiller arasındaki geçişler büyük önem taşımaktadır. Bir öğrenci, ilk olarak matematiksel bir düşüncüyü verilen temsil sistemi içinde kavramsallaştırır. Daha sonra, bu düşüncüyü diğer temsil sistemleri içine yeterince esnek bir düşünce biçimiyle transfer edebilir (Lesh ve Kelly, 1997). Örneğin, bir öğrencinin $\frac{1}{3}$ gibi bir matematiksel kavramı anlamış olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir.

- Farklı temsil sistemlerinde gömülü duran " $\frac{1}{3}$ " ü tanımalı,
- Verilen temsil sistemi içinde " $\frac{1}{3}$ " ü rahatlıkla manipüle edebilmeli,
- Bir temsil sisteminden diğerine düşüncesini doğru bir şekilde aktarabilmelidir (Lesh ve diğ. , 1987, s.33).

Cramer ve Bezuk (1991), Lesh'in temsil modelinde Bruner'in ele aldığı modeldeki gibi hiyerarşik bir yapının bulunmadığını ifade etmektedirler. Lesh, sunduğu modelde daha çok temsiller arası geçiş üzerinde durmaktadır. Lesh'e göre temsiller arasındaki geçiş, temsil edilen kavramın anlamını bozmadan bir temsil sisteminden diğerine ilişki kurmaktır. Çünkü temsiller arasındaki geçişler, matematiksel öğrenme ve problem çözmeyi etkileyen önemli bir faktördür. Bazı durumlarda temsil sistemleri içinde dönüşümler çok sayıda olabilir. Örneğin, bir öğrenci cebirsel bir durumu önce grafikte temsil edip, ardından tablolaştırabilir. Böylece, aynı kavramın anlaşılması için birçok temsil türü kullanılmış olur (Lesh ve diğ. , 1987, s.40).

2.2.4. Goldin'in Temsil Modeli

Goldin (1998b), başkanlığını yaptığı PME Working Group içinde temsil kavramına bakış açılarını şu şekilde ifade etmektedir:

“Temsil konusunda bizim benimsediğimiz felsefe, kapsamlı ve eklektik bir yapıya sahiptir. Biz temsilleri neredeyse her durumda ele almaya çalıştık. En azından bir yolla değil; temsil sistemleri ve temsiller arasındaki ilişkileri göz ardı etmeden iki yolla bu konu üzerine eğildik.” (Goldin, 1998b, s.284).

Bazı araştırmacılar sadece dış temsillere odaklı çalışmalar sergilerken, bazıları ise sadece iç temsillere odaklı çalışmalar sergilemektedirler. PME Working Group içinde temsillere her iki açıdan bakma ve belli başlı sorulara cevap verme, amaç olarak belirlenmiştir. Goldin'in düşünceleri ve ortaya attığı temsil modelinin bileşenleri aşağıda açıklanmaktadır.

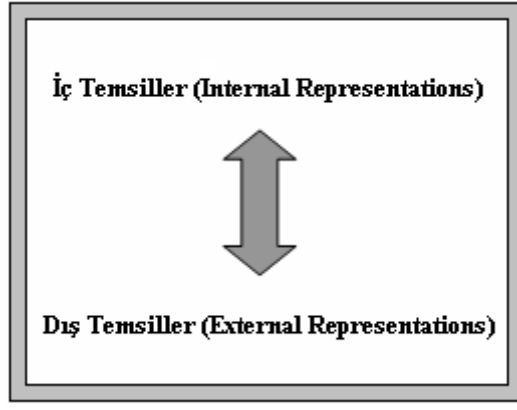
Goldin'in Modelinde Temsil Sistemi:

Goldin, dış temsillerle birlikte iç temsillere odaklı bir teori ortaya koymaktadır. Bu teoride temsil kavramı, problem çözmeye ve öğrenme ile ilişkilendirilerek diğer temsil sistemleriyle birleştirilmiş biçimde sunulmaktadır. Genel anlamıyla bir temsil, bir amaçla başka bir şeyi temsil edebilen bir konfigürasyondur. Örneğin, bir kelime bir

gerçek dünya durumunu, bir sayı bir kümenin kardinalitesini temsil edebilir (Goldin, 1998a). Bu teoriye göre iç temsil, bireylerin veya problem çözücülerin zihinsel konfigürasyonlarını ifade etmektedir. Doğal olarak iç olması, bu konfigürasyonların direk olarak gözlemlenememesi anlamına gelmektedir. Öğretmenler ya da gözlemciler, öğrencilerin zihinlerinde oluşan bu iç temsilleri ancak ürettikleri dış temsilleri ve gözlemlenebilir davranışları inceleyerek elde edebilirler (Goldin ve Kaput, 1996).

İç temsillerden farklı olarak dış temsiller; yazılı (written) ifadeler, grafikler, resimler, denklemler, bilgisayar verileri gibi fiziksel olarak şekillenmiş, gözlemlenebilen konfigürasyonlardır. Bu konfigürasyonlara, alanla ilgili bilgi sahibi olan herhangi biri gözlemlerle ulaşabilir. Gözlemler sonucu elde edilecek bilgiler, gözlenen bireylerde oluşan iç temsillerin incelenmesine bağlıdır. Fakat şu da unutulmamalıdır ki iç temsil sistemi, dış temsil sisteminin bir kopyası veya resmi değildir. Örneğin, grafiksel bir temsilin anlamı, bir kavramdan başka bir kavrama büyük çapta değişiklik gösterebilir. Alınan bu grafik, bir denklemden ziyade $f(x)=-3x+6$ ile ifade edilen bir fonksiyonu göstermek için kullanılabilir ya da koordinat ekseninde orijinin 6 metre doğusunda başlayan ve sabit hızla saniyede 3 metre batıya hareket eden bir nesnenin zamanı ile konumu arasındaki negatif ilişkiyi temsil edebilir. Yani ele alınan temsilin gücü ve faydası, açık bir biçimde yapılandırılmış olan sistem ile temsil edilmiş biçimindeki esneklik ve çok yönlülüğün derecesine bağlıdır (Goldin ve Kaput, 1996).

Goldin ve Shteingold (2001), iç ve dış temsiller arasındaki ayrımın önemli olduğunu çalışmalarında vurgulamaktadır. *Temsil eden* ile *temsil edilen* arasındaki ilişki, şekil 2.4'te görüldüğü gibi tersine çevrilebilir; yani sabit olamayan bir durumdadır. Ayrıca bu etkileşim, eş zamanlı bir şekilde oluşmaktadır. Bazı zamanlar bir birey içselleştirdiği dış-somut temsil sistemlerinin elemanlarını; manipule ederek, konuşarak, yazarak dışsallaştırırken, bazı zamanlar da kelime ve cümleleri kullanarak ya da denklem ve grafikleri yorumlayarak içselleştirir.



Şekil 2.4: Temsiller Arasındaki Etkileşim

Temsil edilen konfigürasyonla temsil eden konfigürasyonu, sabit ve kesin bir biçimde ayırmaktan ziyade bunların arasındaki ilişkinin çift yönlü oluşu açık hale getirilebilir. Burada bahsi geçen çift yönlülük, birinci konfigürasyonun ikinciyi temsil etmesi esnasında, ikinci konfigürasyonun da birinciyi temsil edebileceği anlamına gelmektedir. Örneğin, kartezyen koordinat sisteminde bir grafik, cebirsel bir denklemi temsil edebilir ya da cebirsel bir denklemle bir grafik temsil edilebilir (Goldin, 2002).

Goldin'in Temsil Modeli'nde Karakterler, Konfigürasyonlar ve Yapılar:

Bu başlık altında, Goldin'in 1998 yılında sunduğu çalışmalardan faydalanılarak, ele aldığı temsil sisteminin teknik yorumu verilmektedir.

Karakterler: Goldin'in öne sürdüğü sistem, birincil karakterler ya da işaretlerden (kelimeler ve birbirinin yerine geçebilen) oluşur. Bunlar, uygun şekilde ve iyi tanımlanmış kümelerde temsil edilen ayrık yapılardır. Sembolik mantıktaki karakterler, konuşma dilindeki kelimeler, alfabedeki harfler, noktalama işaretleri, sayılar, aritmetik işlem sembolleri, bir çemberin bileşenleri ya da DNA molekülündeki temeller; iyi tanımlanmış kümeye örnek olarak verilebilir. Bu tip karakterler, temsil sistemi içinde elementer varlıklar olarak kabul edildiğinde, onlara anlam ve yorum yüklemek zorlaşır. Kullanılan dildeki kelimeleri, temsilsel sistemdeki elementer karakterler olarak alırsak onları anlamlarına göre yorumlayamayız sadece okunuşlarına ve dilbilgisine ilişkin

bilgilere bakabiliriz. Oysa konuşmanın bir parçası olarak etiketlenen kelimeler, farklı bir temsil sistemi olarak düşünülebilir.

Konfigürasyonlar: Temsil sistemi içinde yer alan elementer işaretlere ek olarak, bu işaretlerin birleştirilmesiyle oluşan konfigürasyonlar vardır. Karakterler ve konfigürasyonların daha iyi anlaşılması için aşağıda tablo 2.1 verilmiştir.

Tablo 2.1: Goldin'in Temsil Sisteminde Yer Alan Karakter ve Konfigürasyon Örnekleri

Karakterler	Konfigürasyonlar
1, 2, 3, ...	123, 326
a, b, c, ...	Baca, baba, ...

Tablo 2.1'de görüldüğü gibi alfabenin harfleri, belli bir dizimde bir araya gelerek kelimeleri ve kelimeler de bir araya gelerek başka bir yapılandırma olan cümleleri oluşturur. Bunun yanında, tek haneli sayılar da çok haneli sayıları belli kurallara göre bir araya gelerek oluştururlar. Ortaya çıkan sayılar ve işlemsel işaretler de matematiksel komutları ya da denklemleri oluşturabilir.

Yapılar: Bir temsil sistemi, karakterler ve konfigürasyonlardan daha fazlasını içerebilir. Yani, temsil sistemleri diğer yüksek düzey yapıları da içine alabilir. Bunlar, konfigürasyonlardan konfigürasyonlara, konfigürasyon ailesindeki parça veya bütünü dizilimi gibi ilişkiler olabilir. Karakterlerden oluşan konfigürasyonları bilmek ve inşa edebilmek için temsil sistemindeki konfigürasyon ve karakterlere anlam vermek gerekmektedir.

Goldin'in Temsil Modeli'nde Sembolik İlişkiler:

Bir sistemin temsilsel olarak isimlendirilmesi; bu sistem içindeki karakterler, konfigürasyonlar ya da yapıların başka bir sistem içinde kullanılması, çağrışım yapması, simgelenmesi, temsil edilmesi ya da sembolize olmasından ileri gelmektedir. Örneğin;

kelimeler ve deyimler sadece dilbilgisine ait ve sözdizimsel yapılar değildir. Onlar sözel olmayan imgeleri de simgeleyebilir. Benzer olarak, sayılar ve aritmetik semboller de sadece birbiriyle dizilime ait ilişkiler oluşturmazlar; aynı zamanda başka şeyleri simgeleyerek başka bir şeyin anlamına gelebilirler.

Goldin'in Temsil Modeli'nde Temsiller Arasındaki İlişki:

Goldin ve Kaput (1996) yaptıkları çalışmada, temsiller arasında bir yatay ve bir de dikey olmak üzere iki tür ilişki bulunduğunu iddia etmektedirler. Temsiller arasındaki yatay ilişki, aynı türden (iki iç temsil ya da iki dış temsil gibi) temsiller arasında geçişler mevcutken görülmektedir. Yani, bir problem çözme esnasında iki ya da daha çok iç ya da dış temsil arasında oluşan ardı ardına bir ilişki yatay ilişki olarak ifade edilmektedir. Örneğin bir grafikte (dış temsil), $f(x) = -3x + 6$ sembolik ifadesi (dış temsil) temsil edilebilir. Bundan farklı olarak, aynı grafikte hareket eden bir nesnenin zamana göre aldığı yol veya bir dik açılı üçgen de temsil edilebilir. Verilen örnekte bahsi geçen tüm temsil çeşitleri, dış temsil olduğundan temsiller arasında bir yatay ilişki yer almaktadır.

Bir iç temsil ile bir dış temsil arasında ise dikey boyutlu bir ilişki yer almaktadır. Örneğin, $y = -3x + 6$ sembolik ifadesini (dış temsil) öğrenci bir doğru olarak zihninde içsel olarak canlandırabilir. Burada yer alan ilişki önceden var olan bir yapıya sahip değildir. Bu ilişki öğretmen tarafından çağrıştırılabilir ve öğrenci tarafından da yapılandırılabilir.

Goldin'in Temsil Modeli'nde Dış Temsil Sistemleri:

Goldin'in (1998a) birleştirilmiş temsil modelinde birinci bileşen problem çözücü ya da öğrencinin dış çevresini tarif etmesidir. Bu yüzden dış temsil sistemlerini analiz etmek oldukça önemlidir. Yapılan bu analizdeki amaç, problem çözücülerin temsiller arasında etkileşim kurması esnasında bilişsel durumlarında meydana gelen değişimleri incelemektir (Edward,1998; Goldin ve Kaput, 1996; Kaput, 1991).

Standartlaşmış temsil sistemleri, insanların sosyal süreçlerinden geliştirilmiştir. Bu sosyal süreçler, öğrencilerin kullandığı dil, matematiksel notasyon sistemleri ve bilgisayar dünyasının içinde yer alan dış sistemler olarak isimlendirilir (Goldin, 2002).

Goldin'in Temsil Modeli'nde İç Temsil Sistemleri:

Goldin (1998a) beş kategoriye sahip bir iç temsil sistemini ortaya koymaktadır. Bu temsil sistemlerinin neler olduğu aşağıda verilmiştir. Daha sonrasında da her bir temsil sistemi, detaylı biçimde ayrı başlıklar altında açıklanmıştır.

- a) Sözel Sistemler (Verbal Systems)
- b) İmgesel Sistemler (Imagistic Systems)
- c) Formel Notasyonal Sistemler (Formal Notational Systems)
- d) Planlama, İzleme, Uygulama ve Kontrol Sistemi (A System of Planning, Monitoring and Executive Control)
- e) Duygusal Temsil Sistemi (A System of Affective Representation)

a) Sözel Sistemler

Sözel sistemler; bireylerin kendi dillerindeki kapasitelerini kelimeler, tümceler ve cümleler düzeyinde betimlemesini içerir. Böyle bir sistemin girdi kanalları, duyma ve okuma; çıktı kanalları ise konuşma ve yazmadır. Sözel sistemler içinde yer alan diğer beceriler;

- Sözel sözlüksel bilgi (ortak tanımlar ve betimlemeler),
- Sözel tanımlamalar,
- Kelime-kelime ilişkisi (eş anlamlılar, zıt anlamlılar),
- Kelimelerin kategorik ilişkisi,
- Gramer ve diziliş bilgilerine dayalı olarak cümlelerin gramer açısından incelenerek öğelerine ayrılmasıdır.

İmgesel, formel, sezgisel ya da duygusal becerilerin ortaya koyulmasında, kelimeler ve cümleler kullanılır. Bu nedenle, iç temsil sistemlerinin bileşenlerine ait olan bir bilgi, sözel temsil sistemleri içinde kendini gösterebilir (Goldin, 1998a).

b) Formel Notasyonal Sistemler

Formel matematiksel notasyonlar, dış temsiller olarak matematiği öğrenme adına önemli odaklardan biridir. Bu notasyonların manipulasyonları ve yapılarıyla ilgili becerilerden oluşan iç sistemler ise diğer bir bilişsel temsil sistemidir (Goldin ve Kaput, 1996). Matematikteki geleneksel formel notasyonlar, büyük oranda yapılandırılmış sembolik sistemlerdir. Bunlara örnek olarak; sayı sistemi, aritmetik algoritmalar, rasyonel sayılar, cebirsel notasyonlar verilebilir. Aşağıda yer alan beceriler, formel sistemlere girmektedir.

- Ortaya çıkan matematiksel durumları formel olarak ifade edebilme,
- Bir notasyonun ne anlama geldiğinin anlaşılması,
- Sembol manipülasyonları, kurallar, algoritmalar hakkında konuşma,

Formel notasyonlar, diğer iç temsil sistemlerle ilgili bilgi edinilmesine yardımcı olabilir. Örneğin, zihinde görselleştirilen ya da canlandırılan bir durum formel olarak ifade edilebilir ya da formel olarak ifade edilen bir durum vasıtasıyla zihinde bir bilgi veya bir resim canlanabilir (Goldin, 1998a).

c) İmgesel Sistemler

Goldin'in (1998a) ortaya koyduğu teoride yer alan çeşitli sözel ve notasyonal olmayan bilişsel durumlar, imgesel sistemler genel başlığı altında incelenmektedir. Matematik eğitimi için bu sistemin en önemlileri;

- Görsel (visual / spatial) temsil sistemleri,
- İşitsel (auditory / rhythmic) temsil sistemleri,
- Kinestetik (tactile / kinesthetic) temsil istemleri olarak ele alınmaktadır.

Bu teoride kullanılan imgesel terimi, sadece görsel olan durumlarla ilişkili değildir. İmgesel sistemler, sözel olmayan, objeler düzeyinde iç konfigürasyonlar, tutumlar, ilişkiler, transformasyonları içine alır. Sözel olmayan bu tür konfigürasyonların araştırılması, sözel problem durumlarının yorumlanması açısından gereklidir. diSessa'ya (1983) göre bireylerin gerçek yaşam fenomenleriyle ilgili sezgilerinde bulunan anlamların belirlenmesi, imgesel temsillerin anlaşılmasına bağlıdır.

Görsel Temsil Sistemleri

Araştırmacıların bazıları çalışmalarında imgelere odaklanırken, bazıları zihinsel imgelerin ve temsillerin var olmadığını iddia etmektedirler. Örneğin davranışçı kuramcılardan Watson, öğrenmede bilişsel süreçlerin varlığına tamamen karşı çıkmaktadır. Öğrenmede en önemli şeyin uyarıcı tepki ikileminin tekrarlanma sıklığı olduğunu iddia etmektedir. Radikal bir davranışçı olan Skinner, zihinsel imge konusunda farklı bir bakış açısı sunmaktadır. Bu araştırmacı, zihinsel imgenin varlığını reddetmek yerine onların birer davranış olduğunu savunmaktadır. İç gözlem yönteminde ise imgenin yaratıcılık, problem çözme, öğrencilerin duygu ve düşünceleri hakkında derin bilgiler edinme adına büyük bir önem taşıdığını belirtilmektedir. Örneğin, pencerelere gölgelik almak isteyen biri, öncelikle evin her bir odasında kaç tane pencere olduğunu hatırlamak zorundadır. Ardından, yüksek ihtimalle odayı zihninde görselleştirerek kaç oda olduğunu sayacaktır (Kosslyn, Thompson ve Ganis, 2006).

Goldin'in (1998a) ele aldığı imgesel sistemler, Kosslyn'in (1980) kategorilere ayırarak incelediği görsel sistemlere oldukça benzemektedir. Kosslyn (1994), zihinsel imgeyi bir iç temsil olarak tanımlamaktadır. Bu araştırmacıya göre imge, bir resim değildir; diğer temsillerden farklı olarak hafızada ortaya çıkan anlayıştır. Örneğin, görsel imge, "zihnin gözleriyle görme" deneyimine eşlik ederken; duymaya ilgili bir imge, "zihnin kulaklarıyla duyma" deneyimine eşlik eder (Kosslyn ve diğerleri, 2006).

Kosslyn (1994; s.379–407), imgeleri tabana alan görselleştirme sürecinin dört özel adımdan oluştuğunu öne sürmektedir. Bu adımlar; imge üretimi, imge denetimi, imge dönüşümü ve imge kullanımınıdır. İmge üretimi, uzun süreli bellekte daha soyut olan bir temsilden bir imge oluştururken meydana gelmektedir. Bu süreç içinde birey zihninden geçenleri resmetmeye çalışmaktadır. Bir imgenin işlerliği konusunda emin olan birey, imge denetimi aşamasına geçmektedir. Eğer birey ürettiği imgenin kullanışsız olduğunu düşünürse, yeni bir imge üretme yoluna gitmektedir. tablo 2.2'de Kosslyn'in imgesel sistemler ve bu sistem içine giren davranışlara ilişkin bilgiler yer almaktadır.

Tablo 2.2: İmgesel Sistemlere İlişkin Kosslyn Kategorileri

SÜREÇLER	Alt Stratejilerin Tanımı
İmge Oluşumu	- Bir kişi, uzun süreli bellekteki bir resim ya da bir görsel zihinsel temsili hatırladığında ve çalışan belleğe imge olarak yerleştğinde imge oluşturmuş olur.
İmge Denetimi	- Çalışan bellekte yer alan imgenin özelliklerine odaklanarak, imgenin incelenmesini içerir. - Şekillerdeki benzerlik ve farklılıklara dikkat etme - İmge ile ilgili soruya cevap vermek için imgeyi inceleme (sınıflama, iyice inceleme) - Var olan şemadan geri dönütler alma - Taktikler geliştirme - Öz-izleme
İmge Dönüşümü	- Bir imgeye aşağıdaki durumların uygulanması - Dönme - Öteleme - Çevirme - İlgili şekiller içinde o şekillere ait imgelerin hareketi
İmge Kullanımı	- İmgeleri, kavramları, şemaları, anlamları kullanma

Kosslyn, bu adımların hiyerarşik bir yapıda ortaya çıktığını ifade etmektedir. Yani birey öncelikle bir imge oluşturur, ardından onu denetler ve daha sonra dönüşüme tabi tutarak, en sonunda da bu imgeyi soruyu çözmek için kullanır.

İşitsel Temsil Sistemleri

Çocuklar okul yıllarının ilk dönemlerinde bir ritim tutturmak ya da matematiksel bir hesaplama yapmak için ellerini çırparlar veya ayaklarını yere vururlar. Çocukların bu davranışları bir hesaplama stratejisi olarak ortaya koyması, işitsel temsil sisteminin varlığını ortaya koymaktadır. İşitsel temsillerin içeriği, örnekte de görüldüğü gibi konuşulan kelimeler ya da sembolleri işitme sürecinden farklıdır (Goldin,1998a, s.151–152). Öğrencinin çarpım tablosunu belli bir ritimde ezberden söylemesi de bu sistem için örnek olarak verilebilir (Goldin ve Kaput,1996).

Kinestetik Temsil Sistemleri

Kinestetik temsil sistemleri, imgeleşmiş bir bakış ya da uzamsal dönüşümlerden ayrı olarak bireyler tarafından fiziksel durumların imgeleştirilmesi ve temsil edilmesi sürecini içerir. Bruner'in (1966) çocuklar üzerinde yaptığı bir çalışmada, üç bileşenden oluşan bir temsil sistemi sunulmuştur. Goldin'in (1998a) sunduğu birleştirilmiş temsil modelinde yer alan kinestetik temsiller, Bruner'in sunduğu modelde yer alan eylemsel (enactive/action-based) temsillere karşılık gelmektedir. Kinestetik sistemlerin yardımıyla matematiksel kavramları tanımlamak, kavramsal anlamaya yardım eder.

Bir kavramın kinestetik olarak yorumlanmasını bazı örneklerle açıklayabiliriz. Mesela, matematikte yüzey eğrileri $f(x,y) = c$ olarak gösterilir. Burada f , iki değişkenli bir fonksiyon, c ise sabit bir sayıdır. Bu fonksiyonu kinestetik olarak bir dağın doruğunda sabit bir yüzeyde yürümek biçiminde yorumlayabiliriz. Ek olarak; bireyler *Turtle* geometrinin *LOGO* programında çalışırken, kendilerini bir kaplumbağa olarak hayal ederek koordinat düzleminde komutları uygularlar. Yani bir anlamda bireyler, bilgisayarla kinestetik anlamda etkileşim içine girerler. Aşağıda verilen durumlar, kinestetik davranışlar arasında yer almaktadır.

- Bireyler tarafından imgeleşmiş durumlar;
 - ⇒ Bir şeye el veya ellerle ulaşma,
 - ⇒ Nesnelere dokunarak şekillerini anlamaya çalışma (şişman, yuvarlak,...),
 - ⇒ Duyular (sıcak, soğuk,...),
 - ⇒ Vücudunu kullanarak bazı geometrik durumları çözüm aşamasında uygulama,
 - ⇒ Bir yerin uzunluğunu parmaklarıyla ya da yürüyerek ölçmeye çalışma,
- Dış çevredeki bir nesne ya da başka bir şeyin yapacağı bir hareketi, onun yerine bireyin yaparak imgeleştirdiği durumlar;
 - ⇒ Bir şeklin rotasyonunu bireyin kendi çevresi etrafında dönerek yapması,
 - ⇒ Bir açıyı temsil etmek için kendi kollarını dışa doğru açı şeklinde açması
 - ⇒ Kuvveti ifade etmek için bir kişinin ellerini birleştirmesi

d) Planlama, İzleme, Uygulama ve Kontrol Sistemi

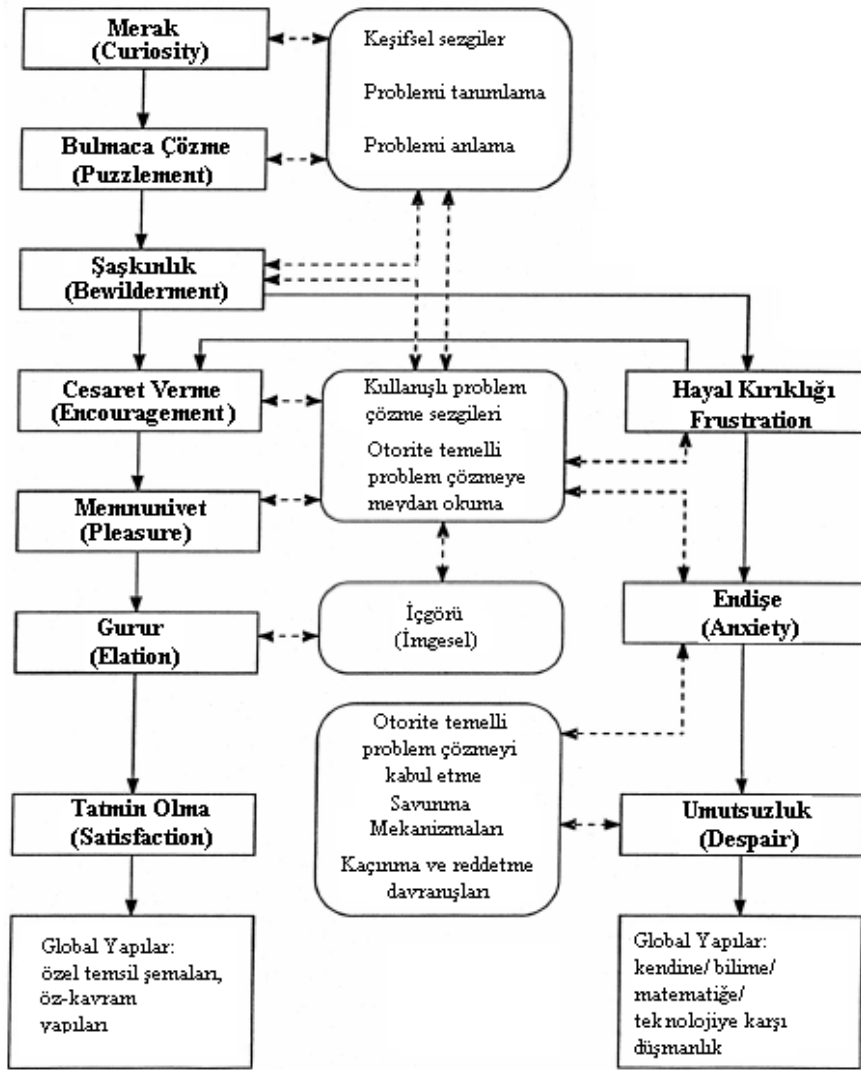
Goldin'in (1998a) önerdiği bilişsel temsil sistemleri, problem çözme sürecine rehberlik eden ve onu yöneten stratejik planlama, izleme ve karar verme süreçlerini de içine alır. Bu sistemin içerdiği yetenekler, aşağıdaki gibidir.

- ⇒ Diğer sistemlerde ve kendi içinde problem çözümü için atılan adımlarda izlenen rotayı koruma,
- ⇒ Kendi de dâhil olmak üzere iç temsil sistemlerinin tümünde atılacak adımlara karar verme,
- ⇒ Diğer sistemsel arasında etkileşimler kurma,
- ⇒ Sezgisel süreçler,
- ⇒ Polya'nın ifade ettiği problem çözme stratejilerinin uygulanması

Goldin'in ele aldığı teoride planlama, izleme, uygulama ve kontrol etme sisteminde, sezgisel süreçler en kullanışlı organizasyon birimi ve doruk yapı olarak görülmektedir.

e) Duygusal Sistem

Goldin'in (1998a) temsillerle ortaya koyduğu modelde, iç temsil sistemlerinin bir bileşeni de duygusal temsil sistemidir. Bu sistem, bireylerin duyguları aracılığıyla matematiksel kavramlarla ilgili algı ve yargılarına ulaşmaya yardımcı olmaktadır. Duygusal sistemle sadece matematik ve geometriyle ilgili sabit ve davranışsal duygular (Global Affect) değil; aynı zamanda öğrencilerin problem çözmeleri esnasında değişen anlık duyguları (Local Affect) ifade edilmektedir. Merak, şaşkınlık, hayal kırıklığı gibi duygular; lokal duygulara örnek teşkil etmektedir (Goldin, 2002). Sezgisel konfigürasyonlarla birleştirilmiş duygusal durumlar şekil 2.5'te verilmektedir.



Şekil 2.5: Sezgisel Konfigürasyonlarla Birleştirilmiş Duygusal Durumlar

Şekil 2.5 'te bir duygusal konfigürasyonun ya temsil eden ya da temsil edilen yerine geçtiği görülmektedir. Örneğin, öğrenci problem çözümü esnasında hayal kırıklığı yaşarsa, sonuca ulaşamayarak başarısız olabilir. Bu başarısızlık da öğrencide matematiğe karşı bir nefret besleme gibi çeşitli global duyguların ortaya çıkmasına neden olabilir.

Duygular, problem çözme esnasında öğrencilerin bilişsel süreçlerini anlama adına bir dil gibi hizmet etmektedir. Bu dil, insanlar arasındaki iletişimi kolaylaştırdığı gibi bazı durumlarda sözel dilden daha etkin olabilir. Çünkü duygusal anlamların çok ensek bir yapıya sahip olması, bu sistemin bir dil olarak gücünü arttırmaktadır (Goldin,

1998a). Goldin (2000) sunduğu temsil modelinde, duygusal konfigürasyonlar arasındaki karmaşık sembolik ilişkilerin anlaşılması gerektiğini savunmaktadır.

2.3. Araştırmada Kullanılan Temsil Çeşitleri ve Modelleri

Bu araştırmada, öğrencilerin oluşturduğu iç temsilleri belirlemek için Goldin'in (1998a) sunduğu temsil modeline göre hareket edilmiştir. Fakat modelde yer alan beş temsil sistemi içinden “*Duygusal Sistem*” ve “*Planlama, İzleme, Uygulama ve Kontrol Sistemi*” dışında kalan sistemler ele alınmıştır. Çok fazla zaman gerektirmesi ve sadece bir araştırmacının çalışamayacağı nitelikte olması nedeniyle bu iki sistem çalışmaya alınmamıştır. Bu nedenle çalışmada sözel, formel ve imgesel sistemlere yer verilmiştir. Ayrıca imgesel sistemlerde yer alan görsel sistemde üretilen iç temsilleri belirlemek için de Kosslyn'in (1980) sunduğu modelden faydalanılmıştır.

Öğrencilerin oluşturduğu sözel, formel, imgesel sistemlere giren temsilleri belirlemek için Goldin'in sunduğu temsil modeli ve Kosslyn'in görsel sistem üzerine yaptığı çalışmalar dikkatlice incelendikten sonra, öğrencilerin oluşturduğu iç temsilleri belirlemek amacıyla bir “gösterge tablosu” oluşturulmuştur (Bkz. Tablo 2.3). Öğrencilerin ne gibi durumlarda bu göstergeleri sergiledikleri bulgular ve yorumlar kısmında detaylı bir biçimde verilmiştir. Katılımcıların her bir uygulama sorusunu çözdükleri esnada sergiledikleri iç temsil göstergeleri; sesli düşünme süreci ve görüşmelerde edinilen verilerin detaylı bir şekilde incelenmesiyle belirlenmiştir. Öğrencilerde gözlenen gösterge türleri, araştırmanın bulgular ve yorumlar kısmında her bir uygulama sorusu için ayrı tablolarda ifade edilmiştir.

Tablo 2.3: Katılımcılarda Gözlenen İç Temsiller

İç Temsil Sistemleri ve Sistemlere Giren Göstergeler		Katılımcılar		
Temsil Sistemleri	Temsil Sistemlerinin Göstergeleri	ERDEM (İyi)	ASYA (Orta)	KEREM (Zayıf)
1. Sözel Sistemler <i>Sözel sistemlere giren temsiller, bireylerin kendi dillerindeki kapasitelerini kelimeler, tümceler ve cümleler düzeyinde betimlemeleri durumunda oluşur.</i>	1.1. Verilen kelime ve cümleleri betimlemek için başka kelime ve cümleleri kullanma			
	1.2. Sözel ifadeler aracılığıyla diğer temsilsel sistemlere ilişkin yetkinlikleri betimleme			
	1.3. Cümledeki kelimelerin kategorik ilişkileriyle ilgili yorumlar yapma (eş anlamalı, zıt anlamalı gibi)			
2. Formel Sistemler <i>Matematikte yer alan sayı sistemleri, aritmetik algoritmalar, rasyonel sayılar, cebirsel notasyonlar vb. geleneksel ve iyi yapılandırılmış sembolik sistemlerdir. Bu tip formel konfigürasyonların yapıları ve manipülasyonlarıyla ilgili yetkinliklerin ortaya koyulması durumunda formel sistemlere giren temsiller oluşur.</i>	2.1. Görselleştirdiği durumları sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma			
	2.2. Ortaya çıkan matematiksel durumları (sözel ve yazılı olan) sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma (örneğin, sembol manipülasyonu hakkında konuşması)			
	2.3. Kurallar ve algoritmalar hakkında konuşma			
	2.4. Bir sembolün, notasyonun anlamını açıklama			
	2.5. Kullanılan kural ya da algoritmanın soruda neden çalıştığını sözel olarak açıklama			
3. İmgesel Sistemler <i>İmgesel sistemler nesnelere, ilişkilendirmeler, ilişkiler ve dönüşümler düzeyinde sözel ve notasyonal olmayan konfigürasyonları içerir. Bu konfigürasyonları içeren göstergelerin ortaya çıkması durumunda imgesel sistemlere giren temsiller oluşur. İmgesel sistemler, görsel, işitsel ve kinestatik sistemler olarak üçe ayrılmaktadır.</i>	3.1. Görsel Sistemler			
	3.1.1. İmge Üretimi <i>Bir kişi uzun süreli bellekten resim veya görsel bir sunu çağırıldığında ve bunu işleyen belleğe yerleştirdiğinde oluşur.</i>			
	3.1.1.1. Sözel olarak ne anladığını ifade ettikten sonra bunu bir şekil ya da resim çizerek gösterme			
	3.1.1.2. Verilen bilgileri kullanarak özel bir temsil (şekil, çizim) ortaya koyma			
	3.1.1.3. Bir örüntüyü çıkarmak için görsellerle ilgili geçmiş bilgileri hatırlama ya da kullanma			
	3.1.2 İmge Denetimi <i>İşleyen bellekte bir imgenin özellikleri tarandığında oluşur.</i>			
	3.1.2.1. Soruya cevap vermek için imgeyi inceleme			
	3.1.2.2. Şekillerin özelliklerini (kenar, açı, yön gibi) açık bir şekilde yazarak ifade etme			
	3.1.2.3. Çizerek ya da tarif ederek şekillerin benzerliklerini veya farklılıklarını ortaya koyma			
	3.1.3. İmge Dönüşümü <i>Bir kişi oluşturduğu imgeye değişiklikler uyguladığında oluşur.</i>			
3.1.3.1. Sorudan ne anladığını daha iyi				

	ifade etmek için farklı pozisyonlarda şekiller çizme			
	3.1.3.2. Şekle öteleme, dönme gibi işlemler uygulama			
	3.1.3.3. Bir şekle işlemler uygulayarak onu değiştirme (ilk iki madde dışındaki işlemler)			
	3.1.4. İmge Kullanımı <i>Bir imge zihinsel işlemler için kullanılırken oluşur.</i>			
	3.1.4.1. İmgeleri, kavramları kullanma			
	3.1.4.2. Verilerin içinden anlamlı sonuçlara ulaşma (n. terimi doğru bir şekilde hesaplama gibi)			
	3.2. Kinematik Sistemler <i>Bireylerin fiziksel hareketleri içsel olarak temsil edip, imgeleştirdiği durumlarda oluşur.</i>			
	3.2.1. Vücudunu kullanarak bazı geometrik durumları uygulama (açıyı, doğruyu, bir yerin uzunluğunu parmaklarıyla gösterme gibi.)			
	3.2.2. Çevredeki bir nesne ya da başka bir şeyin yapacağı hareketi onun yerine bireyin imgeleştirmesi			
	3.3. İşitsel Sistemler <i>Matematiksel işlemler gerçekleşirken, konuşulan kelime ve sembolleri işitme sürecinden farklı olarak oluşur.</i>			
	3.3.1. Ellerini çırparak sayıları ifade etme ya da belli bir ritimde çarpım tablosunu söyleme, grup içindeki sayıları vurgulama vs...			

Araştırmada, öğrencilerin oluşturduğu dış temsilleri belirlemek için Lesh ve Janvier'in ortaya koyduğu temsil modelleri kullanılmıştır. Katılımcıların problem çözdükleri esnada oluşturdukları dış temsil türlerinin neler olduğu belirlenirken, aşağıda verilen teorik bilgilerden faydalanılmıştır.

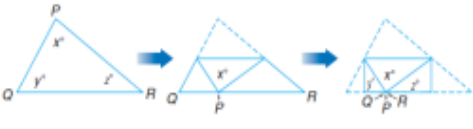
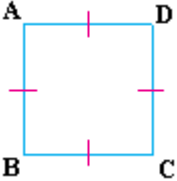
Şekiller: Bu araştırmada *şekillerle* kastedilen, Lesh ve diğerleri'nin (1987) sunduğu modelde “*resimler (pictures)*” olarak isimlendirilen temsil çeşididir. “*Şekiller*”, öğrencilerin geometrik kavramlarla ilgili düşüncelerini anlatmak için kağıt üzerine yaptıkları çizimlerdir. Tablo 2.4'te örnek olması açısından çokgenlerle ilgili çeşitli geometrik şekiller sunulmuştur.

Yazılı İfadeler: Bu araştırmada yazılı ifadelerle kastedilen, Lesh ve diğerlerinin (1987) “*yazılı semboller (written symbols)*” olarak isimlendirdiği temsil çeşidi ile

Janvier'in (1987) "sözel tanımlar" olarak isimlendirdiği temsil çeşidinin birleşiminden oluşmaktadır. Lesh ve diğerlerinin sunduğu modelde yer alan "yazılı semboller", matematiksel semboller ve bunların yazılı biçimde ifade edilmesini içerirken, Janvier'in sunduğu modelde yer alan "sözel tanımlar", matematiksel kavramlar ve sembollerle ilgili öğrencilerin kağıt üzerine aktardıkları bilgileri içermektedir. Bu araştırmada bir dış temsil çeşidi olarak ele alınan "yazılı ifadeler", öğrencilerin geometrik kavramlar ve sembollerle ilgili düşüncelerini ve bilgilerini kağıt üzerine yazılı biçimde aktardıkları bilgilerdir. Tablo 2.4'te "yazılı ifadeler" için çeşitli örnekler sunulmuştur.

Cebirsel İfadeler: Araştırmada ele alınan "cebirsal ifadeler" ise Janvier'in (1987) sunduğu temsil modelinde "semboller (symbols)" olarak isimlendiren temsil çeşidine benzer niteliktedir. Fakat bu araştırmada ele alınan "cebirsal ifadeler", sadece sembollerini değil; aynı zamanda öğrencilerin ürettikleri denklemleri ve formülleri de kapsamaktadır. Tablo 2.4'te şekiller, yazılı ve cebirsel ifadeleri örnekleme bakımından; bazı geometrik durumlara yer verilmiştir.

Tablo 2.4: Şekiller, Yazılı ve Cebirsel İfadeler İçin Örnekler

ŞEKİLLER	YAZILI İFADELER	CEBİRSEL İFADELER
	<p>Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180 derecedir.</p>	<p>$\triangle PQR$ 'de, $x^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$ dir.</p>
	<p>Karenin tüm kenar uzunlukları birbirine eşittir.</p>	<p>$ABCD$ bir kare olmak üzere, $AB = BC = CD = DA$ dir.</p>

Tablo 2.4'te verilen örneklerde görüldüğü gibi araştırmada katılımcılardan elde edilen veriler incelenirken, öğrencilerin çizim yaptığında şekilleri; geometrik kavram ve sembollerini yazılı olarak anlattıklarında yazılı ifadeleri; bu kavram ve sembollerini

cebirsel olarak ifade ettiklerinde ise cebirsel ifadeleri oluşturdıkları, bulgular ve yorumlarda detaylarıyla açıklanmıştır.

2.4. Temsil Kavramıyla İlgili Yapılan Çalışmalar

Temsil kavramıyla ilgili bugüne kadar birçok araştırma yapılmıştır. Fakat bu araştırmaların daha çok öğrencilerin temsil tercihleri ve özellikle ürettikleri dış temsillere odaklı olduğu görülmektedir. Öğrencilerin ürettiği iç temsiller üzerinde bazı teorik bilgiler yer almaktadır. Ek olarak; iç temsiller konusunda oldukça az sayıda uygulamaya yönelik araştırma bulunmaktadır. Bu nedenle, bu kısımda sadece iç temsiller ve dış temsiller arasındaki etkileşime yönelik çalışmalara değil, aynı zamanda temsil kavramıyla ilgili yapılan diğer çalışmalara da yer verilmiştir.

- Çıkla (2004), yazdığı doktora tezinde çoklu temsil temelli öğretimin, geleneksel öğretim yöntemiyle karşılaştırıldığında yedinci sınıf öğrencilerinin cebir performanslarına, matematiğe karşı tutumlarına ve temsil tercihlerine olan etkisini araştırmayı amaçlamıştır. Ayrıca; bu çalışmada öğrencilerin cebirsel problemlerle karşılaştıkları zaman, çoklu temsilleri nasıl kullandıklarının ortaya çıkarılması ve onların temsil tercihlerinin nedenlerinin araştırılması da diğer amaçlardır. Çalışma iki devlet okulundan alınan dört yedinci sınıf üzerinde 2003–2004 öğretim yılında gerçekleştirilmiş ve 8 hafta sürmüştür. Veri toplama amacıyla, birçok ölçme aracı kullanılmıştır. Cebir performansını değerlendirme amacıyla; cebir başarı testi, temsil biçimleri arasında dönüştürme beceri testi ve Chelsea cebir tanı testi olmak üzere üç araç kullanılmıştır. Öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarını belirleme amacıyla matematiğe karşı tutum ölçeği ve öğrencilerin temsil tercihlerini tespit etmek için deneyden önce ve sonra, temsil biçimi tercih ölçeği uygulanmıştır. Bunların yanı sıra; deney ve kontrol gruplarından öğrencilerle görüşmeler yapılmıştır. Elde edilen niceliksel veriler, yapılan çoklu kovaryans analizi ve kaykare testi ile incelenmiştir. Analiz sonuçlarına göre; gruplar arasında cebir başarı testi, temsil biçimleri arasında dönüştürme beceri testi ve Chelsea cebir tanı testinden alınan puanlara göre, deney grubu lehine istatistiksel olarak manidar bir fark bulunmuştur, ancak gruplar arasında matematiğe karşı tutum ölçeği puanlara göre deney grubu lehine istatistiksel olarak manidar bir fark bulunamamıştır.

Kaykare analizi sonuçlarına göre; deney, öğrencilerin temsil tercihlerini manidar olarak değiştirmiştir. Öğrencilerle yapılan görüşmeler sonucunda, deney grubu öğrencilerinin verilen cebir problemleri için farklı temsil biçimlerini kullanabildikleri ve bunlardan verilen duruma en uygun olanını seçebildikleri ortaya çıkmıştır.

- Keller ve Hirsch (1998), öğrencilerin temsil tercihlerini ve temsillerin nasıl ilişkisi olduğunu araştırmışlardır. Katılımcılar, 39 tane grafik hesaplama bölümü (graphics calculator section) ve 40 tane kalkulus bölümü (calculus section) öğrencisi olarak belirlenmiştir. Ön test ve son test uygulanarak gerçekleştirilen çalışma, toplam 13 hafta sürmüştür. Araştırma sonuçları, birçok öğrencinin farklı temsil türlerini tercih ettiklerini ortaya koymuştur. Kalkulus bölümü öğrencileri daha çok notasyonal temsilleri tercih ederken, diğer gruptaki öğrenciler tablo ve grafikleri tercih etmişlerdir. Ek olarak, araştırmada öğrencilerin temsil tercihlerini etkileyen bazı faktörlere yer verilmiştir. Bunlar; öğrencilerin temsillerle ilgili geçmiş tecrübeleri, temsil kullanımlarıyla ilgili algıları, sorulan sorunun zorluk derecesi ve içerik olarak belirlenmiştir. Araştırma sonunda öğrencilerin denklem içeren temsillere yönelimlerinin, diğer temsil türlerine kaydırılması gerektiği vurgulanmıştır. Son olarak da öğrencilere temsillere karşı tutumlarını, temsil tercihlerini ve teknolojinin temsil tercihlerine olan etkisini anlamak amacıyla Likert tipi bir test uygulanmıştır. Araştırma sonuçları, öğrencilerin tek bir temsil tipine odaklanarak soruların çözülmesini daha kolay bulduklarını ortaya koymuştur. Ek olarak, katılımcılar cebirsel ifadelerle uğraşırken, kendilerini daha rahat hissettiklerini belirtmişlerdir.
- Özgün-Koca (1998), öğrenciler temsillerle uğraşırken onların temsil tercihlerini etkileyen faktörlerin neler olduğunu belirlemek amacıyla yaptığı araştırmada, teknoloji içeren ve teknoloji içermeyen ortamlarda öğrencilerin düşünceleri, tutumları ve davranışları üzerine odaklanmıştır. Araştırma için 16 öğrenci, “ remedial mathematics” olarak adlandırılan telafi sınıfından seçilmiştir. Sınıftaki çoklu temsil kullanımını anlamak için yapılan görüşmeler, sınıf öğretmeni tarafından yürütülmüştür. Gözlemlerin ardından

araştırmacı tarafından bir bilgisayar içeren sınıf ve bir de bilgisayar içermeyen sınıfta öğrencilerin çoklu temsil kullanımları araştırılmıştır. Son olarak, teknolojinin öğrencilerdeki temsillerle ilgili düşünce ve tutum üzerine etkisini belirlemek amacıyla Likert tipi bir ölçek kullanılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre, öğrencilerin birçoğu matematik sorularını çözerken bir temsil tipine odaklandıklarında, soruyu daha kolay çözdüklerini belirtmişlerdir. Soru çözümlerinde öğrenciler cebirsel ifadeler içeren temsilleri daha çok tercih ederken, temsillerden grafiği daha az tercih etmişlerdir. Araştırmada, öğrencilerin önceki bilgileri, deneyimleri ve kişisel tercihlerinin bir matematiksel temsili seçmeleri için temel kriterler olduğu sonucuna varılmıştır. Araştırmanın sonuçlar kısmında diğer araştırmacılara ve eğitimcilere, tüm temsil türlerinin öğrencilere gösterilmesinin ve öğrencilerin kendilerine uygun olan temsili seçmelerinin daha iyi olacağı önermiştir.

- diSessa ve Sherin (2000), MaRC Projesi'nin bir parçası olarak yürüttükleri araştırmada, öğrencilerin temsillerle ilgili neler bildiği ve onlardan neleri öğrenmelerinin mümkün olduğunu geniş manada araştırılmıştır. Üst Temsilsel Beceri (Meta Representational Competence) olarak dış temsilleri yapılandırma, kritik etme, kullanma, düzenleme ve tasarlama kapasiteleri ele alınmıştır. Katılımcılar sekizinci, dokuzuncu, onuncu ve on birinci sınıfta okuyan öğrenciler arasından seçilmiştir. Bu öğrenciler çoklu temsil içerikli etkinliklerin uygulandığı bir sınıfa alınmıştır. Öğrenciler bireysel olarak temsilleri üretilip, tüm sınıf önünde ürettikleri temsillerle ilgili kıyaslama ve tartışmalar yapana kadar onlarla birçok uygulama yapılmıştır. Öğrencilerle birçok kez çeşitli uygulamalar yapılmıştır. Öğrencilerle yapılan görüşmeler ve sınıf gözlemleri araştırmada veri kaynakları olarak kullanılmıştır. diSessa ve Sherin'e (2000) göre araştırma, öğrencilerin temsillerle ilgili derin zengin ve üretici bir anlayışlarının olduğunu ortaya koymuştur. Ek olarak, kavramların temsiller kullanılarak daha kolay öğrenildiği ifade edilmiştir.
- Thomas, Mulligan ve Goldin (2002), "*Children's representation and structural development of the counting sequence 1-100*" adlı çalışmalarında öğrencilerin 1den 100'e kadarki sayılarla ilgili çizimleri ve açıklamaları aracılığıyla,

ürettikleri iç temsilleri incelemişlerdir. Öğrencilerin ürettikleri dış temsiller aracılığıyla iç temsillerini tarif etme, araştırmanın amacı olarak belirtilmiştir. Araştırma için ana okuldan 6.sınıfa kadar olan toplam 172 öğrenci, katılımcı olarak seçilmiştir. Tüm katılımcılarla görüşmeler yapıldıktan sonra, onların numaralamayla ilgili anlayışlarını belirtmek için 89 farklı görüşmeden edinilen veriler, beş kategoriye ayrılmıştır. Bunlar; hesaplama, gruplama, basamak değeri, numaralama yapısı ve görselleştirme olarak ifade edilmiştir. Araştırmacılar, öğrenciler daha gelişmiş iç temsiller oluşturdukları takdirde, oluşturacakları dış temsillerin de daha uyumlu ve daha iyi organize edilmiş olacağı sonucuna ulaşmışlardır.

