

T.C.
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI

ARAÇ ROTALAMA PROBLEMİNİN SEZGİSEL BİR YAKLAŞIM
İLE ÇÖZÜMLENMESİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Mert DEMİRCİOĞLU

DOKTORA TEZİ

ADANA / 2009

T.C.
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI

**ARAÇ ROTALAMA PROBLEMİNİN SEZGİSEL BİR YAKLAŞIM
İLE ÇÖZÜMLENMESİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA**

Mert DEMİRCİOĞLU

DANIŞMAN: Doç. Dr. Erkut DÜZAKIN

DOKTORA TEZİ

ADANA / 2009

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma, jürimiz tarafından İşletme Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Doç. Dr. Erkut DÜZAKIN
(Danışman)

Üye

Prof. Dr. Hüseyin ÖZGEN

Üye

Prof. Dr. Murat DOĞANLAR

Üye

Yar. Doç. Dr. Mehmet ÖZMEN

Üye

Yar. Doç. Dr. Ahmet ERGÜLEN

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim elemanlarına ait olduklarını onaylıyorum.

...../...../.....

Prof. Dr. Azmi YALÇIN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 Sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

ÖZET

ARAÇ ROTALAMA PROBLEMİNİN SEZGİSEL BİR YAKLAŞIM İLE ÇÖZÜMLENMESİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Mert DEMİRCİOĞLU

Doktora Tezi, İşletme Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erkut DÜZAKIN

Ekim, 2009, 163 sayfa

Son yıllarda dağıtım sistemleri giderek daha karmaşık hale gelmiş ve dağıtım planlamada çalışanlar daha büyük ve karmaşık dağıtım problemleri ile karşı karşıya kalmıştır. Bu gelişmenin sebeplerinden biri çok sayıdaki şirket birleşmeleridir. Dağıtım sisteminin karmaşık hale gelmesinin diğer bir sebebi de dağıtım ağı içerisinde zamanın öneminin ve son yıllardaki firmalar arası artan rekabetçi ortam dolayısı ile maliyetlerin rekabet üzerindeki öneminin hızla artmasıdır.

Araç Rotalama Problemi dağıtım sistemleri içerisindeki en önemli problemdir. Bu çalışmada ürün dağıtımı, okul servis aracı, posta ve gazete dağıtımı, çöp toplama, yakıt dağıtımı gibi gerçek hayatta pek çok uygulama alanı bulunan Zaman Pencereli Araç Rotalama Problemi (ZPARP) ile ilgilenilmektedir. Bu problem araç kapasite kısıtlarına ve müşterilerde ortaya çıkan servis süresi kısıtlarına sahip olan ve maliyeti minimize ederek belirli bir müşteriye servis vermek için belirli bir sayıda durmak zorunda olan belirli bir kapasiteye sahip olan araç filosunun etkin bir şekilde kullanılması ile ilgilidir. Problemin karmaşıklığı nedeniyle günlük hayatta karşılaşılan problemleri çözmede genellikle sezgisel yöntemler kullanılır.

Bu çalışmada, araç rotalama problemiyle, kesin ve sezgisel çözüm yöntemleriyle ilgili mevcut literatür incelenmiştir. Daha sonra ise sezgisel yöntemlerden biri olan Tasarruf Yöntemi geliştirilerek Mersin'deki bir dağıtım firmasında uygulama yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zaman Pencereli Araç Rotalama Problemi, Sezgisel Yöntemler, Tasarruf Yöntemi

ABSTRACT**A HEURISTIC APPROACH TO VEHICLE ROUTING PROBLEM AND AN APPLICATION****Mert DEMİRCİOĞLU****Doctoral Thesis, Business Administration Department****Supervisor: Assoc. Prof. Erkut DÜZAKIN****October, 2009, 163 pages**

In recent years, the distribution system has become increasingly more complex and distribution planning workers has been faced with more big and complex distribution problems. One of the reasons of this development is company mergers. Another reason for complicating distribution system is the increasing importance of time in the distribution chains and costs on competition because of the increasing competition between firms during recent years.

Vehicle Routing Problem is the most important problem in distribution systems. In this study, it is dealt with the Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW) which has lots of applications in real life such retail distribution, school bus routing, mail and newspaper delivery, waste collection, fuel delivery. This problem is related with the efficient use of a fleet of capacitated vehicles which have vehicle capacity constraint and service time restrictions imposed at the customer locations and should make a number of stops to serve a set of customers so as to minimize cost. Due to the complexity of the problem, heuristics are often used for solving problems in real life.

In this study, the existing literature on the vehicle routing problems and exact and heuristics solutions for them has been examined. Then one of the heuristics approach named Saving Method has been improved and applied in a distribution firm in Mersin.

Key Words: Vehicle Routing Problem with Time Windows, Heuristic Methods, Saving Method

ÖNSÖZ

Günümüzde dağıtım sistemleri oldukça karmaşık hale gelmiş ve firmaların maliyetlerinde önemli bir yere sahip olmuşlardır. Etkin olarak yapılmayan bir dağıtım planı, dağıtım maliyetlerinde önemli bir artışa neden olmaktadır. Bu yüzden etkin dağıtım planları firmalara önemli bir maliyet avantajı sağlamaktadır. Bu çalışma ile dağıtım sistemlerindeki araç rotalama problemi incelenmiş olup, firmaların maliyet tasarrufu sağlamak için uygulayabileceği çeşitli yaklaşımlar araştırılmıştır. Araç rotalama problemlerini çözmek için sezgisel çözüm yöntemlerinden tasarruf yöntemi seçilip, geliştirilerek bir dağıtım firmasında uygulama yapılmıştır.

Bu çalışmada, yoğun akademik çalışmalarını arasında zamanını ayırarak bana yol gösteren ve yardımcı olan tez danışmanım Doç. Dr. Erkut DÜZAKIN'a ilgi ve desteğinden ötürü teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Her zaman yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen tez izleme jüri üyesi Prof. Dr. Hüseyin ÖZGEN'e çalışmama verdiği destekten ötürü sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tez izleme jüri üyesi Yar. Doç. Dr. Mehmet ÖZMEN'e şükranlarımı sunarım.

Çalışmayı gerçekleştirdiğim dağıtım firmasının yönetim kurulu başkanı Necdet KÖPRÜLÜ'ye, araştırmanın uygulaması sırasında verdiği destek ve yardımlardan dolayı teşekkür ederim.

Çalışmayı gerçekleştirdiğim dönem içerisinde desteklerini her zaman hissettiğim sevgili eşim Yar. Doç. Dr. Elif DEMİRCİOĞLU ve annem Müfide DEMİRCİOĞLU'na, gösterdikleri sabır ve özveriden dolayı şükranlarımı sunarım. Son olarak tezimin son günlerine yetişen, ailemizin yeni ferdi kızım Derin DEMİRCİOĞLU'na hayatıma kattığı heyecan ve mutluluktan ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez Sosyal Bilimler Enstitüsü Araştırma Fonundan desteklenmiş olup, tez numarası İİBF2006D13'tür.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
ÖNSÖZ.....	III
TABLolar LİSTESİ.....	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IX

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. Problem.....	1
1.2. Çalışmanın Amacı.....	3
1.3. Çalışmanın Önemi.....	4
1.4. Çalışmanın Yöntemi.....	5
1.5. Çalışmanın Planı.....	6

İKİNCİ BÖLÜM

LOJİSTİK YÖNETİMİ

2.1. Lojistik Kavramı ve Temel Unsurları	8
2.2. Lojistik Yönetiminin Tarihsel Gelişimi.....	10
2.3. Lojistik Yönetiminin Önemi.....	13
2.4. Lojistik Sistemindeki Problemler.....	14
2.4.1. Dağıtım Ağı Konfigürasyon Problemi.....	15
2.4.2. Üretim Planlaması Problemi.....	15
2.4.3. Stok Kontrol.....	16
2.4.4. Stok ve Dağıtımın Entegrasyonu.....	16
2.4.5. Araç Filosu Yönetimi.....	17
2.4.6. Araç Rotalama.....	17
2.4.7. Paketleme Problemi.....	17

2.4.8. Zaman Penceresi İle Dağıtım.....	18
2.4.9. Toplamalı Dağıtım Sistemleri.....	18
2.5. Lojistik Problemlerini Modelleme.....	18

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

GEZGİN SATICI PROBLEMİ

3.1. Gezgin Satıcı Probleminin Tarihçesi.....	22
3.2. GSP İçin Çözüm Yöntemleri.....	23
3.2.1. GSP İçin Kesin Çözüm Yöntemleri.....	24
3.2.1.1. Dal – Sınır Yöntemleri	26
3.2.1.1.1. Atama Problemi.....	27
3.2.1.1.2. 1-Ağaç Gevşetilmesi Yöntemi.....	31
3.2.1.2. Dal-Kesme Yöntemi.....	33
3.2.2. Sezgisel Yöntemler.....	37
3.2.2.1. Tur Oluşturma Yöntemi.....	38
3.2.2.2. Tur Geliştirme Yöntemi.....	39
3.2.2.2.1. r-Opt Algoritması.....	39
3.2.2.2.2. Tavlama Benzetim.....	39
3.2.2.2.3. Genetik Algoritma.....	41
3.2.2.2.4. Yapay Sinir Ağları.....	43
3.2.2.2.5. Tabu Arama.....	44
3.2.2.3. Karma Yöntemi.....	45
3.2.2.3.1. Atlama Arama Yöntemi.....	45
3.2.2.3.2. Yerel Arama Yöntemi.....	46
3.2.2.3.3. Hiyerarşik Strateji Yöntemi	46

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

ARAÇ ROTALAMA PROBLEMİ

4.1. ARP'nin Uygulama Alanları.....	50
4.2. GSP ve ARP Çözüm Zorluğu.....	51
4.3. ARP Çeşitleri.....	54
4.4. ARP İçin Çözüm Yöntemleri.....	55
4.4.1. ARP İçin Kesin Çözüm Yöntemleri.....	56
4.4.1.1. Minimum K-ağaç Yöntemi.....	56
4.4.1.2. ARP İçin Çok Yüzlü Yaklaşım.....	57
4.4.2. Sezgisel Yöntemler.....	60
4.4.2.1. ARP için Klasik Sezgisel Yöntemler.....	60
4.4.2.1.1. Tasarruf Yöntemi.....	60
4.4.2.1.2. Süpürme Yöntemi.....	64
4.4.2.1.3. İki Aşamalı Yöntem.....	65
4.4.2.1.4. Geliştirilmiş Petal Sezgiseli.....	66
4.4.2.2. Meta Sezgisel Yöntemler.....	68
4.4.2.2.1. Tavlama Benzetim Yöntemi.....	68
4.4.2.2.2. Yapay Sinir Ağları.....	69
4.4.2.2.3. Tabu Arama Yöntemi.....	70
4.4.2.2.4. Karınca Kolonisi Optimizasyonu.....	72

BEŞİNCİ BÖLÜM

ARAŞTIRMA YÖNTEMİ

5.1. Araştırma Modeli	74
5.2. Verilerin Toplanması	74
5.3. Verilerin Çözümü	76
5.3.1. Zaman Pencere Araç Rotalama Problemi	76
5.3.1.1. Tanım.....	78
5.3.1.2. Kısıtlar.....	78
5.3.1.3. Formülasyon.....	80
5.3.2. Tasarruf Yöntemi.....	83

5.3.2.1. Geliştirilmiş Tasarruf Yöntemi.....	84
5.3.2.2. Tasarruf Yönteminin Aşamaları.....	89

ALTINCI BÖLÜM

BİR DAĞITIM FİRMASINDA UYGULAMA

6.1. Dağıtım Rotası Verilerin Analizi.....	91
6.2. Mevcut Durumdaki Dağıtım Rotaları.....	97
6.3. ZPARP Geliştirilmiş Tasarruf Yöntemi Uygulanması.....	99
6.4. Bulgular ve Yorum.....	102

YEDİNCİ BÖLÜM

SONUÇ

SONUÇ	104
KAYNAKÇA	109
EKLER	115
ÖZGEÇMİŞ	163

TABLolar LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 3.1: Çaprazlama, Mutasyon ve Değiştirme Örnekleri.....	42
Tablo 4.1: En Büyük Boyuttaki Gezgın Satıcı Problemi Çözümleri.....	53
Tablo 4.2: Müşterilerin Birbirlerine Olan Uzaklıkları.....	62
Tablo 4.3: Müşterilerin Talep Miktarları.....	62
Tablo 4.4: Hesaplanan Tasarruf Miktarları.....	62
Tablo 5.1: Sezgisel Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	84
Tablo 5.2: Tasarruf Yöntemlerinin Karşılaştırılması.....	88
Tablo 6.1: Müşterilerin 09.12.2008 Tarihine Ait Talep Verileri.....	93
Tablo 6.2: Müşterilere Ait Koordinatlar.....	94
Tablo 6.3: Müşterilerdeki Bekleme Süresi (Dakika Olarak).....	96
Tablo 6.4: Klasik ARP İçin Mevcut Durumdaki Dağıtım Rotası.....	98
Tablo 6.5: ZPARP İçin Mevcut Durumdaki Dağıtım Rotası.....	98
Tablo 6.6: Klasik ARP İçin Önerilen Dağıtım Rotası.....	100
Tablo 6.7: ZPARP İçin Önerilen Dağıtım Rotası.....	101

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1: Dağıtım Ağı.....	7
Şekil 2.2: Lojistiğin Temel Unsurları.....	9
Şekil 3.1: GSP İçin Çözüm Yöntemleri.....	24
Şekil 4.1: ARP İçin Çözüm Yöntemleri.....	55
Şekil 4.2: Tasarruf Yöntemindeki Müşteri Birleştirilmesi.....	61
Şekil 4.3: Depo ve Müşterilerin Harita Üzerinde Gösterimi.....	63
Şekil 4.4: Araç Kapasitesi 23 Olduğundaki Dağıtım Rotası.....	63
Şekil 4.5: Araç Kapasitesi 16 Olduğundaki Dağıtım Rotası.....	64
Şekil 4.6: Karıncaların A-E Arasındaki Rotaları.....	73
Şekil 5.1: Zaman Pencereyi Araç Rotalama Problemi Örneği.....	77
Şekil 5.2: 8 Müşterili Araç Rotalama Problemi.....	87
Şekil 5.3: Tasarruf Yönteminin Aşamaları.....	89
Şekil 6.1: Deponun ve Müşterilerin Konumu.....	95
Şekil 6.2: Klasik ARP İçin Önerilen Dağıtım Rotası.....	100
Şekil 6.3: ZPARP İçin Önerilen Dağıtım Rotası.....	101

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

Günümüz küresel piyasasında yoğun rekabet, kısa yaşam eğrisine sahip ürünler ve müşterilerin artan beklentileri, üreticileri dağıtım sistemlerine yatırım yapmalarına ve gereken önemi vermelerine zorlamıştır. Bu durum, iletişim ve ulaşım teknolojilerindeki değişimle birlikte, örneğin mobil iletişim ve gıda dağıtım gibi, lojistik yönetiminin sürekli gelişimine neden olmuştur. Lojistik sisteminin en önemli parçası ve problemi ise Araç Rotalama Problemidir (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

Araç rotalama problemi (ARP), bir veya birkaç depoya sahip ve belirli sayıda müşterileri veya şehirleri olan firmanın, ürün dağıtımını yaparken seyahat mesafesini minimize etmeye çalışan problemdir. Genellikle bu probleme araç kapasitesi, yol uzunluğu, belirli bir zaman periyodunda servis edilmesi gereken müşteriler gibi bazı kısıtlar eklenir.

1.1. Problem

Dağıtım yapan firmalar araç rotalama problemi ile karşı karşıya kalmaktadır. Bu problem firmalara bir dağıtım maliyeti yaratmaktadır. Dağıtım maliyetleri, ürün maliyetlerinin yaklaşık %15-20'sini oluşturmaktadır (Rushton ve diğerleri, 2006). Genellikle firmalar bu probleme herhangi bir matematiksel model kullanmadan, geçmiş tecrübelerinden veya kendi geliştirdikleri algoritmaları kullanarak çözüm aramaktadırlar. Firmaların bir matematiksel model kullanmadan yaptıkları bu araç rotaları, yüksek dağıtım maliyetlerinin ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Etkin olmayan dağıtım rotaları, firmalara ekstra bir maliyet yaratmaktadır. Sonuç olarak etkin bir dağıtım rotası oluşturmak firmaya büyük bir maliyet tasarrufu oluşturmakta ve günümüzdeki rekabetçi ortamda önemli bir avantaj sağlamaktadır.

Bu çalışmada Gezgin Satıcı Problemi (GSP) ve Araç Rotalama Problemi olarak nitelendirilen iki klasik dağıtım problemi açıklanmış ve uygulama için uygun olan Zaman Pencereci Araç Rotalama Problemine çözüm aranmıştır.

GSP, bir satıcının kendi şehrinden başlayarak diğer bütün şehirleri $((n-1)$ şehir) ziyaret edip, tekrar kendi şehrine dönüş mesafesini minimize etmeyi amaçlar. ARP ise, bilinen yerlerde ve taleplere sahip n müşterinin ihtiyaçlarının, bir depoda bulunan k araç tarafından bir dağıtım rotası kullanılarak karşılanması problemidir. Dağıtım rotası, belirli bir noktadan başlanması, müşterilerin dolaşılması ve tekrar depoya geri dönülmesinden oluşur. ARP'nin amacı, her bir araç için oluşan bu dağıtım rotalarının oluşturduğu toplam mesafenin minimize edilmesidir (Grupta ve Krishnamurti, 2003).

Araç Rotalama Problemlerinde kullanılan kesin çözüm algoritmaları, orta büyüklükteki problemleri çözmek için çok büyük bilgisayar sürelerine ihtiyaç duyduğu için pek tatmin edici değildir. Sezgisel yöntemler ise kısa sürede optimuma yakın sonuçlar vermektedir. Günlük hayatta karşılaşılan problemler çoğunlukla çok büyük boyutta ve karmaşık olduğundan, bu tür problemleri çözmek için sezgisel yöntemler daha uygundur. Literatürde de ARP için az sayıda kesin çözüm yöntemi kullanılarak yapılmış çalışmalar vardır. Genellikle araştırmacılar sezgisel çözüm yöntemi üzerinde çalışmalarını yoğunlaştırmışlardır.

Gezgin satıcı problemi ve Araç Rotalama probleminde şehir sayısı arttıkça problemin zorluğu süratle artar. n şehirli bir problemde olurlu turların sayısı $(n - 1)!/2$ 'dir. İlk şehir için $(n-1)$ tane, ikinci şehir için $(n-2)$ tane seçenek vardır. Paydadaki 2 ise her turdaki gidiş mesafesi ile dönüş mesafesinin aynı olmasındandır. Yani 10 şehirlik gezgin satıcı problemi için 181.440 olurlu çözüm, 20 şehirlik problemde 10^{16} mertebesinde olurlu çözüm varken, 50 şehirlik problemin yaklaşık 10^{62} mertebesinde olurlu çözümü vardır (Hillier ve Lieberman, 1995).

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada Zaman Pencereli Araç Rotalama Problemi (ZPARP) incelenecektir. Zaman pencereli araç rotalama probleminin amacı, müşteri tarafından belirlenen belirli bir zaman aralığında, dağıtım rotalarının optimal bir şekilde oluşmasını sağlamaktır.

Araç rotalama problemi, fiziksel dağıtım ve lojistik alanında önemli bir yönetim problemidir. Tipik bir araç rotalama problemi, bir dağıtım noktasından şehir, mağaza, depo, okul, müşteri gibi coğrafik olarak dağılmış noktalara, en düşük maliyetli rotaları tasarlama problemidir. Bir rota, her noktanın bir kez ve bir araç tarafından ziyaret edildiği, tüm rotaların dağıtım noktasında başlayıp bittiği ve belirli bir rotadaki tüm noktaların toplam talebinin, bu rotayı yönetmek için tahsis edilen araç kapasitesini aşmadığı şekilde tasarlanmalıdır (Xu ve Kelly, 1996).

Uygulamada araç rotalama problemi, yöneylem araştırması alanında önemli faydalar sağlamıştır. Öyle ki araç rotalama problemlerinin uygulanmasıyla milyonlarca dolar tasarruf sağlanmıştır. Örneğin 1991 yılında Amerika'da ulaşım ve kamu sektörüne yaklaşık 506 milyar dolar yatırılmıştır, araç rotalama yönteminde ufak bir iyileştirme bile önemli tasarruflar sağlayabilmektedir (Xu ve Kelly, 1996).

Araç rotalama probleminin sağladığı bu faydalar doğrultusunda bu çalışmada, zaman pencereli araç rotalama probleminde sezgisel çözüm teknikleri kullanılarak, optimal dağıtım rotaları belirlenecek ve bu dağıtım rotasının, dağıtım süreleri ve maliyetler üzerindeki etkisi saptanacaktır.

Bu çerçevede yapılacak uygulama ile aşağıdaki araştırma sorularına cevap aranacaktır;

- Firmanın mevcut dağıtım rotası belirleme tekniği nedir?
- Firmada optimal dağıtım rotası belirlemede hangi bilimsel metot uygundur?

- Firmada belirlenen bilimsel metot kullanılarak optimal dağıtım rotaları belirlendiğinde dağıtım süreleri azalmakta mıdır?
- Firmada belirlenen bilimsel metot kullanılarak optimal dağıtım rotaları belirlendiğinde dağıtım maliyetleri azalmakta mıdır?

1.3. Çalışmanın Önemi

Yöneticiler organizasyondaki günlük işlerini yaparken GSP veya ARP ile karşı karşıya kalırlar. Bu yöneticilerin en büyük isteği karşılaştıkları bu problemleri hızlı bir şekilde çözmektir. Fakat literatürdeki sezgisel yöntemleri kullanarak, arzu ettikleri kaliteli bir çözüme ulaşmalarının bir garantisi yoktur. Yöneticiler için GSP ve ARP şu şekilde özetlenebilir (Lawler ve diğerleri, 1985):

- Kesin algoritmalar bazı GSP ve ARP'leri makul bir zamanda çözememektedir.
- Çok fazla sayıda sezgisel yöntem vardır.
- Sezgisel yöntemlere çok küçük bir zaman harcayarak kaliteli çözümlere ulaşmak mümkündür.
- Aynı sezgisel yöntemi kullanan çözümlerin, belirli bir probleme farklı uygulamalarında farklı kalitede çözüm elde edilebilir. Buna göre istenen kalite ve aynı çözümün tekrarı garanti edilemez.
- Çeşitli sezgisel yöntemler arasındaki performans karşılaştırmaları çoğunlukla literatürdeki bazı test problemleri ile yapılmaktadır. Yöneticiler bu test problemlerine yabancı olabilirler. Ayrıca sezgisel problemlerin test problemlerindeki performansı, yöneticinin karşılaşacağı problemde kaliteli bir çözüm sağlayacağını garanti etmez.

Dağıtım sistemlerine finansal olarak ciddi bir harcama yapılmaktadır. Amerika Birleşik Devletlerinde yıllık dağıtım maliyeti 400 milyar dolar ve İngiltere'nin yıllık dağıtım harcaması 15 milyar sterlin olarak tahmin edilmektedir. Ayrıca araştırmalara göre dağıtım maliyetinin, ürünün toplam maliyetinin yaklaşık %16'sı olduğu tahmin edilmektedir. Böylece herhangi bir dağıtım maliyet azalışı firmalara büyük fayda sağlayabilmektedir. Bir İsviçre firması sezgisel bir ARP modeli kullanarak dağıtım maliyetlerini %10-15 arası azaltmıştır. Bu durumda anlaşılmaktadır ki etkin bir dağıtım modeli kullanılarak dağıtım maliyetinden ciddi bir şekilde tasarruf sağlanması mümkün olabilmektedir (Bodin ve diğerleri, 1983).

Bu çalışmada, zaman pencereli araç rotalama problemine geliştirilmiş tasarruf yöntemi uygulanarak elde edilecek dağıtım rotasının, daha düşük bir dağıtım maliyeti sağlaması umulmaktadır.

1.4. Çalışmanın Yöntemi

Bir dağıtım firmasında uygulama yapılarak mevcut dağıtım sistemi ile ilgili gerekli veriler toplandıktan sonra, zaman pencereli araç rotalama problemi için geliştirilen sezgisel yaklaşım, mevcut sisteme uygulanarak yeni bir dağıtım rotasının belirlenmesine çalışılacaktır. En uygun dağıtım rotası bulunurken, dağıtım sistemini oluşturan maliyetlerin azaltılması gerekmektedir.

Uygun dağıtım rotası bulunabilmesi için araç rotalama problemlerinde kullanılan bir sezgisel yöntem olan, geliştirilmiş tasarruf yöntemi kullanılacaktır. Daha önceden modellenecek olan zaman pencereli araç rotalama problemi, tasarruf yöntemi kullanılarak çözülmeye çalışılacak ve uygulamadaki problem için uygun dağıtım rotaları bulunmaya çalışılacaktır.

Uygulamadaki problemin karmaşıklığı ve müşteri sayısının fazla olması nedeni ile tasarruf yöntemiyle çözümlenmesi el ile mümkün olmadığı için, bilgisayar yardımı ile modellenen tasarruf yöntemine çözüm aranacaktır.

1.5. Çalışmanın Planı

Tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup, problemin tanımı yapılmıştır. Daha sonra ise çalışmanın amacı, önemi, yöntemi ve çalışma planı hakkında bilgiler yer almaktadır.

İkinci bölümde, lojistik yönetimi kavramsal olarak ele alınmıştır. Bu bölümde, lojistik kavramı ve temel unsurları, lojistik yönetiminin tarihsel gelişimi ve öneminden bahsedilmiştir. Ayrıca çalışmamızdaki problemlerden biri olan araç rotalama problemini de içeren lojistik sistemindeki problemlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, gezgin satıcı probleminin tanımı yapılarak tarihçesine yer verilmiştir. Ayrıca gezgin satıcı probleminin çözüm yöntemleri detaylı olarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, araç rotalama probleminin tanımı, tarihçesi ve çeşitleri açıklanmıştır. Daha sonra ise araç rotalama problemlerini çözmek için kullanılan kesin ve sezgisel çözüm yöntemlerine detaylı olarak yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, verilerin toplanması ve toplanan verilerin çözümlenmesinde kullanılan yöntemlere yer verilmiştir. Bu bölümde çalışmada yer alan zaman pencereli araç rotalama problemi incelenmiş ve bu problemin çözümünde kullanılacak olan tasarruf yönteminden bahsedilmiştir.

Altıncı bölümde, çalışmada uygulanması için belirlenen yöntem Mersin İli'ndeki bir dağıtım firması için uygulanmıştır. Dağıtım rotasındaki verilerin analizi yapılmıştır. Mevcut durumdaki dağıtım rotaları incelenmiş ve çalışmadaki önerilen yöntem sonucunda çıkan dağıtım rotaları ile karşılaştırılmıştır.

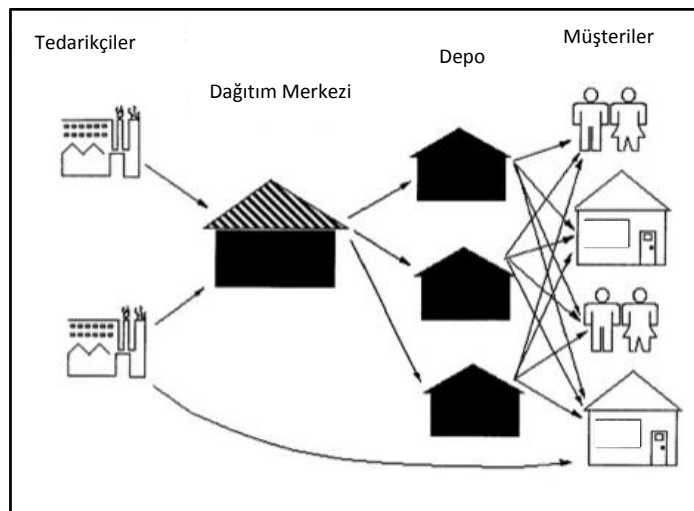
Yedinci bölüm ise sonuç bölümüdür. Bu bölümde araştırma bulguları ve değerlendirmeler ışığında elde edilen sonuçlar özetlenmiştir ve daha sonraki çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

İKİNCİ BÖLÜM

LOJİSTİK YÖNETİMİ

Günümüz küresel piyasasında yoğun rekabet, kısa yaşam eğrisine sahip ürünler ve müşterilerin artan beklentileri, üreticileri dağıtım sistemlerine önem vermeye ve yatırım yapmaya zorlamıştır. Bu durum, iletişimdeki ve ulaşım teknolojilerindeki değişimle birlikte, örneğin mobil iletişim ve günaşırı dağıtım gibi, lojistik yönetiminin sürekli gelişimine neden olmuştur (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

Lojistik sistemlerinde mallar bir veya daha fazla fabrikada üretilmekte, depolama için depolara dağıtılmakta ve daha sonra perakendecilere veya müşterilere dağıtılmaktadır. Sonuç olarak, maliyetleri azaltmak ve servis seviyesini iyileştirmek için, bu *dağıtım ağındaki* farklı seviyelerin etkileşimlerini dikkate almak gerekir. Bu ağ, Şekil-2.1'de görüldüğü gibi tedarikçiler, üretim merkezleri, depolar, dağıtım merkezleri ve perakendeci mağazalarından oluşmaktadır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).



Şekil – 2.1. Dağıtım Ağı
Kaynak: Simchi-Levi ve Bramel, 1997

2.1. Lojistik Kavramı ve Temel Unsurları

Lojistik ve ilgili eşdeğer kelimelerin en uygun tanımı daima önemli bir soru olmuştur. Kitaplarda ve internette birçok tanımlama vardır. Seçilen birkaç tanesi (Rushton ve diğerleri, 2006);

Hesket ve diğerlerine göre (1970) “ Lojistik, zaman ve yer faydası yaratmada, arz ve talebin koordinasyonu ve hareketini kolaylaştıran tüm faaliyetlerin yönetimidir”.

Wikipedia’da (2006). “ Lojistik, ürün, enerji, bilgi ve diğer kaynakların akışını yönetme ve kontrol etme sanat ve bilimidir” şeklinde tanımlanmıştır.

CSCMP tarafından (2006). “ Lojistik yönetimi, müşteri isteklerini karşılamak için, başlangıç ve tüketim noktası arasında mal, hizmet ve ilgili bilgilerin etkin, etkili gönderimi ve tersine akışını ve depolanmasını planlamak, uygulamak ve kontrol etmektir” olarak tanımlanmıştır.

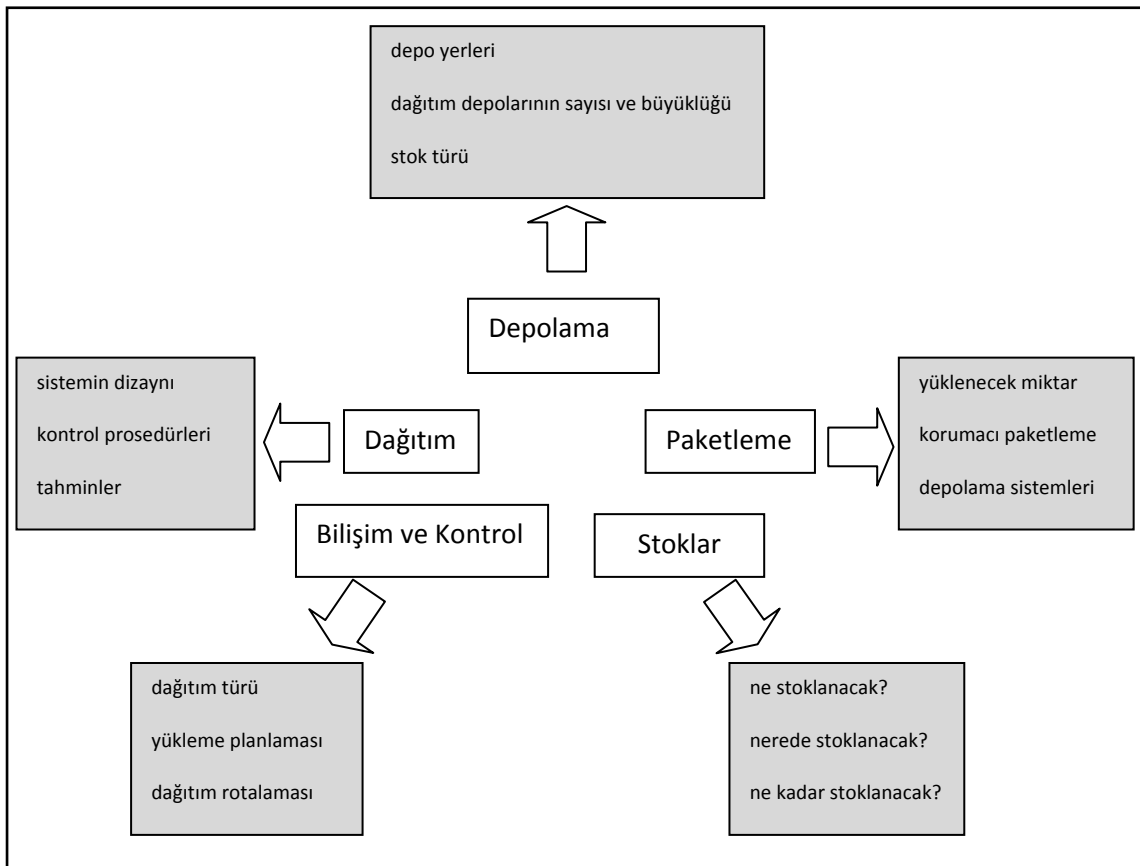
Lojistik ve Ulaşım Enstitüsü’ne göre (UK, 2005) “Lojistik, kaynağın doğru zamanda, doğru yerde, doğru maliyette, doğru kalitede konumlandırılmasıdır”.

Birçok sektöre uygulanan uygun modern bir tanım, “lojistik, müşteriye kabul edilebilir hizmet sunmakla birlikte, maliyet etkin bir yolla, arz kaynağından üretim yeri aracılığıyla tüketim noktasına, ürünlerin etkin bir şekilde transfer edilmesiyle ilgilidir” şeklinde yapılmaktadır (Rushton ve diğerleri, 2006).

Lojistik Yönetimi Kurulu’na göre *lojistik yönetimi*, “müşteri isteklerine uygunluk sağlamak amacıyla, merkez noktadan tüketim noktasına mal, hizmet ve ilgili bilgilerin etkin ve etkili akışı ve depolanışının planlanması, uygulanması ve kontrol edilmesi sürecidir” (Simchi-Levi ve Bramel, 1997). Bu tanımlamaya göre birinci olarak, lojistik yönetimi, sistem etkililiği üzerinde etkisi olan ve müşteri isteklerine uygun ürün üretimde rol oynayan, tedarikçi ve üretim merkezlerinden depo ve dağıtım merkezleri aracılığıyla perakendeci ve

mağazalara kadar her merkezi dikkate almaktadır. İkinci olarak, lojistik yönetiminin amacı tüm sistemde etkin bir maliyete sahip olmaktır; amaç hammadde, yarı mamul ve mamullerin dağıtımı ve ulaşımından stoklanmasına kadar tüm sistemin maliyetlerini minimize etmektir. Dolayısıyla odak noktası sadece ulaşım maliyetlerini minimize etmek ve stokları azaltmak değil, daha çok lojistik yönetimine bir sistem yaklaşımıdır. Son olarak, lojistik yönetimi, lojistik ağını planlamak, uygulamak ve kontrol etmek çerçevesinde geliştiğinden, stratejik seviyeden, taktik ve operasyonel seviyeye birçok firma faaliyetini içermektedir (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

Çoğu firma için dağıtım ve lojistiğin temel unsurlarını temsil eden anahtar alanların uygun listesini hazırlamak mümkündür. Bunlar dağıtım, depolama, stok, paketleme ve bilişim ve kontrolü içermektedir. Şekil – 2.2.’de gösterilen bu liste, farklı unsurlar içerisinde detaylı yönleri ulaşmak için tekrar incelenebilir (Rushton ve diğerleri, 2006).



Şekil – 2.2. Lojistiğin Temel Unsurları

Kaynak: Rushton ve diğerleri, 2006

Hax ve Candea'nın (1984) üretim-stok sistemlerine bakış açısını takiben, lojistik kararları tipik olarak aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir (Simchi-Levi ve Bramel, 1997);

- **Stratejik seviye**, firma üzerinde uzun vadeli etki yaratan kararlardır. Bunlar üretim ortamlarının ve depoların kapasitesi, yerleşimi ve sayısı veya lojistik ağı aracılığıyla malzemenin akışı dikkate alınarak alınan kararları içermektedir.
- **Taktik seviye**, her çeyrekte bir ve her yılda bir yenilenen kararları içermektedir. Bunlar ziyaret edilen müşteri sıklığını içeren satın alma ve üretim kararları, stok politikaları ve ulaşım stratejilerini içermektedir.
- **Operasyonel seviye**, çizelgeleme, rotalama ve kamyonları yükleme gibi günlük kararları içermektedir.

2.2. Lojistik Yönetiminin Tarihsel Gelişimi

Dağıtım ve lojistik unsurları, ürünlerin üretimi, depolanması ve taşınmasına daima temel olmuştur. Dağıtım ve lojistik, iş ve ekonomi çevrelerinde temel fonksiyon olarak kabul edilmiştir. Günümüzde lojistiğin rolü değişmiştir ve şu anda birçok farklı faaliyet ve firmanın başarısında büyük rol oynamaktadır. Aslında lojistiğin temelindeki kavramlar ve mantık yeni değildir. Bunlar çeşitli gelişim aşamalarıyla gelişmiştir ancak hala ilgili tekniklerle birlikte takas analizleri, değer zincirleri ve sistemleri gibi temel fikirleri kullanmaktadır (Rushton ve diğerleri, 2006).

1950'li yıllar ve 1960'lı yılların başı

Bu dönemde dağıtım sistemleri planlanmamış ve formüle edilmemişti. Üreticiler üretmiş, perakendeciler perakende satış yapmış ve birkaç yolda veya diğerlerinde ürünler mağazalara varmıştır. Dağıtım geniş ölçüde taşıma endüstrisi ve üreticilerin kendi hesap filoları tarafından temsil edilmiştir. Çok az

kontrol vardı ve dağıtımla ilgili çeşitli fonksiyonlar arasında gerçek bağlantı yoktu (Rushton ve diğerleri, 2006).

1960'lı yıllar ve 1970'li yılların başı

1960 ve 1970'li yıllarda fiziksel dağıtım kavramı, ulaşım, depolama, malzeme bulundurma ve paketleme gibi etkin bir şekilde birbirine bağlanabilen ve yönetilebilen, ilgili fiziksel faaliyetler serisini içermektedir.

Özellikle, sistem yaklaşımı ve toplam maliyet perspektifinin kullanılmasına imkân veren çeşitli fonksiyonlar arasında ilişkinin kabul edilmesi söz konusudur. Fiziksel dağıtım yöneticisinin kontrolünde, gelişmiş hizmet ve düşük maliyet sağlamak için birçok dağıtım rotaları planlanabilir ve yönetilebilirdi (Rushton ve diğerleri, 2006).

1970'li yıllar

Bu dönem dağıtım kavramının gelişiminde önemli bir on yıldır. Temel bir değişim, bir firmanın fonksiyonel yönetim yapısına dağıtımı dahil etme ihtiyacının bazı firmalar tarafından kabul edilmesidir. Bu on yıl aynı zamanda dağıtım zincirinin yapısı ve kontrolünde bir değişim görmüştür. Üreticiler ve tedarikçilerin gücünde bir azalış, büyük perakendecilerinde belirgin bir artış olmuştur. Büyük perakende zincirleri, bölgesel veya yerel dağıtım depolarından mağazalarına sunum yapma kavramına dayanarak kendi dağıtım yapılarını geliştirmiştir (Rushton ve diğerleri, 2006).

1980'li yıllar

Hızlı maliyet artışları ve doğru dağıtım maliyetlerinin açık olarak tanımlanması, dağıtımda profesyonellikte önemli bir artış sağlamaktadır. Bu profesyonellikle uzun vadeli planlamaya doğru gidilmiş ve maliyet avantajlı ölçütleri belirlemeye ve takip edilmeye çalışılmıştır. Bu ölçütler, merkezi dağıtım, stok tutma ve gelişmiş bilgi ve kontrol sağlamak için bilgisayar kullanımı ile maliyetlerde azalma sağlamıştır. Hizmet sektöründeki lojistik firmaları bilgi ve ekipman

teknolojilerinde gelişmelerle birlikte büyük bir öneme sahiptir (Rushton ve diğerleri, 2006).

1980'li yılların sonları ve 1990'lı yılların başı

1980'li yılların sonları ve 1990'lı yılların başında, bilgi teknolojilerindeki ilerlemeye bağlı olarak, firmalar bakış açılarını entegre edebilen fonksiyonlar açısından genişletmeye başlamıştır. Kısaca bu, malzeme yönetiminin ve fiziksel dağıtımın birleşimini kapsamaktadır. "Lojistik" kelimesi bu kavramı tanımlamak için kullanılmıştır. Bu, müşteri hizmetlerini geliştirmek ve bununla ilgili maliyetleri azaltmak için ek fırsatlar sağlamıştır. Bu dönemde kabul edilen bir temel odak noktası, lojistiğin fiziksel yönü olduğu kadar bilgi yönünün önemi olmuştur (Rushton ve diğerleri, 2006).

1990'lı yıllar

1990'lı yıllarda, süreç sadece firmanın kendi sınırları içindeki temel fonksiyonları değil, aynı zamanda firma dışındaki nihai tüketiciye ürün ile ilgili katkı sağlayan unsurları kapsamak için geliştirilmiştir. Bu "tedarik zinciri yönetimi" olarak adlandırılmaktadır. Dolayısıyla tedarik zinciri kavramı, ürünü pazara sunmaya dahil olan birkaç farklı firma olabildiğini kabul etmektedir. Dolayısıyla örneğin üreticiler ve perakendeciler, nihai tüketiciye doğru ürünlerin etkin ve etkili akışını sağlayan lojistik hattı yaratmayı sağlamak için birlikte hareket etmelidirler (Rushton ve diğerleri, 2006).

2000 ve sonrası

Firmalar rakiplere karşı pozisyonlarını geliştirmek veya korumak, pazara yeni ürünler sunmak ve faaliyetlerinin karlılığını artırmak için çabalarken birçok fırsatla karşılaşmaktadır. Bu durum, özellikle işletme amaçlarının yeniden tanımlanmasında ve tüm sistemin yeniden yapılandırılmasında kabul edilen gelişim için birçok yeni fikrin geliştirilmesine neden olmuştur. Gerçekte, çoğu firma için, lojistikteki değişimler firmalara büyük ilerlemeler sağlanmasını hızlandırmıştır. Lider firmalar, lojistikteki çeşitli fonksiyonların minimize edilmesi

gereken maliyet yükü olduğunu savunan geleneksel bakış açısı yerine, lojistiğin sunabildiği pozitif “katma değer” rolü olduğunu kabul etmiştir. Dolayısıyla, lojistiğin rolü ve önemi, firmanın ilerlemesi için temel bir imkan sağlayıcı olarak kabul edilmiştir (Rushton ve diğerleri, 2006).

2.3. Lojistik Yönetiminin Önemi

Bir bütün olarak lojistik sistemi ürün sağlanması, dağıtımı, depolanması, stok kontrolü, bilişim işlemleri ve diğer faaliyetleri içeren, bir seri faaliyetin bulunduğu bir sistemdir. Bu faaliyetlerin en azından bir kısmı her organizasyonda yer almaktadır. Christopher (1986) “Lojistik her zaman merkezde olan ve en önemli ekonomik bir faaliyettir.” diyerek lojistik sisteminin önemini dile getirmiştir. Deloitte ve Touche’nin 1996 yılında Kanada’da yaptığı bir çalışmaya göre firmaların %98’i lojistik faaliyetlerini kritik veya çok önemli olarak görmektedirler (Waters, 2006).

Bu kadar öneme sahip olmasına karşın uzun zamandır lojistik gerektiği ilgiyi görememiştir. Geleneksel olarak firmalar tüm yoğunluğunu üretim yapmaya harcamışlar ve lojistik kısmını pek önemsememişlerdir. Buna karşın McKibbin (1982) ve Delaney (1986) lojistik maliyetlerinin ürün maliyetlerinin %15-20 arasında olduğunu öne sürmüşlerdir.

Bu noktada, lojistiği bir bütün olarak işletme ve ekonomi çerçevesinde düşünmek faydalı olmaktadır. Lojistik ulusal ekonomiyi etkileyen insan ve malzeme kaynaklarının geniş kullanımını sağlamada önemli bir faaliyettir. Lojistiğin ekonomideki etkisinin boyutunu tahmin etmeye yönelik bazı araştırmalar yapılmıştır (Rushton ve diğerleri, 2006).

Bu araştırmalardan biri, Birleşik Krallık’ta da çalışan nüfusun yaklaşık % 30’nun lojistikle ilgili işlerde çalışmakta olduğunu göstermektedir. Ulusal seviyede Amerika Birleşik Devletleri’in gayri safi milli hasılası \$12 trilyon dolar iken bunun yaklaşık olarak \$2.4 trilyon dolarının lojistik için harcanmış olabileceği ve bunun da yarısının sadece dağıtım maliyetleri olduğu tahmin edilmektedir (Waters, 2006). Bu rakamlar birçok önemli maliyetleri temsil etmekte ve lojistik

maliyetlerinin doğasını anlamının ve bu maliyetleri minimumda tutma yolunu belirlemenin ne kadar önemli olduğunu göstermeye hizmet etmektedir.

Lojistikteki farklı unsurların maliyetlerinin ayrıntılı hesabı, birçok araştırmada incelenmiştir. Herbert W. Davis & Company (2005) tarafından yapılan Amerika Birleşik Devletleri'ndeki lojistik maliyetleri ile ilgili araştırmada, ulaşımın % 45 ile en önemli unsur olduğu, bunu % 23 ile stok bulundurma maliyetlerinin, % 22 ile depolama ve % 10 ile yönetimin takip ettiği ortaya konulmuştur (Rushton ve diğerleri, 2006).

Bu genel durum, A.T. Kearney tarafından üretilen, Avrupa lojistik verimlilik araştırması tarafından desteklenmiştir. Temel Avrupa Birliği ekonomilerini kapsayan bu sonuçlar, tüm maliyetlerin %41'inin ulaşım, %23'ünün stok bulundurma maliyetleri, %21'inin depolama ve %15'inin yönetim olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla her iki çalışmada, dağıtımda ulaşım maliyeti unsuru en önemli bölümü oluşturmuştur (Rushton ve diğerleri, 2006).

Bu maliyetlerin göreceli oluşumunun bir firmadan diğerine ve bir sektörden diğerine nasıl değiştiğini görmek çok ilginçtir. Birleşik Krallık'taki bir danışmanlık firması tarafından yapılan sektör maliyet denetiminden, farklı firmalardan lojistik maliyeti örnekleri alınmıştır. Çeşitli firmalardan alınan sonuçlar arasında büyük farklılıklar vardır. Bu maliyet farklılıklarının bir temel nedeni, lojistik yapılarının bir firmadan diğerine ve bir sektörden diğerine çarpıcı biçimde farklı olabilmesindedir (Rushton ve diğerleri, 2006).

2.4. Lojistik Sistemindeki Problemler

Lojistik sistemi, dağıtım ağı konfigürasyonundan başlayan ve paketleme işlemine kadar süren çözülmesi gereken birçok farklı problemi içermektedir. Bu problemlerden, içerisinde bu çalışmada sonucu aranan araç rotalama problemini ve zaman penceresi ile dağıtımı da içine alan on problem aşağıda belirtilmiştir.

2.4.1. Dağıtım Ağı Konfigürasyon Problemi

Coğrafik olarak dağınık perakendecilere ürün sunan birkaç üretim yeri olduğu düşünülün. Mevcut depolar yeterli görülmemekte ve yönetim, dağıtım ağını yeniden tasarlamak ve organize etmek istemektedir. Bu durum, örneğin değişen talepler veya birkaç mevcut depo için finansal kiralama sözleşmelerinin sona ermesi gibi nedenlerden kaynaklanabilir. Buna ek olarak, değişen talepler fabrika üretim seviyesinde değişikliğe, yeni tedarikçi seçimine ve genel olarak dağıtım ağı boyunca ürünlerin yeni akış yoluna neden olabilir. Amaç, toplam üretim, stok ve ulaşım maliyetlerini minimize ederek ve çeşitli hizmet seviyesi isteklerini karşılayarak, depo yeri ve kapasitesini seçmek, her bir üretim ortamında her bir ürün için üretim seviyelerini belirlemek, merkezler arasında (üretim ortamından depoya veya depodan tedarikçiye) ulaşım akışını düzenlemektir (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.4.2. Üretim Planlaması Problemi

Bir üretim merkezi sabit sonlu dönemde, ürün için talebi karşılamak üzere üretim yapmalıdır. Birçok gerçek örnekte talebin dönem boyunca bilindiğini varsaymak uygundur. Bu, örneğin siparişler daha sonraki dönem için verilmişse veya sözleşmeler gelecek birkaç ay için dağıtım yapmak üzere imzalanmışsa mümkündür. Üretim maliyeti, makine hazırlık maliyetleri gibi sabit kısımdan ve bir birimi üretmek için katlanılan maliyetler gibi değişken kısımdan oluşmaktadır. Elde bulundurma maliyetleri stoktaki her bir birim için katlanılan maliyetlerdir. Planlamacının amacı, her dönemde ürünler için talebi karşılamak ve sabit dönemde toplam üretim ve stok maliyetlerini minimize etmektir. Bu problem üretilen ürün sayısı arttıkça zorlaşmaktadır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.4.3. Stok Kontrol

Belirli bir ürünün stoğunu tutan bir perakendeci düşünölsün. Müşteri talepleri belirsiz olduğundan, perakendeci talebin belirsiz dağılım bilgisine sahiptir. Perakendecinin amacı, hangi noktada yeni parti siparişi ve ne miktarda sipariş vereceğine karar vermektir. Genellikle sipariş maliyetleri iki bölümden oluşmaktadır; sabit kısım siparişin büyüklüğünden bağımsızdır, örneğin depodan perakendeciye araç gönderme maliyeti gibi, değişken kısım ise sipariş edilen ürün sayısına bağlıdır. Doğrusal stok tutma maliyeti birim zamanda birim ürün için sabit bir oran olarak ortaya çıkmaktadır. Perakendeci beklenen sipariş maliyetlerini ve stok tutma maliyetlerini minimize etmek için optimal stok politikası belirlemelidir. Bu problem sipariş edilen ürün sayısı arttıkça zorlaşmaktadır ve sipariş maliyetleri sipariş edilen malzemeye bağlıdır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.4.4. Stok ve Dağıtımın Entegrasyonu

Bir depo çeşitli ürünlerle perakendecilere hizmet sunmaktadır. Faaliyet maliyetlerini azaltmak için yönetim, stoklar ve dağıtım maliyetleri arasında uygun bir denge sağlamalıdır. Depo ve perakendeci arasındaki sık turlar, her bir dağıtımın küçük olduğu, stok maliyetlerinin düşük ve ulaşım maliyetlerinin yüksek olduğu anlamını taşımaktadır. Nadir turlar büyük dağıtımlara, yüksek stok maliyetlerine ve düşük ulaşım maliyetlerine sebep olmaktadır. Varsayın ki, her bir perakendeci ürün için sabit taleple karşılaşmaktadır. Amaç, araç rotalarını ve çizelgelerini ve ziyaret edilen tedarikçi sıklığını belirlemede bir stok politikası ve ulaşım stratejisi oluşturmak, dolayısıyla sistem genelinde stok ve ulaşım maliyetlerini minimize etmektir (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.4.5. Araç Filosu Yönetimi

Bir depo sınırlı kapasiteli araç filosu kullanarak perakendecilere ürünlerini sunmaktadır. Bir gönderici, araçlara yük dağıtma ve araç rotalarını belirleme görevindedir. Birinci olarak gönderici, bir araç tarafından uygun olarak sunulan, yükü bir araca uyan gruplara perakendecinin nasıl katılacağına karar vermelidir. İkinci olarak gönderici, maliyeti minimize etmek için hangi sırayı kullanacağına karar vermelidir. Doğal olarak, iki maliyet fonksiyonundan biri mümkündür; birinci olarak amaç, kullanılan araç sayısını minimize etmek, ikinci olarak odak noktası, seyahat edilen toplam uzaklığı azaltmaktır. Sonrası, sınırlı kapasiteli araç filosu tarafından müşterilere hizmet verilmesi gereken tek depolu Kapasiteli Araç Rotalama Problemi örneğidir. Araçlar başlangıçta depoda yer almaktadır ve amaç minimum toplam uzunluğu olan araç rotaları bulmaktır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.4.6. Araç Rotalama

Perakendecilere ürün dağıtmak için depodan ayrılan bir araç olduğu varsayalım. Perakendecilerin verdiği sipariş miktarı, dağıtımın ne kadar uzun olacağını ve hangi sürede aracın depoya dönebileceğini belirleyecektir. Dolayısıyla aracın etkin bir rota izlemesi önemlidir. Bir depodan perakendecilere minimum uzunluktaki rotayı bulma problemi (hem zaman, hem uzaklık açısından) Gezgin Satıcı Problemi örneğidir ve araç rotalama filo yönetiminin alt problemidir (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.4.7. Paketleme Problemi

Çoğu lojistik uygulamalarında, parçalar kutulara veya sınırlı ölçüde araçlara paketlenmelidir. Amaç kullanılan kutu sayısının mümkün olduğunca küçük olduğu parçaları paketlemektir. Bu problem Sırt Çantası Problemi olarak tanımlanır. Örneğin, amaç ürünleri dağıtırken kullanılan araç sayısını minimize

etmek olduğu zaman Kapasiteli Araç Rotalama Probleminin özel bir durumu olarak ortaya çıkmaktadır. Aynı zamanda diğer birleşik problemlerde alt problem olarak ortaya çıkmaktadır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.4.8. Zaman Penceresiyle Dağıtım

Birçok durumda ürünleri müşterilere ve perakendecilere özel zaman pencereleri boyunca dağıtmak gerekir. Bu durumda örneğin belirli bir perakendeci veya müşteri saat 9-11 arası dağıtım isteyebilir. Her bir perakendeci bir zaman penceresi belirlerse, kapasite kısıtlarını ve zaman penceresi kısıtlarını karşılayan araç rotalarını bulma problemi daha zor olmaktadır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.4.9. Toplamalı Dağıtım Sistemleri

Bazı dağıtım sistemlerinde her bir müşteri, alım yeri ve bir dağıtım veya varış yeri olabilmektedir. Gönderici, ürünlerin alım ve dağıtımını koordine etmeye ihtiyaç duyar, dolayısıyla her bir müşteri alım/dağıtım çifti tek bir kamyon tarafından karşılanır ve toplam seyahat edilen mesafenin mümkün olduğunca küçük olması amaçlanır. Bir kamyon rotası, araç kapasite kısıtını, her bir alım ve dağıtım için zaman penceresi gerekliliklerini karşılamak ve alımın dağıtımdan önce gerçekleştirileceğini garanti etmektedir (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

2.5. Lojistik Problemlerini Modelleme

Önceki bölümde sunulan, matematiksel olarak tanımlanabilen problemler, gerekli veriler mevcut olmadığı sürece anlamsızdır. Verileri bulmak, doğrulamak ve tablo haline getirmek oldukça güçtür. Gerçekte stok tutma maliyetleri, üretim maliyetleri, ekstra araç maliyetleri ve depo kapasitelerini saptamak genellikle zordur. Bunun yanında, belirli lojistik problemi ile ilgili verileri tanımlamak, veri toplama problemine başka bir karmaşıklık getirmektedir. Veriler olsa bile,

karmaşık gerçek hayat problemlerini modelleme ile ilgili başka güçlükler vardır. Analizlerde seyahat zamanlarında sapmalar, üretimde yer alan değişkenler, stok azaltma, tahmin, işgücü çizelgeleme gibi unsurlar genellikle dikkate alınmaz. Bu unsurlar, lojistik uygulamaları daha da karmaşıktır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

Firmalar lojistik problemlerini çözmek için çeşitli yaklaşımlar kullanmaktadır. Birinci olarak, insanlar geçmişte iyi olan şeyleri tekrar etmeye eğilimlidir. Eğer geçmiş yılın emniyet stok seviyesi yığın talepten kaçınmak için yeterli ise, benzer seviye bu yıl da kullanılabilir. Eğer geçmiş yılın dağıtım rotası başarılıysa, tüm perakendeciler zamanında teslim alırlar ve dolayısıyla değiştirmezler. İkinci olarak, sıklıkla kullanılan “öncelik kuralı” çok etkin olabilir. Örneğin birçok lojistik yöneticisi sık sık “20/80 kuralını” kullanır, buna göre ürünlerin yaklaşık %20’si, toplam maliyetin yaklaşık %80’ini yaratmaktadır ve dolayısıyla bu kritik ürünlere yoğunlaşmak yeterlidir.

Lojistik ağı tasarımı çeşitli tecrübelerden de faydalanılarak yapılır. Bunun bir örneği, eğer firma ABD’de hizmet sunuyorsa ve sadece bir depoya ihtiyaç varsa, bu deponun Chicago’da yer alması gerekirken iki depoya ihtiyaç var ise birinin Los Angeles’ta diğerinin Atlanta’da kurulması gerekir. Sonuç olarak bazı firmalar lojistik uzmanları sezgisine ve deneyimine başvurmayla çalışırlar ve rakipleri için iyi olan şeyin kendileri için de iyi olması gerektiği fikrine sahiptirler (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

Tüm bu yaklaşımlar cazip ve anlam yaratan lojistik stratejilerle sonuçlanırken, belirli olaylar için “en iyi” stratejiye odaklanmamak yüzünden ne kadar kaybedildiği açık değildir.

Yakın dönemde, hızla artan bilgisayar çözüm süreleri ile, sadece büyük firmalar için değil birçok firma için, lojistik stratejilerini optimize etmek amacıyla sofistike karar destek sistemlerini almak ve kullanmak şart olmuştur. Bu sistemlerde veriler girilmekte, gözden geçirilmekte ve çeşitli algoritmalar yönetilerek önerilen sonuç sade bir şekilde sunulmaktadır. Sistem uygun problemi çözmektedir ve bu karar destek sistemleri, sistem genelindeki maliyetleri önemli ölçüde

azaltmaktadır. Her ne kadar tam anlamda kesin olarak “optimizasyon” olarak düşünülmesi de, sistem kullanıcıları için faydalı bir araç olarak hizmet vermektedir. Çoğu olayda bu sistemler yöneylem araştırması, yönetim bilimleri ve bilgisayar bilimleri tarafından geliştirilen teknikleri uygulamaktadır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

Yukarıdaki problemlerin çoğu, NP-zor problemler olarak nitelendirilen, zor birleşik problemlere sahiptir. Bu durum göstermektedir ki, her zaman optimal çözümü veya en iyi olası kararı bulacak bir algoritmayı yaratabilmek çok zordur. Dolayısıyla birçok durumda kesin çözüm yöntemleri kullanılarak optimal çözüme ulaşılamamaktadır ve böylece sezgisel yöntemler kullanılarak problemlere çözümler aranmaktadır (Simchi-Levi ve Bramel, 1997).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

GEZGİN SATICI PROBLEMİ

Bu bölüm Gezgin Satıcı Problemi (Traveling Salesman Problem, (TSP)) (GSP) hakkında genel bir literatür bilgisi içermektedir. GSP belki de en çok çalışılan optimizasyon problemlerinden birisidir. GSP'nin kolay formüle edilmesi, zor çözülmesi ve çok sayıda uygulama alanı olması, popülaritesinin artmasını sağlamıştır. Literatürde gezgin satıcı probleminin çok sayıda çeşidi ve genellemeleri vardır (Gutin ve Punnen, 2002). GSP veya onun bir türevi şeklinde modellenen problemler, matematik, yöneylem araştırması, yapay zeka ve fizik gibi farklı alanlardaki çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmektedir. GSP'nin araştırmacıların ilgisini çekmesinin önemli bir nedeni de kolayca formüle edilmesine rağmen çok zor çözülebilen NP-zor sınıfı problemlerinden birisi olmasıdır. GSP için pek çok kesin çözüm algoritması önerilmesine rağmen, şu ana kadar en iyi metot dal-sınır metodudur (Laporte, 1992).

Gezgin satıcı problemi muhtemelen en çok bilinen ilişkisel optimizasyon problemidir. GSP, gezgin satıcının kendi şehrinden başlayıp, tanımlanmış diğer şehirleri ziyaret edip, tekrar kendi şehrine dönmesi için gereken en kısa yolu bulma problemidir. Kat edilen yol, şehirlere hangi sırada uğranacağına göre değişmektedir. Buna göre, gezgin satıcı problemi optimal şehir sıralamasını bulma problemi olarak da adlandırılabilir.

$V = \{1,2, \dots, n\}$ köşe noktalarına ve $A = \{(i,j): i,j \in V\}$ kenar setine sahip $G=(V,A)$ grafik olsun. c_{ij} (i,j) kenarı ile ilgili maliyet ve $C=(c_{ij})$ 'de A seti ile ilgili maliyet matrisi olsun. Eğer $c_{ij} = c_{ji}$ ise problem simetriktir. Maliyet matrisi (C) tüm i,j,k için $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$ üçgen eşitsizliğini sağlar. Hamilton turu, n noktası olan grafikteki her bir noktaya sadece bir kere uğrayan döngü olarak tanımlanabilir. Hamilton turunun uzunluğu, döngü içindeki kenarların uzunluğu

toplamından oluşmaktadır. GSP'nin amacı, en küçük uzunluktaki Hamilton turunu bulmaktır (Laporte, 1992).

Son yıllarda bilgisayar gücündeki gelişmeler ve etkin algoritmaların ortaya çıkması ile GSP çözümünde önemli gelişmeler kaydedilmiştir. Applegate, Bixby, Chavatal ve Cook gezgin satıcı test problemlerinden bazı çözülmemiş problemleri çözmüşlerdir. Bunlardan, 7397 şehirli problem 1994 yılında, 13509 şehirli problem 1998 yılında, 15112 şehirli problem 2001 yılında ve 24978 şehirli problem 2004 yılında çözülmüştür. Bu başarılarla rağmen GSP hala başarılı bir şekilde çözümlenmeden uzaktır (<http://www.tsp.gatech.edu/history/milestone.html>), z.t.:11.09.2008).

Süper bilgisayarlar, paralel bilgisayarlar gibi bilgisayar teknolojilerindeki gelişmelere karşın pek çok problemin çözümü hala çok zordur. Bir grup araştırmacının (Applegate, 1998), 13509 şehirlik bir problemi çözmesi 48 bilgisayar ile 3 ayı almıştır. Bu durumda normal bir bilgisayar ile bu problemi çözmek için 12 yıl gerekmektedir (<http://www.tsp.gatech.edu/history/milestone.html>), z.t.:11.09.2008).

3.1. Gezgin Satıcı Probleminin Tarihçesi

GSP birçok akademisyen tarafından farklı isimlerde kullanılmıştır. Karl Menger (1932), GSP'nin bir çeşidini ulak problemi olarak adlandırmıştır. Ulak problemi ile gezgin satıcı problemi birkaç küçük farklılık içermesine rağmen aslında aynı problemdir. Menger ulak problemini şöyle tanımlamıştır. "Ulak problemi karşılıklı eşit uzaklıkta olan belirli sayıdaki noktalar bilinirken, bu noktalar birleştirilerek en kısa yolun bulunması problemidir. Bu problem belirli sayıdaki noktalar için her zaman kesin olarak çözüm sağlamaktadır. Başlangıç noktasından sonra en yakın komşuya gitme kuralı, en kısa yol problem için geçerli değildir." Karl Menger'in (1932) GSP alanında ilk yayın yapan kişi olduğuna inanılmaktadır. Menger bütün olurlu yollar test edilerek, optimum sonuca ulaşma stratejisini önermiştir ve en yakın komşu algoritmasının optimum sonucu garanti etmediğini

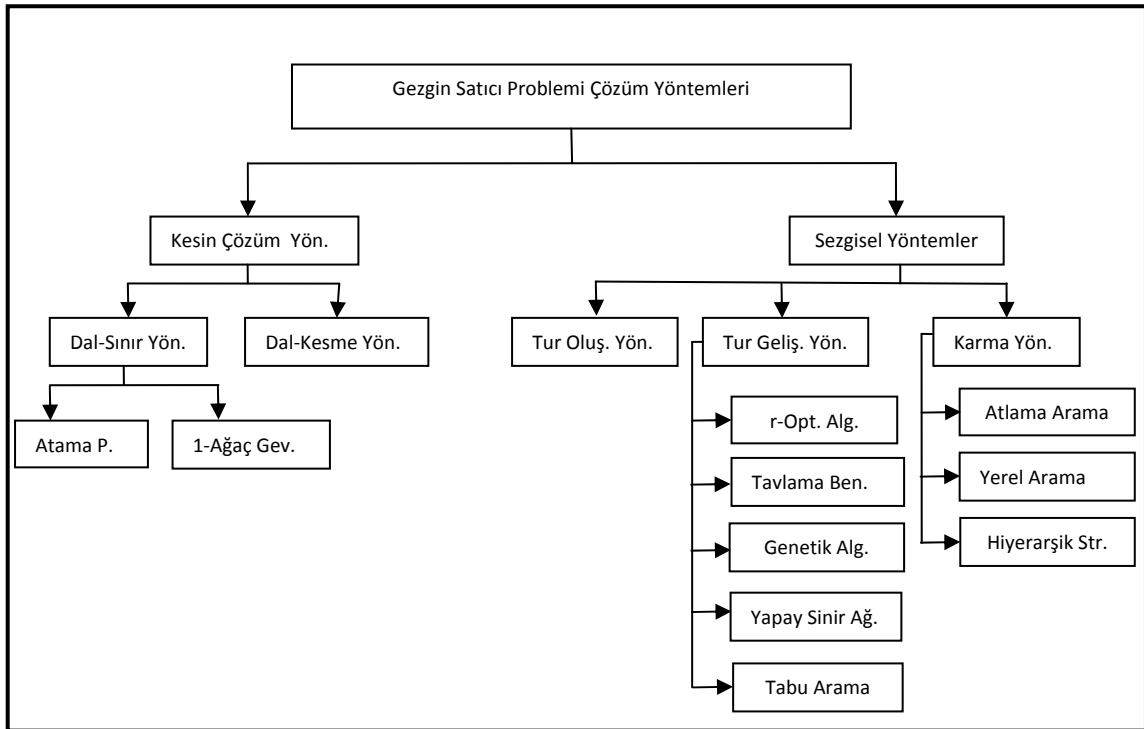
belirtmiştir. Hatta bazı durumlarda en yakın komşuyu seçme stratejisi en kötü sonucu vermektedir (Gutin ve Punnen, 2002).

Bu alandaki ikinci çalışma Mahalanobis'e aittir. Mahalanobis 1939'da Hindistan Bilim Kongresi'nde, Bengal'deki hintkeneviri tarım alanı tahmin problemi ile ilgili bir konuşma yapmıştır. Amaç, sonuçların güvenilirliğini maksimize ederek, alandaki faaliyetlerin maliyetlerini belirli bir seviyenin altında tutarak kontrol etmektir. Maliyet hesaplamalarının bir parçası olarak, Mahalanobis Öklid alanındaki sonsuz sayıdaki noktalar aracılığıyla, en düşük maliyet rotalaması ile ilgili çalışmaktadır. Her ne kadar böyle bir seyahat için olası en düşük maliyeti hesaplamada hiçbir sonuç raporlanmasa da, Mahalanobis'in böyle minimum maliyet rotalaması bulmanın yarattığı güçlüklerden haberdar olduğu açıktır. Mahalanobis'in maliyet hesaplamaları, genel maliyet fonksiyonunun küçük bir parçasını oluşturan, rastgele noktaları dikkate alan tahmini verilere dayanmaktadır (Gutin ve Punnen, 2002).

1949 yılında Gezgin Satıcı Problemi adını kullanarak ilk makale J.B. Robinson tarafından yayınlanmıştır. Fakat İlişkisel optimizasyona giren GSP ile ilgili sistematik bir çalışma Danzig, Fulkerson ve Johnson (1954) tarafından yapılmıştır.

3.2. GSP İçin Çözüm Yöntemleri

Gezgin satıcı problemini çözmek için araştırmacılar tarafından pek çok yöntem geliştirilmiştir. Bu çözüm yöntemleri optimal çözüme ulaşıp ulaşmamasına göre kesin çözüm yöntemleri ve sezgisel yöntemler olarak ikiye ayrılır. Gezgin satıcı problemi için kullanılan başlıca çözüm yöntemleri Şekil –3.1'de gösterilmektedir. Bu çözüm yöntemlerden ileriki kısımlarda bahsedilecektir.



Şekil – 3.1. Gezgin Satıcı Problemi Çözüm Yöntemleri

3.2.1. GSP İçin Kesin Çözüm Yöntemleri

GSP’de optimum çözüme ulaşılması çoğunlukla mümkün olmamakla beraber, bin civarı nokta için bilgisayar yardımı ile birkaç güne kadar optimum sonuca ulaşmak mümkündür.

Kesin çözüm yöntemi her zaman optimal çözüm veren bir yöntemdir. Yaklaşık çözüm yöntemi ise bazı sezgisel yöntemler kullanarak hızlı bir şekilde optimale yakın çözümler üretmektedir.

GSP’yi kesin çözüm algoritmaları ile çözmek için, genellikle karma tamsayılı doğrusal programlama yöntemlerinden olan Dal-Sınır metodu kullanılır. Dantzig, Fulkerson ve Johnson (1954) tarafından aşağıdaki karma tamsayılı formülasyon önerilmiştir:

Amaç Fonksiyonu

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_{j \neq i} d_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

Kısıtlar

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} = 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \neq j} x_{ij} = 1, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \text{ tamsayı}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad i \neq j \quad (3.4)$$

$$\sum_{i,j \in S, i \neq j} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \quad 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (3.5)$$

(3.1) ile (3.5) arasındaki denklemlere P problemi adını verelim. P probleminin gevşetilmiş çeşidi olan P' , P probleminde yer alan (3.4) tamsayı kısıtlarının ve (3.5) te yer alan kısıtların gevşetilmesi sonucu ortaya çıkmıştır. Daha sonra

- (3.6) denklemdeki gibi Hamilton turu tanımlanarak x_{ij} 'lerin (3.2)-(3.4) kısıtlarını sağladığı kontrol edilir.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } (i, j) \text{ Hamilton turuna ait ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.6)$$

- (3.2) – (3.4) kısıtlarını sağlayan her sonuç Hamilton turunu sağlamayabilir. Bazı sonuçlar bütün noktalara uğramamaktadır. Bu sonuçlara Hamilton olmayan tur veya alt tur adı verilir.
- (3.5) kısıtı alt turları elemeye yaramaktadır. (3.5) kısıtı alt turları eleme kısıtı olarak da nitelendirilmektedir.
- (3.5) kısıtı şehir sayısının üsteli (2^n) olarak artmaktadır. Bu yüzden (3.4) kısıtı gevşetirse bile bazı problemler doğrusal programlama ile çözülemeyebilir.
- (3.1) – (3.4) kısıtlarını içeren gevşetilmiş problem Atama Problemi olarak bilinir ve bu problemi çözmek için etkin algoritmalar geliştirilmiştir.
- P' için optimum sonuç olan x_{ij}^* , eğer x_{ij}^* (3.2) – (3.5) kısıtlarını sağlıyor ise P problemi için de optimum sonuç olarak kabul edilir.

- P için x_{ij}^* kısıtlarını sağlaması aynı zamanda $G=(V,A)$ 'da bir Hamilton turu oluşturur.

Dantzig, Fulkerson ve Johnson (1954), P problemini çözmek için aşağıdaki metodu önermiştir.

1.Aşama: Bir tamsayı kısıtı olmadan (3.1) – (3.4) P' problemini tanımla

2.Aşama: P' problemini çöz ve $(x_{ij}), T := \{(i,j): x_{ij}^* > 0\}$ sonucunu elde et

3.Aşama: Eğer T bir Hamilton turunu sağlıyorsa dur, yoksa (3.5) kısıtına uymayan S çözümünü tespit et ve bu kısıtı P' problemine ekle ve 2.Aşamaya geri dön.

Bu yöntem ile Dantzig ve arkadaşları o zamanlarda büyük kabul edilen 49 şehirlik problemi çözmüşlerdir. Dantzig (3.5) kısıtına kesme düzlemleri (*cutting planes*) adını vermiştir. Dantzig ve arkadaşlarının bu çalışmaları, kesme düzlemi yönteminin karma tamsayılı programlama problemlerinin çözümüne faydalı olduğunu göstermiştir. Bu metot daha sonra tamsayılı doğrusal problemler için *Kesme Düzlemi Algoritmaları*'nı geliştiren Gomory tarafından 1958 yılında formüle edilmiştir (Gutin ve Punnen, 2002). Bu metot, büyük sayılabilecek problemleri sonlu sayıda iterasyon ile çözebilmektedir. Buna rağmen en popüler GSP çözüm metodu, Dal-Sınır ve Dal-Kesme metotlarıdır.

3.2.1.1. Dal – Sınır Yöntemleri

Dal-sınır yöntemi arama ağacı ile ilişkili kısmi bir sıralama metodudur. Dal-sınır yönteminde ağaç kökleri bütün olası çözümleri içermektedir. Arama ağacının her bir düğüm noktası, amaç fonksiyonu değeri için daha düşük bir sınır noktası içeren çözüm kümesinin bir alt kümesidir. Alt sınır ilişkili olan gevşetilmiş doğrusal problemin çözülmesi ile elde edilir. Optimal çözümü ararken, düğüm noktalarının artmasıyla daha dar bir çözüm kümesi elde edilir. Bu metot

dallandırma yolu ile yeni arama yolları açmaktadır. Bu aramada belirli koşullar altında bazı düğüm noktaları elenir. Her bir düğüm noktası elendiğinde veya araştırıldığında işlem sona erer.

Dal-sınır yöntemi ilk defa Dantzig ve arkadaşları tarafından 1954 yılında 49 şehirlik problemi çözmek için kullanılmıştır. Dal-sınır yöntemi ilk defa Little ve arkadaşları tarafından 1963 yılında adlandırılmıştır. Dal-sınır yönteminin algoritması aşağıdaki gibidir (Laporte, 1992).

Aşama 1: Üst limit sonsuz ($z^* = \infty$) olarak belirlenir. GSP için Q çözüm kümesi belirlenir.

Aşama 2: Eğer Q çözüm kümesi boşsa ve $z^* < \infty$ ise GSP turu optimaldir. Eğer Q çözüm kümesi boş ve $z^* = \infty$ dir.

Farklı alt problem seçme kuralları, dallandırma kuralları ve gevşetme kuralları çeşitli yazarlar tarafından kullanılmıştır (Lawler ve diğerleri, 1985). Pek çok yazar GSP'nin doğrusal programlama ile formülasyonunun gevşetilmesi için Atama problemi, 1-ağaç gevşetilmesi ve Lagrange gevşetilmesi gibi farklı yöntemler kullanmışlardır.

3.2.1.1.1. Atama Problemi

Atama problemi (AP), n tane işin m makineye atanması ve toplam maliyetin $\sum_i \sum_{j \neq i} c_{ij} x_{ij}$ minimum yapılmasını isteyen bir problem olarak tanımlanabilir. Bu GSP için kullanılan ilk gevşetmelerden biridir. (3.1) – (3.4) denklemleri AP formülasyonunu sağlamaktadır. Buna göre GSP gevşetilmesi (3.1) – (3.5) Danzig, Fulkerson ve Johnson (1954) tarafından sağlanmıştır. Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi (AGSP) için pek çok algoritmanın temelinde AP vardır. Bu çalışmada simetrik problem ele alındığından AP gevşetmesine kısaca değinilecektir. AP kullanılarak geliştirilen algoritmaların etkin olanlarının bazıları Carpaneto ve Toth (1980), Miller ve Penky (1991) ve Carpaneto ve arkadaşları

(1995) tarafından geliştirilen algoritmalarıdır. Aşağıda bu yazarların çalışmalarına kısaca değinilmiştir.

Carpaneto ve Toth Algoritması

Carpaneto ve Toth, AGSP için en küçük ilk dal-sınırına dayanan bir algoritma ortaya koymuşlardır. Dallandırma işlemi, amaç fonksiyon değeri en küçük olan düğüm noktasından yapılır. Her bir düğüm noktası için, örneğin h , (3.1) – (3.4) denklemleri dikkate alınarak ortaya çıkan problem Değiştirilmiş Atama Problemi (DAP_h) gibi çözülüp, çıkartılan kenarlar alt kümesi E_h ve eklenen kenarlar alt kümesi I_h aşağıdaki gibi (3.7) tanımlanmıştır:

$$E_h = \{(i, j) \in A: x_{ij} = 0\}, I_h = \{(i, j) \in A: x_{ij} = 1\} \quad (3.7)$$

Eğer DAP_h 'nin optimal sonucu bir Hamilton turu oluşturuyorsa ve DAP_h 'nin optimal amaç fonksiyonu değeri, bilinen en iyi çözümden daha iyi ise, h düğüm noktasından m tane alt problem yeni bir dallandırma kuralına göre aşağıdaki gibi dallandırılır:

$G_q, q = 1, \dots, d$ DAP_h tarafından üretilen alt turlar olsun ve bir alt tur $G_q = (V_q, A_q)$ ile $V_q = \{r_{q1}, \dots, r_{qe_q}\}$ ve q . alt tur için $e_q = |V_q| = |A_q|$ durumda $A_q = \{(r_{q1}, r_{q2}), \dots, (r_{qe_q}, r_{q1})\}$ olsun. I_h kenar setinde yer almayan en az sayıda kenarlara sahip G_q alt turu dallandırmak için seçilir (Carpaneto ve Toth, 1980).

$$m = e_p - |A_p \cap I_h| = \min_{\{q=1, \dots, d\}} \{e_q - |A_q \cap I_h|\} \quad (3.8)$$

Önerilen bu metot ile 40 şehirden 240 şehire kadar rastgele 20 problem çözülmüştür (Carpaneto ve Toth, 1980).

Miller ve Penky Algoritması

Atama Probleminin duali Miller ve Penky tarafından aşağıdaki şekilde formüle edilmiştir.

Amaç Fonksiyonu

$$\max Z = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \quad (3.9)$$

Kısıtlar

$$c_{ij} - u_i - v_j \geq 0, \quad i, j \in V, i \neq j \quad (3.10)$$

Miller ve Penky, çok fazla sayıda çözümleri incelemeyi engelleyerek, etkin bir şekilde problemi çözmek için, orijinal problem ile aynı optimal sonuca sahip olan ve daha hızlı çözülebilen daha basit bir model oluşturmuşlardır. AP' gevşetilmesi ile ilişkili $AGSP'$ için değiştirilmiş bir maliyet matrisi c'_{ij} düşünölsün:

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{Eğer } c_{ij} \leq \lambda \\ \infty & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.11)$$

$AGSP$ ve AP' 'nin optimal değeri sırasıyla $v(AGSP)$ ve $v(AP')$ olsun. Eğer

$$v(AGSP) - v(AP') \leq \lambda + 1 - u'_i - v'_{max} \quad (3.12)$$

$$\lambda + 1 - u'_i - v'_{max} \geq 0, \quad \forall i \in V \quad (3.13)$$

ve (u', v') dual AP' nin optimal çözümlü ve v'_{max} , v' için maksimum eleman ise, $AGSP'$ için optimal sonuç olan z^* $AGSP$ için de optimal sonuçtur.

$\lambda + 1 - u'_i - v'_{max}$ çıkartılan matris elemanının, hiçbir başka elemanın daha iyi bir sonuç elde edemeyeceği en küçük azaltılmış maliyettir.

Dal-sınır metoduna, AP' 'nin optimal çözümlü setinden $AGSP'$ 'ye hızlı bir şekilde çözümlü bulmak için bir özellik eklenmiştir. Bu özellik verilen grafikte $AGSP$ çözümlünün azaltılmasını sağlamaktadır.