- Erbilgin (2003), yazdığı yüksek lisans tezinde uzamsal yeteneklerin ve başarının öğrencilerin çoklu temsil kullanımları üzerine etkisini araştırmıştır. Çalışmada yöntem olarak durum çalışması kullanılmıştır. Araştırmada, uzamsal yetenek-ve-başarı düzeyi yüksek, uzamsal yeteneği düşük-başarı düzeyi yüksek, uzamsal yeteneği yüksek-başarı düzeyi düşük ve uzamsal yeteneği-ve-başarı düzeyi düşük olan birer öğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir. Belirlenen bu dört tane sekizinci sınıf öğrencisi ile 16 görüşme yapılmıştır. Yapılan görüşmelerde, lineer cebir ve fonksiyonlar konusunda temsil türlerini kullanabilecekleri sorular yöneltilmiştir. Ek olarak, katılımcılar matematik derslerinde yedi saat gözlemlenmiştir. Katılımcılara *Wheatley Spatial Ability Test* uygulanarak uzamsal yetenek düzeyleri ve *Florida Comprehensive Assessment Test* sonuçlarına göre de uzamsal başarı düzeyleri belirlenmiştir. Araştırma sonuçları, hem başarı hem de uzamsal görselleştirmenin öğrencilerin çoklu temsil kullanımını etkilediğini göstermiştir.
- Gagatsis ve Elia (2004), temsil ve temsiller arası geçişlerle ilgili bir araştırma yapmışlardır. Veriler, altıncı sınıfa giden toplam 79 öğrenciden edinilmiştir. Yapısal eşitlik modellemesi kullanılarak analiz edilen verilere göre, öğrencilerin kavramları algılama biçimlerinin sadece kullanılan temsillere bağlı olmadığı ortaya koyulmuştur. Ayrıca temsiller aracılığıyla birçok öğrencinin matematiksel kavramlarda yanlış yaşadıkları sonucuna varılmıştır

3.BÖLÜM

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, belirlenen katılımcılar, kullanılan veri toplama araçları ve veri analizleriyle ilgili bilgiler yer almaktadır.

3.1.Araştırmanın Modeli

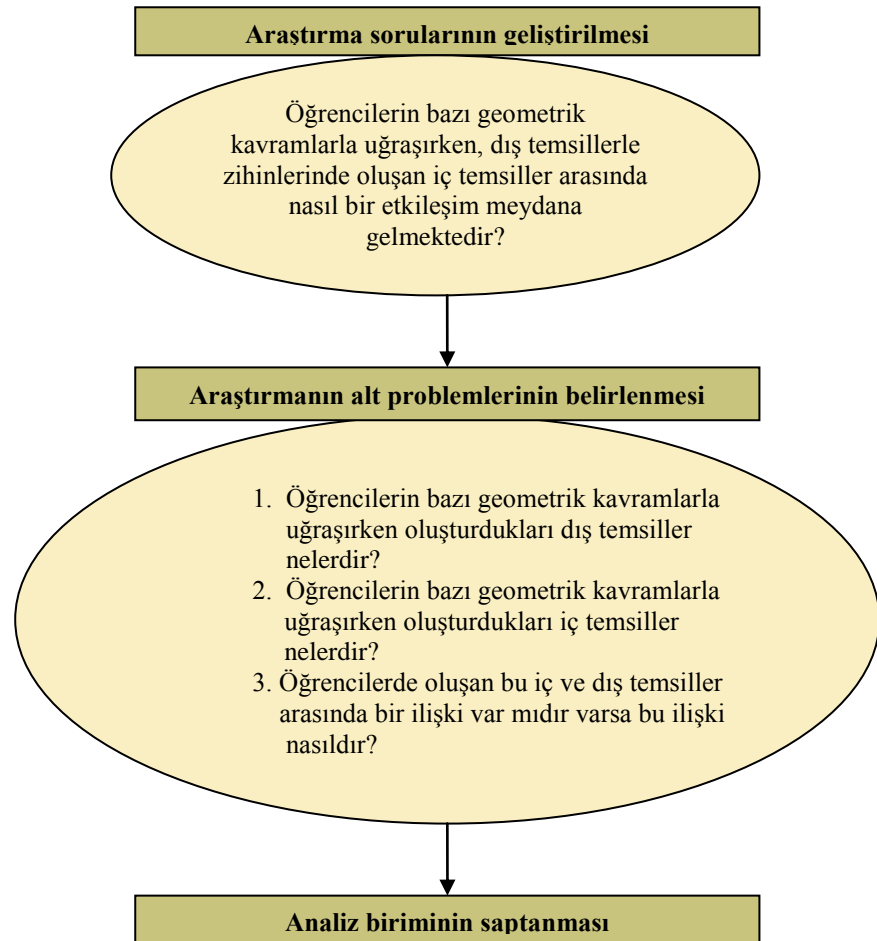
Araştırmanın amacı, öğrencilerin bazı geometrik problemlerle uğraşırken oluşturdukları dış temsillerle zihinlerinde oluşan iç temsiller arasındaki etkileşimleri incelemektir. Fakat öğrencilerin zihinlerinden geçenleri sadece gözlemleyerek ya da nicel verilere dayalı metotlarla anlamak mümkün değildir. Bu yüzden, öğrencilerin zihinsel süreçlerini ortaya koymayı amaçlayan çalışmalarda nitel araştırma yöntemleri tercih edilmektedir. Çünkü nitel araştırma, araştırılan problemin miktarı, sayısı, sıklığı ve yoğunluğundan ziyade problemin süreci ve anlamıyla yakından ilgilenir (Denzin ve Lincoln, 1998). Tüm bu nedenler ve araştırmanın yapısı dikkate alındığında çalışmanın yöntemi durum çalışması olarak belirlenmiştir.

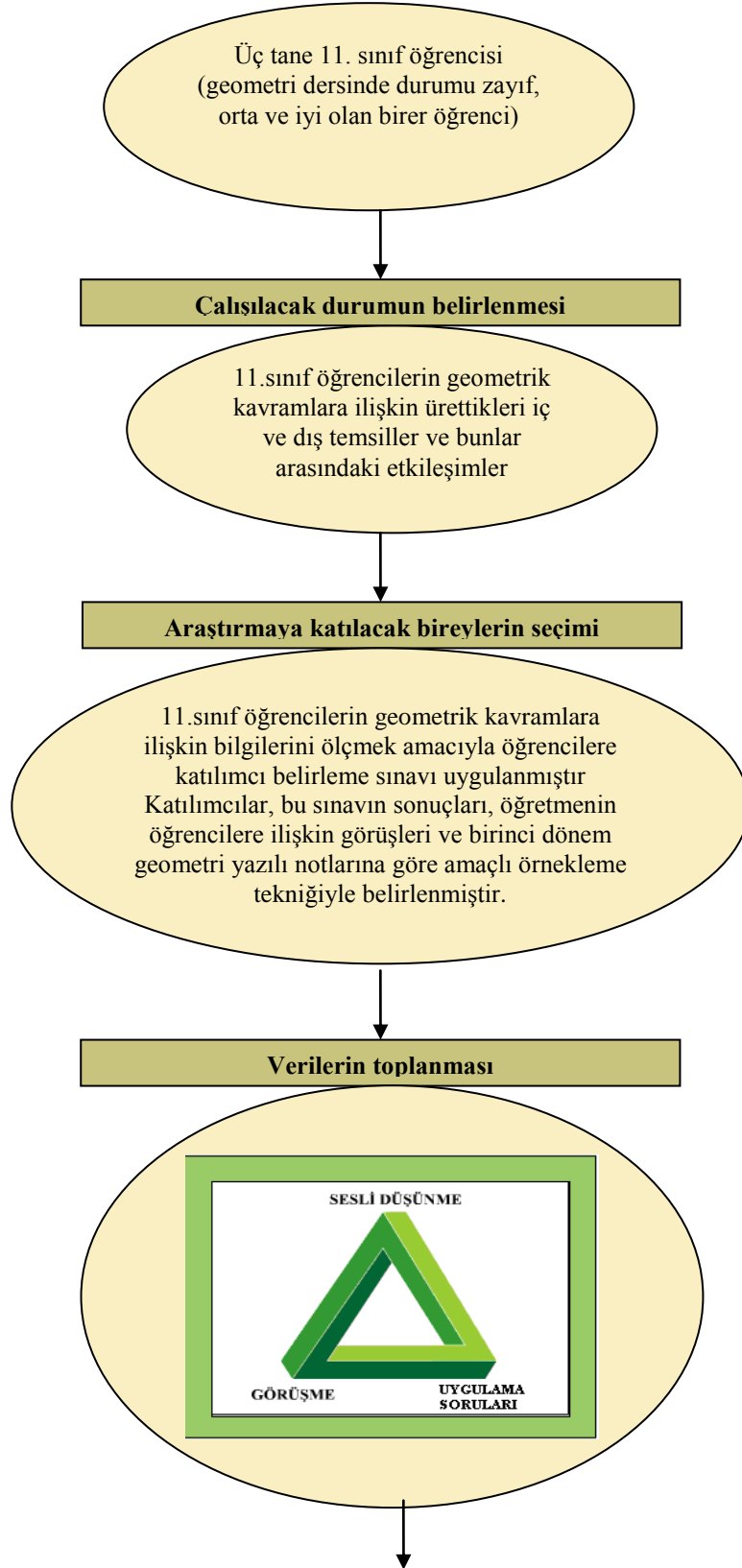
Durum Çalışması:

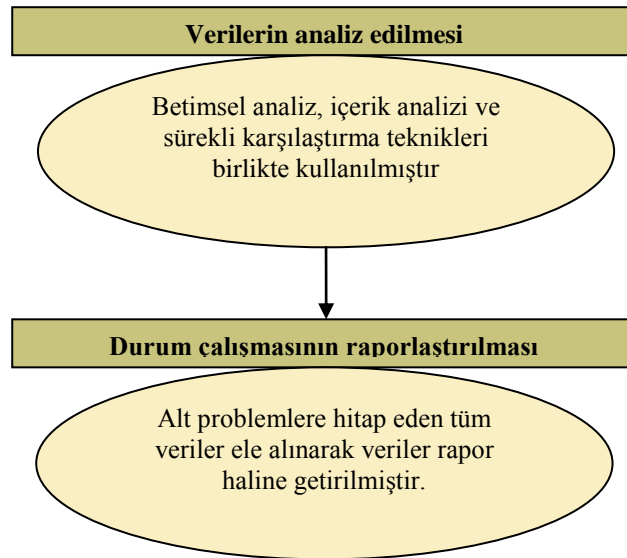
“Durum çalışması; güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemidir.” (Yin, 1984). Ek olarak, durum çalışması için “nasıl”, “niçin” ve “ne” sorularını baz alan, araştırmanın kontrol edemediği olgu ya da olayı derinlemesine inceleyerek bilgi edinilmesine imkan tanıyan bir yöntem olduğu

söylenbilir. Bu araştırmanın problemi ve amacı dikkate alındığında, durum çalışması ortaya atılan probleme cevap sunma açısından en etkin yöntem olarak düşünülmüştür.

Araştırmada, durum çalışması desenlerinden “bütüncül tek durum deseni” kullanılmıştır. Bütüncül tek durum deseni; eğer ortamda iyi formüle edilmiş bir kuram varsa bunun teyit edilmesi veya çürütülmesi amacıyla, genel standartlara pek uymayan aşırı, aykırı veya kendine özgü durumların çalışılmasında, daha önce hiç kimsenin çalışmadığı veya ulaşmadığı durumlarda kullanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışmada, araştırma sorusunun geliştirilmesinden, elde edilen verilerin raporlaştırılmasına kadarki tüm süreçte Yıldırım ve Şimşek (2006, s.281) tarafından belirtilen aşamalar izlenmiştir (Şekil 3.1).







Şekil 3.1: Araştırma Deseninin Aşamaları

Katılımcılar

Çalışma yapılacak okulu belirlemek için öncelikle Ankara’da yer alan 56 Anadolu Lisesi içinden ulaşım imkânı göz önüne alınarak 40 tanesi; okulun bulunduğu ilçe, okulun ismi ve taban puanına göre liste haline getirilmiştir. Daha sonra, listede yer alan taban puanların ortalamaları hesaplanarak ortalamaya yakın bir puana sahip olması ve araştırmacının bulunduğu ilçede yer alması nedeniyle Süleyman Demirel Anadolu Lisesi seçilmiştir. Araştırmanın yapısı öğrencilerle uzun süreli bir etkileşim hatta elde edilecek veri yetersizliğinde daha fazla uygulama ve görüşme gerektirdiğinden seçilen okulun araştırmacıya yakın olmasında karar kılınmıştır.

Katılımcıları belirlemek için nicel çalışmalardaki gibi olasılık temelli örnekleme yöntemlerinin tersine, araştırma nitel bir tasarıma sahip olduğundan amaçlı örnekleme yöntemine başvurulmuştur. Patton’a (2002) göre, önemli evrensel genellemeler yapmak için olasılık temelli örnekleme seçimi doğru bir karardır; fakat bu çalışmada sonuçların genellenmesi gibi bir gaye yoktur. Nitel araştırmada zengin bilgiye sahip olan durumları derinlemesine incelemek söz konusu olduğu için amaçlı örnekleme çalışma yapısına uygun bulunmuştur (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Aşırı veya aykırı durum örnekleme, maksimum çeşitlilik örnekleme, benzeşik örnekleme, tipik durum örnekleme, kritik durum örnekleme, kartopu veya zincir örnekleme, doğrulayıcı veya yanlışlayıcı örnekleme ve kolay ulaşılabilir durum örnekleme başlıca amaçlı örnekleme çeşitleridir (Patton, 2002). Bunlar içinden maksimum çeşitlilik örnekleme, araştırmanın amacına ve yapısına uygun bulunmuştur. Çünkü bu yöntemde küçük bir örneklem oluşturma ve bu örnekte çalışan bireylerin çeşitliliğini maksimuma çıkarma amacı bulunmaktadır. Araştırmaya bu yöntemi seçmedeki amaç, genelleme yapmak için çeşitlilik sağlamak değildir; aksine çeşitlilik gösteren durumlar arasında herhangi ortaklıkların ya da paylaşılan olguların var olup olmadığını elde etmeye çalışarak, problemin farklı boyutlarını ortaya koymaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Amaçlı örneklemin maksimum çeşitlilik yöntemine göre 11. sınıfta okuyan ve geometri başarı düzeyleri zayıf, orta ve iyi olan birer kişi olmak üzere toplam üç kişi katılımcı olarak belirlenmiştir. Araştırmaya hangi katılımcıların alınacağına karar verilirken aşağıdaki ölçütler dikkate alınmıştır:

- Öğrencilerin geometri başarı düzeyleri, problem çözme, temsil kullanma becerilerini ölçen ve araştırmacı tarafından hazırlanmış olan katılımcı belirleme sınavının sonuçları,
- Katılımcıların seçildiği sınıfın geometri dersine giren öğretmenin öğrencilerle ilgili görüşleri,
- Sınıftaki öğrencilerin bir önceki döneme ait geometri yazılı notlarının ortalaması

Öncelikli olarak, Anadolu Lisesi'ndeki müdür ve geometri öğretmenlerine danışılarak öğrencilerin başarı düzeylerinde çeşitlenmenin bulunduğu bir sınıf belirlenmiştir. Ardından, seçilen sınıftaki öğrencilere araştırmacı tarafından hazırlanan ve yedi sorudan oluşan katılımcı belirleme sınavı uygulanmıştır. Uygulanan katılımcı belirleme sınavı sonuçlarına göre zayıf, orta ve iyi düzeyde bulunan öğrenci sayıları belirlenmiştir (Bkz. Tablo 3.1). Yapılan yazılı sınav sonucunda en yüksek notun 82, en düşük notun ise 10 olduğu tespit edilmiştir. Tüm sınıfın yazılı not ortalaması, 49 olarak hesaplanmıştır.

Tablo 3.1 Katılımcı Belirleme Sınavı (KBS) Puan Aralıkları ve Aralıklarda Yer Alan Kişi Sayısı

Düzy	KBS Puan Aralığı	Kişi Sayısı	Kız	Erkek
İyi	82-65	7	2	5
İyi-Orta Arası	64-55	5	3	2
Orta	54-45	6	3	3
Orta-Zayıf Arası	44-35	2	0	2
Zayıf	34-10	7	1	6

Sınıfın geometri öğretmeninin görüşleri doğrultusunda, zihninden geçen düşünceleri en iyi şekilde ifade edecek öğrenciler belirlenerek zayıf, orta ve iyi düzeye giren birer kişi araştırmaya katılımcı olarak seçilmiştir. Ek olarak; zayıf, orta ve iyi düzey öğrenci grubuna giren birer kişi pilot çalışma gerçekleştirmek amacıyla belirlenmiştir. Çalışmada katılımcıların kendi isimleri yerine takma isimler kullanılmıştır.

Katılımcıların Özellikleri: Amaçlı örnekleme yoluyla seçilen katılımcılarla ilgili özellikler, aşağıda yer almaktadır. Seçilen öğrencilerin KBS puanları ve birinci döneme ait geometri yazılı not ortalamaları, tablo 3.2’de verilmiştir.

Tablo 3.2. Uygulamada Yer Alan Katılımcı Listesi

Çalışma Grubu	Takma İsimler	KBS puanları	Geometri 1.dönem not ortalaması
Katılımcılar	Erdem	82	5
	Asya	49	3
	Kerem	15	1

Katılımcıların kişisel özellikleri ve temsil türleriyle ilgili görüşleri, kendileriyle ve sınıf arkadaşlarıyla yapılan görüşmelerden edinilen bilgilerle aşağıda sunulmuştur.

Erdem

Erdem, sayısal derslerde sözel derslere göre daha başarılı olduğunu belirtmiştir. Erdem'in arkadaşları onun için şu şekilde açıklamalar yapmıştır.

“Erdem sayısal derslerde kafası çok iyi çalışan biridir. Ama sözel derslerde pek sesi çıkmaz. Kendini ifade etme konusunda sıkıntı yaşamayan oldukça konuşkan bir arkadaşımızdır.”

Erdem, araştırmacının katılımcıları tanımak amacıyla yaptığı görüşmede geometri dersini diğer derslere oranla neden daha fazla sevdiğiyile ilgili aşağıdaki açıklamaları yapmıştır.

“Geometri soruları çözerken soruya birçok farklı yönden bakabiliyorum. Bir de ben ezberci bir zihne sahip değilim. Bu yüzden ispatlamayı ve ispatlayarak bir şeylere ulaşmayı çok seviyorum. Geometri diğer dersler gibi değil. Ne yapıp edip sonuca ulaşma imkanı var. Ben de geometrinin bu yönünü seviyorum.”

Bu katılımcı, geometri dersinde rahatlıkla kullandığı temsilleri ve özellikle sözel temsilleri anlamakta neden zorlandığını aşağıdaki gibi açıklamıştır.

“Geometriyi birçok alana tercih ediyorum; çünkü geometride şekiller var. Ayrıca şekiller verilmese bile okuduğuma göre benim şekil çizme imkânım olduğundan, bu soru çözerken kolaylık sağlayan bir durum oluyor. Ama aynı şeyi sözel bir ders için söyleyemem. Çünkü mesela edebiyat dersine ne kadar çalışsam da yüksek bir not alamıyorum ve güzel bir kompozisyon yazamıyorum. O yüzden o dersleri fazla sevmiyorum.”

“Ben daha çok şekillerle uğraşmayı seviyorum. Mesela siz diyagram dediniz ama o nedir tam bilmiyorum. Tablolu sorular da kolay oluyor. Ama benim için en zoru düz bir şekilde sözle anlatılmış soruları çözmek oluyor. Sözelim iyi olmadığı için ilk girişimimde mutlaka hata yapıyorum ve çok zaman kaybediyorum. Semboller, şekiller ve tablo kullanmayı daha çok seviyorum.”

Asya

Araştırmacının katılımcıyı tanımak amacıyla yaptığı görüşmede, Asya geometri dersini seven bir öğrenci olduğunu fakat bazı geometri sorularıyla uğraşıp sonuca ulaşamadığında, soruyu çözmeyi bıraktığını ifade etmiştir. Asya düşüncelerini aşağıdaki cümlelerle açıklamaya devam etmiştir.

“ Ben oldukça meraklı biriyim. Aslında geometriden çok edebiyatı da seviyorum. Yani geometriyi de seviyorum ama bazen içinden çıkılmaz şekiller oluyor ve soruyu çözemiyorum. Bir de ben meraklı biri olduğum için hemen sonuca ulaşmak istiyorum. Bu yüzden beni yoran soruları bırakıyorum üzerine çok gitmiyorum merakıma yenilip sorunun sonucunu onu çözen birinden öğreniyorum.”

Asya'nın matematiksel temsiller konusunda görüşleri aşağıdaki gibi olmuştur.

” Ben en çok şekillerin verildiği soruları seviyorum. Çünkü şekilde birçok şey net olarak görülüyor. Ama yazılı olarak verilmiş şekil içermeyen sorulardan hoşlanmıyorum. Çünkü öyle sorular çoğu zaman zor oluyor ya da ben yanlış anlayıp yanlış çözüyorum. Ayrıca bir de sözel olarak anlatmak bazen zor oluyor. Biliyorum ama anlatırken doğru kelimeleri bulamayabiliyorum. Ama en sevdiğim temsiller formül içerikli şeyler, tablo ve şekilli sorular oluyor.”

Kerem

Araştırmacının katılımcıyı tanımak amacıyla yaptığı görüşmede, Kerem sayısal dersleri sözel derslerden daha çok sevdiğini, fakat ders dinlemeyi ve çalışmayı çok sevmediğini ifade etmiştir. Ek olarak, bu katılımcı geometri dersini fazla sevmediği için dersleri çok dinleyemediğini ve bu nedenle de geometri dersinin karnesinde bir düştüğünü açıklamıştır. Kerem'in matematiksel temsiller konusunda görüşleri aşağıdaki gibi olmuştur.

“Ben en çok sembolleri seviyorum. Şekilleri o kadar çok sevmem. Çünkü şekilli sorularda hiçbir şey bulamadığım oluyor. Ama formül filan varsa daha rahat oluyorum. Tablo ya da diyagramlar bazen kolay geliyor bazense zor geliyor. Bir de şu yazı ile verilen ifadeler zor oluyor. Çünkü bazı sembolleri bilmiyorum ya da yazılanları şekle dökmekte zorlanıyorum.”

Katılımcı Belirleme Sınavı (KBS):

Araştırmaya alınacak katılımcıları belirlemek amacıyla yedi sorudan oluşan bir “Katılımcı Belirleme Sınavı” hazırlanmıştır (Bkz. EK-1). Sınav hazırlanırken, tablo 3.3’te görüldüğü gibi dokuz basamaktan oluşan bir plana göre hareket edilmiştir. KBS’de yer alan sorular, eğitimde kullanılan ölçme araçları arasından yazılı yoklamalara uygun tarzda hazırlanmıştır. Sınavın bu tarzda hazırlanmasının nedeni, yazılı sınavların problem çözme, problemleri organize etme, yeni ve orijinal fikirler üretme, fikirleri analiz etme gibi davranışların ölçülmesinde diğer sınav türlerine göre daha iyi hizmet etmesidir (Atılğan, 2006). Yani, öğrencilerin özgün ve yaratıcı düşünce gücünü, yazılı anlatım becerilerini, belli konulardaki görüşlerini ölçmede ve ürettikleri temsilleri ortaya çıkarmada yazılı sınavlar daha kullanışlıdır.

Tablo 3.3: KBS Hazırlama ve Uygulama Planı

<p>1. Sınavın amacını belirleme: Sınavın amacı, 11.sınıf öğrencilerinin geometri dersi birinci dönem konularıyla ilgili sorularda yer alan geometrik kavramlara ve bu kavramlarla birlikte soruları çözerken kullanacakları tablo, grafik, sembol gibi gösterimlere ilişkin bakış açılarını keşfederek bilişsel düzeylerini belirlemek ve elde edilen sonuca göre de araştırma için uygun katılımcıları seçmektir.</p>
<p>2. Ölçülecek davranışları belirleme: Ölçülmek istenen davranışlar;</p> <ul style="list-style-type: none"> • Öğrencilerin çokgenler konusundaki kavramlara ilişkin bilgileri, • soruların çözümünde tablo, grafik, sembol gibi temsil çeşitlerini nasıl kullandıkları • ürettikleri temsilleri ve problem çözümede attıkları adımları nasıl ifade ettikleridir.
<p>3. Uzman görüşüne başvurma: Soruların kapsamı, uygunluğu ile ilgili matematik eğitimi alanında uzman bir kişinin ve iki geometri öğretmenin fikri alınmıştır.</p>
<p>4. Soru sayısını belirleme: Soru sayısı, uygulanan ölçme aracının yazılı türü bir sınav olması nedeniyle sınırlı olmuştur. Bu nedenle, çokgenler konusunda yer alan kavram ve bilgileri kapsayacak tarzda yedi soru hazırlanmıştır.</p>
<p>5. Soru tipini belirleme: Sınavın ve araştırmanın amacına hizmet etmesi bakımından açık uçlu sorulara yer vermek uygun bulunmuştur. Sorular, geometriyle ilgili birçok kaynak tarandıktan sonra araştırma ve sınavın amacına uygunluk gibi durumlar düşünülerek araştırmacı tarafından hazırlanmıştır.</p>
<p>6. Soruların güçlük derecesine karar verme: Soruların güçlük derecesi, Bloom taksonomisinde yer alan bilişsel basamaklar göz önünde bulundurularak belirlenmiştir. İki soru kolay, üç soru orta ve iki soru da zor seviyede hazırlanmıştır ve sorulara sınav kâğıdında kolaydan zora doğru yer verilmiştir.</p>
<p>7. Sınav süresini belirleme: Sınav süresi, yapılan pilot çalışmada öğrencilerin soruları ne kadar sürede cevapladığı, matematik eğitimi alanında uzman bir kişinin ve uygulama yapılacak sınıfın geometri öğretmenin öngörülleri göz önüne alınarak belirlenmiştir.</p>
<p>8. Soruların yazımı: Sorular araştırmacı tarafından bilgisayarda yazılmıştır.</p>
<p>9. Puanlama işlemlerini belirleme: Araştırmacı, sınavı puanlamak için geçerliği ve güvenilirliği diğer türlere göre yüksek olan detaylı bir cevap anahtarı hazırlamayı tercih etmiştir. Cevap anahtarının puanlama bakımından uygunluğu uzman kişi tarafından incelenmiştir.</p>

Katılımcı Belirleme Sınavının Pilot Uygulaması: KBS’ deki soruların uygulamaya tam olarak hazır olup olmadığını anlamak amacıyla bir devlet lisesinden seçilen on öğrenci ile pilot çalışma yapılmıştır. Yapılan bu pilot çalışma sonrasında, öğrenciler tarafından tam olarak anlaşılmadığı düşünülen bir soru çıkarılarak, yerine aynı hedef davranışları ölçen, anlaşılabilir ve daha uygun bir soru eklenmiştir.

Soruların uzunluğu, içeriği ve öğrencilere uygunluğu açısından yapılan pilot çalışmada öğrencilerin soruları ortalama ne kadar sürede cevapladığı dikkate alınarak çözüm için altmış dakikanın yeterli olacağı kanaatine varılmıştır. Pilot çalışma sonrasında, uygulamanın yapılacağı sınıfın geometri dersine giren öğretmenin KBS’ de yer alan sorularla ilgili fikirleri alınmıştır. Tüm bunların sonunda, hazırlanan sorular bir uzman onayı ve iki geometri öğretmenin fikri alınarak katılımcıları belirlemek için uygulanmaya hazır hale getirilmiştir.

Yapılan pilot çalışma sonrasında, öğrencilerin sorulara verdiği cevapların da yardımıyla bir cevap anahtarı hazırlanmıştır. Hazırlanan cevap anahtarına göre öğrencilerin sergileyecekleri davranışlar ve bunları ne düzeyde ortaya koyduklarını göz önüne alan bir puanlama sistemi oluşturulmuştur. Hazırlanan KBS cevap anahtarı, bir uzman kişiye ve bir geometri öğretmenine inceletildikten sonra son şeklini almıştır.

Katılımcı Belirleme Sınavının Güvenirliği: Güvenirlik, ölçme aracının tesadüfi hatalardan arınık olma; ölçtüğü özelliğin gerçek değerinin yansıtabilme veya hatasızlık derecesidir (Atılgan, 2006). Eğitimde ölçme sonuçlarının güvenirliliğini düşüren bazı hatalar vardır. Ölçme sonuçlarının güvenirliliğini sağlamak için bu hatalardan uzak kalınmalıdır. Yapılan bu araştırmada hazırlanan katılımcı belirleme sınavının güvenirliliğini arttırmak için aşağıdaki önlemler alınmıştır.

- Soruların ifade biçimlerinde hataların yok edilmesi için araştırmacı hazırladığı soruları on kişilik bir gruba deneme amaçlı uygulamıştır. Bu uygulama sonucunda sorulardaki bazı ifade bozuklukları giderilmiş ve araştırma amacına hizmet etmeyeceği düşünülen bir soru çıkarılarak yerine başka bir soru eklenmiştir. Ayrıca, bu pilot uygulama sonrasında yeniden düzenlenen KBS’ deki soruların son hali, matematik eğitimi alanında

akademik anlamda uzman olan bir kişiye ve iki geometri öğretmenine gösterilmiştir.

- Uygulanan sınavda soru sayısının çok olması, güvenilirliği arttıran bir etmendir (Erkan ve Gömleksiz, 2008). Yazılı yoklamanın sınırlayıcı yanlarından biri soru sayısının az olmasıdır. Fakat bu durum KBS' de yer alan soruların alt sorulara sahip olması ile aşılmaya çalışılmıştır.
- Öğrencilerin psikolojik durumları, sınavda yanlış cevaplar vermelerine neden olabileceğinden, sınav uygulanmadan önce çeşitli açıklamalarda bulunularak sınav motivasyonları sağlanmıştır. Ayrıca sınavın uygulanma koşulları, cevaplama süresine ilişkin bilgilere sınav kâğıdının ilk sayfasında yer verilerek öğrenciler ne yapacaklarına dair bilgilendirilmiştir.
- Sınav sorularının uzun ve ayrıntılı cevaplar verilecek tarzda olması nedeniyle öğrencilere verilecek sürenin cevaplama için uygun olması gerekmektedir. Uygun süre; daha önce on kişiye yapılan pilot uygulama sonuçları, sınıfın geometri dersine giren öğretmenin ve matematik eğitimi alanında uzman bir kişinin fikirleri temel alınarak belirlenmiştir.
- Sınavın içeriğinde yer alan soruların açık uçlu olması, öğrencilerin soruları şans eseri cevaplamalarına neden olacak bir duruma ve kopya çekmelerine imkân tanımamıştır.
- Sınav sorularının objektif olarak puanlanması, sınavın güvenilirliği bakımından önemli olduğu için anahtarla puanlama yöntemi seçilmiştir. Çünkü anahtarla puanlama yöntemi, diğer puanlama türlerine göre daha geçerli ve güvenilir sonuçlara ulaşmayı sağlamaktadır (Atılğan, 2006).
- Ayrıca, puanlamada araştırmacının dikkatsizliğinden kaynaklanacak olası yanlış hesaplamaları engellemek için cevap kâğıtları iki kişi tarafından kontrol edilmiştir. Yani, bir anlamda puanlamada nesnellik sağlanmaya çalışılmıştır.
- Sınavda yer alan soruların zorluk dereceleri, hem yapılan pilot çalışmadaki on kişiye hem iki geometri öğretmenine hem de matematik eğitimcilerine danışılmıştır. Zorluk derecesi belirlenen sorular, sınav kâğıdına kalaydan zora doğru yerleştirilmiştir.
- Sınavın uygulanacağı öğrenci grubunun heterojen bir yapıda olması, güvenilirliği arttıran bir etmendir (Yılmaz, 2002). Bu nedenle, çalışma için

öğrencilerin başarı düzeyleri bakımından heterojen olduğu bir sınıf belirlenmiştir. Bu sınıfın belirlenmesinde, okuldaki müdürün ve geometri öğretmenlerinin görüşlerine başvurulmuştur.

Katılımcı Belirleme Sınavının Geçerliliği: Eğitimde kullanılan ölçme araçları, geçerlik adına iki farklı açıdan ele alınır. Bunlardan birincisi, aracın ölçmek istediği amaca uygun puanlar verip vermediğinin, ikincisi ise elde edilen puanlara, amaç dışı başka etkenlerin karışıp karışmadığının anlaşılmasıdır. Bu yüzden geçerlik, ölçme aracının ölçmeye çalıştığı amaçla uyum içinde olan sonuçlar vermesi ve bu ölçümlere ilgilenilen değişkenler dışında başka değişkenlerin karıştırılmaması olarak tanımlanır (Ebel, 1972; Turgut, 1997). Yapılan bu araştırmada hazırlanan katılımcı belirleme sınavının geçerliğini arttırmak için aşağıdaki önlemler alınmıştır:

- Kapsam geçerliğini sağlamak için sınav sorularının tümü, 11.sınıf geometri dersinin birinci dönem konusu olan çokgenlerle alakalı olarak hazırlanmıştır. Sınav kâğıdında yer alan her bir sorunun ilgili hedef-davranışı temsil etme düzeyi, uzman görüşü alınarak belirlenmiş ve böylece sınavın kapsam geçerliği arttırılmıştır.
- Ölçme aracının çok zor olması ya da çok kolay olması geçerliği düşürür (Erkan ve Gömleksiz, 2008). On öğrenciye deneme amaçlı uygulanan yazılı sınavdaki sorular, onların verdiği cevaplara ve Bloom taksonomisinde yer alan bilişsel düzeylere göre kategorilere ayrılarak zorluk dereceleri belirlenmiştir.
- Sorular uzman kişiler tarafından incelenilerek yapı geçerliği sağlanmaya çalışılmıştır. Ek olarak, soruların uygulandığı on kişilik deneme grubundaki bazı kişilerle soruları nasıl cevapladıklarıyla ilgili konuşulmuştur.
- Cevapları puanlama aşamasında, kesinlikle öğrencilerin yazı güzelliği gibi faktörler dikkate alınmamıştır.
- KBS’ deki sorular bir kitaptan aynen alınarak hazırlanmamıştır. Sorular, öğrencilerin karşılaşma ihtimallerinin düşük olduğu geometri kaynakları taranarak araştırmacı tarafından oluşturulmuştur.
- Soruların ifade edilişi ve test tekniğinde hazırlanmamış olmasından ötürü kopya çekimi ve şans eseri cevaplama engellenerek sınavın geçerliği arttırılmıştır.

3.2. Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmanın gücü, barındırdığı çoklu metotlar ve yapısının veri çeşitlenmesine izin vermesinden gelmektedir (Dindyal, 2003). Bu çalışmada, veri toplamak için üç araç kullanılmıştır. Bunlar ; (1) sesli düşünme protokolü, (2) öğrencilere uygulanan geometri soruları ve (3) görüşmelerdir. Böylece, bir metotta yer alan kusurlar diğer metotlar yardımıyla kapatılmış ve zengin bir veri tabanı oluşturulmuştur.

3.2.1. Sesli Düşünme Metodu

İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimleri incelemek amacıyla yapılan bu çalışmada, öğrencilerin zihinsel süreçleri devreye girdiği için sadece gözlem yaparak yeterli veriye ulaşmak mümkün değildir. Zihinsel süreçlerin ele alınacağı çalışmalarda genel olarak belli başlı metotlar kullanılmaktadır. Lester (1980) sesli düşünme metodu (think aloud method), iç gözlem (introspection), yazılı envanterler (written inventories) gibi bazı yaklaşımları önermektedir. Bunlar arasından sesli düşünme; kişilerin zihinlerinde var olan süreçleri, düşünceleri ve duygularını açıklayarak ifade etmelerini sağlayan bir metot olduğundan bu araştırmanın yapısına uygun bulunmuştur.

Sesli düşünmenin kökeni psikolojik çalışmalara dayanmaktadır. Bu metot, iç gözlem metodu vasıtasıyla geliştirilmiştir. İç gözlem, birçok çalışmada kullanılmış ama çeşitli teorik ve metodolojik sıkıntılara neden olduğu için psikologlar arasında bazı şüpheler uyandırmıştır. Fakat bu tarz şüpheler sesli düşünme metodunda aşağıdaki nedenlerden dolayı yer almamaktadır.

- Sesli düşünme metodu yorumlamadan kaçınır; sadece çok basit bir sözelleştirme sürecini içerir.
- Sesli düşünme metodunda herhangi birinin de ulaşabileceği sözel protokollerle veriler elde edilir. Böylece, verilerin elde edilmesinde objektiflik sağlanmış olur (van Someron, Barnard ve Sandberg, 1994).

1960'lı yılların sonuna doğru bilişsel süreçlere olan ilgi arttığı için bu süreçlerle ilgili veri toplama yolları önem kazanmıştır. Örneğin, problem çözmenin bilgisayar

modelleriyle bağdaşan detaylı bir modelini inşa etmek için Newell ve Simon (1972) çalışmalarında sesli düşünme metodunu kullanmışlardır. Sesli düşünme metodu, birçok psikolog tarafından şüpheli bulunmasına rağmen, özellikle 1980'li yıllardan sonra bilişsel süreçlerin ve bilgisayar simülasyonlarının popülerliği artınca önem kazanmaya başlamıştır. van Someren ve diğerleri (1994), sesli düşünme metodu ile veri toplarken göz önünde bulundurulması gereken beş önemli adım olduğunu belirtmektedir. Bunlar;

1.Ortam: Sesli düşünme ortamındaki birey, kendini rahat ve güvende hissetmelidir. Öğrencilerin bildikleri ve kendilerini rahat hissedecekleri bir yerde çalışılması, doğru veriler elde etme açısından çok önemlidir.

2.Bilgilendirme: Sesli düşünme protokollerini uygulamadan önce katılımcılar süreçle ilgili kısa ve net bir biçimde bilgilendirilmelidir.

3.Araştırma Evresi: Sesli düşünme için çoğu zaman özel bir eğitim gerekmektedir. Katılımcıları sürece alıştırmak için uygulama sorularına benzer nitelikte sorularla çeşitli denenceler yapılmalı ve kişiler sesli düşünmeye alıştıktan sonra araştırma verileri toplanmaya başlanmalıdır.

4.Araştırmacının Rolü: Araştırmacı, kişileri sesli düşünme süreci boyunca kontrol eder. Bu süreç içinde araştırmacılar, sadece uzun süren sessizliklerle karşılaşınca, katılımcıların sesli düşünme sürecine devam etmelerini sağlamak için “*Konuşmaya devam edebilirsin.*” diyebilirler.

5.Kaydetme: Sesli düşünme oturumu, genellikle ses veya videokasete kaydedilir. Bilgilendirme ve alıştırmaya çalışmaların kaydedilmesi, sesli düşünme sürecinin doğru olarak uygulanıp uygulanmadığını kontrol etme adına faydalı olabilir.

Sesli Düşünme Metodunun Uygulandığı Ortama İlişkin Bilgiler: Sesli düşünme metodunu uygulamak için seçilen ortamın katılımcıya güven ve rahatlık sunması büyük önem taşımaktadır (van Someren ve diğ., 1994). Çünkü öğrenci, bulunduğu ortamda kendini sıkılmış ve rahatsız hissederse verilerin elde edilmesinde aksaklıklar yaşanabilir. Araştırma verileri toplanırken, öğrencilerin kendilerini rahat hissedecekleri bir mekanın gerekli olduğu okul müdüre aktarılınca çalışmaya en uygun yer olarak okul kütüphanesi belirlenmiştir. Aydınlık ve 85 metrekarelik bir ortam olan okul kütüphanesi, öğrencilerin tanıdıkları ve kendilerini rahat hissedecekleri bir mekândır

(Bkz. Resim 3.1). Okul kütüphanesi, dört katlı olan okulun birinci katında yer almaktadır. İçinde oldukça fazla kitabın bulunduğu kütüphanede bir görevli sürekli olarak durmaktadır. Teneffüslerde öğrenciler fotokopi çektirmek ve kitap almak için kütüphaneye geldiğinde gürültü oluştuğu için bu süre içinde çalışmaya ara verilmiştir. Çalışma esnasında sürekli el altında bir şişe su bulundurulmuş ve katılımcının kendini rahat hissedeceği bir sandalye temin edilmiştir.



Resim 3.1: Araştırmanın Gerçekleştiği Ortam

3.2.2. Katılımcılara Uygulanan Geometri Soruları

Öğrencilerin geometri soruları çözerken oluşturdukları iç temsillerle, dış temsiller arasındaki etkileşimleri araştırmak amacıyla öncelikli olarak çokgenler konusuyla ilgili bir soru havuzu oluşturulmuştur. Bu havuzda çokgen konusuyla ilgili on beş tane soruya yer verilmiştir. Daha sonra, hazırlanan bu sorular içinden üç tanesi, araştırmacı ve bir uzman kişi tarafından seçilmiştir (Bkz. EK-4). Fakat üç soruya ek olarak, yeterli derecede veri alınamadığı takdirde kullanılmak üzere bazı soruların seçilmesi konusunda uzman kişi ve araştırmacı fikir birliğine varmıştır. Seçilen üç uygulama sorusu dışında öğrencileri sesli düşünme sürecine alıştırmak için üç soru daha belirlenmiştir. Bu üç sorudan ikisi, öğrencileri sesli düşünme sürecine alıştırmak amacıyla kullanılmıştır (Bkz. EK-3).

3.2.3. Görüşmeler

Görüşme, insanların bir konuyla ilgili bakış açılarını, tecrübelerini, duygularını ve algılarını ortaya koymada oldukça kullanışlı bir yöntemdir (Bogdan ve Biklen, 1992). Patton'a (2002) göre görüşmenin amacı, bir bireyin iç dünyasına girerek bakış açısını anlamaktır. Bu araştırmada, sesli düşünme metodu sonrasında katılımcılarla görüşmeler yapılmıştır.

Görüşmeler, yapılandırılmış ve yapılandırılmamış olmak üzere iki türdür. Yapılandırılmış görüşme; önceden belirlenmiş bir dizi soru ve yanıt içerirken, yapılandırılmamış görüşme; belli bir esneklikte ve açık uçlu sorular içerir (Chadwick, Bahr ve Albrecht, 1984). Araştırmada yapılandırılmamış görüşme türü seçilmiştir. Böylece, önceden belirlenmiş herhangi bir soru ve yanıt için beklentiye girilmemiştir. Ek olarak, görüşme esnasında problemle ilgili özel alanlar keşfedildiğinde daha ayrıntılı sorularla derinlemesine irdelemeler yapılmıştır.

Görüşmede önceden kestirilebilen ve kısa yanıtlara ortam hazırlayan sorulardan ziyade, katılımcıları açıklama yapmaya ve ayrıntılı konuşmaya teşvik eden “nasıl”, “neden” ve “ne” türü sorulara yer verilmiştir. Böylece bireyin konu hakkında daha ayrıntılı bilgi vermesi sağlanarak, araştırma sorusuna cevap oluşturacak verilere ulaşılmıştır. Soruların tam olarak anlaşılmadığı durumlarda, alternatif bir ifade biçimiyle, bireyin soruyu anlamasına yardımcı olunmuştur (Yıldırım ve Şimşek, 2006, s.113).

Görüşme esnasında sorulan sorular, “ sorgulayıcı” bir tutumla değil; bilgi vermeye davet edici biçimde sorulmuştur. Konuşmacının rahat olmasını sağlamak amacıyla, daha çok konuşma tarzında görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler, katılımcıların izniyle kameraya kaydedilmiştir.

3.3.Verilerin Toplanması

Uygulamaya başlamadan önce, süreçle ilgili tecrübe edinmek ve çalışmanın amacına uygun hareket edebilmek için uygulama öğrencilerine benzer nitelikte seçilen üç öğrenci ile pilot çalışmalar yapılmıştır. Çünkü yapılacak bir pilot çalışma sonrasında, araştırmacı uygulamalar için veri toplamaya hazır hale gelir (Glesne, 1998, s.38). Pilot çalışma, araştırmacı tarafından iki hafta sürdürülmüştür. Yapılan pilot çalışma sonrasında, araştırmacı sesli düşünme konusunda tecrübe kazanmıştır. Ayrıca, her bir uygulama sorusu için görüşme soruları geliştirilmiştir.

Pilot çalışma tamamlandıktan sonra, katılımcılarla kütüphanede bireysel olarak uygulamalara başlanmıştır. Fakat katılımcıların sesli düşünme metoduna alıştırmaları gerektiği için uygulamalara başlamadan önce deneme çalışmaları yapılmıştır. Her bir katılımcıya öncelikle bir sesli düşünme protokolü verilmiş ve kendilerinden ne beklendiği açıklanmıştır (Bkz. EK-2). Daha sonra, öğrencilere uygulama sorularına benzer fakat daha kolay nitelikte birkaç geometri sorusu yöneltilmiştir (Bkz. EK-3). Katılımcılar sesli düşünme metoduna alıştırdıktan sonra uygulamaya başlamak için öngörülen derslerden birer ya da ikişer saatliğine kütüphaneye alınmıştır. Araştırmacı tarafından hazırlanan üç uygulama sorusu EK-4’te verilen sıra ile katılımcılara bireysel olarak uygulanmıştır. Ayrıca, uygulama sorularının çözülmesi esnasında herhangi bir zaman sınırlaması getirilmemiştir.

Katılımcılar, düşüncelerini sözel olarak ifade edemedikleri zaman çalışmaya küçük bir ara verilmiştir. Sesli düşünme sürecinde bir dakikayı aşan sessizlikler olduğunda ise, araştırmacı katılımcıya “ *Konuşmaya devam edebilirsin!*” şeklinde bir hatırlatma yapmış ve bunun dışında uygulama sürecine herhangi bir müdahalede bulunmamıştır. Sesli düşünme sonrasında, araştırmacı zihninde oluşan soru işaretlerini gidermek ve süreçle ilgili daha fazla bilgi edinmek için katılımcılarla ortalama 15’er dakikalık görüşmeler yapmıştır. Çalışma toplam üç hafta sürmüştür. Yapılan görüşme sayısı ve günlerine ilişkin detaylar, tablo 3.4’de verilmiştir.

Tablo 3.4: Araştırmada Gerçekleştirilen Oturumların Tablosu

Katılımcılar	21 Nisan 2009	22 Nisan 2009	24 Nisan 2009	28 Nisan 2009	29 Nisan 2009	30 Nisan 2009	5 Mayıs 2009	7 Mayıs 2009
ERDEM	✓					✓	✓	✓
ASYA			✓	✓		✓		
KEREM		✓	✓		✓			✓

Sesli düşünme sürecinde edinilen tüm veriler, katılımcıların izni alınarak kameraya kaydedilmiştir. Alınan video kayıtları, uygulama esnasında gözden kaçabilecek noktaların fark edilmesinde kolaylık sağlamıştır. Öğrencilere video kayıtlarının güvenli bir yerde tutulduğuna ve çalışma sonrasında yok edileceğine dair bilgiler verilmiştir.

Uygulama sırasında araştırmacı tarafından öğrencilerin psikomotor davranışları, süreç içindeki ruh halleri, ses tonları, hareket ve diğer tüm davranışları da not edilmiştir.

3.4. Verilerin Analizi

Araştırmada temel veri kaynakları olan sesli düşünme kayıtları, görüşmeler, öğrencilerden elde edilen çalışma kağıtları ve araştırmacı notları sırayla incelenmiştir. Strauss ve Corbin (1990) elde edilen bilgilerin düzenlenmesi ve anlamlı bir bütün oluşturması için betimsel analiz ve içerik analizi olmak üzere iki çeşit veri analiz yöntemi önermektedir. Betimsel analizde amaç; verileri özetlemek ve yorumlamakken, içerik analizinde temel amaç; elde edilen verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).İçerik analizi, araştırmacıyı toplanan verilere aşına olmasını ve verilerin daha ileri analizler için kullanılmasını kolaylaştırdığı için bu araştırmanın yapısına uygun bulunmuştur. Çalışmada içerik analizi, ham verinin kodlanması ve doküman içeriğindeki ilişkili veriler ile kategorilerin oluşturulmasını kapsamaktadır. İçerik analizinin yanı sıra bu çalışma da sürekli karşılaştırma veri analizi metodu da kullanılmıştır. Sürekli karşılaştırmalı veri analizi, incelenen verilerin

tümevarım kategori şeklinde kodlanmasını ve incelenmekte olan verileri sürekli olarak karşılaştırma işlemini kapsamaktadır (Ekiz, 2003, s.83).

Araştırmada elde edilen veriler, dört aşamada incelenmiştir. Bu aşamalar sırasıyla;

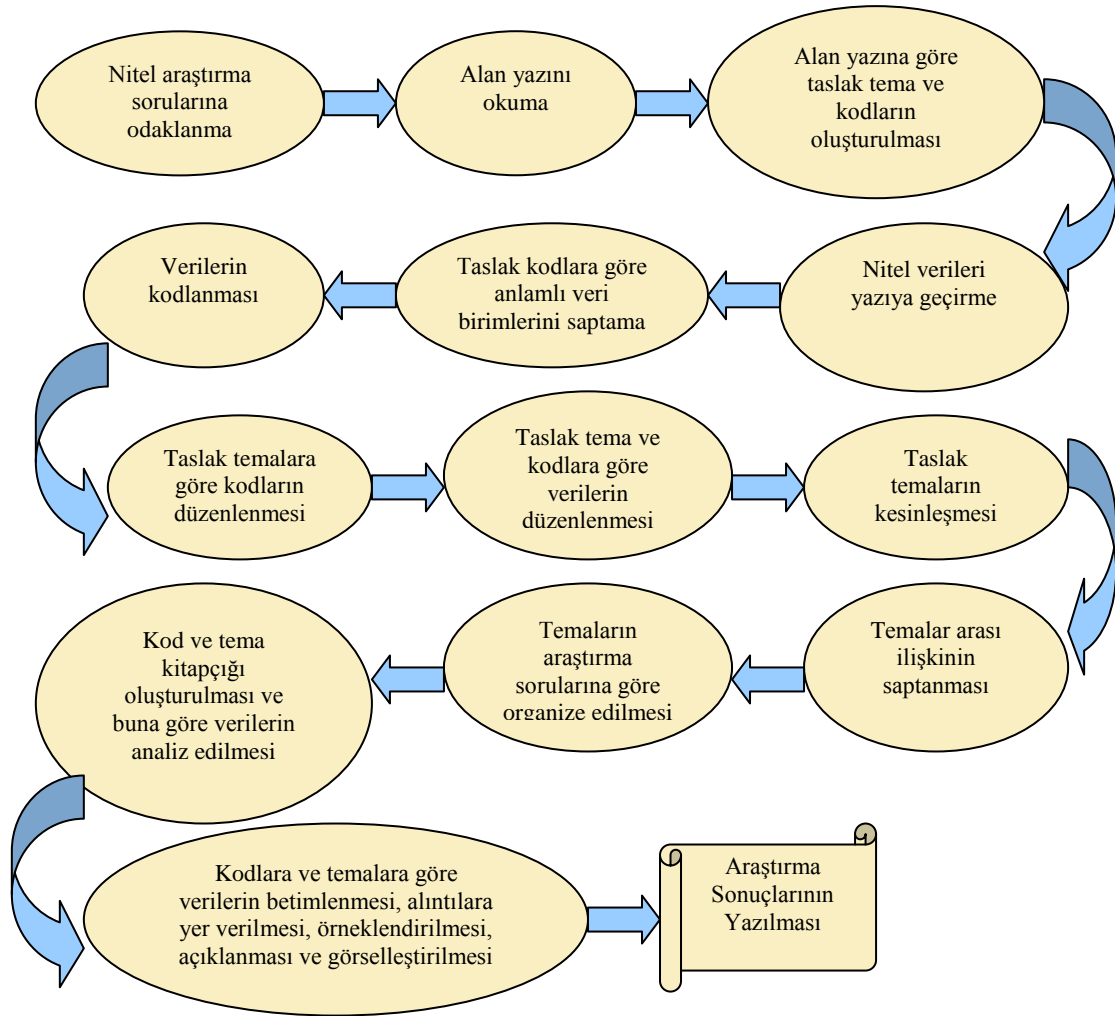
- 1.Verilerin kodlanması
- 2.Temaların bulunması
- 3.Kodların ve temaların düzenlenmesi
- 4.Bulguların tanımlanması ve yorumlanmasıdır.