\bar{G} , V köşe noktalarına sahip ve u_i^* ve v_i^* optimal dual AP'nin değişkenleri olduğu, $\bar{A} (= \{(i, j) | c_{ij} - u_i^* - v_j^* = 0\})$ kenarlarına sahip, $\bar{G} = (V, \bar{A})$ şeklinde tanımlanan bir grafik olsun. \bar{G} üzerindeki bir Hamilton turu AGSP için bir optimal çözümdür. Eğer \bar{G} bir Hamilton turu içermiyor ise, AP'nin alt sınırı en küçük sıfır olmayan bir indirgenmiş maliyet kadar artırılabilir. Bu özellik Dal-sınır metotlarına eklenmiştir.

Beş farklı özellikte rastgele üretilen problemler test edilmiş ve 500.000 şehirlik problem süper bilgisayar yardımı ile 12,623 saniyede çözülmüştür (Miller ve Penky, 1991).

Carpaneto, Dell'amico ve Toth Algoritması

Carpaneto, Dell'amico ve Toth, Atama Problemini temel alan en küçük dal-sınır metodu ve alt tur elemesi için yeni bir algoritma önermişlerdir. Bu algoritma Carpaneto ve Toth (1980) algoritmasının dört yönden geliştirilmiş halidir:

1. Kök düğüm noktasında (0. düğüm noktası), optimal tura ait olamayacak kenarlar, azaltma yöntemi ile çıkartılır. Orijinal C matrisi, her bir matris elemanı u_i ve v_j ile azaltılan ($\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$) \bar{C} matrisine dönüştürülür. u_i ve v_j AP ile ilişkili dual problemin optimal çözümüdür. \bar{c}_{ij} bir alt sınırı temsil etmektedir. \underline{z} , AP'nin dual probleminin bir alt sınırı olsun. Eğer olurlu sonuç z^* biliniyorsa, $\bar{c}_{ij} \geq z^* - \underline{z}$ olan, kenar eklenmesi z^* 'den daha küçük bir çözüm üretmeyen her kenar, $(i, j) \in A$, çıkartılır. Böylece orijinal G grafiği, daha seyrek olan $\bar{A} = \{(i, j) \in A : c_{ij} < z^* - \underline{z}\}$ olduğu $\bar{G} = (V, \bar{A})$ grafiğine dönüşür.
2. Her bir düğüm noktasında GAP çözümler ve kullanılan algoritmanın etkinliği GAP'nin çözümüne büyük ölçüde etki eder. h düğüm noktasında, GAP_h 'yi çözmek için özel bir parametrik teknik kullanılır. Kenar alt kümesi olarak \bar{A} kullanılır.

3. Karar ağacının düğüm noktası ile ilişkili bilgilerinin saklanması için etkin bir veri stoklama vardır. Bu da değişmeyen bilgileri güncellemeyi önlemektedir.
4. Birkaç optimum sonuca sahip olan h düğüm noktası düşünölsün. Alt turların sayısını azaltan bağlantı yöntemi, aşağıda göröldüğü gibi tekrarlı bir şekilde uygulanır:

$G_a = (V_a, A_a)$ ve $G_b = (V_b, A_b)$ iki alt tur olsun. $(i_a, j_a) \in A_a$ ve $(i_b, j_b) \in A_b$, $\bar{c}_{i_a j_a} = \bar{c}_{i_b j_b} = 0$ olan iki kenar düşünölsün. G_a ve G_b aşağıdaki gibi tek bir alt tur olarak birleşebilir.

$$G_a = (V_a \cup V_b, A_a \cup A_b) = ((i_a, j_a) \cup (i_b \cup j_b) \cup (i_a, j_b) \cup (i_b \cup j_a)) \quad (3.14)$$

Eğer Hamilton turu bulunursa, bu sonuç h düğüm noktası için optimum çözümdür.

Geliştirilmiş algoritma kullanılarak 3 dakikadan kısa sürede, 2000 şehire kadar rastgele problemler çözülmüştür (Carpaneto ve diğerleri, 1995).

3.2.1.1.2. 1-Ağaç Gevşetilmesi Yöntemi

$V = \{1, \dots, n\}$ köşe noktaları ve A kenar seti olan $G = (V, A)$ grafiğı düşünelim. c_{ij} , i noktasından j noktasına kenar uzunluğu olsun. Ağaç grafiğıe bir tur olmadan bağlıdır. Verilen G grafiğıne göre, minimum kapsar ağaç (minimum spanning-tree) problemi, G içerisindeki en küçük kenar uzunluğunun toplamına sahip kapsar ağacı bulma problemidir. 1-Ağaç iki ayrı kenarın bir noktada birleşmesidir. Minimum 1-ağaç problemi aşağıdaki gibi formöle edilmiştir (Held ve Karp, 1970):

Amaç Fonksiyonu

$$MaxZ = \sum_{i<j} c_{ij}x_{ij} \quad (3.15)$$

Kısıtlar

$$\sum_j x_{ij} = 2 \quad (3.16)$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} = n \quad (3.17)$$

$$\sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset \{2,3, \dots, n\} \quad (3.18)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad x_{ij} \text{ tamsayı} \quad (3.19)$$

x_{ij} ikili değişken olduğu için, (3.16) kısıtı köşe noktası yani iki kenarın birleşmesini sağlamaktadır. (3.17) kısıtı $\{(i,j): x_{ij} = 1\}$ nokta setinin $V-\{1\}$ kenarları için ağaç oluşturmaktadır. (3.18) kısıtı alt turların oluşmasını engelleyen alt tur eleme kısıtıdır. (3.16) – (3.19) kısıtlarını sağlayan x_{ij} çözümü eğer (3.16) kısıtını sağlar ise GSP turu oluşturulmuş olur.

$$\sum_{j>i} x_{ij} + \sum_{j<i} x_{ij} = 2, \quad 2 \leq i \leq n - 1 \quad (3.20)$$

(3.20) kısıtı her bir noktanın iki kenara sahip olmasını sağlamaktadır. Buna göre (3.15) – (3.20) denklemleri GSP için farklı bir formülasyon sağlamıştır (Held ve Karp, 1970).

(3.15) – (3.20) içeren GSP problemini çözmek için Lagrange gevşetilme tekniği kullanılmıştır. (3.20)'daki kısıt (3.15)'deki amaç fonksiyonuna eklenmiş ve Lagrange gevşetilmesi problemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$L(\pi) = \min \left\{ \sum_{i<j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i \pi_i \left[\sum_{j>i} x_{ij} + \sum_{j<i} x_{ji} - 2 \right] : (4.16) - (4.19) \text{ sağlayan } x_{ij} \right\} \quad (3.21)$$

bu da,

$$L(\pi) = \min \left\{ \sum_{i < j} (c_{ij} + \pi_i + \pi_j)x_{ij} - 2 \sum_i \pi_i : (4.16) - (4.19) \text{ sağlayan } x_{ij} \right\} \quad (3.22)$$

Lagrange gevşetilmesi, (3.23) denklemini sağlayan $\pi = \pi^*$ değeridir ve bu problem GSP için Lagrange duali olarak adlandırılmaktadır.

$$L(\pi^*) = \max_{\pi} \{L(\pi)\} \quad (3.23)$$

Lagrange gevşetilmesi problemi ($L(\pi^*)$), GSP'nin optimum tur uzunluğu için bir alt sınır sağlamaktadır. 20 noktadan 64 noktaya kadar çeşitli boyuttaki problemler bu metot ile çözülmüştür.

Held ve Karp'ın algoritması π 'nin hesaplanmasında değişik metotlar kullanılarak geliştirilmiştir. Geliştirilen bu algoritma Held ve Karp'ın algoritmasından 25 kat daha hızlıdır. 10 noktadan 80 noktaya kadar problemler test edilmiştir (Helbig ve Krarup, 1974).

Lanrange çarpanlarını bulabilmek için ikili azalan bir algoritma kullanılarak, Held ve Karp'ın algoritmasından daha hızlı ve daha az bilgisayar süresi isteyen çözümler geliştirilmiş ve 100 şehre kadar olan problemler çözülmüştür (Malik ve Fisher, 1990).

3.2.1.2. Dal-Kesme Yöntemi

Dal-Kesme yöntemi dal-sınır metodu ile çok yüzlü (polyhedral) metodun birleşimiyle oluşmaktadır. Bu metot büyük boyuttaki bazı zor problemleri başarı ile çözmüştür. Çok yüzlü teorisinin terminolojisi aşağıda verilmiştir:

\mathcal{P} problemi, S olurlu sonuçların setinin olduğu $\mathcal{P}: \min \{cx, x \in S\}$ olarak tanımlanabilir. \mathcal{P} probleminin gevşetilmesi ise $\mathcal{P}' = \min \{cx, Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$ şeklinde tanımlanır (Grötschel ve Pulleyblank, 1986).

Dal-kesme yönteminin ilk fikri Dantzig ve arkadaşları (1954) tarafından ortaya konmuştur ve 49 şehirlik bir problem çözülmüştür. Gevşetilmiş problem (\mathcal{P}') çözülmüş ve x çözümü elde edilmiştir. Eğer x S 'in dışında ise x S 'den, S üzerindeki tüm noktaları sağlayan ve x çözümünü içermeyen bir kesme düzlemi ile ayrılır. Bu eklemeye daha sıkı bir gevşetme mümkün olmaktadır. Bu yöntem S içerisinde bir çözüm bulana kadar devam eder. Dal-kesme metodunun en önemli yanı, GSP için olurlu çözümlerin ortaya çıkmasına yarayan yüzlem (*facet*) eşitsizliklerinin bulunmasıdır. Yıllar geçtikçe literatürde GSP için bazı yüzlem eşitlikleri geliştirilmiştir. İlk yüzlem eşitsizliği Dantzig ve arkadaşları (1954) tarafından tamsayı doğrusal programlama formülasyonu için ortaya konan alt tur eleme kısıtıdır. Kesme düzlemlerinde kullanılmak için ikili-eşleme ve tarak adında iki tür eşitsizlik önerilmiştir (Grötschel ve Padberg, 1979). Klik (clique) ağaç eşitsizlikleri adında farklı bir sınıf eşitsizlik ortaya konularak büyük boyuttaki GSP'nin çözümünde başarılı olunmuştur (Grötschel ve Pulleyblank, 1986).

$G = (V, A)$, $(i, j) \in A$ kenarı ve (i, j) eşleşen noktaları V olan grafiği düşünelim. S , V 'deki noktaların bir alt kümesi ve $E(S) = \{(i, j) \in A \mid i \in S, j \in S\}$ şeklinde tanımlanmış olsun. Dört çeşit yüzlem eşitsizliği aşağıda kısaca açıklanmıştır.

a) Alt tur eleme kısıtları: Bu kısıtın amacı adından da anlaşılacağı gibi alt turların oluşmasını engellemektir.

$$\sum_{i,j \in S, i \neq j} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset V, \quad 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (3.24)$$

(3.24)'deki kısıtın başka bir formu aşağıdaki (3.25) denklemdir.

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 1, \quad S \subset V, \quad \bar{S} = V \setminus S, \quad 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (3.25)$$

(3.21) kısıtı S 'deki en az bir kenarın, \bar{S} ile bağlantılı olduğunu göstermektedir (Dantzig ve diğerleri, 1954).

b) İkili eşleme kısıtları: Bu kısıt her bir noktanın sadece iki kenar içermesini sağlamaktadır. Bu kısıtın formülasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{(i,j) \in E(H)} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A'} x_{ij} \leq |H| + \frac{1}{2}(|A'| - 1) \quad (3.26)$$

Her $H \subset V$ ve her $A' \subset A$ aşağıdaki kısıtları sağlamaktadır:

- (i) $|\{i, j\} \cap H| = 1$, her $(i, j) \in A'$
- (ii) $\{i_k, j_k\} \cap \{i_l, j_l\} = \emptyset, k \neq l$ ve $(i_k, j_k), (i_l, j_l) \in A'$
- (iii) $|A'| \geq 3$ ve tek (Grötschel ve Padberg, 1979)

c) Tarak eşitsizlikleri: Bu kısıt aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{(i,j) \in E(H_k)} x_{ij} + \sum_{k=1}^s \sum_{(i,j) \in E(T_k)} x_{ij} \leq \sum_{k=1}^r |H_k| + \sum_{k=1}^s (|T_k| - t_k) - \frac{1}{2}(s + 1) \quad (3.27)$$

Her $H, T_1, \dots, T_s \subseteq V$ aşağıdaki kısıtları sağlamaktadır:

- (i) $|T_k \cap H| \geq 1, k = 1, \dots, s$
- (ii) $|T_k \setminus H| \geq 1, k = 1, \dots, s$
- (iii) $T_k \cap T_l = \emptyset, 1 \leq k < l \leq s$
- (iv) $s \geq 3$ ve tek (Grötschel ve Padberg, 1979)

d) Klik ağaç eşitsizlikleri: Klik eşitsizliği aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{(i,j) \in E(H_k)} x_{ij} + \sum_{k=1}^s \sum_{(i,j) \in E(T_k)} x_{ij} \leq \sum_{k=1}^r |H_k| + \sum_{k=1}^s (|T_k| - t_k) - \frac{1}{2}(s + 1) \quad (3.28)$$

Her $H_1, \dots, H_r \subseteq V$ ve $T_1, \dots, T_s \subseteq V$, tarak eşitsizliğinin sapları ve dişleridir. T_k dişi ile kesişen sapların sayısı, t_k olarak tanımlanmıştır. Klik ağacı aşağıdaki özellikleri sağlayan kliklere sahip K_n grafiği ile bağlıdır.

- (i) Klikler, saplar ve dişler adında iki farklı gruba ayrılır.
- (ii) Hiçbir iki dişi kesişemez.
- (iii) Hiçbir iki sap kesişemez.
- (iv) Her bir dişi, en az 2 ve en fazla $n-2$ nokta içerir.
- (v) Her bir sapı tek sayıda (≥ 3) dişler keser. (Grötschel ve Pulleyblank, 1986)

Güçlü bilgisayarların gelişmesiyle ve etkin Dal-kesme algoritmalarının ortaya çıkmasıyla büyük boyuttaki GSP problemlerinin optimal sonuçları bulunmuştur. Crowder ve Padberg (1980) tarafından, 48 şehir ile 318 şehir arasındaki problemler alt tur elemesi ve tarak kısıtları sayesinde çözülmüştür. Padberg ve Rinaldi (1987) tarafından dal-kesme yöntemi kullanılarak, üst sınırı bulan sezgisel yöntem ve prosedür seti ile uymayan eşitsizliklerin saptanması yöntemiyle 532 şehirlik bir problem çözülmüştür. 1991 yılında büyük bir gelişme olmuş ve o zamana kadarki çözülebilen en büyük problem olan 2392 şehirlik problem, Padberg ve Rinaldi (1991) tarafından çözülmüştür. Bu başarı pek çok faktöre bağlıdır (Jünger ve diğerleri, 1995) :

- Farklı yöntemlerin birleşimini, sezgisel ve kesin çözüm algoritmalarını ve alt tur eleme kısıtlarını, ikili eşleme kısıtlarını, tarak kısıtlarını ve klik-ağaç eşitsizliklerini kendi algoritmalarında kullanmışlardır.
- Hızlı bilgisayarlar, CYBER205 ve IBM3090/600, büyük boyuttaki problemleri çözmek ve çözüm zamanını düşürmek için kullanılmıştır. 2392 şehirlik problem, CYBER205 bilgisayarı ile 27 saat 20 dakikada, IBM3090/500 bilgisayarı ile 2 saat 40 dakikada çözülmüştür.

- XMP ve OSL adında iki farklı doğrusal programlama çözücüsü kullanılmıştır. Doğrusal programlama çözücüleri, problemin çözüm süresine önemli derecede etki etmektedir.
- Lin ve Kernighan'ın (1973) üst sınırı bulmak için geliştirdiği, etkin bir sezgisel yöntem kullanılmıştır.
- Alt tur elemesi ve ikili eşleme kısıtları için kesin çözüm yöntemleri kullanılmıştır. Tarak eşitsizlikleri ve klik-ağaç eşitsizliklerini çözmek için de sezgisel yöntemler kullanılmıştır.

Applegate, Bixby, Chvatal ve Cook, GSP kütüphanesinden (TSPLIB) 1993 yılında 3.038 şehir, 4.461 şehir, 1995 yılında 7.397 şehir problemlerini çözmüşlerdir. 1998 yılında ise Applegate ve arkadaşları o ana kadarki en büyük problem olan 13.509 şehirlik problemi çözmüşlerdir. Geliştirdikleri algoritma 48 bilgisayardan oluşan bir ağda çalıştırılmıştır (Jünger ve diğerleri, 1995, <http://www.tsp.gatech.edu/history/milestone.html>, z.t.:11.09.2008).

3.2.2. Sezgisel Yöntemler

GSP için kullanılan kesin çözüm algoritmalarının bir dezavantajı, problemin çözülmesinin çok uzun zaman alması ve sadece küçük boyuttaki problemleri çözebilmesidir. Buna rağmen sezgisel yöntemler veya yaklaşık yöntemler, büyük boyuttaki problemlere makul bir bilgisayar zamanında optimale yakın çözümler bulabilmektedir. GSP için geliştirilen sezgisel yöntemler üç gruba ayrılır:

- **Tur oluşturma yöntemi:** Her bir aşamada bir şehir ekleyerek tur oluşturulur.
- **Tur geliştirme yöntemi:** Tur maliyetini azaltmak için şehirlerin pozisyonunu değiştirerek turu geliştirir.

- **Karma metot:** Üstteki iki metodun birleşmesi ile meydana gelir.

3.2.2.1 Tur Oluşturma Yöntemi

1960 ve 1970'li yıllarda büyük boyuttaki problemler için optimal çözüme yakın sonuçlar bulmak için tur oluşturma yöntemi geliştirilmiştir (Lawler ve arkadaşları, 1985).

- **En yakın ekleme yöntemi:** Tur içinde yer almayan k şehri i ve j arasında c_{kj} maliyeti en az olacak bir yere yerleştirilir.
- **En yakın yerleştirme yöntemi:** En yakın ekleme metoduna çok benzemektedir. Tek farkı ise k şehrinin tur içerisindeki en iyi yere yerleştirilmesidir.
- **En ucuz yerleştirme yöntemi:** Tur içerisinde olmayan ve en az maliyeti sağlayacak olan k şehri seçilerek tura eklenir.
- **En uzağa yerleştirme yöntemi:** Tur içinde yer almayan k şehri ve tur içerisinde yer alan $c_{kl} = \max_k \{ \min_j c_{kj} \}$ eşitliğini sağlayan j şehri iken, k şehri $c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$ eşitliğini minimum yapacak olan i ile j arasında bir yere yerleştirilir.
- **En yakın komşunun yanına yerleştirme yöntemi:** j tur içerisindeki son nokta iken, tur içerisinde yer almayan k noktası olarak j noktasına en yakın nokta seçilir.
- **En büyük açı yerleştirme yöntemi:** Tur içerisinde yer almayan k şehri, tur içerisinde yer alan i ve j şehirleri ile oluşturacağı (i,k) ve (j,k) kenarları en büyük açı yapacak şekilde yerleştirilir.

- **Orana bağılı yerleştirme yöntemi:** k şehri, i ve j şehirleri arasında $(c_{ik} + c_{kj} - c_{ij})(c_{ik} + c_{kj})/c_{ij}$ denklemini minimum yapacak şekilde yerleştirilir.

3.2.2.2. Tur Geliştirme Yöntemi

Tur geliştirme yönteminde yapılan ilk çalışmalarda r-Opt yöntemi kullanılmıştır. Günümüzde en çok çalışılan tur geliştirme metotları ise tavlama benzetim, tabu arama, genetik algoritma ve yapay sinir ağlarıdır.

3.2.2.2.1. r-Opt Algoritması

Gezgin satıcı problemleri için r-Opt algoritmasında $r=3$ kullanılarak yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Olurlu bir tur için r tane kenar iptal edilerek tur maliyetini düşüren ikinci bir kenar seti ile değiştirilir. Bu yöntem tur maliyetinde bir azalma olmayıncaya kadar devam eder ve çözüm r-optimal olarak adlandırılır.

Daha sonra bu yöntem r için farklı değer alabilme durumu eklenerek geliştirilmiştir. Bu metoda göre her bir iterasyonda r değerini atamak gerekmektedir (Lin, Kernighan, 1973).

3.2.2.2.2. Tavlama Benzetim

Tavlama Benzetim fikri ilk olarak 1953 yılında, sıcak banyoda maddenin ısıtıldıktan sonra soğutulma işleminin simule edilmesi için ortaya çıkmıştır. Bu işlemde katı madde eriyene kadar ısıtılır ve tekrar katı hale geçinceye kadar soğutulur. Soğutulan katı maddenin yapısı soğutulma hızına bağlıdır. Bu algoritma Boltzman dağılımına bağlıdır.

$$f(e) = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(\frac{-E}{kT}\right) \quad (3.29)$$

Bu denklemde E , T sıcaklığındaki enerjiyi ve k da Boltzman sabitini temsil eder. Enerji değişiminin (ΔE) olasılık denklemi ise aşağıdaki gibidir.

$$p(\Delta E) = \exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right) \quad (3.30)$$

Eğer enerji azalır ise, sistem yeni bir duruma geçer. Eğer enerji artışı olur ise, (3.30) denklemdeki olasılığa göre yeni bir duruma geçilmesi kabul edilir. Bu işlem, sistem donmuş hale gelinceye kadar devam eder. Bu yaklaşım 30 yıl sonra Kirkpatrick ve arkadaşları tarafından (1983) ilişkisel optimizasyon problemlerine uygulanmıştır. Bu durumda maliyetler fiziksel sistemdeki enerjiyi, olurlu çözümler sistemin içerisinde bulunan durumu, komşu çözüm, sistemin başka bir duruma geçmesini, sezgisel çözüm de sistemin donmuş durumunu göstermektedir. Bu yöntem bilgisayar tasarımı, yapay zeka ve GSP'de kullanılmaktadır (Aarts ve Lenstra, 1997).

Tavlama benzetim yönteminin GSP'ye uygulanması aşağıdaki şekildedir. Literatürde başlangıç çözümü oluşturma, sıcaklığın güncellenmesi ve donmuş durumun tanımında farklılıklar yer almaktadır.

1. **Aşama:** GSP için bir başlangıç çözümü (τ) elde edilir. Sıcaklık $T > 0$ olarak ayarlanır ve $\tau^* = \tau$ olarak atanır.
2. **Aşama:** Uygun yöntemle göre başlangıç turundan (τ) rastgele bir hareket yapılarak (τ' 'ye komşu olan) (τ') turu oluşturulur. $\Delta = c(\tau') - c(\tau)$ maliyet farkı hesaplanır.
3. **Aşama:** Eğer $\Delta < 0$ ise, $\tau = \tau'$ olarak atanır ve 5. aşamaya geçilir. Aksi halde $x \in [0,1]$ rastgele bir sayı belirlenir.
4. **Aşama:** Eğer $x < \exp(-\Delta/T)$ ise $\tau = \tau'$ olarak atanır.
5. **Aşama:** 2,3 ve 4. aşamalar daha önce belirlenen sayıda tekrarlanır.

6. Aşama: Sıcaklık (T) güncellemesi yapılır ve 2, 3, 4 ve 5. aşamalar daha önce belirlenen sayıda tekrarlanır.

Tavlama benzetim yöntemini GSP için ilk kez Kirkpatrick ve arkadaşları (1983) uygulamıştır. Bu yöntem 100, 316 ve 1.000 şehirlik problemler üzerinde, r-Opt yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Tavlama benzetim yönteminin r-Opt yönteminden iyi sonuç vermemesi ile birlikte, çok daha uzun çözüm zamanı gerektirmektedir. 1.000 şehirlik problemin çözüm süresi tavlama benzetim yöntemi ile 3,5 gün sürerken, diğer yöntem ile 0,77 saniyede çözüm elde edilmiştir.

Daha sonra tavlama benzetimde yapılan geliştirmeler ile bu yöntemin r-Opt yönteminden daha iyi sonuç vermesi sağlanmıştır fakat çözüm süreleri diğer yöntemlere göre çok uzundur (Chardaire ve diğerleri, 1995).

3.2.2.2.3. Genetik Algoritma

Genetik algoritma John Holland tarafından 1970'li yılların başında bazı zor doğa gelişim problemlerini bilgisayar ile çözmek için geliştirilmiştir. Genetik algoritmanın ilk uygulamaları yapay zeka ile ilgili uygulamalardır. Daha sonra GSP ile ilişkisel optimizasyon problemlerine uygulanmıştır (Reeves, Rowe 2002).

Genetik algoritmanın temeli doğal seçimin mekaniğine dayanmaktadır. Çok sayıda çözüm ile çalışılmış ve çözümü geliştirilerek en uygun çözüm bulunmaya çalışılmıştır. Her bir çözüme kromozom adı verilir ve kromozomlar 0-1 rakamlarını içermektedir. Kromozomların bir uyum skoru vardır ve belirli sayıda en iyi skora sahip kromozomlar seçilerek yeni nesil üretilir. En uygun kromozomlar arasından ebeveynler seçilip, seçilen kromozomlar bazı işlemler ile değişerek iki çocuk ortaya çıkarılırlar. Bu işlemler arasında çaprazlama, mutasyon ve değiştirme yer almaktadır.

Çaprazlama, iki ebeveynin özelliklerini birleştirerek çocuk oluşturmaktır. Tek bir noktada çaprazlama ise, iki ebeveynin kromozomlarının rastgele seçilen bir noktadan sonra değişerek çocuk oluşturmaktır. Mutasyon, çaprazlamadan sonra kromozomun sadece bir parçasının değişmesidir. Değiştirme ise iki parça arasındaki kromozomların ters çevrilerek yer değiştirmesidir. GSP için bu işlemlerin uygulanışı Tablo – 3.1’de gösterilmektedir.

Tip	Ebeveyn	Çocuklar
Çaprazlama	1-2/3-4-5-6	1-2-4-3-6-5
	2-1/3-4-5-6	2-1-3-4-5-6
Mutasyon	<u>2</u> -4-3-1-5- <u>6</u>	<u>6</u> -4-3-1-5- <u>2</u>
Değiştirme	2- <u>1</u> -3-4-5-6	2- <u>4</u> -3-1-5-6

Tablo – 3.1. Çaprazlama, Mutasyon ve Değiştirme Örnekleri

Yeni nesil çocuklar, yeni nesilde n sayıda kromozom olana kadar oluşturulmaya devam eder. Yeni nesil, genellikle, eski nesilden daha iyidir. Yeni nesil oluşumu ebeveynlerin farklı çocuk oluşturamadıkları zamana dek devam eder. GSP için Genetik Algoritma yöntemi aşağıda gösterilmektedir (Reeves, Rowe 2002):

Aşama 1: GSP için başlangıç turlarından oluşan τ seti belirlenir.

Aşama 2: τ seti içerisinde iki ebeveyn seçilir ve yeni turlar oluşturulur. Yeni turlar τ setine eklenir.

Aşama 3: τ seti belirli kurallara göre azaltılır.

Aşama 4: 2 ve 3. aşama durma kriteri sağlanana kadar devam eder. En iyi tur sonuç olarak seçilir ve işlem durdurulur.

GSP için Genetik Algoritmanın ilk uygulaması Goldberg ve Lingle (1985) tarafından yapılmıştır ve 33 şehirlik problem için optimal çözüm bulunmuştur (Reeves ve Rowe, 2002). Daha sonra pek çok araştırmacı tarafından farklı çaprazlama yöntemleri kullanılarak GSP’ye çözüm aranmıştır. Tek ebeveyn

çaprazlama kullanılarak GSP için çözüm oluşturulmuştur. 100 şehirden 666 şehire kadar 6 adet problem çözülmüş ve optimale yakın sonuçlar elde edilmiştir (Chartterjee ve diğerleri, 1996).

3.2.2.2.4. Yapay Sinir Ağları

Yapay sinir ağları insan beyninin işlemesinden esinlenmiştir. Sinir ağları seti belirli bir ağ ile birleşmektedir. Sinir bir girdi olarak çıktıyı hesaplar ve diğer sinirlere sinyal gönderir (Reeves, 1993).

Genel olarak GSP için yapay sinir ağları iki sınıfa ayrılır. Birinci sınıfta sinirler tamsayı programlama formülasyonunda organize edilir ve ikinci sınıfta, sinirler çözüm uzayında noktalar olarak görülür.

GSP için Yapay sinir ağlarının ilk uygulaması Hopfield ve Tank (1985) tarafından önerilmiştir (Aarst, Lenstra, 1997). Önerilen yöntemin tamsayı programlama formülasyonu aşağıdadır:

Amaç Fonksiyonu

$$\text{Min}Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}(x_{in}x_{j1} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{ik}x_{j(k+1)}) \quad (3.31)$$

Kısıtlar

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.32)$$

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.33)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, \quad 1 \leq i, \quad k \leq n \quad (3.34)$$

Bu formülasyonun çözümünde $x_{ik} = 1$ olduğunda bu, i şehrinin tur içerisinde k . sırada olduğunu gösterir. (3.32) kısıtı, tur içerisindeki her bir pozisyonun bir şehri gösterdiğini ifade eder. (3.33) kısıtı, her bir şehrin tur içerisinde bir pozisyonu olduğunu gösterir. Her bir x_{ij} bir ağa bağlı olan ve tüm kısıtları sağlayan ve maliyeti minimum yapan bir sinirdir. Yöntem iyi işlememiş ve 30 şehirlik problem için olurlu bir sonuç vermekten uzak kalmıştır. Başka araştırmacılar tarafından da geliştirmeler yapılmıştır ve büyük boyuttaki problemler denenmiş fakat çok başarılı sonuçlar elde edilememiştir.

GSP için yapay sinir ağlarının ikinci sınıfı daha hızlı ve büyük problemleri çözebilmektedir. Bu yöntem m sinirlerinin oluşturduğu tüm şehirlerin ortasında yer alan bir çember ile başlar. Her bir iterasyonda, rastgele bir şehir seçilir ve şehire en yakın olan sinir, kazanan olarak belirlenir. Daha önce belirlenen kurallara göre, kazanan sinir ve yakın olan komşuları şehire daha yakın bir konuma hareket ederler. Bu yöntem, her bir şehir tur içerisinde yer alana kadar devam eder. Bu sınıfın esnek ağ ve kendiliğinden oluşan harita adında iki farklı türü vardır. Esnek ağ yöntemi 1.000 şehirlik problemi çözebilmektedir. Fakat 2-Opt yöntemi ile karşılaştırıldığında, 2-Opt yönteminin daha hızlı ve daha iyi sonuç verdiği görülmüştür (Aarst ve Lenstra, 1997). Fritzke ve Wilke (1991) tarafından uygulanan kendiliğinden oluşan harita yöntemi, 2.392 şehirlik problemi de içeren büyük boyuttaki problemleri optimale %10 yakın çözüm üretmiştir (Aarst, Lenstra, 1997). Bu sonuçlar, yapay sinir ağlarının 2-Opt ve 3-Opt yöntemlerine göre daha uzun süreler almasının yanında, 2-Opt ve 3-Opt yöntemlerine göre daha kötü çözümler üretmiştir.

3.2.2.2.5. Tabu Arama

GSP için ilk Tabu Arama yöntemi Glover tarafından 1986 yılında önerilmiştir. Bu yöntem 2-kenar değişimi stratejisinden uyarlanmıştır. Önerilen tabu liste boyutu ve esinlenme ölçütleri farklı olacak şekilde Tabu Arama yönteminin farklı türleri bulunmaktadır.

GSP için Tabu Arama ile 2-kenar değiştirme yöntemi, mevcut turdan 2 yakın olmayan kenarın silinmesi ve olurlu bir tur oluşturacak şekilde 2 farklı kenarın eklenmesi şeklinde ifade edilir. Tabu Arama yöntemi aşağıdaki gibidir (Knox, 1994):

Adım 1: Rastgele veya bazı başlangıç tur oluşturma yöntemleri kullanılarak başlangıç turu oluşturulur.

Adım 2: 2-kenar değiştirme seti oluşturulur ve en uygun aday belirlenir.

Adım 3: En uygun aday uygulanır.

Adım 4: Tabu listesi, esinlenme ölçütleri, diğer değişkenler ve şu ana kadarki bulunan en iyi tur güncellenir. Eğer durma ölçütlerine ulaşılmış ise 5. Adıma geçilir. Aksi halde 2. Adıma gidilir.

Adım 5: Eğer bulunan son tur şu ana kadarki en iyi tur ise, global en iyi tur güncellenir.

Adım 6: Eğer daha önceden belirlenen arama sayısına ulaşılmış ise çıktı en iyi tur olur ve işlem durdurulur. Aksi halde 1. Adıma gidilir.

3.3.3. Karma Yöntem

Karma yöntemler tur oluşturma metotları ile tur geliştirme metotlarının birleştirilmesi ile oluşmaktadır. Atlama Araması yöntemi, Yerel Arama yöntemi ve Hiyerarşik Strateji yöntemi gibi birkaç etkin karma metot geliştirilmiştir.

3.2.2.3.1. Atlama Arama Yöntemi

Atlama Arama yöntemi GSP için basit olduğu kadar güçlü bir yöntemdir. Bazı çözüm bölgelerinin iyi çözümler, bazı çözüm bölgelerinin ise kötü çözümler

vermesi, Atlama Arama yönteminin ortaya çıkış fikrinin oluşmasını sağlamıştır. Eğer daha iyi bir çözüm bölgesine atlama yapma imkanı varsa, orada daha etkin bir arama yapılma imkanı olur. Bu yöntemin başlangıcında atlama rotası belirlenir. İlk atlama yerine gidilerek, yerel arama sezgisel yöntemi uygulanır. Eğer daha iyi çözüm bulunur ise ikinci atlama yerinde yerel arama sezgiseli kullanılır. Bu işlemler bütün atlama yerlerine ulaşıncaya kadar devam eder.

Literatürde bulunan 33 şehir ile 105 şehir arasında değişen yedi test problemi ve 50 şehir ile 150 şehir arasında değişen üç tane rastgele problem çözülmüştür. Atlama Arama yönteminin 3-Opt yöntemi ile beraber iyi sonuçlar verdiği görülmüştür (Tsubakitani ve Evans, 1998).

3.2.2.3.2.Yerel Arama Yöntemi

Yerel Arama Yöntemi, optimum yol planlamasına dayanan bir yöntemdir. Optimum yol planlaması makine yer planı, hareket planı gibi alanlarda kullanılsa da esas olarak GSP ile alakalıdır. Bu yöntem bir alt tur oluşturularak başlar. Şehirler gruplara ayrılır ve komşuluklar oluşturulur. Her bir komşuluk için puan hesaplanır ve en üstteki üç komşuluk seçilip orta noktalarından birer kenar oluşturularak maliyetleri hesaplanır. Fazla maliyete sahip kenar çıkartılırken, az maliyete sahip kenar tura eklenir. Bu işlem bütün kenarlar bitene kadar devam eder (Meeran ve Shafie, 1997).

3.2.2.3.3.Hiyerarşik Strateji Yöntemi

Sosyal bilimler, bilgi işlem alanlarında kullanılan hiyerarşik stratejiye dayanan Hiyerarşik Strateji yöntemini önermişlerdir. Bu yöntem oldukça etkin olup, 15.000 şehirlik probleme çözüm bulmak 700 bilgisayar ile 15-25 saniye arasında sürmektedir. Fakat sonuç optimum sonuca pek yakın sonuç verememektedir ve sonuç üzerinde değişiklik yapma imkanı yoktur. Bu yöntem kullanılarak, rastgele oluşturulmuş 1.000 ile 16.385 şehir arasındaki 4 problem ve literatürdeki 70 ile 3.038 şehir arasındaki 25 problem çözülmüştür. Optimal

sonuca %3 ile %25 arasında yakın çözümler bulunmuştur. Bu yöntem dört aşamadan oluşmaktadır (Sun ve diğerleri, 1993):

1. **Aşama:** Alan 4 bölgeye ayrılır ve bütün şehirler bu dört bölge arasında paylaşılır. Şehir gruplarının yerleşimine göre bölgeler belirlenir. Dört bölge arasındaki en kısa rota elde edilir.
2. **Aşama:** Her bir bölge kendi içerisinde dört alt bölgeye ayrılır ve 1.aşamada yapılan işlemler tekrarlanır.
3. **Aşama:** Tur alt bölgelerdeki en kısa yollar hesaplanarak değiştirilir ve tur diğer üç bölge ile birleştirilir.
4. **Aşama:** 2. ve 3. Aşamalar alt bölgelerde sadece bir şehir kalana kadar devam eder.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

ARAÇ ROTALAMA PROBLEMİ

Araç rotalama problemi (ARP) (Vehicle Routing Problem, (VRP)) 50 yıla yakın bir zamandır çalışılmaktadır. ARP ilk olarak Dantzig ve Ramser tarafından 1959 yılında çalışılmıştır. Clarke ve Wright 1964 yılında Dantzig ve Ramser'in metodunu geliştirmiş ve klasik tasarruf metodunu önermişlerdir. Bundan sonra ARP'nin değişik çeşidine çözüm bulmak için yüzlerce farklı model ve algoritma önerilmiştir. Uygulama alanının çokluğu ve problemin ilginç olmasından dolayı ARP pek çok araştırmacının ilgisini çekmiştir.

ARP k tane araç rotası oluşturulması ile ilgilidir. Bu rotalar ana depodan başlamakta ve alt kümesindeki müşterileri belirli bir sırayla ziyaret edip tekrar ana depoya dönmesinden oluşmaktadır. Her bir müşteri k araç rotalarından birinde mutlaka yer almalıdır ve müşteri atanmış her aracın toplam dağıtım miktarı araç kapasitesini geçmemelidir.

Bu problemdeki ana amaç, maliyet fonksiyonunu minimize ederken, bütün kısıtları sağlayıp, kullanılacak olan araç sayısını minimize etmek ve toplam mesafeyi veya toplam zamanı minimuma indirmektir. Yan amaç ise müşteri memnuniyetini maksimize etmektir.

ARP'nin gerçek hayat uygulamaları birçok kısıtı beraberinde getirmektedir. Bu kısıtlar üç ana grupta toplanabilmektedir:

1) Araçlarla ilgili kısıtlar

- Araç kapasite kısıtı (ağırlık veya hacim olarak)
- Toplam zaman kısıtı
- Sürücünün çalışma saatleri için yasal sınırlamalar

2) Müşteriler ile ilgili kısıtlar

- Her bir müşterinin bir tür ürün talep etmesi veya belirli çeşitte ürün dağıtılması; Lojistik firmaları buna örnek verilebilir.(DHL ve UPS gibi)
- Dağıtımın yapılabilmesi için belirli zaman aralıklarının bulunması

3) Diğer kısıtlar

- Aynı araç ile aynı günde, aracın depoya dönerek tekrar yola çıkmasıyla, birden fazla tur yapılması
- Bir turun bir günden uzun olması
- Birden fazla depo olması

ARP'de dağıtım rotalarının aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir:

- Her müşterinin talebi karşılanmak zorundadır.
- Her müşteri sadece bir araç rotasında olmak zorundadır.
- Bir dağıtım rotasında yer alan toplam müşteri talebi, o rotadaki aracın kapasitesinden düşük olmak zorundadır.
- Her rota, depodan başlayıp depoda sonlanmalıdır.
- Herhangi bir rotadaki toplam kat edilen mesafe, daha önceden belirlenen maksimum rota mesafesini aşmamalıdır.
- Bazı ARP çeşitlerinde m araç sayısı sabit iken, bazı çeşitlerinde değişkendir.

ARP, GSP'nin birden fazla araç ve eklenmiş kısıtlar ile geliştirilmiş halidir. ARP'nin çözümü, aynı sayıda müşteri veya şehre sahip GSP problemine kıyasla, çok daha zordur.

Standart Araç Rotalama Probleminin formülasyonu aşağıdaki şekildedir (Laporte ve diğerleri, 1985):

Amaç Fonksiyonu

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in V} \sum_{i < j} c_{ij} x_{ij} \quad (4.1)$$

Kısıtlar

$$\sum_{j \in V} x_{0j} = 2m \quad (4.2)$$

$$\sum_{j < i} x_{ji} + \sum_{j > i} x_{ij} = 2, \quad i \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - l(S), \quad S \subset V, \quad 3 \leq |S| \leq n - 2 \quad (4.4)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer araç } i' \text{den } j' \text{ye gidiyor ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (4.5)$$

4.1. ARP'nin Uygulama Alanları

Araç rotalama problemleri genel olarak bir ağ içerisindeki belirli noktalar arasında mal ve hizmet dağıtımını ile ilgilenmektedir. Günümüzde ürün dağıtımında, mal ve insan taşımadaki problemler artmaktadır. Örneğin,

- Ürün ve hizmetlerin bir veya daha fazla sayıdaki depodan, çeşitli müşteri yerlerine dağıtım
- Üretim planlaması ve hammadde, yarı mamul ve mamullerin fabrikalar arası taşınması
- Stok planlaması ve ürünlerin satış yerlerine sevkiyatı
- Havayolu şirketleri ile yolcu ve ürün taşınması
- Bar ve lokantalara içecek dağıtımını
- Para dağıtımını
- Benzin ve mazot dağıtımını
- Süt dağıtımını ve toplanması
- İnternette yapılan alışverişlerin teslimatı
- DVD film kiralama hizmeti

- Çöp toplanması ve taşınması
- Ana depodan mağazalara ürün dağıtılması
- Posta hizmetleri (Golden ve diğerleri, 2002)

4.2. GSP ve ARP Çözüm Zorluğu

Gezgin satıcı ve araç rotalama problemlerinde şehir sayısı arttıkça, problem üstel bir şekilde zorlaşmaya başlar. n şehirli bir problemde, olurlu turların sayısı $(n - 1)!/2$ 'dir. İlk şehir için $(n-1)$ tane, ikinci şehir için $(n-2)$ tane seçenek vardır. Paydadaki 2 ise her turdaki gidiş mesafesi ile dönüş mesafesinin aynı olduğunu göstermektedir. Yani 10 şehirlik gezgin satıcı problemi için 181.440 olurlu çözüm, 20 şehirlik problemde 10^{16} mertebesinde çözüm varken, 50 şehirlik problemin yaklaşık 10^{62} mertebesinde çözümü vardır. Bu araştırmada ele alınacak problem 110 müşterili bir araç rotalama problemidir. Bu da problemin yaklaşık 10^{176} mertebesinde çözümü olduğunu göstermektedir. Eğer saniyede 10.000.000.000 çözüm deneme imkanı bulursa idi problemin çözümü yaklaşık 10^{158} sene sürerdi (Hillier ve Lieberman, 1995).

Dağıtım problemleri, anlatım açısından kolay olmakla birlikte matematiksel formülasyonu ve çözüm aşamaları oldukça karmaşıktır. Klasik GSP ve ARP için matematiksel formül oluşturmak göreceli olarak kolay olsa da, bilgisayar yardımı ile yapılan bir problemin çözüm süreci çok karmaşık ve uzundur. GSP ve ARP gibi ilişkisel optimizasyon problemlerinde kesin çözüm yöntemlerinin büyüklüğü, problemin büyüklüğünün üsteli şeklinde artar. Bu yüzden GSP ve ARP problemleri NP-zor (NP-hard: deterministik olmayan üstel problemler) sınıfına girmektedir. Mevcut bilgiler doğrultusunda NP-zor problemleri, optimal çözüme ulaştıracak bir algoritma yoktur. Bu yüzden araştırmacılar araştırmalarını iki başlık altında yoğunlaştırmışlardır. Bunlar:

- Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ışığında, bilgisayarın çözebileceği mümkün olan en büyük boyuttaki problemler için, kesin çözüm algoritmasının geliştirilmesi
- Optimum sonuca yakın ve çok hızlı sürede sonuç veren sezgisel yöntemlerin geliştirilmesi ve uygulanması

Büyük boyutlardaki GSP'yi çözmeye dal-kesme metotları ile başarı sağlanmıştır. Bu metotlar, iyi bir matematiksel formülasyon ile hızlı bilgisayarlar için etkin bir kodlama sağlanarak, etkin çözüm sağlamaktadırlar. Hızlı teknolojik gelişmelerin aksine GSP problemleri için kesin çözüme ulaşmak uzun bir bilgisayar zamanı gerektirmektedir.

GSP için bilgisayar kodları yıllar geçtikçe daha karmaşık hale gelmiştir. Buna paralel olarak çözülebilen problem boyutu artmıştır. Bunun en çarpıcı örneği Dantzig, Fulkerson ve Johnson tarafından 1954 yılında 49 şehirli problem çözülebilen iken, 50 yıl sonra 24.978 şehirlik problem için optimum sonuç bulunabilmesidir.

Tablo 4.1. En Büyük Boyuttaki Gezgin Satıcı Problemi Çözümleri

Yıl	Araştırmacılar	Problem Büyüklüğü
1954	G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson	49 şehir
1971	M. Held and R.M. Karp	64 şehir
1975	P.M. Camerini, L. Fratta, and F. Maffioli	67 şehir
1977	M. Grötschel	120 şehir
1980	H. Crowder and M.W. Padberg	318 şehir
1987	M. Padberg and G. Rinaldi	532 şehir
1987	M. Grötschel and O. Holland	666 şehir
1987	M. Padberg and G. Rinaldi	2.392 şehir
1994	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, and W. Cook	7.397 şehir
1998	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, and W. Cook	13.509 şehir
2001	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, and W. Cook	15.112 şehir
2004	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook, and K. Helsgaun	24.978 şehir

Kaynak: <http://www.tsp.gatech.edu/history/milestone.html>

Örneğin Tablo 4.1’de görüldüğü gibi literatürde, sırasıyla 225, 4.461 ve 7.397 şehir büyüklüğündeki GSP problemlerinin çözümü için 1, 1,9 ve 4 bilgisayar yılı gerekmiştir (Jünger ve diğerleri, 1995). Applegate 1998’de 13.509 şehirlik bir gezgin satıcı problemini 48 bilgisayarın birbirine bağlı olduğu bir ağ üzerinde 3 ayda çözmüştür.

4.3. ARP Çeşitleri

Araç rotalama problemleri gerçek hayattaki bazı özel durumlardan kaynaklanan bazı kısıtlar nedeniyle çeşitli dallara ayrılır (<http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/>, z.t.:20.11.2008). Bunlar:

Karma Kapasiteli Araç Rotalama Problemi: Araç rotalama probleminde yer alan dağıtım yapan araçların belirli bir kapasitesinin olması durumudur. Karma kapasiteli araç rotalama probleminde her bir aracın birbirinden farklı bir kapasitesi olabilir.

Çoklu Depoya Sahip Araç Rotalama Problemi: Dağıtım firmasının müşterilere hizmet vermek için birden fazla deposunun olması durumudur. Eğer müşteriler depoların etrafında kümelenmiş ise, dağıtım problemi ayrı birer ARP olarak modellenebilir. Ama müşteriler ve depoların yerleri birbirlerine karışmış ise, çoklu depoya sahip araç rotalama probleminin çözülmesi gerekmektedir. Bu problemde araçlar depolara atanır ve her bir araç ait olduğu depodan çıkarak müşteriye hizmet verir ve yine aynı depoya geri döner.

Bölünmüş Talebe Sahip Araç Rotalama Problemi: Bölünmüş talebe sahip araç rotalama problemi, aynı müşteriye birden fazla aracın servis yapabilmesine olanak veren araç rotalama problemidir.

Belirsiz Talebe Sahip Araç Rotalama Problemi: Bu tür bir problem, talebin belirsiz olduğu araç rotalama problemidir. Dağıtım aracı müşteriye vardığı zaman o müşterinin talebinin ne olacağı belli olur.

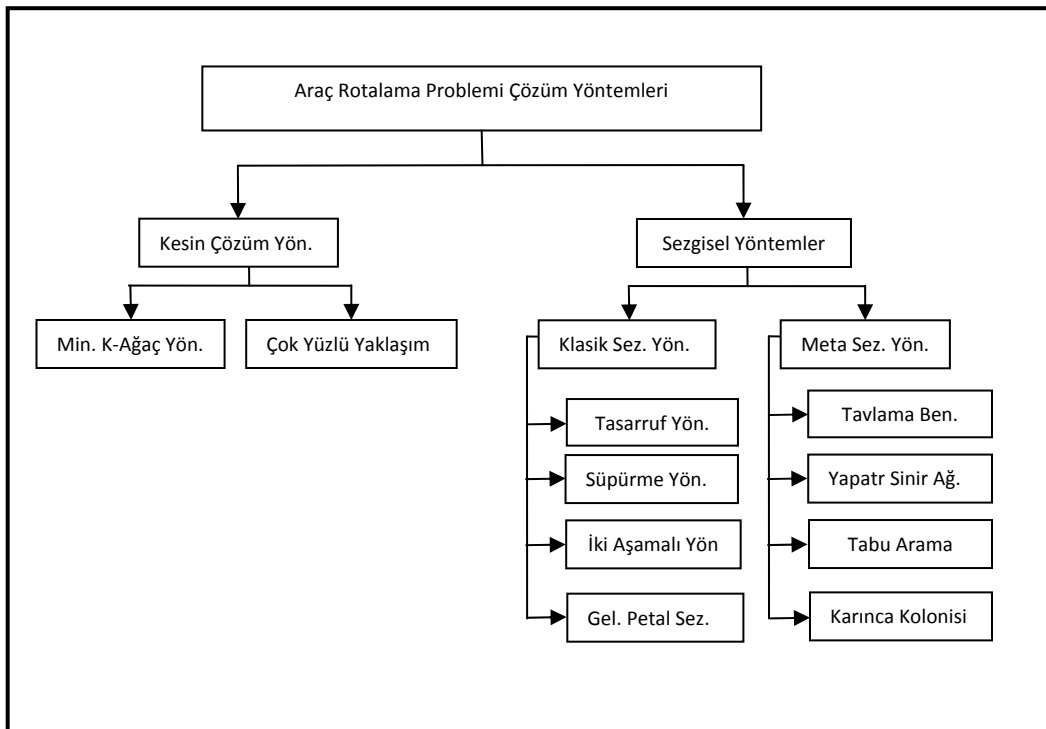
Geri Toplaması Olan Araç Rotalama Problemi: Geri toplaması olan araç rotalama problemi, müşterilerin depozito, ambalaj ve palet gibi, ürünlere ait bazı parçaları iade etme durumu olabilen araç rotalama problemidir. Bu durumda müşterilerden geri verilecek olan parçalar hesaba katılarak araç kapasiteleri hesaplanmalıdır.

Zaman Pencere Arac Rotalama Problemi: Zaman pencere arac rotalama problemi, her bir müşteriye ait bir zaman aralığı kısıtı olan arac rotalama problemidir. Bu problemde dağıtım aracı, her bir müşteriye belirli bir zaman aralığında hizmet vermek zorundadır.

Asimetrik Arac Rotalama Problemi: Dağıtım aracının depodan müşteriye gidiş mesafesi ile aynı müşteriden depoya olan uzaklığın farklı olduğu arac rotalama problemine, asimetrik arac rotalama problemi denir. Bu durumda maliyet (mesafe) matrisi simetrik değildir.

4.4. ARP İçin Çözüm Yöntemleri

Arac rotalama problemini çözmek için araştırmacılar tarafından pek çok yöntem geliştirilmiştir. Bu çözüm yöntemleri optimal çözüme ulaşip ulaşmamasına göre kesin çözüm yöntemleri ve sezgisel yöntemler olarak ikiye ayrılır. Arac rotalama problemi için kullanılan başlıca çözüm yöntemleri Şekil – 4.1’ gösterilmektedir. Bu çözüm yöntemlerden ileriki kısımlarda bahsedilecektir.



Şekil – 4.1. Arac Rotalama Problemi Çözüm Yöntemleri

4.4.1. ARP İçin Kesin Çözüm Yöntemleri

ARP için olan kesin çözüm yöntemleri, GSP yöntemlerinin geliştirilmesi ile oluşmuştur. ARP için kesin çözüm yöntemleri direkt ağaç arama, tamsayılı doğrusal programlama ve dinamik programlama diye üç sınıfa ayrılmaktadır (Christofides, 1985; Laporte ve Nobert, 1987; Laporte, 1992). ARP problemini çözmek zordur. 1985 yılına kadar 60 müşteri problemi çözülebilmektedir. Etkin çözüm yöntemlerinin ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle son yıllarda daha zor problemler de çözülmüştür. 1995 yılında 134 müşterilik problem çözülmüştür.

4.4.1.1. Minimum K-ağaç Yöntemi

K-ağaç yöntemi $n+k$ kenar setinin, G grafiğini $n+1$ nokta ile kapsamaları olarak tanımlanır. ARP, kapasite kısıtlarını ve her bir noktanın sadece bir kere ziyaret edilmesi kısıtını sağlayarak, minimum K-ağaç maliyetini bulacak şekilde modellenir.

$x, i, j \in V$ noktaları ve depo arasında sırasız kenarlar seti olsun. X ise K-ağacını sağlayan $\sum_{i=1}^n x_{0i} = 2K$ x setidir ve formülasyonu aşağıdaki gibidir (Fisher, 1994):

Amaç Fonksiyonu

$$\min_{x \in X} \sum_{i,j \in V \cup \{0\}} c_{ij} x_{ij} \quad (4.6)$$

Kısıtlar

$$\sum_{j \in V \cup \{0\}, j \neq i} x_{ij} = 2, \quad \forall i \in V \quad (4.7)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \geq 2l(S), \quad \forall S \subset V \text{ ve } |S| \geq 2 \quad (4.8)$$

$l(S) = \left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil$, S servisi için gerekli olan minimum araç sayısının alt sınırı ve $q(S) = \sum_{i \in S} q_i$ ve $\bar{S} = V \cup \{0\} - S$. $u_i, i \in V$ ve $S \subseteq V$ için $v_S \geq 0, |S| \geq 2$ (4.7) ve (4.8) kısıtları için Lagrange çarpanları olsun. Buna göre (4.6) – (4.8) denklemleri için Lagrange gevşetmesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L(u, v) = \min_{x \in X} \sum_{i,j \in V \cup \{0\}} \bar{c}_{ij} x_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n u_i + 2 \sum_{S \subseteq V} v_S l(S) \quad (4.9)$$

$u_0 = 0$ ve $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - u_j - \sum_{(i \in S, j \in \bar{S} \text{ veya } j \in S, i \in \bar{S})} v_S$ dir. Kapasite kısıtları aşağıdaki şekilde sıkılaştırılır:

Her $S \subset V$ için

$$S' = \left\{ j \in \bar{S} \mid j \geq 1 \text{ ve } q_j > l(S) - \sum_{j \in S} q_j \right\} \quad (4.10)$$

$$e_j = \begin{cases} 0, & j \in S \\ 0, & j \in S' \\ \frac{l(S)}{l(S)+1}, & j \in S' \text{ ve } |S'| > 2 \\ 1, & j \in \bar{S} - S' \end{cases} \quad (4.11)$$

olsun. Böylece sıkılaştırılmış kapasite kısıtları aşağıdaki şekildedir.

$$\sum_{j=0}^n e_j \sum_{i \in S} x_{ij} \geq 2l(S) \quad \forall S \subset V, |S| \geq 2 \quad (4.12)$$

4.4.1.2. ARP için Çok Yüzlü Yaklaşım

GSP çözümedeki çok yüzlü (polyhedral) yaklaşımın başarısı, ARP uygulanmasına ilham kaynağı olmuştur. Bu yöntem ile literatürde yer alan ve şu ana kadarki çözülebilen en büyük ARP problemi olan 134 müşterilik problem çözülmüştür.

Kapasiteli Araç Rotalama Problemi (KARP) için, dal-sınır yöntemini temel alan tamsayılı doğrusal programlama önerilmiştir. Alt tur eleme kısıtı (4.4), GSP için geçerli olan $\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1$ kısıtının genelleştirilmiş halidir. Bundan dolayı kısıt sayısı 2^n kadardır. Bunun yanında KARP'nin, alt tur eleme kısıtları, $l(S), S \subseteq V$ değerinin bulunması gibi ek bir zorluğu vardır. Alt probleme bağlı arama ağacındaki bir düğüm noktası aşağıdaki gibi tanımlanır (Laporte ve diğerleri, 1985):

- İndirgenmiş problem, (4.1) – (4.3), (4.5), (4.6) ve (4.4) denklemi gibi bazı ek alt tur eleme kısıtlarından oluşur.

$$\bullet \quad l(S) = \begin{cases} \left\lceil \frac{1}{Q} \sum_{i \in S} q_i \right\rceil & \text{KARP için} \\ \max \left\{ \frac{1}{Q} \sum_{i \in S} q_i, \frac{1}{L} \sum_{i,j \in S} c_{ij} x_{ij} \right\} & \text{KMARP için} \end{cases} \quad (4.13)$$

KMARP: Kapasite ve mesafe kısıtlı araç rotalama problemi

Alt problemin gevşetilmesi, (4.5) denklemindeki tamsayı kısıtının gevşetilmesi ile olmaktadır. Bu gevşetmenin alt probleme optimal sonuç vermediği durumda, alt problem için geçerli olan alt tur eleme kısıtının gözden geçirilmesi gerekmektedir. GSP için alt tur eleme kısıtlarının tanınması için etkin bir yöntem varken, ARP için etkin bir yöntem yoktur. Uymayan (4.4) kısıtı için basit bir arama sezgiseli kullanılmış, rastgele oluşturulan ve 15 ile 50 şehirden oluşan problemlerde test edilmiştir (Laporte ve diğerleri, 1985).

Laporte ve arkadaşlarının 1985 yılında önerdiği yöntem, başka bir alt tur eleme kısıtı eklenerek yöntem geliştirilmiştir (Acuthan ve diğerleri, 1996):

$$\sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} + \sum_{i \in S} x_{0i} - m \leq |S| - l(\bar{S}), \quad S \subseteq V \text{ ve } 1 \leq |S| \leq n - 2 \quad (4.14)$$

Uymayan kısıtları aramak için (4.4) ile (4.14) kısıtları beraber kullanılmıştır. Rastgele üretilen problemlerde yeni yöntem ile, Laporte ve arkadaşlarının yönteminden daha düşük alt sınır üretilip, daha az dallanma kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. Bu yöntem rastgele seçilmiş 15 ile 100 müşteri arasında

mevcut olan problemlerde test edilmiş ve Laporte'nin yöntemine göre daha hızlı sürede, daha iyi sonuçlar elde edilmiştir (Acuthan ve diğerleri, 1996).

Grafiksel Araç Rotalama Problemi (GARP), Kapasiteli Araç Rotalama Probleminin (KARP) gevşetilmiş halidir. Her bir müşteri en az bir rotada olacak ve kapasite kısıtları sağlanacak şekilde k rotaları oluşturulur (Cornuejols ve Harche, 1993).

GSP için kullanılan tarak eşitsizlikleri, ARP problemleri için aşağıdaki gibi kullanılmıştır:

$k \geq 2$ olan G grafiği, $W_0, W_1, \dots, W_s \subseteq V$ aşağıdaki kısıtları sağladığı varsayalım

- $|W_i \setminus W_0| \geq 1, i = 1, \dots, s$
- $|W_i \cap W_0| \geq 1$
- $|W_i \cap W_j| = 0, 1 \leq i < j \leq s$
- $s \geq 3$ ve tek sayı

Tarak eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{a=0}^s \sum_{i,j \in W_a} x_{ij} \leq \sum_{a=0}^s |W_a| - \frac{3s+1}{2} + \alpha(k-1) \quad (4.15)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{eğer } 0 \notin \bigcup_{a=0}^s W_a \\ 1, & \text{eğer } 0 \in W_0 \setminus \bigcup_{a=1}^s W_a \text{ veya } 0 \in W_b \setminus W_0, b = 1, \dots, s \\ 2, & \text{eğer } 0 \in W_b \cap W_0, b = 1, \dots, s \end{cases} \quad (4.16)$$

Yukarıdaki kısıtlara ek olarak eğer $0 \in W_1 \setminus W_0$ ise, tarak eşitsizliği aşağıdaki gibi kuvvetlendirilir:

$$\sum_{a=0}^s \sum_{i,j \in W_a} x_{ij} \leq \sum_{a=0}^s |W_a| - \frac{3s+1}{2} + k - R(V \setminus W_1) \quad (4.17)$$

$R(S)$, $\{V \setminus 0\}$ bir parçası olan $S_1, \dots, S_t, \dots, S_k$ ve $\sum_{i \in S_\alpha} q_i \leq Q, 1 \leq \alpha \leq k$, $S \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^k S_\alpha$ denklemlerini sağlayan en küçük tamsayı (t) değeri olarak tanımlanır. Alt tur elemesi ve tarak eşitsizlikleri kullanılarak dört problem çözülmüştür. Bu doğrultuda üç tane 18 müşterilik problem ve bir tane 50 müşterilik problem çözülmüştür (Cornuejols ve Harche, 1993).

4.4.2. Sezgisel Yöntemler

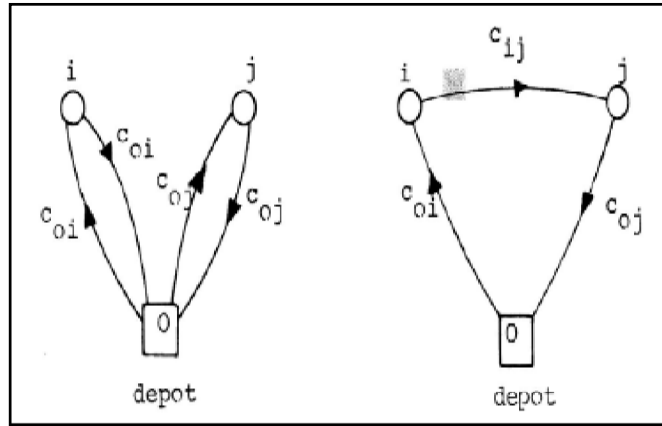
ARP için sezgisel yöntemler; klasik sezgisel yöntemler ve meta sezgisel yöntemler adı altında iki ana gruba ayrılmıştır. Klasik sezgisel yöntemler, turların yapımı ve geliştirilmesini içermektedir. Clark ve Wright (1964) tarafından ortaya atılan tasarruf yöntemi, Gillet ve Miller (1974) tarafından önerilen süpürme yöntemi, Christofides ve arkadaşları (1979) tarafından geliştirilen iki aşamalı yöntem ve Renaud ve arkadaşları (1996) tarafından önerilen petal yöntemi klasik sezgisel yöntemlerdir. Önde gelen meta sezgisel yöntemler ise, Genetik Algoritma, Tavlama Benzetim, Yapay Sinir Ağları ve Tabu Aramadır (Aarts ve Lenstra, 1997).

4.4.2.1. ARP için Klasik Sezgisel Yöntemler

Bu kısımda kısaca ARP için üretilen klasik sezgisel yöntemlerden bahsedilecektir.

4.4.2.1.1. Tasarruf Yöntemi

ARP problemlerini çözmek için geliştirilen yöntemlerden birisi, Clarke ve Wright tarafından 1964 yılında geliştirilen ve belki de bilinen en iyi tur oluşturma sezgiseli olan Tasarruf yöntemidir. Bu yöntem, her bir müşteri ikilisi arasındaki maliyet tasarrufunu hesaplayarak başlar. Maliyet tasarrufları hesaplanarak iki müşteri arasına bir müşteri eklenir. Şekil – 4.2’de görüldüğü gibi i ve j . müşteri ayrı turlardadır, i . müşteriden sonra j . müşteri eklenerek turlar birleştirilir.



Şekil – 4.2 Tasarruf Yöntemindeki Müşteri Birleştirilmesi

$$s_{ij} = (c_{oi} + c_{io} + c_{oj} + c_{jo}) - (c_{oi} + c_{ij} + c_{jo}) \quad (4.18)$$

$$s_{ij} = c_{io} + c_{oj} - c_{ij} \quad (4.19)$$

Denklem (4.19)'deki tasarruf miktarı (s_{ij}), i. müşteri ve j. müşterinin ayrı turlarda değil aynı turda hizmet almasından kaynaklanan bir maliyet tasarrufudur. Bu maliyet tasarrufu iki bağımsız turun birleştirilmesi ile ortaya çıkmaktadır. Her zaman tasarruf yönteminde, en büyük tasarrufu sağlayan (i, j) ikilisi, müşteri talebi ve araç kapasitesi kısıtları dikkate alınarak seçilir. Bütün müşterilerin araçlara atanmasına kadar bu işlem tekrarlanır.

Clarke-Wright'ın tasarruf yöntemi, kolay anlaşılabilirliği ve diğer ARP yöntemlerine göre esnek olması sayesinde geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bu yöntem Gaskell (1967) ve Yellow (1970) gibi pek çok araştırmacı tarafından günümüze kadar uzanan zaman diliminde geliştirilmiştir (Laporte, 1992).

Clarke ve Wright'ın tasarruf yöntemini açıklamak için 9 müşterili bir ARP problemi örneği aşağıda gösterilmektedir. Tablo – 4.2'de deponun (1) ve 9 tane müşterinin birbirlerine ait uzaklıkları verilmiştir.

Şekil – 4.3’de depo ve müşteriler harita üzerinde gösterilmektedir. Tablo – 4.3’te ise müşteri talepleri verilmiştir. Tasarruf yöntemi ile çözüme ulaşmak için ilk önce tasarruf miktarlarının hesaplanması gerekmektedir. Hesaplanan tasarruf miktarları, (4.19)’daki tasarruf denklemi ile hesaplanıp Tablo – 4.4’te verilmiştir.

Tablo – 4.2. Müşterilerin Birbirlerine Olan Uzaklıkları

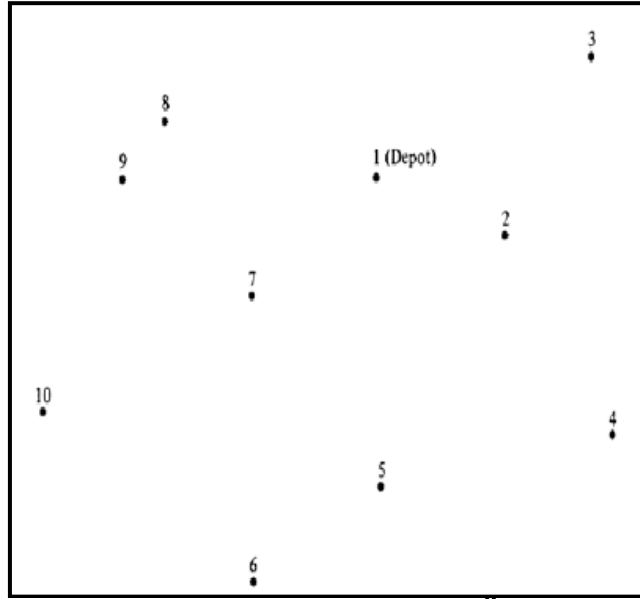
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	25	43	57	43	61	29	41	48	71
2	25	0	39	48	25	18	5	0	1	5
3	43	29	0	48	14	8	0	3	2	23
4	57	34	52	0	55	47	15	3	6	20
5	43	43	72	45	0	77	36	19	26	49
6	61	68	96	71	27	0	50	36	47	86
7	29	49	72	71	36	40	0	39	46	57
8	41	66	81	95	65	66	31	0	78	66
9	48	72	89	99	65	62	31	11	0	83
10	71	91	114	108	65	46	43	46	36	0

Tablo – 4.3. Müşterilerin Talep Miktarları

Nokta	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Talep M.	4	6	5	4	7	3	5	4	4

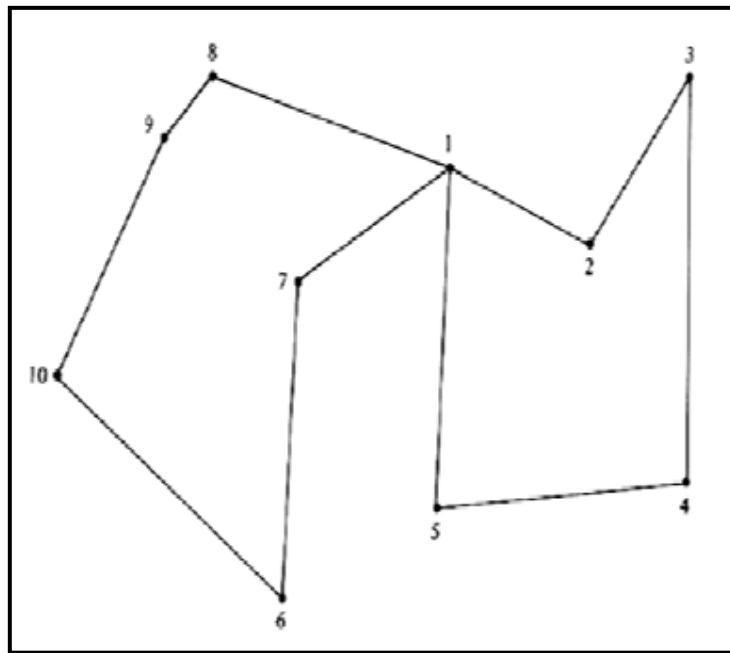
Tablo – 4.4. Hesaplanan Tasarruf Miktarları

Bağlantı	Tasarruf M.	Bağlantı	Tasarruf M.	Bağlantı	Tasarruf M.
(6,10)	86	(4,6)	47	(4,7)	15
(9,10)	83	(7,9)	46	(3,5)	14
(8,9)	78	(7,8)	39	(3,6)	8
(5,6)	77	(2,3)	39	(4,9)	6
(8,10)	66	(5,7)	36	(2,7)	5
(7,10)	57	(6,8)	36	(2,10)	5
(4,5)	55	(5,9)	26	(3,8)	3
(6,7)	50	(2,5)	25	(4,8)	3
(5,10)	49	(3,10)	23	(3,9)	2
(3,4)	48	(4,10)	20	(2,9)	1
(2,4)	48	(5,8)	19	(2,8)	0
(6,9)	47	(2,6)	18	(3,7)	0

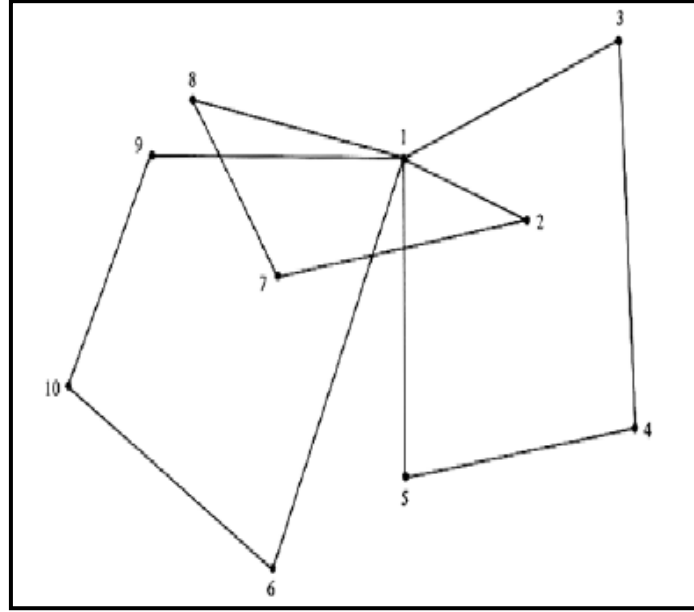


Şekil – 4.3. Depo ve Müşterilerin Harita Üzerinde Gösterimi

Bu problem için araç kapasitesi 23 olduğu durumdaki dağıtım rotası Şekil – 4.4’de gösterilmektedir. Araç kapasitesi 16 olduğundaki dağıtım rotası ise Şekil –4.5’de gösterilmektedir.



Şekil – 4.4. Araç Kapasitesi 23 Olduğundaki Dağıtım Rotası



Şekil – 4.5. Araç Kapasitesi 16 Olduğundaki Dağıtım Rotası

4.4.2.1.2. Süpürme Yöntemi

Gillet ve Miller (1974) tarafından önerilen Süpürme (Sweep) Yöntemi, orta ve büyük boyutta KARP problemlerini çözmek için geliştirilmiştir (Laporte, 1992). Her bir nokta polar koordinatlar $i = 1, \dots, n$ için (r_i, θ_i) ve depo ise $r_0 = 0$ ve $\theta_0 = 0$ olarak ifade edilir. Koordinatlar θ_i temel alınarak artan sıra ile dizilir.

- Kullanılmamış araç (k) seçilir.
- En düşük açığa sahip nokta ile başlanarak, noktalar k araç kapasitesi doluncaya kadar k aracına eklenir. Rota üzerindeki tüm noktalar bitinceye kadar bu işlem devam eder.
- Her bir araç rotası GSP yöntemlerinden biri ile optimize edilir (Gillet ve Miller, 1974).

4.4.2.1.3. İki Aşamalı Yöntem

İki Aşamalı Yöntem, KARP problemlerini çözmek için geliştirilmiştir. Yöntem aşağıda açıklandığı gibi iki aşamadan oluşmaktadır (Christofides ve diğerleri,1979) :

Aşama 1

Adım 1: $k=1$ olarak atanır.

Adım 2: Herhangi bir tura dahil olmayan müşteriler (s) seçilerek R_k turu oluşturulur. Bütün tura dahil olmayan müşteriler ($i \neq s$) için aşağıdaki gibi δ_i hesaplanır.

$$\delta_i = c_{0i} + \lambda c_{is}, \quad \lambda \geq 1$$

Adım 3: $\delta_{i^*} = \min[\delta_i]$ olan ve olurlu olan, k rotasına (R_k) i^* seçilerek eklenir. r -Opt kullanılarak R_k optimize edilir ve bu adım, R_k turuna başka bir müşteri eklenemeyinceye kadar devam eder.

Adım 4: $k = k + 1$ olarak atanır ve 2.adım ve 3.adım bütün müşteriler turlara alınana kadar tekrar edilir.

Aşama 2

Adım 1: h , $\bar{R}_r = (0, i_r, 0)$ olan 1. aşamadan elde edilen tur sayısı ve R_r 'den seçilen müşteri i_r olsun. $K = (\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_h)$ olarak atanır.

Adım 2: Her $\bar{R}_k \in K$ ve her tura alınmayan j noktası için, $\mu \geq 1$ olan $\epsilon_{rj} = c_{0j_r} + \mu c_{j i_r} - c_{0 i_r}$ ve $\epsilon_{r^*j} = \min[\epsilon_{rj}]$ hesaplanır.

Adım 3: $\bar{R}_r \in K$ seçilir ve $K = K \setminus \bar{R}_r$ olarak atanır. Her bir j için $\epsilon_{r^*j} = \min_{R_r \in K} [\epsilon_{rj}]$ olan $\bar{\delta}_j = \epsilon_{r^*j} - \epsilon_{rj}$ hesaplanır.

Adım 4: $\delta_{j^*} = \max[\delta_j]$ olan j^* seçilir ve \bar{R}_r 'ye eklenir. r-Opt kullanılarak \bar{R}_r optimize edilir ve başka bir kenar kalmayana kadar 3. adım tekrar edilir.

Adım 5: Eğer $K \neq 0$ ise, 2. adıma git. Aksi halde eğer bütün kenarlar tura dahil edilmiş ise dur, aksi halde 1. Aşamadaki 2. adıma git.

4.4.2.1.4. Geliştirilmiş Petal Sezgiseli

Petal sezgiseli ARP için ilk olarak Foster ve Ryan (1976) tarafından önerilmiştir. Daha sonra 1993 yılında Ryan ve arkadaşları tarafından geliştirilmiştir (Renaud ve diğerleri, 1996). Geliştirilmiş petal sezgiseli ise Renaud ve arkadaşları tarafından 1996 yılında önerilmiştir. Bu sezgisel yöntem, petal yöntemi ile turların oluşturulması ve kolon yenileme işlemine göre optimal seçimin yapılmasıdır. Bu sezgisel kısa sürede optimale yakın sonuçlar vermektedir. 1-petal sezgiseli ve 2-petal sezgiseli aşağıda anlatıldığı gibi turların oluşturulmasında kullanılmaktadır (Renaud ve diğerleri, 1996).

1-petal sezgiseli S müşterileri için Hamilton turu oluşturur. İlk tur oluşturulur ve kalan noktalar kısmi tura eklenir. Sonunda 4-Opt kenar değişimi ile tur geliştirilir.

2-petal sezgiseli birbirlerine en uzak olan iki nokta seçilerek iki başlangıç turu oluşturulur. Geri kalan noktalar ise en ucuz ve uygun yerleştirme yöntemine göre yerleştirilir. Turlar γ parametrelili 4-Opt yöntemine göre tekrardan optimize edilir. Eğer eklenmemiş noktalar kalmış ise, 6 adım uygulanarak kısmi turlar geliştirilir. Tüm noktalar turlara yerleştirildiğinde 4-Opt yöntemine göre turlar optimize edilir. Bu yöntemin adımları aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Bütün noktalar, depoya olan polar açısı pozisyonlarına göre artan bir sıra ile listelenirler.

Adım 2: $i = i + 1$ olarak belirlenir ve $i > n$ ise dur.

Adım 3: $S = \{v_i\}$ olsun. $c = 2c_{0i}$ maliyeti hesaplanır. $j = i + 1$ ve $S = \{v_i, v_j\}$ olarak belirlenir. Eğer tur olurlu değil ise 4. adıma git. Aksi halde S ve c güncellenir.

Adım 4: $j = j + 1$ ve $S = \{v_i, \dots, v_j\}$ olarak belirlenir. Eğer $\sum_{k=i}^j q_k > Q$ ise 5. adıma gidilir. Aksi halde S ile 1-petal sezgiseli uygulanır. Eğer olurlu bir tur tanımlanamamış ise 5. adıma gidilir. Aksi halde S çözümünü ve c maliyetini kaydet ve bu adımı tekrarla.

Adım 5: Eğer $\sum_{k=i}^j q_k > 2Q$ ise 6. adıma gidilir. Aksi halde 2-petal sezgiseli uygulanır. Eğer uygun olan çözüm yok ise 6. adıma gidilir. Aksi halde S çözümü ve c maliyeti kaydedilir, $j = j + 1$ olarak belirlenir ve bu adım tekrarlanır.

Adım 6: Eğer $j = 2$ ise 2. aşamaya gidilir. Aksi halde S içerisindeki son nokta (h) olsun. c_h 'de h noktasının maliyeti olsun. Eğer $c_{h-1} \leq c_h$ ise, v_h S 'den çıkartılır ve 2. adıma gidilir.

Bu sezgisel tarafından üretilen çözümlerde kesişen turlar olabilir. Bu çözümler daha sonra aşağıdaki formülasyon ile tekrar çözümler (Renaud ve diğerleri, 1996).

Amaç Fonksiyonu

$$\text{Min } Z = \sum_{l \in L} c_l x_l \quad (4.20)$$

Kısıtlar

$$\sum_{l \in L} a_{kl} x_l = 1, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

$$x_l = 0 \text{ veya } 1 \quad (4.22)$$

L 1-petal ve 2-petal çözüm adayları seti, c_l turların maliyeti ve v_k / turuna ait ise

$a_{kl} = 1$ dir.

Bu yöntem 14 KARP test probleminde denenmiştir ve en iyi çözüme %2.38 yakınlıktaki çözümlere bilgisayar zamanı ile 0.43 ile 11.70 dakikada ulaşılmıştır (Renaud ve diğerleri, 1996).

4.4.2.2. Meta Sezgisel Yöntemler

Son yıllarda ARP için geliştirilen meta sezgisel yöntemlerden en çok kullanılanları; Genetik Algoritma (GA), Yapay Sinir Ağları (YSA), Tabu Arama (TA) ve Tavlama Benzetimidir (TB). Bu yöntemler özel yöntemler ile çözüm uzayını araştırırlar. Genellikle bu yöntemler klasik sezgisel yöntemlere göre daha iyi sonuç vermesine karşın çözüm zamanları çok daha fazladır.

4.4.2.2.1. Tavlama Benzetim Yöntemi

ARP için üç farklı Tavlama Benzetim (TB) yöntemi vardır. Bunlar Alfa ve arkadaşları (1991), Osman (1993) ve Breedam (1995) tarafından önerilen yöntemlerdir. Alfa ve arkadaşlarının 1991 yılında önerdiği TB yöntemi, küçük ve orta boyuttaki problemler için çok iyi sonuçlar vermemiştir (Aarts ve Lenstra, 1997).