Veri analizi sürecinin nasıl işlediği, şekil 3.2’de verilmiştir.

Strauss ve Corbin (1990) verilerin kodlanması için üç tip kodlama biçiminden söz etmektedirler. Bunlar;

1. Daha önceden belirlenmiş kavramlara göre yapılan kodlama,
2. Verilerden çıkarılan kavramlara göre yapılan kodlama,
3. Genel bir çerçeve içinde yapılan kodlamadır.

Bu araştırmada, kodlama biçimlerinden üçüncüsü seçilmiştir. Bu kodlama türü ilk iki türün birleşimi olarak düşünülebilir. Verilerin analizinden önce genel bir çerçeve oluşturularak bu çerçeveye göre kodlama yapılmış ve daha sonra elde edilen verilere göre ortaya çıkan yeni kodlar listeye dâhil edilmiştir. Ardından, tüm öğrencilerin aynı soruya cevapları sabit bir kıyaslama metodu kullanılarak incelenmiştir. Bir katılımcının cevapları aynı soruyu cevaplayan diğer katılımcıların cevapları ile kıyaslanmıştır. Araştırmadaki çoklu veri kaynakları ortaya çıkan örüntüleri doğrulamak için kullanılmıştır. Ortaya koyulan geçici kategori ve kodlar, verilerin araştırma soruları kapsamında defalarca incelenmesi sonucunda esas kategori ve kodlarla yer değiştirmiştir.



Şekil 3.2: Nitil Verilerin Analizinde İzlenen Aşamalar (Kaynak: Collins,1990)

Nitel araştırmalar için önemli konulardan biri de araştırma verilerinin analiz edildikten sonra genellenip genellemeyeceğidir. Genelleme, daha çok nicel araştırma geleneğinde kullanılmasına rağmen, bazı araştırmacılar nitel araştırma sonuçlarının da genellenebileceğini ileri sürmektedirler. Ancak nitel araştırmadaki genelleme kavramı nicel araştırmadakinden farklıdır. Nicel araştırmada kastedilen genelleme, örneklemden evrene genellemeyken, nitel araştırmada kastedilen ise analitik genellemedir. Analitik genellemede sınırlı sayıda katılımcı ya da bilgi kaynaklarından bazı sonuçlara veya kuramlara ulaşma çabası vardır (Altunışık, Coşkun, Yıldırım ve Bayraktaroğlu, 2002). Bu araştırmada öğrencilerin oluşturduğu temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşimlerle ilgili nicel anlamda bir genellemeye ulaşma çabası yoktur. Yapılan bu araştırma, öğrencilerin oluşturduğu temsiller arasındaki etkileşim süreciyle ilgili bir model sunarak eğitime katkı sağlamaya çalışmaktadır.

3.5. Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik Sağlama Çalışmaları

Nitel araştırmada geçerlik ve güvenilirlik, nicel araştırmadakinden farklı yollarla sağlanmaya çalışılır. Lincoln ve Guba (1985) araştırmada geçerlik ve güvenilirliği arttıracak bazı stratejiler önermektedirler. Fakat bu bağlamda iç geçerlik yerine inandırıcılık, dış geçerlik yerine aktarılabilirlik, iç güvenilirlik yerine tutarlılık ve dış güvenilirlik yerine teyit edilebilirlik kavramlarını kullanmayı uygun bulmaktadırlar. Bu çalışmada güvenilirlik ve geçerlik, Lincoln ve Guba'nın (1985) öne sürdüğü stratejiler kullanılarak sağlanmaya çalışılmıştır.

▪ İnandırıcılık

Bu araştırmada inandırıcılığın sağlanması için araştırmacı veri kaynaklarıyla uzun süreli bir etkileşim kurmuştur. Böylece, veri üzerinde araştırmacının öznel algılarından kaynaklanacak etkiler en aza indirilmeye çalışılmıştır. Uzun süreli etkileşimle öğrenciler araştırmacıya karşı kendilerini daha rahat hissederek süreç içinde daha etkin rol almışlardır.

Derinlik odaklı veri toplama

Araştırma derinlik odaklı bir veri toplama süreci içinde gerçekleştirilerek, verilerden ortaya çıkan sonuçlar sürekli birbiriyle karşılaştırılmış ve yorumlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca araştırma verilerinin gerçeği yansıtması amacıyla elde edilen veriler eleştirel bir gözle incelenmiştir.

Çeşitleme (Triangulation)

Araştırmada güvenilirlik ve geçerlik sağlama konusunda bir diğer yöntem de çeşitleme (triangulation) yoluna gidilmesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Katılımcıların tüm davranışlarını daha net gözlemlemek için kamera çekimleri, karaladıkları tüm kâğıtlar, her bir araştırma sorusu ardından yapılan görüşmeler ve araştırmacının süreçle ilgili aldığı notlar veri kaynakları olarak ele alınmıştır. Veri çeşitliliği sağlanarak, güvenilir ve geçerli sonuçlara ulaşılmaya çalışılmıştır.

Uzman İncelemesi

Elde edilen sonuçların inandırıcılığını sağlamak için araştırma konusu hakkında genel bilgiye sahip olan iki kişiden yardım alınmıştır. Uzman kişilere süreç ve konuyla ilgili bilgiler sözel olarak verilmiştir. Bu uzman kişiler araştırmacıya çeşitli sorular yöneltmişlerdir. Böylece, araştırma farklı bakış açılarıyla birlikte incelenmiştir.

Katılımcı Teyidi

Araştırmada üç tür teyit etme işlemi arasından biri seçilmiştir (Erlandson, Haris, Skipper ve Allen, 1993). Toplanan veriler özetlenerek, katılımcılardan bu özetlemeye ilişkin düşüncelerin doğruluğunu teyit etmeleri istenmiştir. Bu sayede, katılımcılar eklemek istedikleri bir düşünce ya da algı varsa onları da söyleme imkanı bulmuştur. Ek olarak, yapılan görüşmelerde, katılımcılardan süreci özetlemeleri istenmiştir. Araştırmacı bu yolla, uygulama sürecine ilişkin kendi algılarının doğruluğunu teyit etme imkânı yakalamıştır.

Aktarılabilirlik (Transfer Edilebilirlik)

Lincoln ve Guba (1985) nicel araştırmanın temel amaçlarından biri olan genelleme yerine nitel araştırmada aktarılabilirlik kavramını ortaya koymaktadır. Erlandson ve diğerleri (1993) araştırma sonuçlarının aktarılabilirliğini arttırmak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme olmak üzere iyi yöntem sunmaktadır.

Ayrıntılı Betimleme

Araştırmanın başlangıcından sonuna kadarki süreçte edinilen tüm bilgiler, ayrıntılı bir betimleme ile aktarılamaya çalışılmıştır. Gerekliğinde doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Amaçlı Örnekleme

Nitel bir araştırmada aktarılabilirliği arttırmak amacıyla amaçlı örnekleme kullanılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu araştırmada da katılımcılar amaçlı örnekleme kapsamında seçilmiştir.

▪ **Tutarlık**

Nitel araştırmada güvenirlik kavramı yerine nitel araştırmada Lincoln ve Guba (1985) tutarlık kavramını önermektedir. Araştırmacı, veri toplama araçlarının oluşturulması, verilerin toplanması ve analizi aşamalarında sürekli olarak tutarlı davranıp davranmadığını kontrol ederek tutarlığı sağlamaya çalışmıştır.

▪ **Teyit Edilebilirlik**

Nitel araştırmada tam bir nesnellik yakalamak söz konusu olmayabilir. Bu yüzden Lincoln ve Guba (1985) nesnellik yerine teyit edilebilirlik kavramını ön plana çıkarmaktadır. Araştırmada ulaşılan sonuçlar ham verilerle karşılaştırılmıştır. Ek olarak, verilerin analizi ve ulaşılan sonuçların teyit edilmesi için matematik eğitimi alanındaki bir araştırma görevlisi ile yine bu alanda akademik anlamda uzman bir kişinin görüşlerine başvurulmuştur.

4.BÖLÜM

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde, aşağıda yer alan araştırma problemi ve onun alt problemlerine cevap vermek amacıyla toplanan verilerin üçüncü bölümde belirtilen yöntemlere göre analizleri sonucunda elde edilen bulgular ve yorumlar yer almaktadır. İşe bu araştırmanın problemini hatırlatmakla başlayalım.

Araştırma Problemi: Öğrencilerin bazı geometrik kavramlarla uğraşırken, oluşturdukları dış temsillerle iç temsiller arasında nasıl bir etkileşim meydana gelmektedir?

Alt Problem-1: Geometrik problemlerle uğraşırken öğrencilerin oluşturdukları dış temsiller nelerdir?

Alt Problem-2: Geometrik problemlerle uğraşırken öğrencilerin oluşturdukları iç temsiller nelerdir?

Alt problem-3: Öğrencilerin oluşturduğu bu dış temsiller ve dış temsiller arasında bir ilişki var mıdır; varsa bu nasıl bir ilişkidir?

Araştırma problemine cevap vermek amacıyla yapılan veri analizi sonucunda elde edilen bulgular ve yorumlar üç temel başlık altında tablo 4.1'deki düzen ve sırada sunulmuştur.

Tablo 4.1: Bulgular ve Yorumların İşlenişindeki Yapı

<u>Uygulama Sorusu 1</u>	<u>Uygulama Sorusu 2</u>	<u>Uygulama Sorusu 3</u>
- Oluşan Dış Temsiller	- Oluşan Dış Temsiller	- Oluşan Dış Temsiller
- Oluşan İç Temsiller	- Oluşan İç Temsiller	- Oluşan İç Temsiller
- İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler	- İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler	- İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Tablo 4.1 'de görüldüğü gibi bulgular ve yorumlar, her bir uygulama sorusu altında ele alınmıştır. Bu uygulama soruları altında sırasıyla katılımcılarda gözlenen dış temsiller, iç temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşim süreciyle ilgili bilgilere yer verilmiştir.

Katılımcılardan elde edilen veriler, veri düzenleme yollarından içerik analizine göre şekil 3.2'deki gibi ayrılan kategori ve temalar aracılığıyla incelenmiştir. Oluşan iç ve dış temsiller, öncelikle her bir soru için ayrı ayrı tablolar aracılığıyla açıklanmaya çalışılmıştır. Daha sonra, her bir uygulama sorusu için öğrencilerde gözlenen bu iç ve dış temsillerin oluşum süreçlerindeki benzerlikler ve farklılıklar, durum çalışmasının karşılaştırmalı analiz tekniğine göre detaylı bir biçimde sunulmuştur. Son olarak da üç uygulama sorusundan edinilen tüm verilerin kıyaslanmasıyla ortaya çıkan benzerlik ve farklılıklara ayrı bir başlık altında yer verilmiştir. Bulguların sunumunda ve yorumların desteklenmesinde görüşme, yazılı dokümanlar ve sesli düşünme metodu aracılığıyla edinilen veriler ve temsillerle ilgili kavramsal çerçeveden faydalanılmıştır.

4.1. Birinci Uygulama Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

11. sınıf öğrencilerinin oluşturdukları iç temsillerle dış temsiller arasındaki etkileşimleri incelemek amacıyla yapılan bu çalışmada katılımcılara sunulan üç uygulama sorusundan ilki şekil 4.1 de verilmiştir.

Siz, öğretmeninizle birlikte çeşitli çokgensel modellerle parke döşemektesiniz. Öğretmeniniz size çokgenlerle ilgili bir bilgiyi paylaşmak için aşağıdaki direktifleri veriyor:

- Üçgenen başlayarak çeşitli konveks çokgensel şekiller (dörtgen,beşgen,...) çizersiniz.
 - Çizerdiğiniz bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenleri oluşturunuz.
- a) Çokgenlerin içinde elde ettiğiniz üçgenlere de dikkat ederek aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Konveks Çokgen	Kenar sayısı	Üçgen Sayısı	İç Açıların Ölçüleri Toplamı
Üçgen	3	1	180°
Dörtgen			
Beşgen			
Altıgen			
Yediggen			
...			
n-gen			

b) Çokgenin kenar sayısı ile iç açılarının ölçüleri toplamı arasında bir ilişki vardır. Tablodaki sayıların tümünü kapsayan kuralı n-kenar sayılı çokgen için matematiksel olarak ifade ediniz.

c) Cebirsel olarak ifade ettiğiniz bu ilişkiyi sözel olarak yazınız.

Şekil 4.1: Uygulama Sorusu 1

Şekil 4.1 'de verilen birinci uygulama sorusunda öğrencilerden çokgenlerle ilgili bir örüntüyü sözel, cebirsel ve yazılı olarak ifade etmeleri istenmiştir. Bu örüntüyü bulurken öğrencilerde gözlenen temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşimler aşağıda ele alınmıştır.

Birinci uygulama sorusundan elde edilen veriler ışığında, katılımcıların oluşturduğu iç ve dış temsil türlerinin neler olduğunu hem genel hatlarıyla hem de bir arada daha iyi resmedebilmek için şekil 4.2 oluşturulmuştur.

Şekil 4.2’de katılımcılarda gözlenen iç ve dış temsiller, ayrı iki eksen olarak belirlenmiştir. Daha sonra, belirlenen bu eksenler üzerinde, katılımcıların birinci uygulama sorusuyla uğraşırken hangi temsil türlerini oluşturduğuna yer verilmiştir. Şekil 4.2 dikkatlice incelendiğinde, katılımcıların aynı tip dış temsilleri oluşturdukları görülmektedir; fakat gözlenen iç temsillerde farklılıklar vardır. Gözlenen iç temsillerin sadece gösterge(G) numaraları verilmiştir. Bu göstergeler, tüm detayıyla 4.2.1 başlığı altında ele alınmıştır.

- a) *Sözel sistemlere* giren üç göstergeden G–1.2 tüm katılımcılarda gözlenmiştir.
- b) *Formel sistemlere* giren beş göstergeden G–2.4 hariç diğerleri Erdem’de; G–2.2 ve G–2.3, Asya ‘da ve Kerem’de ise G–2.2 gözlenmiştir.
- c) *İmgesel sistemlere* giren altı tür gösterge Erdem ve Asya’da, dört tür gösterge ise Kerem’de gözlenmiştir.

Sözel sistemlerde aynı tür göstergeyi tüm katılımcılar sergilerken, formel sistemlere giren gösterge türlerinde ve sayısında farklılıkların olduğu gözlenmiştir. Örneğin, başarı düzeyi yüksek olan öğrenci daha fazla sayıda formel sisteme giren gösterge türü sergilerken, başarı düzeyi düşük öğrenci sadece bir tür formel sistem göstergesi sergilemiştir. Bu durum, Goldin’in (1998a) başarılı öğrencilerin problem çözümlerinde daha fazla içselleştirme sürecine girdiklerine dair görüşünü desteklemektedir.

Katılımcılarda gözlenen temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşim süreçleriyle ilgili bilgiler detaylı bir biçimde aşağıda ele alınmıştır.

Oluşan Dış Temsiller:

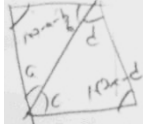







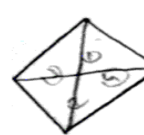



Birinci uygulama sorusundan elde edilen veriler incelendiğinde, katılımcıların tablo 4.2’de yer alan dış temsillerden; şekiller, yazılı ve cebirsel ifadeleri oluşturdukları gözlenmiştir.

Tablo-4.2: Uygulama Sorusu 1'e Göre Katılımcıların Oluşturduğu Dış Temsiller

DIŞ TEMSİLLER	ERDEM (İYİ)	ASYA (ORTA)	KEREM (ZAYIF)
Şekiller	✓	✓	✓
Yazılı İfadeler	✓	✓	✓
Cebirsel İfadeler	✓	✓	✓
Tablo			

Katılımcılar, Şekil 4.1'de verilen uygulama sorusunun (a) şikkı ile uğraşırken şekilleri, (b) şikkıyla uğraşırken cebirsel ifadeleri ve (c) şikkı ile uğraşırken de yazılı ifadeleri oluşturmuşlardır. Katılımcılarda gözlenen şekiller tablo 4.3'te verilmiştir.

Tablo 4.3 Katılımcıların Birinci Uygulama Sorusunu Çözerken Çizdiği Şekiller

KATILIMCILAR	GÖZLENEN ŞEKİLLER			
Erdem				
Asya				
Kerem				

Şekil 4.1'deki sorunun (a) şikkında verilen bilgilere göre katılımcılar çeşitli şekiller oluşturmuşlardır (Bkz. Tablo 4.4). Soruda çizmeleri istenilen şekilleri doğru anlamış ve çizmişlerdir. Ancak, şekillerin üzerinde uyguladıkları işlemlerde farklılık gözlenmiştir. Bu farklılıklar, öğrencilerin soruyu algılama biçimleriyle ilgili olabilir. Temsiller üzerinde yapılan işlemler; problem durumu ve öğrencilerin algılama biçimlerine göre çeşitlilik gösterebilir (Herman, 2002).

Katılımcılarda gözlenen diğer bir dış temsil de cebirsel ifadelerdir (Bkz. Tablo 4.2) Katılımcılar, cebirsel ifadeleri sorunun (b) şikkında ifade edilen çokgenin kenar sayısı ile iç açılarının toplamı arasındaki ilişkiyi bulmaya çalışırken üretmişlerdir. Öğrencilerin buldukları sonuçları cebirsel olarak nasıl ifade ettikleri, verilerden alınan kesitlerle örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

ERDEM: *Çokgenin iç açısı toplamı* = $(n-2) \times 180^\circ$

ASYA: $(n-2) \times 180^\circ$

KEREM: *Kenar sayısı* $\times 90$

Örnekte de görüldüğü gibi çokgenin kenar sayısı ile iç açılarının toplamı arasındaki ilişkiyi veren cebirsel ifadeye ulaşmışlardır. Erdem n kenarlı bir çokgenin iç açılar toplamını veren formülü doğru bir şekilde bulmuştur. Asya doğru sonuca ulaşmasına rağmen bulduğu formülde bir eşitlik sembolü kullanmamıştır. Kerem ise derece sembolünü ve kenar sayısı için hiçbir harfli ifadeyi kullanmadan yanlış bir formül elde etmiştir. Katılımcılardan genel anlamda bir formül çıkarması ve bunu ifade etmesi istendiğinde zorlandıkları görülmüştür. Kerem görüşme esnasında, formül oluştururken neden zorlandığıyla ilgili aşağıdaki açıklamalarda bulunmuştur:

ARAŞTIRMACI: *Formül olarak ifade etmekte neden zorlandın mı?*

KEREM: *Okulda bize formüller veriliyor. Biz de o formüllere göre soru çözüyoruz. Ama burada formülü bizim bulmamız isteniyor. O yüzden zorlandım. Bir de ben dersleri fazla dinlemiyorum ondan da olabilir.*

Okullarda formüllerin kullanılmasından ziyade oluşturulmasına imkan tanıyan etkinliklere çok fazla yer verilmemesi, öğrencilerin buldukları sonuçları cebirsel olarak ifade etmekte zorlanmalara neden olabilmektedir. Bu nedenle, öğretmenler derslerinde temsilsel geçişleri içeren etkinliklere yer vermelidir.

Katılımcılarda gözlenen diğer bir dış temsil de yazılı ifadeler olmuştur. (Bkz. Tablo 4.2). Öğrenciler sorunun (c) şikkında cebirsel olarak ifade edilen ilişkinin ne anlama geldiğini belirtirken yazılı ifadeleri aşağıdaki gibi üretmişlerdir.

ERDEM: *n kenarlı bir çokgende n-2 tane üçgen oluşur. Bu üçgen, bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derece olduğu için çokgenin iç açısı toplamı $(n-2) \times 180$ derece olarak ifade edilir.*

ASYA: *Bir çokgende bir köşeden kenar sayısının 2 eksiği kadar üçgensel bölge elde edilir. İç açılarının toplamı bir köşeden çizilerek elde edilen üçgen sayısının 180 ile çarpımı ile bulunur.*

KEREM: *Konveks bir çokgenin kenar sayısının 90 ile çarpımı çokgenin iç açıları toplamını verir.*

Katılımcılar çokgenin iç açıları toplamıyla ilgili elde ettikleri formülü, önce sözel olarak daha sonra da yazılı olarak ifade etmişlerdir. Fakat öğrencilerin yazılı ifadelerinde eksiklikler olduğu görülmüştür. Genel anlamda öğrenciler yaptıkları matematiksel işlemleri yazılı olarak ifade etmede zorlanmışlardır. Matematik ve Geometri öğretim programlarında öğrencilerin buldukları sonuçları yazılı olarak aktarmalarına imkan tanıyacak etkinliklere yer verilmesi gerektiği düşünülmektedir.

Oluşan İç Temsiller:

Elde edilen veriler incelendiğinde katılımcıların sözel, formel ve imgesel sistemlere giren iç temsiller ürettikleri gözlenmiştir. Temsil kavramıyla ilgili teorik bilgiler ışığında kod ve temalara ayrılarak oluşturulan tablo 4.4'te katılımcılarda gözlenen iç temsiller işaretlenmiştir.

Tablo-4.4: Birinci Uygulama Sorusuna Göre Katılımcılarda Gözlenen İç Temsiller

İç Temsil Sistemleri ve Sistemlere Giren Göstergeler		Katılımcılar		
Temsil Sistemleri	Temsil Sistemlerinin Göstergeleri	ERDEM (İyi)	ASYA (Orta)	KEREM (Zayıf)
1. Sözel Sistemler <i>Sözel sistemlere giren temsiller, bireylerin kendi dillerindeki kapasitelerini kelimeler, tümceler ve cümleler düzeyinde betimlemeleri durumunda oluşur.</i>	1.1. Verilen kelime ve cümleleri betimlemek için başka kelime ve cümleleri kullanma			
	1.2. Sözel ifadeler aracılığıyla diğer temselsel sistemlere ilişkin yetkinlikleri betimleme	✓	✓	✓
	1.3. Cümledeki kelimelerin kategorik ilişkileriyle ilgili yorumlar yapma (eş anlamalı, zıt anlamlı gibi)			
2. Formel Sistemler <i>Matematikte yer alan sayı sistemleri, aritmetik algoritmalar, rasyonel sayılar, cebirsel notasyonlar vb. geleneksel ve iyi yapılandırılmış sembolik sistemlerdir. Bu tip formel konfigürasyonların yapıları ve manipülasyonlarıyla ilgili yetkinliklerin ortaya koyulması durumunda formel sistemlere giren temsiller oluşur.</i>	2.1. Görselleştirdiği durumları sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma	✓		
	2.2. Ortaya çıkan matematiksel durumları (sözel ve yazılı olan) sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma (örneğin, sembol manipülasyonu hakkında konuşması)	✓	✓	✓
	2.3. Kurallar ve algoritmalar hakkında konuşma	✓	✓	
	2.4. Bir sembolün, notasyonun anlamını açıklama			
	2.5. Kullanılan kural ya da algoritmanın soruda neden çalıştığını sözel olarak açıklama			

<p>3. İmgesel Sistemler</p> <p><i>İmgesel sistemler nesnelere, ilişkilendirmeler, ilişkiler ve dönüşümler düzeyinde sözel ve notasyonal olmayan konfigürasyonları içerir. Bu konfigürasyonları içeren göstergelerin ortaya çıkması durumunda imgesel sistemlere giren temsiller oluşur. İmgesel sistemler, görsel, işitsel ve kinestatik sistemler olarak üçe ayrılmaktadır.</i></p>	<p>3.1. Görsel Sistemler</p> <p>3.1.1. İmge Üretimi <i>Bir kişi uzun süreli bellekten resim veya görsel bir sunu çağırıldığında ve bunu işleyen belleğe yerleştirdiğinde oluşur.</i></p>				
	3.1.1.1. Sözel olarak ne anladığını ifade ettikten sonra bunu bir şekil ya da resim çizerek gösterme	✓	✓		
	3.1.1.2. Verilen bilgileri kullanarak özel bir temsil (şekil, çizim) ortaya koyma	✓	✓	✓	
	3.1.1.3. Bir örüntüyü çıkarmak için görsellerle ilgili geçmiş bilgileri hatırlama ya da kullanma				
	<p>3.1.2. İmge Denetimi <i>İşleyen bellekte bir imgenin özellikleri tarandığında oluşur.</i></p>				
	3.1.2.1. Soruya cevap vermek için imgeyi inceleme	✓	✓	✓	
	3.1.2.2. Şekillerin özelliklerini (kenar, açı, yön gibi) açık bir şekilde yazarak ifade etme				
	3.1.2.3. Çizerek ya da tarif ederek şekillerin benzerliklerini veya farklılıklarını ortaya koyma		✓		
	<p>3.1.3. İmge Dönüşümü <i>Bir kişi oluşturduğu imgeye değişiklikler uyguladığında oluşur.</i></p>				
	3.1.3.1. Sorudan ne anladığını daha iyi ifade etmek için farklı pozisyonlarda şekiller çizme				
	3.1.3.2. Şekle öteleme, dönme gibi işlemler uygulama				
	3.1.3.3. Bir şekle işlemler uygulayarak onu değiştirme (ilk iki madde dışındaki işlemler)	✓	✓	✓	
	<p>3.1.4. İmge Kullanımı <i>Bir imge zihinsel işlemler için kullanılırken oluşur.</i></p>				
	3.1.4.1. İmgeleri, kavramları kullanma	✓	✓	✓	
	3.1.4.2. Verilerin içinden anlamlı sonuçlara ulaşma (n. terimi doğru bir şekilde hesaplama gibi)	✓			
	<p>3.2. Kinestatik Sistemler <i>Bireylerin fiziksel hareketleri içsel olarak temsil edip, imgeleştirdiği durumlarda oluşur.</i></p>				
	3.2.1. Vücudunu kullanarak bazı geometrik durumları uygulama (açıyı, doğruyu, bir yerin uzunluğunu parmaklarıyla gösterme gibi.)				
	3.2.2. Çevredeki bir nesne ya da başka bir şeyin yapacağı hareketi onun yerine bireyin imgeleştirmesi				
	<p>3.3. İşitsel Sistemler <i>Matematiksel işlemler gerçekleşirken, konuşulan kelime ve sembolleri işitme sürecinden farklı olarak oluşur.</i></p>				
	3.3.1. Ellerini çırparak sayıları ifade etme ya da belli bir ritimde çarpım tablosunu söyleme, grup içindeki sayıları vurgulama vs...				

Katılımcılar, aynı tip iç temsilleri oluşturmuş olsalar bile temsillerin soru içinde gözüktükleri yerler ve zamanlarda farklılıklar bulunmaktadır. Bu farklılıklara daha iyi odaklanabilmek için veriler karşılaştırılarak kesitler halinde aşağıda sunulmuştur.

- **Sözel Sistemler:**

Tablo 4.4’de yer alan “Sözel ifadeler aracılığıyla diğer temsilsel sistemlere ilişkin yetkinlikleri betimleme (Gösterge 1.2)” göstergesi, tüm katılımcılarda gözlenmiştir. Gösterge 1.2’ye örnek olması açısından Erdem’in 1. uygulama sorusunun (a) şıkkıyla uğraşması esnasında toplanan verilerden kesitler aşağıda sunulmuştur.

ERDEM: *Bir de beşgen(Şekil 4.3). Eee bir tane üçgen çıktı. Kenar sayısı beş, üçgen sayısı bir oldu. Hmm bir köşesi diyor. Öyle mi bir, iki, üç. Üç tane üçgenimiz oldu bu durumda Şimdi altıgen.(Aşağıdaki şekli çiziyor.(Şekil 4.3)) Bir tane köşeden köşegenleri çizeli Bir, iki, üç, dört tane üçgen oluştu. Kenar sayısı 6 üçgen sayısı 4..”*



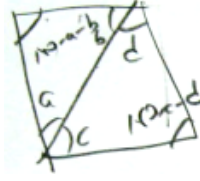
Şekil 4.3: Erdem’in sözel temsil oluştururken kullandığı şekiller

Erdem soruda çizilmesi istenen konveks çokgenleri Şekil 4.3’teki gibi çizmiştir. Ardından, çizdiği çokgenlerin bir köşesinden geçen köşegenleri şekil üzerinde ifade etmiştir. Katılımcı, çokgenin içinde oluşan üçgen sayısını bulurken sözel açıklamalarda bulunmuştur. Erdem sözel ifadeler aracılığıyla çokgen şekillerine ilişkin yetkinliklerini betimlediğinden Gösterge 1.2 gözlenmiştir. Bu göstergenin ortaya çıkması, Erdem’in sözel sistemlere ait bir iç temsil ürettiğinin kanıtıdır. Çözümün konveks çokgenlerin çizimiyle ilgili olan bu aşamasında, diğer iki katılımcıda Gösterge 1.2 gözlemlenmemiştir. Özgün- Koca’nın (1998) da belirttiği gibi aynı tip temsilin tüm bireylerde görülmemesi; bireysel farklılıklar, öğrencilerin edindiği geçmiş tecrübeler ve bilgilere bağlı olabilir.

- **Formel Sistemler:**

Tablo 4.4’de yer alan “Görselleştirdiği durumları sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma (Gösterge 2.1)” göstergesi, birinci uygulama sorusunda Erdem’den edinilen verilerde aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: $a, b, 180-a-b$ ve c, d ve $180-c-d$ oluyor. Evet, ben de diyorum niye çıkmıyor. Toplamları da 360 oluyor. O yüzden üçgen sayısı iki oluyor. Şunların toplamı da 360 oluyor. (Şekil 4.5'i çiziyor.)



Şekil 4.4: Erdem'in formel temsil oluştururken kullandığı dış temsil

Erdem, dörtgenin iç açıları toplamını bulmak amacıyla ilk olarak bir dörtgen şekli çizmiştir. Dörtgenin bir köşesinden geçen köşegenleri çizdikten sonra Şekil 4.4'te görüldüğü gibi oluşan üçgenlerin iç açılarını sembolik olarak ifade etmiştir. Erdem, verilerden alınan kesitlerde de görüldüğü gibi sembolik ifadeleri kullanırken şekilden faydalanarak sözel yorumlarda bulunduğu için *Gösterge 2.1* gözlenmiştir. Başarı düzeyi yüksek olan öğrencide bu göstergenin ortaya çıkması, yaptığı işlemleri içselleştirerek hareket ettiğini göstermektedir. Bu yüzden formel sistemler, öğrencilerin problem çözme süreçlerini etkili bir biçimde analiz etme açısından önemlidir (Goldin,1998a).

Tablo 4.4'te yer alan “*Ortaya çıkan matematiksel durumları (tablodan ve yazılı ifadelerle ulaşılan) sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma (Gösterge 2.2)*” göstergesi aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ASYA: (Tabloyu inceleyerek) Tamam. Şimdi şöyle oluyor. Şimdi her birinin iki eksiği oluyor. O zaman üçgen sayısı $n-2$ dir.

KEREM: (Tabloyu üstünkörü inceleyerek) İşte kenar sayısını ne yaptık 90 ile çarptık filan. O zaman, Kenar sayısı $x 90$ olur.

Asya ve Kerem, soruda verilen tabloya yazdıkları veriler yardımıyla çokgenin kenar sayısı ile iç açılarının toplamı arasında bir ilişkiye ulaşımlardır. Tablodan çıkardıkları bu sembolik durumlar hakkında düşüncelerini sözel olarak ifade ettikleri için *Gösterge 2.2*'yi sergilemişlerdir. Göstergelerin tüm öğrencilerde aynı şekilde görülmemesinin nedeninin kullandıkları diğer temsil türlerine bağlı olabileceği düşünülmektedir.

Tablo 4.4'te yer alan “*Kurallar ve algoritmalar hakkında konuşma (Gösterge 2.3)*” göstergesi, birinci uygulama sorusunda edinilen verilerde iki katılımcıda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

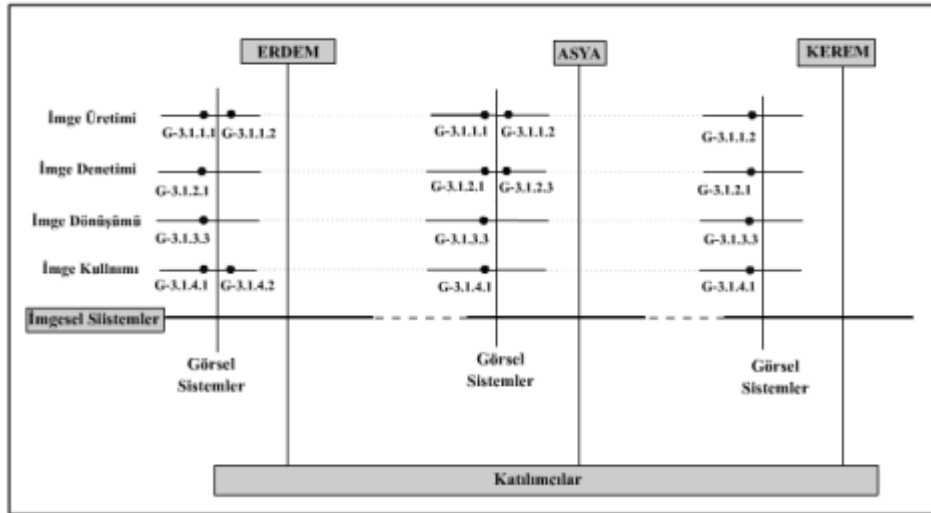
ERDEM: *n-gene gelelim. Kenar sayısı, $n-2$ ve bu da $(n-2) \times 180$ de şey olur. n kenarlı bir çokgende $n-2$ tane üçgen oluşur. Bu üçgen, bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derece olduğu için çokgenin iç açısı toplamı $(n-2) \times 180$ derece olarak ifade edilir.*

ASYA: *(Soruyu okuyor) "Çokgenin kenar sayısı ile iç açıların toplamı arasında bir ilişki vardır. Tablodaki sayıların tümünü kapsayan kuralı n -kenar sayılı çokgen için matematiksel bir ifade bulunuz." Tamam. Şimdi şöyle oluyor. (Soruda verilen tabloyu kullanarak ve işaret ederek) şimdi her birinin iki eksiği oluyor. O zaman üçgen sayısı $n-2$ dir. O zaman çokgenin iç açıları 180 derece çarpı $n-2$ mi oluyor yani?*

Katılımcıların ikisi çokgenin iç açıları toplamı formülü ile ilgili açıklamalarda bulunmuşlardır. Kullandıkları kurallarla ilgili konuşmalar sergiledikleri için Erdem ve Asya'nın soru çözümlerinde *Gösterge 2.3* gözlenmiştir. Fakat Kerem, çokgenin iç açıları toplamını veren kuralı uydurduğunu söylemiş ve sorunun çözümünde bulduğu kuralla ilgili açıklama yapmadığı için Kerem'de *Gösterge 2.3* gözlenmemiştir. Formüllerin anlamlarına ilişkin bilgi düzeylerinin başarılı öğrencilerde daha yüksek olduğunu söyleyebiliriz.

• İmgesel Sistemler

Katılımcılar tablo 4.4'te görüldüğü gibi imgesel sistemler içine giren göstergeleri sergileyerek temsiller oluşturmuşlardır. Katılımcılarda gözlenen bu göstergeler şekil 4.5'de verilmiştir.



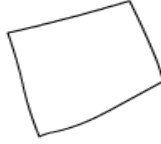
Şekil 4.5: Katılımcılarda gözlenen imgesel sistem göstergeleri

Şekil 4.5'te yer alan görsel sistemlere giren göstergelerin katılımcılarda nasıl ortaya çıktığı, verilerden alınan kesitlerle aşağıda sunulmuştur.

İmge Üretimi

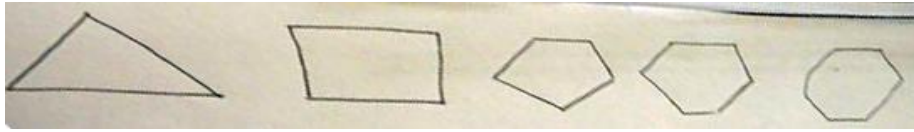
Şekil 4.5'te yer alan “Sözel olarak ne anladığını ifade ettikten sonra bunu bir şekil ya da resim çizerek gösterme (Gösterge 3.1.1.1)” göstergesi, 1. uygulama sorusunda edinilen verilerde iki katılımcıda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: Çokgenlerin içindeki üçgenlere de dikkat ederek tabloyu doldurunuz. O zaman tabloya göre önce dörtgenden başlamalıyız. Hmm dörtgen, kenar sayısı bir iki üç dört (Şekil 4.6'yi çiziyor.)



Şekil 4.6: Gösterge 3.1.1.1'nin gözlendiği esnada Erdem'in çizdiği şekil

ASYA: Önce diyor ki üçgenden başlayarak çeşitli konveks çokgensel şekiller çiziniz. Üçgenden başlayalım. Üçgen çizelim. Kare çizelim. Çokgen diyor, beşgen çizelim. Kaç tane çizeceğim? (Soruyu inceliyor tekrar) Hmm tamam yedigene kadar çizeceğim. (Şekil 4.7'i çiziyor)

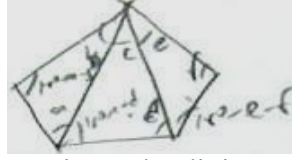


Şekil 4.7: Gösterge 3.1.1.2'nin gözlendiği esnada Asya'nın çizdiği şekil

Erdem ve Asya, soruyu okuduklarında sorudan ne anladıklarını kendi cümleleriyle sözel olarak ifade edip soruda istenen çokgenleri çizmeye başladıklarından Gösterge 3.1.1.1'i sergilemişlerdir. Kerem imge üretimini gerçekleştirirken sözel yetkinliklere yer vermediğinden dolayı Gösterge 3.1.1.1 gözlenmemiştir. Bu gösterge, Kerem'de gözlenmemiş olduğu için onun sözel yetkinliklere yer vererek imge üretimini gerçekleştirmediğini söyleyebiliriz.

Katılımcılarda gözlenen “Verilen bilgileri kullanarak özel bir temsil (Şekil, Çizim) ortaya koyma (Gösterge 3.1.1.2)” göstergesi, verilerden alınan kesitlerle aşağıda sunulmuştur.

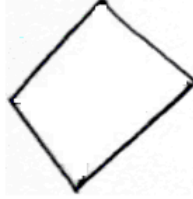
ERDEM: (Dörtgenden sonraki çizimlerde soruda ne istendiğini inceleyerek) Bir de beşgen.



Şekil 4.8: Gösterge 3.1.1.2'nin gözleendiği esnada Erdem'in çizdiği şekil

ASYA: Üçgen çizelim. Kare çizelim. Çokgen diyor, beşgen çizelim. Kaç tane çizeceğim? (Soruyu inceliyor tekrar) Hmm tamam yedigene kadar çizeceğim.

KEREM: Hmm. Üçgeni vermiş zaten dörtgeni soruyor. Onun kenar sayısı dört. (Şekil 4.9'dekileri çiziyor.)



Şekil 4.9: Gösterge 3.1.1.2'nin gözleendiği esnada Kerem'in çizdiği şekil

Katılımcılar yapılan görüşmelerde soruda verilen üçgen, dörtgen gibi kavramlara ilişkin kısımları okuduklarında hemen o kavramlara ait imgelerin zihinlerinde oluştuğunu ifade edip kağıda aktarmışlardır. Böylece katılımcılar *Gösterge 3.1.1.2*'yi sergilemişlerdir. Kavramlarla ilgili uzun süreli bellekten resim veya görsel bir sunu çağrılıp işleyen belleğe yerleştirildiğinde imge üretimi gerçekleştiği için, öğrenciler bir iç temsil oluşum sürecine girmişlerdir (Kosslyn, 1980).

İmge Denetimi

Şekil 4.5'te yer alan "Soruya cevap vermek için imgeyi inceleme (*Gösterge 3.1.2.1*)" göstergesi, birinci uygulama sorusunda edinilen verilerde iki katılımcıda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: Şimdi üçgen sayısına bakalım (Bir süre sessizce önceden çizdiği dörtgen şeklini inceliyor.)

KEREM: (Ürettiği dörtgen şekline bir süre sessizce baktıktan sonra) Şimdi üçgen sayısı bir, iki, üç, dört başka olmaz.

Erdem ve Kerem öncelikle ürettikleri imgeleri kağıt üzerine aktarmışlardır. Ardından, dörtgenin bir köşesinden geçen köşegenleri bulup içinde oluşan üçgen sayısını belirlemek için şekli incelemişlerdir. Katılımcılarda imgeyi denetledikleri bu süreçte *Gösterge 3.1.2.1* gözlenmiştir. Ancak Asya dışbükey çokgenlerin çizimiyle ilgili olan bu kısımda tüm şekilleri aynı anda çizdiği için bu katılımcıda *Gösterge 3.1.2.1* gözlenmemiştir.

Katılımcılardan Asya, sorunun (a) şıkında yer alan tabloyu doldurmak için şekil çizerken diğer katılımcılardan farklı olarak “Şekilleri çizerek ya da tarif ederek benzerlik ya da farklılıkları ortaya koyma (Gösterge 3.1.2.3)” göstergesini aşağıdaki gibi sergilemiştir.

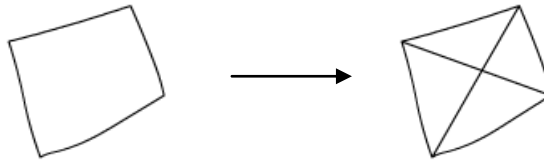
ASYA: Şimdi ne yapacağım? (Soruyu tekrar okuyor) çizdiğiniz bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenler. (üçgen için) bunun bir köşesinden geçemediği için çizemiyorum ama diğerleri (dörtgen, beşgen, altıgen,...) için çizebilirim. Çünkü diğerlerinde köşegen oluşuyor ama üçgende oluşmuyor.

Asya, şekillerin bir köşesinden geçen köşegenleri bulmak amacıyla üçgenden yedigene kadarki tüm çokgenleri çizmiştir. Ardından, şekillerdeki benzerlik ve farklılıklara odaklanarak hangi şekillerde köşegen çizilip çizilemeyeceğini ifade etmiştir. çizerken hangi şekillerde bu köşegenlerin çizileceğini ve hangilerinde çizilemeyeceğini ifade etmiştir. Asya'nın imge denetimi sürecinin diğer iki katılımcıdan farklı olması, tüm imgeleri aynı anda oluşturması ve şekil olarak ortaya koymasından kaynaklanabilir. Buradan, imge üretimindeki süreçlerin imge denetimini etkilediğini söyleyebiliriz.

İmge Dönüşümü

Şekil 4.5'te yer alan “Bir şekle işlemler uygulayarak onu değiştirme (Gösterge 3.1.3.3)” göstergesi katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: Üçgen sayısına bakalım. Bir köşegen sayısı. bir, iki , üç, dört. Dört tane üçgen oluyor.

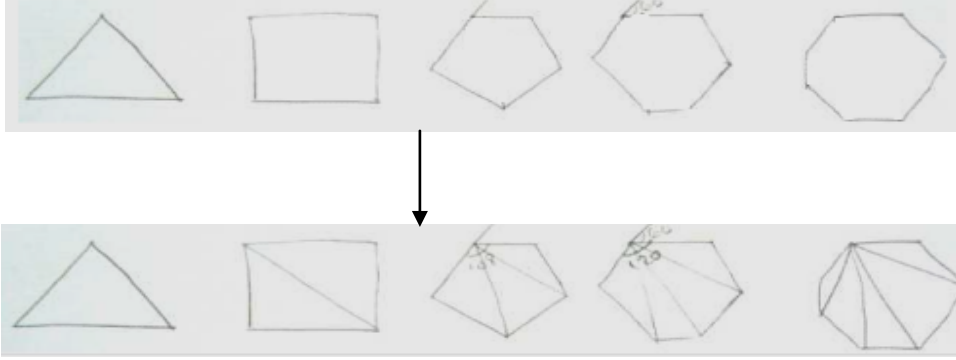


Şekil 4.10: Gösterge 3.1.3.3'in gözlemlendiği esnada Erdem'in şekle uyguladığı dönüşüm

Erdem, üçgenin bir köşesinden diğer köşelere çizilen köşegenler yardımıyla, çokgenin içinde oluşan üçgen sayısını bulurken daha önceden çizdiği dörtgene Şekil 4.10'da görüldüğü gibi bir işlem uygulamıştır. Uyguladığı işlemle daha önce çizdiği dörtgen üzerinde değişiklik meydana geldiğinden katılımcıda Gösterge 3.1.3.3. gözlenmiştir. Burada dikkat çeken önemli nokta, katılımcının ilk aşamada ürettiği

imgeyi denetleyip ardından bir dönüşüme tabi tutmasıdır. İmgenin önce denetlenip ardından bir dönüşüme uğraması, Kosslyn'in (1980) imgesel sistemler arasında hiyerarşik bir yapı olduğuna dair görüşünü desteklemektedir.

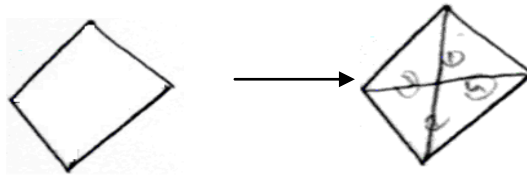
ASYA: (üçgen için) bunun bir köşesinden geçemediği için çizemiyorum (Diğerleri için aşağıdaki çizimleri yapıyor)



Şekil 4.11: Gösterge 3.1.3.3'ün gözlendiği esnada Asya'nın şekillere uyguladığı dönüşüm

Asya soruda çizdiği çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenleri Şekil 4.11'deki gibi çizmiştir. Köşegenleri çizerken çokgenler üzerinde değişiklikler yaptığı için katılımcıda "Bir şekle işlemler uygulayarak onu değiştirme (Gösterge 3.1.3.3)" göstergesi gözlenmiştir.

KEREM: Dörtgen için de kenar sayısı dört. (Şekil 4.12'yi çiziyor ve soruda verilen tabloda kenar sayısı kısmına dörtgen için 4 olarak yazıyor.). Şimdi üçgen sayısı (Şekil 4.12'deki ilk şekle dönüşüm uyguluyor.) bir, iki, üç, dört oluyor. Çünkü iki köşegen çizebiliyorum. Başka olmuyor sanırım.



Şekil 4.12: Gösterge 3.1.3.3'ün gözlendiği esnada Kerem'in şekle uyguladığı dönüşüm

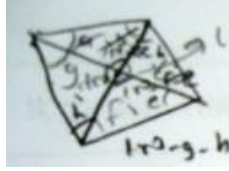
Kerem Şekil 4.12'de görüldüğü gibi çizdiği dörtgen şeklinin bir köşesinden geçen köşegenler yerine tüm köşelerinden geçen köşegenleri bulmuştur. Bu köşegen çizme işlemini uygularken, şekil üzerinde değişiklik yaptığı için katılımcıda Gösterge 3.1.3.3 gözlenmiştir.

Katılımcıların imge dönüşümü sırasında şekillere uyguladıkları işlemlerde farklılıklar oluşmuştur. Örneğin, Erdem ve Kerem dörtgenin sadece bir köşesinden geçen köşegenleri çizmek yerine tüm köşelerden geçen köşegenleri çizmeye çalışmışlardır. Görüşmelerde Erdem ve Kerem soruyu iyi okumadıkları için hatalı yaklaşım sergilediklerini ifade etmişlerdir. Aynı hatalı yaklaşım, Asya'nın soru çözümünde gözlenmemiştir. Bunun nedeni, Asya'nın sözel becerilerinin ve yazılı ifadeleri anlama yeteneğinin diğer öğrencilerden daha ileri düzeyde olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

İmge Kullanımı

Şekil 4.5'te yer alan “İmgeleri, kavramları kullanma (Gösterge 3.1.4.1)” göstergesi katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

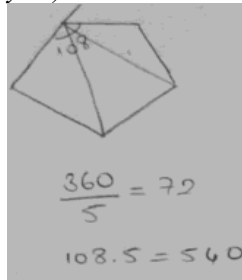
ERDEM: İç açılar toplamına bakalım. Üçgenin iç açılar toplamı 180° . a ve b direk 360° çıkacak. (Şekil 4.13'de açılarını ifade ediyor)



Şekil 4.13: Gösterge 3.1.4.1'in gözleendiği esnada Erdem'in kullandığı şekil

Erdem soruda bir dörtgenin iç açılarını elde etmeye çalışırken ürettiği imgeyi kullanarak iç açılar toplamının 360° olduğu sonucuna varmıştır. Katılımcı ürettiği imgeyi soru çözümünde kullandığı için Gösterge 3.1.4.1 gözlenmiştir.

ASYA: (Tabloyu okudu) dörtgen için kenar sayısı 4, üçgen sayısı 2 ve iç açılar toplamı 360 derece. (dereceyi ezberden tabloya yazdı) Beşgen için köşegen sayısı 5 ama kenar sayısı 5, köşegen sayısı 3, iç açılar toplamı İmmmm. Bunun iç açısını hesaplamam lazım. (gülümsüyor) Bir, iki, üç, dört, beş. (beşgenin kenarlarını saydı.) 360 bölü 5, eşittir 72 dir (Şekil 4.14'ü çiziyor.).