Osman (1993) tarafından önerilen TB yönetimi, λ -değiştirme mekanizması adı verilen yönteme dayanmaktadır. $S = \{R_1, \dots, R_p, \dots, R_q, \dots, R_m\}$ ARP için olurlu çözümler olsun. S içinden iki tur (R_p ve R_q) seçilir. S_p ve S_q , R_p ve R_q rotaları arasında λ -değiştirme mekanizması ile değiştirilecek $S_p \subseteq R_p$ ve $S_q \subseteq R_q$ olan nokta seti olsun. S_p ve S_q 'nin boyutları $\lambda = 1$ veya 2 iken $|S_p| \leq \lambda$ ve $|S_q| \leq \lambda$ 'dir. Bu yöntem S_p ve S_q rotaları arasında değiştirmeyi veya müşterilerin bir turdan diğerine aktarılmasını içermektedir. Yeni rotalar $R'_p = (R_p - S_p) \cup S_q$ ve $R'_q = (R_q - S_q) \cup S_p$ ve yeni ARP çözümleri ise $S = \{R_1, \dots, R'_p, \dots, R'_q, \dots, R_m\}$ olmaktadır. Osman tarafından önerilen TB yöntemi aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Bir başlangıç çözümü oluşturulur.

Adım 2: λ -değiştirme mekanizması kullanılarak arama uygulanır. $S^* = S$ şu andaki çözüm olsun. $R = 3, k = 1, T_r = \Delta_{max}$ olarak atanır ve β uygun değişimlerin sayısıdır.

Adım 3: S' çözümü seçilir. Eğer $f(S') > f(S)$ ve $\exp\left(-\frac{f(S')-f(S)}{T_k}\right) \geq \theta$ ise S' kabul edilir. θ uniform (birbiçimli) dağılıma sahip $0 < \theta < 1$ olan bir parametredir. Eğer $f(S') < f(S^*)$ ise $S^* = S'$ ve $T^* = T_k$ olarak güncellenir. Aksi halde S olduğu gibi bırakılır.

Adım 4: Sıcaklık aşağıdaki formüle göre güncellenir.

$$T_k = \frac{T_k}{1+\gamma T_k} \text{ ve } \gamma = \frac{\Delta_{max}-\Delta_{min}}{(n\beta+n\sqrt{k})\Delta_{max}\Delta_{min}}$$

Herhangi bir değişim olmadan arama tamamlandığı zaman artırma kuralı uygulanır:

$$T_r = \max\left(\frac{T_r}{2}, T^*\right) \text{ ve } T_k = T_r \text{ olarak belirlenir. } k = k + 1 \text{ olarak güncellenir.}$$

Adım 5: Eğer $k=R$ ise durulur ve en iyi sonuç S^* olarak raporlanır. Aksi halde 3.Adıma gidilir.

Literatürde yer alan 29 ile 129 müşteri arasında ve 50 ile 100 müşteri arasında rastgele oluşturulmuş 26 problem test edilmiştir. Bu yöntem Christofides ve arkadaşlarının (1979) önerdiği yöntem ile çözülen problemlerden 14'ünün 8'inde daha iyi sonuç vermiştir.

4.4.2.2.2. Yapay Sinir Ağları

Yapay Sinir Ağları (YSA) ağ hakkında bilgi veren, farklı ağırlıkları olan ve birbirine bağlı sinir setlerinden oluşur. Rastgele ağırlıklardan başlayıp, sinirlerin gelişmesine bağlı olarak öğrenme algoritması ile ağırlıklar ayarlanır.

Literatürde ARP için YSA uygulamaları sınırlıdır. El Ghaziri (1991) tarafından önerilen, KARP için YSA'yı temel alan ve kendini organize eden yöntem aşağıdaki gibidir:

- Ağırlıklı vektörler ile çeşitli farklı turlar tanımlanır.
- Girdi vektörü değerlendirilerek çıktı değeri hesaplanır. Kazanan çıktı (j^*) en yüksek çıktı veren birimdir.
- j birimin ağırlık vektörü $w_j = (w_{ij}), i = 1, \dots, n$ ve f j biriminin fonksiyonu olan $w_j = w_j + f(j, j^*)(I - w_j)$ şeklinde değiştirilir.
- Ağırlık vektörü, herhangi bir ağırlık vektörü her bir noktaya çok yakın olana kadar değiştirilir. Turlar noktalara taşınarak ARP turları oluşturulur.

Bu yöntem Christofides ve arkadaşlarının (1979) çalışmasında yer alan 50, 100 ve 200 müşterili üç problemde test edilmiştir. Fakat iyi sonuçlar elde edilememiştir. Matsuyama (1991) KARP'yi çözmek için benzer bir fikir ortaya koymuş ve 532 şehirlik GSP'ye, kapasite kısıtı eklenerek oluşturulan problemi çözmüştür.

4.4.2.2.3. Tabu Arama Yöntemi

Tabu arama yöntemi ARP için iyi sonuçlar vermiştir. Tabu arama ile ilgili sadece literatürdeki problemler değil, günlük hayattaki problemler de çözülmüştür. Semet ve Taillard (1993) ve Rochat ve Semet (1994) tarafından uygulanan yöntem ile maliyetler %15 azalmıştır. Taillard (1993) tarafından önerilen paralel uygulamalar içeren Tabu Arama yöntemi ile büyük boyuttaki problemler çözülmüştür.

Semet ve Taillard (1993), İsviçre'de bulunan 45 farklı market için dağıtım rotalama problemini çözmüşlerdir. Bu problemin kısıtları ise, bütün siparişlerin belirli bir zamanda teslim edilmesi, araç kapasitelerinin sağlanması ve her bir mağazaya belirli sayıda araç gönderilmesi kısıtlarıdır. Bu problem TA yöntemi kullanılarak çözülmüş ve sonuçta dağıtım masraflarında %10-15 arasında bir azalma meydana gelmiştir.

Rochat ve Semet (1994), İsviçre'de faaliyet gösteren, hayvan yemi ve un dağıtan büyük bir firmadaki dağıtım problemini çözmüşlerdir. Firmanın maliyetlerinin büyük bir kısmını oluşturan dağıtım maliyetlerinin azaltılması amaçlanmıştır. Problemin müşteriler, araç filosu ve dağıtım ekibi ile ilgili bazı kısıtları vardır. Her bir müşteri belirli bir araç setinden sadece bir araç tarafından hizmet almalıdır. Köy, şehir merkezi ve tarla alanları gibi çeşitli dağıtım yerleri olduğundan dağıtım zamanı önemlidir. Farklı kapasitelere sahip 14 aracın kapasite sınırlarına uyması gerekmektedir. Toplam rota süresi, yolculuk zamanı, servis süresi ve bekleme sürelerinin toplamı 10 saat 15 dakikayı geçmemelidir. Problem TA ile çözüldüğünde, uygun bir bilgisayar çözüm zamanı ile daha az araç kullanılarak, kullanılan yöntemden daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Rochat ve Taillard tarafından (1995) önerilen yöntem, TA yönteminin uzun dönemli hafızasında yer alan yoğunlaştırma ve farklılaştırma unsurlarını içerir. Bu TA yöntemi aşağıda anlatılmıştır:

Adım 1: Yerel arama yöntemi kullanılarak I farklı başlangıç turu oluşturulur.

Adım 2: Tek müşterili turlar çıkartılır. Turlar maliyete göre artan bir sıraya göre sıralanır ve yeni tur seti (T) oluşturulur.

Adım 3: $T' = T$ olarak atanır. S , T 'den çıkartılan tur seti iken, $S = \emptyset$ olarak atanır.

Adım 4: S kısmi çözümü kullanılarak S' olurlu çözümü üretilir ve S 'e ait olmayan bazı müşteriler dahil edilir. Yerel arama yöntemi kullanılarak S' çözümü geliştirilir.

Adım 5: Tek müşterili turlar, geliştirilmiş S' turundan çıkartılır ve geri kalan T turlarına eklenir ve 2. Adıma gidilir.

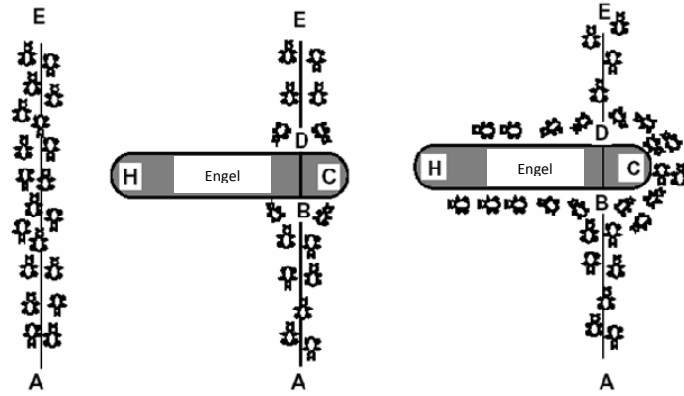
Adım 6: 3 ve 5. Adımlar durma kriterine ulaşılan kadar tekrarlanır.

Rochat ve Taillard (1995) geliştirdikleri yöntemi, basit ARP ve Zaman pencereli ARP üzerinde denemişlerdir. Fisher'in (1994) 134 şehirlik problemi, Christofides ve arkadaşlarının (1979) 199 şehirlik problemi ve Taillard'ın (1993) 385 şehirlik problemi üzerinde test edilmiş ve tatmin edici sonuçlar elde edilmiştir. Solomon'un 56 zaman pencereli araç rotalama problemlerinden 27'sinde daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

4.4.2.2.4. Karınca Kolonisi Optimizasyonu

Marco Dorigo, 1992 yılında doktora tezinde karınca algoritmasını ilk olarak çalışmıştır. Karıncaların belirli bir mantığa göre hareket ettiğini düşünen Dorigo, karınca kolonisi optimizasyonunu, gezgin satıcı problemi ve araç rotalama problemi gibi optimizasyon problemlerine uygulamıştır. 200 adet karınca kullanarak deneyler yapmıştır. Çeşitli yiyecek ve engeller koyarak her bir karıncanın hareketini incelemiştir. Bu gözlemlerin sonucunda karıncaların en kısa yolu bulduklarını görmüştür.

Şekil – 4.6'te görüldüğü gibi karıncalar A noktasından E noktasına gitmektedirler. Bu iki nokta arasına bir engel koyulduğu zaman, karıncalar ilk önce hem C hem de H tarafını kullansa da, uzun vadede sadece C noktasını kullanmıştır. Karıncaların her zaman kısa yolu seçmelerinin sebebi salgıladıkları feromonlardır. Feromon, bazı hayvanların kendi cinslerinden diğer hayvanları etkilemek için kullandıkları bir tür kimyasal salgıdır. Karıncalar ilerlerken, belirli bir miktar feromon depo ederler ve olasılığa dayanan bir yöntemle feromonun daha çok olduğu yolu, az olduğu yola tercih ederler. Depo ettikleri feromonları, gıdaya giderken seçtikleri yola bırakarak, kendilerinden sonraki karıncalara yol seçiminde yardımcı olurlar. Bu içgüdüsel davranış, onların gıdaya giden en kısa yolu bulmalarını sağlar (Dorigo, Gambardella, 1997).



Şekil – 4.6 Karıncaların A-E Arasındaki Rotaları

Karınca kolonisi algoritması farklı yaklaşımlar kullanılarak pek çok farklı türde problemi çözmekte kullanılmaktadır. Bu algoritma gezgin satıcı problemi ve araç rotalama problemi türlerinde de kullanılmaktadır. GSP ve ARP çözmek için, karınca kolonisi algoritması kullanıldığında karıncalara doğal olmayan, mesafeyi hesaplama ve artırılmış hafıza davranışları eklenmektedir. Karınca kolonisi algoritmasının ARP'ye uygulanışı aşağıdaki şekildedir:

1. m karınca rastgele seçilen şehirlerden serbest bırakılır.
2. Karınca daha önce tanımlanan parametreye göre gezgin veya takipçi olarak belirlenir.
3. Her bir karınca feromen miktarı ve şehirlerarası mesafeye göre gideceği şehri seçer.
4. Her bir kenardaki feromen miktarları güncellenir.
5. Her bir şehir ziyaret edilene kadar 2. ve 3. aşama tekrar edilir.
6. Bütün karıncalar turu tamamladığı zaman en çok feromen içeren kenarlar bu turdaki en iyi sonucu oluşturur.
7. Karıncaların hafızaları silinir.
8. Durma kriteri sağlanana kadar önceki adımlar tekrarlanır.

Karınca kolonisi algoritması literatürdeki test problemlerinde denenmiş, tavlama benzetim, yapay sinir ağları yöntemlerine yakın sonuçlar vermiş ve tabu arama yönteminden az bir farkla kötü sonuçlar vermiştir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

ARAŞTIRMA YÖNTEMİ

5.1. Araştırma Modeli

Bu çalışma, örnek olay tarama modeli kullanılarak gerçekleştirilen araştırma türünde bir çalışmadır. Çalışmada Gezgin Satıcı Problemi ve Araç Rotalama Problemleri ayrıntılı olarak incelenerek, Zaman Pencereli Araç Rotalama Probleminin çözümü için sezgisel bir yaklaşım geliştirilecektir.

Çalışmada uygulama için bir dağıtım firması seçilmiştir. Dağıtım firmasında kullanılan dağıtım sistemi ile ilgili gerekli veriler toplandıktan sonra, zaman pencereli araç rotalama problemini çözmek için geliştirilen sezgisel yaklaşım, mevcut sisteme uygulanarak yeni bir dağıtım rotasının belirlenmesine çalışılacaktır.

5.2. Verilerin Toplanması

Uygun bir dağıtım rotasının bulunması ile dağıtım sistemini oluşturan maliyetlerin azaltılması mümkün olabilir. Dağıtım sisteminde, kısa dönemde ve uzun dönemde değişen çeşitli maliyetler vardır. Çalışmadaki amaç, kısa vadede değişen maliyetleri azaltacak dağıtım rotaları çıkarılmasıdır.

Dağıtım firmasının dağıtım işi için olan kısa dönemde değişen maliyeti, dağıtım aracının katettiği yol ile orantılı olarak artan yakıt maliyetidir. Dağıtım işi için olan uzun dönemdeki maliyetler aşağıdaki gibidir:

- Araç satın alma maliyeti
- Araçları kullananların ücretleri

- Bakım-onarım maliyeti
- Kasko ve Sigorta maliyeti
- Otopark ve diğer maliyetler

Ayrıca çalışmada uygun bir dağıtım rotası bulunmaya çalışılacak ve bu yüzden mevcut dağıtım sistemi ile ilgili verilere ihtiyaç duyulacaktır. Uygulamanın yapılabilmesi için gerekli olan veriler aşağıda listelenmiştir:

- Dağıtım yapılan ürün ve nerelere dağıtım yapılacağı
- Araç sayıları
- Araç kapasiteleri
- Müşteri yerleri ve depo yeri
- Müşterilerin kendi aralarındaki ve müşterilerin depoya olan uzaklıkları
- Müşterilerin eğer varsa, teslimat istediği zamanlar
- Müşteride geçen servis süreleri
- Müşteri türleri
- Uygulanan dağıtım rotaları

Çalışmada belge tarama ve gözlem kullanılarak veriler toplanacaktır. Verilerin toplanması için uygulama yapılacak firmanın faaliyet gösterdiği İl olan Mersin'e gidilerek firma yöneticileri ile görüşmeler yapılacak ve bazı veriler görüşmeler sırasında toplanacaktır. Ayrıca firmadaki maliyet raporlarından uygulama için gerekli olan maliyet ve araçların yaptığı mesafeler elde edilecektir.

Uygulamanın gerçeği yansıtabilmesi için, müşteriler arasındaki mesafeler olarak dik uzaklık değil, gerçek mesafeler kullanılacaktır. Bunun için Mersin Büyükşehir Belediyesi'nden Mersin Şehri'ne ait 1/10.000 ölçekli harita temin edilecektir. Mersin Şehri haritası üzerinde 110 müşteri ve deponun yeri işaretlenip, müşteriler arasındaki ve müşterilerin depoya olan, toplam 6.105 gerçek mesafeler hesaplanacaktır.

5.3. Verilerin Çözümü

Uygulama için seçilen dağıtım rotalama problemi zaman pencereli araç rotalama problemidir. Çalışmada çözüm aranacak olan bu problem modellenerek, geliştirilmiş tasarruf yöntemi uyarlanarak çözülmeye çalışılacak ve dağıtım rotalama problemi için en uygun dağıtım rotaları bulunmaya çalışılacaktır.

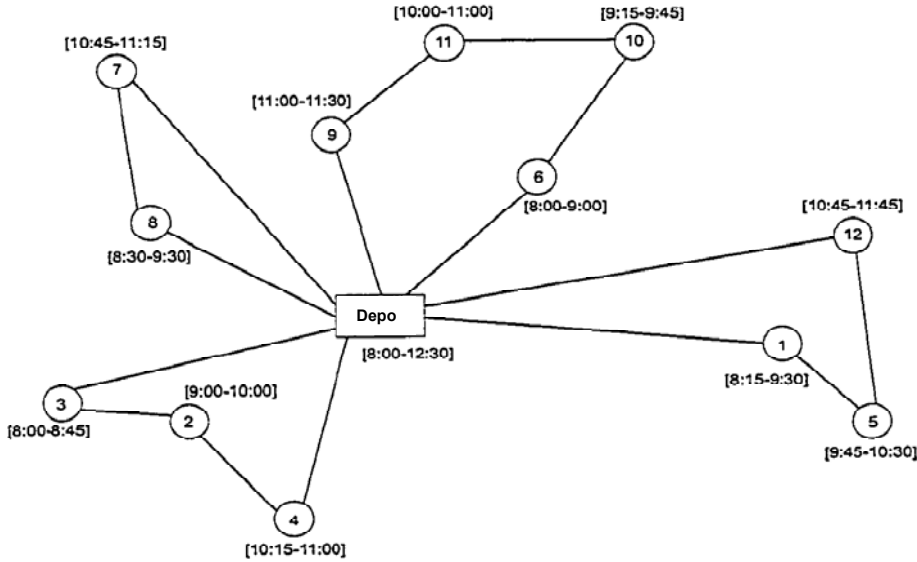
Problemin karmaşıklığı dolayısı ile el ile çözülmesi mümkün değildir. Uygulamanın bilgisayar ile modellenmesi işlemi için MATLAB programı kullanılacaktır. Uygulanacak olan MATLAB kodları ise Pentium Dual Core 2,66 Ghz işlemciye ve 3 Gb hafızaya sahip olan bir bilgisayarda çözüm aranacaktır.

5.3.1. Zaman Pencereli Araç Rotalama Problemi

Zaman Pencereli Araç Rotalama Problemi (ZPARP), belirli bir kapasiteye sahip olan araç filosunun, maliyetleri minimize ederek, müşterilere hizmet vermek için çeşitli yerlerde durarak, etkin olarak kullanılmasını amaçlamaktadır. Problemin amacı kullanılacak araç sayısını ve toplam seyahat mesafesini minimize etmektir. Her bir aracın kapasitesi ve her bir müşterinin belirli bir zaman diliminde karşılanması gereken bir talebi vardır. Zaman penceresi, müşterilerin daha önceden ziyaret edilmek istendiği zaman dilimidir. Her bir araç belirli bir zaman penceresinde müşterilere servis yapmak mecburiyetindedir. Bazı yaklaşımlarda zaman penceresi mutlaka uyulması gereken bir kısıt iken, bazı yaklaşımlarda ise zaman penceresine uyulmamasına izin verilir ancak buna karşılık bir maliyet söz konusudur (Cordeu ve diğerleri, 2002).

Zaman Pencereli Araç Rotalama Probleminin bir örneği Şekil-5.1'de gösterilmiştir. Problem dağıtım ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde tur setinin oluşturulması şeklinde tanımlanır. Her bir müşterinin talebi, dağıtılacak ürün boyutunu belirler, dağıtım yerleri ve müşteri yerleri ürünlerin nereden alınacağını ve nereye dağıtılacağını belirler, tanımlanan zaman penceresi

doğrultusunda toplama ve dağıtım zamanları için zaman aralıkları belirlenir. Zaman pencereli araç rotalama probleminde yolculuk için mesafe yerine yolculuk zamanı da kullanılır ve araç müşteriye erken vardığı zaman, eklenmesi gereken bir bekleme zamanı da olacaktır.



Şekil – 5.1 Zaman Pencereli Araç Rotalama Problemi Örneği: Müşteriler belirli bir zaman aralığı içerisinde 4 araç tarafından hizmet almaktadır

ZPARP'nin bir özel durumu olan araç kapasitelerinin olmadığı duruma, çoklu Zaman Pencereli Gezgin Satıcı Problemi (m-ZPGSP) denir. Çoklu Gezgin Satıcı Problemi (m-GSP), GSP'nin genelleşmesi ile birden çok satışıya sahip olunan problemdir. m-ZPGSP'de, m adet satışı belirli bir zaman aralığında, bütün şehirleri en az bir satıcının uğrayacağı şekilde ziyaret etmelidir. Bütün satış elemanları depo adı verilen bir şehirden başlar ve seyahatlerinin sonunda aynı depoya geri dönerler. Bu durum ZPARP'deki araç kapasitelerinin çok büyük olduğu durumdur (Desrochers ve diğerleri, 1988). Bu problemde tur, depodan başlar ve kapasite kısıtı olmadan diğer noktaları belirli bir zaman aralığında ziyaret eder. Amaç ise toplam tur uzunluğunu minimize etmektir. Bu durumun banka ve posta dağıtımları, okul servisi gibi endüstri ve servis sektöründe pek çok uygulama alanı vardır.

Başka bir durum ise en erken başlangıç servis süresinin sıfır ve en geç başlangıç servis süresinin ise sonsuz olduğu klasik ARP'dir. Klasik ARP bazen Kapasiteli Araç Problemi (KARP) olarak da adlandırılır. KARP, taleplerin her bir

şehir ile ilişkili olduğu ve her bir aracın kapasitesinin olduğu m-GSP olarak tanımlanabilir. Bu durumda, bir rotadaki toplam talep o rotaya atanan aracın kapasitesini geçemez. KARP tek bir depo, çoklu araç ve müşteriler olan rotalama problemi. Ayrıca, ZPARP, başlangıç noktası, yerler, süre ve başlangıç zamanı içeren bir programlama problemi olarak tanımlanabilir. Bu durumda, iki ardışık görev arasında belirli bir süresi ve maliyeti olan bir ulaşım ara görevi vardır. Bu durum müşterilerin bir araç tarafından hizmet verilen ve bir depoda sona eren görevler olduğu ZPARP olarak düşünülebilir. Bir görevden diğerine geçme maliyeti, iki müşteri noktası arasındaki mesafedir. Her bir görevi gerçekleştirmek için geçen zaman, müşteri noktasında geçen servis süresidir. Bu gibi durumlara havayolları, demiryolları ve karayolları dağıtım sistemleri uygulamalarında rastlanabilir (Desrochers ve diğerleri, 1988). ZPARP uygulamadaki çok çeşitliliğe göre genişletilebilir.

5.3.1.1. Tanım

Zaman pencereci araç rotalama problemi şu şekilde tanımlanabilmektedir: N müşteri seti ve A ise iki müşteri arasındaki bağlantılar olacak şekilde (N,A) grafiği tanımlansın. c_{ij} maliyeti ve t_{ij} seyahat süresi $(i,j) \in A$ kenarı ile ilişkilidir. K sayıda araca sahip olan firma müşterilere hizmet vermektedir. Araç kapasiteleri q_k ve müşterilerin talepleri ise $d_i, i \in C$ dir. Her bir müşterinin kendine ait bir servis süresi vardır. Her bir müşteri zaman penceresi adı verilen belirli bir zaman aralığında hizmet almak zorundadır. Araçlar depodan 0 zamanında çıkarlar, müşterilere hizmet verirler ve zaman penceresi içerisinde geri dönmek zorundadırlar. Her bir müşteriye bir tek kez servis edilmeli ve bütün müşteriler kendi zaman pencerelerinde hizmet almalıdırlar (Braysy, 2002).

5.3.1.2. Kısıtlar

Genel araç rotalama problemlerinde kısıtlar servis, araç ve maliyet kısıtlarıdır. Zaman pencereci araç rotalama problemlerinde ise bunlara zaman penceresi kısıtları da eklenir. Zaman penceresi kısıtları müşterilerin belirli bir zaman dilimi

içerisinde servis aldığı durumda ortaya çıkar. Zaman penceresi müşterinin servis almak istediği en erken ve en geç zaman aralığıdır.

Zaman penceresi kısıtları ile, günlük problemlerde sıkça karşılaşılır. Müşteriler, teslimatların genellikle iş saatlerinde veya işçilerin yükleme yapabilmek için müsait olduğu, daha önce belirlenen bir zaman aralığında yapılmasını isterler (Taillard ve Badeau, 1997).

Zaman penceresi kısıtları temel problemin yapısını önemli bir şekilde değiştirir. Örneğin, gezgin satıcı problemine olurlu bir çözüm bulmak sıradan bir problemdir. Olurlu bir çözüm sadece müşterilerin bir tekrar yapmadan herhangi bir sıralamasıdır. Fakat Zaman Pencereci Gezgin Satıcı Probleminde (ZPGSP) olurlu bir çözüm bulmak bile bazı durumlarda çok zor olabilir.

Zaman penceresi kısıtları esnek olmayan veya esnek olan kısıtlar şeklinde olabilir. Esnek olmayan zaman penceresi kısıtları hiçbir şekilde ihlal edilemez ve en erken ve en geç servis zamanına uyulması gerekmektedir. Esnek zaman penceresi kısıtlarında ise en erken ve en geç servis zamanına uyulmayabilir. İhlal sadece belirli bir ceza maliyeti ile mümkün olmaktadır (Taillard ve Badeau, 1997).

Bu çalışmada esnek olmayan zaman penceresi kısıtlarına sahip araç rotalama problemi ele alınmıştır. Zaman penceresi genellikle belirli bir sabit zaman aralığında çalışan işletmeler tarafından karşılaşılan problemlerde ortaya çıkmaktadır. Esnek olmayan zaman pencereli problemlerin örnekleri arasında para transferi, posta dağıtımı, okul servisleri verilebilir.

ZPARP için olurlu bir çözüm bulmak bir hayli zordur ve NP-zor problem sınıfına girmektedir (Savelsbergh, 1985). Problemi çözmek için bilgisayar yardımı gerekir. Bu tür problemler için yaklaşık sonuç bulunması çoğunlukla tercih edilir. Böylece genel amaç için tatminkâr sonuçlar çabuk bir şekilde bulunur. Yaklaşık sonuçlar genellikle sezgisel yöntemlerin yardımı ile bulunmaktadır.

ZPARP için pek çok araştırmacı tarafından dal-sınır, dinamik programlama gibi kesin çözüm yöntemleri veya tasarruf algoritması, süpürme algoritması, tabu arama, genetik algoritma gibi sezgisel çözüm yöntemleri gibi çok sayıda metot uygulanmıştır. ZPARP'nin çok karmaşık olması ve gerçek hayatta geniş kullanım alanı bulunması, kısa sürede yüksek kalitede çözüme ulaşacak çözüm tekniklerini çok önemli hale getirmektedir.

5.3.1.3. Formülasyon

Bu bölümde zaman pencereli araç rotalama probleminin formülasyonunu ortaya koymak üzere öncelikle parametreler ve karar değişkenleri belirtilecek, ardından amaç fonksiyonu ve matematiksel model açıklanacaktır.

Zaman pencereli araç rotalama probleminin formülasyonunda kullanılan parametreler ve karar değişkenleri aşağıda verilmiştir (Braysy, 2002).

Parametreler

N : Müşteri Seti

A : Müşteriler arasındaki mümkün bağlantıları içeren kenar seti

K : Toplam araç sayısı

V : Araç Seti

n : Servis görmeyi bekleyen müşteri sayısı

c_{ij} : i . müşteri ile j . müşteri arasındaki seyahat maliyeti $(i, j) \in A$

t_{ij} : i . müşteri ile j . müşteri arasındaki seyahat süresi $(i, j) \in A$

Q_k : k . aracın kapasitesi

d_i : i . müşterinin talebi

$[a_i, b_i]$: i . müşteri için zaman penceresi

a_i : i . müşteri için en erken servis zamanı

b_i : i . müşteri için en geç servis zamanı

f_i : i . müşteri için servis zamanı

Karar Değişkenleri

ZPARP $x_{ijk} (\forall (i,j) \in A, \forall k \in V)$ ve $s_{ik} (\forall i \in N, \forall k \in V)$ adında iki karar değişkenine sahiptir.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Eğer } k \text{ aracı } i. \text{ müşteri} \text{ den } j. \text{ müşteriye gider ise} \\ 0 & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

$s_{ik} = k \text{ aracının } i. \text{ müşteriye servis verdiği zaman}$

Eğer k aracı i . müşteriye hizmet vermiyor ise s_{ik} değişkeninin bir anlamı yoktur. $i = 0$ depo olduğu için bütün araçlarda ($s_{0k} = 0, \forall k$) depodaki servis zamanı sıfırdır.

Bu matematiksel modelin iki varsayımı vardır:

- 1) Aracın seyahat süresi, seyahat mesafesi ile doğru orantılıdır.
- 2) Eğer araç müşteriye en erken servis zamanından (a_i) önce gelmiş ise en erken servis zamanına kadar müşteriye beklemek zorundadır.

Amaç fonksiyonu her bir müşterinin sadece bir kez ziyaret edilmesini sağlayarak bütün turlardaki maliyetlerin minimize edilmesini amaçlamaktadır. Böylece bölünmüş dağıtımlara izin verilmemektedir. Bütün turların araç kapasitelerini aşmayacak şekilde olması ve müşterilere ait zaman pencerelerine uyması gerekmektedir. ZPARP'nin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir (Braysy, 2002):

Amaç Fonksiyonu

$$\text{Min } Z = \sum_{k \in V} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk}$$

Kısıtlar

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=0}^N x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in N \quad (5.1)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^N x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in N \quad (5.2)$$

(5.1) ve (5.2) nolu kısıt her bir müşterinin sadece bir araç tarafından ziyaret edilmesini sağlar.

$$\sum_{i=0}^N d_i \sum_{j=0}^N x_{ijk} \leq Q_k \quad k \in V \quad (5.3)$$

(5.3) nolu kısıt araç kapasitesi kısıtıdır. Hiçbir araç, kapasitesinin izin verdiği kadar fazla bir şekilde müşterilere hizmet veremez.

$$\sum_{j=1}^N x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in V \quad (5.4)$$

(5.4) nolu kısıt her bir aracın depodan (0) bir kere çıkmasını sağlar.

$$\sum_{i=0}^N x_{ihk} - \sum_{j=0}^N x_{hjk} = 0 \quad \forall k \in V \quad (5.5)$$

(5.5) nolu kısıt h müşterisinden ayrılan aracın sadece o müşteriye gidilmiş ise gerçekleşmesini sağlar.

$$\sum_{i=1}^N x_{i0k} = 1 \quad \forall k \in V \quad (5.6)$$

(5.6) nolu kısıt her aracın depoya dönmesini sağlamaktadır.

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N x_{0jk} \leq K \quad (5.7)$$

(5.7) nolu kısıt maksimum K tane tur olmasını sağlar.

$$x_{ijk}(s_{ik} + f_i + t_{ij} - s_{jk}) \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in V \quad (5.8)$$

(5.8) nolu kısıt k aracı eğer i. müşteriden j. müşteriye seyahat ediyor ise, j. müşteriye $s_{ik} + f_i + t_{ij}$ 'den önce ulaşamamasını sağlar.

$$a_i \leq s_{ik} + f_i \leq b_i \quad (5.9)$$

(5.9) nolu kısıt her bir müşterinin belirli bir zaman penceresinde servis görmesini sağlar.

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in V \quad (5.10)$$

(5.10) nolu kısıt x_{ijk} karar değişkeninin ikili değişken olma kısıtıdır.

5.3.2. Tasarruf Yöntemi

Kapasiteli araç rotalama problemlerinin (KARP) çözülmesi çok zordur ve KARP NP-zor olarak adlandırılır. Optimal olarak çözülebilen en büyük problem Toth ve Vigo'nun 1998 yılında çözdüğü 50 müşterili problemdir (Altinel ve Öncan, 2005). Kesin çözüm yöntemlerinin yetersizliğinden dolayı pratikte sezgisel yöntemler kullanılmaktadır. KARP sezgiselleri, klasik sezgisel yöntemler ve meta sezgisel yöntemler olarak ikiye ayrılabilir. Klasik sezgisel yöntemler karışık olmayan ve meta sezgisellere oranla daha limitli bir arama alanı araştırmasına sahiptir. Fakat basit olduklarından dolayı anlaşılması ve uygulanması çok kolaydır ve oldukça iyi sonuçlara hızlı bir şekilde ulaşabilmektedirler. Bazıları çok esnek olup araç rotalama problemlerinin farklı türlerine kolayca uygulanabilir.

Cordeu ve arkadaşları 2002 yılında yaptıkları bir araştırmada, araç rotalama problemleri için sezgiselleri, doğruya yakınlık, hız, basitlik ve esneklik özelliklerine göre incelemiştir ve bu çalışmanın özeti Tablo-5.1'de gösterilmiştir. Yapılan çalışmada hiçbir klasik sezgisel, meta sezgiseller kadar doğruya yakınlık ve esnekliğe sahip değildir. Fakat Clarke ve Wright'ın

tasarruf yöntemi çok hızlı ve uygulaması çok kolay bir yöntemdir. Bu aşamada tasarruf yönteminin hızı ve kolay uygulanma özelliği bozulmadan, doğruluğa yakınlığı nasıl artırılır sorusu akla gelmektedir. Bu da tasarruf denkleminin değiştirilmesi ile mümkün olabilmektedir (Altinel ve Öncan, 2005).

Tablo-5.1 Sezgisel Yöntemlerin Karşılaştırılması

Klasik Sezgiseller	Doğruya Yakınlık	Hız	Basitlik	Esneklik
Clarke ve Wright	Düşük	Çok Yüksek	Çok Yüksek	Düşük
İkili Eşleme	Yüksek	Çok Düşük	Düşük	Düşük
Süpürme	Düşük	Orta-Yüksek	Yüksek	Düşük
1-Petal	Düşük	Yüksek	Orta	Orta
2-Petal	Orta	Orta	Orta	Orta
Yerleşim Temelli	Orta	Düşük	Düşük	Düşük
Meta sezgiseller	Doğruya Yakınlık	Hız	Basitlik	Esneklik
Tabu Rota	Yüksek	Orta	Orta	Yüksek
Taillard	Çok Yüksek	Düşük	Orta-Düşük	Yüksek
Uyarlanan Hafıza	Çok Yüksek	Düşük	Orta-Düşük	Yüksek
Tabu Arama	Yüksek	Orta	Orta	Yüksek

Kaynak: Altinel ve Öncan, 2005

5.3.2.1. Geliştirilmiş Tasarruf Yöntemi

Clarke ve Wright tarafından geliştirilen tasarruf yöntemi kapasiteli araç rotalama problemlerinin çözümünü sağlayan ilk yöntemlerden biri olmakla beraber, ticari rotalama programlarında geniş kapsamda kullanılmaktadır. Başlangıçta her müşteri ayrı bir araç tarafından hizmet görmektedir. Bu durum açıkça göstermektedir ki n (müşteri sayısı) sayıda araca sahip olunmadığı zaman olurlu değildir. Sonraki aşamalarda turlardaki tasarruf maliyetleri dikkate alınarak turların birleşmesi ile birden fazla müşteriye bir aracın hizmet vermesi sağlanır. $(0, \dots, i, 0)$ ve $(0, j, \dots, 0)$ turlarının birleştirilmesi ile elde edilen tasarruf aşağıdaki gibidir (Clarke ve Wright, 1964).

$$s_{ij} = (c_{0i} + c_{i0} + c_{0j} + c_{j0}) - (c_{0i} + c_{ij} + c_{j0})$$

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij} \quad (5.11)$$

Her aşamada olurlu olan en büyük tasarrufu sağlayan iki rota birleştirilir. Olurlu birleşmelerin daha fazla tasarruf sağlayamadığı zaman sezgisel yöntem sonuçlanmış olur.

(5.11) denklemindeki tasarruf miktarı, i. ve j. müşteriler arasındaki mesafenin, i. ve j. müşterilerin depoya olan uzaklıklarından daha az ise büyük olur. Bunun sonucu olarak tasarruf yöntemi başlangıçta iyi turlar oluşturur. Gaskell (1967) ve Yellow (1970) tasarruf yöntemindeki bu zayıflığı çalışmalarında belirtmişler ve aşağıdaki parametrelili tasarruf denklemini önermişlerdir (Gaskell, 1967, Yellow, 1970):

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} \quad (5.12)$$

Burada λ sadece pozitif değer alabilen tur biçimlendirici parametresi olarak adlandırılır. Bu parametre orijinal tasarruf algoritmasında meydana gelen daire şeklinde turların oluşmasını engeller. λ parametresi büyür ise müşterilerin depoya olan uzaklıklarından çok i. ve j. müşteri arasındaki mesafe daha fazla önem kazanır. Tasarruf yöntemini geliştirecek bir başka yol ise 5.13'teki müşterilerin dağılımını da göz önüne alan tasarruf denklemdir. Paessen müşteri mesafelerini ile depo arasındaki mesafenin asimetrik olabileceğini dikkate alarak yeni bir tasarruf denklemi önermiştir (Paessen, 1988):

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} + \mu |c_{0i} - c_{j0}| \quad (5.13)$$

Tasarruf yöntemine Paessen'in yaptığı bu eklenti sayesinde λ ve μ parametrelerinin değişmesi ile farklı çözümler elde etmek mümkün olmuştur. Bunun sonucunda ise çözüm kalitesinde bir artış meydana gelmiştir fakat çözüm biraz zorlaşmıştır (Altinel ve Öncan, 2005).

İki farklı geliştirme de Golden ve arkadaşları (1977) ve Nelson ve arkadaşları (1985) tarafından önerilmiştir. Fakat bu değişiklikler çözümün iyileştirilmesi üzerine değil, çözüm zamanının kısılmasına yönelik geliştirmelerdir. Bu çalışmada tasarruf yönteminin en çok zamanını alan tasarruf maliyetlerinin

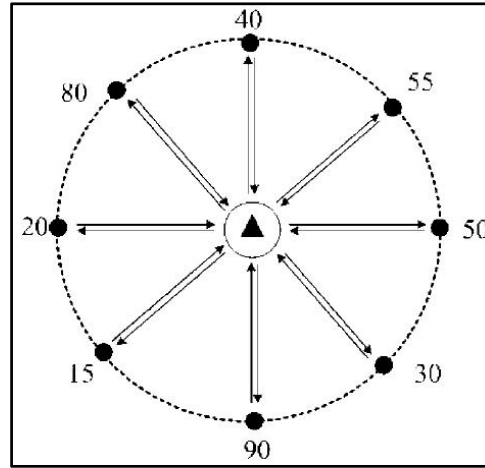
hesaplamalarını azaltmaya yönelik çalışmalar yapılmıştır. Bu geliştirmeler sayesinde daha önce yapılan tasarruf maliyet hesaplamaları depolanarak daha sonraki aşamalarda kullanılmaktadır. Bu da daha sonraki aşamada hesaplanacak olan tasarruf maliyetlerinin sayısının azalması ile daha hızlı bir çözüm sağlamaktadır. Ancak şu andaki koşullar düşünüldüğünde bu geliştirmeler sadece çok büyük boyuttaki problemleri çözmek için gereklidir (Altinel ve Öncan, 2005).

Tasarruf maliyet setlerinin depolanması farklı seçim stratejilerinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Orijinal tasarruf yöntemi, birleştirilecek turları seçerken depoya olan uzaklıklarından ziyade, müşteriler arasındaki mesafeye daha fazla önem vererek seçim yapmaktaydı. Daskin (2002), orijinal yöntemin bu eksikliğini gidermek için rastgele tasarruf yaklaşımını önermiştir. Daskin, orijinal tasarruf yöntemini başlangıçta kullanmış fakat seçim aşamasına gelindiğinde k . en iyi tasarrufa sahip olan iki turun birleştirilmesini önermiştir. k başlangıçta belirlenen rastgele seçilmiş bir parametredir. Bu rastgele yöntem, k parametresi değiştirilerek birkaç defa tekrarlanır ve en iyi sonuç kaydedilir (Altinel ve Öncan, 2005).

Son olarak Altinel ve Öncan 2005 yılında tasarruf yöntemini, talebi de dikkate alarak geliştirmişlerdir. Orijinal tasarruf yönteminde ve geliştirilmiş tasarruf yöntemlerinde yapılan tasarruf miktarları sonlara doğru azalmaktadır. Bu yüzden tasarruflar hesaplanırken talebin de hesaba katılması önem kazanmaktadır. Altinel ve Öncan büyük malları önce yerleştir mantığını dikkate alarak yeni bir tasarruf denklemi önermişlerdir:

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} + \mu |c_{0i} - c_{j0}| + v \frac{d_i + d_j}{\bar{d}} \quad (5.14)$$

Bu denklemde, d_i i. müşterinin talebi, d_j j. müşterinin talebi ve \bar{d} ortalama taleptir. Bu denklem daha önce Gaskell, Yellow ve Paessens tarafından yapılmış olan geliştirmeleri de içermektedir.



Şekil – 5.2. 8 Müşterili Araç Rotalama Problemi
Kaynak: Altinel ve Öncan, 2005

Şekil – 5.2’de sekiz müşterili bir araç rotalama problemi görülmektedir. Sekiz müşterinin depoya olan uzaklıkları eşit olan bir çember üzerindedir ve depoda tam çemberin merkezindedir. Şekil üzerindeki rakamlar müşteri taleplerini göstermektedir. Araç kapasitesinin eşit ve 100 olduğu varsayılınsın. Eğer talepleri göz ardı ederek (5.13)’deki Paessens’in denklemi kullanılırsa, araç kapasitesini aşmamak koşulu ile herhangi komşu müşteri birleştirilebilir. Fakat eğer müşteri talepleri de dikkate alınırsa, 20 talebe sahip olan müşteri ile 80 talebe sahip olan müşteriyi birleştirmek öncelikli hedef olacaktır.

Altinel ve Öncan tarafından ortaya atılan başka bir strateji ise boşta kalan araç kapasitelerine yöneliktir. Buna göre tasarruf denklemi aşağıdaki gibidir:

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} + \mu |c_{0i} - c_{j0}| + \gamma \frac{(D - d_i) + (D - d_j)}{(D - \bar{d})} \quad (5.15)$$

Buradaki γ parametresi küçük talebe sahip müşterilere önem vererek, kalan araç kapasitesini artırmaktadır. Başka bir ifade ile daha büyük γ değeri daha küçük malların önce konulmasını sağlamaktadır. Altinel ve Öncan bu stratejiyi denemişler, fakat (5.14) denklemindeki tasarruf yönteminden daha iyi sonuç elde edememişlerdir.

Altinel ve Öncan geliştirdikleri tasarruf yöntemini Christofides ve arkadaşları (1979) tarafından ortaya konan bazı test problemleri (Tablo – 5.1) başta olmak

üzere literatürdeki farklı test problemlerinde denemişlerdir. Tablodaki en iyi sonuçlar çeşitli kaynaklardan elde edilmiştir. İlk sütun problemin adını, ikinci sütun problem için şu ana kadar elde edilmiş olan en iyi sonucu, üç ve dördüncü sütunlar Clarke ve Wright (CW) tarafından önerilen standart tasarruf yöntemi sonuçlarını, beş, altı ve yedinci sütunlar Gaskell ve Yellow (GY) tarafından geliştirilen tasarruf yöntemini, sekiz, dokuz ve onuncu sütunlar Paessens (P) tarafından geliştirilen tasarruf yöntemini ve son olarak on bir, on iki ve on üçüncü sütunlar Altinel ve Öncan (AÖ) tarafından geliştirilen talep parametresi eklenmiş tasarruf yöntemini göstermektedir.

Tablo – 5.2 Tasarruf Yöntemlerinin Karşılaştırılması

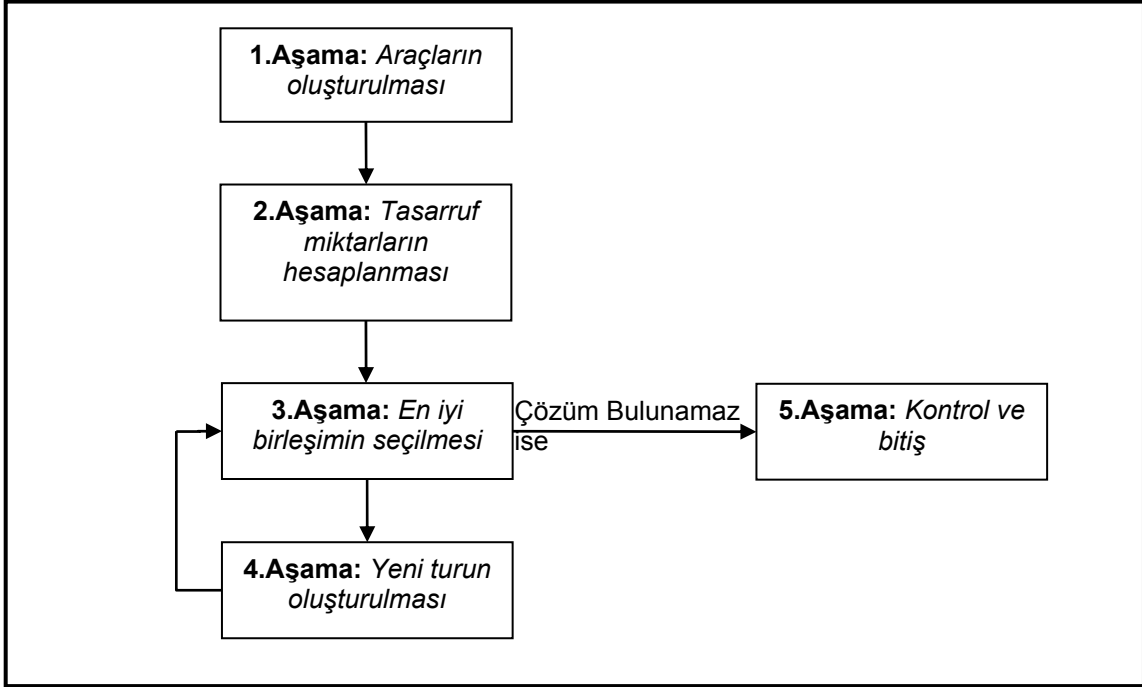
Problem	En iyi	CW		GY		P		AÖ	
		% Sp	Süre	% Sp	Süre	% Sp	Süre	% Sp	Süre
C50	524.61	11.442	0.02	11.217	0.06	8.425	1.17	5.898	24.93
C75	835.26	8.636	0.02	3.719	0.13	3.716	3.17	2.987	63.59
C100	826.14	7.346	0.02	6.443	0.22	4.951	5.50	4.265	117.94
C150	1028.42	10.890	0.03	8.484	0.63	6.913	13.73	6.248	283.03
C199	1291.45	8.075	0.06	6.952	1.34	6.086	28.59	5.291	627.70
C120	1042.11	2.498	0.02	2.498	0.41	2.340	8.45	1.506	182.96
C100b	819.56	1.702	0.02	1.304	0.27	0.972	5.63	0.629	119.72
Ortalama		7.227	0.02	5.802	0.44		9.46	3.832	202.84

Kaynak: Altinel ve Öncan, 2005

Farklı tasarruf yöntemi uygulamalarının şu ana kadarki bulunabilen en iyi sonuçtan % olarak sapmaları ve çözüm süreleri Tablo – 5.2’de verilmiştir. Örneğin C50 problemi için Clarke Wright tasarruf yönteminin en iyi çözümden farkı %11.442 iken, Altinel ve Öncan tarafından geliştirilen tasarruf yönteminin en iyi çözümden farkı %5.898’dir. Altinel ve Öncan tarafından geliştirilen tasarruf yönteminin %5.544 daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Tablodaki değerlere bakılarak talep değerlerini dikkate alan Altinel ve Öncan tarafından geliştirilen tasarruf yönteminin, daha önceki yöntemlerden daha iyi sonuç verdiği açıkça görülmektedir.

5.3.2.2. Tasarruf Yönteminin Aşamaları

Tasarruf yöntemi beş aşamadan oluşmaktadır. Bu aşamalar Şekil – 5.3'te gösterilmektedir (Poot ve diğerleri, 1999).



Şekil – 5.3. Tasarruf Yönteminin Aşamaları

Kaynak: Poot ve diğerleri, 1999

1. **Aşama: Araçların oluşturulması.** Her bir müşteriye bir araç atanır ve n araçlı bir rotalama yapılmış olur.
2. **Aşama: Tasarruf miktarlarının hesaplanması.** Aşağıdaki durumları sağlayacak şekilde tasarruflar hesaplanır.
 - a. Tur büyüklüğü araç kapasitesini aşmaması gerekir.
 - b. Atama yapabilmek için araç kısıtlarına uyan en az bir aracın bulunması gerekir.
 - c. Tur içindeki sabit pozisyonlar bozulamaz.
 - d. Toplam tur zamanı araç için bulunan maksimum zamanı aşamaz.

3. **Aşama:** *En iyi birleşimin seçilmesi.* Bütün kısıtları sağlayan olurlu en büyük tasarrufa ait olan birleşim seçilir. Eğer bütün kısıtları sağlayan pozitif bir tasarruf miktarı bulunamaz ise 5.Aşamaya geçilir.
4. **Aşama:** *Yeni turun oluşturulması.* En iyi birleşimdeki müşteriler aynı tur içerisine alınarak yeni bir tur oluşturulur. 3.Aşamaya geri dönülür.
5. **Aşama:** *Kontrol ve bitiş.* Bütün müşterilerin araçlara atandığı kontrol edilir ve tasarruf yöntemi sonlandırılır. Müşteri taleplerinin araç kapasiteleri toplamından fazla olduğu durumda, tasarruf yönteminin sonunda hizmet alamamış müşteriler kalacaktır.

ALTINCI BÖLÜM

BİR DAĞITIM FİRMASINDA UYGULAMA

Bu çalışmada daha önceki bölümlerde incelenen zaman pencereli araç rotalama problemine, geliştirilmiş tasarruf yöntemi ile çözüm aranması amaçlanmıştır. Bunun için uygulama yapılacak olan firmada uygulanan mevcut araç rotalama modelleri incelenmiş ve zaman pencereli araç rotalama problemine geliştirilmiş tasarruf yöntemi uygulaması için gerekli olan veriler firmadan temin edilerek, firma için yeni bir dağıtım rotası önerilmiştir.

Bu çerçevede bu bölümün ilk kısmında, dağıtım rotasının çıkarılması için uygulama yapılan firmadan alınan verilerin analizi yapılacaktır. İkinci kısımda mevcut durum analiz edilecek, üçüncü kısmında ise zaman pencereli araç rotalama problemine geliştirilmiş tasarruf yöntemi uygulaması yapıp, yeni bir dağıtım rotası önerilecektir. Son kısımda ise mevcut dağıtım rotası ile önerilen dağıtım rotası karşılaştırılacaktır.

6.1. Dağıtım Rotası Verilerin Analizi

Uygulama yapılan firma Mersin'de faaliyet gösteren ve içecek dağıtımı yapan Merpaş A.Ş.'dir. Merpaş A.Ş. 1984 yılında kurulmuş olup, 1984 yılından itibaren içecek dağıtımı yapmaktadır. Firmada toplam 55 kişi çalışmaktadır ve firma başta Efes Pilsen ve Coca-Cola olmak üzere birçok firmanın ürünlerinin dağıtımını üstlenmiştir.

Bu çalışma en uygun dağıtım rotası bulunmasını amaçlamaktadır. Uygulama için ise Merpaş A.Ş. tarafından dağıtımı yapılan Efes Pilsen ürünün dağıtımı seçilmiştir. Firma Efes Pilsen'in ürünlerinin Kazanlı'dan Mezitli'ye kadar olan alanda dağıtımını yapmaktadır. Bu alanda firmanın çeşitli boyutlarda dağıtım yaptığı toplam 1.100 müşterisi bulunmaktadır.

Firmada ön sipariş yöntemi kullanılmaktadır. Mersin şehri altı bölgeye ayrılmakta ve her bir bölgeden sorumlu bir satış elemanı çalışmaktadır. Bu satış elemanları bu bölgelerden bir sonraki günün müşteri taleplerini toplamakta ve tahsilat işlemini gerçekleştirmektedir. Bu çalışmada da satış elemanlarının topladığı müşteri talepleri kullanılarak en uygun dağıtım rotası çıkarılmaya çalışılacaktır. Satış elemanları haftanın her günü farklı müşterilere gitmekte ve bir gün sonrasında da ziyaret ettiği müşterilerin talepleri dağıtılmaktadır. Çalışmada 09.12.2008 tarihine ait satış elemanlarının topladığı veriler kullanılarak, 10.12.2008 tarihindeki dağıtım rotası bulunmaya çalışılmıştır. Uygulama için belirlenen 10.12.2008 tarihinde toplam 110 müşteri talebi olmuştur. Bu talep rakamlarından en büyüğü 1.349 litre ve en küçüğü ise 4 litredir. 10.12.2008 tarihindeki ortalama talep ise 166,79 litredir. 09.12.2008 tarihine ait talep verileri Tablo – 6.1’de gösterilmektedir.

Tablo – 6.1 Müşterilerin 09.12.2008 Tarihine Ait Talep Verileri

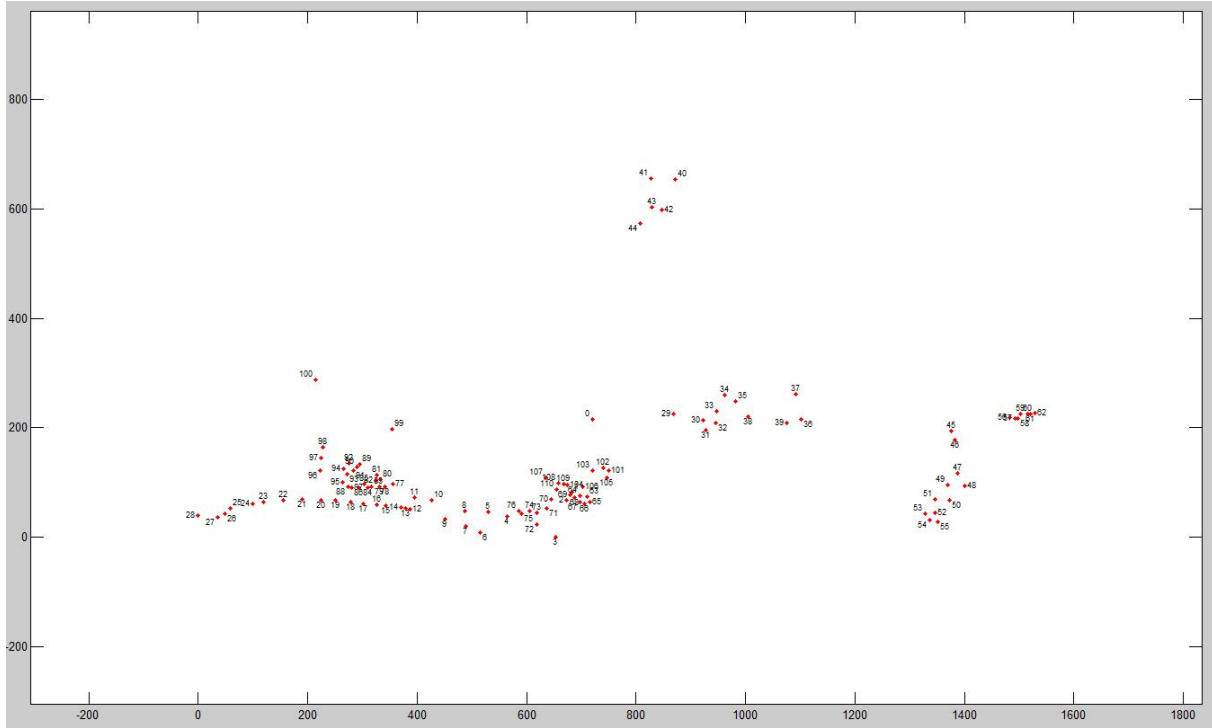
<u>Müşteri</u>	<u>Talep</u>	<u>Müşteri</u>	<u>Talep</u>	<u>Müşteri</u>	<u>Talep</u>	<u>Müşteri</u>	<u>Talep</u>
<u>No</u>	<u>Miktarı</u>	<u>No</u>	<u>Miktarı</u>	<u>No</u>	<u>Miktarı</u>	<u>No</u>	<u>Miktarı</u>
<u>1</u>	24	<u>31</u>	16	<u>61</u>	10	<u>91</u>	30
<u>2</u>	120	<u>32</u>	10	<u>62</u>	520	<u>92</u>	472
<u>3</u>	134	<u>33</u>	4	<u>63</u>	36	<u>93</u>	48
<u>4</u>	144	<u>34</u>	115	<u>64</u>	133	<u>94</u>	116
<u>5</u>	84	<u>35</u>	240	<u>65</u>	616	<u>95</u>	204
<u>6</u>	24	<u>36</u>	24	<u>66</u>	84	<u>96</u>	54
<u>7</u>	36	<u>37</u>	41	<u>67</u>	170	<u>97</u>	206
<u>8</u>	8	<u>38</u>	663	<u>68</u>	60	<u>98</u>	50
<u>9</u>	8	<u>39</u>	180	<u>69</u>	122	<u>99</u>	212
<u>10</u>	92	<u>40</u>	627	<u>70</u>	222	<u>100</u>	108
<u>11</u>	244	<u>41</u>	1349	<u>71</u>	788	<u>101</u>	403
<u>12</u>	62	<u>42</u>	108	<u>72</u>	131	<u>102</u>	234
<u>13</u>	960	<u>43</u>	192	<u>73</u>	235	<u>103</u>	634
<u>14</u>	162	<u>44</u>	84	<u>74</u>	312	<u>104</u>	120
<u>15</u>	150	<u>45</u>	264	<u>75</u>	137	<u>105</u>	48
<u>16</u>	542	<u>46</u>	162	<u>76</u>	6	<u>106</u>	264
<u>17</u>	36	<u>47</u>	60	<u>77</u>	8	<u>107</u>	140
<u>18</u>	100	<u>48</u>	45	<u>78</u>	24	<u>108</u>	168
<u>19</u>	120	<u>49</u>	20	<u>79</u>	91	<u>109</u>	93
<u>20</u>	12	<u>50</u>	8	<u>80</u>	36	<u>110</u>	48
<u>21</u>	16	<u>51</u>	144	<u>81</u>	36		
<u>22</u>	8	<u>52</u>	338	<u>82</u>	36		
<u>23</u>	8	<u>53</u>	1248	<u>83</u>	30		
<u>24</u>	16	<u>54</u>	167	<u>84</u>	12		
<u>25</u>	8	<u>55</u>	126	<u>85</u>	36		
<u>26</u>	8	<u>56</u>	129	<u>86</u>	84		
<u>27</u>	8	<u>57</u>	36	<u>87</u>	60		
<u>28</u>	517	<u>58</u>	6	<u>88</u>	148		
<u>29</u>	72	<u>59</u>	24	<u>89</u>	116		
<u>30</u>	30	<u>60</u>	159	<u>90</u>	54		

Dağıtım yapılacak müşteriler Mersin şehrine dağılmış durumdadırlar. Uygulama için 110 müşterinin ve deponun yeri 1/10.000 ölçekli Mersin Büyükşehir haritasında işaretlenmiş ve xy koordinat sistemine göre her müşteriye ait olan koordinatlar saptanmıştır. Saptanan bu koordinatlar Tablo – 6.2’de verilmiştir.

Tablo – 6.2. Müşterilere Ait Koordinatlar

<u>Müşteri No</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>Müşteri No</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>Müşteri No</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>
<u>0</u>	720	215	<u>37</u>	1092	262	<u>74</u>	605	48
<u>1</u>	683	82	<u>38</u>	1005	220	<u>75</u>	590	43
<u>2</u>	672	68	<u>39</u>	1076	209	<u>76</u>	585	48
<u>3</u>	653	0	<u>40</u>	871	654	<u>77</u>	356	97
<u>4</u>	564	38	<u>41</u>	828	656	<u>78</u>	341	92
<u>5</u>	530	47	<u>42</u>	847	598	<u>79</u>	331	93
<u>6</u>	515	9	<u>43</u>	829	604	<u>80</u>	333	105
<u>7</u>	489	20	<u>44</u>	808	574	<u>81</u>	326	114
<u>8</u>	487	48	<u>45</u>	1376	194	<u>82</u>	325	104
<u>9</u>	451	33	<u>46</u>	1382	178	<u>83</u>	316	93
<u>10</u>	426	68	<u>47</u>	1387	117	<u>84</u>	310	90
<u>11</u>	395	72	<u>48</u>	1400	94	<u>85</u>	303	97
<u>12</u>	387	51	<u>49</u>	1370	96	<u>86</u>	293	91
<u>13</u>	379	52	<u>50</u>	1372	68	<u>87</u>	280	91
<u>14</u>	371	54	<u>51</u>	1346	69	<u>88</u>	274	93
<u>15</u>	342	57	<u>52</u>	1346	45	<u>89</u>	295	133
<u>16</u>	326	59	<u>53</u>	1328	43	<u>90</u>	290	129
<u>17</u>	302	61	<u>54</u>	1336	32	<u>91</u>	284	121
<u>18</u>	278	64	<u>55</u>	1351	28	<u>92</u>	275	135
<u>19</u>	250	68	<u>56</u>	1482	218	<u>93</u>	272	116
<u>20</u>	225	68	<u>57</u>	1492	217	<u>94</u>	265	125
<u>21</u>	190	69	<u>58</u>	1497	217	<u>95</u>	264	100
<u>22</u>	155	67	<u>59</u>	1503	226	<u>96</u>	223	121
<u>23</u>	119	64	<u>60</u>	1515	226	<u>97</u>	224	145
<u>24</u>	100	61	<u>61</u>	1521	226	<u>98</u>	228	164
<u>25</u>	59	52	<u>62</u>	1528	227	<u>99</u>	354	197
<u>26</u>	48	43	<u>63</u>	710	74	<u>100</u>	215	287
<u>27</u>	35	36	<u>64</u>	697	76	<u>101</u>	750	121
<u>28</u>	0	40	<u>65</u>	715	65	<u>102</u>	740	127
<u>29</u>	869	226	<u>66</u>	706	61	<u>103</u>	720	122
<u>30</u>	922	214	<u>67</u>	697	65	<u>104</u>	675	96
<u>31</u>	928	196	<u>68</u>	688	73	<u>105</u>	746	108
<u>32</u>	945	209	<u>69</u>	680	78	<u>106</u>	702	93
<u>33</u>	948	231	<u>70</u>	645	70	<u>107</u>	635	108
<u>34</u>	962	260	<u>71</u>	637	52	<u>108</u>	658	98
<u>35</u>	981	249	<u>72</u>	619	23	<u>109</u>	668	97
<u>36</u>	1102	215	<u>73</u>	618	44	<u>110</u>	655	88

Dağıtım yapılacak depo, “0” olarak tanımlanmıştır. Müşterilerin ve deponun konumu Şekil – 6.1’de gösterilmiştir.



Şekil – 6.1 Deponun ve Müşterilerin Konumu

Müşterilerin depoya olan ve kendi aralarındaki uzaklıkları için dik uzaklıklar değil, sokak ve caddeler dikkate alınarak gerçek uzunluklar hesaplanmıştır. Bunun için 111 noktanın birbirine ait olan uzaklıkları için 6.105 adet gerçek mesafe ölçülmüştür. Müşterilerin depoya olan uzaklıkları ve kendi aralarındaki uzaklıklar Ek – 1’de verilmiştir. Şehir içinde araçlar müşteriler arasında seyahat ederken ortalama 15 km/saat hızla yol almaktadırlar. Buna göre müşterilerin depoya olan uzaklıkları ve kendi aralarındaki uzaklıkları süre olarak Ek –2’de verilmiştir.

Dağıtım yapılan iki türde müşteri bulunmaktadır. Bunlardan birincisi 09:00–18:00 arasında hizmet verilebilen bakkal, market gibi müşteriler, ikincisi ise saat 13:00–18:00 arasında hizmet verilebilen lokanta, bar gibi müşterilerdir. İkinci tür müşterilere saat 09:00–13:00 arasında hizmet verilememektedir.

Müşterilerdeki bekleme süreleri ürün adetleriyle orantılı olarak artmaktadır. Firmadan alınan geçmiş verilere göre 10.12.2008 tarihindeki müşteri talepleri için yaklaşık olarak bekleme süreleri hesaplanmıştır. Hesaplama işlemi denklem (6.1) ile yapılmıştır. Bir müşterideki ortalama bekleme süresi 18 dakikadır. Müşterideki en

düşük bekleme süresi 15 dakika ve en yüksek bekleme süresi ise 38 dakikadır. Hesaplanmış bekleme zamanları Tablo-6.3'te gösterilmektedir.

Müşterideki Bekleme süresinin hesaplanması

f_i : i. müşterideki bekleme zamanı

d_i : i. müşterinin talebi

$$f_i = 0,017d_i + 15 \quad (6.1)$$

Tablo – 6.3. Müşterilerdeki Bekleme Süreleri (Dakika Olarak)

<u>Müşteri No</u>	<u>Bekleme Zamanı</u>	<u>Müşteri No</u>	<u>Bekleme Zamanı</u>	<u>Müşteri No</u>	<u>Bekleme Zamanı</u>	<u>Müşteri No</u>	<u>Bekleme Zamanı</u>
<u>1</u>	15	<u>31</u>	15	<u>61</u>	15	<u>91</u>	16
<u>2</u>	17	<u>32</u>	15	<u>62</u>	24	<u>92</u>	23
<u>3</u>	17	<u>33</u>	15	<u>63</u>	16	<u>93</u>	16
<u>4</u>	17	<u>34</u>	17	<u>64</u>	17	<u>94</u>	17
<u>5</u>	16	<u>35</u>	19	<u>65</u>	25	<u>95</u>	18
<u>6</u>	15	<u>36</u>	15	<u>66</u>	16	<u>96</u>	16
<u>7</u>	16	<u>37</u>	16	<u>67</u>	18	<u>97</u>	19
<u>8</u>	15	<u>38</u>	26	<u>68</u>	16	<u>98</u>	16
<u>9</u>	15	<u>39</u>	18	<u>69</u>	17	<u>99</u>	19
<u>10</u>	17	<u>40</u>	26	<u>70</u>	19	<u>100</u>	17
<u>11</u>	19	<u>41</u>	38	<u>71</u>	28	<u>101</u>	22
<u>12</u>	16	<u>42</u>	17	<u>72</u>	17	<u>102</u>	19
<u>13</u>	31	<u>43</u>	18	<u>73</u>	19	<u>103</u>	26
<u>14</u>	18	<u>44</u>	16	<u>74</u>	20	<u>104</u>	17
<u>15</u>	18	<u>45</u>	19	<u>75</u>	17	<u>105</u>	16
<u>16</u>	24	<u>46</u>	18	<u>76</u>	15	<u>106</u>	19
<u>17</u>	16	<u>47</u>	16	<u>77</u>	15	<u>107</u>	17
<u>18</u>	17	<u>48</u>	16	<u>78</u>	15	<u>108</u>	18
<u>19</u>	17	<u>49</u>	15	<u>79</u>	17	<u>109</u>	17
<u>20</u>	15	<u>50</u>	15	<u>80</u>	16	<u>110</u>	16
<u>21</u>	15	<u>51</u>	17	<u>81</u>	16		
<u>22</u>	15	<u>52</u>	21	<u>82</u>	16		
<u>23</u>	15	<u>53</u>	36	<u>83</u>	16		
<u>24</u>	15	<u>54</u>	18	<u>84</u>	15		
<u>25</u>	15	<u>55</u>	17	<u>85</u>	16		
<u>26</u>	15	<u>56</u>	17	<u>86</u>	16		
<u>27</u>	15	<u>57</u>	16	<u>87</u>	16		
<u>28</u>	24	<u>58</u>	15	<u>88</u>	18		
<u>29</u>	16	<u>59</u>	15	<u>89</u>	17		
<u>30</u>	16	<u>60</u>	18	<u>90</u>	16		

Firmanın dağıtım yapabilecek toplam 13 adet kamyonu bulunmaktadır. Birbirleriyle aynı taşıma kapasitesine sahip olan bu kamyonlar, 2.160 litre taşıma kapasitesine sahiptirler.

Uygulamada firma için günlük olarak en uygun dağıtım rotası bulunacağı için, dağıtım firmasının karşılaştacağı günlük maliyet, o günde oluşacak yakıt maliyetidir. Merpaş A.Ş.'de ürün dağıtımını yapan kamyonlar Aralık ayında toplam 7.865 km yol yapmışlardır. Aralık ayında toplam yakıt maliyeti 4.017 TL'dir. Buna göre kilometre başına maliyet yaklaşık olarak 51 kuruştur.

6.2. Mevcut Durumdaki Dağıtım Rotaları

Merpaş A.Ş.'de mevcut durumda Mersin şehri altı bölgeye bölünmüş olarak dağıtım yapılmaktadır. Her bir bölgeye ayrı araç atanmakta ve bir bölgeye aracın yetmemesi durumunda o bölgeye tekrar araç atanarak dağıtım işlemi yapılmaktadır. Altı bölgeye ayrılan Mersin şehrinden bir gün öncesinde satış elemanları tarafından toplanan müşteri talepleri depo sorumlusu tarafından toplanır. Depo sorumlusu bu talep veriler doğrultusunda bir gün sonranın dağıtım rotasını çıkarmaktadır. Depo sorumlusu daha önceden belirlenen her bir bölge için ayrı olan rotalara sırasıyla talepleri yerleştirmektedir. Eğer herhangi bir bölgede talep değeri araç kapasitesini aşar ise, o müşteriden itibaren yeni bir araca atama yapılarak bütün müşteri taleplerini karşılayacak şekilde dağıtım rotası çıkartılmaktadır.

Zaman penceresi kısıtlarını dikkate almadan yapılan uygulama için mevcut dağıtım rotası Tablo – 6.4'te gösterilmektedir. Bu dağıtıma göre bir aracın kat ettiği en uzun mesafe 29.160 m.'dir, en kısa mesafe ise 11.810 m.'dir. Araçların kat ettiği ortalama mesafe ise yaklaşık olarak 18.947 m., toplam mesafe ise 170.520 m.'dir.

Tablo – 6.4 Klasik ARP İçin Mevcut Durumdaki Dağıtım Rotası

Araç No (i)	i. Aracın Dağıtım Rotası	i. Araç Tarafından Kat Edilen Mesafe (m)
1	0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-0	12.280
2	0-15-16-17-18-19-20-21-22-23-24-25-26-27-28-29-30-31-32-33-34-35-36-37-0	29.160
3	0-38-39-40-0	17.190
4	0-41-42-43-44-45-46-0	23.870
5	0-47-48-49-50-51-52-53-54-55-0	20.150
6	0-56-57-58-59-60-61-62-63-64-65-66-67-68-69-0	20.170
7	0-70-71-72-73-74-75-76-77-78-79-80-81-82-83-84-85-0	13.660
8	0-86-87-88-89-90-91-92-93-94-95-96-97-98-99-100-0	22.230
9	0-101-102-103-104-105-106-107-108-109-110-0	11.810

Zaman penceresi kısıtlarını dikkate alarak dağıtım yapıldığı durumlarda, depo sorumlusu öğleden sonra dağıtım yapılacak yerleri de göz önünde bulundurarak dağıtım rotasını planlamaktadır. Buna göre hazırlanan dağıtım rotası Tablo–6.5’de verilmiştir. Bu dağıtıma göre bir aracın kat ettiği en uzun mesafe 22.190 m.’dir, en kısa mesafe ise 5.730 m.’dir. Araçların kat ettiği ortalama mesafe 12.946 m., toplam mesafe ise 181.240 m.’dir.

Tablo – 6.5 ZPARP İçin Mevcut Durumdaki Dağıtım Rotası

Araç No (i)	i. Aracın Dağıtım Rotası	i. Araç Tarafından Kat Edilen Mesafe (m)
1	0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-0	12.120
2	0-14-15-16-17-18-19-20-21-22-23-0	15.020
3	0-24-25-26-27-28-0	17.520
4	0-29-30-31-32-33-34-35-36-37-38-39-0	13.440
5	0-40-41-42-0	10.420
6	0-43-44-0	7.980
7	0-45-46-47-48-49-50-51-52-0	9.450
8	0-53-54-55-56-57-58-59-60-61-0	22.120
9	0-62-0	17.420
10	0-63-64-65-66-67-68-69-70-0	5.730
11	0-71-72-73-74-75-76-0	6.340
12	0-77-78-79-80-81-82-83-84-85-86-87-88-89-0	14.850
13	0-90-91-92-93-94-95-96-97-98-99-100-0	22.190
14	0-101-102-103-104-105-106-107-108-109-110-0	6.640

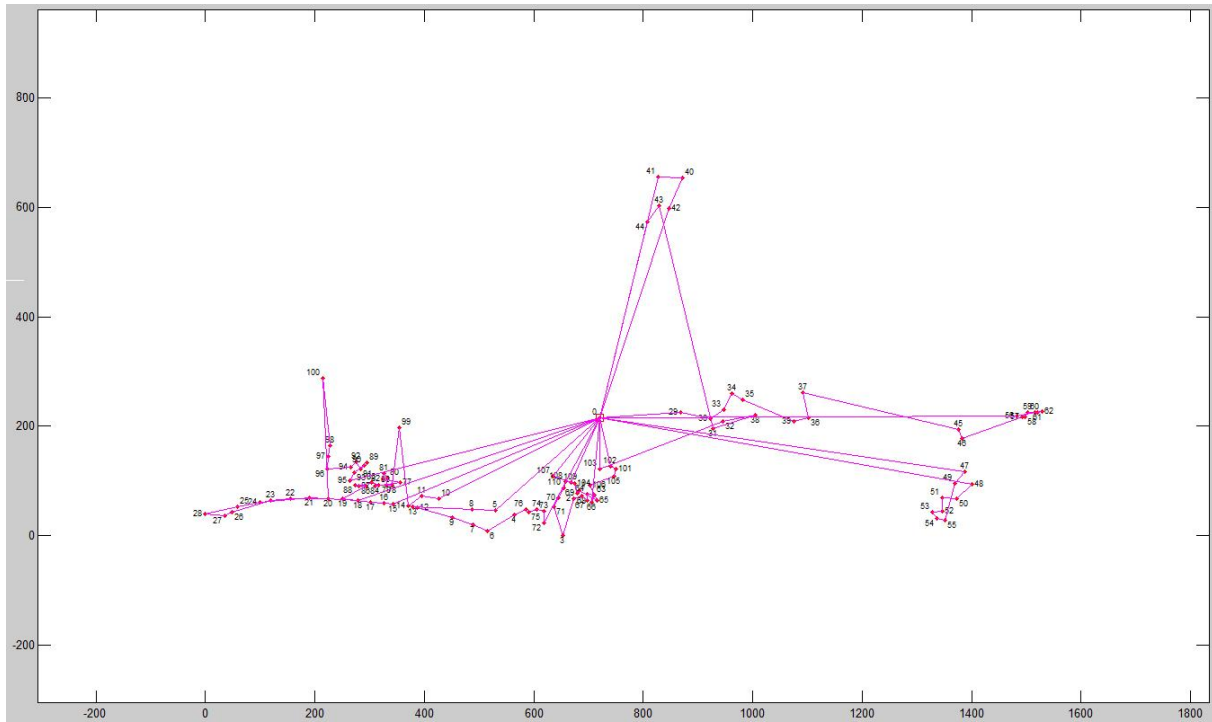
6.3. ZPARP Geliştirilmiş Tasarruf Yönteminin Uygulanması

Merpaş A.Ş.'deki dağıtım problemi, müşterilerin taleplerini belirli bir saat diliminde istemesi ve araçların belirli bir kapasitesi olması nedeniyle zaman pencereci araç rotalama problemi olarak adlandırılmaktadır. Çalışmada bu problemi çözmek için Altinel ve Öncan tarafından en son geliştirilmiş olan tasarruf yöntemi seçilmiştir. Geliştirilmiş tasarruf yönteminin seçilme sebebi ise çok kısa sürede çok iyi sonuçlar vermesi ve aynı zamanda kolayca uygulanabilir olmasıdır.

Geliştirilmiş tasarruf yönteminin uygulanması için gerekli olan veriler; talep verileri, müşterilerin depoya olan uzaklıkları ve kendi aralarındaki uzaklıklar, müşterilerdeki bekleme süresi, araç kapasiteleri ve müşterilerin taleplerini almak istediği zaman aralığıdır. Bir önceki bölümde verilen bu verilere göre bu çalışmada Altinel ve Öncan tarafından 2005 yılında ortaya atılmış olan geliştirilmiş tasarruf yöntemi denklemi (6.1) kullanılmıştır. Ayrıca çalışmada ele alınan problemde müşterilerin ürünleri belirli bir zaman aralığında talep etmesi dolayısıyla, zaman penceresi kısıtları eklenmiş ve MATLAB ile modellenen geliştirilmiş tasarruf yöntemi yardımı ile en uygun dağıtım rotası bulunmaya çalışılmıştır.

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} + \mu |c_{0i} - c_{j0}| + v \frac{d_i + d_j}{\bar{d}} \quad (6.1)$$

İlk olarak dağıtım problemi zaman penceresi kısıtları olmadan ele alınmış ve zaman penceresi olmadan klasik araç rotalama problemine çözüm aranmıştır. Buna göre dağıtım için 9 araç kullanılmış ve dağıtım rotaları ve kat edilen mesafeler Şekil-6.2 ve Tablo-6.6'da gösterilmiştir. Bir aracın kat ettiği en uzun mesafe 23.620 m., en kısa mesafe ise 5.160 m.'dir. Araçların kat ettiği ortalama mesafe 14.428 m., toplam mesafe ise 129.850 m.'dir.