Şekil 4.14: Gösterge 3.1.4.1'in gözleendiği esnada Asya'nın kullandığı şekil

Asya çizdiği beşgen üzerinde sembolik işlemler yaparak çokgenin iç açılarını bulmaya çalışmıştır. Beşgene dair oluşturduğu imgeyi soru çözümünde kullandığı için Asya'da *Gösterge 3.1.4.1* gözlenmiştir. Bu göstergeyle, katılımcı imgesel sistemlere giren bir iç temsil oluşturmuştur.

KEREM: *Mmm... Başka olmaz. (Bir süre sessiz ve kararsız bir ifade ile düşünüyor ve tabloya oluşan üçgen sayısı için 4 yazıyor.) İç açılar toplamı 360 olur. (Tabloya iç açılar toplamı kısmına 360 derece yazıyor.) Beşgen... (Şekil 4.15-a'yı çiziyor.) Üçgen sayısı 6 tane. (Şekil 4.15-a'da çizimleri köşegenlerden yapıyor. Her köşegenden çizim yapıp yapmadığına emin olmaya çalışıyor.) Üçgenleri saydım. (tabloya kenar sayısı kısmına 5, üçgen sayısı kısmına 6 yazıyor.) İşte şuralar 90, 90 (Şekil 4.15-b) Bu bir beşgen 90 çarpı 5 dersek iç açılar toplamı 450 olur.*



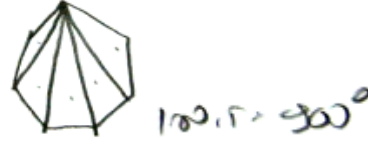
Şekil 4.15: *Gösterge 3.1.4.1*'in gözlendiği esnada Kerem'in kullandığı şekil

Kerem, çizdiği çokgenin iç açıları toplamını bulmak için şekil üzerinde açılar belirtirken ürettiği imgeyi sorunun çözümüne yönelik kullandığı için “*İmgeleri, kavramları kullanma (Gösterge 3.1.4.1)*” göstergesi gözlenmiştir.

İmge kullanımı aşamasında verilerde de görüldüğü gibi tüm katılımcılarda *Gösterge 3.1.4.1* gözlenmiştir. Fakat katılımcılar çokgenin iç açıları toplamını bulurken, ürettikleri imgeleri farklı biçimlerde kullanmışlardır. Örneğin, Erdem çokgenin iç açıları çokgenin içinde oluşan üçgenler yardımıyla bulmuştur. Kerem, Şekil 4.15-b'de oklarla gösterilen kısımların 90° olduğunu hiçbir açıklama yapmadan iddia etmiştir. Asya ise çizdiği çokgenlerin dış açılara odaklanarak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Aynı göstergenin farklı şekillerde gözükmesi öğrencilerde imge kullanımı süreçlerinin birbirinden farklı olabileceğini göstermektedir.

Katılımcılar birinci uygulama sorusuyla uğraşırken “*Verilerin içinden anlamlı sonuçlara ulaşma (bir örüntüde n. terimi başarılı bir şekilde hesaplama) (Gösterge 3.1.4.2)*” göstergesi sadece Erdem'de aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: *Yediggen. Bir, iki, üç, ..., yedi. Vay be oldu! 5 üçgen ve $5 \times 180 = 900$ iç açılar toplamı olur. n-gene gelelim. Kenar sayısı, n-2 ve bu da $(n-2) \times 180$ de şey olur.*






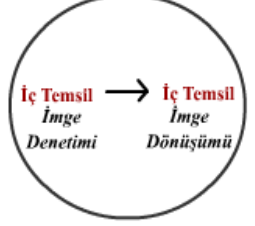
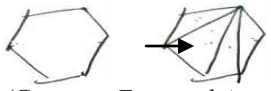
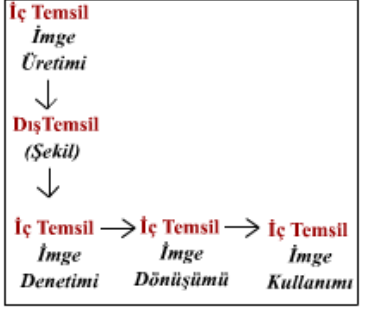
Şekil 4.16: Erdem'in yedigenin içine üçgenleri çizdiği şekil

Erdem öncelikle yedigenin bir köşesinden geçen köşegenleri çizmiştir. Köşegen çizimi sonrasında yedigenin içinde oluşan üçgenlerin iç açılar toplamını tek tek hesaplamak yerine, dörtgen ve beşgenin iç açıları toplamını bulurken elde ettiği formülü kullanmıştır. Erdem yedigenin iç açıları toplamını daha önce elde ettiği bir formüle göre bulunduğu için *Gösterge 3.1.4.2* gözlenmiştir. Bu iç temsilin sadece Erdem'de oluşması, Erdem'in başarı düzeyinin diğer iki katılımcıya göre daha ileri seviyede olmasından kaynaklanabilir.

Oluşan İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler:

İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimlerin nasıl olduğunun daha iyi anlaşılabilmesi için Erdem, Asya ve Kerem'den edinilen veriler sırasıyla Tablo 4.5, 4.6 ve 4.7'de sunulmuştur. Tabloların ilk sütununda verilerden kesitler, ikinci sütununda oluşturulan temsil türleri ve üçüncü sütununda da bu temsiller arasındaki etkileşimlere yer verilmiştir.

Tablo 4.5 Erdem'in Birinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler
<p>“Soruda beşgen demiş o zaman bir de beşgende kaç üçgen olduğuna bakalım. (Aşağıdaki şekli çizdi. (Görüşme Esnasında) Erdem: Soruda beşgen kısmını okuyunca zihnimde bir beşgen şekli belirdi.</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Temsiller ✓ İmge Üretimi (Gösterge 3.1.1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Şekil 	<p><u>Dikey Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>“Şimdi üçgen sayısına bakalım. (Şekli inceleyerek) Önce köşegen sayısı. Bir, iki, üç, dört. Dört tane üçgen var. (Şekil üzerine aşağıdaki dönüşümü uyguluyor.)”</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Temsiller ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.1) <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Temsiller ✓ İmge Dönüşümü (Gösterge 3.1.3.3) 	<p><u>Yatay Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>“Şimdi altıgen. (Aşağıda yer alan birinci şekli çiziyor ve bir süre şekli inceliyor.) Bir tane köşeden köşegenleri çizelim. Bir, iki, üç, dört tane üçgen oluştu (Şekil... çizdi). Kenar sayısı altı, üçgen sayısı dört oluyor (deyip tabloya yazdı)”</p>  <p>(Görüşme Esnasında) Erdem: Soruda altıgen kısmını okuyunca zihnimde bir altıgen şekli belirdi.</p>	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ İmge Üretimi (Gösterge 3.1.1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Şekil <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.1) ✓ İmge Dönüşümü (Gösterge 3.1.3.3) ✓ İmge Kullanımı (Gösterge 3.1.4.1) 	

Tablo 4.5'te öğrencinin oluşturduğu iç ve dış temsiller arasında nasıl bir etkileşim olduğu incelendiğinde, yatay ve dikey boyutlu olmak üzere iki tür etkileşim olduğu görülmüştür. Erdem'in problem çözme sürecinde edinilen veriler incelendiğinde, bazı yerlerde sadece yatay veya dikey boyutlu etkileşimin olduğu gözlenirken, bazı yerlerde ise her iki etkileşim türünün de olduğu gözlenmiştir.

Tablo 4.5'in birinci satırında, Erdem'in görüşme esnasında sorunun beşgenle ilgili kısmını okuyunca zihinde bir beşgen şekli oluştuğunu belirtmesi imge üretimi yaptığını göstermiştir. Oluşan imgeyi kağıda aktarması da katılımcının dış temsil


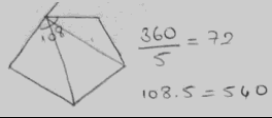

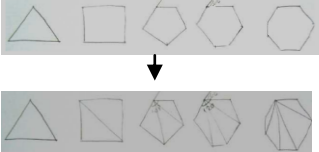
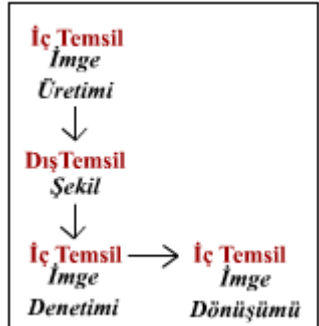
ürettiğinin kanıtıdır. İmge üretimi ve şekil, farklı temsil türlerine ait olduklarından (iç temsil-dış temsil) temsiller arasında dikey boyutlu bir etkileşim oluşmuştur. İç ve dış temsil arasında oluşan etkileşim, Kaput'un (1990) teorisindeki farklı temsil türleri arasında dikey boyutlu bir etkileşimin olduğuna dair yargısını doğrulamaktadır.

Tablo 4.5'in ikinci satırında, Erdem dörtgenin iç açılar toplamını bulmak amacıyla çizdiği şekil üzerinde yapacağı işlemleri belirlemek için şekli incelemiştir. Şekli inceledikten sonra dörtgenin tüm köşelerinden köşegenler çizmiştir. Katılımcının şekli incelemesi imge denetimine girmektedir. Şekli inceledikten sonra sorma üzerinde işlemler yapması imge dönüşümü yaptığını göstermiştir. İmge denetimi ve dönüşümünün ardı ardına olması, Kosslyn'in (1980) imgesel sistemin evreleri arasında hiyerarşik bir yapı olduğuna dair görüşünü desteklemektedir. İmge denetimi ve imge dönüşümü aynı temsil türü (iç temsil- iç temsil/ dış temsil- dış temsil) içinde olduğundan temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim oluşmuştur.

Tablonun üçüncü satırında, Erdem'in zihninde bir altıgen şekli oluştuğunu belirtmesi, imge üretimi yaptığını göstermektedir. Ürettiği imgeyi kağıt üzerine çizmesi ise bir dış temsil ürettiğini göstermiştir. Çizdiği şeklin bir köşesinden geçen köşegenleri belirlemek için şekli incelmış olması imge denetimi yaptığının kanıtıdır. Katılımcı imge denetimi yaptıktan sonra şeklin bir köşesinden geçen köşegenleri çizerek şekli değiştirdiğinden imge dönüşümüne giren bir iç temsil oluşturmuştur. Ardından, altıgenin içinde oluşan üçgenlerin sayısını belirlemek için dönüşüme tabi tuttuğu imgeyi kullanmıştır. Bu da temsiller arasında hem yatay hem de dikey boyutlu etkileşimlerin bir arada bulunabileceğini göstermiştir.

Birinci uygulama sorusu için Asya'nın oluşturduğu iç ve dış temsiller arasındaki etkileşimler verilerden alınan kesitlerle Tablo 4.6'da sunulmuştur.

Tablo 4.6 Asya'nın Birinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler
<p>“Bir tane 180, iki tane 180, üç tane 180 ama bunu niye yanlış yaptım acaba. (yedigen için bunu diyor.) Bence burada beş tane 180 olmalıydı. Yok hayır. Ama öyle yani. Tablonun ilk kısımları öyleydi ama. O zaman n eksi 2 çarpı 180 olacak. Bu arada şunu yanlış yapmışım. Şöyle tahmin ediyorum 5 çarpı 180 den 900 mü? Tamam, doğru 900. O zaman $(n-2) \times 180$ ° ”</p>	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Formel Sistemler (Gösterge 2.5) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Cebirsel İfadeler 	<p><u>Dikey Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>“Beşgen için köşegen sayısı beş, aman kenar sayısı beş, köşegen sayısı üç, iç açılar toplamı. Hım. Bunun iç açısını hesaplamam lazım . Bir, iki, üç, dört, beş kenarı var. 360 bölü beş eşittir 72 derecedir. Bir dış açısını bulduk. Bir iç açısı o zaman 108 derecedir. 108 çarpı beş 540 a eşit olur.”</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Sözel Sistemler (Gösterge 1.2) <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Kullanımı (Gösterge 3.1.4.1) 	<p><u>Yatay Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>“Çokgen diyor. Kafamda bir sürü çokgen şekli oluştu hangisini diyor ki. Beşgen çizelim. Kaç tane çizeceğim. Tamam, yedigene kadar çizeceğim? Tamam, altıgen çok kötü oldu. Off, yedigeni nasıl çizeceğim? Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi. Tamam, oldu. (Aşağıdaki ilk şekilleri çizdi.)”Şimdi ne yapacağım? Çizdiğiniz bu çokgenlerin bir köşesinden geçen köşegenler. (Şekilleri inceledikten sonra aşağıdaki işlemleri uyguluyor.)</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Üretimi (Gösterge 3.1.1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Şekil <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.1) ✓ İmge Dönüşümü (Gösterge 3.1.3.3) 	

Tablo 4.6'nın birinci satırında Asya, çokgenin iç açılar toplamını veren formülün, yedigenin içinde oluşan üçgen sayısı ile ilişkili olduğunu açıklarken formel sistemlere giren bir temsil üretmiştir. Ardından, yedigenin iç açılar toplamını bulmak amacıyla kağıt üzerinde cebirsel işlemler yapmıştır. Bu da katılımcının dış temsil ürettiğini göstermiştir. Asya bir iç temsilden dış temsile geçiş yaptığı için oluşan temsiller arasında dikey boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir. Katılımcı, Pape ve





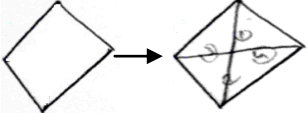
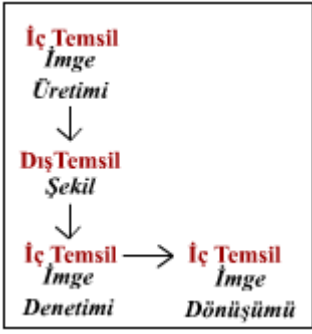
Tchoshanov'un (2001) da belirttiği gibi formel olarak içselleştirdiği durumu cebirsel ifadeler aracılığıyla dışsallaştırmıştır.

Tablo 4.6'nın ikinci satırında görüldüğü gibi Asya, beşgenin iç açılar toplamını bulmak amacıyla çizdiği şekille ilgili sözel açıklamalar yapmıştır. Yaptığı sözel açıklamalardan sonra, şeklin kenar sayısı ve dış açılar toplamından faydalanmıştır. Katılımcının beşgenin özellikleriyle ilgili sözel yorumlar yapması, bir iç temsil ürettiğini; soruya cevap vermek için şekli kullanması da imge kullanımı gerçekleştirdiğini ortaya koymuştur. Sözel ve imgesel sistemler aynı temsil türü (iç temsil- iç temsil/ dış temsil- dış temsil) içinde olduğundan temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim oluşmuştur.

Tablo'nun üçüncü satırında, katılımcının soruyu okur okumaz zihninde çokgen şekillerinin belirlediğini ifade etmesi, imge üretimi gerçekleştirdiğini; oluşan çokgen imgelerini kağıda aktarması ise dış temsil ürettiğini göstermiştir. İmge üretimi ve şekil farklı temsil türlerine (iç temsil-dış temsil) ait olduğundan temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir. Bu etkileşimin sonrasında katılımcı, çokgenlerin bir köşesinden geçen köşegenleri çizmeden önce imge denetimi yapmıştır. Ardından, şekiller üzerinde köşegenleri çizerek imge dönüşümünü gerçekleştirmiştir. İmge denetimi ve dönüşümü aynı temsil türüne ait olduğundan oluşan temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim oluşmuştur. Asya'nın oluşturduğu temsiller arasında hem yatay hem de dikey boyutlu etkileşimlerin olması, Goldin'in (1998a) temsil sistemleri arasında sürekli geçişler ve etkileşimlerin olabileceğine dair görüşünü desteklemektedir.

Tablo 4.7'de Kerem'in oluşturduğu temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşimlerin nasıl olduğunu daha iyi ifade etmesi açısından verilerden kesitler sunulmuştur.

Tablo 4.7 Kerem’in Birinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler
<p>“Mmm. Bunu formülle yapamaz mıyım? Ama formülü hatırlamıyorum. Niye böyle oldu? Bu böyle çok zor olacak. İşte kenar sayısını ne yaptık 90 ile çarptık filan. O zaman kenar sayısının 90 ile çarpımını cebirsel ifade olarak yapabiliriz.”</p> <p>Kenar sayısı $\times 90$</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Sözel Sistemler (Gösterge 1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Cebirsel İfadeler 	<p><u>Dikey Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>“Altıgen.(Hemen aşağıdaki şekli çiziyor.)Bir, iki, üç, dört, beş, altı (Kenarları sayıyor.) Üçgen sayılarına bakarsak (tüm köşelerden köşegen çizerek oluşan üçgenleri sayıyor.) bir iki üç dört beş altı. Mm, Olmadı sanki bu.”</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Sözel Sistemler (Gösterge 1.2) İmgesel Sistemler ✓ İmge Dönüşümü (Gösterge 3.1.3.3) 	<p><u>Yatay Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>(Kerem öncelikle soruyu hiç duraksamadan sonuna kadar okuyor.)“Hım üçgeni vermiş zaten. Dörtgen için de kenar sayısı dört olacak. Bunu bir çizelim. Şimdi üçgen sayısını bulalım. Nerden köşegenleri çizsek (diyerek şekli inceledi.). dört tane üçgen oluyor.”</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Üretimi (Gösterge 3.1.2.1) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Şekil <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.1) ✓ İmge Dönüşümü (Gösterge 3.1.3.3) 	

Tablo 4.7’nin birinci satırında, Kerem çokgenin iç açılar toplamını bulmak için şekillerin kenar sayıları ve iç açılarını kullanarak elde ettiği formülle ilgili sözel açıklamalar yapmıştır. Ardından, bu formülü kağıt üzerinde cebirsel olarak ifade etmiştir. Kerem, formel sistemlere giren konfigürasyonlarla ilgili sözel açıklamalar yaparken iç temsil; bulduğu formülü kağıt üzerine cebirsel olarak aktarıırken de dış temsil oluşturmuştur. Sözel olarak içselleştirilen durumlar cebirsel olarak dışsallaştırıldığı için temsiller arasında dikey boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir.

Tablo 4.7'nin ikinci satırında, katılımcının altıgende köşegen çizimleri yaparak çokgenin içinde oluşan üçgen sayısını bulmaya çalıştığı görülmektedir. Kerem köşegenleri çizerken şekil üzerinde değişiklikler yaptığı için imge dönüşümünü gerçekleştirmiştir. Fakat köşegenleri çokgenin bir köşesi yerine tüm köşelerinden çizince kafası karışmıştır. Daha sonra şekil üzerine uyguladığı çizimlerle ilgili sözel açıklamalar yaptığı için de iç temsil üretmiştir. İmge dönüşümü ve sözel sistemler dâhilinde olan temsiller aynı tür olduğundan (iç temsil-iç temsil) katılımcının oluşturduğu temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir. Burada önemli bir nokta, Kerem'in şekil üzerinde yaptığı dönüşümün, soruda verilen yazılı ifadeleri yanlış anladığını göstermiş olmasıdır. Temsil dönüşümleri bireylerde bilgi oluşumunu anlamının özü olduğundan, temsil süreçleri incelenerek öğrencilerin muhakemeleri daha açık ve dışa dönük hale getirilebilir (McKendree ve diğ. , 2002).

Tablonun üçüncü satırında Kerem, soruda istenen çokgenleri çizerken uzun süreli bellekte var olan dörtgen şeklini, çalışan belleğe alarak imge üretimi gerçekleştirmiştir. Ardından, bu imgeyi kağıt üzerine aktararak dış temsil üretmiştir. Çizdiği dörtgenin bir köşesinden geçecek köşegenleri ilk bakışta belirleyemeyen katılımcı, imge denetimi yapmaya başlamıştır. Daha sonra, köşegenleri çizip şekil üzerinde değişiklik yaptığı için de imge dönüşümünü gerçekleştirmiştir. Bu da temsiller arasında hem yatay hem de dikey boyutlu etkileşimlerin bir arada bulunabileceğini göstermiştir. Oluşan etkileşimler, öğrencinin geometrik kavramlarla uğraşırken ne gibi aşamalardan geçtiğini ve neler düşündüğünü ortaya koymakta yardımcı olmuştur. Bu yüzden, etkileşim süreçlerinin anlaşılması, öğrencilerin matematiksel ve geometrik kavramlarla ilgili düşünsel süreçlerini anlamak adına çok önemlidir (Steffe, 1991).

Birinci Uygulama Sorusu İçin Katılımcılarda Gözlenen Temsiller ve Bu Temsiller Arasındaki Etkileşimlerin Kıyaslanması:

Katılımcılar birinci uygulama sorusunu çözerken gözlenen temsil türleri ve bu temsil türleri arasındaki etkileşimler kıyaslandığında benzerlikler ve farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Bu benzerlik ve farklılıkların neler olduğu aşağıda ifade edilmiştir.

- Gözlenen dış temsiller kıyaslandığında, tüm katılımcıların aynı tür temsillere çözümlerinde yer verdikleri tespit edilmiştir. Fakat ortaya çıkan dış temsiller üzerine uyguladıkları işlemlerde farklılıklar olduğu gözlenmiştir. Örneğin; Asya çokgen şekillerinin sadece bir köşesinden geçen köşegenleri çizerken, Erdem ve Kerem soruda verilen ifadelerle dikkat etmediklerinden şekillerin tüm köşelerinden geçen köşegenleri çizmişlerdir. Erdem yaptığı hatanın farkına varınca yeni şekiller çizerek işlemlerine devam ettiğinden bu katılımcı soru çözümünü esnasında diğer katılımcılardan fazla sayıda şekil çizmiştir. Öğrencilerin şekillerle ilgili yaptıkları işlemlerde gözlenen farklılıklar onların soruyu algılama biçimleriyle ilgili olabilir.
- Çokgenin iç açılar toplamı ile kenar sayısı arasındaki ilişkiyi buldukları esnada katılımcılarda gözlenen cebirsel ifadelerde de çeşitlenme olduğu gözlenmiştir. Erdem ve Asya aynı formülü elde ederken, Kerem farklı bir formüle ulaşmıştır. Doğru formüle ulaşan iki katılımcı, şekiller ve soruda verilen tablo aracılığıyla formüle ulaştıklarını belirtirken, Kerem görüşmelerde bulunduğu formülü uydurduğunu söylemiştir. Katılımcılar formüllere ulaşmış olsalar bile cebirsel ifadeleri elde ederken sembol, notasyon vs. kullanımında zorlandıkları için okullarda formülleri öğrencilerin kendilerinin ulaşmalarına imkan tanıyan etkinliklerin yer verilmesi gerektiği düşünülmektedir.
- Katılımcılar, çokgenin iç açılar toplamını veren formüle ulaştıktan sonra buldukları formülü kendi dil yeteneklerini sergileyerek yazılı biçimde kağıt üzerinde aktarmışlardır. Öğrencilerin ulaştıkları formüller aynı olmadığından yazılı olarak aktardıkları bilgilerde farklılıklar olduğu gözlenmiştir.

- İç temsillere odaklanıldığında, katılımcıların sözel, formel ve imgesel sistemlere giren göstergeler sergiledikleri gözlenmiştir. Fakat, bu göstergelerin sorunun çözümü esnasında gözlendiği yer ve zamanlarda farklılıkların olduğu dikkat çekmiştir. Örneğin; Erdem çokgenlerin çizimi sırasında sözel sistemlere giren göstergeyi sergilerken, Kerem ve Asya aynı göstergeyi sorunun başka bir kısmıyla uğraşırken sergilemişlerdir. Ayrıca oluşan tüm iç temsiller incelendiğinde, en fazla gösterge türünün başarı düzeyi yüksek öğrenci tarafından sergilendiği tespit edilmiştir. Bulgular, başarılı öğrencilerin ürettiği temsil türü sayısının diğer öğrencilerden fazla olduğu görüşünü desteklemektedir.
- İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimlere odaklanıldığında, temsiller arasında yatay ve dikey boyutlu olmak üzere iki tür etkileşim ortaya çıkmıştır. Katılımcılar, aynı tür temsiller arasında geçiş yaparken yatay boyutlu etkileşim; farklı tür temsiller arasında geçiş yaparken de dikey boyutlu etkileşim meydana gelmiştir. Örneğin, katılımcılar zihinlerinde oluşan geometrik şekilleri kağıt üzerine aktarırken ya da formel olarak yorumladıkları ifadeleri cebirsel olarak kağıda aktarırken dikey boyutlu etkileşimler ortaya çıkmıştır. Genel olarak; öğrenciler içselleştirdikleri durumları şekil, yazılı ve cebirsel ifadeler aracılığıyla dışsallaştırmışlardır.

4.2. İkinci Uygulama Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

11. sınıf öğrencilerinin oluşturdukları iç temsillerle dış temsiller arasındaki etkileşimleri incelemek amacıyla yapılan bu çalışmada, katılımcılara sunulan üç uygulama sorusundan ikincisi şekil 4.17’de verilmiştir.

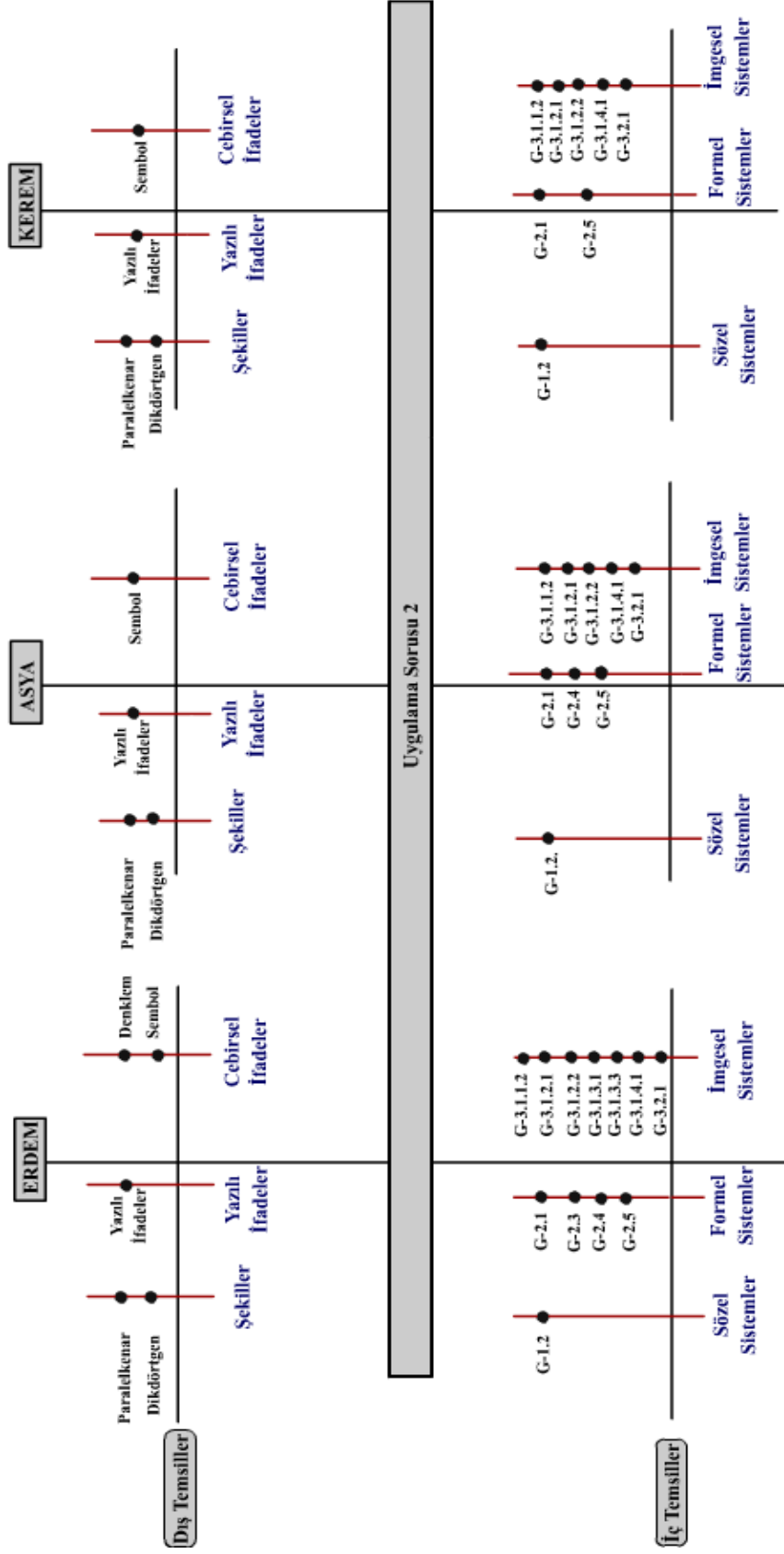
Aşağıdaki tablonun “örnek” yazan kısmında, paralelkenarın özellikleriyle ilgili sembolik olarak ifade edilmiş bilgiler yer almaktadır. Verilen bu sembolik ifadeleri yorumladıktan sonra paralelkenarın özelliklerine dayanan teoremi tablodaki “ Teorem” kısmında sözel olarak ifade ediniz.

TEOREM	ÖRNEK	PARALELKENAR
(a) Bir paralelkenarda ...	$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	<i>ABCD paralelkenarı</i>
(b) Bir paralelkenarda ...	$\hat{A} \cong \hat{C}$ $\hat{B} \cong \hat{D}$	
(c) Bir paralelkenarda ...	$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$ $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ $m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$ $m(\hat{D}) + m(\hat{A}) = 180^\circ$	
(d) Eğer bir paralelkenarın bir açısı ...	$m(\hat{G}) = 90^\circ$ $m(\hat{H}) = 90^\circ$ $m(\hat{J}) = 90^\circ$ $m(\hat{K}) = 90^\circ$	<i>GHJK paralelkenarı</i>

Şekil 4.17: Uygulama Sorusu 2

Şekil 4.17’de verilen ikinci uygulama sorusunda öğrencilerden paralelkenar ile ilgili verilen sembolik özelliklere dikkat ederek, bu özellikleri yazılı ve görsel olarak ifade etmeleri istenmiştir. Soru çözümleri esnasında, katılımcılarda gözlenen temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşimler aşağıda ele alınmıştır.

Birinci uygulama sorusundan elde edilen veriler ışığında, katılımcıların oluşturduğu iç ve dış temsil türlerinin neler olduğunu hem genel hatlarıyla hem de bir arada daha iyi resmedebilmek için şekil 4.18 oluşturulmuştur.



Şekil 4.18: İkinci uygulama sorusu için katılımcılarda gözlenen dış ve iç temsiller

Şekil 4.18 dikkatle incelendiğinde katılımcıların cebirsel ifadeler hariç aynı tip dış temsilleri oluşturdukları görülmektedir. Fakat gözlenen iç temsillerde çeşitli farklılıklar vardır.

- a) *Sözel sistemlere* giren üç göstergeden G-1.2 tüm katılımcılarda gözlenmiştir.
- b) *Formel sistemlere* giren beş göstergeden G-2.2 hariç diğerleri Erdem’de gözlenirken, sadece G-2.1, G 2.4 ve G-2.5 Asya ve Kerem’de gözlenmiştir.
- c) *İmgesel sistemlere* giren göstergelerin bazıları tüm katılımcılarda gözlenirken bazıları sadece bir katılımcıda gözlenmiştir.

Oluşan Dış Temsiller:


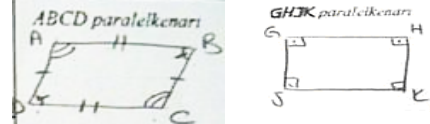
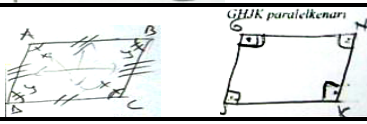
İkinci uygulama sorusunda elde edilen veriler incelendiğinde Erdem ve Kerem’in Tablo 4.8’de yer alan dış temsillerden; şekiller, yazılı ifadeler ve cebirsel ifadeleri oluşturdukları; Asya’nın ise şekiller ve yazılı ifadeleri oluşturduğu gözlenmiştir.

Tablo–4.8 Uygulama Sorusu 2’ye Göre Katılımcılarda Gözlenen Dış Temsiller

DIŞ TEMSİLLER	ERDEM (İYİ)	ASYA (ORTA)	KEREM (ZAYIF)
Şekiller	✓	✓	✓
Yazılı İfadeler	✓	✓	✓
Cebirsel İfadeler	✓		✓
<i>Tablo</i>			

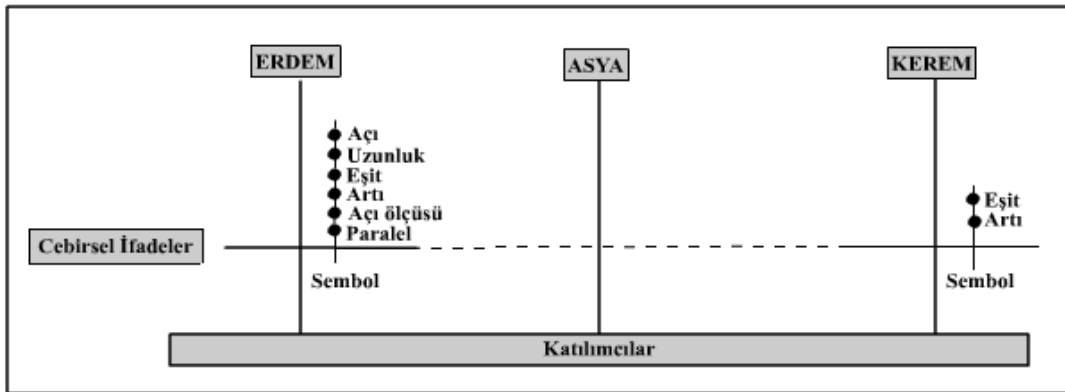
Katılımcılar, Şekil 4.18’de verilen uygulama sorusunu okur okumaz bir paralelkenar şekli; sorunun (d) şikkıyla uğraşırken de dikdörtgen şekli çizmişlerdir. Erdem ve Kerem, sorunun (c) şikkıyla uğraşırken cebirsel ifadeleri oluşturmuştur. Fakat katılımcılar paralelkenarın özellikleriyle ilgili verilen sembolik ifadeleri yorumlamışlardır. Yorumladıktan sonra, sorunun “*TEOREM*” kısmına yazılması gereken ifadeleri problem çözerken üretmek yerine görüşmeler sırasında ortaya koymuşlardır. Katılımcılarda gözlenen şekiller, verilerden alınan kesitlerle tablo 4.9’da sunulmuştur.

Tablo 4.9 Katılımcıların İkinci Uygulama Sorusunu Çözerken Çizdiği Şekiller

KATILIMCILAR	KATILIMCILARDA GÖZLENEN ŞEKİLLER
Erdem	
Asya	
Kerem	

Katılımcılar, uygulama sorusunu okur okumaz Tablo 4.9'daki $ABCD$ paralelkenarlarını çizmişlerdir. Ardından, sorunun "ÖRNEK" yazan kısmını okuduklarında paralelkenarın karşılıklı açıları ve kenarlarıyla ilgili özellikleri çizdikleri şekil üzerinde ifade etmişlerdir. Ek olarak, katılımcılar sorunun (c) şikkında verilen sembolik bilgileri okuduktan sonra çizecekleri paralelkenarın aslında bir dikdörtgen olduğunu anlayıp tablo 4.9'da verilen $GHJK$ dikdörtgenlerini oluşturmuşlardır. Ürettikleri temsillerle öğrencilerin dikdörtgen ve paralelkenar kavramlarıyla ilgili aynı algıya sahip oldukları görülmüştür.

Katılımcıların oluşturduğu cebirsel ifadeler, Şekil 4.19'da verilmiştir.

**Şekil 4.19:** Katılımcılarda gözlenen cebirsel ifadeler

Bu temsillerin katılımcılardaki oluşumunu daha açık hale getirmek için verilerden bazı kesitler aşağıda sunulmuştur.

ERDEM: $\alpha + \beta = 180^\circ$ dir. Çünkü alfa ile beta bir doğru belirtiyor.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$$

$$\alpha \quad \beta = 180^\circ$$

Şekil 4.20: Erdem'in ikinci uygulama sorusunu çözerken ürettiği semboller

KEREM: Bunları sözel olarak şuraya, yani, x, y filan desem. 180 desem. A, B, C (deyip $x + y = 180^\circ$ yazıyor.) ve C, D (deyip yine $x + y = 180^\circ$ yazıyor.)

$$x + y = 180^\circ$$

$$x + y = 180^\circ$$

$$x + y = 180^\circ$$

$$x + y = 180^\circ$$

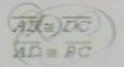
Şekil 4.21: Kerem'in ikinci uygulama sorusunu çözerken ürettiği semboller

Verilerde görüldüğü gibi katılımcılar sorunun (c) şikkında verilen karşılıklı olmayan açıların birbirini 180 dereceye tamamladığıyla ilgili ifadeleri yorumlarken semboller oluşturmuşlardır. Katılımcıların ikisi de çizdikleri şekil üzerinde açıları isimlendirdikten sonra artı (+), eksi (-) ve eşitlik (=) sembollerini kullanarak (c) şikkında verilen ifadeyi yeniden yazmışlardır. Şekil 4.20 incelendiğinde ek olarak, Erdem'in açı(\hat{A}), açı ölçüsü $m(\hat{A})$ sembollerini ürettiği görülmüştür. Fakat Asya'nın soru çözümünde hiç bir cebirsel ifadeye rastlanmamıştır. Uygulama sorusunda verilen sembolik ifadelerin yazılı şekilde aktarılması istendiği için Asya'nın cebirsel ifadeler oluşturmamış olabileceği düşünülmektedir. Diğer katılımcılarda gözlenen cebirsel ifadelerin Asya 'da gözlenmemesi durumu, Özgün-Koca'nın (1998) öğrencilerin oluşturduğu temsillerde görülen farklılıkların problemin içeriğine bağlı olabileceğiyle ilgili görüşünü desteklemektedir.

Diğer bir dış temsil olan "yazılı ifadeler" katılımcılar tarafından sorunun çözümü esnasında değil, görüşmeler sırasında oluşturulmuştur. Öğrenciler sorunun "TEOREM" yazan kısmında sembollerle ilgili yazılı ifadelere yer verememe nedenlerini görüşmelerden alınan veri kesitlerinde aşağıdaki gibi açıklamışlardır.

ARAŞTIRMACI: Peki, bu "TEOREM" yazan kısma ne yapmalıyız sence?

ERDEM: Ha, doğru orayı dolduracağız. Neye göre dolduracağım ki? ("ÖRNEK" kısmındaki sembolik ifadeleri sözel ifadeleri yazması gereken kısma yazıyor.)(Şekil 4.22) Burada bir türlü ne yapacağımı anlayamadım.

TEOREM	ÖRNEK
Bir paralelkenarda ... $ AB = DC $ ve $ AD = BC $ ise $ AB \parallel DC $	

Şekil 4.22: Erdem'in yazılı ifadeler oluşturmaya çalışırken tabloya yazdığı veriler

ARAŞTIRMACI: *O zaman şu soruyu sormak istiyorum. Bu soruyu ilk gördüğünde ne anladın?*

ERDEM: *Şimdi şundan (sorudaki sembolik kısımlar) ne anladığımı söyleyim. Bize bunları vermiş formül istiyor sandım.*

ARAŞTIRMACI: *Neden öyle düşündün?*

ERDEM: *TEOREM yazan kısımdan oldu. Mesela paralelkenarın çevresinin toplamı şu şu şudur. a_1, a_2 gibi. Teorem derken o aklıma geldi. O yüzden hep ben burada ne yapsam ki diye düşündüm.*

ARAŞTIRMACI: *Daha önce yaptığımız bir alıştırmada şekilleri sembolik ifade ederken bir sıkıntı çıkmamıştı. Bunda neden öyle oldu?*

ERDEM: *Burada Teorem benim kafamı karıştırdı. Derslerde teorem olarak değil de özellik diye bunları söylüyorlar. Ondan ben teoremle özelliği karıştırdım. Özellik olsaydı orda yazan bulabilirdim.*

Asya'nın ve Kerem'in soruda yazılı ifadelerin olduğu kısımla ilgili düşünceleri aşağıda vermiştir.

ARAŞTIRMACI: *Tablonun Teorem yazan kısımlarını doldurmayacak mısın?*

ASYA: *Hu, Ne yazacağım. Bunları mı? (Sembolik ifadeleri kastediyor.) Ne yapacağımı anlamadım. Teorem???*

ARAŞTIRMACI: *Sence bu soru nasıl bir soruydu?*

ASYA: *Bence kolaydı. Her zaman bildiğimiz şeyler vardı. Ama farklı olan yanı bize hiç böyle sormuyorlar yazılıda filan. Mesela anlatırken zorlanıyorum. Çünkü hiç konuşmadan sadece yazdığımız için anlatmak zor geliyor. Bir de sorularda gerek test kitaplarında gerek yazılı sorularında bize birçok şey hazır veriliyor. Biz de bazı şeylere dikkat etmiyoruz bu yüzden.*

KEREM: *(Soruda yer alan tablodaki 4.satıra geçiyor.) Eğer paralelkenarın bir açısı (deyip tam şekil çizmeye geçerken Teorem yazan kısımlar için)şuraya bir şey yazıyor muyum? Tam anlamadım bu kısmı.*

ARAŞTIRMACI: *Daha önce benzer bir uygulamak yapmıştık ya sesli düşünme tekniği için.*

KEREM: *Hmm tamam.(Ardından hemen tablodaki dördüncü kısma bakmayı bırakıp tekrar tablonun başına dönerek Teorem kısmındaki boşlukları doldurmaya başlıyor.)*

Görüşmeden edinilen bilgilerde görüldüğü gibi Erdem, gördükleri derslerde "Teorem" yerine "Özellik" kelimesi kullanıldığı için soruyu tam anlayamadığını ve zorluk yaşadığını belirtmiştir. Asya, okulda ve kitaplarda kendilerine hazır olarak verilen sembollere alıştıkları için soruda isteneni tam anlayamadığını söylemiştir. Kerem ise teoremle ne demek istendiğini anlayamadığını söyleyerek soruyu çözmeye çalışmıştır. Öğrencilerin ikinci uygulama sorusunu çözerken yazılı ifadeler oluşturamaması, soruda verilen ifadeleri anlamakta zorluk yaşamaları ve alışık

olmadıkları tarzda bir soruyla karşılaşmalarından kaynaklanabilir. Eğitim sisteminde teoremler ve özelliklerin açıkça verilmesi yerine yapısalcı yaklaşım içindeki yöntemler kullanılarak öğrencilere buldurulması, öğrencilerin geometrik kavramları ve bu kavramlarla ilgili özellikleri daha iyi öğrenmelerine yardımcı olabilir.

Katılımcıların görüşmelerde ortaya koyduğu yazılı ifadeler Tablo 4.10'daki gibi olmuştur.

Tablo 4.10: Katılımcıların Oluşturduğu “Yazılı İfadeler”

TEOREM	ÖRNEK
<p>Bir paralelkenarda ... ERDEM: Karşılıklı kenarlar birbirine eşittir. ASYA: Karşılıklı kenarlar birbirine eşittir. KEREM: Karşılıklı kenarlar birbirine eşittir.</p>	$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
<p>Bir paralelkenarda ... ERDEM: Karşılıklı açılar birbirine eşittir. ASYA: Karşılıklı açılar birbirine eşittir. KEREM: Karşılıklı açılar birbirine eşittir.</p>	$\hat{A} \cong \hat{C}$ $\hat{B} \cong \hat{D}$
<p>Bir paralelkenarda ... ERDEM: İç ters açılardan ölçüleri toplamı 180 derecedir. ASYA: Karşılıklı açılardan dışındaki herhangi iki açının toplamı 180 derecedir. KEREM: Aynı kenar üzerindeki açılar birbirine eşittir.</p>	$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$ $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ $m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$ $m(\hat{D}) + m(\hat{A}) = 180^\circ$
<p>Eğer bir paralelkenarın bir açısı ... ERDEM: Karşılıklı kenarlar birbirine eşit olduğu ve her bir açı 90 derece olduğu için paralelkenar bir dikdörtgendir. ASYA: 90 derece ise diğer açılar da 90 derece olmak zorundadır KEREM: 90 dereceye eşitse diğer açıları da 90 dereceye eşittir.</p>	$m(\hat{J}) = 90^\circ$ $m(\hat{H}) = 90^\circ$ $m(\hat{I}) = 90^\circ$ $m(\hat{K}) = 90^\circ$

Katılımcılar, Tablo 4.10'un birinci satırında paralelkenarın karşılıklı kenarlarının eşit olduğunu ve ikinci satırında ise paralelkenarın karşılıklı açılarının eşit olduğunu aynı yazılı ifadeleri oluşturarak ortaya koymuşlardır. Tablo'4.10'un üçüncü satırında ise farklı yazılı ifadeler ortaya koymuşlardır. Soruda verilen sembolik ifadelerden paralelkenarda yöndeş olmayan açılardan birbirini 180 dereceye tamamladığını anlamışlar fakat bunu yazılı olarak ifade etmekte zorlandıklarını belirtmişlerdir. Öğrenciler görüşmelerde hazır olarak sunulan matematiksel ifadelerle alışık oldukları için sembolik ifadelerle ne anlatılmak istendiğini yazılı olarak sunmakta zorlandıklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin belli tipte temsille düşünmek yerine farklı temsil türlerini

üretebilecekleri bir ortamda eğitimin etkinliği artacağı için geometri derslerinde yazılı ve sözlü anlatımı ön plana çıkaran etkinliklere yer verilmelidir (Bali, 2002).

Oluşan İç Temsiller:

Elde edilen veriler incelendiğinde katılımcıların sözel, formel ve imgesel sistemlere giren iç temsiller ürettikleri gözlenmiştir. Temsil kavramıyla ilgili teorik bilgiler ışığında kod ve temalara ayrılarak oluşturulan Tablo 4.11’de katılımcılarda gözlenen iç temsiller işaretlenmiştir.

Tablo-4.11: İkinci Uygulama Sorusuna Göre Katılımcılarda Gözlenen İç Temsiller

İç Temsil Sistemleri ve Sistemlere Giren Göstergeler		Katılımcılar		
Temsil Sistemleri	Temsil Sistemlerinin Göstergeleri	ERDEM (İyi)	ASYA (Orta)	KEREM (Zayıf)
1. Sözel Sistemler <i>Sözel sistemlere giren temsiller, bireylerin kendi dillerindeki kapasitelerini kelimeler, tümceler ve cümleler düzeyinde betimlemeleri durumunda oluşur.</i>	1.1. Verilen kelime ve cümleleri betimlemek için başka kelime ve cümleleri kullanma			
	1.2. Sözel ifadeler aracılığıyla diğer temsil sistemlerine ilişkin yetkinlikleri betimleme	✓	✓	✓
	1.3. Cümledeki kelimelerin kategorik ilişkileriyle ilgili yorumlar yapma (eş anlamalı, zıt anlamalı gibi)			
2. Formel Sistemler <i>Matematikte yer alan sayı sistemleri, aritmetik algoritmalar, rasyonel sayılar, cebirsel notasyonlar vb. geleneksel ve iyi yapılandırılmış sembolik sistemlerdir. Bu tip formel konfigürasyonların yapıları ve manipülasyonlarıyla ilgili yetkinliklerin ortaya koyulması durumunda formel sistemlere giren temsiller oluşur.</i>	2.1. Görselleştirdiği durumları sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma	✓	✓	✓
	2.2. Ortaya çıkan matematiksel durumları (sözel ve yazılı olan) sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma (örneğin, sembol manipülasyonu hakkında konuşması)			
	2.3. Kurallar ve algoritmalar hakkında konuşma	✓		
	2.4. Bir sembolün, notasyonun anlamını açıklama	✓	✓	
	2.5. Kullanılan kural ya da algoritmanın soruda neden çalıştığını sözel olarak açıklama	✓	✓	✓
3. İmgesel Sistemler <i>İmgesel sistemler nesnelere, ilişkilendirmelere, ilişkiler ve dönüşümler düzeyinde sözel ve</i>	3.1. Görsel Sistemler 3.1.1. İmge Üretimi <i>Bir kişi uzun süreli bellekten resim veya görsel bir sunu çağırıldığında ve bunu işleyen belleğe yerleştirdiğinde oluşur.</i>			
	3.1.1.1. Sözel olarak ne anladığımı ifade ettikten sonra bunu bir şekil ya da resim çizerek gösterme			

<p><i>notasyonol olmayan konfigürasyonları içerir. Bu konfigürasyonları içeren göstergelerin ortaya çıkması durumunda imgesel sistemlere giren temsiller oluşur. İmgesel sistemler, görsel, işitsel ve kinestatik sistemler olarak üçe ayrılmaktadır.</i></p>	<p>3.1.1.2. Verilen bilgileri kullanarak özel bir temsil (şekil, çizim) ortaya koyma</p>	✓	✓	✓
	<p>3.1.1.3. Bir örüntüyü çıkarmak için görsellerle ilgili geçmiş bilgileri hatırlamak ya da kullanma</p>			
	<p>3.1.2. İmge Denetimi <i>İşleyen bellekte bir imgenin özellikleri tarandığında oluşur.</i></p>			
	<p>3.1.2.1. Soruya cevap vermek için imgeyi inceleme</p>	✓	✓	✓
	<p>3.1.2.2. Şekillerin özelliklerini (kenar, açı, yön gibi) açık bir şekilde yazarak ifade etme</p>	✓	✓	✓
	<p>3.1.2.3. Çizerek ya da tarif ederek şekillerin benzerliklerini veya farklılıklarını ortaya koyma</p>			
	<p>3.1.3. İmge Dönüşümü <i>Bir kişi oluşturduğu imgeye değişiklikler uyguladığında oluşur.</i></p>			
	<p>3.1.3.1. Sorudan ne anladığını daha iyi ifade etmek için farklı pozisyonlarda şekiller çizme</p>	✓		
	<p>3.1.3.2. Şekle öteleme, dönme gibi işlemler uygulama</p>			
	<p>3.1.3.3. Bir şekle işlemler uygulayarak onu değiştirme (ilk iki madde dışındaki işlemler)</p>	✓		
	<p>3.1.4. İmge Kullanımı <i>Bir imge zihinsel işlemler için kullanılırken oluşur.</i></p>			
	<p>3.1.4.1. İmgeleri, kavramları; kullanma</p>	✓	✓	✓
	<p>3.1.4.2. Verilerin içinden anlamlı sonuçlara ulaşma (n. terimi doğru bir şekilde hesaplamak gibi)</p>			
	<p>3.2. Kinestatik Sistemler <i>Bireylerin fiziksel hareketleri içsel olarak temsil edip, imgeleştirdiği durumlarda oluşur.</i></p>			
	<p>3.2.1. Vücudunu kullanarak bazı geometrik durumları uygulama (açıyı, doğruyu, bir yerin uzunluğunu parmaklarıyla gösterme gibi.)</p>	✓	✓	✓
	<p>3.2.2. Çevredeki bir nesne ya da başka bir şeyin yapacağı hareketi onun yerine bireyin imgeleştirmesi</p>			
	<p>3.3. İşitsel Sistemler <i>Matematiksel işlemler gerçekleşirken, konuşulan kelime ve sembolleri işitme sürecinden farklı olarak oluşur.</i></p>			
	<p>3.3.1. Ellerini çırparak sayıları ifade etme ya da belli bir ritimde çarpım tablosunu söyleme, grup içindeki sayıları vurgulama vs...</p>			

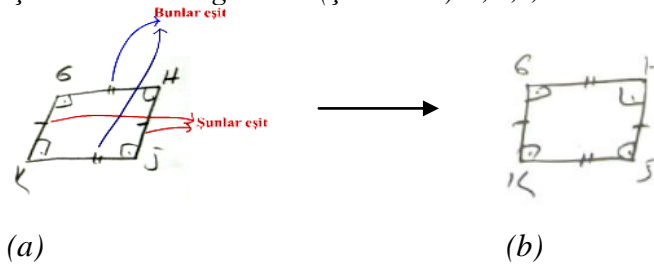
Katılımcılar, aynı tip iç temsilleri oluşturmuş olsalar bile temsillerin soru içinde gözüktükleri yerler ve zamanlarda farklılıklar bulunmaktadır. Katılımcıların bu

temsilleri sorunun hangi kısmında ve nasıl oluşturduğu verilerden alınan bazı kesitlerle aşağıda verilmiştir.