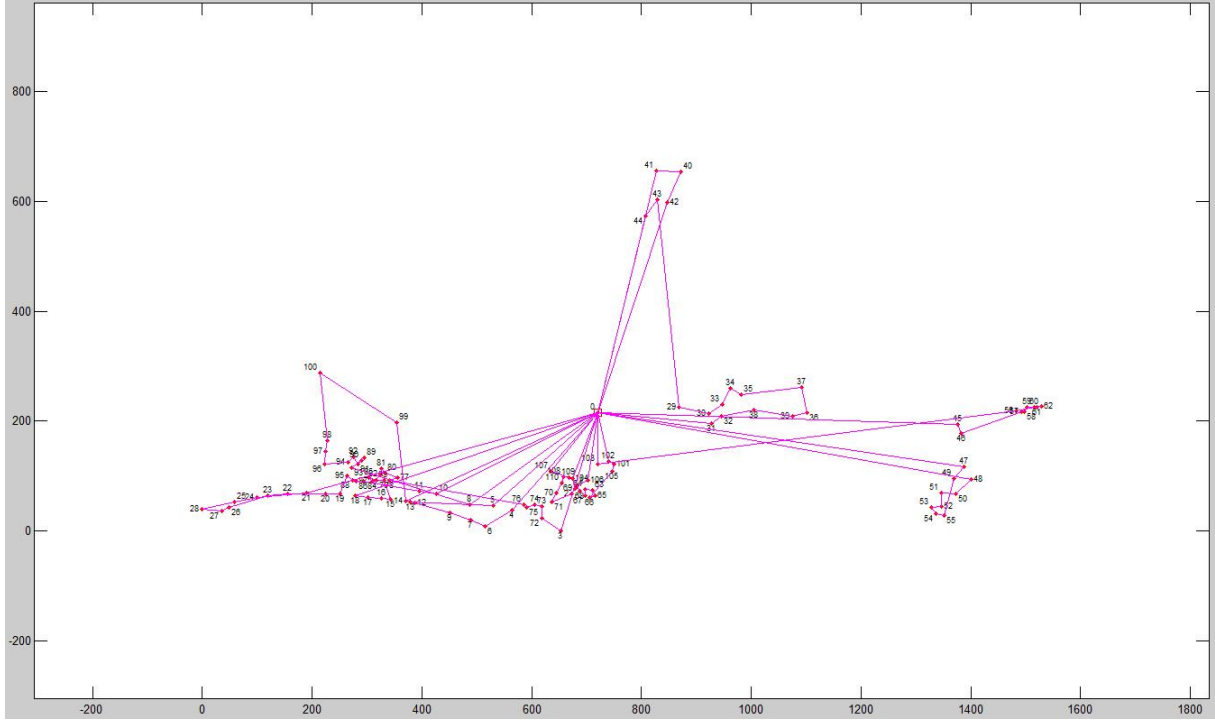


Şekil – 6.2 Klasik ARP İçin Önerilen Dağıtım Rotası

Tablo – 6.6 Klasik ARP İçin Önerilen Dağıtım Rotası

Araç No (i)	i. Aracın Dağıtım Rotası	i. Araç Tarafından Kat Edilen Mesafe (m)
1	0-48-50-51-52-53-54-55-49-47-0	19.340
2	0-95-93-89, 90, 91, 92, 94, 96, 97, 98, 100, 20, 22, 23, 26, 27, 28, 25, 24, 21, 18, 0	23.620
3	0, 10, 11, 14, 99, 78, 79, 80, 81, 82, 79, 84, 83, 85, 87, 88, 86, 19, 17, 16, 15, 0	17.680
4	0, 42, 40, 41, 0	10.070
5	0, 29, 30, 33, 34, 35, 39, 36, 37, 45, 46, 57, 58, 59, 61, 62, 60, 56, 0	21.350
6	0, 103, 32, 38, 31, 43, 44, 0	15.530
7	0, 72, 73, 74, 75, 76, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 8, 5, 0	10.800
8	0, 66, 63, 64, 67, 68, 2, 3, 71, 70, 110, 108, 119, 0	6.300
9	0, 102, 101, 105, 106, 65, 1, 69, 104, 107, 0	5.160

Zaman penceresi kısıtları eklenerek modellenen problem için çözüm ise Şekil – 6.3'te ve Tablo – 6.7'de gösterilmektedir. Uygulamada toplam 10 araç kullanılmıştır. Bir aracın kat ettiği en uzun mesafe 19.340 m., en kısa mesafe ise 4.470 m.'dir. Araçların kat ettiği ortalama mesafe 13.817 m., toplam mesafe ise 138.170 m.'dir.



Şekil – 6.3 ZPARP İçin Önerilen Dağıtım Rotası

Tablo – 6.7 ZPARP İçin Önerilen Dağıtım Rotası

Araç No (i)	i. Aracın Dağıtım Rotası	i. Araç Tarafından Katedilen Mesafe (m)
1	0, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 49, 47, 0	19.340
2	0, 45, 46, 57, 58, 59, 61, 62, 60, 58, 103, 0	18.540
3	0, 8, 93, 89, 90, 91, 92, 94, 96, 97, 98, 100, 99, 14, 0	18.800
4	0, 10, 11, 86, 87, 88, 95, 19, 20, 22, 23, 26, 27, 28, 25, 24, 21, 0	18.720
5	0, 3, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 77, 80, 81, 82, 83, 85, 84, 79, 15, 16, 17, 18, 0	15.650
6	0, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 5, 0	9.850
7	0, 31, 32, 38, 39, 36, 37, 35, 34, 33, 30, 29, 43, 44, 0	17.450
8	0, 42, 40, 41, 0	10.070
9	0, 107, 109, 108, 110, 70, 71, 2, 69, 104, 0	4.980
10	0, 102, 101, 105, 66, 65, 63, 64, 67, 68, 1, 106, 0	4.770

6.4. Bulgular ve Yorum

Merpaş A.Ş.'nin 09.12.2008 tarihindeki müşteri taleplerinden yola çıkılarak, 10.12.2008 tarihinde yapılacak olan dağıtım rotalaması ilk olarak mevcut durum ile daha sonra da bu çalışmada önerilen geliştirilmiş tasarruf yöntemi ile ortaya konulmuş ve sonuçlar önceki kısımlarda verilmiştir.

Dağıtım rotalaması yapılırken ilk olarak müşterilerin talep ettiği zaman pencereleri göz ardı edilerek müşteri talepleri karşılanmıştır. Zaman pencereleri göz ardı edilerek mevcut durumda yapılan dağıtım rotalamasında, toplam 9 araç ile dağıtım yapılmış ve dağıtımda kat edilen toplam mesafe 170.520 m. olarak gerçekleşmiştir. Geliştirilmiş tasarruf yöntemini kullanılarak yapılan dağıtım rotasında ise yine 9 araç ile dağıtım yapılmış ve araçların kat ettiği toplam mesafe 129.850 m. olarak gerçekleşmiştir. Yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgulara göre, önerilen yöntem olan geliştirilmiş tasarruf yöntemi kullanılarak belirlenen rota ile yaklaşık %24 oranında daha az bir toplam mesafe ile dağıtım yapılabilmektedir.

Zaman pencerelerinin dahil edildiği esas problemde, mevcut durumda yapılan dağıtım rotalamasında toplam 14 araç ile dağıtım yapılmış ve dağıtım için kat edilen toplam mesafe ise 181.240 m. olarak gerçekleşmiştir. Geliştirilmiş tasarruf yöntemi kullanılarak yapılan zaman penceresine sahip dağıtım rotalamasında toplam 10 araç kullanılmış ve araçların toplam kat ettiği mesafe 138.170 m. olmuştur. Yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgulara göre, önerilen yöntem olan geliştirilmiş tasarruf yönteminde 4 araç daha az kullanılarak ve yaklaşık %24 oranında daha az bir toplam mesafe ile dağıtım yapılabileceği tespit edilmiştir.

Merpaş A.Ş.'nin dağıtım işi için kısa dönemde değişen maliyeti, dağıtım aracının kat ettiği yol ile orantılı olarak artan yakıt maliyetidir. Firmanın 2008 yılı Aralık ayında toplam yakıt maliyeti 4.017 TL.'dir. Aralık ayında araçların toplam kat ettiği mesafe 7.865 km.'dir. Firmanın Aralık ayı için km başına yakıt maliyeti yaklaşık olarak 51 kuruştur. Buna göre dağıtım rotalaması için seçilen 10.12.2008 tarihinde firmanın yaptığı 181.240 m. dağıtım rotasına karşılık gelen o güne ait değişken dağıtım maliyeti 92,43 TL. olarak gerçekleşmiştir. Eğer çalışmada önerilen geliştirilmiş

tasarruf yöntemi ile dağıtım yapılsa idi 138.170 m. dağıtım rotasına karşılık gelen o güne ait değişken dağıtım maliyeti 70.47 TL olarak gerçekleşecekti. Bu da firmaya sadece dağıtım rotasını değiştirerek bir günde 21.96 TL, yaklaşık olarak %24'lük bir tasarruf etme imkanı sunacaktır.

Ayrıca firma için uzun dönemki maliyet kalemlerinden biri, hatta en önemlisi, aracın firmaya olan yıllık maliyetidir. Uygulamada görüldüğü gibi dağıtım işlemi yapılırken önerilen yöntemde, mevcut duruma göre daha az araç kullanılmıştır. Uzun dönem maliyetlerini düşürmek için firma, çalışmada önerilen yöntemi kullanarak gelecek yıl için gereken araç sayısını hesaplayabilir ve bu da gelecek sene firma için büyük bir maliyet tasarrufu sağlayabilir.

YEDİNCİ BÖLÜM

SONUÇ

Araç Rotalama Problemi ve Zaman Pencereli Araç Rotalama Problemi gerçek hayatta her alanda karşılaşılan bir problemdir. Ticaretin başlamasından beri ürünlerin belirli bir yerden başka bir yere taşınması, dünya ekonomisi açısından çok önemli bir yere sahiptir. Ekonomi alanında önemli bir yere sahip olan bu problem için, araştırmacılar yıllardır çalışmalarını sürdürmektedirler. Dağıtım maliyetleri yapılan çalışmaya göre, ürün maliyetlerinin yaklaşık %20'si kadardır (Srivastava ve Benton, 1990). Buna göre dağıtım sisteminde yapılan ufak bir geliştirme, tatmin edici bir maliyet tasarrufu sağlamaktadır. Dağıtım merkezinin yeri ve dağıtımın yapılacağı müşteriler, dağıtım sisteminin iki parçasını oluşturmaktadır. Dağıtım problemi dağıtım rotalarının belirlenmesi ve optimize edilmesi ile ilgilidir.

Günümüzde ise teknolojinin hızla gelişmesi, firmalardaki rekabetin artması ve Dünya'nın bir pazar haline gelmesinden dolayı dağıtım sistemleri çok daha etkin ve karmaşık hale gelmiştir. Gerçek hayat uygulamalarının çoğunda olurlu çözümlere ulaşılabilmemesine rağmen, çözüm yöntemleri oldukça karmaşıktır. Çözüm zamanı müşteri sayısı arttıkça, buna bağlı olarak üstel olarak artmaktadır.

Zaman pencereli araç rotalama problemi dağıtım sisteminin en önemli problemlerinden biridir. Bu problem kompleks olmasından ve gerçek Dünya'da çok geniş uygulama alanı olmasından dolayı araştırmacıların ilgisini çeken bir konudur. Zaman pencereli araç rotalama problemi, belirli bir müşteri setine minimum maliyet ile hizmet vererek, araç kapasite ve servis zamanı kısıtlarına uyarak araçların etkin bir şekilde kullanılmasına odaklanmaktadır. Zaman Pencereli Araç Rotalama Probleminin çözülmesi çok zor olan bir problem olmasından dolayı, makul boyutlardaki problemleri çözmek için sezgisel çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmada, Gezgin Satıcı Problemi, Araç Rotalama Problemi ve farklı türleri tanımlanmış ve problemin gerçek hayattaki uygulamalarından bahsedilmiştir. Çeşitli kısıtlar ile çeşitlenen GSP ve ARP detaylı bir biçimde incelenmiştir. GSP ve ARP için en önemli kesin çözüm yöntemleri ve sezgisel çözüm yöntemleri detaylı olarak incelenmiştir.

Çalışmanın uygulama kısmında zaman pencereli araç rotalama problemine sahip bir dağıtım firmasında uygulama yapılarak en uygun dağıtım rotası bulunmaya çalışılmıştır. Zaman pencereli araç rotalama problemi tanımlanması kolay fakat çözümü matematiksel olarak çok zor olan bir problemdir. Hatta olurlu bir çözüm bulmak da belirli durumlarda zordur. Son 50 yıldır araç rotalama problemini çözmek için çeşitli kesin ve sezgisel çözüm yöntemleri ortaya konmuştur. Bilgisayar teknolojisinin son yıllarda hızla gelişmesine ve iyi çözüm yöntemleri ortaya çıkmasına karşın, pek çok büyük boyuttaki probleme çözüm bulunamamıştır. Bu çalışmada zaman pencereli araç rotalama problemine sezgisel bir yaklaşım olan geliştirilmiş tasarruf yöntemi ile çözüm aranmıştır. Bu yöntem ile uygulamada başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmada aşağıdaki sorulara cevap bulmak amaçlanmıştır:

- Firmanın mevcut dağıtım rotası belirleme tekniği nedir?
- Firmada optimal dağıtım rotası belirlemede hangi bilimsel metot uygundur?
- Firmada belirlenen bilimsel metot kullanılarak optimal dağıtım rotaları belirlendiğinde dağıtım mesafeleri azalmakta mıdır?
- Firmada belirlenen bilimsel metot kullanılarak optimal dağıtım rotaları belirlendiğinde dağıtım maliyetleri azalmakta mıdır?

“Birinci araştırma sorusu olan firmanın mevcut dağıtım rotası belirleme tekniği nedir?” sorusuna cevap bulmak üzere firmada yetkili kişilerle görüşülmüş, gerekli gözlem ve incelemeler yapılmış ve sonuçta firmanın dağıtım problemlerini bir matematiksel model kullanmadan çözmeye çalışmakta ve dağıtım rotalarını bulmakta olduğu tespit edilmiştir. Mersin şehri coğrafik olarak altı bölgeye ayrılmış ve birbirlerine yakın olan müşteriler gruplanmıştır. Altı bölgeye ayrılan müşteriler de kendi arasında birbirlerine olan uzaklıklarına göre

sıralanmıştır. Dağıtım yapılırken birinci bölgedeki ilk müşteriden başlanarak sırayla bütün müşteri talepleri karşılanmaktadır. Her ne kadar mantıksal olarak doğru sayılabilecek bir algoritma kullanılmış olsa da, firmanın yaptığı bu dağıtım yöntemi en uygun çözümü sağlayacak bir dağıtım rotalama yöntemi olmaktan uzaktır.

“Firmada optimal dağıtım rotası belirlemede hangi bilimsel metot uygundur?” sorusunun cevabı, bu boyuttaki bir problemin kesin çözüm yöntemiyle optimal çözümün elde edilmesinin mümkün olmaması, bu yüzden sezgisel yöntem kullanılması gerekliliğidir. Uygulama için seçilen geliştirilmiş tasarruf yöntemi hem kolay uygulanabilen hem de hızlı ve iyi sonuç verebilen bir yöntemdir. Bunun sonucu olarak dağıtım problemine bir sezgisel yöntem olan geliştirilmiş tasarruf yöntemi uygulandığında daha uygun dağıtım rotaları elde edilebilmektedir.

Üçüncü araştırma sorusu olan “Firmada belirlenen bilimsel metot kullanılarak optimal dağıtım rotaları belirlendiğinde dağıtım mesafeleri azalmakta mıdır?” sorusuna cevap vermek üzere geliştirilmiş tasarruf yöntemi uygulanarak çözüm yapılmış ve mevcut durumla karşılaştırılmıştır. Çalışma için Mersin’deki bir dağıtım firması seçilmiştir. Firmanın dağıtım yaptığı bir ürün için en uygun dağıtım rotaları bulunmaya çalışılmıştır. Firmanın 10.12.2008 tarihindeki dağıtım rotaları için yeni bir sezgisel yöntem önerilmiş ve mevcut yöntem ile karşılaştırılmıştır. Firma 10.12.2008 tarihinde 110 adet müşteriye hizmet vermiştir.

Mevcut uygulamada zaman penceresi kısıtları olmadan yapılan dağıtım rotalamasında 9 araç kullanılmış ve toplam kat edilen mesafe 170.520 m. olmuştur. Zaman penceresi kısıtları olmadan önerilen yöntem olan geliştirilmiş tasarruf yöntemi ile yapılan dağıtım rotasında 9 araç kullanılmış ve toplam kat edilen mesafe 129.850 m. olmuştur. Yapılan analizlere göre elde edilen bulguların değerlendirilmesi sonucu, önerilen yöntemin mevcut yöntemle göre %24 daha iyi sonuç verdiği tespit edilmiştir.

Dağıtım rotalama problemine, müşterilerin hizmet talep ettiği zaman aralıkları eklenerek oluşan problemin mevcut uygulamadaki çözümünde ise 14 araç kullanılmış ve toplam kat edilen mesafe 181.240 m. olmuştur. Önerilen yöntem ile aynı problem çözüldüğünde ise 9 araç kullanılmış ve toplam kat edilen mesafe 138.170 m. olmuştur. Önerilen yöntem bu durumda da mevcut yöntemle göre %24 daha iyi sonuç vermiştir.

“Firmada belirlenen bilimsel metot kullanılarak optimal dağıtım rotaları belirlendiğinde dağıtım maliyetleri azalmakta mıdır?” sorusuna cevap vermek üzere firmanın Aralık ayında mevcut durumdaki dağıtım maliyetleri ile önerilen yöntemin Aralık ayı dağıtım maliyetleri hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır. Firmanın çalışmada kullanılan ürününün dağıtımı için Aralık ayı maliyet 4.017 TL olarak gerçekleşmiştir. Önerilen geliştirilmiş tasarruf yöntemi kullanıldığında bu maliyet yaklaşık olarak %24 oranında azalarak, 3.053 TL tutarında gerçekleşmektedir. Özetle önerilen geliştirilmiş tasarruf yöntemi, firmaya aylık yaklaşık 1.000 TL'ye yakın bir maliyet tasarrufu sağlayabilecektir.

Son yıllarda, Araç Rotalama Problemleri üzerine uluslararası literatürde çok sayıda çalışma yapılmış, bilimsel yöntemin oldukça başarılı sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Ancak buna rağmen özellikle ülkemizde bilimsel metotlar göz ardı edilmekte ve çoğunlukla dağıtım rotalama bilimsel olmayan yollarla yapılmaktadır. Bu da firmalar için ciddi bir fırsat maliyeti kaybı olmaktadır. Bu araştırmanın hem firmalara daha uygun dağıtım rotası belirleyerek maliyet tasarrufu sağlamaları açısından hem de bundan sonra yapılacak diğer çalışmalara ışık tutması, referans ve öncü olması açısından, literatüre önemli katkı sağlayacağı umulmaktadır.

Literatürde en son Altinel ve Öncan tarafından (2005) geliştirilmiş tasarruf yöntemi, ilk defa bu çalışma ile zaman pencereli problemlere uygulanmıştır. Sonuçlar, yöntemin zaman pencereli araç rotalama problemlerinde de başarılı olduğunu göstermektedir.

Bu çalışmanın uygulamasında bir dağıtım firmasının karşılaştığı zaman pencereli araç rotalama problemine çözüm aranmıştır. Ancak önerilen model

küçük değişiklikler ile başka problemlerin çözümünde de kullanılabilir. Örneğin çalışmada kullanılan yöntem, karma kapasiteye sahip araç rotalama problemi, çoklu depoya sahip olan bir araç rotalama problemi veya asimetrik araç rotalama problemi gibi problemlere kolayca uygulanabilir. Sonraki çalışmalarda bu tür problemler için de test edilebilir.

Ayrıca genellikle son yıllarda araştırmacılar ARP için birden fazla sezgisel birlikte kullanarak çözüm aramışlardır. Geliştirilmiş tasarruf yöntemi başka sezgisel yöntemler ile birlikte kullanılarak araç rotalama problemi için daha iyi sonuç elde edilmeye çalışılabilir.

KAYNAKÇA

- Aarts E., Lenstra J.K. (1997), *Local Search in Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester
- Achuthan N. R., Caccetta L., Hill S. P. (1996), "A New Subtour Elimination Constraint for the Vehicle Routing Problem", *European Journal of Operational Research*, c. 91, sf. 573-586
- Altinel İ. K., Öncan T. (2005), "A New Enhancement of the Clarke and Wright Savings Heuristic for the Capacitated Vehicle Routing Problem", *Operational Research Society*, c. 56, sf. 954-961
- Bodin L., Golden B., Assad A. (1983), "Routing and scheduling of vehicles and crews: The state of art", *Computers and Operations Research*, c. 10(1), sf. 63-212
- Braysy O. (2002), "Fast Local Searches for The Vehicle Routing Problem with Time Windows", *Infor*, c. 40, sf. 319-330
- Carpaneto G., Dell'amico M., Toth P. (1995), "Exact Solution of Large Scale, Asymmetric Traveling Salesman Problems", *ACM Transaction on Mathematical Software*, c. 21, sf. 394-409
- Carpaneto G., Toth P. (1980), "Some New Branching and Bounding Criteria for the Asymmetric Traveling Salesman Problem", *Management Science*, c. 26, sf. 736-743
- Christofides N., Mingozzi A., Toth P. (1979), *The Vehicle Routing Problem In Combinatorial Optimization*, Wiley Chichester

- Clarke G., Wright J. W. (1964), "Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points", *Operations Research*, c. 12, sf. 568-581
- Cordeu J., Desrosiers G., Solomon M., ve Sourmis F. (2002), *The VRP with Time Windows*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia
- Crowder H., Padberg M. (1980), "Solving Large Scale Symmetric Traveling Salesman Problems to Optimality", *Management Science*, c. 26, sf. 495-509
- Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S. (1954), "Solution of a Large-Scale Travelling Salesman Problem", *Journal of Operations Research Society*, c.2, sf. 393-410
- Desrochers M., Lenstra J., Savelsbergh J., ve Sourmis F. (1988), *Vehicle routing with time Windows: Optimization and approximation*. In Golden B.L. ve Assad A.A., *Vehicle Routing: Methods and Studies*, volume 16, sf. 85-105, Elsevier
- Desrosiers J., Dumas Y., Solomon M., ve Sourmis F. (1995), *Time constrained routing and scheduling*, Elsevier
- Dorigo M., Gambardella L.M. (1997), "Ant colonies for the travelling salesman problem", *Biosystems*, c. 43, sf. 73-81
- Duhamel C., Potvin J.-Y., Rousseau J. M. (1997), "A tabu search heuristics for the vehicle routing problem with backhauls and time Windows", *Transportation Science*, c. 31, sf. 49-59
- Fisher M. L. (1994), "Optimal Solution of Vehicle Routing Problems Using Minimum K-trees", *Operations Research*, c. 42, sf. 626-642

- Gaskell T. J. (1967), "Bases for Vehicle Fleet Scheduling", *Operational Research Society*, c. 18, sf. 281-295
- Golden, B.L., Assad A.A., Wasil E.A. (2002) *Routing Vehicles in the Real World: Applications in the Solid Waste, Beverage, Food, Dairy and Newspaper Industries*, Philadelphia
- Grötschel M., Padberg M. (1979), "On the Symmetric Traveling Salesman Problem: Inequalities, Lifting Theorems and Facets", *Mathematical Programming*", c. 16, sf. 265-302
- Grötschel M., Pulleyblank W.R. (1986), "Clique Tree Inequalities and the Symmetric Traveling Salesman Problem", *Mathematics of Operations Research*, c. 11, sf. 537-569
- Gupta A., Krishnamurti R. (2003), "Parallel Algorithms For Vehicle Routing Problems", *Parallel Processing Letters*, c. 13, sf. 673-687
- Gutin G., Punnen A.P. (2002), *The Travelling Salesman Problem: Applications, Formulations and Variations*, Kluwer Academic Publishers
- Helbig H. K., Krarup J. (1974), "Improvements of the Held-Karp Algorithm for the Symmetric Traveling Salesman Problem", *Mathematical Programming*, c. 7, sf. 87-96
- Held M., Karp R. M. (1970), "The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees", *Operations Research*, c. 18, sf. 1138-1162
- Hillier, S. F., Lieberman, J. G.(1995), *Introduction to Operations Research Sixth Edition*, McGraw-Hill International Editions
- Jünger M., Reinelt G., Rinaldi G. (1995), *Handbook In Operations Research and Management Science*, Vol. 7, sf. 225-330, Elsevier Science

- Kirkpatrick S., Gellat C. D., Vecchi M.P. (1983), "Optimization by Simulated Annealing", *Science*, c. 220, 671-680
- Knox J. (1994), "Tabu Search Performance on the Symmetric Traveling Salesman Problem", *Computers and Operations Research*, c. 21, sf. 867-876
- Laporte G. (1992), "The Vehicle Routing Problem: An overview of exact and approximate algorithms", *European Journal of Operational Research*, c. 59, sf. 345-358
- Laporte G., Nobert Y., Desrochers M. (1985), "Optimal Routing Under Capacity and Distance Restriction", *Operations Research*, c. 33, sf. 1050-1073
- Lawler, E., Lenstra J., Rinnooy A., Symoys D. (1985), *The Traveling Salesman Problem*, John Wiley & Sons Ltd
- Lin S., Kernighan B. W. (1973), "An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem", *Operation Research*, c. 21, 498-516
- Malik K., Fisher M. L. (1990), "A dual Ascent Algorithm for the 1-tree Relaxation of the Symmetric Traveling Salesman Problem", *Operations Reseach Letters*, c. 9, sf. 1-7
- Meeran S., Shafie A. (1997), "Optimum Path Planning Using Convex Hull and Local Search Heuristic Algorithms", *Mechatronics*, c. 7, sf. 737-756
- Miller D. L., Penky J. F. (1991), "Exact Solution of Large Asymmetric Traveling Salesman Problems", *Science* , c. 251, sf. 754-761
- Padberg M., Rinaldi G. (1987), "Optimization of a 532-city Symmetric Traveling Salesman Problem by Branch and Cut", *Operations Research Letters*, c. 6, sf. 1-7

- Padberg M., Rinaldi G. (1991), "A Branch-and-cut Algorithm for the Resolution of Large-Scale Symmetric Traveling Salesman Problems", *SIAM Review*, c. 33, sf. 60-100
- Paessens H. (1988), "The Savings Algorithm for the Vehicle Routing Problem", *European Journal of Operational Research*, c. 34, sf. 336-344
- Poot A., Kant G., Wagelmans A. (1999), "A Savings Based Method for Real-Life Vehicle Routing Problems", *Econometric Institute Report*
- Reeves C.R. (1993), *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, Blackwell, Oxford
- Reeves C.R., Rowe J.E. (2002), *Genetic Algorithms: Principles And Perspectives*, Kluwer Academic Publishers
- Renaud J., Boctor F. F., Laporte G. (1996), "An Improved Petal Heuristic for the Vehicle Routing Problem", *Journal of Operational Research Society*, c. 47, sf. 329-336
- Rochat Y., Taillard E.D. (1995), "Probabilistic Diversification and Intensification in Local Search for Vehicle Routing", *CRT-95-13*
- Rosen K. H., Micheals J. G., Gross J. L., Grossman J. W., Shier D. R. (2000), *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*, CRC Press
- Rushton A., Croucher P., Baker P. (2006), *Handbook of Logistics and Distribution Management 3rd Edition*, Kogan Page, Limited
- Savelsbergh M. (1985), "Local Search in Routing Problems with Time Windows", *Annals of Operations Research*, c. 4, sf. 285-305
- Simchi-Levi D., Bramel J. (1997), *Logic of Logistics: Theory, Algorithms & Applications for Logistics Management*, Springer-Verlag, New York

- Sun T., Meakin P., Jossang T. (1993), "A Fast Optimization Method Based on A Hierarchical Strategy for the Travelling Salesman Problem", *Physica A*, c. 199, sf. 232-242
- Taillard E., Badeau P., Gendreau M., Guertin F., Potvin J. (1997), "A Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem with Soft Time Windows", *Transportation Science*, c. 31, sf. 170-186
- Thangiah S. R., Potvin J.-Y. Ve Sun T. (1996), "Heuristic approaches to vehicle routing with backhauls and time Windows", *Computers and Operations Research*, c. 23, sf. 1043-1057
- Tsubakitani S., Evans J. R. (1998), "An Empirical Study of A New Metaheuristic for the Traveling Salesman Problem", *European Journal of Operational Research*, c. 104, sf. 113-128
- Waters D. (2006), *Global Logistics: New Directions in Supply Chain Management Fifth Edition*, Kogan Page
- Yellow P. (1970), "A Computational Modification to the Savings Method of Vehicle Scheduling", *Operational Research Quartely*, c.21, 281-283
- <http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/>, z.t.:20.11.2008
 - <http://www.tsp.gatech.edu/history/milestone.html>, z.t.: 11.09.2008

EK – 1: Müşterilerin Depoya Olan Uzaklıkları ve Kendi Aralarındaki Uzaklıklar

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	180	197	269	277	281	337	367	326	405	459	489	472	481
1	180	0	27	108	210	268	248	278	311	316	370	400	383	392
2	197	27	0	88	190	248	228	258	291	296	350	380	363	372
3	269	108	88	0	102	160	140	170	203	208	262	292	275	284
4	277	210	190	102	0	33	83	113	88	151	205	235	218	227
5	281	268	248	160	33	0	56	86	45	124	178	208	191	200
6	337	248	228	140	83	56	0	30	63	68	122	152	135	144
7	367	278	258	170	113	86	30	0	30	38	92	122	105	114
8	326	311	291	203	88	45	63	30	0	60	114	144	127	136
9	405	316	296	208	151	124	68	38	60	0	54	84	67	76
10	459	370	350	262	205	178	122	92	114	54	0	30	62	71
11	489	400	380	292	235	208	152	122	144	84	30	0	32	41
12	472	383	363	275	218	191	135	105	127	67	62	32	0	9
13	481	392	372	284	227	200	144	114	136	76	71	41	9	0
14	489	400	380	292	235	208	152	122	144	84	79	49	17	8
15	517	428	408	320	263	236	180	150	172	112	107	77	45	36
16	535	446	426	338	281	254	198	168	190	130	125	95	63	54
17	560	471	451	363	306	279	223	193	215	155	150	120	88	79
18	585	496	476	388	331	304	248	218	240	180	175	145	113	104
19	615	526	506	418	361	334	278	248	270	210	205	175	143	134
20	640	551	531	443	386	359	303	273	295	235	230	200	168	159
21	675	586	566	478	421	394	338	308	330	270	265	235	203	194
22	713	624	604	516	459	432	376	346	368	308	303	273	241	232
23	751	662	642	554	497	470	414	384	406	346	341	311	279	270
24	286	682	662	574	517	490	434	404	426	366	361	331	299	290
25	771	723	703	615	558	531	475	445	467	407	402	372	340	331
26	812	739	719	631	574	547	491	461	483	423	418	388	356	347
27	828	754	734	646	589	562	506	476	498	438	433	403	371	362
28	843	787	767	679	622	595	539	509	531	471	466	436	404	395
29	207	356	360	362	462	495	502	532	565	570	624	654	637	646
30	265	369	373	375	475	508	515	545	578	583	637	667	650	659
31	257	362	366	368	468	501	508	538	571	576	630	660	643	652
32	287	397	401	403	503	536	543	573	606	611	665	695	678	687
33	310	419	423	425	525	558	565	595	628	633	687	717	700	709
34	375	462	466	468	568	601	608	638	671	676	730	760	743	752
35	399	468	472	474	574	607	614	644	677	682	736	766	749	758
36	479	474	478	480	580	613	620	650	683	688	742	772	755	764
37	516	587	591	593	693	726	733	763	796	801	855	885	868	877
38	349	459	463	465	565	598	605	635	668	673	727	757	740	749
39	448	549	553	555	655	688	695	725	758	763	817	847	830	839

40	473	820	824	826	926	959	966	996	1029	1034	1088	1118	1101	1110
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	489	517	535	560	585	615	640	675	713	751	771	812	828	843
1	400	428	446	471	496	526	551	586	624	662	682	723	739	754
2	380	408	426	451	476	506	531	566	604	642	662	703	719	734
3	292	320	338	363	388	418	443	478	516	554	574	615	631	646
4	235	263	281	306	331	361	386	421	459	497	517	558	574	589
5	208	236	254	279	304	334	359	394	432	470	490	531	547	562
6	152	180	198	223	248	278	303	338	376	414	434	475	491	506
7	122	150	168	193	218	248	273	308	346	384	404	445	461	476
8	144	172	190	215	240	270	295	330	368	406	426	467	483	498
9	84	112	130	155	180	210	235	270	308	346	366	407	423	438
10	79	107	125	150	175	205	230	265	303	341	361	402	418	433
11	49	77	95	120	145	175	200	235	273	311	331	372	388	403
12	17	45	63	88	113	143	168	203	241	279	299	340	356	371
13	8	36	54	79	104	134	159	194	232	270	290	331	347	362
14	0	28	46	71	96	126	151	186	224	262	282	323	339	354
15	28	0	18	43	68	98	123	158	196	234	254	295	311	326
16	46	18	0	25	50	80	105	140	178	216	236	277	293	308
17	71	43	25	0	25	55	80	115	153	191	211	252	268	283
18	96	68	50	25	0	30	55	90	128	166	186	227	243	258
19	126	98	80	55	30	0	25	60	98	136	156	197	213	228
20	151	123	105	80	55	25	0	35	73	111	131	172	188	203
21	186	158	140	115	90	60	35	0	38	76	96	137	153	168
22	224	196	178	153	128	98	73	38	0	38	58	99	115	130
23	262	234	216	191	166	136	111	76	38	0	20	61	77	92
24	282	254	236	211	186	156	131	96	58	20	0	41	57	72
25	323	295	277	252	227	197	172	137	99	61	41	0	16	31
26	339	311	293	268	243	213	188	153	115	77	57	16	0	15
27	354	326	308	283	258	228	203	168	130	92	72	31	15	0
28	387	359	341	316	291	261	236	201	163	125	105	64	48	33
29	654	682	700	725	750	780	805	840	878	916	936	977	993	1008
30	667	695	713	738	763	793	818	853	891	929	949	990	1006	1021
31	660	688	706	731	756	786	811	846	884	922	942	983	999	1014
32	695	723	741	766	791	821	846	881	919	957	977	1018	1034	1049
33	717	745	763	788	813	843	868	903	941	979	999	1040	1056	1071
34	760	788	806	831	856	886	911	946	984	1022	1042	1083	1099	1114
35	766	794	812	837	862	892	917	952	990	1028	1048	1089	1105	1120
36	772	800	818	843	868	898	923	958	996	1034	1054	1095	1111	1126
37	885	913	931	956	981	1011	1036	1071	1109	1147	1167	1208	1224	1239
38	757	785	803	828	853	883	908	943	981	1019	1039	1080	1096	1111
39	847	875	893	918	943	973	998	1033	1071	1109	1129	1170	1186	1201
40	1118	1146	1164	1189	1214	1244	1269	1304	1342	1380	1400	1441	1457	1472

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	489	517	535	560	585	615	640	675	713	751	771	812	828	843
1	400	428	446	471	496	526	551	586	624	662	682	723	739	754
2	380	408	426	451	476	506	531	566	604	642	662	703	719	734
3	292	320	338	363	388	418	443	478	516	554	574	615	631	646
4	235	263	281	306	331	361	386	421	459	497	517	558	574	589
5	208	236	254	279	304	334	359	394	432	470	490	531	547	562
6	152	180	198	223	248	278	303	338	376	414	434	475	491	506
7	122	150	168	193	218	248	273	308	346	384	404	445	461	476
8	144	172	190	215	240	270	295	330	368	406	426	467	483	498
9	84	112	130	155	180	210	235	270	308	346	366	407	423	438
10	79	107	125	150	175	205	230	265	303	341	361	402	418	433
11	49	77	95	120	145	175	200	235	273	311	331	372	388	403
12	17	45	63	88	113	143	168	203	241	279	299	340	356	371
13	8	36	54	79	104	134	159	194	232	270	290	331	347	362
14	0	28	46	71	96	126	151	186	224	262	282	323	339	354
15	28	0	18	43	68	98	123	158	196	234	254	295	311	326
16	46	18	0	25	50	80	105	140	178	216	236	277	293	308
17	71	43	25	0	25	55	80	115	153	191	211	252	268	283
18	96	68	50	25	0	30	55	90	128	166	186	227	243	258
19	126	98	80	55	30	0	25	60	98	136	156	197	213	228
20	151	123	105	80	55	25	0	35	73	111	131	172	188	203
21	186	158	140	115	90	60	35	0	38	76	96	137	153	168
22	224	196	178	153	128	98	73	38	0	38	58	99	115	130
23	262	234	216	191	166	136	111	76	38	0	20	61	77	92
24	282	254	236	211	186	156	131	96	58	20	0	41	57	72
25	323	295	277	252	227	197	172	137	99	61	41	0	16	31
26	339	311	293	268	243	213	188	153	115	77	57	16	0	15
27	354	326	308	283	258	228	203	168	130	92	72	31	15	0
28	387	359	341	316	291	261	236	201	163	125	105	64	48	33
29	654	682	700	725	750	780	805	840	878	916	936	977	993	1008
30	667	695	713	738	763	793	818	853	891	929	949	990	1006	1021
31	660	688	706	731	756	786	811	846	884	922	942	983	999	1014
32	695	723	741	766	791	821	846	881	919	957	977	1018	1034	1049
33	717	745	763	788	813	843	868	903	941	979	999	1040	1056	1071
34	760	788	806	831	856	886	911	946	984	1022	1042	1083	1099	1114
35	766	794	812	837	862	892	917	952	990	1028	1048	1089	1105	1120
36	772	800	818	843	868	898	923	958	996	1034	1054	1095	1111	1126
37	885	913	931	956	981	1011	1036	1071	1109	1147	1167	1208	1224	1239
38	757	785	803	828	853	883	908	943	981	1019	1039	1080	1096	1111
39	847	875	893	918	943	973	998	1033	1071	1109	1129	1170	1186	1201
40	1118	1146	1164	1189	1214	1244	1269	1304	1342	1380	1400	1441	1457	1472

	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
0	402	399	352	711	731	801	835	838	864	889	917	942	942	934
1	749	746	699	769	789	859	893	896	922	947	975	1000	1000	992
2	753	750	703	773	793	863	897	900	926	951	979	1004	1004	996
3	755	752	705	775	795	865	899	902	928	953	981	1006	1006	998
4	855	852	805	875	895	965	999	1002	1028	1053	1081	1106	1106	1098
5	888	885	838	908	928	998	1032	1035	1061	1086	1114	1139	1139	1131
6	895	892	845	915	935	1005	1039	1042	1068	1093	1121	1146	1146	1138
7	925	922	875	945	965	1035	1069	1072	1098	1123	1151	1176	1176	1168
8	958	955	908	978	998	1068	1102	1105	1131	1156	1184	1209	1209	1201
9	963	960	913	983	1003	1073	1107	1110	1136	1161	1189	1214	1214	1206
10	1017	1014	967	1037	1057	1127	1161	1164	1190	1215	1243	1268	1268	1260
11	1047	1044	997	1067	1087	1157	1191	1194	1220	1245	1273	1298	1298	1290
12	1030	1027	980	1050	1070	1140	1174	1177	1203	1228	1256	1281	1281	1273
13	1039	1036	989	1059	1079	1149	1183	1186	1212	1237	1265	1290	1290	1282
14	1047	1044	997	1067	1087	1157	1191	1194	1220	1245	1273	1298	1298	1290
15	1075	1072	1025	1095	1115	1185	1219	1222	1248	1273	1301	1326	1326	1318
16	1093	1090	1043	1113	1133	1203	1237	1240	1266	1291	1319	1344	1344	1336
17	1118	1115	1068	1138	1158	1228	1262	1265	1291	1316	1344	1369	1369	1361
18	1143	1140	1093	1163	1183	1253	1287	1290	1316	1341	1369	1394	1394	1386
19	1173	1170	1123	1193	1213	1283	1317	1320	1346	1371	1399	1424	1424	1416
20	1198	1195	1148	1218	1238	1308	1342	1345	1371	1396	1424	1449	1449	1441
21	1233	1230	1183	1253	1273	1343	1377	1380	1406	1431	1459	1484	1484	1476
22	1271	1268	1221	1291	1311	1381	1415	1418	1444	1469	1497	1522	1522	1514
23	1309	1306	1259	1329	1349	1419	1453	1456	1482	1507	1535	1560	1560	1552
24	1329	1326	1279	1349	1369	1439	1473	1476	1502	1527	1555	1580	1580	1572
25	1370	1367	1320	1390	1410	1480	1514	1517	1543	1568	1596	1621	1621	1613
26	1386	1383	1336	1406	1426	1496	1530	1533	1559	1584	1612	1637	1637	1629
27	1401	1398	1351	1421	1441	1511	1545	1548	1574	1599	1627	1652	1652	1644
28	1434	1431	1384	1454	1474	1544	1578	1581	1607	1632	1660	1685	1685	1677
29	485	482	435	526	546	616	650	653	679	704	732	757	757	749
30	543	540	493	484	504	574	608	611	637	662	690	715	715	707
31	536	533	486	455	475	545	579	582	608	633	661	686	686	678
32	566	563	516	465	485	555	589	592	618	643	671	696	696	688
33	589	586	539	488	508	578	612	615	641	666	694	719	719	711
34	593	590	543	530	550	620	654	657	683	708	736	761	761	753
35	595	592	545	577	597	667	701	704	730	755	783	808	808	800
36	758	755	708	333	353	423	457	460	486	511	539	564	564	556
37	712	709	662	400	420	490	524	527	553	578	606	631	631	623
38	628	625	578	399	419	489	523	526	552	577	605	630	630	622
39	727	724	677	373	393	463	497	500	526	551	579	604	604	596
40	71	93	121	1171	1191	1261	1295	1298	1324	1349	1377	1402	1402	1394