- **Sözel Sistemler**

Tablo 4.11’de yer alan “Sözel ifadeler aracılığıyla diğer temsilsel sistemlere ilişkin yetkinlikleri betimleme (Gösterge 1.2)” göstergesi, tüm katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

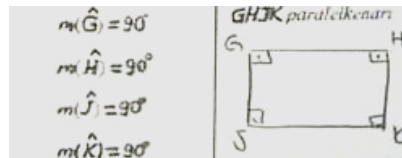
ERDEM: Hıu. G, H, J, K bir paralelkenar daha çizelim. Burası da 90° ’dir. Bu bir kare olur. Yok, olmaz bir dakika bu bir dikdörtgen olur. Ne olur şimdi. Bunlar eşit, Şunlar eşit. Bunun eşit olduğunu bilmekle kare olma imkanı yok. O yüzden dik çizelim. Bunlar eşit, bunlar eşit bu bir dikdörtgen olur. (Şekil 4.23) G, H, J, K . Bu bir dikdörtgen olur.



Şekil 4.23: Gösterge 1.2'nin gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekiller

Bu katılımcı, öncelikle açılarını 90° olan $GHJK$ paralelkenarını Şekil 4.23-(a)'daki gibi çizmiştir. Ardından, çizdiği şeklin kenar uzunluklarıyla ve açılarıyla ilgili yorumlar yaparak çizeceği şeklin bir dikdörtgen olması gerektiğini belirtmiş ve Şekil 4.23-(b)'deki $GHJK$ dikdörtgenini çizmiştir. Katılımcı dış temsil sistemlerinin elemanı olan şekilleri sonra şekillerin özellikleriyle ilgili sahip olduğu yetkinlikleri sözel olarak betimlediği için Gösterge 1.2 gözlenmiştir.

ASYA: Eğer bir paralelkenarın bir açısı $90, 90, 90$ olsaydı (Bir yandan da kalemiyle ifadelerin altını hafifçe çiziyor.) Haa. Tamam. (Şekil 4.24) O zaman şöyle dikdörtgen olurdu. Çünkü kenarlarının hepsi eşit deseydi kare de olabilirdi. Ama onu bilmiyoruz. Bu da tamam.



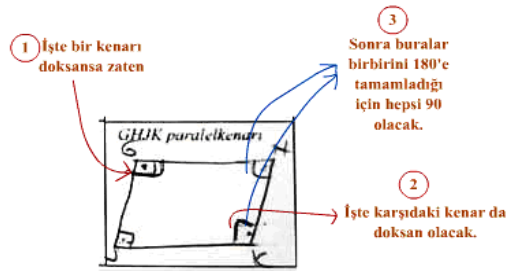
Şekil 4.24: Gösterge 1.2'nin gözlenmesi esnasında Asya'nın çizdiği şekil

Katılımcılardan Asya, bir açısı 90° olan paralelkenarla ilgili teoremi ifade ederken Şekil 4.24'i çizmiştir. Katılımcı şekli çizdikten sonra, çizdiği şeklin tüm kenarlarının eşit olup olmadığı soruda verilmediğinden dikdörtgen olması gerektiğini

açıklamıştır. Asya dikdörtgen ile ilgili sahip olduğu yetkinlikleri sözel ifadeler aracılığıyla betimlediği için *Gösterge 1.2* gözlenmiştir.

(Görüşmede edinilen verilerden kesitler)

KEREM: Yani burada zaten (şekli göstererek) bir kenarı 90 vermiş zaten. Karşılıklı kenar olacak burası da 90 olacak (kenar diyor ama şekil üzerinde açılar gösteriyor H ve J açıları için.) Sonra buraları(buraları derken dikeyliği belirtmek için elini aşağı yukarı kaldırıyor.) birbirini 180'e tamamladığı için hepsi 90 olacak. (Şekil 4.25) Zaten burada demiş bir paralelkenarın bir açısı 90 derece ise diğer açıları da doksan olur diye.

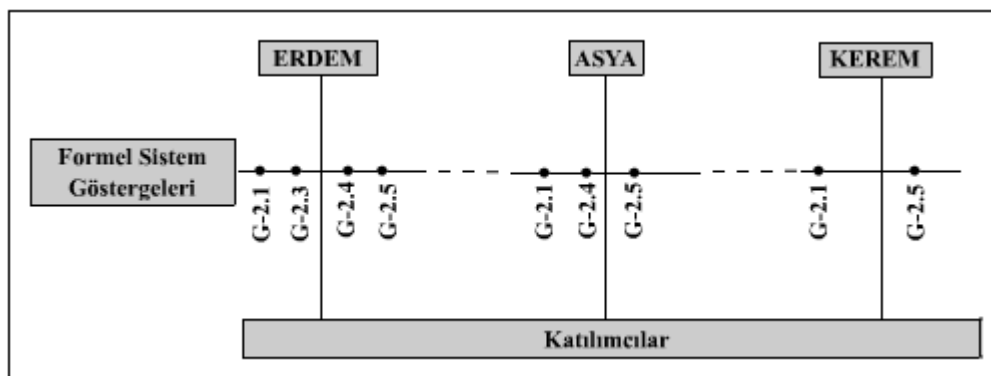


Şekil 4.25: *Gösterge 1.2*'nin gözlenmesi esnasında Kerem'in çizdiği şekil

Kerem'de, *Gösterge 1.2* çizdiği dikdörtgen şekli ile ilgili sözel yorumlarda bulunurken ortaya çıkmıştır. Fakat bu katılımcı, dikdörtgenin özellikleriyle ilgili yetkinliklerini ortaya koyan sözel açıklamalara diğer iki katılımcıdan farklı olarak görüşmeler esnasında yer vermiştir. Temsil oluşum süreçlerindeki farklılıklar; Özgün-Koca'nın (1998) da belirttiği gibi bireylere ve edindikleri tecrübelerle bağlı olabilir.

- **Formel Sistemler**

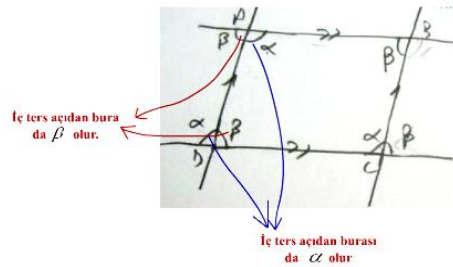
Formel sistemlere giren ve katılımcılarda gözlenen göstergeler Şekil 4.30'da verilmiştir.



Şekil 4.26: Katılımcılarda gözlenen ve formel sistemlere giren göstergeler

Katılımcılarda gözlenen göstergelerin bazıları, oluşum süreçlerinin daha iyi anlaşılması açısından verilerden alınan kesitlerle sunulmuştur. Şekil 4.26'da yer alan "Görselleştirdiği durumları sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma (Gösterge 2.1)" göstergesi, ikinci uygulama sorusunda edinilen verilerde Erdem'de aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: *Alfa iç ters aşı da burası da alfa olur. İç ters açıdan burası da beta olur. Paralelkenarda karşılıklı açılar birbirine eşit olduğu için yöndeş açıdan buralarda α olur. (Şekil 4.27'de yer alan paralel işaretlerini koyuyor ve C açısının bulunduğu yere α yazıyor.) İmmmm.'dan yöndeş açıdan α 'nın içters, İuuuum, C açısının neyi oluyor değil oluyor herhalde. Değili mi oluyor öyle bir şey oluyor. (Şekil 4.27'de C açısının α yazan yerin yanına β yazıyor.) β olur burası. İçtersten burası da β olur*



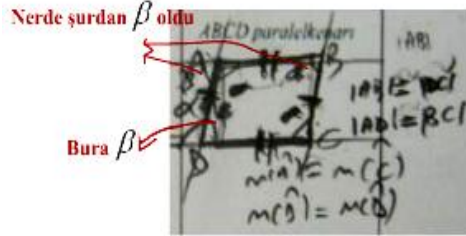
Şekil 4.27: Gösterge 2.1'in gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekil

Erdem, ikinci uygulama sorusunun (c) şikkıyla uğraşırken bir paralelkenar şekli çizmiştir. Ardından, çizdiği bu paralelkenar şekli üzerinde açılar ve kenarlarla ilgili sembolik ifadeleri Şekil 4.27'de görüldüğü gibi göstermiştir. Katılımcı, paralelkenarın açıları ve kenarlarıyla ilgili özellikleri şekil üzerinde ifade ederken, uyguladığı sembolik işlemleri sözel olarak açıkladığından Gösterge 2.1 gözlenmiştir. Diğer iki katılımcı da çizdikleri paralelkenar şekli üzerinde sembolik ifadelere yer vermişler fakat bu sembolik ifadelerle ilgili sözel yorumlarda bulunmamışlardır. Sorunun (c) şikkıyla uğraşırken diğer iki katılımcıda *Gösterge 2.1*'in gözlenmemesi, soruda sembolik ifadelerin hazır biçimde verilmiş olmasıyla ilgili olabilir. Çünkü soruda sembolik ifadeler hazır olarak verildiğinden katılımcılar bu sembollere göre şekiller çizmişler ve sembolik durumları yansıtan yazılı ifadeler üretmişlerdir.

Şekil 4.26'da yer alan "Kurallar ve algoritmalar hakkında konuşma (Gösterge 2.3)" göstergesi, ikinci uygulama sorusunda edinilen verilerde sadece Erdem'de aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: α , β ; α , β diye bunların ikisi eşit olacak A ve C açısının. Yöndeşlikten C nin olduğu yer α oldu . Bura β . Nerde şuradan β oldu.(Şekil 4.28)Şu yöndeş açıdan da B açısı β oldu.(Şekil 4.28)Bu yüzden , $m(\hat{A}) = m(\hat{C})$ olur.

$$m(\hat{B}) = m(\hat{D})$$

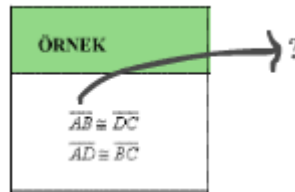


Şekil 4.28: Gösterge 2.3'ün gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekil

Bu katılımcı, ikinci uygulama sorusunun (b) şikkıyla uğraşırken, paralelkenarda karşılıklı açılarının eşit olmasıyla ilgili teoremi ortaya koymak için ilk olarak bir paralelkenar şekli çizmiştir. Çizdiği şekilde karşılıklı açılarının eşit olduğunu, paralel doğrular ve yöndeş açılarla ilgili kuralları kullanarak Şekil 4.28'te görüldüğü gibi ortaya koymuştur. Erdem, paralelkenarda karşılıklı açılarının eşit olduğunu ifade ederken kullandığı kurallarla ilgili konuşmalar sergilediği için Gösterge 2.3 gözlenmiştir. Bu gösterge sadece Erdem'de gözlemlendiğinden başarı düzeyi yüksek öğrencilerin kullandıkları kurallara ve bu kuralların anlamlarına dair bilgilere, diğer öğrencilerden daha fazla hâkim olduklarını söyleyebiliriz.

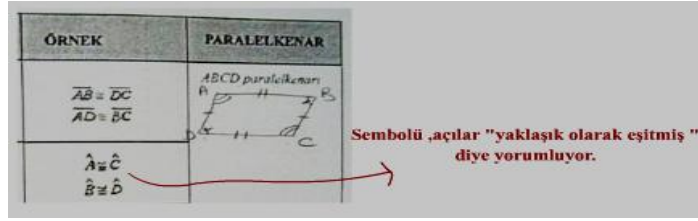
Toplanan verilerde “Bir sembolün, notasyonun anlamını açıklama (Gösterge 2.4)” göstergesi Erdem ve Asya'da aşağıdaki gibi gözlemlenmiştir..

ERDEM: \overline{AB} , Bu eş benzerlik işareti. Şu üstündeki ne? (Şekil.4.29) Yanında olsaydı uzunluk olurdu. Bunu bilmiyorum ki ben. Herhalde uzunlukla aynı anlama geliyor.



Şekil 4.29: Gösterge 2.4'ün gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekil

ASYA: Bir paralelkenarda bu ikinci kısmı da bu şekilde göstereyim. A açısı C açısına eşitse o zaman şu şekilde olur. B de D ye yaklaşık olarak eşitmiş. (Sembolü yaklaşık olarak diye yorumluyor(Şekil 4.30).



Şekil 4.30: Gösterge 2.4'ün gözlenmesi esnasında Asya'nın çizdiği şekil

Erdem ve Asya, ikinci uygulama sorusunun (a) şıkında paralelkenarın kenarları arasındaki ilişkiyi içeren sembolik ifadeleri yorumlarken semboller ve notasyonların anlamlarına ilişkin sözel açıklamalarda bulunmuşlardır. Örneğin, Erdem, \overline{AB} sembolünün ne olduğu konusunda emin olamadığını ifade ederken, Asya \cong sembolünü “yaklaşık olarak eşittir” diye yorumlamıştır. Katılımcılar bir sembolün anlamıyla ilgili sözel açıklamalarda bulduklarından Gösterge 2.4 gözlenmiştir.

Soru çözümü sırasında verilen sembollerle ilgili sözel yorumlar yapmadığından Gösterge 2.4'ü sergilemeyen Kerem, sembollerle ilgili düşüncelerini görüşmeler sırasında aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

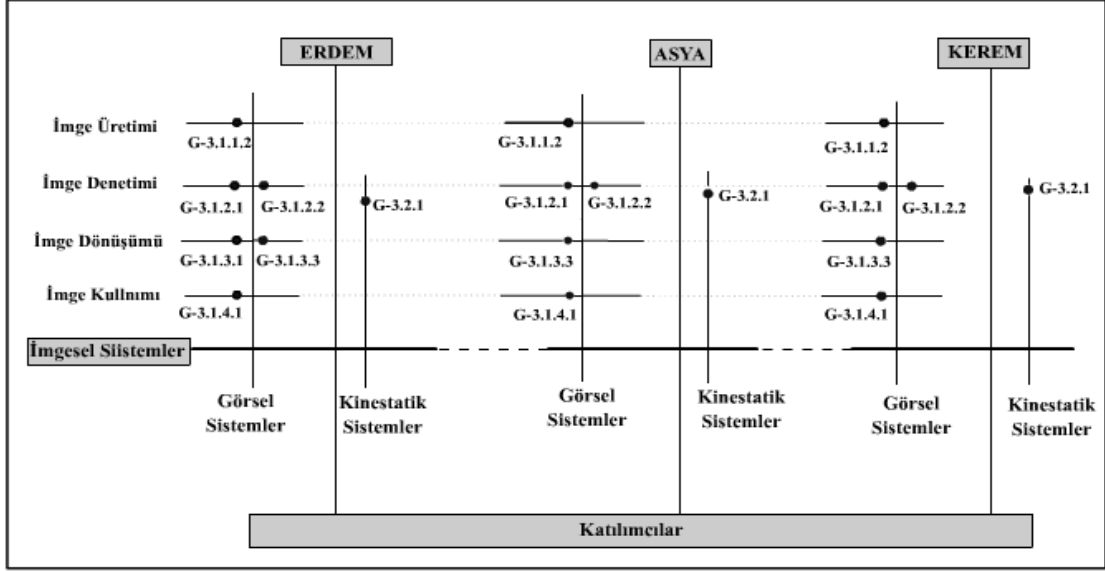
ARAŞTIRMACI: *Bu soruda sembolik ifadeleri kullanırken sözel hiçbir açıklamada bulunmadın. Neden?*

KEREM: *Sembolik şeyleri aslında tam anlamadım. Sadece tahmin ettim. Bir de bize hazır verilince zaten soruda onlarla ilgili konuşmaya gerek kalmıyor. O yüzden konuşarak anlatmak zor geliyor bana. Derlerde hoca söylüyor o zaman da çok dikkat etmiyoruz.*

Elde edinilen veriler, öğrencilerin sembol ve notasyonların anlamlarını açıklamada zorlandıklarını göstermiştir. Öğrenciler, görüşme sırasında sembollerle ilgili zorluk yaşamalarına derslerin işleme biçimi ve sınavlarda sorulan soru tiplerinin neden olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin sembollerini doğru ve rahat ifade edebilmeleri için okullarda işlenen derslerde sembollerin hazır verildiği sorular yerine sembolik ifadeleri öğrencilerin oluşturmasına izin veren etkinliklere yer verilebilir. Böylece öğrenciler daha farklı temsil türlerini ortaya koyabilecekleri problemleri çözme fırsatı yakalamış olurlar.

İmgesel Sistemler

Katılımcılar, tablo 4.11’de görüldüğü gibi imgesel sistemler içine giren göstergeleri sergileyerek temsiller oluşturmuşlardır. Katılımcılarda gözlenen bu göstergeler şekil 4.31’te verilmiştir.



Şekil 4.31: Katılımcılarda gözlenen imgesel sistemlere giren göstergeler

Şekil 4.31’te yer alan göstergelerin ilk olarak görsel sistemlere girenleri verilerden alınan kesitlerle aşağıda sunulmuştur.

İmge Üretimi

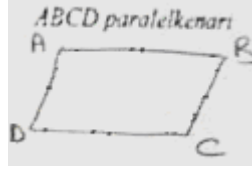
Şekil 4.31’te yer alan “Verilen bilgileri kullanarak özel bir temsil (şekil, çizim) ortaya koyma (Gösterge 3.1.1.2)” göstergesi, ikinci uygulama sorusunda edinilen verilerde katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: (Öncelikle sorunun tamamını yüksek sesle hızlı bir biçimde okuyor ve ardından okuduğu kısmı daha düşük bir ses tonunda yavaş yavaş tekrar okuyor.) Şimdi ne yapalım? Paralelkenar demiş. A,B,C,D diye isimlendirelim.



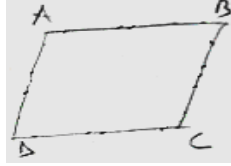
Şekil 4.32: Gösterge 3.1.1.2'nin gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekil

ASYA: (Hızlıca sorudaki ifade kısmını tekrar okuyor.) Ne yapacağım? Önce bakalım. Soruda paralelkenar demiş. O zaman bir şekil çizeyim.



Şekil 4.33: Gösterge 3.1.1.2'nin gözlenmesi esnasında Asya'nın çizdiği şekil

KEREM: *Burayı ne yapacağım? Ha şekli çizeceğim. Aşağıda sözel olarak yazacağım.*



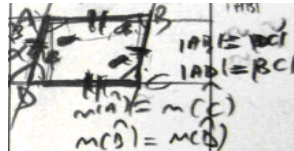
Şekil 4.34: Gösterge 3.1.1.2'nin gözlenmesi esnasında Kerem'in çizdiği şekil

Katılımcılar soruyu çözerken öncelikle soruda verilen bilgilerden paralelkenar çizimleri gerektiğini anlamışlardır. Soruda paralelkenar yazısını okuyunca hemen o kavrama ait imgenin zihinlerinde oluştuğunu görüşmelerde ifade etmişlerdir. Katılımcıların üçü de zihinlerinde oluşan bu imgeyi verilen sembolik ifadelerle de dikkat ederek kağıda aktarmışlardır. Öğrenciler soruda verilen bilgileri kullanarak paralelkenar şekli çizdikleri için *Gösterge 3.1.1.2*'yi sergilemişlerdir. Çizdikleri şekiller öğrencilerin paralelkenar kavramına ilişkin zihinlerinde nasıl bir imge oluştuğunu görmemizi sağlamıştır. Böylece imgesel sistemlere giren göstergelerle, öğrencilerin sözel ve formel olmayan temsil üretme süreçlerini incelemek mümkün olmuştur (Goldin, 1998a).

İmge Denetimi

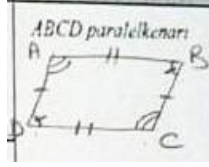
Şekil 4.31'de yer alan “*Soruya cevap vermek için imgeyi inceleme (Gösterge 3.1.2.1)*” ve “*Şekillerin özelliklerini(kenar, açı yön gibi) açık bir şekilde yazarak ifade etme (Gösterge 3.1.2.2)*” göstergeleri katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: *(Bir süre çizdiği şekli dikkatlice inceledikten sonra) Şekle bir bakalım iyice. AB kenarı eş benzerdir DC kenarına ve AD kenarı da eş benzerdir BC kenarına.*



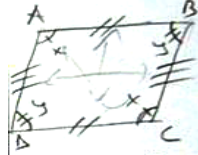
Şekil 4.35: Gösterge 3.1.2.2'nin gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekle uyguladığı işlemler

ASYA: *(Örnek yazan kısımdakilere okuyarak çizdiği şekilde sırasıyla kalemle de göstererek inceliyor.) Bu kenarla bu kenar birbirine eşitmiş (dedikten sonra hemen şekle geçiyor ve sembolik ifadeleri çizdiği paralelkenar şekli üzerinde inceliyor.)*



Şekil 4.36: Gösterge 3.1.2.2'nin gözlenmesi esnasında Asya'nın çizdiği şekle uyguladığı işlemler

KEREM: Önce şekli çizeyim. Ne yapacağım? (Soruda verilen sembolik ifadeleri ve çizdiği Şekil 4.37'yi bir süre inceliyor. Kalemle karşılıklı kenarların ve açılarının eşitliğini şekil üzerinde gösteriyor.)

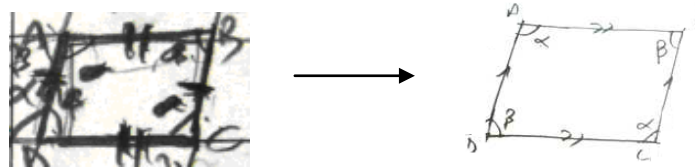


Şekil 4.37: Gösterge 3.1.2.2'nin gözlenmesi esnasında Kerem'in çizdiği şekle uyguladığı işlemler

Katılımcılar, uygulama sorusunun (a) şikkında paralelkenarın kenarlarıyla, (b) şikkında ise açılarıyla ilgili verilen sembolik bilgileri şekil üzerine aktarmak için çizdikleri şekli incelemeye başlamışlardır. Öğrenciler çizdikleri şekilleri incelerken *Gösterge 3.1.2.1* gözlenmiştir. Ardından, paralelkenarda karşılıklı açılar ve kenarların eşit olma durumunu Şekil 4.35, Şekil 4.36 ve Şekil 4.37'deki gibi açık bir biçimde şekil üzerinde yazarak ifade ettikleri için de *Gösterge 3.1.2.2* ortaya çıkmıştır. Ortaya çıkan bu göstergeyle öğrencilerin paralelkenarda açılar ve kenarlarla ilgili özellikleri doğru bilip bilmedikleri anlaşılmıştır. Gözlenen göstergelerin problem çözme sırasında öğrencilerin zihinsel süreçlerine ve geometrik kavramlarla ilgili bilgilerine ulaşmada yardımcı olması, imgesel sistemlerin eğitimde zihinsel süreçleri anlamak için kullanılabileceği konusundaki görüşleri desteklemektedir (Goldin ve Kaput, 1996).

İmge Dönüşümü

Şekil 4.31'de yer alan "Sorudan ne anladığını daha iyi ifade etmek için farklı pozisyonlarda şekiller çizme (*Gösterge 3.1.3.1*)" göstergesi sadece Erdem'de aşağıdaki gibi gözlenmiştir.



Şekil 4.38: Gösterge 3.1.3.1'in gözlenmesi esnasında Erdem'in çizdiği şekle uyguladığı dönüşüm

Bu katılımcı, sorunun çözümünde paralelkenarın karşılıklı açıları ve kenarları arasındaki ilişkiyi ifade etmek ve sorudan ne anladığını daha iyi yansıtmak için yeni bir paralelkenar şekli çizmiştir. Erdem çizdiği yeni şekille *Gösterge 3.1.3.1*'i sergilemiştir. Aynı gösterge diğer iki katılımcıda gözlenmediğinden, Erdem'in sorudan ne anladığını ortaya koyma konusunda diğer öğrencilerden daha dikkatli olduğunu söyleyebiliriz.

İmge Kullanımı

Katılımcılar sorunun (c) şikkıyla uğraşırken çizmiş oldukları paralelkenar şekillerini verilen sembolik ifadelerin doğruluğunu kontrol etmek amacıyla kullanmışlardır. Ürettikleri imgeyi soruya cevap vermek için kullandıkları esnada "*İmgeleri, kavramları kullanma (Gösterge 3.1.4.1)*" göstergesi gözlenmiştir.

Kinestetik Sistemler

Şekil 4.31'de yer alan "*Vücudunu kullanarak bazı geometrik durumları uygulama (Gösterge 3.2.1)*" göstergesi katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: *A açısı direk C açısına eşit çünkü burada bir paralellik söz konusu. (paralelkenarın tüm kenarlarını uzatarak ve eliyle ters olma durumunu sembolize ederek) α iç tersten şuraya eşit olacaktır.*

ASYA: *Çünkü kafamda taşıdım. Şöyle anlatayım. Şimdi şu açığı, yani mesela şu DC ya şu C şurada D var. Şuradan bir yerden mesela şunu şöyle getirdiğimizi düşünelim Yani şu yukardan gelen şu var ya şunu buraya taşıdım ve birbirini 180° ye tamamladığını gösterdim.*

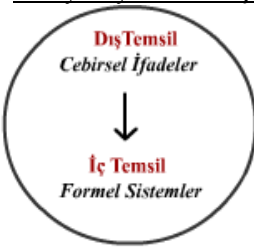
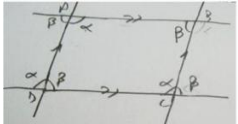

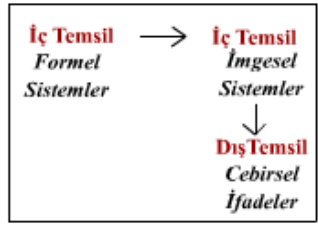
KEREM: *Burada da karşılıklı açılar birbirlerine eşittir. Burada da A ile C demiş birbirlerine eşit. Demiş burada da B ile D birbirlerine eşit. Zaten burada da karşılıklı açılar işte. (Eliyle karşılıklı olmasına dair işaret yapıyor.) Şimdi A artı B 180 tamam. Zaten şeye göre yukarılara göre 180 olması gerekiyor da. Şimdi ona ne deyim diye yani sözele dökerken. Hani şu şekilde ya (eliyle doğrusal işareti yapıyor.)*

Erdem, paralelkenarın karşılıklı açılarının ait olduğunu iç ters açıları kullanarak ifade ederken elleriyle ters olma durumunu sembolize ederken, Asya paralelkenarda karşılıklı olmayan açıların toplamının 180 derece olduğunu gösterirken parmaklarını kullanarak açığa uyguladığı işlemleri tarif etmiştir. Kerem ise paralelkenarda karşılıklı açıların eşit olduğunu parmaklarıyla karşılıklı olma durumunu tarif ederek açıklamıştır. Öğrenciler ellerini ve parmaklarını kullanarak geometrik durumları açıklarken *Gösterge 3.2.1* gözlenmiştir.

Oluşan İç Temsiller ile Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimlerin nasıl olduğunun daha iyi anlaşılabilmesi için Erdem, Asya ve Kerem'den edinilen veriler sırasıyla Tablo 4.12, 4.13 ve 4.14'de sunulmuştur. Tabloların ilk sütununda verilerden kesitler, ikinci sütununda oluşturulan temsil türleri ve üçüncü sütununda da bu temsiller arasındaki etkileşimlere yer verilmiştir.

Tablo 4.12: Erdem'in İkinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler
<p>Şimdi A açısı $m(A)$ eş benzer $m(C)$ ye</p> $\hat{m}(A) \cong \hat{m}(C)$ <p>Bu eş benzer ifadesi buraya olur mu aslında. Daha önce hiç karşılaşmadım.</p>	<p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Cebirsel İfadeler <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Formel Sistemler (Gösterge 2.4) 	<p><u>Dikey Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>“A açısı direk C açısına eşit çünkü burada bir paralellik söz konusu. (paralelkenarın tüm kenarlarını uzatarak ve eliyle ters olma durumunu sembolize ederek) α iç tersten şuraya eşit olacaktır.</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Kullanımı (Gösterge 3.1.4.1) ✓ Kinestetik Sistemler (Gösterge 3.2.1) 	<p><u>Yatay Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>“AB kenarı eş benzerdir DC kenarına ve AD kenarı da eş benzerdir BC kenarına Şekle bir bakalım AB kenarı DC kenarına eş ve benzermiş tam benzer olmamsının nedeni herhalde şurada biraz sola kayması. O yüzden alttaki kenar da sola kayıyor. Uzunluk olarak aynı. AD kenarı da aynı Yani AD kenarı eş benzerdir BC kenarına.”</p> $ AD = BC $	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Formel Sistemler (Gösterge 2.5) İmgesel Sistemler ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.2)) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Cebirsel İfadeler 	

Tablo 4.12'de öğrencinin oluşturduğu iç ve dış temsiller arasında nasıl bir etkileşim olduğu incelendiğinde, yatay ve dikey boyutlu olmak üzere iki tür etkileşim olduğu görülmüştür.

Tablo 4.12'nin birinci satırında, Erdem sorunun (b) şikkında verilen paralelkenarın karşılıklı açılarının eşit olduğuna ilişkin sembolik bilgileri okurken \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} gibi sembollerle cebirsel ifadeler oluşturmuştur. Ardından, oluşturduğu cebirsel ifadeye yer alan semboller ve notasyonlarla ilgili sözel yorumlar yaptığından formel sistemlere giren bir iç temsil oluşturmuştur. Cebirsel ifadeler ve formel sistemler farklı temsil türüne (dış temsil- iç temsil) ait olduğundan temsil türleri arasında dikey boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir. İç ve dış temsil arasında oluşan etkileşim, Kaput'un (1990) teorisindeki farklı temsil türleri arasında dikey boyutlu bir etkileşimin olduğuna dair yargısını doğrulamaktadır.

Tablo 4.12'nin ikinci satırında, Erdem paralelkenarda karşılıklı olmayan açılar toplamının 180 dereceye eşit olduğunu ispat etmeye çalışırken iç ters açılarını, çizdiği şekil üzerinde ifade etmiştir. Katılımcının iç ters açıları ve paralellik durumlarını çizdiği şekil üzerinde göstermesi, imge kullanımı yaptığını; ellerini ve parmaklarını kullanarak ifade etmeye çalışması da kinestatik sistemlere giren bir iç temsil ürettiğini göstermiştir. İmge kullanımı ve kinestetik sistemler aynı temsil türüne (iç temsil-iç temsil) ait olduğundan temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim oluşmuştur. Ayrıca öğrencinin zihninde oluşan imgelere manipülasyonlar uygulayarak iç temsil üretmesi, Bruner'in (1960) imgesel temsillerin bir işlemi ya da bir manipülasyonu, zihinde görsel hale getirme esnasında oluştuğuna dair görüşünü desteklemektedir.

Tablo 4.12'nin üçüncü satırında, katılımcı paralelkenarda karşılıklı açıların eşit olması durumunu sözel olarak açıklamıştır. Ardından, yaptığı sözel açıklamaların doğruluğundan emin olmak için çizdiği şekli incelemiştir. Şekli de inceledikten sonra, paralelkenarda karşılıklı kenarların eşit olmasını sembollerle kağıt üzerinde ifade etmiştir. Katılımcı, sözel ifadeler oluştururken ve çizdiği şekli incelerken iç temsil, kağıda sembolik ifadeler yazarken de dış temsil oluşturmuştur. Erdem hem aynı tür hem de farklı tür temsiller arasında geçiş yaptığından temsiller arasında hem yatay hem de dikey boyutlu etkileşim meydana gelmiştir.

İkinci uygulama sorusu için Asya'nın oluşturduğu iç ve dış temsiller arasındaki etkileşimler verilerden alınan kesitlerle Tablo 4.14'de sunulmuştur.

Tablo 4.13: Asya'nın İkinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler						
<p>Ne yapacağım? Önce şekil çiziyim. Burası A, (Örnek yazan kısma bakıp) AB eşit DC ye o zaman A, B ve D, C olarak yazayım. Bakalım AD, BC evet uydu. Bir Paralelkenarda bu ikinci kısmı da bu şekilde göstereyim. A açısı C açısına eşitse o zaman şu şekilde olur. B de D ye yaklaşık olarak eşitmiş</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">ÖRNEK</th> <th style="width: 50%;">PARALELKENAR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;"> $\overline{AB} = \overline{DC}$ $\overline{AD} = \overline{BC}$ </td> <td style="text-align: center;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> $\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$ </td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	ÖRNEK	PARALELKENAR	$\overline{AB} = \overline{DC}$ $\overline{AD} = \overline{BC}$		$\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$		<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Üretimi (Gösterge 3.1.1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Şekil <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.2) 	<p><u>Dikey Boyutlu Etkileşim</u></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> <p>İç Temsil İmge Üretimi</p> <p>↓</p> <p>Dış Temsil Şekil</p> <p>↓</p> <p>İç Temsil İmge Denetimi</p> </div>
ÖRNEK	PARALELKENAR							
$\overline{AB} = \overline{DC}$ $\overline{AD} = \overline{BC}$								
$\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$								
<p>Eğer bir paralelkenarın bir açısı 90, 90, 90 olursa şöyle dikkörtgen olur. Çünkü kenarlarının hepsi eşit deseydi kare de olabilirdi. Ama onu bilmiyoruz. Bu da tamamdır.</p>	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.1) <ul style="list-style-type: none"> Formel Sistemler (Gösterge 2.5) 	<p><u>Yatay Boyutlu Etkileşim</u></p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 20px; text-align: center;"> <p>İç Temsil İmge Kullanımı</p> <p>→</p> <p>İç Temsil Sözel Sistemler</p> </div>						
<p>“Çünkü kafamda taşıdım. Şöyle anlatayım. Şimdi şu açığı, yani mesela şu DC ya Şu C şurada D var. Şuradan bir yerden mesela şunu şöyle getirdiğimizi düşünelim Yani şu yukardan gelen şu var ya şunu buraya taşıdım ve birbirini 180° ye tamamladığını gösterdim.”</p>	<p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Şekil <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Sözel Sistemler (Gösterge 1.2) <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ Kinestatik Sistemler (Gösterge 3.2.1) 	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> <p>Dış Temsil Şekil</p> <p>↓</p> <p>İç Temsil → İç Temsil Sözel Sistemler Kinestatik Sistemler</p> </div>						

Tablo 4.13'ün birinci satırında, Asya uygulama sorusunun (a) ve (b) şıklarıyla uğraşırken soruda paralelkenar çizilmesi istediği için Kosllyn'in (1980) de belirttiği gibi uzun süreli bellekte hali hazırda bulunan paralelkenar imgesini çalışan belleğe aktararak imge üretimi yapmıştır. Ardından, zihninde oluşan paralelkenar imgesini kağıt üzerine aktararak dış temsil üretmiştir. Çizdiği şekil üzerinde paralelkenarın karşılıklı açıları ve kenarlarıyla ilgili özellikleri açık bir biçimde yazdığı için de imge denetimi yapmıştır.

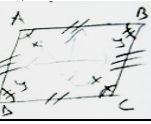


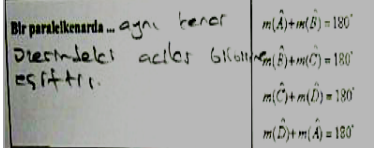
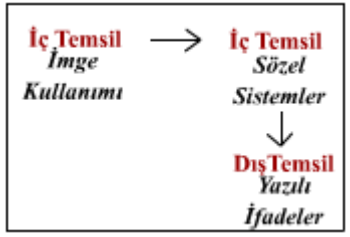
Katılımcı ardı ardına farklı temsil türlerini ortaya koyduğundan (iç temsil-dış temsil-iç temsil) temsiller arasında dikey boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir.

Tablo 4.13'ün ikinci satırında, Asya bir açısı 90 derece olan paralelkenarın dikdörtgen olması gerektiğini, ürettiği paralelkenar imgesinden faydalanarak ifade ettiği için imge kullanımı yapmıştır. Şeklin dikdörtgen olacağına karenin kenarlarıyla ilgili özellikleri kullanarak karar verirken de sözel sistemlere giren bir temsil üretmiştir. Sözel sistemler ve imge kullanımı aynı temsil türüne (iç temsil-iç temsil) ait olduğundan temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim oluşmuştur. Ortaya çıkan etkileşim süreci, öğrencinin dikdörtgen ve kare kavramlarını nasıl algıladığıyla ilgili bilgiler verdiği için iç temsiller arasında geçiş yapılan durumlar incelendiğinde, öğrencilerin içselleştirme süreçleriyle ilgili daha fazla bilgi edinebileceği düşünülmektedir.

Tablo 4.13'ün üçüncü satırında ise Asya, görüşmeler sırasında paralelkenarın karşılıklı olmayan açılar toplamının 180 derece olduğunu göstermek için şekiller çizmiştir. Çizdiği şekiller üzerine uyguladığı işlemleri sözel olarak açıklarken ellerini ve parmaklarını kullandığı için kinestetik sistemlere giren bir temsil üretmiştir. Örneğin, “şunu” derken tabloya ilk başta çizdiği paralelkenar şeklini tutma işareti, “şöyle getirip” derken de onu kesip yana çevirme işareti yapmıştır. Katılımcının farklı sistemlere giren temsiller (şekil-sözel sistemler-kinestetik sistemler) üretmesi temsiller arasında hem yatay hem de dikey boyutlu etkileşimlerin bir arada bulunabileceğini göstermiştir. Lesh, Post ve Behr'in (1987) belirttiği gibi çoklu temsiller arasındaki farklı ilişkilerin incelenmesiyle, öğrencilerin geometrik kavramları algılama süreçleri hakkında daha fazla fikir edinilebilir.

İkinci uygulama sorusu için Kerem'in oluşturduğu iç ve dış temsiller arasındaki etkileşimler verilerden alınan kesitlerle Tablo 4.14'de sunulmuştur.

Tablo 4.14: Kerem'in İkinci Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler
<p>“ Burayı ne yapacağım? Ha şekli çizeceğim. Aşağıda sözle olarak yazacağım. Bir paralelkenarda AB ile DC.Hmm. Bunları sözel olarak şuraya, yani x,y desem.180 desem. A, B; C,D. (Aşağıdaki şekli inceleyerek açılarla ilgili x ve y gibi harfleri şekilde gibi yazıyor.)</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Üretimi (Gösterge3.1.1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Şekil <p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.2) 	<p><u>Dikey Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>“Burada da karşılıklı açılar birbirlerine eşittir. Burada da A ile C demiş birbirlerine eşit. Demiş burada da B ile D birbirlerine eşit. Zaten burada da karşılıklı açılar işte. (Eliyle karşılıklı olmasına dair işaret yapıyor.)Şimdi A artı B 180 tamam. Zaten şeye göre yukarılara göre 180 olması gerekiyor da. Şimdi ona ne deyim diye yani sözele dökerken. Hani şu şekilde ya (eliyle doğrusal işareti yapıyor.”</p>	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Sözel Sistemler (Gösterge 1.2) İmgesel Sistemler ✓ Kinestetik Sistemler (Gösterge 3.2.1) 	<p><u>Yatay Boyutlu Etkileşim</u></p> 
<p>Bir paralelkenarda (bir süre sessiz kalıyor.) şimdi buna ne desem diye düşünüyorum. Şu yazan açılar aynı çizgi üzerinde ya. Bir paralelkenarda işte (saçını karıştırıyor, sağa sola bakıyor.) aynı kenar üzerindeki yazsam olur değil mi?Tamam o zaman. Bir paralelkenarda aynı kenar üzerindeki açılar birbirine eşittir.</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> İmgesel Sistemler ✓ İmge Kullanımı (Gösterge 3.1.4.1) Sözel Sistemler (Gösterge 1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Yazılı İfadeler 	

Tablo 4.14'ün birinci satırında, Kerem soruda verilen ifadeleri okur okumaz görüşmelerde de belirttiği gibi zihninde oluşan paralelkenar şeklini kağıt üzerine aktarmıştır. Ardından, sorunun (a) ve (b) şıklarında verilen paralelkenarın açıları ve kenarlarıyla ilgili özellikleri şekil üzerinde açıkça yazarak imde denetimi yapmıştır. Katılımcı imge üretip şekil olarak çizerken de çizdiği şekli denetlerken de farklı temsil

türleri (iç-dış temsil / dış-iç temsil) arasında geçiş yaptığı için temsiller arasında dikey boyutlu etkileşim meydana gelmiştir. Öğrencinin zihninde oluşan şekli kağıda aktarması bir dışsallaştırma sürecine girdiğini, şeklin özelliklerini açıkça yazarak oluşturduğu imgeyi incelemesi ise içselleştirme sürecini girdiğini göstermiştir (Pape ve Tchoshanov, 2001).

Tablo 4.14'ün ikinci satırında, katılımcı sorunun (c) şikkındaki sembolik ifadeleri çizdiği paralelkenar şeklinden yararlanarak sözel olarak açıklarken iç temsil üretmiştir. Yaptığı sözel açıklamalarda doğrusallık kavramını anlatmak için elleriyle işaretler yaptığından kinestetik sistemlere giren bir temsil oluşturmuştur. Sözel ve kinestetik sistemler aynı temsil türüne ait olduğundan temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir.

Tablonun üçüncü satırında ise katılımcı soruda paralelkenarın özelliklerine dayanan teoremleri bulurken oluşturduğu paralelkenar imgesini kullanarak düşüncelerini sözel olarak açıklamıştır. Ardından, sorunun (c) şikkında verilen sembolik bilgilerden ulaştığı sonucu, *“Bir paralelkenarda aynı kenar üzerindeki açılar birbirine eşittir.”* biçiminde yazılı olarak kağıda aktarmıştır. Kerem imge kullanımı ve sözel açıklamalar yaparken iç temsil, yaptığı açıklamaları kağıt üzerine aktararak da dış temsil üretmiştir. Hem aynı hem de farklı temsil türleri arasında geçiş yaptığı için temsiller arasında dikey ve yatay boyutlu bir etkileşimler bir arda gözlenmiştir. Katılımcı; Lesh, Landau ve Hamilton 'un (1983) da belirttiği gibi konuşarak sergilediği temsili, yazarak başka bir temsil sistemine aktarmışlardır.

İkinci Uygulama Sorusu İçin Katılımcılarda Gözlenen Temsiller ve Bu Temsiller Arasındaki Etkileşimlerin Kıyaslanması:

Katılımcılar ikinci uygulama sorusunu çözerken gözlenen temsil türleri ve bu temsil türleri Arasındaki etkileşimler kıyaslandığında benzerlikler ve farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Bu benzerlik ve farklılıkların neler olduğu aşağıda ifade edilmiştir.

- Gözlenen dış temsiller kıyaslandığında, tüm katılımcıların şekiller ve yazılı ifadelerle çözümlerinde yer verdikleri tespit edilmiştir. Öğrenciler şekilleri soruda verilen paralelkenar ifadesini okur okumaz çizmişlerdir. Fakat yazılı ifadeleri soruda boşluk olarak verilen kısımlara ancak görüşmeler esnasında yazabilmişlerdir. Öğrenciler soruyu çözmeleri esnasında yazılı ifadeleri oluşturmama nedenlerini soruyu tam olarak anlamamalarıyla ilişkilendirmişlerdir. Ayrıca görüşmeler sırasında oluşturdukları yazılı ifadeler incelendiğinde, sorunun (c) şikkında yer alan özelliği öğrencilerin yazılı olarak açıklamakta zorlandıkları tespit edilmiştir. Cebirsel ifadeler ise Erdem ve Kerem tarafından sorunun (c) şikkını yanıtlarken ortaya koyulmuştur. Asya'nın cebirsel ifadelerle yer vermemesinin nedeni, soruda paralelkenarın açı ve kenarlarıyla ilgili özelliklerin hali hazırda sembolik olarak verilmesi olabilir.
- İç temsillere odaklanıldığında, katılımcıların sözel, formel ve imgesel sistemlere giren temsiller ürettikleri gözlenmiştir. Öğrenciler sözel sistemlere giren aynı göstergelyi sorunun farklı kısımlarında sergilemişlerdir. Böylece öğrenciler soruyu çözerken, diğer sistemlerle ilgili kendi dillerindeki becerileri tespit edilmeye çalışılmıştır. Formel sistemlere giren göstergeler incelendiğinde, en fazla türde göstergelyi sergileyen kişinin Erdem olduğu dikkat çekmiştir. Bu katılımcı, soruda verilen sembolik ifadeleri daha iyi anlamak için şekiller üzerine açılar ve kenarlarla ilgili işlemler uygulamış ve formel sistemlere giren temsiller oluşturmuştur. Asya'dan edinilen verilerde cebirsel ifadelerle rastlanmazken formel sisteme giren üç tür göstergenin gözlendiğinden, onun içselleştirme sürecine girdiğini fakat bu süreci dışsallaştırmadığını söyleyebiliriz. İmgesel sistemlere giren göstergeler incelendiğinde ise tüm katılımcılarda benzer süreçlerin ortaya çıktığı tespit edilmiştir.
- İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimlere odaklanıldığında ise temsiller arasında yatay ve dikey boyutlu olmak üzere iki tür etkileşim ortaya çıkmıştır. Katılımcılar, aynı tür temsiller arasında geçiş yaparken yatay boyutlu etkileşim, farklı tür temsiller arasında geçiş yaparken de dikey boyutlu etkileşim meydana gelmiştir. Örneğin, katılımcılar çizdikleri paralelkenarın açıları arasındaki ilişkiyi ifade etmeye çalışırken parmakları ve ellerini kullanarak açıların iç ters, yöndeş olma durumları

ortaya koymaya çalışmışlardır. Katılımcılar ürettikleri imgeyi kullandıktan sonra vücutlarını kullanarak geometrik durumları inceldiğinden, aynı tür temsiller (iç temsil-iç temsil) arasında geçiş meydana gelmiştir.

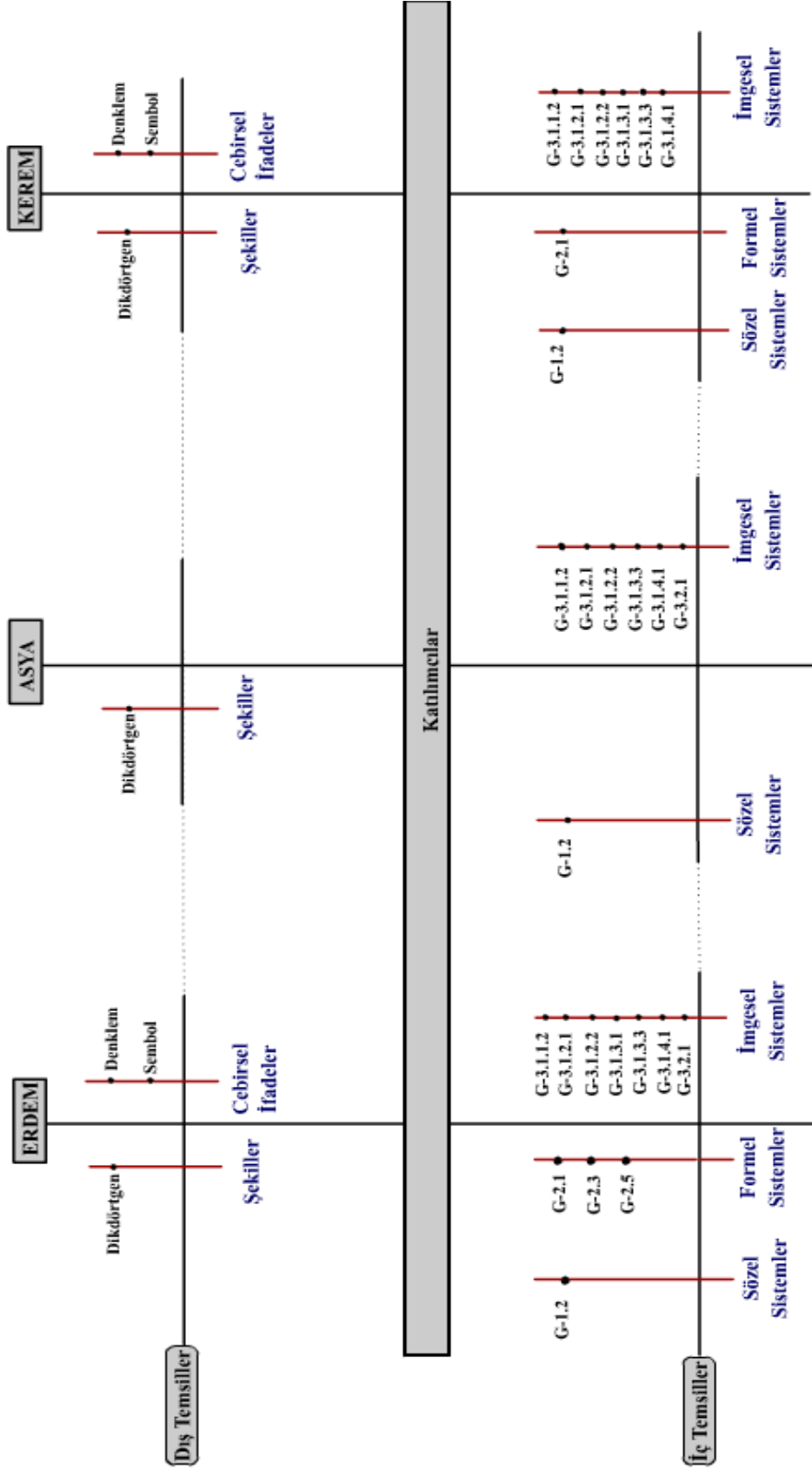
4.3. Uygulama Sorusu 3' den Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

11. sınıf öğrencilerinin oluşturdukları iç temsillerle dış temsiller arasındaki etkileşimleri incelemek amacıyla yapılan bu çalışmada katılımcılara sunulan üçüncü uygulama sorusu aşağıda verilmiştir.

Dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içerisindeki bir noktaya ağaç dikilmesi planlanıyor. Ağacın dikileceği bu noktanın bahçenin bir köşesine olan uzaklığı 3 metre, ağacın bu köşenin karşısındaki köşeye olan uzaklığı 5 metre ve üçüncü köşeye olan uzaklığı 4 metredir. Buna göre ağacın dikileceği bu noktanın dördüncü köşeye olan uzaklığı kaç metredir?

Uygulanan üçüncü soruda, dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içinde bir noktaya ağaç dikileceği belirtilerek ağacın dikileceği bu noktanın, bahçenin dördüncü köşesine uzaklığı sorulmuştur. Sorunun çözümü sırasında katılımcılarda gözlenen dış ve iç temsiller ile bu temsiller arasındaki etkileşimler aşağıda sunulmuştur.

Birinci uygulama sorusundan elde edilen veriler ışığında, katılımcıların oluşturduğu iç ve dış temsil türlerinin neler olduğunu hem genel hatlarıyla hem de bir arada daha iyi resmedebilmek için Şekil 4.39 oluşturulmuştur.



Şekil 4.39: Üçüncü uygulama sorusu için katılımcılarda gözlenen dış ve iç temsiller

Şekil 4.39, dikkatlice incelendiğinde katılımcılardan Erdem ve Kerem'in aynı tip dış temsilleri oluşturdukları, fakat Asya'nın cebirsel ifadeler haricindeki dış temsilleri ürettiği gözlenmiştir. Ayrıca katılımcılarda gözlenen iç temsillerde de benzerlikler ve farklılıklar vardır.

- a) *Sözel sistemlere* giren G-1.2 tüm katılımcılarda gözlenmiştir.
- b) *Formel sistemlere* giren beş göstergedeki G-2.2 ve G-2.4 hariç diğerleri Erdem'de gözlenirken, sadece G-2.1, Kerem'de gözlenmiştir. Asya da ise formel sistemlere giren bir gösterge gözlenmemiştir.
- c) *İmgesel sistemlere* giren göstergelerin bazıları tüm katılımcılarda gözlenirken bazıları katılımcıların ikisinde gözlenmiştir.

Oluşan Dış Temsiller:

Elde edilen veriler incelendiğinde katılımcıların, Tablo 4.15'de yer alan dış temsilleri oluşturdukları gözlenmiştir.

Tablo 4.15: Uygulama Sorusu 3'e Göre Katılımcılarda Gözlenen Dış Temsiller

DIŞ TEMSİLLER	ERDEM (İYİ)	ASYA (ORTA)	KEREM (ZAYIF)
Şekiller	✓	✓	✓
Yazılı İfadeler			
Cebirsel İfadeler	✓		✓
<i>Tablo</i>			

Katılımcılar, Şekil 4.40'ta verilen uygulama sorusunu okur okumaz dikdörtgen şekli çizmişlerdir. Ek olarak, Erdem ve Kerem problem çözümlerinde cebirsel ifadelerden semboller ve denklemlere yer vermişlerdir. Katılımcıların ikinci uygulama sorusuyla uğraşırken çizdiği şekiller Tablo 4.16'da verilmiştir.

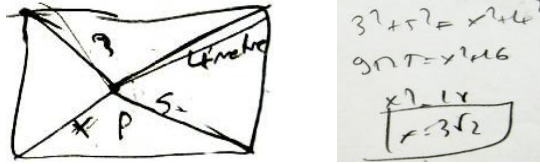
Tablo 4.16 Katılımcıların Üçüncü Uygulama Sorusunu Çözerken Çizdiği Şekiller

KATILIMCILAR	GÖZLENEN ŞEKİLLER
Erdem	
Asya	
Kerem	

Katılımcılar, soruyu okur okumaz Tablo 4.16'da görülen ilk dikdörtgen şekillerini kağıt üzerine çizerek dış temsil oluşturmuşlardır. Erdem, dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içinde alınacak noktanın, bahçenin neresinde olacağını kestiremediği için birden fazla dikdörtgen şekli çizmiştir. Daha sonra ağacın, bahçenin dördüncü köşesine olan uzaklığını bu farklı şekiller üzerinde hesaplamalar yaparak bulmaya çalışmıştır. Katılımcılardan Asya, soru çözümü esnasında sadece bir kere dikdörtgen şekli çizmiş ve tüm işlemleri çizdiği bu dikdörtgen şekli üzerinde yapmıştır. Kerem ise bahçenin köşelerini isimlendirirken sıkıntı yaşadığından ağacın köşelere olan uzaklıklarını şekil üzerinde ifade edememiştir. Soruda verilen ifadeleri daha iyi anlamak için de birden fazla dikdörtgen çizme gereği duymuştur. Öğrencilerin soruda verilen ifadeleri daha iyi anlayabilmek ve sorunun çözümüyle ilgili daha iyi muhakeme yapabilmek için çözümlerinde birden fazla şekle yer verdiğini söyleyebiliriz.

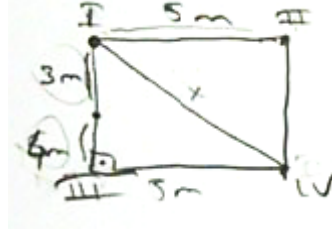
Katılımcılardan Erdem ve Kerem'in ürettikleri diğer bir dış temsil olan cebirsel ifadeler, verilerden alınan kesitlerle aşağıda sunulmuştur.

ERDEM: Şimdi ne yapıyorduk dikdörtgenlerde. İç bölgesinde alınan şu kenarların toplamı şu kenarların toplamına eşit oluyordu. (eliyle kenarları gösteriyor.) Bir deneyelim. Üçün karesi artı beşin karesi eşittir x 'in karesi artı dördün karesi. Dokuz artı yirmi beş eşittir x kare artı on altı.



Şekil 4.40: Erdem'in Üçüncü Uygulama Sorusuyla Uğraşırken Oluşturduğu Cebirsel İfadeler

KEREM: *Burası 5 metre, burası da 7. Yedinin karesi artı beşin karesi x. Kırk dokuz artı yirmi beş eşittir x.74 ediyor.*



Şekil 4.41: Kerem'in Üçüncü Uygulama Sorusuyla Uğraşırken Oluşturduğu Cebirsel İfadeler

Erdem, dikdörtgenin içinde alınan bir noktanın, dikdörtgenin köşelerine olan uzaklığını veren formülü kullanarak Şekil 4.40'da yer alan cebirsel ifadeyi oluşturmuştur. Kerem ise dikdörtgenin köşegen uzunluğunu bulmak için Pisagor Teoremi'ni kullanarak Şekil 4.41'de görülen cebirsel ifadeyi oluşturmuştur. Katılımcıların cebirsel ifadeleri farklı yolları kullanarak oluşturduğu gözlenmiştir. Özgün-Koca'nın (1998) belirttiği gibi öğrencilerin geometri konusunda edindikleri tecrübeler, soruyu çözerken farklı yollardan cebirsel ifadeler oluşturmalarına neden olmuş olabilir.

Oluşan İç Temsiller:

Elde edilen veriler incelendiğinde sözel, formel ve imgesel sistemlere giren iç temsiller gözlenmiştir. Gözlenen iç temsiller, Tablo 4.17'de katılımcıda hangi göstergenin gözlendiği yan tarafında işaretlenerek verilmiştir.

Tablo 4.17: Üçüncü Uygulama Sorusuna Göre Katılımcılarda Gözlenen İç Temsiller

İç Temsil Sistemleri ve Sistemlere Giren Göstergeler		Katılımcılar		
Temsil Sistemleri	Temsil Sistemlerinin Göstergeleri	ERDEM (İyi)	ASYA (Orta)	KEREM (Zayıf)
1. Sözel Sistemler <i>Sözel sistemlere giren temsiller, bireylerin kendi dillerindeki kapasitelerini kelimeler, tümceler ve cümleler düzeyinde betimlemeleri durumunda oluşur.</i>	1.1. Verilen kelime ve cümleleri betimlemek için başka kelime ve cümleleri kullanma			
	1.2. Sözel ifadeler aracılığıyla diğer temsil sistemlerine ilişkin yetkinlikleri betimleme	✓	✓	✓
	1.3. Cümledeki kelimelerin kategorik ilişkileriyle ilgili yorumlar yapma (eş anlamalı, zıt anlamalı gibi)			
2. Formel Sistemler <i>Matematikte yer alan sayı sistemleri, aritmetik algoritmalar, rasyonel sayılar, cebirsel notasyonlar vb. geleneksel ve iyi yapılandırılmış sembolik sistemlerdir. Bu tip formel konfigürasyonların yapıları ve manipülasyonlarıyla ilgili yetkinliklerin ortaya koyulması durumunda formel sistemlere giren temsiller oluşur.</i>	2.1. Görselleştirdiği durumları sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma	✓		✓
	2.2. Ortaya çıkan matematiksel durumları (sözel ve yazılı olan) sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma (örneğin, sembol manipülasyonu hakkında konuşması)			
	2.3. Kurallar ve algoritmalar hakkında konuşma	✓		
	2.4. Bir sembolün, notasyonun anlamını açıklama			
	2.5. Kullanılan kural ya da algoritmanın soruda neden çalıştığını sözel olarak açıklama	✓		
3. İmgesel Sistemler <i>İmgesel sistemler nesnel, ilişkilendirmeler, ilişkiler ve dönüşümler düzeyinde sözel ve notasyonal olmayan konfigürasyonları içerir. Bu konfigürasyonları içeren göstergelerin ortaya çıkması durumunda imgesel sistemlere giren temsiller oluşur. İmgesel sistemler, görsel, işitsel ve kinestatik sistemler olarak üçe ayrılmaktadır.</i>	3.1. Görsel Sistemler			
	3.1.1. İmge Üretimi <i>Bir kişi uzun süreli bellekten resim veya görsel bir sunu çağırdığında ve bunu işleyen belleğe yerleştirdiğinde oluşur.</i>			
	3.1.1.1. Sözel olarak ne anladığını ifade ettikten sonra bunu bir şekil ya da resim çizerek gösterme			
	3.1.1.2. Verilen bilgileri kullanarak özel bir temsil (şekil, çizim) ortaya koyma	✓	✓	✓
	3.1.1.3. Bir örüntüyü çıkarmak için görsellerle ilgili geçmiş bilgileri hatırlamak ya da kullanma			
	3.1.2. İmge Denetimi <i>İşleyen bellekte bir imgenin özellikleri tarandığında oluşur.</i>			
	3.1.2.1. Soruya cevap vermek için imgeyi inceleme	✓	✓	✓
3.1.2.2. Şekillerin özelliklerini (kenar, açı, yön gibi) açık bir şekilde yazarak ifade etme	✓	✓	✓	

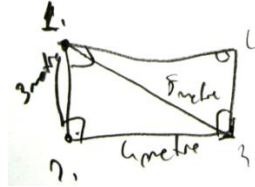
	3.1.2.3. Çizerek ya da tarif ederek şekillerin benzerliklerini veya farklılıklarını ortaya koyma			
	3.1.3. İmge Dönüşümü <i>Bir kişi oluşturduğu imgeye değişiklikler uyguladığında oluşur.</i>			
	3.1.3.1. Sorudan ne anladığını daha iyi ifade etmek için farklı pozisyonlarda şekiller çizme	✓		✓
	3.1.3.2. Şekle öteleme, dönme gibi işlemler uygulama			
	3.1.3.3. Bir şekle işlemler uygulayarak onu değiştirme (ilk iki madde dışındaki işlemler)	✓	✓	✓
	3.1.4.İmge Kullanımı <i>Bir imge zihinsel işlemler için kullanılırken oluşur.</i>			
	3.1.4.1. İmgeleri, kavramları kullanma	✓	✓	✓
	3.1.4.2. Verilerin içinden anlamlı sonuçlara ulaşmak (n. terimi doğru bir şekilde hesaplama gibi)			
	3.2. Kinematik Sistemler <i>Bireylerin fiziksel hareketleri içsel olarak temsil edip, imgeleştirdiği durumlarda oluşur.</i>			
	3.2.1. Vücudunu kullanarak bazı geometrik durumları uygulama (açıyı, doğruyu, bir yerin uzunluğunu parmaklarıyla gösterme gibi.)	✓	✓	
	3.2.2. Çevredeki bir nesne ya da başka bir şeyin yapacağı hareketi onun yerine bireyin imgeleştirmesi			
	3.3. İşitsel Sistemler <i>Matematiksel işlemler gerçekleşirken, konuşulan kelime ve sembolleri işitme sürecinden farklı olarak oluşur.</i>			
	3.3.1. Ellerini çırparak sayıları ifade etme ya da belli bir ritimde çarpım tablosunu söyleme, grup içindeki sayıları vurgulama vs...			

Katılımcılar, aynı tip iç temsilleri oluşturmuş olsalar bile bu iç temsillerin soru içinde gözüktükleri yerler ve zamanlarda farklılıklar bulunmaktadır. Katılımcıların bu temsilleri sorunun hangi kısmında ve nasıl oluşturduğu verilerden alınan bazı kesitlerle aşağıda verilmiştir.

- **Sözel Sistemler**

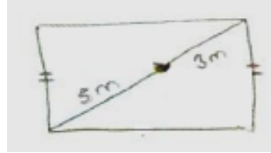
Tablo 4.17’de yer alan “Sözel ifadeler aracılığıyla diğer temsilsel sistemlere ilişkin yetkinlikleri betimleme (Gösterge 1.2)” göstergesi, üçüncü uygulama sorusunda edinilen verilerde katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: *ve üçüncü köşeye olan uzaklığı 4 metredir. Ama üçüncü buydu. Üstelik oraya da 5 metre uzaklığı vardı.*



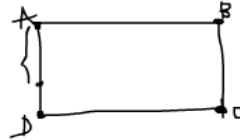
Şekil 4.42: Erdem’in Sözel Temsil Oluştururken Kullandığı Şekil

ASYA: *Bu doğrusal olur. Çünkü bir noktadan iki doğru birden geçiyor.*



Şekil 4.43: Asya’nın Sözel Temsil Oluştururken Kullandığı Şekil

KEREM: *Mesela şurası ağacın dikildiği yer olsun. Ağacın D’ye göre uzaklığını alalım ya da A’ya göre alalım.*



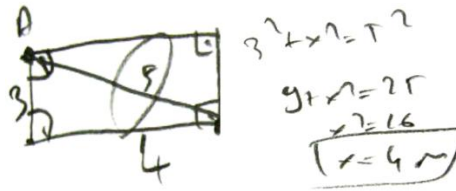
Şekil 4.44: Kerem’in Sözel Temsil Oluştururken Kullandığı Şekil

Katılımcılar, soruda dikdörtgen şeklinde bir bahçe dediği için öncelikle bir dikdörtgen şekli çizmişlerdir. Ardından, dikdörtgen şeklindeki bu bahçenin içine dikilecek ağacın yerini belirlerken soruda verilenleri, çizdikleri şekil üzerinde belirterek sözel açıklamalarda bulunmuşlardır. Katılımcıların problemi çözerken attıkları adımı bir dış temsil olan şekiller üzerinde sözel olarak açıkladıkları bu aşamada *Gösterge 1.2* gözlenmiştir. Bu sayede, Goldin’in (1990) de belirttiği gibi sözel temsiller diğer temsil sistemleri üzerinde öğrencilerin kendi dillerindeki gösterim gücünü görmemize yardımcı olmuştur.

- **Formel Sistemler**

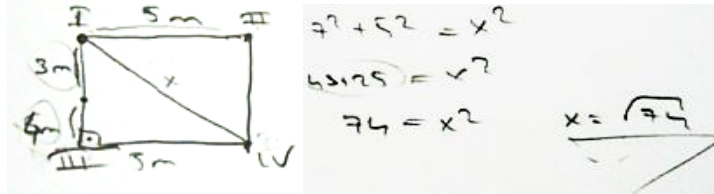
Tablo 4.17’de görüldüğü gibi Erdem, üçüncü uygulama sorusu için toplanan verilerde formel sistemlere giren üç tür gösterge sergilerken, Kerem sadece bir tür gösterge sergilemiştir. Katılımcılarda gözlenen “Görselleştirdiği durumları sembolik olarak ifade ederken ifade ettiği sembolik durumlar hakkında konuşma (Gösterge 2.1)” göstergesi verilerden alınan kesitlerle aşağıda sunulmuştur.

ERDEM:3-4-5 üçgeni oluyor. Pisagor’dan, üçün karesi artı şuraya x diyelim. X ’in karesi eşittir 5 in karesi olur. Doksan derece olduğu için dokuz artı x kare eşittir yirmi beş. X buradan 4 çıkar. 4 metre. Ve üçüncü köşeye tamam şurada dört metreymiş bulduk onu zaten.4 metre.



Şekil 4.45: Gösterge 2.1’in gözleendiği esnada Erdem’in Erdem’in ürettiği cebirsel ifadeler

KEREM: Buna göre ağacın dikileceği bu noktanın dördüncü köşeye olan uzaklığı, Hmm. (Şekil 4.47’deki köşegeni çiziyor.) Bu dikdörtgen olduğundan 90° . E burası 5 metre, burası da 7. (Dikdörtgenin kenarları için bunu söylüyor.) Yedinin karesi artı beşin karesi x . (Köşegen için x yazıyor.) Kırk dokuz artı yirmi beş eşittir x .74 ediyor. (Hemen x ’in üzerine kare ifadesini yerleştiriyor.)



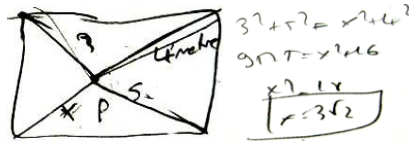
Şekil 4.46: Gösterge 2.1’in gözleendiği esnada Kerem’in ürettiği cebirsel ifadeler

Erdem, çizdiği şekil üzerinde ağacın dikileceği noktayı dikdörtgenin köşesi olarak alırken, Kerem ağacın dikileceği yer olarak dikdörtgenin kenarı üzerinde bir noktayı belirlemiştir. Ardından, her iki katılımcı da soruda verilenleri şekil üzerinde yazarak Pisagor Teoremi aracılığıyla dikdörtgenin köşegen uzunluğunu hesaplamışlardır. Bahçe ve ağacın yeri için görselleştirdikleri durumları sembolik olarak ifade ederken, yaptıkları sembol manipülasyonlarıyla ilgili yukarıda verilen konuşmaları sergiledikleri için Erdem ve Kerem’de Gösterge 2.1 gözlenmiştir. Katılımcılar, sadece görsel öğeleri kullanarak çözümlerine devam etmek yerine formel temsillere de çözümlerinde yer vermişlerdir. Özgün-Koca’nın (1998) belirttiği gibi öğrenciler

problem çözümü sırasında kendilerine anlamlı gelen temsilleri üretmişler ve kullanmışlardır.

Katılımcılardan sadece Erdem, “Kurallar ve algoritmalar hakkında konuşma (Gösterge 2.3)” göstergesini aşağıdaki gibi sergilemiştir.

ERDEM: *Şimdi ne yapıyorduk dikdörtgenlerde. İç bölgesinde alınan şu kenarların toplamı şu kenarların toplamına eşit oluyordu. (eliyle kenarları gösteriyor. Bir deneyelim. Üçün karesi artı beşin karesi eşittir x'in karesi artı dördün karesi. Dokuz artı yirmi beş eşittir x kare artı on altı.*



Şekil 4.47: Gösterge 2.3'ün gözleendiği esnada Erdem'in ürettiği cebirsel ifadeler

Erdem, ağacın dikileceği noktayı Şekil 4.47'deki gibi P noktası olarak belirlemiştir. Ardından, ağacın bahçenin köşelerine olan uzaklıklarıyla ilgili verilen bilgileri şekil üzerinde ifade etmiştir. Bahçenin içine dikilecek ağacın, bahçenin dördüncü köşesine olan uzaklığını bulmak için dikdörtgenin içinde alınan bir noktanın köşelere olan uzaklığını veren kuralı kullanmıştır. Yaptığı işlemler ve kullandığı kuralla ilgili konuşmalar sergilediği için Erdem'de *Gösterge 2.3* gözlenmiştir. Goldin ve Kaput'un (1996) belirttiği gibi bu katılımcı, soru çözerken formel durumları semantik olarak incelediği için bir içselleştirme sürecine girmiştir.

- **İmgesel Sistemler**

Katılımcılar Tablo 4.17'de görüldüğü gibi imgesel sistemlere giren göstergeleri sergileyerek iç temsiller oluşturmuşlardır. Oluşturulan iç temsiller verilerden alınan kesitlerle aşağıda sunulmuştur.

İmge Üretimi

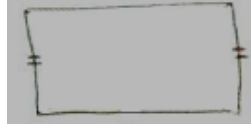
Tablo 4.17'de yer alan “Verilen bilgileri kullanarak özel bir temsil (şekil, çizim) ortaya koyma (Gösterge 3.1.1.2)” göstergesi, üçüncü uygulama sorusunda edinilen verilerde katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: *(Soruyu okuyor) Dikdörtgen şeklinde bir bahçeymiş. O zaman şöyle bir bahçemiz olsun.*



Şekil 4.48: Gösterge 3.1.1.2'nin gözlendiği esnada Erdem'in ürettiği şekil

ASYA: Dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içerisindeki bir noktaya ağaç dikilmesi planlanıyor. Ağacın dikileceği bu noktanın bahçenin bir köşesine olan uzaklığı 3 metre. Önce bir dikdörtgen çizelim.(Şekil 4.50)



Şekil 4.49: Gösterge 3.1.1.2'nin gözlendiği esnada Asya'nın ürettiği şekil

KEREM: Dikdörtgen şeklinde bir ağacın içerisinde bir yere ağaç dikilmesi planlanıyor. Şimdi dikdörtgen şeklindeymiş. Çizelim.(Şekil 4.51)



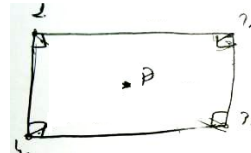
Şekil 4.50: Gösterge 3.1.1.2'nin gözlendiği esnada Kerem'in ürettiği şekil

Katılımcıların üçü de yapılan görüşmelerde soruda verilen bilgilere göre zihinlerinde ilk olarak bir dikdörtgen şekli belirlediğini ifade etmişlerdir. Daha sonra, zihinlerinde oluşan şekilleri kağıt üzerinde gösterdikleri için her üç katılımcıda da *Gösterge 3.1.1.2* gözlenmiştir. Bu göstergenin gözlendiği aşamada, katılımcılar Kosslyn'in (1980) belirttiği gibi uzun süreli bellekte var olan görsel temsili çalışan belleğe aktararak imge oluşturmuşlardır.

İmge Denetimi

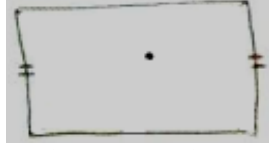
Tablo 4.17'de yer alan "Soruya cevap vermek için imgeyi inceleme (3.1.2.1)" ve "Şekillerin özelliklerini(kenar, açı, yön gibi) açık bir şekilde yazarak ifade etme (3.1.2.2)" göstergeleri, 3. uygulama sorusunda edinilen verilerde katılımcılarda aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: Ağacın dikileceği bu noktanın bahçenin bir köşesine uzaklığı 3 metreymiş. Şuraya 3 metre. Bir, iki, üç, dört.(köşeleri numaralandırıyor.) Ağacın bu köşenin karşısındaki köşeye uzaklığı 5 metre.



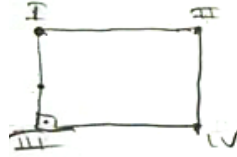
Şekil 4.51: Gösterge 3.1.2.1 ve Gösterge 3.1.2.2'nin gözlendiği esnada Erdem'in incelediği şekil

ASYA: Ağacın bu köşenin karşısındaki köşeye olan uzaklığı 5 metre (Şekli bir süre inceleyerek) karşı tam burası olacaktır. Şimdi şurayı da 4 metre olarak vermiş.



Şekil 4.52: Gösterge 3.1.2.1 ve Gösterge 3.1.2.2'nin gözlendiği esnada Asya'nın incelediği şekil

KEREM: Ya işte şunu birinci köşe şunu ikinci köşe şunu üçüncü, şunu da dördüncü köşe mi yapsak? Şunu üç, şunu dört yapalım yaa. Ağacın dikileceği bu noktanın bahçenin bir köşesine olan uzaklığı 3 metre, mesela birinci köşeye 3 metre, köşenin karşısındaki köşeye olan uzaklığı (bir süre kalemini çevirerek düşünüyor.)



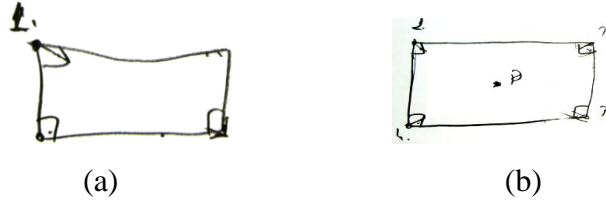
Şekil 4.53: Gösterge 3.1.2.1 ve Gösterge 3.1.2.2'nin gözlendiği esnada Kerem'in incelediği şekil

Erdem ve Asya, ağaca 5 metre uzaklıkta olan köşeyi belirlemede sıkıntı yaşadıkları için ürettikleri imgeyi denetlemişlerdir. Kerem ise, şeklin köşelerini numaralandırma aşamasında verdiği numaraların doğru köşeye ait olması konusunda emin olamadığı için bir süre çizdiği şekil üzerinde imge denetimi yapmıştır. Katılımcıların her birinde *Gösterge 3.1.2.1* gözlenmesine rağmen imge denetimi yaptıkları yerlerde farklılıklar görülmüştür. Bu farklılıklar, onların soruda verilen ifadeleri algılayış biçimiyle ilgili olabilir. Ayrıca Erdem ve Kerem dikdörtgenin açılarıyla ilgili özellikleri çizdikleri şekil üzerinde açıkça belirtmişlerdir. Asya ise dikdörtgenin karşılıklı kenarlarının eşit olduğunu Şekil 4.52'deki gibi göstermiştir. Katılımcılar şekillerin özelliklerini açık bir biçimde yazarak ifade ettikleri için *Gösterge 3.1.2.2* gözlenmiştir. Öğrencilerin önce imge üretip ardından ürettikleri imgeyi denetlemeleri, Kosslyn ve diğerlerinin (2006) imgesel sistemler arasında hiyerarşik bir yapı olduğuna dair görüşünü desteklemektedir.

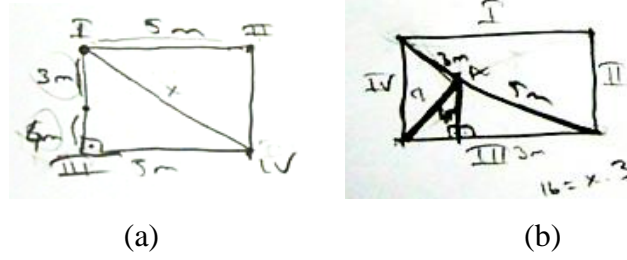
İmge Dönüşümü

Tablo 4.17'de yer alan "Sorudan ne anladığını daha iyi ifade etmek için farklı pozisyonlarda şekiller çizme (*Gösterge 3.1.3.1*)" göstergesi, Erdem ve Kerem'de gözlenirken, "Bir şekle işlemler uygulayarak onu değiştirme (ilk iki madde dışındaki

işlemler) (Gösterge 3.1.3.3)"göstergesi, tüm katılımcılarda gözlenmiştir. Gösterge 3.1.3.1'in katılımcılarda nasıl oluştuğu aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.54: Gösterge 3.1.3.1'in gözlendiği esnada Erdem'in şekle uyguladığı dönüşüm



Şekil 4.55: Gösterge 3.1.3.1'in gözlendiği esnada Kerem'in şekle uyguladığı dönüşüm

Erdem, bahçenin içinde bir noktaya dikilecek ağaç için öncelikle dikdörtgenin köşesinde bir noktayı Şekil 4.54'deki (a) gibi belirlemiştir. Bu katılımcı, yaptığı işlemlerle ağacın dördüncü köşeye uzaklığını bulamayınca soruyu tekrar okumaya başlamıştır. Ağacın bahçenin içinde bir noktaya dikileceğini anlayınca Şekil 4.54'deki (b)'yi oluşturmuştur. Erdem, görüşmelerde belirttiği gibi ağacın dikileceği yerle ilgili zihninde oluşan imgeyi (b)'deki gibi değiştirdiği için Gösterge 3.1.3.1 gözlenmiştir. Kerem ise bahçenin köşelerini Şekil 4.55'teki (a) gibi belirlemiştir. Pisagor Teoremi aracılığıyla bahçenin dördüncü köşeye uzaklığı olarak belirlediği x 'i köklü bir sayı bulunca yaptığı işlemlerden emin olamamıştır. Ardından, ağacın dikileceği yeri ve dikdörtgenin köşelerine verdiği numaraları değiştirerek Şekil 4.55'teki (b)'yi oluşturmuştur. Kerem'in soru çözümü esnasında da, şekiller kendileriyle ilgili yeni şekillerle yer değiştirdiği için Gösterge 3.1.3.1 gözlenmiştir. Kerem Şekil (b)'de köşe olarak kenarları aldığı için problem çözümünde hatalı bir yol izlemiştir. Bu örnekte olduğu gibi öğrencilerin ürettiği imgesel temsillere dikkat ederek onların zihinlerinde oluşan yapılar daha rahat anlaşılabilir.

İmge Kullanımı

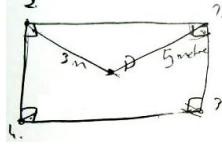
Erdem, Şekil 4.45 ve Şekil 4.47'de, Kerem de Şekil 4.46'da ağacın dördüncü köşeye uzaklığı olarak belirledikleri x 'i bulmak için hesaplamalar yaparken, ürettikleri

imgeleri kullandıkları için “İmgeleri, kavramları kullanma (3.1.4.1)” göstergesi gözlenmiştir. Aynı gösterge, Asya’da dikdörtgenin köşegen uzunlukları aracılığıyla ağacın yerini belirlemeye çalışması esnasında gözlenmiştir.

Kinestetik Sistemler

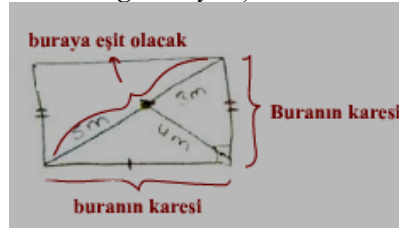
Tablo 4.17’de yer alan “Vücudunu kullanarak bazı geometrik durumları uygulama (açıyı, doğruyu, bir yerin uzunluğunu parmaklarıyla gösterme gibi.) (Gösterge 3.2.1)” göstergesi, 3. uygulama sorusunda edinilen verilerde Erdem ve Asya’da aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

ERDEM: Şuraya 3 metre. Bir, iki, üç, dört. (köşeleri numaralandırıyor. Ağacın bu köşenin karşısındaki köşeye uzaklığı 5 metre. Karşı derken böyle mi yoksa şöyle mi (eliyle yatay ve dikey doğrular çizerek) tam anlamadım.



Şekil 4.56: Gösterge 3.2.1’in gözlendiği esnada Erdem’in kinestetik işlemler uyguladığı şekil

ASYA: Tamam. Şimdi şurası 90 olduğuna göre buranın karesi şuranın karesi, buranın karesine eşit olacak. (Eliyle Şekil 4.58’deki uzunlukları gösteriyor.)



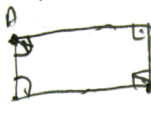

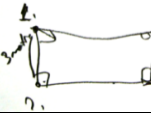
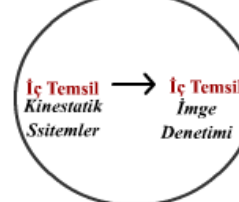
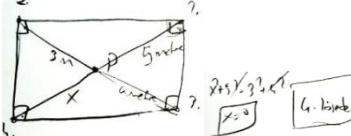

Şekil 4.57: Gösterge 3.2.1’in gözlendiği esnada Asya’nın kinestetik işlemler uyguladığı şekil

Erdem, Şekil 4.57’de ağacın 3 metre uzaklıkta olduğu köşenin karşısındaki köşenin neresi olacağını belirlemekte zorlanmıştır. Şekil 4.56’da ikinci ve üçüncü köşenin birinci köşeye göre konumunu ifade ederken elini aşağı ve yukarı doğru hareket ettirerek dikey ve yatay doğrular çizdiği için Gösterge 3.2.1 gözlenmiştir. Aynı gösterge, Asya’da dikdörtgenin köşegen uzunluğunu hesaplarken parmaklarıyla Şekil 4.57’deki kenar uzunluklarını gösterdiğinde ortaya çıkmıştır. Aynı göstergenin katılımcılarda farklı zamanlarda ortaya çıkması, onların verilen bilgileri içselleştirme süreçlerindeki farklılıklardan kaynaklanabilir.

Olusan İç Temsiller ile Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler:

İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimlerin nasıl olduğunun daha iyi anlaşılabilmesi için Erdem, Asya ve Kerem'den edinilen veriler sırasıyla Tablo 4.18, 4.19 ve 4.20'de sunulmuştur.

Tablo 4.18: Erdem'in Üçüncü Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler
<p>(Soruyu okuyor) Dikdörtgen şeklinde bir bahçeymiş. O zaman şöyle bir bahçemiz olsun.</p> 	<p>İç Temsil İmgesel Sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • İmge Üretimi (<i>Gösterge 3.1.1.2</i>) <p>Dış Temsil</p> <ul style="list-style-type: none"> • Şekil 	<p>Dikey Boyutlu Etkileşim</p> 
<p>Şu ikincimiz olsun 3 metre. Bu köşenin karşısındaki köşeye uzaklığı Şimdi karşı derken şura oluyor. (Eliyle dikdörtgenin sağ alt köşesini gösteriyor.)</p> 	<p>İç Temsil İmgesel Sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kinestatik İmge (<i>Gösterge 3.2.1</i>) • İmge Denetimi (<i>Gösterge 3.1.2.2</i>) 	<p>Yatay Boyutlu Etkileşim</p> 
<p>5 metre. Üçüncü köşeye uzaklığı 4 metredir. (dikkatlice şekli inceliyor.) O zaman ağaç köşede miymiş? Buraya da x diyelim. Üçün karesi artı dördün karesi, x'in karesi artı beşin karesidir. x o zaman sıfırdır.</p> 	<p>İç Temsil İmgesel Sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • İmge kullanımı (<i>Gösterge 3.1.4.1</i>) • Formel Sistemler (<i>Gösterge 2.3</i>) <p>Dış Temsil</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cebirsel İfadeler 	



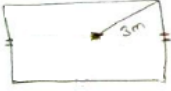
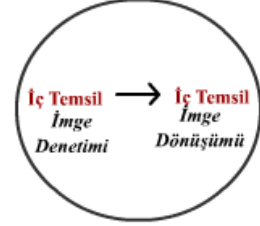


Tablo 4.18'in ilk satırında, Erdem'in zihninde beliren dikdörtgen şeklindeki bahçe imgesini kağıt üzerine şekil olarak aktardığı görülmektedir. İmge üretimi ve şekil farklı temsil türlerine (iç temsil-dış temsil) ait olduğundan temsiller arasında dikey boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir. Farklı iki tür temsil arasında geçiş olması, Kaput'un (1990) farklı temsiller arasında dikey boyutlu bir etkileşimin olduğuna dair görüşünü desteklemektedir.

Tablo 4.18'in ikinci satırında görüldüğü gibi Erdem, ağacın dikileceği noktanın köşelere olan uzaklığını belirlemede zorlanmıştır. Bu nedenle, oluşturduğu imgeyi *Gösterge 3.1.2.2*'yi sergileyerek denetlemeye başlamıştır. Daha sonra, dikdörtgenin ikinci ve üçüncü köşesinin birinci köşeye göre konumunu, elini aşağı ve yukarı doğru hareket ettirerek göstermeye çalışmıştır. Yani Erdem'de, imge denetimi yaptığı esnada *Gösterge 3.2.1* gözlenmiştir. Bu da katılımcının bir iç temsilden başka bir iç temsile geçtiğini göstermektedir. Aynı temsil türleri arasında geçiş olması, Kaput'un (1990) aynı tür temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşimin olduğuna dair görüşünü desteklemektedir.

Tablo 4.18'in üçüncü satırında, Erdem şekil üzerinde gösterdiği uzunluklar aracılığıyla dikdörtgenin içinde alınan bir noktanın köşelere olan uzaklığı ile ilgili formülü ifade etmek için ürettiği imgeyi kullanmıştır. Ardından katılımcı, formülle ilgili yorumlar yapıp kağıt üzerinde cebirsel ifadelerle yer vermiştir. Katılımcı, imge kullanımı ve formel sistemlere giren göstergeler sergiledikten sonra bir dış temsil (cebirsel ifadeler) ortaya koyduğu için temsil türleri arasında Tablo 4.18'in üçüncü satırında görüldüğü gibi yatay ve dikey etkileşimler ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin oluşturduğu temsillerin ve bu temsiller arasındaki etkileşimlerin anlaşılması, onların matematiksel kavramları nasıl anlamlandırdıklarını anlama açısından büyük önem taşımaktadır (Kamii, Kirkland ve Lewis, 2001).

Üçüncü uygulama sorusu için Asya'nın oluşturduğu iç ve dış temsiller arasındaki etkileşimler verilerden alınan kesitlerle Tablo 4.19'da sunulmuştur.

Tablo 4.19: Asya'nın Üçüncü Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler
<p>Dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içerisindeki bir noktaya ağaç dikilmesi planlanıyor. Ağacın dikileceği bu noktanın bahçenin bir köşesine olan uzaklığı 3 metre. Önce bir dikdörtgen çizelim.</p> 	<p><u>İç Temsil</u> İmgesel Sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • İmge Üretimi (Gösterge 3.1.1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Şekil 	
<p>Ağacın dikileceği bu noktanın bahçenin bir köşesine olan uzaklığı 3 metre. (hangi köşeyi alacağını belirlemek için şekle bakıyor.)</p> 	<p><u>İç Temsil</u> İmgesel Sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.1) • İmge Dönüşümü (Gösterge 3.1.3.3) 	
<p>Napalım? Şimdi bu uzunluk bu uzunluğa (eliyle gösteriyor) eşittir diye düşünüyorum. Bence burası dört metredir. Niye öyle diyorum? Çünkü şu şuraya eşit olduğuna göre, ama herhangi bir dörtgen Dikdörtgen.</p> 	<p><u>İç Temsil</u> İmgesel Sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • İmge Kullanımı (Gösterge 3.1.4.1) • Sözel Sistemler (Gösterge 1.2) • Kinestatik Temsiller (Gösterge 3.2.1) 	

Tablo 4.19'un birinci satırında, Asya'nın da Erdem gibi zihninde oluşan dikdörtgen imgesini kağıt üzerinde şekillendirmesi, katılımcının bir iç temsilden bir dış temsile geçiş yaptığını göstermiştir.



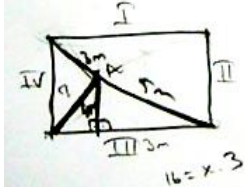

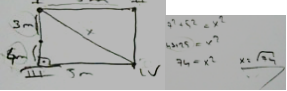
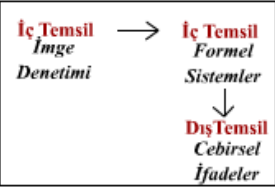
Tablo 4.19'un ikinci satırında görüldüğü gibi Asya, öncelikle çizdiği şekil üzerinde ağacın dikileceği yeri belirlemiştir. Ağacın birinci köşeye olan uzaklığını, şeklin hangi köşesine göre alacağına karar veremediği için ürettiği imgeyi denetlemeye başlamıştır. İmge denetimi sonrasında, 3 metre uzaklık için belirlediği yeri şekil üzerinde açıkça yazarak imge dönüşümünü gerçekleştirmesi, Asya'nın aynı tür temsiller arasında geçiş yaptığını göstermiştir. Öğrencinin ürettiği imgeyi denetleyip ardından

denetlediği imgeyi dönüşüme tabi tutması, Kosslyn'in (1980) imgesel sistemler arasında hiyerarşik bir yapı olduğuna dair görüşünü desteklemektedir.

Tablo 4.19'un üçüncü satırında, Asya'nın soruya cevap vermek için ürettiği imgeyi kullanıp çizdiği şekille ilgili düşüncelerini sözel olarak açıkladığı görülmektedir. Katılımcı, bu sözel açıklamaları yaparken ağacın köşelere olan uzaklıklarını parmaklarını kullanarak şekil üzerinde belirtmiştir. Böylece, Asya'nın ardı ardına imge kullanımı, sözel sistemler ve kinestatik sistemlere giren göstergeleri sergileyerek iç temsiller ürettiği gözlenmiştir. Katılımcıda ardı ardına aynı tür temsiller ortaya çıktığı için temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir.

Üçüncü uygulama sorusu için Kerem'in oluşturduğu iç ve dış temsiller arasındaki etkileşimler verilerden alınan kesitlerle Tablo 4.19'da sunulmuştur.

Tablo 4.20: Kerem'in Üçüncü Uygulama Sorusu İçin Oluşturduğu İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Verilerden Kesitler	Oluşturulan Temsil Türleri	Etkileşimler
<p>Dikdörtgen şeklinde bir ağacın içerisinde bir yere ağaç dikilmesi planlanıyor. Şimdi dikdörtgen şeklindeymiş. Çizelim.</p> 	<p><u>İç Temsil</u> İmgesel sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • İmge Üretimi (Gösterge 3.1.1.2) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Şekil 	
<p>Ağacın dikileceği bu noktanın bahçenin bir köşesine olan uzaklığı 3 metre. Karşıdaki köşeye uzaklık 5 metre. (Şekil... de uzunlukları yazıyor.) O zaman şekilden yola çıkarak uzaklığı bir bulalım.</p> 	<p><u>İç Temsil</u> İmgesel Sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • İmge Dönüşümü (Gösterge 3.1.3.3) • İmge Kullanımı (Gösterge 3.1.4.1) 	
<p>Hmm. Bu dikdörtgen olduğundan 90° E burası 5 metre, burası da 7. Yedinin karesi artı beşin karesi x. Kırk dokuz artı yirmi beş eşittir x.</p> 	<p><u>İç Temsil</u> İmgesel Sistemler</p> <ul style="list-style-type: none"> • İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.2) • Formel sistemler (Gösterge 2.1) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Cebirsel İfadeler 	

Tablo 4.20'nin birinci satırında, Kerem'in diğer iki katılımcı gibi bir iç temsilden bir dış temsile geçiş yaptığı görülmektedir. Katılımcının farklı türde temsiller üretmesi, oluşan temsil türleri arasında dikey boyutlu bir etkileşim olduğunu göstermiştir. Tüm katılımcılar soruyu okuduktan sonra zihinlerinde bir dikdörtgen imgesi oluşturup kağıt üzerinde bunu şekil olarak ifade ettiği için onların soruda verilen ifadelerden aynı şeyleri anladıklarını söyleyebiliriz.

Tablo'nun ikinci satırında görüldüğü gibi katılımcı, ağacın dikileceği noktanın bahçenin dördüncü köşeye uzaklığını bulmak için çizdiği şekil üzerinde soruda verilen bilgileri yazarak imge dönüşümü yapmıştır. Ardından, dönüşüme tabi tuttuğu imgeyi ağacın köşelere olan uzaklıklarını hesaplamak için kullanmıştır. Bu da Kerem'in imgesel sistemlere giren temsil türleri arasında geçiş yaptığını göstermektedir. Aynı tür temsiller (iç temsil-iç temsil) arasında geçiş olduğu için temsiller arasında yatay boyutlu bir etkileşim meydana gelmiştir.

Tablo'nun üçüncü satırında, Kerem çizdiği şekli inceledikten sonra x uzunluğunu bulmak için Pisagor Teoremi'ni kullanmıştır. Katılımcı, teoreme göre köşegen uzunluğunu bulurken, yaptığı formel işlemlerle ilgili konuşmalar sergilediği için formel sistemlere giren bir gösterge gözlenmiştir. Bu da Kerem'in imge denetimi ve formel sistemlere giren göstergeler sonrasında cebirsel ifadeler oluşturduğunu göstermiştir. Farklı temsil türleri arasında geçişler olduğu için Tablo 4.20'nin üçüncü satırında modellenen yatay ve dikey boyutlu etkileşim süreci ortaya çıkmıştır.

Üçüncü Uygulama Sorusu İçin Katılımcılarda Gözlenen Temsiller ve Bu Temsiller Arasındaki Etkileşimlerin Kıyaslanması:

Katılımcılar birinci uygulama sorusunu çözerken gözlenen temsil türleri ve bu temsil türleri arasındaki etkileşimler kıyaslandığında benzerlikler ve farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Bu benzerlik ve farklılıkların neler olduğu aşağıda ifade edilmiştir.

- Gözlenen dış temsiller kıyaslandığında, problem çözme sırasında Erdem ve Kerem'in şekil ve yazılı ifadelerine, Asya'nın şekillere yer verdikleri tespit edilmiştir. Erdem ve Kerem soruyu çözmek için defalarca şekil çizerken, Asya sadece bir şekil çizmiş ve tüm işlemleri o şekle göre yapmıştır. Öğrencilerin soruda verilen ifadeleri daha iyi anlamak için birçok defa şekil çizdiği düşünülmektedir. Erdem ve Kerem şekillerin yanı sıra problem çözme esnasında cebirsel ifadeler oluşturmuşlardır. Fakat bu cebirsel ifadeleri oluştururken farklı formülleri kullanmışlar ve farklı denklemlere ulaşmışlardır.
- İç temsillere odaklanıldığında, katılımcıların sözel, formel ve imgesel sistemlere giren temsiller ürettikleri gözlenmiştir. Öğrenciler sözel sistemlere giren aynı göstereyi, dikdörtgenin bahçenin köşelerine olan uzaklığını bulurken ortaya koymuşlardır. Katılımcıların oluşturduğu formel sistemlere giren göstergelerde büyük farklılıklara rastlanmıştır. Örneğin, Erdem kurallar ve algoritmalar hakkında konuşmalar sergilerken, diğer iki katılımcıda aynı durum gözlenmemiştir. İmgesel sistemlere giren göstergeler incelendiğinde ise tüm katılımcılarda benzer süreçlerin ortaya çıktığı tespit edilmiştir. Fakat kinestatik sistemlere giren bir gösterge, Erdem ve Asya'da gözlenirken Kerem de gözlenmemiştir.
- İç ve dış temsiller arasındaki etkileşimlere odaklanıldığında ise temsiller arasında yatay ve dikey boyutlu olmak üzere iki tür etkileşim ortaya çıkmıştır. Katılımcılar, aynı tür temsiller arasında geçiş yaparken yatay boyutlu etkileşim, farklı tür temsiller arasında geçiş yaparken de dikey boyutlu etkileşim meydana gelmiştir. Öğrenciler genel olarak, zihinlerinde oluşan imgeleri şekil olarak kağıda aktarırken ya da yorumladıkları formel durumları kağıt üzerinde cebirsel olarak aktarırken dikey boyutlu etkileşimler meydana gelmiştir. Öğrencilerde gözlenen temsiller arasında aynı tür etkileşimler olsa bile temsil türleri ve etkileşim süreçlerinde farklılıklar olduğu tespit edilmiştir.

5. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

11. sınıf öğrencilerinin geometrik problemlerle ilgili oluşturdukları iç ve dış temsiller ile bu temsiller arasındaki etkileşimleri incelemek amacıyla yapılan nitel çalışmada sesli düşünme, görüşme ve öğrencilerin çalışma kağıtları yoluyla toplanan veriler “Bulgular ve Yorumlar” bölümünde ayrıntılı olarak değerlendirilmiştir. Bu bölümde ise bulgularına dayalı olarak varılan sonuçlarla, önerilere yer verilmiştir.

5.1. SONUÇLAR

Literatürde yer alan birçok araştırma, öğrencilerin problem çözerken ürettikleri ve kullandıkları dış temsillere odaklanmıştır. Fakat matematiksel anlamda problem çözme ve öğrenmeyi daha iyi ortaya koymak için sadece dış temsillere değil aynı zamanda öğrencilerin ürettikleri iç temsillere de odaklanmak gerekmektedir (Goldin, 1998a). Bu nedenle, yapılan bu çalışmada hem öğrencilerin ürettikleri temsillere hem de bu temsiller arasındaki etkileşimlere odaklanılmıştır. Elde edilen verilerin incelenmesiyle (1) öğrencilerin oluşturduğu dış temsiller, (2) öğrencilerin oluşturduğu iç temsiller ve (3) oluşan temsiller arasındaki etkileşimler aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

- **Geometrik problemlerle uğraşırken öğrencilerin oluşturduğu dış temsiller nelerdir?**

Geometrik problemlerin çözümü esnasında katılımcılarda gözlenen dış temsiller “şekiller”, “yazılı ifadeler” ve “cebirsal ifadeler” den oluşmaktadır.

Katılımcılar dış temsillerden “şekilleri” verilen üç geometrik problemi çözerken oluşturmuşlardır. Örneğin; konveks bir çokgenin iç açılar toplamı ile kenar sayısı arasındaki ilişkiyi bulmaları istenen birinci geometri probleminde, yedigene kadarki çokgenleri sırayla çizmişlerdir. Fakat çizdikleri şekiller üzerine uyguladıkları

işlemlerde farklılıklar gözlenmiştir. Erdem ve Asya çizdikleri çokgenlerin sadece bir köşesinden geçen köşegenleri çizerken, Kerem tüm köşelerden geçen köşegenleri çizmiştir. Katılımcılar, ikinci geometrik problemle uğraşırken soruda paralelkenarla ilgili verilen sembolik bilgileri daha rahat ifade edebilmek için paralelkenar şekli çizmişlerdir. Üçüncü uygulama sorusunda ise dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin içine dikilecek ağacın dördüncü köşeye uzaklığını bulmaya çalışırken farklı sayıda ve biçimlerde şekiller çizmişlerdir. Örneğin; Asya sadece bir tane dikdörtgen şekli çizerek ağacın yerini ve bahçelerin köşelerini belirlemeye çalışırken, Erdem ve Kerem birden fazla sayıda şekil çizmişlerdir. Geometrik problemlerin çözümünde katılımcıların çizdiği şekiller, soru tarzına ve öğrenciye göre değişiklik göstermiştir. Özgün-Koca (1998) ve Çıkla (2004) çalışmalarında aynı tip temsilin tüm bireylerde gözlenmemesinin; bireysel farklılıklar, edinilen geçmiş tecrübeler, soru tarzı gibi etkenlere bağlı olabileceğini belirtmişlerdir. Bu bağlamda, araştırmada ulaşılan bu sonuç, yukarıda bahsi geçen araştırmaların sonuçlarını desteklemektedir.

Dış temsillerden “cebirsal ifadeler”, geometrik problemlerin çözümü esnasında katılımcılar tarafından oluşturulmuştur. Örneğin; birinci geometrik problemde çokgenin iç açılar toplamı ile kenarları arasındaki ilişkiyi bulurken tüm öğrenciler tarafından cebirsal ifadeleri oluşturmuşlardır. Fakat soruda cebirsal ifadeleri kendilerinin oluşturması beklendiği için zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Erdem, çokgenin iç açılar toplamını veren formüle ulaşırken, şekillere uyguladığı işlemler nedeniyle formüle ulaşmada zorluk yaşamıştır. Asya, istenen formülü daha önceden bildiği için soruda verilen yönergelerle göre formülü bulmak yerine ezber bir yolla sonuca ulaşmıştır. Kerem ise kafadan uydurduğunu söylediği yanlış bir formül elde etmiştir. Kerem görüşme esnasında, formül oluştururken neden zorlandığıyla ilgili aşağıdaki açıklamalarda bulunmuştur:

ARAŞTIRMACI: *Formül olarak ifade etmekte neden zorlandın?*

KEREM: *Okulda bize formüller veriliyor. Biz de o formüllere göre soru çözüyoruz. Ama burada formülü bizim bulmamız isteniyor. O yüzden zorlandım.*

Sonuçlar göstermiştir ki öğrenciler geometrik problemleri çözerken cebirsal düşünceyi kullanmışlardır. Fakat katılımcılardan genel anlamda bir formül çıkarması ve bunu ifade etmesi istendiğinde zorlandıkları görülmüştür. Bu sonuç; Dindyal’in (2003) öğrencilerin örüntüleri genelleyerek bir formülü ortaya koyma, bir denklem yazma gibi

durumlarda zorluklar yaşadığı konusundaki düşüncelerini desteklemiştir. Derslerde yer alan etkinlikler, öğrencilerin cebirsel ifadeleri kolaylıkla üretmesini sağlayacak nitelikte hazırlanırsa, öğrenciler farklı temsil türlerini üretmede kolaylıklar sağlayacağı düşünülmektedir.

Dış temsillerden “yazılı ifadeler”, öğrenciler tarafından birinci ve ikinci geometrik problemin çözümü esnasında oluşturulmuştur. Sonuçlar göstermiştir ki eğer soruda yazılı biçimde ifade etmeleri istenen bir durum varsa (1. ve 2. geometrik problem), katılımcılar buldukları sonuçları kendi dillerindeki becerileri kullanarak yazılı biçimde aktarmışlardır. Fakat soruda öğrencilerden yazılı ifade oluşturmaları beklenmemişse, (3. geometrik problem) elde edilen verilerde “yazılı ifadeler” gözlenmemiştir. Ayrıca öğrenciler verilen sembolik ifadeleri yorumlayıp paralelkenarla ilgili teoremi yazmaları beklenen ikinci uygulama sorusunda, paralelkenar şekli üzerinde yorumladıkları sembolik durumları yazılı olarak ifade etmekte zorlanmışlardır. Katılımcılar sembolik durumları yazılı biçimde ifade etmekte neden zorlandıklarını görüşmelerde aşağıdaki gibi açıklamışlardır.

ARAŞTIRMACI: *Bu soruyu ilk gördüğünde ne anladın?*

ERDEM: *Şimdi şundan (sorudaki sembolik kısımlar) ne anladığımı söyleyeyim. Bize bunları vermiş formül istiyor sandım.*

ARAŞTIRMACI: *Neden öyle düşündün?*

ERDEM: *“Teorem” yazan kısımdan oldu. Mesela paralelkenarın çevresinin toplamı şu şudur. a_1, a_2 gibi. Teorem derken o aklıma geldi. O yüzden hep ben burada ne yapsam ki diye düşündüm. Burada “Teorem” benim kafamı karıştırdı. Derslerde teorem olarak değil de özellik diye bunları söylüyorlar. Ondan ben teoremle özelliği karıştırdım. Özellik olsaydı orda yazanı bulabilirdim.*

ARAŞTIRMACI: *Bu soruyla ilgili düşüncelerin nelerdir?*

ASYA: *Bence kolaydı. Her zaman bildiğimiz şeyler vardı. Ama farklı olan yanı bize hiç böyle sormuyorlar yazılıda filan. Mesela anlatırken zorlanıyorum. Çünkü hiç konuşmadan sadece yazdığımız için anlatmak zor geliyor. Bir de sorularda gerek test kitaplarında gerek yazılı sorularında bize birçok şey hazır veriliyor. Biz de bazı şeylere dikkat etmiyoruz bu yüzden.*

KEREM: *(Soruda yer alan tablodaki 4. satıra geçiyor.) Eğer paralelkenarın bir açısı (deyip tam şekil çizmeye geçerken Teorem yazan kısımlar için) şuraya bir şey yazıyor muyum? Tam anlamadım bu kısmı*

Görüşmeden elde edilen bilgilerde görüldüğü gibi Erdem, gördükleri derslerde “Teorem” yerine “Özellik” kelimesi kullanıldığı için soruyu tam anlayamadığını ve zorluk yaşadığını belirtmiştir. Asya, okulda ve kitaplarda kendilerine hazır olarak verilen sembollere alıştıkları için soruda isteneni tam anlayamadığını söylemiştir.

Kerem ise teoremlerle ne demek istendiğini anlayamadığını söyleyerek soruyu çözmeye çalışmıştır. Öğrencilerin ikinci uygulama sorusunu çözerken yazılı ifadeler oluşturamaması, soruda verilen ifadeleri anlamakta zorluk yaşamaları ve alışık olmadıkları tarzda bir soruyla karşılaşmalarından kaynaklanabilir. Eğitim ve öğretim esnasında teoremler ve özelliklerin açıkça verilmesi yerine yapısalcı yaklaşım içindeki yöntemler kullanılarak öğrencilere keşfettirilmesi, öğrencilerin geometrik kavramları ve bu kavramlarla ilgili özellikleri daha iyi öğrenmelerine yardımcı olabilir. Liedke ve Sales (2001) ile Bali'nin (2002) yaptığı çalışmalara göre geometri dersinde yapılacak yazma aktiviteleri, öğrencilerin düşüncelerinin yansıtılmasına ve ortaya konmasına yardımcı olan bir aktivitedir. Bu noktada öğretmenin rolü, matematik ve geometri derslerinde yazma aktivitelerinin yapılmasının ve yazma ödevi verilmesinin, öğrencilerin zihnindeki kavram algılarını ortaya çıkarmadaki önemini farkında olarak bu aktivitelerin gerçekleşmesine olanak sağlamasıdır.

- **Geometrik problemlerle uğraşırken öğrencilerin oluşturduğu iç temsiller nelerdir?**

Öğrenciler geometrik problemlerin çözümü esnasında “sözel”, “formel” ve “imgesel” sistemlere giren göstergeleri sergileyerek iç temsiller üretmişlerdir.

Bir iç temsil sistemi olan “sözel sistemlere” giren göstergeler, katılımcılar tarafından diğer temsil sistemlerine ilişkin yetkinlikleri betimlerken sergilenmiştir. Örneğin; öğrenciler üçüncü geometrik problemin çözümünde dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içine dikilecek ağacın yerini belirlerken, çizdikleri şekillerle ilgili konuşmalar sergilemişlerdir. Böylece öğrencilerin konuşmaları aracılığıyla geometrik kavramlarla ilgili bilgilerine ve yanılgılarına daha kolay ulaşılmıştır. Elde edilen bu sonuç, diğer temsil sistemleri sayesinde öğrencilerin ana dillerindeki gösterim gücünün görülebileceği konusunda Goldin'in (1998a) görüşünü desteklemiştir.

Verilerin analizi sonrasında ulaşılan sonuçlar göstermiştir ki öğrenciler geometrik problemlerle uğraşırken, düşüncelerini “sözel temsiller” aracılığıyla ifade etmede zorlanmışlardır. Örneğin; katılımcılar ikinci geometrik problemle uğraşırken, paralelkenarın ardışık açılarının toplamının 180 derece olduğunu sözel olarak nasıl ifade edeceklerinde zorluklar yaşamışlardır. Örneğin;

ARAŞTIRMACI: *Peki Erdem, Sorudaki tabloda yer alan 3.satırda zorlanmanın nedeni nedir?*

ERDEM: *Onu ifade edemedim. Açılara ne diyeceğimi bilemedim. İç ters açıların ölçüleri toplamı 180 derecedir dedim ama halen de emin değilim.*

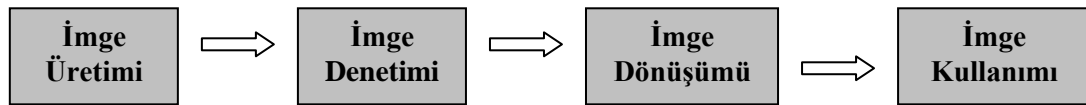
ASYA: *Bir paralelkenarda (bir süre sessiz kalıyor.) Şimdi buna ne desem diye düşünüyorum. Şu yazan açılar aynı çizgi üzerinde ya. Bir paralelkenarda işte (sağını karıştırıyor, sağa sola bakıyor.) Aynı kenar üzerindikiler yazsam olur değil mi? Aslında anladım ama nasıl ifade edeceğim bilemiyorum. Bir paralelkenarda aynı kenar üzerindeki açılar birbirine eşittir.*

Yukarıda da görüldüğü gibi öğrenciler, geometrik kavramları ve terimleri bildikleri halde sözel olarak açıklamada zorlanmışlardır. Ulaşılan bu sonuç, Otterburn ve Nicholson'un (1976) yaptıkları bir araştırmada öğrencilerin pek çok matematiksel terimi bildikleri fakat tam olarak ifade edemedikleri ve aynı zamanda öğretmenlerinin sıklıkla kullandıkları birçok matematiksel sözcüğü açıklamakta zorlandıkları, görüşlerini desteklemektedir. Geleneksel matematik öğretiminde, öğrencilerin ne metin okumalarına ne de konuşmalarına fırsat verilmektedir. Oysa NCTM'nin (1989) raporunda yer alan, matematik eğitimi ile ilgili genel amaçlardan biri de öğrencinin matematiksel konuşmayı öğrenmesiyle ilgilidir. Bu yüzden, öğrencilerin iç temsiller oluşturmasına imkan tanıyan sınıf içi diyaloglarda matematiksel dil kullanılması teklif edilmektedir. Straker'ın (1993) da belirttiği gibi öğretmenler, matematik ve geometri ile ilgili zorluk yaşayan öğrencilere daha çok kağıt ve kalemle yapacakları alıştırmalar vermektedir; oysa öğrencilerin geometri dersinde işlenen konularla ilgili konuşmaları ve tartışmaları bu zorlukları aşmalarına daha çok yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Elde edilen verilerin tamamı incelendiğinde, "formel sistemlere" giren gösterge türlerine en fazla başarı düzeyi yüksek öğrencide rastlanmıştır. Örneğin; Erdem birinci geometrik problemle uğraşırken, çizdiği çokgen şekilleri üzerine uyguladığı cebirsel işlemlerle ilgili konuşmalar sergileyerek ve kullandığı kurallarla ilgili açıklamalar yaparak formel sistemlere giren temsiller üretmiştir. Başarı düzeyi yüksek olan Erdem'in, kullandığı formül ve sembollerin anlamlarını sorgulayarak hareket ettiği tespit edilmiştir. Ulaşılan sonuç; Goldin ve Kaput'un (1996) "*Öğrencilerin problem çözerken formel durumları semantik olarak incelemesi, onların içselleştirme sürecine girdiğini gösterir.*" görüşünü desteklemektedir. Ayrıca öğrencilerin ürettiği formel temsiller, cebirsel düşünce biçimleriyle ilgili derin bilgilere ulaşılmasını kolaylaştırmıştır (Dindyal, 2003; Goldin, 1998a; Davis, 1997). Öğrencilerin problem

çözme sırasında geometrik ve cebirsel düşünceleri birleştirerek ürettikleri farklı temsil türleri sayesinde, problem çözme becerileri ve geometrik kavramlarla ilgili zihinsel süreçleri hakkında daha fazla fikir edinilebileceği düşünülmektedir.

Uygulama sorularının tümünde de katılımcılar “imgesel sistemlere” giren göstergeleri sergileyerek iç temsiller üretmişlerdir. Geometrik problemleri okuduklarında, problemde bulunan geometrik kavramları zihinlerinde öncelikle canlandırdıklarını belirtmişlerdir. Örneğin; üçüncü geometrik problemde, dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içine dikilecek ağaç denildiği için katılımcılar zihinlerinde dikdörtgen şeklinde bir bahçe ve bu bahçenin içinde duran bir ağacın canlandığını ifade etmişlerdir. Daha sonra zihinlerinde oluşan bu şekli kağıt üzerine aktararak “*imge üretimi*”; ürettikleri imgeleri soruya cevap vermek için incelerken “*imge denetimi*”; soruda verilen bilgilerden ya da geçmiş bilgilerinden yararlanarak şekil üzerine değişiklik uyguladıklarında “*imge dönüşümü*” ve bu imgeyi soruya cevap vermek için kullandıklarında da “*imge kullanımı*” yaparak iç temsiller üretmişlerdir. Öğrenciler, problemlerle uğraşırken imgesel temsilleri genel olarak şekil 5.1’deki sırada oluşturmuşlardır. Ortaya çıkan bu sonuç, Kosslyn’in (1980) çalışmasında belirttiği imgesel sistemler içinde evrelerin hiyerarşik olduğuna dair görüşünü desteklemektedir. İmgesel sistemlere giren göstergeler aracılığıyla, öğrencilerin sözel ve formel olmayan temsil üretme süreçlerini incelemek mümkün olmuştur (Goldin, 1998a).

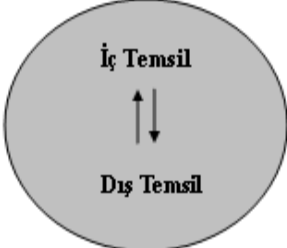


Şekil 5.1: İmgesel Temsillerin Oluşum Sırası

- **Geometrik problemlerle uğraşırken öğrencilerin oluşturduğu iç ve dış temsiller arasında nasıl bir etkileşim vardır?**

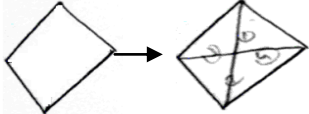
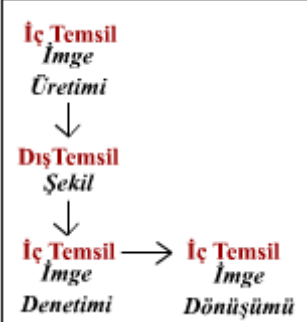
Katılımcıların oluşturduğu temsiller arasındaki etkileşimlerin incelenmesi sonucunda, Tablo 5.1’de görüldüğü gibi temsiller arasında yatay ve dikey boyutlu olmak üzere iki tür etkileşim olduğu ortaya çıkmıştır. Dikey boyutlu etkileşim; öğrencilerin farklı temsil türleri arasında geçiş yaptıkları esnada, yatay boyutlu etkileşim ise aynı tür temsiller arasında geçiş yaptıklarında ortaya çıkmıştır. Ayrıca problemlerin çözümü esnasında, öğrencilerin geçiş yaptığı temsiller arasında hem yatay hem de dikey boyutlu etkileşimin ardı ardına gözlemlendiği durumlara da rastlanmıştır. Elde edilen sonuç, Goldin ve Kaput (1996) ile Pape ve Tchoshonov’un (2001) temsiller arasında karşılıklı bir etkileşimin varlığına dair görüşünü desteklemektedir. Bu görüşlere göre, öğrencilerin ürettikleri her temsil oluşturacakları yeni temsilleri etkilemektedir.

Tablo 5.1: Öğrencilerin Oluşturduğu Temsiller Arasındaki Etkileşimler

ORTAYA ÇIKAN ETKİLEŞİMLER TÜRLERİ	ETKİLEŞİM TÜRLERİYLE İLGİLİ BİLGİLER
	<p><u>Dikey Boyutlu Etkileşim</u> Öğrenciler farklı tür (iç temsil-dış temsil) temsiller arasında geçiş yaptıklarında, temsiller arasında dikey boyutlu bir etkileşim ortaya çıkmıştır. Örneğin,, öğrenciler formel olarak içselleştirdikleri durumları cebirsel ifadeler aracılığıyla dışsallaştırmışlardır.</p>
	<p><u>Yatay Boyutlu Etkileşim</u> Öğrenciler aynı tür (iç temsil-iç temsil/ dış temsil-dış temsil) temsiller arasında geçiş yaptıklarında, temsiller arasında yatay boyutlu etkileşim ortaya çıkmıştır. Örneğin; öğrenciler zihinlerinde bir dikdörtgen imgesi oluşturduktan sonra bu imgeyi soruya cevap vermek için inceleme başladıkları esnada imge üretiminden imge denetimine geçtikleri için temsiller arasında yatay boyutlu etkileşim oluşmuştur.</p>

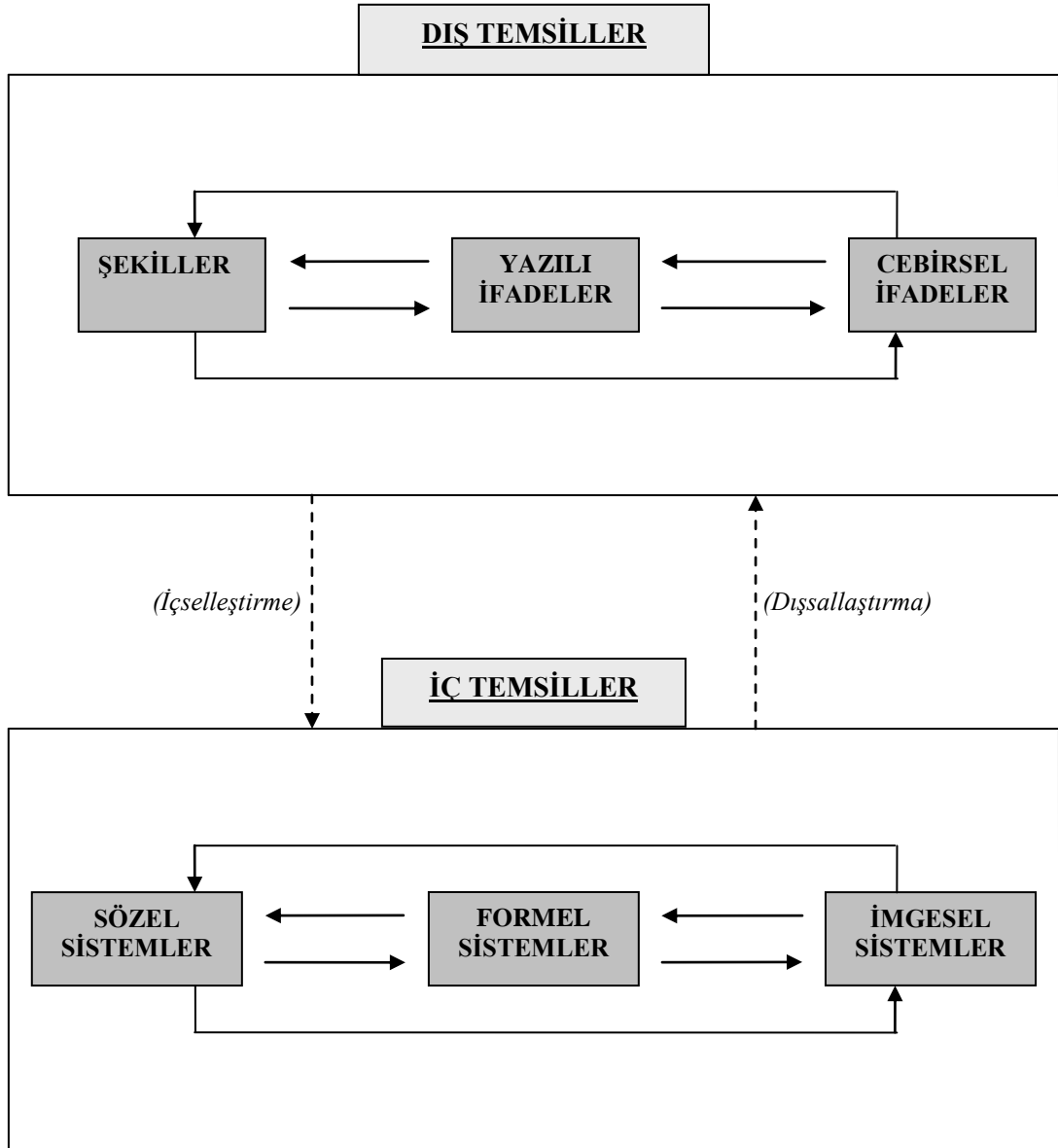
Tablo 5.1’de verilen etkileşim türlerini daha açık hale getirmek için Kerem, birinci geometrik problemle uğraşırken ürettiği bazı temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşimler aşağıda örnek olarak verilmiştir.

Tablo 5.2: Temsiller Arasındaki Etkileşim Sürecini Örnekleyen Veri Kesiti

<p>(Kerem öncelikle soruyu hiç duraksamadan sonuna kadar okuyor.) “<i>Hum üçgeni vermiş zaten. Dörtgen için de kenar sayısı dört olacak. Bunu bir çizelim. Şimdi üçgen sayısını bulalım. Nerden köşegenleri çizsek (diyerek şekli inceledi.). dört tane üçgen oluyor.</i>”</p> 	<p><u>İç Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • İmgesel Sistemler <ul style="list-style-type: none"> ✓ İmge Üretimi (Gösterge 3.1.2.1) <p><u>Dış Temsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Şekil <p><u>İçTemsil</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • İmgesel Sistemler <ul style="list-style-type: none"> ✓ İmge Denetimi (Gösterge 3.1.2.1) ✓ İmge Dönüşümü (Gösterge 3.1.3.3) 	
--	--	---

Tablo 5.2’de görüldüğü gibi Kerem, soruda istenen çokgenleri çizerken uzun süreli bellekte var olan dörtgen şeklini, çalışan belleğe alarak imge üretimini gerçekleştirmiştir. Ardından, bu imgeyi kağıt üzerine aktararak dış temsil üretmiştir. Çizdiği dörtgenin bir köşesinden geçecek köşegenleri ilk bakışta belirleyemeyen katılımcı, imge denetimi yapmaya başlamıştır. Daha sonra, köşegenleri çizip şekil üzerinde değişiklik yaptığı için de imge dönüşümünü gerçekleştirmiştir. Bu da temsiller arasında hem yatay hem de dikey boyutlu etkileşimlerin bir arada bulunabileceğini göstermiştir. Oluşan etkileşimler, öğrencinin geometrik kavramlarla uğraşırken ne gibi aşamalardan geçtiğini ve neler düşündüğünü ortaya koymakta yardımcı olmuştur. Bu yüzden, etkileşim süreçlerinin anlaşılması, öğrencilerin matematiksel ve geometrik kavramlarla ilgili düşünsel süreçlerini anlamak adına çok önemlidir (Steffe, 1991; Pavio, 1971).

Araştırma sonuçları göstermiştir ki verilen geometrik problemlere, soru içinde kullanılan ya da oluşturulan temsil türlerine, bu problemleri çözen öğrencilere ve öğrencilerin geçmiş tecrübelerine göre temsiller arasındaki etkileşimlerde farklılıklar ortaya çıkmıştır. Genel anlamda, öğrencilerin geometrik problemlerle uğraşırken oluşturdukları temsiller ve bu temsiller arasındaki muhtemel etkileşimler Şekil 5.2’de verilmiştir.



Şekil 5.2: Öğrencilerin Geometrik Problemlerle Uğraşırken Ürettikleri Temsiller ve Bu Temsiller Arasındaki Etkileşimler

Öğrenciler geometrik problemlerde verilen bilgileri zihinlerinde anlamlandırmaya çalıştıkları esnada, geometrik kavramları algılama ve problem çözüme adına İçselleştirme sürecine girmişlerdir. Fakat verilen bilgileri kullanarak bir şekil çizdiklerinde, bir cebirsel ya da yazılı ifade oluşturduklarından dışsallaştırma sürecine girmişlerdir. Örneğin; öğrenciler üçüncü geometrik problemde dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içine dikilecek ağacın yerini belirledikleri esnada zihinlerinde dikdörtgen şeklinde bir bahçe canlandığını ifade etmişlerdir. Bu esnada öğrenciler bir içselleştirme

sürecine girmişlerdir. Hayal ettikleri dikdörtgen bahçeyi kağıt üzerine şekil çizerek aktardıkları sırada ise bir dışsallaştırma sürecine girmişlerdir. Yani, öğrenciler bir anlamda içselleştirdikleri sürecin etkisiyle dışsallaştırma sürecine girmişlerdir. Ulaşılan bu sonuç; Pape ve Tchoshanov'un (2001) oluşturulan temsil türlerinin birbirini etkileyebileceğine dair görüşünü desteklemektedir.

Öğrencilerde gözlenen temsiller arasındaki etkileşimler, onların soruda verilen ifadeleri nasıl algıladıklarını ve kavramlarla ilgili okulda ne öğrendiklerini yansıtmıştır. Bu yüzden, sadece dış temsillere odaklanarak araştırma yapmak, öğrencilerin zihinsel süreçleriyle bilgi edinme konusunda yetersiz kalmaktadır. Lesh, Post ve Behr (1987) çalışmalarında belirttiği gibi çoklu temsiller arasındaki farklı ilişkilerin incelenmesiyle, öğrencilerin geometrik kavramları algılama süreçleriyle ilgili daha fazla bilgi edinilebilir.

5.2. ÖNERİLER

Araştırmada elde edilen bulgular ve sonuçlara dayalı olarak, temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşimlerin incelenmesiyle ilgili öneriler aşağıdadır.

- Araştırma sonucunda görülmüştür ki öğrenciler, geometrik sorularda cebirsel ve yazılı ifadelerin hazır olarak verilmesine alışık olduklarından, bu temsilleri üretmede zorluklar yaşamışlardır. Örneğin; katılımcılar ikinci geometrik problemi çözerken, “*Teorem*” ile ne demek istendiğini anlamamış ve verilen sembolik ifadeleri yazılı biçimde aktaramamışlardır. Bu nedenle, yapılacak araştırmalarda öğrencilerin cebirsel ve yazılı ifadeler üretmesine ortam oluşturan dersler tasarlanabilir. Bu ders tasarımlarında, cebirsel ve geometrik düşünce öğrencilere aynı anda kullanılarak, onlardan düşüncelerini matematiksel bir dil kullanarak yazılı biçimde aktarmaları beklenebilir. Bu sayede, öğrencilerin matematiksel dili kullanmaya alışarak, geometrik kavramların birçok yolla ifade edilebileceğini farkına varma fırsatı yakalamış olacakları düşünülmektedir.

- Yapılan bu çalışmada, sesli düşünme metodu kullanıldığından öğrencilerin geometrik kavramları açıklarken ana dillerindeki yeterlikleri de ortaya çıkmıştır. Sözel sistemlere giren göstergeler incelendiğinde, öğrencilerin matematiksel sembolleri ve düşünceleri sözel olarak açıklamada zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğrencilere yaptıkları işlemlerle ilgili sözel açıklamalar yaparken neden zorlandıkları sorulduğunda; sebebinin dersanelerde ve ÖSS’de yapılan sınavların çoktan seçmeli olmasıyla ilgili olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca geometri derslerinde, sürekli olarak öğretmen açıklama yaptığından kendilerini sözel olarak aktif olmadıklarını açıklamışlardır. Oysa matematikte doğru sözel açıklamalar yapmak çok önemlidir (Ellerton, 1989; Orton ve Frobisher, 1996). Çünkü bir sözcüğün yeri yanlış olduğunda, ifade edilmek istenen matematiksel durum, farklı bir anlama gelebilir. Hazırlanmakta olan geometri dersleri öğretim programlarında, konuşma ve tartışmaya fırsat veren etkinliklere yer verilmesinin, öğrencilerin matematiksel dili geliştirmelerine ve matematiksel kavramları daha derin anlamalarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.
- Burada, öğrencilerin çokgenlerle ilgili kavramlarını içeren geometrik problemleri çözerken ürettikleri temsiller ve bu temsiller arasındaki etkileşimler incelenmiştir. Yapılacak araştırmalarda, matematiksel veya içeriğinde yer alan diğer konuları içeren etkinliklerle öğrencilerin temsil üretme süreçleri ele alınabilir. Ayrıca üniversitede işlenen Analiz, Analitik Geometri gibi derslerde temsiller aracılığıyla öğrencilerin matematiksel kavramları algılama süreçleri incelenebilir.
- Yapılan araştırmada 11. sınıf öğrencileriyle çalışılmıştır. Fakat aynı çalışma, ilköğretim ya da üniversite grubundaki öğrencilerle de yapılabilir. Ülkemizde K-12 (ana okul-ortaöğretim) grubundaki öğrencilere belli aralıklarla uygulanacak temsil kullanma ve üretme süreçlerini ölçen bir test, onların matematiksel kavramlarla ilgili algılama biçimleri ve temsiller arasındaki geçişte ne kadar başarılı olduklarını görmemizi sağlayabilir. Örneğin; bu test sırasıyla ana okul, ilköğretim ve ortaöğretim sonrasında uygulanırsa öğrencilerin gelişim süreçlerine göre temsilsel düşünme

becerilerinin nasıl geliştiğiyle ilgili fikir edinilebileceği düşünülmektedir. Bu konuda edinilecek fikirler, eğitim- öğretim programları ve öğretmenlerin ders tasarımları sırasında onlara yardımcı olabilir. Ek olarak; bu testte edinilen veriler sayesinde ülkedeki okullara ve bölgelere (İç Anadolu, Marmara,...) göre öğrenci gruplarının temsilsel beceri açısından ne derece farklılık gösterdiği belirlenebilir. Belirlenen farklılıkların yardımıyla, okul türleri ve bölgelere göre dersler tasarlanarak, öğretim daha etkin hale getirilmeye çalışılabilir.

- Özellikle matematik öğretmenliği bölümünde okuyan öğretmen adaylarının temsilsel düşünme süreçlerinin incelenmesi, onların iş hayatına atıldıklarında iyi bir öğretmen olmalarını sağlamak adına önem taşımaktadır. Bu nedenle araştırmacılara; öğretmen adaylarında temsil üretme, temsiller arasında geçiş gibi süreçlerin ne düzeyde olduğunu araştırmaları tavsiye edilmektedir. Yapılacak böyle bir araştırmanın sonuçları, üniversitedeki akademisyenler ve eğitimciler açısından büyük önem taşımaktadır. Çünkü yetiştirilen öğretmen adaylarının geometrik ve matematiksel kavramları ifade etmede ne derece başarılı olduklarının anlaşılması, akademisyenlerin yeni araştırmalar ve daha etkili dersler tasarımlarına katkılar sağlayabilir.
- Bu çalışmada, sadece üç katılımcıyla sınıftan ayrı bir ortamda zaman kısıtlaması olmadan çalışılmıştır. Öğrencilerin ürettikleri temsiller ve bunlar arasındaki etkileşimlerin anlaşılması adına yapılabilecek araştırmalarda, hem katılımcı sayısı artırılabilir hem de uygulama yaparken sınıf ortamı tercih edilebilir. Bu noktada, “*Öğrencilerin iç temsil üretme süreçlerinin sınıf ortamında keşfedilmesi zor olabilir*” gibi düşünceler akla gelebilir. Fakat işbirlikçi öğrenmeye göre hazırlanan bir sınıf ortamında öğrencilerin temsiller arasında kurdukları etkileşimler incelenirse, bu çalışmanın eğitime sağlayacağı katkının ne olacağı soru işaretidir. Çünkü işbirlikçi öğrenmede grupta çalışma yapılmaktadır. Grupta yapılan bir çalışmada sadece bir öğrencinin değil gruptaki tüm öğrencilerin temsil üretme ve temsiller arasındaki geçişleri izlenebilir. Öğrencilerin birbirini matematiksel ve geometrik kavramlarla uğraşırken ya da bir problemi çözerken nasıl

etkiledikleriyle ilgili birçok fikir edinilebilir. Ek olarak; gruplar arasında fikir alışverişi yaptırılırsa öğrencilerin zihinlerindeki matematiksel dünyanın zenginleşeceği söylenebilir. Bu sayede, öğrenciler matematik derslerini formüllerden ibaret korkunç dersler olarak değerlendirmek yerine, eğlenceli ve yaratıcı düşünceye açılan pencereler olarak görebilirler.

- Çalışmada zaman sorunu olması nedeniyle, Goldin'in (1998a) temsil modelindeki “*izleme-kontrol etme-uygulama sistemi*” ve “*duygusal sistemler*” ele alınmamıştır. Goldin (2002; 2004) yaptığı çalışmalarda, problem çözme sürecini anlama adına duyguların tıpkı bir dil gibi hizmet ettiğini ifade etmektedir. Goldin, öğrencilerin problem çözme sırasında değişen duyguları incelenmesi yoluyla elde ettiği tecrübelerin ışığında zihinsel konfigürasyonları belirlemenin daha kolay olacağını ifade etmiştir. Ayrıca, belirlenen zihinsel konfigürasyonların problem çözme ve matematiksel anlamayı güçlendirme adına büyük önem taşıdığını savunmaktadır. Bu nedenle, yapılacak yeni araştırmalarda öğrencilerin ürettiği “*duygusal temsiller*” incelenerek ortaya çıkan temsiller arasındaki etkileşimlere bakılabilir. Ek olarak imgesel sistemler üzerinde derinlemesine inceleme yapmak isteyen araştırmacılar, Kosslyn'in (1980) teorisine göz atarak öğrencilerin zihinsel süreçlerini araştırabilirler.
- Aşağıda araştırmacılara üzerinde düşünmeleri ve araştırmaları için verecek sorulara yer verilmiştir. Bu soruların araştırılmasının, matematik ve geometri eğitiminin etkinliğini artırma adına önemli olduğu düşünülmektedir.
 - ❖ Öğretmenler, öğrencilerine temsil kullanma süreçlerinde daha iyi nasıl yardımcı olabilirler?
 - ❖ Öğrencilerin ürettikleri temsil türleri, matematik veya geometri içeriğine göre farklılık gösterir mi?
 - ❖ Öğrencilerin matematiksel kavramlarla ilgili algıları temsiller aracılığıyla nasıl ortaya koyulabilir?
 - ❖ Problem çözme sürecini daha etkin hale getirmek için temsil sistemleri nasıl geliştirilebilir?
 - ❖ Temsiller, öğrencilerin problem çözme süreçlerini nasıl etkiler?

- ❖ Duygusal temsillerin problem çözüme süreci üzerindeki etkileri nelerdir?
- ❖ Öğrencilerin ürettiği iç temsiller, oluşturacakları dış temsilleri belirleme açısından önemli midir?
- ❖ İç temsiller daha sistematik bir yapıda nasıl tarif edilebilir?
- ❖ Öğrencilerin matematiksel kavram yanılgılarını belirlemede temsillerden nasıl yararlanılabilir?
- ❖ Öğrencilere yöneltilen soruların zorluk derecesi; onların temsil üretme, kullanma ve temsiller arasında geçiş yapma süreçlerini nasıl etkilemektedir?
- ❖ Üstün yetenekli öğrenciler ile normal düzeydeki öğrencilerin temsiller arasında kurduğu etkileşim süreçlerinin kıyaslanması eğitime nasıl bir katkı sağlayabilir?

KAYNAKÇA

- Arnheim, R. (1969). *Visual thinking*. Berkeley: University of California Press.
- Altunışık, R., Coşkun, R., Yıldırım, E., & Bayraktaroğlu, S. (2002). Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri (2. Baskı). Adapazarı: Sakarya Kitabevi.
- Atilgan, H. (Editör). (2006). *Eğitimde Ölçme ve Değerlendirme*, Ankara: Anı Yayıncılık.
- Bali, G. Ç. (2002). *Matematik Öğretiminde Dil*. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23, 57–61
- Blanton, M. & Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77.
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1992). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods*. Boston: Allyn&Bacon.
- Borba, M., & Confrey, J. (1993). *The role of teaching experiment: Students' construction of transformations in a multiple representational environment*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA.
- Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 37(4), 663–689.
- Bruner, J. S. (1960). On learning mathematics. *The Mathematics Teacher*, 4, 129–136.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Belknap Press of Harvard University.
- Chadwick, B. A., Bahr, H. M. & Albrecht, S. L. (1984). *Social Science Research Methods*, Hillsdale, NJ: Prentice Hall Press.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2–33.
- Collins, A.B. (1999). *A case study of instructional supervision at a private school*, Doctoral Thesis, ODTÜ, Ankara.

- Cramer, K., & Bezuk, N. (1991). Multiplication of fractions: teaching for understanding. *Arithmetic Teacher*, 39(3), 34–37.
- Cramer, K., & Karnowski, L. (1995). The importance of informal language in representing mathematical ideas. *Teaching Children Mathematics*, 1(6), 332–335.
- Çıkla, O. A. (2004). *The Effect of Multiple Representations-Based Instruction on Seventh Grade Students' Algebra Performance, Attitude Toward Mathematics, and Representations Preference*. Unpublished doctoral thesis, Middle East Technical University, Ankara.
- Davis, R. B. (1997). Alternative learning environments. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(2), 87–93.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y.S. (1998). *The Landscape of Qualitative Research: Theories and Issues*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. Great Britain: Anchor Press, Hutchinson Educational.
- Dindyal, J. (2003). *Algebraic Thinking in Geometry at High School Level*, Unpublished Doctorate Thesis, Illinois State University, USA.
- diSessa, A. A., & Sherin, B. (2000). Meta-representation: An introduction. *Journal of Mathematical Behavior*, 19(4), 385–398.
- diSessa, A. A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In D. Gentner & A. Stevens (Eds.), *Mental models* (p. 15–33). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Eds.), *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics* (p. 109–123). New Jersey.
- Ebel, R. L. (1972). *Essential of Educational Measurement*. (Second Edition). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Edwards, L. D. (1998). Embodying mathematics and science: Microworld as representations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 53–78.
- Eisner, E. W. (1997). The promise and perils of alternative forms of data representation. *Educational Researcher*, 26(6), 4–10.

- Ekiz, D. (2003). *Eğitimde Araştırma Yöntem ve Metodlarına Giriş*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Ellerton.N.F.(1989). The interface between mathematics and language. *Australian Journal of Reading*. 12(2) 92-102.
- Erbilgin, E. (2003). *Effects of Spatial Visualization and Achievement On Students' Use of Multiple Representations*. Unpublished master's thesis, The Florida State University, USA.
- Erkan, S. ve Gömleksiz, M. (Editörler). (2008). *Eğitimde Ölçme ve Değerlendirme*, Ankara: Nobel Yayıncılık.
- Erlanson, D. A., Haris, E. L. Skipper, B. L., & Allen, S. T. (1993). *Doing naturalistic inquiry: A guide to methods*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Gagatsis A., & Elia, I. (2004). *The Effect of Different Representation on Mathematical Problem Solving*. Paper presented at the Prooceding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2, 447–454.
- Glesne, C. (1998). *Becoming Qualitative Researchers: an introduction* (Second Edition). USA: Addison Wesley Longman.
- Goldin, G. A. (1990). Epistemology, constructivism, and discovery learning mathematics. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Methematics* (p. 31-47). Reston, VA: NCTM.
- Goldin, G. A., & Kaput, J. J., (1996), A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In Steffe L. & Nesher, P. (Eds), *Theories of Mathematical Learning* (p.397–431). New Jersey, LEA: Mahwah.
- Goldin, G. A., & Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 1–4.
- Goldin, G. A. (1998a). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 137–165.
- Goldin, G. A. (1998b). The PME working group on representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 283–301.
- Goldin, G. A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical thinking and learning*, 2(3), 209–219.

- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (p. 1–24). Reston: NCTM Publications.
- Goldin, G. A. (2004). Representations in school mathematics: a unifying research perspectives. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (p. 275–285). Reston, VA: NCTM.
- Herman, M. F. (2002). *Relationship of college students' visual preference to use of representations: Conceptual understanding of functions in algebra*. Unpublished PhD dissertation, Columbus: Ohio State University.
- Janvier, C., Girardon, C. & Morand, J. (1993). Mathematical Symbols and Representations. In P. S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (p. 79–102). Reston, VA: NCTM.
- Janvier, C. (1987a). Representations and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics* (p. 67–73). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Janvier, C. (1987b). Representation system and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics*, (p. 19–27). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Janvier, C. (1987c). Conceptions and representations: The circle as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics* (p. 147–159). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 79–103.
- Kamii, C., Kirkland, L. & Lewis, B. A. (2001). Representation and Abstraction in Young Children's Numerical Reasoning. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 24-35). Reston: NCTM Publications.
- Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p. 19–26). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of*

- Algebra* (p. 167–194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Eds.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (p. 53–74). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kaput, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics in Mathematics as a Scientific Discipline* (p. 379–397). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Keller, B. A. & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal in Mathematics Education Science Technology*, 29(1), 1–17.
- Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kosslyn, S. M. (1994). *Image and brain: The resolution of the imagery debate*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Kosslyn, S. M., Thompson, W. L., Ganis, G. (2006). *The Case for Mental Imagery*. New York: Oxford University Press.
- Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: considerations for identification, diagnosis and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G. Kantowski (Eds.), *Applied Mathematical Problem Solving*. Ohio: ERIC/SMEAC.
- Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (p. 263–343). New York: Academic Press.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (p. 33–40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. & Kelly, A. E. (1997). Teachers' evolving conceptions of one-to-one tutoring: A three-tiered teaching experiment. *Journal of Research in Mathematics Education*, Volume 28, 398–430.
- Lester, F. K. (1980). Research on Mathematical Problem Solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*, (p.286–323). Reston, WA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Liedke, W.W. ve Sales, J. (2001). *Writing tasks that succeed*. Mathematics Teaching in the Middle School (6),350 -355.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.
- McKendree, J., Small, C. & Stenning, K. (2002).Kritik düşünmenin öğretimi ve öğreniminde temsilin rolü. *Educational Review*, 54 (1),1-10.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standarts for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Principles and standarts for school mathematics discussion*. draft Standarts2000[On_line]. Available:hptt://www.nctm.org/standarts2000/download.html.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM Publications.
- Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*, NJ: Englewood Cliffs.
- Orton, A. and Frobisher, L. (1996). *Insights into teaching mathematics*. Cassell. London.
- Otterbum, M.K. and Nicholson, A.R.(1976). The language of CSE mathematics, *Mathematics in School*. (5),18-20.
- Owens, K. D., & Clements, M. A. (1997). Representations in spatial problem solving in the classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 197-218.
- Özgün-Koca, S. A. (1998). Students' use of representations in mathematics education. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, NC: Raleigh.
- Palmer S. E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In Rosch, E. & Lloyd, B. B. (Eds.), *Cognition and categorization* (p.259-303). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding, *Theory into Practice*, 40(2), 118-127.

- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research and Evaluation Methods* (Third edition) Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.
- Porzio, D. (1999). Effects of differing emphases in the use of multiple representations and technology on students' understanding of calculus concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(3), 1-29.
- Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Seeger, F., Voight, I. & Werschescio, V. (1998). Representations in the mathematics classroom: reflections and constructions. In F. Seeger, I. Voight, & V. Werschescio, (Eds.). *The Culture of the Mathematics Classroom* (p. 308–343). Cambridge: Cambridge University Press.
- Steffe, L. P. (1991), The constructivist teaching experiment: Illustrations and Implications, In. Von Glaserfeld (Eds), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (p.177- 194), Netherlands: Kluwer Publishers
- Straker, A. (1993). *Talking Points in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Strauss, A. L., & Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques*. Newbury Park, CA: Sage Publications
- Swafford, J. O., & Langrall, C.W. (2000). Grade-6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 89–112.
- Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 117–133.
- Turgut, M. F. (1997). *Eğitimde Ölçme ve Değerlendirme Metotları*. Ankara: Gül Yayınevi
- van Someren M. W., Barnard Y. F. & J. A. C. Sandberg, (1994). *The Think Aloud Method: A practical guide to modelling cognitive processes*, London: Academic Pres.

- Vergnaud, G. (1987). Conclusion. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p.227–232). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- von Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any theory of representation In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (p. 215–225). Hillsdale, NJ: Lawrence
- Wileman, R. (1980). *Exercises in visual thinking*. New York: Hastings House.
- Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(4), 431–466.
- Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. (5. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, A. ve Simsek, H.,(2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. (6. basım). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yılmaz, H. (2002). *Eğitimde Ölçme ve Değerlendirme*, Ankara: Çizgi Kitabevi Yayıncılık.
- Yin, R. K. (2003). *Case Study Research : Design anh Methods* (Third Edition). Applied Social Research Methods Series (Volume 5). New Delhi: Sage Publications

EKLER

EK-1: KATILIMCI BELİRLEME SINAVI

Adınız ve Soyadınız:

Sevgili öğrenciler;

Size dağıtılan kâğıtta, bu yılın birinci döneminde yer alan geometri dersinde işlediğiniz çokgenlerle ilgili yedi soru bulunmaktadır. Sizlerin sorularda yer alan geometrik kavramlara ve bu kavramlarla birlikte soruları çözerken kullanacağınız tablo, grafik, sembol gibi gösterimlere ilişkin bakış açınızı benimle paylaşmanız **çalışmalarım için hayati önem** taşımaktadır. Lütfen tüm soruları ayrıntılı olarak cevaplamaya çalışınız.

Süreniz 60 dakikadır.

Başarılar...

SORULAR

1. $ABCD$ paralelkenarının köşegenleri AC ve DB ile gösterilmiştir. Bu köşegenler P noktasında kesişiyorlar. Eğer $|AP| = 3a + 18$, $|AC| = 12a$, $|PB| = a + 2b$ ve $|PD| = 3b + 1$ ise a , b ve $|DB|$ yi bulunuz.

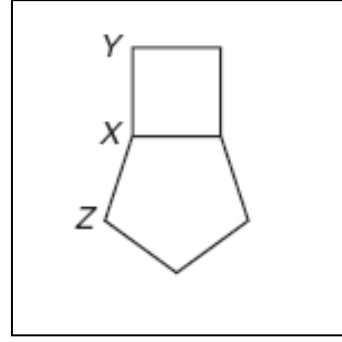
- a) Yukarıdaki problemi çözerken attığınız adımları,
✓ neye göre belirlediğinizi,
✓ bu adımlar arasındaki geçişleri hangi amaçla gerçekleştirdiğinizi her bir adım için yazınız.

b) Ulaştığınız sonuçların doğruluğundan nasıl emin oldunuz? Açıklayınız

c) Soruyu çözerken çizim yapmanızın soruyu çözmenizde ne gibi bir etkisi olmuştur?

d) Sizin için sembolik ifadelerin mi yoksa tablo, grafik, diyagram ve çizim gibi gösterimlerin yorumlanması mı daha kolaydır? Tercihinizin nedenlerini açıklayınız.

2. Yandaki şekilde, ortak köşeleri X ile gösterilen bir kare ve düzgün bir beşgen yer almaktadır. Bir köşesi X olan üçüncü bir düzgün çokgenin kenarlarından biri XY ve diğeri XZ ile gösterilmişse, üçüncü çokgen kaç kenarlıdır?



- Yukarıdaki problemi çözerken attığımız adımları,
- ✓ neye göre belirlediğinizi,
- ✓ attığımız adımlar arasındaki geçişleri hangi amaçla gerçekleştirdiğinizi her bir adım için yazınız.

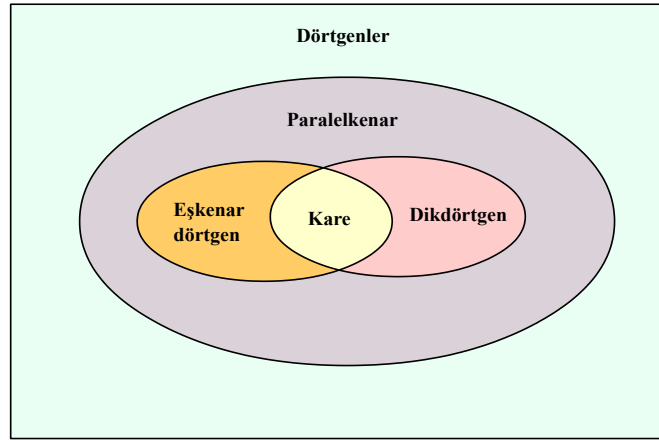
- Ulaştığımız sonuçların doğruluğundan nasıl emin oldunuz? Açıklayınız.

3. Ayşe ile Merve sınıf arkadaşlarıdır ve Ayşe, “herhangi bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarının birleştirilmesi ile oluşan yeni dörtgeninin paralelkenar” olduğunu iddia etmektedir. Merve de bu düşünceye ısrarla karşı çıkmaktadır.

a) Sizce kim haklıdır? İkna için yapacağınız her türlü düşünce ve eylemi paylaşınız.

b) Herhangi bir dörtgen yerine özel olarak deltoid alındığında oluşan yeni dörtgen çeşidinin ne olabileceği ile ilgili düşünceleriniz nelerdir? Ayrıntılı olarak yazınız.

4. Aşağıda yer alan Venn diyagramı, yapacağınız çizim ve tanımları kullanarak **a-b-c** şıklarında verilen durumların hangilerinin her zaman, hangilerinin bazı zamanlar doğru olduğuna karar veriniz. Hiçbir zaman doğru olmayan şık veya şıklar var mıdır?



a) Soruda yer alan diyagramı kullanarak **“Her paralelkenar aynı zamanda bir kare midir?”** sorusunu cevaplayınız ve cevabınızı açıklayınız.

- Aynı soruyu soruda geçen “paralelkenar” ve “kare” kavramlarının tanımını ve özelliklerini kullanarak cevaplamaya çalışınız.

b) Soruda yer alan diyagramı kullanarak **“Her kare aynı zamanda bir eşkenar dörtgen midir?”** sorusunu cevaplayınız ve cevabınızı açıklayınız.

- Aynı soruyu soruda geçen “kare” ve “eşkenar dörtgen” kavramlarının tanımını ve özelliklerini kullanarak cevaplamaya çalışınız.

c) Soruda yer alan diyagramı kullanarak **“Her dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenar mıdır?”** sorusunu cevaplayınız ve cevabınızı açıklayınız.

- Aynı soruyu soruda geçen “dikdörtgen” ve “paralelkenar” kavramlarının tanımını ve özelliklerini kullanarak cevaplamaya çalışınız.

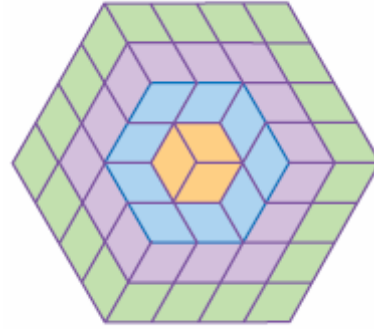
5. Belediye, kenarlarının uzunlukları 14 m ile 40 m olan dikdörtgen şeklinde bir oyun sahasının etrafına 6 metre genişliğinde taş döşenmesine karar verilmiştir. Buna göre taş döşemesinin yapılacağı alan kaç metrekaredir?

- Yukarıdaki problemi çözerken attığınız adımları,
✓ neye göre belirlediğinizi,
✓ attığınız adımlar arasındaki geçişleri hangi amaçla gerçekleştirdiğinizi her bir adım için yazınız.

- Ulaştığınız sonuçların doğruluğundan nasıl emin oldunuz? Açıklayınız.

6. Aşağıdaki şekil birim küplerden oluşmuştur ve renkler de oluşturmada atılan adımları temsil etmektedir. Yani sarı kısım birinci, mavi kısım ikinci, eflatun kısım üçüncü ve yeşil kısım dördüncü adımı göstermektedir. Tabloda ise adım sayısı ile o adımda görünen birim küpün yüz sayısı yazılmıştır. Buna göre tabloyu tamamlayınız.

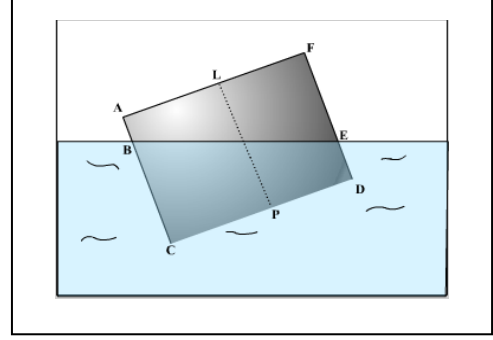
Adım sayısı	Adımda görünen yüz sayısı
1	
2	
3	
4	
5	
6	
x	



a) Adım sayısı ile yüz sayısı arasında bir ilişki vardır. Tablodaki sayılar arasındaki örüntüyü temsil eden bağıntıyı (n.adım için) sembolik olarak ifade ediniz.

b) Sembolik olarak ifade ettiğiniz bu bağıntıyı sözel olarak yazınız.

7. Yandaki şekil, suya düşen bir homojen metal levhaya aittir. Levhanın ağırlık merkezi LP doğru parçası üzerindedir. Eğer bu ağırlık merkezi su seviyesinin altında ise levha batacak aksi taktirde yüzecektir. Ek olarak, $5|AB| = |BC|$ olduğu veriliyor. Tüm bu verilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



a) Levhanın yukarıdaki durumdayken batacağı anlaşılırsa,

$$i) |FE| < |BC| \quad ii) |FE| = |BC| \quad iii) |FE| > |BC|$$

durumlarından hangisinin doğru olduğunu nedenleriyle birlikte açıklayınız.

b) Levhanın ağırlık merkezinin su seviyesinde olduğunu varsayarsak,

$$\frac{A(BCDE)}{A(ABEF)} \quad \text{ve} \quad \frac{|ED|}{|KP|}$$

hakkında neler söylenebilir. Açıklayınız. (Levhanın ağırlık merkezini K olarak alınız.)

EK-2: SESLİ DÜŞÜNME PROTOKOLÜ

Sesli Düşünme Protokolü

Size bu yılın birinci dönemindeki geometri dersinde işlenen çokgenler konusu ile ilgili iki soru yöneltilecektir. Bizim için önemli olan düşüncelerinizi ayrıntılı bir şekilde çizerek veya sesli olarak paylaşmanızdır. Özellikle düşüncelerinizi sesli olarak paylaşmanız video kaydı için de önemlidir. Katkılarınızdan dolayı şimdiden teşekkür ederim.

Yukarıda yer alan bilgiler, katılımcılara kağıt halinde verilmeden önce sesli düşünme metoduyla ilgili detaylı bilgiler araştırmacı tarafından sözel olarak aşağıdaki gibi anlatılmıştır.

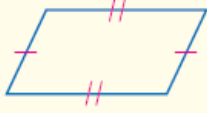

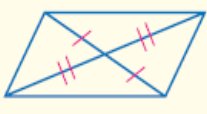

“Bu bir test değildir; lütfen rahat olun ve yaptığınıza odaklanın. Bu çalışmada önemli olan şey, sizin problem çözüm aşamanızda çeşitli temsilleri (tablo, grafik gibi) kullanma, üretme ve bunlar arasında geçişler yapma süreçlerinizde oluşan düşünme biçiminizin anlaşılmasıdır. Bu amaç doğrultusunda, sizden soruları okurken ve çözerken her zaman düşüncelerinizi sesli olarak ifade etmenizi bekliyorum. Sesli olarak düşünmekten kastım, soruyu okuma kısmından başlayıp bitirene kadarki her aşamada düşüncelerinizi, duygularınızı ve davranışlarınızı sözel olarak ifade etmenizdir. Sizden düşüncelerinizi bu şekilde açıklarken, zihninizdekileri yorumlayarak aktarmanızdan ziyade o an aklınızdan ne geçiyorsa onu söylemenizi istiyorum.”

“Çalışmada en önemli şey aklınızdan geçen her düşüncüyü anında söylemeniz ve bunu yaparken açık ve duyulacak bir tondaki sesle ifade etmenizdir. Eğer bir süre sessiz kalırsanız, “ Ne düşünüyorsun?” diyerek size düşüncelerinizi sesli biçimde ifade edeceğinizi hatırlatacağım. Benzer şekilde eğer sesiniz duyulmayacak şekilde az çıkıyorsa biraz yüksek sesle düşüncelerinizi ifade etmenizi rica edeceğim. Bunların dışında çalışmanın hiçbir kısmında size müdahale etmeyeceğim. Ayrıca problem çözme süreciniz sona erdiği zaman sizinle bu sürece ilişkin bir de görüşme yapacağım. Çalışma esnasında söyledikleriniz ses kaydedicisine alınacaktır ve araştırma tam anlamıyla bittiği zaman bu kayıtların tümü tarafımdan silinecektir.”

EK-3: ALIŞTIRMA ÇALIŞMALARI

SORU 1: Dikdörtgen şeklindeki çelik bir plaka, aynı hizada olacak şekilde dört yerinden delinmiştir. Birinci deliğin merkezi ile dördüncü deliğin merkezi arasında 35 mm mesafe vardır. İkinci ve üçüncü deliklerin merkezleri arasındaki mesafe, birinci ve ikinci deliğin merkezleri arasındaki mesafenin iki katıdır. Üçüncü ve dördüncü deliğin merkezleri arasındaki mesafe, ikinci ve üçüncü deliğin merkezleri arasındaki mesafeye eşittir. Buna göre, birinci deliğin merkezi ile üçüncü deliğin merkezi arasındaki mesafe sizce kaç milimetredir?

SORU 2: Aşağıda, ifadelerinde boşluklar olan, dörtgenlerle ilgili dört teorem verilmiştir. İfadelerin sağ taraflarında yer alan şekillerden faydalanarak boşlukları tamamlayınız.

TEOREM	ÖRNEK
Eğer bir dörtgenin,..... ise bu dörtgen bir paralelkenardır	
Eğer bir dörtgenin,..... ise bu dörtgen bir paralelkenardır	
Eğer bir dörtgenin,..... ise bu dörtgen bir paralelkenardır	
Eğer bir dörtgenin,..... ise bu dörtgen bir paralelkenardır	

Boşlukları doldurarak teoremlerin tam ifadelerini elde ettiniz. Şimdi de teoremleri matematiksel semboller kullanarak yeniden ifade ediniz.

EK-4: UYGULAMA SORULARI

Uygulama Sorusu 1

Siz, öğretmeninizle birlikte çeşitli çokgensel modellerle parke döşemektesiniz. Öğretmeniniz size çokgenlerle ilgili bir bilgiyi paylaşmak için aşağıdaki direktifleri veriyor:

- Üçgenden başlayarak çeşitli konveks çokgensel şekiller (dörtgen,beşgen,...) çiziniz.
- Çizdiğiniz bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenleri oluşturunuz.

1.Çokgenlerin içinde elde ettiğiniz üçgenlere de dikkat ederek aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Konveks Çokgen	Kenar sayısı	Üçgen Sayısı	İç Açılarının Ölçüleri Toplamı
Üçgen	3	1	180°
Dörtgen			
Beşgen			
Altıgen			
Yedigen			
...			
n-gen			

2.Çokgenin kenar sayısı ile iç açılarının ölçüleri toplamı arasında bir ilişki vardır. Tablodaki sayıların tümünü kapsayan kuralı n-kenar sayılı çokgen için cebirsel olarak ifade ediniz.

3.Cebirsel olarak ifade ettiğiniz bu ilişkiyi sözel olarak yazınız.

Uygulama Sorusu 2

Aşağıdaki tablonun “örnek” yazan kısmında, paralelkenarın özellikleriyle ilgili sembolik olarak ifade edilmiş bilgiler yer almaktadır. Verilen bu sembolik ifadeleri yorumladıktan sonra paralelkenarın özelliklerine dayanan teoremleri tablodaki “Teorem” kısmına sözel olarak ifade ediniz.

TEOREM	ÖRNEK	PARALELKENAR
Bir paralelkenarda ...	$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	<i>ABCD paralelkenarı</i>
Bir paralelkenarda ...	$\hat{A} \cong \hat{C}$ $\hat{B} \cong \hat{D}$	
Bir paralelkenarda ...	$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$ $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ $m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$ $m(\hat{D}) + m(\hat{A}) = 180^\circ$	
Eğer bir paralelkenarın bir açısı ...	$m(\hat{G}) = 90^\circ$ $m(\hat{H}) = 90^\circ$ $m(\hat{J}) = 90^\circ$ $m(\hat{K}) = 90^\circ$	<i>GHJK paralelkenarı</i>

Uygulama Sorusu 3

Dikdörtgen şeklinde bir bahçenin içerisindeki bir noktaya ağaç dikilmesi planlanıyor. Ağacın dikileceği bu noktanın bahçenin bir köşesine olan uzaklığı 3 metre, bu köşenin karşısındaki köşeye olan uzaklığı 5 metre ve üçüncü köşeye olan uzaklığı 4 metredir. Buna göre ağacın dikileceği bu noktanın dördüncü köşeye olan uzaklığı kaç metredir?

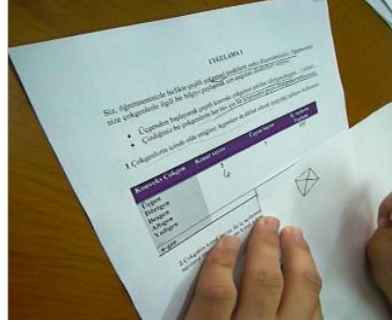
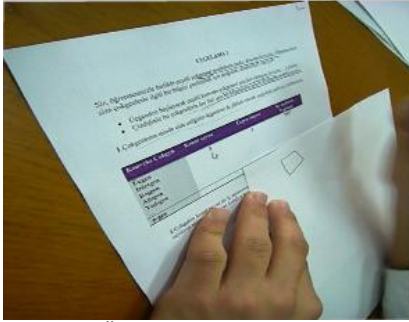
EK-5: BİRİNCİ UYGULAMA SORUSUNDA EDİNİLEN VERİLER

KİŞİ: ERDEM
DÜZEY: İYİ

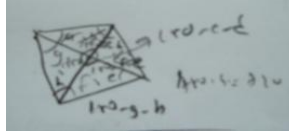
Soruyu Okuma:

Siz, öğretmeninizle birlikte çeşitli çok çok çokgenli modellerle parke döşemektesiniz. Öğretmeniniz size çokgenlerle ilgili bir bilgi bir bilgiyi paylaşmak için aşağıdaki direktifleri veriyor:

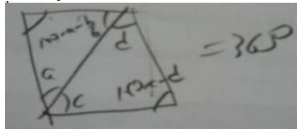
- Üçgenlerden başlayarak çeşitli konveks çokgenli şekiller (dörtgen, beşgen,...) çizersiniz.
- Çizdiğiniz bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenleri oluşturunuz.
Çokgenlerin içinde elde ettiğiniz üçgenlerle de dikkat ederek aşağıdaki tabloyu doldurunuz.
- Bu şekildeki soruları okumak zor oluyor.
- Çünkü çok uzun.
- (Soruyu tekrar bastan okuyor ve özellikle bazı kısımların altını çiziyor.)
- Nerde hı çeşitli çokgenli modellerle (altını çizdi) parke döşemektesiniz. Öğretmen size çokgenlerle ilgili bir bilgiyi paylaşmak için aşağıdaki direktifleri veriyor
- Konveks çokgenli şeklinde çizersiniz.
- Hı konveks şekilli (altını çizdi)
- Bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenleri oluşturunuz. Bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen (bu kısmı bastırıldı)
- Çokgenlerin içindeki üçgenlere de dikkat ederek tabloyu doldurunuz.
- O zaman tabloya göre önce dörtgenden başlamalıyız.
- Hmm dörtgen, kenar sayısı bir iki üç dört



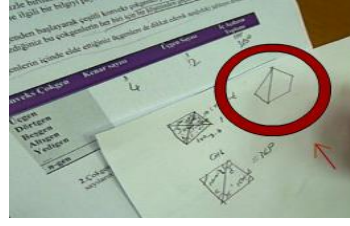
- Üçgen sayısı (teker teker sayıyor) bir köşegen sayısı... bir iki üç dört
- Dört tane de üçgen
- İç açılar toplamı...(dedikten sonra aşağıdaki gibi açıları isimlendirdi)



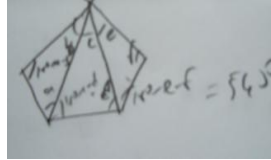
- Şu da 180 (Bir üçgenin iç açıları toplamı için)
- $a + b \dots$ direk 360 çıkacak (tabloya yazıyor) ama niye çıkmadı bu?
- (tekrar soruyu okumaya başladı) bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenler, bir köşesinden geçen köşegenler.
- Ya bu bir köşesi derken ikisi birden mi diyor sadece bir tane mi?
- Bir köşesinden..hep böyle oluyor yaa! (sadece bir tane olduğunu kastediyor.)
- İki tane çizelim..tamam bir tane böyle



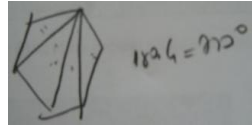
- A ,b 180-a-b ve c, d ve 180- c-d oluyor.Evet ben de diyorum niye çıkmıyor.
- Toplamları da 360 oluyor.
- o Yüzden üçgen sayısı iki oluyor.
- şunların toplamı da 360 oluyor.
- Bir de beşgen.



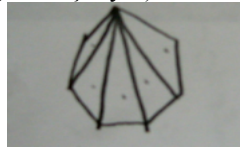
- Eee bir tane üçgen çıktı
- Kenar sayısı beş üçgen sayısı bir oldu
- Hmm bir köşesi diyor öyle mi bir iki üç. Üç tane üçgenimiz oldu.
- A, b, 180 - a - b ve c, d, 180 - c - d ve e, f, 180 - e - f. toplamları da 540 derece oluyor.
- 540 tı demi. $180 \times 3 = 540$ evet. Bu da doğru.



- Şimdi altıgen. (şekli çiziyor).
- Bir tane köşeden köşegenleri çizelim.
- Bir, iki, üç dört tane üçgen oluştu.



- Kenar sayısı 6, üçgen sayısı 4
- Derecesi de işte gene aynısından 180×4 (üçgen var) 720 olur.
- (Tabloyu dolduruyor). Böyle yapsaymışım daha kolaymış. (üçgenleri sayıp onu 180 ile çarpmayı kastediyor)
- Yedigen. Bir, iki, üç, ..., 7.
- Vay be oldu!
- (Bir köşeden çizilebilecek köşegenleri çiziyor)



- 5 üçgen ve $5 \times 180 = 900$ derece iç açılar toplamı olur (Tabloyu doldurdu.)
- N-gene gelelim.
- Kenar sayısı n, üçgen sayısı n-2 ve bu da $(n-2) \times 180$ de şey olur.

Konveks Çokgen	Kenar sayısı	Üçgen Sayısı	İç Açıların Toplamı
Üçgen	3	1	180°
Dörtgen	4	2	360°
Beşgen	5	3	540°
Altıgen	6	4	720°
Yedigen	7	5	900°
...			
n-gen	n	(n-2)	(n-2) 180°

- (odaya birileri girdi ve kütüphane görevlisiyle sohbet ediyor.)
- (cebirsel olarak ifade edilen durumu sözel bilgiye çeviriyor.)
- n kenarlı bir çokgende n-2 tane üçgen oluşur. Bu üçgen, bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derece olduğu için çokgenin iç açısı toplamı $(n-2) \times 180$ derece olarak ifade edilir.
- Öğretmen soruyor:
Bulduğunuz bu sonuca göre düzgün bir 10-genin bir iç açısının ölçüsü nedir?
- $n=10$ kenar iç açılar toplamı $(n-2) \times 180$ olduğundan 1440 olur.

GÖRÜŞME

- Arş: Soruyu ilk okuduğunda soruyla ilgili düşüncelerin ne oldu?
E: Soruda tablo olduğu için kolay olduğunu düşündüm.

Zaten ne zaman tablo görsem o sorunun hep daha kolay bir soru olduğunu düşünürüm. Bir de bilimsel açıklamayı çok sevdim. Çünkü ben ispata çok önem veririm.

Arş: Soruyu okuduğunda ilk olarak nelere dikkat ettin?

E: yani şimdi aslında okuduğumu anlamam. Yukarıda verilen kısımları okuyunca hiçbir şey anlamadım. Daha sonra tekrar okudum anlamadım. Üçüncü kere de anladım. Zaten sonuç çıkmayınca anlıyorum. O yüzden ispata çok önem veriyorum.

Arş: İlk başta dört tane üçgen oluşturmuştun. Sonra neden fikrini değiştirdin?

E: Çünkü soruyu yanlış okudum. Dikkat etmediğim için bir köşegenden geçen kısmını görmedim.

Arş: Peki burada (şekil 3) sonuç olarak ne buldun?

E: 720 çıkıyor. Normalde 360 derece çıkması lazımdı

Arş: 360 derecelik fazlalık nerden geldi?

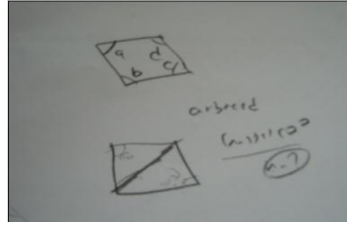
E: Burada üçgen sayısı dört tane olduğu için o fazlalık geliyor. Sanırım merkezdeki açılar yüzünden.

Arş: Peki yukarıdaki işlemler sonrasında cebirsel sonuca ulaşmak senin için zor oldu mu?

E: hayır zor olmadı. Çünkü benim ezberim çok kötü. O yüzden ispata çok önem veriyorum.

Arş: (4 için) Burada galiba n olmalıydı dedin. Neden galiba n olmalıydı emin olamadık mı?

E: İspatlayalım nasıl olacak o. Bir dörtgen çizelim mesela. $a+b+c+d$..yok yok biz üçgen oluşturacaktık. (şekil... çizdi). $(n-2) \times 180$ tüm açıların toplamı. biz de ne var şimdi dört tane n. (tüm iç açıları eşit alıyor.) Şimdi bu n nerden gelecek?



Arş: Her çokgen de n ile bölerek sonuç bulunur mu?

E: Her çokgende n'ye bölebilir miyiz? Hep böyle bulunur ama nerden geldiğini bulamadım şimdi.

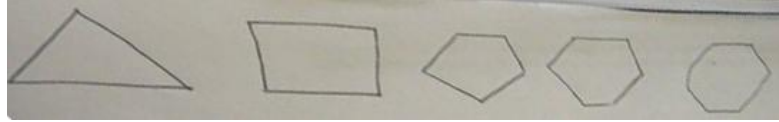
Arş: Peki sence neden bulamadın?

E: Çünkü bu bende ezber bir bilgi.

KİŞİ: ASYA
DÜZEY: ORTA

Soruyu Okuma:

- Sız, öğretmeninizle birlikte çeşitli çokgen sel model model modellerle parke döşemektesiniz. Öğretmeniniz size çokgenlerle ilgili bir bilgiyi paylaşmak için aşağıdaki direktifleri veriyor:
- Üçgen den başlayarak çeşitli konveks (burada tam okuyamadı) çokgen sel şekiller (dörtgen, beşgen, ...) çiziniz.
- Hıımm
- Çizdiğiniz bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenleri oluşturunuz.
- Tamam
- Çokgenlerin içinde elde ettiğiniz üçgenlere de dikkat ederek aşağıdaki tabloyu doldurunuz.
- Tamam
- Önce diyor ki üçgen den başlayarak çeşitli konveks çokgen sel şekiller çiziniz.
- Üçgen den başlayalım.
- Üçgen çizelim.
- Kare çizelim.
- Çokgen diyor, beşgen çizelim.
- Kaç tane çizeceğim?
- (Soruyu inceliyor tekrar) hmm tamam yedigene kadar çizeceğim.
- Tamam altıgen, çok kötü oldu
- Off yedigeni nasıl çizeceğim?
- Bir, iki, üç, dört beş, altı yedi tamam oldu.
- (Çizdiği tüm şekiller sırayla aşağıdaki gibidir)



- Şimdi ne yapacağım? Çizdiğiniz bu çokgenlerin her biri için bir köşesinden geçen köşegenler (üçgen için) bunun bir köşesinden geçemediği için çizemiyorum
- (Diğerleri için aşağıdaki çizimleri yapıyor)



- Evet, sonra çokgenlerin içinde elde ettiğiniz üçgenlere dikkat ederek aşağıdaki tabloyu doldurunuz.
- (Tabloyu okudu) dörtgen için kenar sayısı 4, üçgen sayısı 2 ve iç açılar toplamı 360 derece. (dereceyi ezberden tabloya yazdı)
- Beşgen için köşegen sayısı 5 ama kenar sayısı 5, köşegen sayısı 3, iç açılar toplamı
- İmmm.
- Bunun iç açısını hesaplamam lazım. (gülümsüyor)
- Bir, iki, üç, dört, beş. (beşgenin kenarlarını saydı).

$$\frac{360}{5} = 72$$

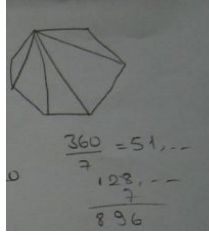
$$108 \cdot 5 = 540$$

$$\frac{360}{6} = 60$$

$$120 \cdot 6 = 720$$

- 360 bölü 5, eşittir 72 dir.
- Bu dış açısını bulduk. Bir iç açısı o zaman 108 dir.
- $108 \times 5 = 540$ olur
- Altıgenin hmm hepsi aynı mıdır acaba iç açıları toplamı?
- Bir dakika 360 bölü 6 dan hesaplayım. 60
- 120 çarpı 6 dan 720 olur
- (tablodaki altıgenin bir için) niye buna üç yazdım. Burada bir yanlışlık yapmışım.
- (bunu dedikten hemen sonra altıgenin bir köşesinden geçen köşegenin eksik olanını çizdi.)
- 4 üçgen oluyor. Yediggen için de 5 üçgen oluyor. (dirwk olarak hesaplamadan ve çizmeden yazdı)
- Bununkini de hesaplayalım.

- 360 / 7 ama bu tam bölünmez ki.
- 51 nokta bilmem ne olur. Bunun iç açılar toplamını hesaplayamıyorum.
- (Gülerek = ☺) küsuratlı çıkıyor.
- Tamam dış açısı 51 virgöl bilmem ne. O zaman dış açısı da 128 virgöl bilmem ne olur.
- Bunla da 7 yi çarpırım. Bu da 896 çıkar.



- İnşallah doğru hesaplamışım. 896 virgöl bilmem ne.
- Şimdi n için bunu gösterelim. (Soruyu okuyor) "Çokgenin kenar sayısı ile iç açılarının toplamı arasında bir ilişki vardır. Tablodaki sayıların tümünü kapsayan kuralı n-kenar sayılı çokgen için matematiksel bir ifade bulunuz."
- Tamam. Şimdi şöyle oluyor.
- (Tabloyu kullanarak ve işaret ederek) şimdi her birinin iki eksiği oluyor.

Konveks Çokgen	Kenar sayısı	Üçgen Sayısı	İç Açılar Toplamı
Üçgen	3	1	180°
Dörtgen	4	2	360
Beşgen	5	3	540
Altıgen	6	4	720
Yediggen	7	5	896, --
...			
n-gen			180 · n = 360

- O zaman üçgen sayısı n-2 dir.
- Tablodaki sayıların tümünü kapsayan...tamam.
- 180 çarpı 3,
- n eksi iki çarpı yüz seksen miydi?
- Immmmm.
- Formülü hatırlayamıyorum.(Tabloyu inceliyor.)
- Öyle bir formül var ama bunu hatırlamıyorum
- Üçgenin iç açıları toplamı ama hatırlamıyorum.
- Buradan çıkarmaya çalışacağım
- Bir tane 180, iki tane 180, üç tane 180 ama bunu niye yanlış yaptım acaba.(yedigen için bunu diyor.)
- Bence burada beş tane 180 olmalıydı.
- Yoo hayır. Ama öyle yani.
- Tablonun ilk kısımları öyle ama.
- O zaman n eksi 2 çarpı 180 olacak
- Bu arada şunu yanlış yapmışım.
- Şöyle tahmin ediyorum 5 çarpı 180 den 900 mü.
- Tamam doğru 900.
- Cebirsel olarak ifade ettiğiniz bir durumu sözel olarak hesaplayınız. Tamam
- Yine böyle n li mi olacak
- Ama sözel diyor.
- (Aşağıdaki gibi yazıyor.)

3.Cebirsel olarak ifade ettiğiniz bu durumu sözel olarak yazınız.

Bir çokgende bir köşeden kenar sayısının 2 eksiği kadar cebirsel bölge elde edilir. İa açılar toplamı bir köşeden çizilerek elde edilen üçgen sayısının 180 ile çarpımı ile bulunur.

- Evet.
- Öğretmen soruyor. Bulduğunuz bu sonuca göre düzgün bir ongenin bir iç açısının ölçüsü nedir diyor.
- Şimdi sekiz tane Aslında farklı yoldan bulunur ama bu yoldan bulmamı istiyor.
- Sekiz tane üçgen elde edilebilir.

- 180 çarpı 8 de tamamının açısının ölçüsüdür.
- Bu tüm iç açısının ölçüsü.
- Bize sadece birini soruyor o yüzden 10 a böleriz
- 1440 bölü 10
- 144 olarak bulunur.

GÖRÜŞME

Arş: Soruyu ilk okuduğunda soruyla ilgili düşüncelerin ne oldu?

Asya: Kolay yani. Dörtgen, beşgen çiz diyordu ilk şeyde kolay geldi çizdim. Ondan sonra aşağıdakileri yapın deyince beynimi biraz karıştırdım 😊 kurcaladım. Çünkü iç açılarının toplamını tam hatırlayamadım

Arş: Geçmiş bilgilerine göre mi hareket ettin?

Asya: Evet ama hatırlayamadım nasıl yaptığımızı. Bunları çizerek buldum. Bir köşesinden çizilenle bir de her tarafından çizilen yine beynimde karıştı. Hangisiydi acaba dedim. n eksi 3 var bir de n eksi 2 var. Hangisi olduğunu bilemeyince çizmeye karar verdim. Çizince işte buldum. İç açılar toplamını normal kendim hesapladım bir doğru orantı var. Bir üçgen sayısıyla 180 iki ise 360 oluyor. katları çıkıyor 180 nin. o zaman dedim yani 7 iken yanlış bulmuşum.buna göre formülü geliştirdim.n tane üçgen varsa n-2 tane üçgen oluyor.

Arş: Peki bu tabloda 360 dereceyi üçgen çizmeden yazdın neden ?

Asya: Çünkü dörtgenin iç açıları toplamının 360 olduğunu biliyordum.

Arş: Üçgen sayısına göre iç açılar toplamını bulmadın mı?

Asya: Hayır kendi kendime hesapladım. Formülü hatırlayamadım. Sonradan ona göre hareket ettim.

Arş: Bu formülü hiç bilmeseydin yine çıkarabilir miydin ?

Asya: Bulabilirdim. Çünkü zaten o formülü hatırlaymadım. Burada onu bilmiyorum varsayın.

Arş: Peki neden bu üçgenleri kullanıyorsun? Ona göre nasıl ulaşabilirdin?

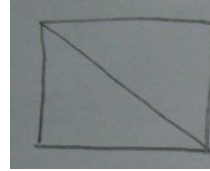
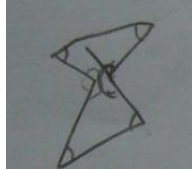
Asya: Evet aslında ulaşırdık. Çünkü üçgenin iç açıları toplamı 180 burda üç tane üçgen var 180 çarpı 180 öderdik. Ama aklıma gelmedi.

Arş: Buradaki konveks kelimesi senin için ne anlam ifade ediyor?

Asya: Hıı bunu biliyorum. konveks galiba içbükey, dışbükey olayı var onla ilgili galiba.

Arş: Peki bu şekiller hangileri (çizdiği beşgen altıgen için)

Asya: bunların hepsi konveks yani dışbükeydir. Mesela bu şekil içbükeydir. İçe doğru çıkıntıları var. Ama şu şekilde ise hepsi dışarı doğru.



Arş: Peki konkav deseydim soruyu nasıl çözerdin?

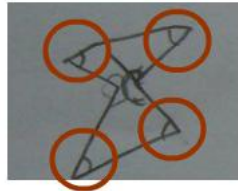
Asya: Soruyu ben yine böyle çözerdim. Çünkü okurken o kısma dikkat etmemiştim.

Arş: Şimdi sana konkav desem düşüncen ne olurdu?

Asya: Yapamam çünkü onlar şekilsiz.

Arş : Peki şekil... için iç açılarını gösterir misin?

Asya: (Sadece kırmızı daireler içindekileri gösterdi.)



Arş: Bu çokgen kaç kenarlı

Asya: Dört kenarlı. Yok hayır 6 kenarlı.

Arş: Kaç tane iç açısı olması lazım peki bunlar da mı iç açıları?



Asya: Yok öyle değil içerde olması lazım o yüzden şöyle olmalı.

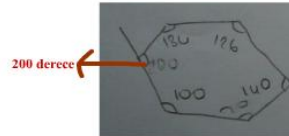


Arş: Peki ilk başta çizdiğin altıgenle şimdi çizdiğini kıyaslar mısın ?

Asya: İlk başta çizdiğim şimdi çizdiğim şeklin konkavı

Arş: Peki şimdi iç açıları birbirinden farklı olan bir konveks altıgen çizelim. İç açıları derecelerini sen belirle.

Asya: Peki. Ama dereceler 720 olmalı toplamda ben ona göre belirlemeliyim.
(Aşağıdaki gibi belirliyor)



Arş: 200 derecenin dış açısını bulur musun?

Asya: Olmazzzz. Çizerken bunu düşünmedim. O zaman içbükeyde olur işte tam burası 200 olabilir.



Arş: Peki konveksle konkav arasındaki fark nedir bu durumda?

Asya: Evet şimdi fark ettim. Konvekste iç açıları 180 dereceden büyük olmaz. Ama konkavda iç açıları 180 dereceden büyük olabilir.

Arş: Peki aynı formülü biz dışbükey çokgenlerle de elde edebilir miydik?

Asya: Hayır elde edemedik. Çünkü iç açıları toplamı değişirdi hep. Zaten derste hiç böyle bir şey işlemedik.

Arş: Asya sana bir tabloyu doldurmak ve yorumlamak zor geliyor mu?

Asya: Hayır. Sayısal değerleri doldurmak çok zor gelmiyor. Ama onu anlatmak zor geliyor. Yani eğer ne yapacağınız beyninizde canlanmışsa tabloyu doldurmak zor gelmiyor.

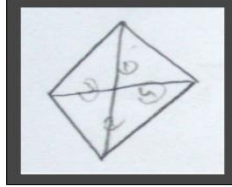
Arş: Bu formülü seneler sonra sorsam tekrar bulup çıkarabilir misin ☺ ?

Asya: Evet. Çünkü nasıl bulunduğunu anladım. Direk üçgenler yardımıyla bulurum. Önceden ezberlemiştim. Zaten o yüzden de hatırlamadım ilk başta.

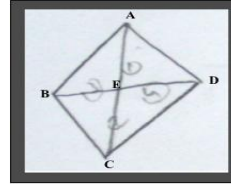
KİŞİ: KEREM
DÜZEY: ZAYIF

Kerem öncelikli olarak soruyu sonuna kadar okuyor ve beyaz boş bir kağıt alarak ilk çizimi yapmaya başlıyor.

- Hımm. Üçgeni vermiş zaten.
- Dörtgen için de kenar sayısı dört. (Şekil 1'i çiziyor ve Tabloda kenar sayısı kısmına dörtgen için 4 olarak yazıyor.)



Şekil 1

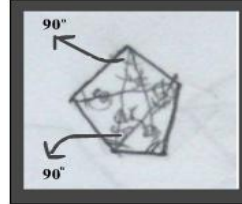


Şekil 2

- Şimdi üçgen sayısı (Şekil 1) bir, iki, üç, dört (Burada üçgenleri şekil 2 de isimlendirilmiş üçgenle ifade edersek ABD , BCD , ACD ABC üçgenleri olarak ele alıyor.)
- Mmm... Başka olmaz. (Bir süre sessiz ve kararsız bir ifade ile düşünüyor ve tabloya oluşan üçgen sayısı için 4 yazıyor.)
- İç açılar toplamı 360 olur. (Tabloya iç açılar toplamı kısmına 360 derece yazıyor.)
- Beşgen... (Direk şekli çiziyor.)



Şekil 3



Şekil 4

- Üçgen sayısı 6 tane. (Şekil 3 teki çizimleri köşegenlerden yapıyor. Her köşegenden çizim yapıp yapmadığına emin olmaya çalışıyor.)
- Üçgenleri saydım. (tabloya kenar sayısı kısmına 5, üçgen sayısı kısmına 6 yazıyor.)
- İşte şuralar 90, 90 (Şekil 4) Bu bir beşgen 90 çarpı 5 dersek iç açılar toplamı 450 olur.
- Bir şeyleri yanlış yapıyorum ama... (Tabloya iç açılar toplamı kısmına 450'nin dördünü yazıp çizdiği şekle tekrar dönüyor.)
- Beş kenar var 90 ile çarpırım 450 olur. (Tabloya 450 dereceyi yazıyor.)
- Altıgen. (Hemen Şekil 5'i çiziyor.)

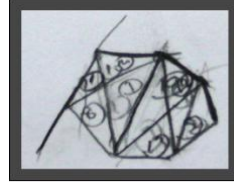


Şekil 5

- Bir, iki, üç, dört, beş, altı (Kenarları sayıyor.)
- Üçgen sayılarına bakarsak (tüm köşelerden köşegen çizerek oluşan üçgenleri sayıyor.) bir iki üç dört beş altı.
- Mmm. Olmadı bu. (Tekrar saymaya başlıyor ve Şekil 5'teki gibi üzerinden gidiyor.)
- Yedinci üçgen. (Uzun bir süre sessiz duruyor ve kalemi elinde çevirmeye başlıyor ardından saçlarını karıştırıp çizdiği şekle sürekli olarak bakıyor.)
- Araştırmacı: Ne düşünüyorsun?
- Şimdi bunun formülü var değil mi? Bunu formülle yapamaz mıyız?
- (Biraz daha düşünüp) Neyse işte burada kaç tane bulmuştuk evet 7. (Tabloya kenar sayısı için 6 oluşan üçgen sayısı için 7 yazıyor.)
- İç açılar toplamına 540 diyelim. (Tabloda iç açılar toplamı kısmına 540 yazıyor.)



Şekil 6



Şekil 7

- Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi. Bu şekil olmadı. (Şekil 6)
- Yeni bir şekle geçelim. (Şekil 7)
- Şimdi oluşacak üçgen sayısını bulalım. (Köşegenler çizerek üçgenleri saymaya başlıyor.)
- Mmm. (Kütüphane biraz gürültülü fotokopi çekiliyor.)
- Saymaya çalışıyorum ama bu böyle olmaz yaa. Hangi birini sayacağım ki!
- Şurda da bir üçgen oluşmuş bu 11. üçgen oluyor. (Şekil 7)
- Mmm. Şu köşegeni de çizelim. 12, 13, 14 üçgen oldu.
- Bunu formüle göre yapamıyoruz değil mi?
- 14. (Tabloya oluşan üçgen sayısı için 14 yazıyor.)
- Yedi kenarı olduğuna göre 7 çarpı 90 dereceden 630 olur. (Tabloya iç açılar toplamı kısmına 630 yazıyor.)
- Bitti.
- (Sorunun 2. kısmını okuyor.) Çokgenin kenar sayısı ile iç açılarının toplamı arasında bir ilişki vardır. Tablodaki sayıların tümünü kapsayan kuralı n-kenar sayılı çokgen için matematiksel bir ifade bulunuz.
- Mmm. (10-15 saniye sessiz duruyor).
- Bunu formüle göre yapamaz mıyım?
- Niye böyle oldu?
- Bu böyle çok zor olacak
- İşte kenar sayısını ne yaptık 90 ile çarptık filan. O zaman kenar sayısının 90 ile çarpımı cebirsel ifade olarak yapabiliriz.

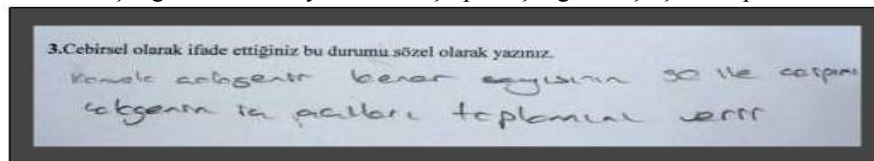
Konveks Çokgen	Kenar sayısı	Üçgen Sayısı	İç Açılar Toplamı
Üçgen	3	1	180°
Dörtgen	4	2	360°
Beşgen	5	5	540°
Altıgen	6	9	720°
Yediggen	7	14	900°
...			
n-gen			

2. Çokgenin kenar sayısı ile iç açılarının toplamı arasında bir ilişki vardır. Tablodaki sayıların tümünü kapsayan kuralı n-kenar sayılı çokgen için cebirsel olarak ifade ediniz.

kenar sayısı x 90

Şekil 8

- Kenar sayısı x 90 (Şekil 8)
- Cebirsel olarak ifade ettiğiniz bu durumu sözel olarak yazınız. (Sorunun üçüncü kısmını okuyor.)
- Konveks bir çokgenin kenar sayısının 90 ile çarpımı çokgenin iç açıları toplamını verir. (Şekil 9)



Şekil 9

- Benim yapacaklarım bu kadar.
- Şimdi ben bunları niye formülle yapamıyorum?
- Bunları tek tek çizersek olmaz ki bu.

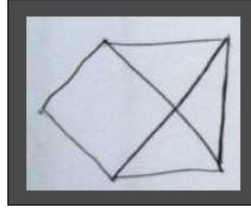
GÖRÜŞME

Arş: Soruyu okurken özellikle hangi noktalara dikkat ettin?

Kerem: Zaten bizden şekiller çizmemiz isteniyor. Çeşitli konveks çokgensel şekiller bu kısmı önemli. Tabi üçgenden başlayarak da önemli. (Soruyu okuyarak önemli bulduğu noktaları söylüyor.) Soruda bir köşesinden geçen köşegenleri oluşturmuş demiş. Okumadık burayı adamakıllı.

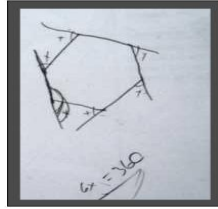
Arş: Peki şimdi anladığına göre nasıl bir çizim yaptın? Bunu beşgen için dener misin?

Kerem: Tamam. Bir köşesinden geçen köşegenler. Her bir köşesinden geçen köşegenleri çizmem gerekiyor. Bir köşesinden geçen köşegenleri oluşturacağım yani şu şekil. (Şekil 10)



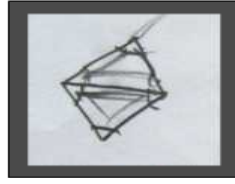
Şekil 10

- Arş: Bir köşesinden geçen köşegenlerden ne anlıyorsun?
 Kerem: Çizdiğim şekildekini anlıyorum.
 Arş: Tabloya özellikle oluşan üçgen sayısını yazarken zorlandın mı?
 Kerem: Evet. Kesin yanlış yapıyorum dedim. Çünkü şekli çiziyoruz üçgen sayısını yakalayacağız ama arada kaçan üçgenler oluyor. İşte formülü vardı bunu onu ulansaydık zor olmazdı.
 Arş: Peki o formülü hatırlıyor musun?
 Kerem: Hayır hatırlayamadım.
 Arş: Aklında kalmamasının nedeni ne olabilir?
 Kerem: Dersleri dinlememden olabilir.
 Arş: Şekil çizmenin sana ne gibi bir faydası oldu?
 Kerem: Tabi ki faydalı oldu. Çünkü bunları ezberlersek zaten aklımızda kalmaz. Ama şekil çizersek daha kalıcı öğrenmiş oluruz.
 Arş: Kenar sayısı x 90 olarak bulduğun cebirsel ifadeye nasıl ulaştığını açıklayabilir misin?
 Kerem: Bunu şekilden göstermem lazım.
 Arş: Bu cebirsel ifadeyi tablodan mı yakaladın yoksa çizimlerinden mi yakaladın?
 Kerem: Bunu ben tablodan çıkardım.
 Arş: Nasıl olduğunu gösterir misin?
 Kerem: İşte üçgen için 90 çarpı ..Aaa yok yanlış yapmışım. 90 çarpı 3 ile 270 olmalıydı. n kenarlı için $(n-1) \times 90$ olmalıydı değil mi? Sanki öyle hatırlıyorum.
 Arş: Emin misin?
 Kerem: Emin değilim sanki öyle bir şeydi diye hatırlıyorum. Aslında bunu çizerek anlatabilirim.
 Arş: Yeni bir şekilde anlatabilir misin?
 Kerem: Tamam. Altıgen çizelim.

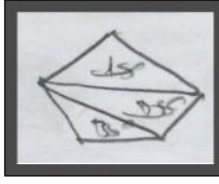


Şekil 11

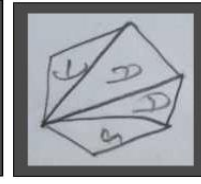
- Kerem: Şimdi iç açı ile o açıya ait dış açının toplamı 180 derece olur. Dış açıları toplamı mecburen 360 olmak zorundadır. 6 tane dış açı olduğundan $6x = 360$ olur. (Şekil 11) Aslında ben bu şekilde yapacaktım ama üçgenlere ayır demiş soruda.
 Arş: Sorunun 4. kısmını bu şekilde çözebilir misin?
 Kerem: Ongenin 10 tane dış açısı var o yüzden $10x = 360$ olacak. O zaman $x = 36$ olur. Zaten bunun iç açısı da 180 e onu tamamladığı için $180 - 36$ kaç ediyor 144 mü? Yok, 144 olur.
 Arş: Bu bulduğumuz nedir şimdi?
 Kerem: Bir iç açısı.
 Arş: Başlangıçta kaç buldun?
 Kerem: 900 derece. Amannn. Ama benim psikolojim bozuldu. Başlangıçta üçgenleri çizemeyince canım sıkıldı. Başta keşke böyle yapsaydım.
 Arş: Ben halen şu kenar sayısı x 90 dereceyi nasıl bulduğunu tam olarak anlamadım? Nasıl yaptın?
 Kerem: Uydurdum onu ☺.
 Arş: Bir de sadece bir köşesinden geçen köşegenler diyordu soruda sadece bir köşesinden geçen köşegenler?
 Kerem: Hımmm doğru. Tamam mm. Ben o kısmı anlamamışım.
 Arş: Mesela bunu bir çokgende görelim mi nasıl oluyor?
 Kerem: Altıgen çizelim. İşte bundan bir köşesinden geçen üçgenler çizelim (Şekil 14).



Şekil 12



Şekil 13



Şekil 14

Arş: Bir köşesinden üçgenler çizerek nasıl yapıldığını anladın mı?

Kerem: Evet anladım.

Arş: Peki ona göre aynı uygulamayı yapabilir misin?

Kerem: Tamam. Üçgen için yazalım.(Sırasıyla hepsini çizip Şekil 15'deki tabloyu dolduruyor). Dörtgen için yapalım. Bir şeyinden geçeni yapabilirsek 2 üçgen olur (Şekil 12). İç açılar toplamını da az evvel yaptığımız gibi yapabiliriz.

Kenar Sayısı	Üçgen Sayısı	İç Açılar Toplamı	İç Açılar Toplamı
3	1	180	180
4	2	360	360
5	3	540	540
6	4	720	720
n	$n-2$	$(n-2) \times 180$	$(n-2) \times 180$
10	8	1440	1440

Şekil 15

Arş: İç açılar toplamını oluşan üçgenlere göre bulamaz mıyız?

Kerem: Bulabiliriz. Üçgenin iç açıları toplamı 180 derece olmak zorunda. Burada iki tane üçgen var. O yüzden 360 derece olur.

Arş: Bu şekilde üçgenlere göre gidersek diğerleri nasıl olur?

Kerem: Beşgen (Şekil 14). Bir köşesinden başlayalım. Şöyle şöyle (Elini eğerek ve göstererek çiziyor.) Bir iki üç tane üçgen var. İç açılar toplamı 180 çarpı 3 olur. O da 18 çarpı 3. 36 artı 18 dört yani 54.O zaman 540 olur.(Tabloya yazıyor.) Şimdi altıgen için yapalım. Onu zaten çizmiştik dört tane üçgen var o zaman iç açılar toplamı 180 çarpı 4 olur. İşte bu da 630 olur. Yok bir dakika. 720 olur.

Arş: Genel bir duruma ulaşmak için n kenarlı çokgene bunu uygulayabilir misin?

Kerem: N-gende n kenar sayısı vardır ve n-1 kadar üçgen vardır.

Arş: Bakalım gerçekten n-1 tane mi üçgen var?

Kerem: Pardon n- 2 tane üçgen var. Onu yanlış gördük. İç açıları da şu (kalemle işaret ederek gösteriyor) üçgenlere göre buluyorduk. Yani iç açılar toplamı $(n-2) \times 180$ olur.

Arş: Bu durumda başlangıçtaki kenar sayısı x 90 ifadesi yerine ne yazacaktık?

Kerem: (Gülerek) Oraya cebirsel olarak şunları yazacaktık işte (Şekil 16'da yer alan tablodaki en son satırı gösteriyor.)

Arş: Formüle göre sözel olarak bu durumu nasıl ifade edebiliriz?

Kerem: Sözel olarak, n kenarlı bir çokgenin kenar sayısının iki eksiği(eksiği derken elini geriye iterek çıkarma işlemine vurgu yapıyor) kadar üçgen vardır. İçindeki üçgenlerin de 180 ile çarpımı kadar iç açıları vardır.

Arş: Sorunun son kısmı için ne diyebiliriz?

Kerem: Ongen için çizelim ya da zaten şu formüle göre yaparız. 10un içinde 8 tane olacaktı. Bu şekilde de 8 çarpı 180 iç açıları toplamı olacaktı. Ama burada bir iç açısının ölçüsü diyor.

Arş: Peki onu nasıl bulursun?

Kerem: İşte onu da bu şekilde bulurduk.(Daha önceki şekil 10 daki işleme vurgu yapıyor.)

Arş: Peki dış açıyı kullanmadan düzgün bir ongenin bir iç açısını ölçüsünü bulabilir misin?

Kerem: Bulurduk ama çizmek lazım.

Arş: Seni çok uğraştırmayacaksa çiz istersen.

Kerem: Ongenin şeyi kaç işte 8 çarpı 180 (Şekil 15'deki hesaplama yapıyor.)1440 ediyor. Şimdi bu 10genin zaten 10 tane iç açısı var. Bir açısını sorduğu için 1440 ı da 10'a bölmemiz lazım.144 oluyor. Ama bunu bilmiyordum yeni öğrendim.

Arş: Soru ile ilgili ne düşünüyorsun?

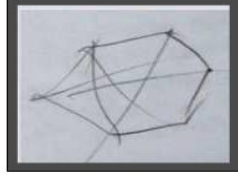
Kerem: Şurayı okumamaktan gitti soru.

Arş: Okumamaktan mı anlamamaktan mı gitti?

Kerem: Okudum da anlamadım. Aslında fazla şey okumadım (dikkat etmediğini ifade etti.) Yani ne bilim okullarda filan böyle sayısal derslerde fazla okumaya gerek kalmıyor soruyu.

Arş : Nedeni bu diyorsun yani?

Kerem: Yani. Nedeni o biraz da. Bir de hani şey olarak algıladım. Bir an hani genellikle sorularda şey olur ya işte bu üçgenin içinde aman bu dörtgenin içinde kaç tane hani şu şekilde (eliyle kâğıttaki üçgenleri gösteriyor) küçük üçgenler bulunuyor ya. Mesela altıgen veriyorlar bunun içinde kaç tane üçgen vardır diyorlar. Ama hani bir kenarından değil her yerinden çizilen.(Şekil 16)



Şekil 16