	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0	817	827	834	844	856	863	871	213	210	177	174	211	200	184
1	874	884	891	901	913	920	928	34	21	46	39	29	11	28
2	878	888	895	905	917	924	932	40	27	52	45	35	17	19
3	880	890	897	907	919	926	934	112	99	102	95	100	97	98
4	980	990	997	1007	1019	1026	1034	212	199	202	195	200	197	198
5	1013	1023	1030	1040	1052	1059	1067	245	232	235	228	233	230	231
6	1020	1030	1037	1047	1059	1066	1074	252	239	242	235	240	237	238
7	1050	1060	1067	1077	1089	1096	1104	282	269	272	265	270	267	268
8	1083	1093	1100	1110	1122	1129	1137	315	302	305	298	303	300	301
9	1088	1098	1105	1115	1127	1134	1142	320	307	310	303	308	305	306
10	1142	1152	1159	1169	1181	1188	1196	374	361	364	357	362	359	360
11	1172	1182	1189	1199	1211	1218	1226	404	391	394	387	392	389	390
12	1155	1165	1172	1182	1194	1201	1209	387	374	377	370	375	372	373
13	1164	1174	1181	1191	1203	1210	1218	396	383	386	379	384	381	382
14	1172	1182	1189	1199	1211	1218	1226	404	391	394	387	392	389	390
15	1200	1210	1217	1227	1239	1246	1254	432	419	422	415	420	417	418
16	1218	1228	1235	1245	1257	1264	1272	450	437	440	433	438	435	436
17	1243	1253	1260	1270	1282	1289	1297	475	462	465	458	463	460	461
18	1268	1278	1285	1295	1307	1314	1322	500	487	490	483	488	485	486
19	1298	1308	1315	1325	1337	1344	1352	530	517	520	513	518	515	516
20	1323	1333	1340	1350	1362	1369	1377	555	542	545	538	543	540	541
21	1358	1368	1375	1385	1397	1404	1412	590	577	580	573	578	575	576
22	1396	1406	1413	1423	1435	1442	1450	628	615	618	611	616	613	614
23	1434	1444	1451	1461	1473	1480	1488	666	653	656	649	654	651	652
24	1454	1464	1471	1481	1493	1500	1508	686	673	676	669	674	671	672
25	1495	1505	1512	1522	1534	1541	1549	727	714	717	710	715	712	713
26	1511	1521	1528	1538	1550	1557	1565	743	730	733	726	731	728	729
27	1526	1536	1543	1553	1565	1572	1580	758	745	748	741	746	743	744
28	1559	1569	1576	1586	1598	1605	1613	791	778	781	774	779	776	777
29	631	641	648	658	670	677	685	316	331	304	314	324	339	356
30	590	600	607	617	629	636	644	367	382	355	365	375	390	407
31	561	571	578	588	600	607	615	364	379	352	362	372	387	404
32	571	581	588	598	610	617	625	394	409	382	392	402	417	434
33	594	604	611	621	633	640	648	417	432	405	415	425	440	457
34	636	646	653	663	675	682	690	482	497	470	480	490	505	522
35	683	693	700	710	722	729	737	506	521	494	504	514	529	546
36	439	449	456	466	478	485	493	586	601	574	584	594	609	626
37	506	516	523	533	545	552	560	623	638	611	621	631	646	663
38	505	515	522	532	544	551	559	456	471	444	454	464	479	496
39	479	489	496	506	518	525	533	555	570	543	553	563	578	595
40	1277	1287	1294	1304	1316	1323	1331	776	791	764	774	784	799	816

	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
0	208	227	270	248	261	286	293	595	558	567	580	592	590	605
1	63	66	109	87	100	125	132	506	469	478	491	503	501	516
2	36	39	82	60	73	98	105	486	449	458	471	483	481	496
3	81	62	53	64	77	102	109	395	358	367	380	392	390	405
4	135	116	80	95	82	57	50	337	300	309	322	334	332	347
5	168	149	113	128	115	90	83	314	277	286	299	311	309	324
6	203	184	119	145	165	140	133	258	221	230	243	255	253	268
7	243	224	159	185	195	170	163	228	191	200	213	225	223	238
8	276	257	192	218	170	145	138	248	211	220	233	245	243	258
9	281	262	197	223	233	208	201	189	152	161	174	186	184	199
10	335	316	251	277	287	262	255	181	144	153	166	178	176	191
11	365	346	281	307	317	292	285	151	114	123	136	148	146	161
12	348	329	264	290	300	275	268	121	84	93	106	118	116	131
13	357	338	273	299	309	284	277	114	77	86	99	111	109	124
14	365	346	281	307	317	292	285	106	69	78	91	103	101	116
15	393	374	309	335	345	320	313	124	87	96	109	121	119	87
16	411	392	327	353	363	338	331	142	105	114	127	139	137	70
17	436	417	352	378	388	363	356	167	130	139	152	164	162	46
18	461	442	377	403	413	388	381	192	155	164	177	189	187	71
19	491	472	407	433	443	418	411	147	117	108	123	128	113	90
20	516	497	432	458	468	443	436	172	142	133	148	153	138	115
21	551	532	467	493	503	478	471	207	177	168	183	188	173	150
22	589	570	505	531	541	516	509	245	215	206	221	226	211	188
23	627	608	543	569	579	554	547	283	253	244	259	264	249	226
24	647	628	563	589	599	574	567	303	273	264	279	284	269	246
25	688	669	604	630	640	615	608	344	314	305	320	325	310	287
26	704	685	620	646	656	631	624	360	330	321	336	341	326	303
27	719	700	635	661	671	646	639	375	345	336	351	356	341	318
28	752	733	668	694	704	679	672	408	378	369	384	389	374	351
29	443	424	415	426	439	464	471	725	723	732	745	757	755	750
30	494	475	466	477	490	515	522	776	774	783	796	808	806	801
31	491	472	463	474	487	512	519	773	771	780	793	805	803	798
32	521	502	493	504	517	542	549	803	801	810	823	835	833	828
33	544	525	516	527	540	565	572	826	824	833	846	858	856	851
34	609	590	581	592	605	630	637	891	889	898	911	923	921	916
35	633	614	605	616	629	654	661	915	913	922	935	947	945	940
36	713	694	685	696	709	734	741	995	993	1002	1015	1027	1025	1020
37	750	731	722	733	746	771	778	1032	1030	1039	1052	1064	1062	1057
38	583	564	555	566	579	604	611	865	863	872	885	897	895	890
39	682	663	654	665	678	703	710	964	962	971	984	996	994	989
40	903	884	875	886	899	924	931	1185	1183	1192	1205	1217	1215	1210

	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
0	592	599	597	611	622	676	671	660	675	649	655	627	685	709
1	503	510	508	522	533	587	582	571	586	560	566	538	596	620
2	483	490	488	502	513	567	562	551	566	540	546	518	576	600
3	392	399	397	411	422	476	471	460	475	449	455	427	485	509
4	334	341	339	353	364	418	413	402	417	391	397	369	427	451
5	311	318	316	330	341	395	390	379	394	368	374	346	404	428
6	255	262	260	274	285	339	334	323	338	312	318	290	348	372
7	225	232	230	244	255	309	304	293	308	282	288	260	318	342
8	245	252	250	264	275	329	324	313	328	302	308	280	338	362
9	186	193	191	205	216	270	265	254	269	243	249	221	279	303
10	178	185	183	197	208	262	257	246	261	235	241	213	271	295
11	148	155	153	167	178	232	227	216	231	205	211	183	241	265
12	118	125	123	137	148	202	197	186	201	175	181	153	211	235
13	111	118	116	130	141	195	190	179	194	168	174	146	204	228
14	103	110	108	122	133	187	182	171	186	160	166	138	196	220
15	74	81	79	93	104	158	153	142	157	131	137	109	167	191
16	57	64	62	76	87	141	136	125	140	114	120	92	150	174
17	33	40	38	52	63	117	112	101	116	90	96	68	126	150
18	58	65	57	43	38	92	87	76	91	65	71	43	101	125
19	85	79	67	53	46	101	96	85	100	74	80	52	71	95
20	110	104	92	78	71	126	121	110	125	99	105	77	59	83
21	145	139	127	113	106	161	156	145	160	134	140	112	94	118
22	183	177	165	151	144	199	194	183	198	172	178	150	132	156
23	221	215	203	189	182	237	232	221	236	210	216	188	170	194
24	241	235	223	209	202	257	252	241	256	230	236	208	190	214
25	282	276	264	250	243	298	293	282	297	271	277	249	231	255
26	298	292	280	266	259	314	309	298	313	287	293	265	247	271
27	313	307	295	281	274	329	324	313	328	302	308	280	262	286
28	346	340	328	314	307	362	357	346	361	335	341	313	295	319
29	763	764	773	787	794	846	851	862	877	873	842	800	858	882
30	814	815	824	838	845	897	902	913	928	924	893	851	909	933
31	811	812	821	835	842	894	899	910	925	921	890	848	906	930
32	841	842	851	865	872	924	929	940	955	951	920	878	936	960
33	864	865	874	888	895	947	952	963	978	974	943	915	973	997
34	929	930	939	953	960	1012	1017	1028	1043	1039	1008	980	1038	1062
35	953	954	963	977	984	1036	1041	1052	1067	1063	1032	1004	1062	1086
36	1033	1034	1043	1057	1064	1116	1121	1132	1147	1143	1112	1084	1142	1166
37	1070	1071	1080	1094	1101	1153	1158	1169	1184	1180	1149	1121	1179	1203
38	903	904	913	927	934	986	991	1002	1017	1013	982	954	1012	1036
39	1002	1003	1012	1026	1033	1085	1090	1101	1116	1112	1081	1053	1111	1135
40	1223	1224	1233	1247	1254	1306	1311	1322	1337	1333	1302	1274	1332	1356

	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
0	736	643	872	135	118	115	165	141	146	150	166	156	179
1	647	554	783	88	90	67	15	70	20	63	38	28	48
2	627	534	763	115	117	94	32	97	47	65	40	30	40
3	536	443	672	190	197	176	123	175	148	149	123	113	133
4	478	385	614	292	299	278	225	277	250	251	225	215	235
5	455	362	591	350	357	336	283	335	308	309	283	273	293
6	399	306	535	330	337	316	263	315	288	289	263	253	273
7	369	276	505	360	367	346	293	345	318	319	293	283	303
8	389	296	525	393	400	379	326	378	351	352	326	316	336
9	330	237	466	398	405	384	331	383	356	357	331	321	341
10	322	229	458	452	459	438	385	437	410	411	385	375	395
11	292	199	428	482	489	468	415	467	440	441	415	405	425
12	262	169	398	465	472	451	398	450	423	424	398	388	408
13	255	162	391	474	481	460	407	459	432	433	407	397	417
14	247	154	383	482	489	468	415	467	440	441	415	405	425
15	218	175	354	510	517	496	443	495	468	469	443	433	453
16	201	192	337	528	535	514	461	513	486	487	461	451	471
17	177	217	313	553	560	539	486	538	511	512	486	476	496
18	152	242	288	578	585	564	511	563	536	537	511	501	521
19	122	272	258	608	615	594	541	593	566	567	541	531	551
20	110	297	246	633	640	619	566	618	591	592	566	556	576
21	145	332	281	668	675	654	601	653	626	627	601	591	611
22	183	370	319	706	713	692	639	691	664	665	639	629	649
23	221	408	357	744	751	730	677	729	702	703	677	667	687
24	241	428	377	764	771	750	697	749	722	723	697	687	707
25	282	469	418	805	812	791	738	790	763	764	738	728	748
26	298	485	434	821	828	807	754	806	779	780	754	744	764
27	313	500	449	836	843	822	769	821	794	795	769	759	779
28	346	533	482	869	876	855	802	854	827	828	802	792	812
29	909	816	1045	254	261	274	314	239	289	357	334	324	344
30	960	867	1096	305	312	325	365	290	340	408	385	375	395
31	957	864	1093	302	309	322	362	287	337	405	382	372	392
32	987	894	1123	332	339	352	392	317	367	435	412	402	422
33	1024	931	1160	369	376	389	429	354	404	472	449	439	459
34	1089	996	1225	434	441	454	494	419	469	537	514	504	524
35	1113	1020	1249	458	465	478	518	443	493	561	538	528	548
36	1193	1100	1329	538	545	558	598	523	573	641	618	608	628
37	1230	1137	1366	575	582	595	635	560	610	678	655	645	665
38	1063	970	1199	408	415	428	468	393	443	511	488	478	498
39	1162	1069	1298	507	514	527	567	492	542	610	587	577	597
40	1383	1290	1519	684	691	704	744	669	719	787	764	754	774

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
41	442	789	793	795	895	928	935	965	998	1003	1057	1087	1070	1079
42	402	749	753	755	855	888	895	925	958	963	1017	1047	1030	1039
43	399	746	750	752	852	885	892	922	955	960	1014	1044	1027	1036
44	352	699	703	705	805	838	845	875	908	913	967	997	980	989
45	711	769	773	775	875	908	915	945	978	983	1037	1067	1050	1059
46	731	789	793	795	895	928	935	965	998	1003	1057	1087	1070	1079
47	801	859	863	865	965	998	1005	1035	1068	1073	1127	1157	1140	1149
48	835	893	897	899	999	1032	1039	1069	1102	1107	1161	1191	1174	1183
49	838	896	900	902	1002	1035	1042	1072	1105	1110	1164	1194	1177	1186
50	864	922	926	928	1028	1061	1068	1098	1131	1136	1190	1220	1203	1212
51	889	947	951	953	1053	1086	1093	1123	1156	1161	1215	1245	1228	1237
52	917	975	979	981	1081	1114	1121	1151	1184	1189	1243	1273	1256	1265
53	942	1000	1004	1006	1106	1139	1146	1176	1209	1214	1268	1298	1281	1290
54	942	1000	1004	1006	1106	1139	1146	1176	1209	1214	1268	1298	1281	1290
55	934	992	996	998	1098	1131	1138	1168	1201	1206	1260	1290	1273	1282
56	817	874	878	880	980	1013	1020	1050	1083	1088	1142	1172	1155	1164
57	827	884	888	890	990	1023	1030	1060	1093	1098	1152	1182	1165	1174
58	834	891	895	897	997	1030	1037	1067	1100	1105	1159	1189	1172	1181
59	844	901	905	907	1007	1040	1047	1077	1110	1115	1169	1199	1182	1191
60	856	913	917	919	1019	1052	1059	1089	1122	1127	1181	1211	1194	1203
61	863	920	924	926	1026	1059	1066	1096	1129	1134	1188	1218	1201	1210
62	871	928	932	934	1034	1067	1074	1104	1137	1142	1196	1226	1209	1218
63	213	34	40	112	212	245	252	282	315	320	374	404	387	396
64	210	21	27	99	199	232	239	269	302	307	361	391	374	383
65	177	46	52	102	202	235	242	272	305	310	364	394	377	386
66	174	39	45	95	195	228	235	265	298	303	357	387	370	379
67	211	29	35	100	200	233	240	270	303	308	362	392	375	384
68	200	11	17	97	197	230	237	267	300	305	359	389	372	381
69	184	28	19	98	198	231	238	268	301	306	360	390	373	382
70	208	63	36	81	135	168	203	243	276	281	335	365	348	357
71	227	66	39	62	116	149	184	224	257	262	316	346	329	338
72	270	109	82	53	80	113	119	159	192	197	251	281	264	273
73	248	87	60	64	95	128	145	185	218	223	277	307	290	299
74	261	100	73	77	82	115	165	195	170	233	287	317	300	309
75	286	125	98	102	57	90	140	170	145	208	262	292	275	284
76	293	132	105	109	50	83	133	163	138	201	255	285	268	277
77	595	506	486	395	337	314	258	228	248	189	181	151	121	114
78	558	469	449	358	300	277	221	191	211	152	144	114	84	77
79	567	478	458	367	309	286	230	200	220	161	153	123	93	86
80	580	491	471	380	322	299	243	213	233	174	166	136	106	99
81	592	503	483	392	334	311	255	225	245	186	178	148	118	111

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
41	1087	1115	1133	1158	1183	1213	1238	1273	1311	1349	1369	1410	1426	1441
42	1047	1075	1093	1118	1143	1173	1198	1233	1271	1309	1329	1370	1386	1401
43	1044	1072	1090	1115	1140	1170	1195	1230	1268	1306	1326	1367	1383	1398
44	997	1025	1043	1068	1093	1123	1148	1183	1221	1259	1279	1320	1336	1351
45	1067	1095	1113	1138	1163	1193	1218	1253	1291	1329	1349	1390	1406	1421
46	1087	1115	1133	1158	1183	1213	1238	1273	1311	1349	1369	1410	1426	1441
47	1157	1185	1203	1228	1253	1283	1308	1343	1381	1419	1439	1480	1496	1511
48	1191	1219	1237	1262	1287	1317	1342	1377	1415	1453	1473	1514	1530	1545
49	1194	1222	1240	1265	1290	1320	1345	1380	1418	1456	1476	1517	1533	1548
50	1220	1248	1266	1291	1316	1346	1371	1406	1444	1482	1502	1543	1559	1574
51	1245	1273	1291	1316	1341	1371	1396	1431	1469	1507	1527	1568	1584	1599
52	1273	1301	1319	1344	1369	1399	1424	1459	1497	1535	1555	1596	1612	1627
53	1298	1326	1344	1369	1394	1424	1449	1484	1522	1560	1580	1621	1637	1652
54	1298	1326	1344	1369	1394	1424	1449	1484	1522	1560	1580	1621	1637	1652
55	1290	1318	1336	1361	1386	1416	1441	1476	1514	1552	1572	1613	1629	1644
56	1172	1200	1218	1243	1268	1298	1323	1358	1396	1434	1454	1495	1511	1526
57	1182	1210	1228	1253	1278	1308	1333	1368	1406	1444	1464	1505	1521	1536
58	1189	1217	1235	1260	1285	1315	1340	1375	1413	1451	1471	1512	1528	1543
59	1199	1227	1245	1270	1295	1325	1350	1385	1423	1461	1481	1522	1538	1553
60	1211	1239	1257	1282	1307	1337	1362	1397	1435	1473	1493	1534	1550	1565
61	1218	1246	1264	1289	1314	1344	1369	1404	1442	1480	1500	1541	1557	1572
62	1226	1254	1272	1297	1322	1352	1377	1412	1450	1488	1508	1549	1565	1580
63	404	432	450	475	500	530	555	590	628	666	686	727	743	758
64	391	419	437	462	487	517	542	577	615	653	673	714	730	745
65	394	422	440	465	490	520	545	580	618	656	676	717	733	748
66	387	415	433	458	483	513	538	573	611	649	669	710	726	741
67	392	420	438	463	488	518	543	578	616	654	674	715	731	746
68	389	417	435	460	485	515	540	575	613	651	671	712	728	743
69	390	418	436	461	486	516	541	576	614	652	672	713	729	744
70	365	393	411	436	461	491	516	551	589	627	647	688	704	719
71	346	374	392	417	442	472	497	532	570	608	628	669	685	700
72	281	309	327	352	377	407	432	467	505	543	563	604	620	635
73	307	335	353	378	403	433	458	493	531	569	589	630	646	661
74	317	345	363	388	413	443	468	503	541	579	599	640	656	671
75	292	320	338	363	388	418	443	478	516	554	574	615	631	646
76	285	313	331	356	381	411	436	471	509	547	567	608	624	639
77	106	124	142	167	192	147	172	207	245	283	303	344	360	375
78	69	87	105	130	155	117	142	177	215	253	273	314	330	345
79	78	96	114	139	164	108	133	168	206	244	264	305	321	336
80	91	109	127	152	177	123	148	183	221	259	279	320	336	351
81	103	121	139	164	189	128	153	188	226	264	284	325	341	356

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
41	1474	525	583	576	606	629	633	635	798	752	668	767	92	0
42	1434	485	543	536	566	589	593	595	758	712	628	727	71	75
43	1431	482	540	533	563	586	590	592	755	709	625	724	93	60
44	1384	435	493	486	516	539	543	545	708	662	578	677	121	90
45	1454	526	484	455	465	488	530	577	333	400	399	373	1171	1140
46	1474	546	504	475	485	508	550	597	353	420	419	393	1191	1160
47	1544	616	574	545	555	578	620	667	423	490	489	463	1261	1230
48	1578	650	608	579	589	612	654	701	457	524	523	497	1295	1264
49	1581	653	611	582	592	615	657	704	460	527	526	500	1298	1267
50	1607	679	637	608	618	641	683	730	486	553	552	526	1324	1293
51	1632	704	662	633	643	666	708	755	511	578	577	551	1349	1318
52	1660	732	690	661	671	694	736	783	539	606	605	579	1377	1346
53	1685	757	715	686	696	719	761	808	564	631	630	604	1402	1371
54	1685	757	715	686	696	719	761	808	564	631	630	604	1402	1371
55	1677	749	707	678	688	711	753	800	556	623	622	596	1394	1363
56	1559	631	590	561	571	594	636	683	439	506	505	479	1277	1246
57	1569	641	600	571	581	604	646	693	449	516	515	489	1287	1256
58	1576	648	607	578	588	611	653	700	456	523	522	496	1294	1263
59	1586	658	617	588	598	621	663	710	466	533	532	506	1304	1273
60	1598	670	629	600	610	633	675	722	478	545	544	518	1316	1285
61	1605	677	636	607	617	640	682	729	485	552	551	525	1323	1292
62	1613	685	644	615	625	648	690	737	493	560	559	533	1331	1300
63	791	316	367	364	394	417	482	506	586	623	456	555	776	745
64	778	331	382	379	409	432	497	521	601	638	471	570	791	760
65	781	304	355	352	382	405	470	494	574	611	444	543	764	733
66	774	314	365	362	392	415	480	504	584	621	454	553	774	743
67	779	324	375	372	402	425	490	514	594	631	464	563	784	753
68	776	339	390	387	417	440	505	529	609	646	479	578	799	768
69	777	356	407	404	434	457	522	546	626	663	496	595	816	785
70	752	443	494	491	521	544	609	633	713	750	583	682	903	872
71	733	424	475	472	502	525	590	614	694	731	564	663	884	853
72	668	415	466	463	493	516	581	605	685	722	555	654	875	844
73	694	426	477	474	504	527	592	616	696	733	566	665	886	855
74	704	439	490	487	517	540	605	629	709	746	579	678	899	868
75	679	464	515	512	542	565	630	654	734	771	604	703	924	893
76	672	471	522	519	549	572	637	661	741	778	611	710	931	900
77	408	725	776	773	803	826	891	915	995	1032	865	964	1185	1154
78	378	723	774	771	801	824	889	913	993	1030	863	962	1183	1152
79	369	732	783	780	810	833	898	922	1002	1039	872	971	1192	1161
80	384	745	796	793	823	846	911	935	1015	1052	885	984	1205	1174
81	389	757	808	805	835	858	923	947	1027	1064	897	996	1217	1186

	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
41	75	60	90	1140	1160	1230	1264	1267	1293	1318	1346	1371	1371	1363
42	0	22	50	1100	1120	1190	1224	1227	1253	1278	1306	1331	1331	1323
43	22	0	47	1097	1117	1187	1221	1224	1250	1275	1303	1328	1328	1320
44	50	47	0	1050	1070	1140	1174	1177	1203	1228	1256	1281	1281	1273
45	1100	1097	1050	0	20	90	124	127	153	178	206	231	231	223
46	1120	1117	1070	20	0	70	104	107	133	158	186	211	211	203
47	1190	1187	1140	90	70	0	44	37	63	88	116	141	141	133
48	1224	1221	1174	124	104	44	0	81	42	67	95	120	120	112
49	1227	1224	1177	127	107	37	81	0	45	64	92	117	117	109
50	1253	1250	1203	153	133	63	42	45	0	25	53	78	78	70
51	1278	1275	1228	178	158	88	67	64	25	0	28	53	53	45
52	1306	1303	1256	206	186	116	95	92	53	28	0	25	25	17
53	1331	1328	1281	231	211	141	120	117	78	53	25	0	13	26
54	1331	1328	1281	231	211	141	120	117	78	53	25	13	0	19
55	1323	1320	1273	223	203	133	112	109	70	45	17	26	19	0
56	1206	1203	1156	106	126	196	230	233	259	284	312	337	337	329
57	1216	1213	1166	116	136	206	240	243	269	294	322	347	347	339
58	1223	1220	1173	123	143	213	247	250	276	301	329	354	354	346
59	1233	1230	1183	133	153	223	257	260	286	311	339	364	364	356
60	1245	1242	1195	145	165	235	269	272	298	323	351	376	376	368
61	1252	1249	1202	152	172	242	276	279	305	330	358	383	383	375
62	1260	1257	1210	160	180	250	284	287	313	338	366	391	391	383
63	705	702	655	705	725	795	829	832	858	883	911	936	936	928
64	720	717	670	720	740	810	844	847	873	898	926	951	951	943
65	693	690	643	693	713	783	817	820	846	871	899	924	924	916
66	703	700	653	703	723	793	827	830	856	881	909	934	934	926
67	713	710	663	713	733	803	837	840	866	891	919	944	944	936
68	728	725	678	728	748	818	852	855	881	906	934	959	959	951
69	745	742	695	745	765	835	869	872	898	923	951	976	976	968
70	832	829	782	856	876	946	980	983	1009	1034	1062	1087	1087	1079
71	813	810	763	837	857	927	961	964	990	1015	1043	1068	1068	1060
72	804	801	754	828	848	918	952	955	981	1006	1034	1059	1059	1051
73	815	812	765	839	859	929	963	966	992	1017	1045	1070	1070	1062
74	828	825	778	852	872	942	976	979	1005	1030	1058	1083	1083	1075
75	853	850	803	877	897	967	1001	1004	1030	1055	1083	1108	1108	1100
76	860	857	810	884	904	974	1008	1011	1037	1062	1090	1115	1115	1107
77	1114	1111	1064	1138	1158	1228	1262	1265	1291	1316	1344	1369	1369	1361
78	1112	1109	1062	1136	1156	1226	1260	1263	1289	1314	1342	1367	1367	1359
79	1121	1118	1071	1145	1165	1235	1269	1272	1298	1323	1351	1376	1376	1368
80	1134	1131	1084	1158	1178	1248	1282	1285	1311	1336	1364	1389	1389	1381
81	1146	1143	1096	1170	1190	1260	1294	1297	1323	1348	1376	1401	1401	1393

	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
41	1246	1256	1263	1273	1285	1292	1300	745	760	733	743	753	768	785
42	1206	1216	1223	1233	1245	1252	1260	705	720	693	703	713	728	745
43	1203	1213	1220	1230	1242	1249	1257	702	717	690	700	710	725	742
44	1156	1166	1173	1183	1195	1202	1210	655	670	643	653	663	678	695
45	106	116	123	133	145	152	160	705	720	693	703	713	728	745
46	126	136	143	153	165	172	180	725	740	713	723	733	748	765
47	196	206	213	223	235	242	250	795	810	783	793	803	818	835
48	230	240	247	257	269	276	284	829	844	817	827	837	852	869
49	233	243	250	260	272	279	287	832	847	820	830	840	855	872
50	259	269	276	286	298	305	313	858	873	846	856	866	881	898
51	284	294	301	311	323	330	338	883	898	871	881	891	906	923
52	312	322	329	339	351	358	366	911	926	899	909	919	934	951
53	337	347	354	364	376	383	391	936	951	924	934	944	959	976
54	337	347	354	364	376	383	391	936	951	924	934	944	959	976
55	329	339	346	356	368	375	383	928	943	916	926	936	951	968
56	0	10	17	27	39	43	51	811	826	799	809	819	834	851
57	10	0	7	17	29	36	44	821	836	809	819	829	844	861
58	17	7	0	10	22	29	37	828	843	816	826	836	851	868
59	27	17	10	0	12	19	27	838	853	826	836	846	861	878
60	39	29	22	12	0	7	15	850	865	838	848	858	873	890
61	43	36	29	19	7	0	8	857	872	845	855	865	880	897
62	51	44	37	27	15	8	0	865	880	853	863	873	888	905
63	811	821	828	838	850	857	865	0	15	12	19	20	23	40
64	826	836	843	853	865	872	880	15	0	27	21	10	10	27
65	799	809	816	826	838	845	853	12	27	0	10	20	35	52
66	809	819	826	836	848	855	863	19	21	10	0	10	28	45
67	819	829	836	846	858	865	873	20	10	20	10	0	18	35
68	834	844	851	861	873	880	888	23	10	35	28	18	0	17
69	851	861	868	878	890	897	905	40	27	52	45	35	17	0
70	962	972	979	989	1001	1008	1016	77	64	89	82	72	54	55
71	943	953	960	970	982	989	997	79	66	91	84	74	56	57
72	934	944	951	961	973	980	988	122	109	134	127	117	99	100
73	945	955	962	972	984	991	999	100	87	112	105	95	77	78
74	958	968	975	985	997	1004	1012	113	100	125	118	108	90	91
75	983	993	1000	1010	1022	1029	1037	138	125	150	143	133	115	116
76	990	1000	1007	1017	1029	1036	1044	145	132	157	150	140	122	123
77	1244	1254	1261	1271	1283	1290	1298	442	429	454	447	437	419	420
78	1242	1252	1259	1269	1281	1288	1296	405	392	417	410	400	382	383
79	1251	1261	1268	1278	1290	1297	1305	414	401	426	419	409	391	392
80	1264	1274	1281	1291	1303	1310	1318	427	414	439	432	422	404	405
81	1276	1286	1293	1303	1315	1322	1330	439	426	451	444	434	416	417

	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
41	872	853	844	855	868	893	900	1154	1152	1161	1174	1186	1184	1179
42	832	813	804	815	828	853	860	1114	1112	1121	1134	1146	1144	1139
43	829	810	801	812	825	850	857	1111	1109	1118	1131	1143	1141	1136
44	782	763	754	765	778	803	810	1064	1062	1071	1084	1096	1094	1089
45	856	837	828	839	852	877	884	1138	1136	1145	1158	1170	1168	1163
46	876	857	848	859	872	897	904	1158	1156	1165	1178	1190	1188	1183
47	946	927	918	929	942	967	974	1228	1226	1235	1248	1260	1258	1253
48	980	961	952	963	976	1001	1008	1262	1260	1269	1282	1294	1292	1287
49	983	964	955	966	979	1004	1011	1265	1263	1272	1285	1297	1295	1290
50	1009	990	981	992	1005	1030	1037	1291	1289	1298	1311	1323	1321	1316
51	1034	1015	1006	1017	1030	1055	1062	1316	1314	1323	1336	1348	1346	1341
52	1062	1043	1034	1045	1058	1083	1090	1344	1342	1351	1364	1376	1374	1369
53	1087	1068	1059	1070	1083	1108	1115	1369	1367	1376	1389	1401	1399	1394
54	1087	1068	1059	1070	1083	1108	1115	1369	1367	1376	1389	1401	1399	1394
55	1079	1060	1051	1062	1075	1100	1107	1361	1359	1368	1381	1393	1391	1386
56	962	943	934	945	958	983	990	1244	1242	1251	1264	1276	1274	1269
57	972	953	944	955	968	993	1000	1254	1252	1261	1274	1286	1284	1279
58	979	960	951	962	975	1000	1007	1261	1259	1268	1281	1293	1291	1286
59	989	970	961	972	985	1010	1017	1271	1269	1278	1291	1303	1301	1296
60	1001	982	973	984	997	1022	1029	1283	1281	1290	1303	1315	1313	1308
61	1008	989	980	991	1004	1029	1036	1290	1288	1297	1310	1322	1320	1315
62	1016	997	988	999	1012	1037	1044	1298	1296	1305	1318	1330	1328	1323
63	77	79	122	100	113	138	145	442	405	414	427	439	437	432
64	64	66	109	87	100	125	132	429	392	401	414	426	424	419
65	89	91	134	112	125	150	157	454	417	426	439	451	449	444
66	82	84	127	105	118	143	150	447	410	419	432	444	442	437
67	72	74	117	95	108	133	140	437	400	409	422	434	432	427
68	54	56	99	77	90	115	122	419	382	391	404	416	414	409
69	55	57	100	78	91	116	123	420	383	392	405	417	415	410
70	0	19	62	40	53	78	85	382	345	354	367	379	377	372
71	19	0	43	21	34	59	66	363	326	335	348	360	358	353
72	62	43	0	26	39	64	71	368	331	340	353	365	363	358
73	40	21	26	0	13	38	45	342	305	314	327	339	337	332
74	53	34	39	13	0	25	32	329	292	301	314	326	324	319
75	78	59	64	38	25	0	7	304	267	276	289	301	299	294
76	85	66	71	45	32	7	0	297	260	269	282	294	292	287
77	382	363	368	342	329	304	297	0	37	35	24	36	34	57
78	345	326	331	305	292	267	260	37	0	9	22	34	32	27
79	354	335	340	314	301	276	269	35	9	0	13	25	23	18
80	367	348	353	327	314	289	282	24	22	13	0	12	10	33
81	379	360	365	339	326	301	294	36	34	25	12	0	15	38

	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
41	1192	1193	1202	1216	1223	1275	1280	1291	1306	1302	1271	1243	1301	1325
42	1152	1153	1162	1176	1183	1235	1240	1251	1266	1262	1231	1203	1261	1285
43	1149	1150	1159	1173	1180	1232	1237	1248	1263	1259	1228	1200	1258	1282
44	1102	1103	1112	1126	1133	1185	1190	1201	1216	1212	1181	1153	1211	1235
45	1176	1177	1186	1200	1207	1259	1264	1275	1290	1286	1255	1227	1285	1309
46	1196	1197	1206	1220	1227	1279	1284	1295	1310	1306	1275	1247	1305	1329
47	1266	1267	1276	1290	1297	1349	1354	1365	1380	1376	1345	1317	1375	1399
48	1300	1301	1310	1324	1331	1383	1388	1399	1414	1410	1379	1351	1409	1433
49	1303	1304	1313	1327	1334	1386	1391	1402	1417	1413	1382	1354	1412	1436
50	1329	1330	1339	1353	1360	1412	1417	1428	1443	1439	1408	1380	1438	1462
51	1354	1355	1364	1378	1385	1437	1442	1453	1468	1464	1433	1405	1463	1487
52	1382	1383	1392	1406	1413	1465	1470	1481	1496	1492	1461	1433	1491	1515
53	1407	1408	1417	1431	1438	1490	1495	1506	1521	1517	1486	1458	1516	1540
54	1407	1408	1417	1431	1438	1490	1495	1506	1521	1517	1486	1458	1516	1540
55	1399	1400	1409	1423	1430	1482	1487	1498	1513	1509	1478	1450	1508	1532
56	1282	1283	1292	1306	1313	1365	1370	1381	1396	1392	1361	1333	1391	1415
57	1292	1293	1302	1316	1323	1375	1380	1391	1406	1402	1371	1343	1401	1425
58	1299	1300	1309	1323	1330	1382	1387	1398	1413	1409	1378	1350	1408	1432
59	1309	1310	1319	1333	1340	1392	1397	1408	1423	1419	1388	1360	1418	1442
60	1321	1322	1331	1345	1352	1404	1409	1420	1435	1431	1400	1372	1430	1454
61	1328	1329	1338	1352	1359	1411	1416	1427	1442	1438	1407	1379	1437	1461
62	1336	1337	1346	1360	1367	1419	1424	1435	1450	1446	1415	1387	1445	1469
63	445	446	455	469	476	528	533	544	559	555	524	496	554	578
64	432	433	442	456	463	515	520	531	546	542	511	483	541	565
65	457	458	467	481	488	540	545	556	571	567	536	508	566	590
66	450	451	460	474	481	533	538	549	564	560	529	501	559	583
67	440	441	450	464	471	523	528	539	554	550	519	491	549	573
68	422	423	432	446	453	505	510	521	536	532	501	473	531	555
69	423	424	433	447	454	506	511	522	537	533	502	474	532	556
70	385	386	395	409	416	468	473	484	499	495	464	436	494	518
71	366	367	376	390	397	449	454	465	480	476	445	417	475	499
72	371	372	381	395	402	454	459	470	485	481	450	422	480	504
73	345	346	355	369	376	428	433	444	459	455	424	396	454	478
74	332	333	342	356	363	415	420	431	446	442	411	383	441	465
75	307	308	317	331	338	390	395	406	421	417	386	358	416	440
76	300	301	310	324	331	383	388	399	414	410	379	351	409	433
77	70	71	80	94	101	153	158	169	184	180	149	121	179	203
78	40	41	50	64	71	123	128	139	154	150	119	91	149	173
79	31	32	41	55	62	114	119	130	145	141	110	82	140	164
80	46	47	56	70	77	129	134	145	160	156	125	97	155	179
81	51	52	61	75	82	53	58	69	84	80	130	102	160	184

	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
41	1352	1259	1488	653	660	673	713	638	688	756	733	723	743
42	1312	1219	1448	613	620	633	673	598	648	716	693	683	703
43	1309	1216	1445	610	617	630	670	595	645	713	690	680	700
44	1262	1169	1398	563	570	583	623	548	598	666	643	633	653
45	1336	1243	1472	648	655	668	708	633	683	751	728	718	738
46	1356	1263	1492	668	675	688	728	653	703	771	748	738	758
47	1426	1333	1562	738	745	758	798	723	773	841	818	808	828
48	1460	1367	1596	772	779	792	832	757	807	875	852	842	862
49	1463	1370	1599	775	782	795	835	760	810	878	855	845	865
50	1489	1396	1625	801	808	821	861	786	836	904	881	871	891
51	1514	1421	1650	826	833	846	886	811	861	929	906	896	916
52	1542	1449	1678	854	861	874	914	839	889	957	934	924	944
53	1567	1474	1703	879	886	899	939	864	914	982	959	949	969
54	1567	1474	1703	879	886	899	939	864	914	982	959	949	969
55	1559	1466	1695	871	878	891	931	856	906	974	951	941	961
56	1442	1349	1578	754	761	774	814	739	789	857	834	824	844
57	1452	1359	1588	764	771	784	824	749	799	867	844	834	854
58	1459	1366	1595	771	778	791	831	756	806	874	851	841	861
59	1469	1376	1605	781	788	801	841	766	816	884	861	851	871
60	1481	1388	1617	793	800	813	853	778	828	896	873	863	883
61	1488	1395	1624	800	807	820	860	785	835	903	880	870	890
62	1496	1403	1632	808	815	828	868	793	843	911	888	878	898
63	605	565	741	91	93	70	48	73	23	91	68	58	78
64	592	552	728	102	104	81	45	84	34	90	65	55	75
65	617	577	753	103	105	82	60	85	35	103	80	70	90
66	610	570	746	100	102	79	57	82	32	100	77	67	87
67	600	560	736	117	115	96	46	99	49	91	66	56	76
68	582	542	718	112	114	91	35	94	44	80	55	45	65
69	583	543	719	112	114	91	19	94	44	64	39	29	49
70	545	505	681	155	157	134	62	137	87	72	42	52	32
71	526	486	662	174	176	153	81	156	106	91	61	71	51
72	531	491	667	217	219	196	124	199	149	134	104	114	94
73	505	465	641	195	197	174	102	177	127	112	82	92	72
74	492	452	628	208	210	187	115	190	140	125	95	105	85
75	467	427	603	233	235	212	140	215	165	150	120	130	110
76	460	420	596	240	242	219	147	222	172	157	127	137	117
77	230	125	366	493	495	472	402	475	425	357	382	392	397
78	200	160	336	456	458	435	365	438	388	320	345	355	360
79	191	149	327	465	467	444	374	447	397	329	354	364	369
80	206	161	342	478	480	457	387	460	410	342	367	377	382
81	211	159	347	490	492	469	399	472	422	354	379	389	394

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
82	590	501	481	390	332	309	253	223	243	184	176	146	116	109
83	605	516	496	405	347	324	268	238	258	199	191	161	131	124
84	592	503	483	392	334	311	255	225	245	186	178	148	118	111
85	599	510	490	399	341	318	262	232	252	193	185	155	125	118
86	597	508	488	397	339	316	260	230	250	191	183	153	123	116
87	611	522	502	411	353	330	274	244	264	205	197	167	137	130
88	622	533	513	422	364	341	285	255	275	216	208	178	148	141
89	676	587	567	476	418	395	339	309	329	270	262	232	202	195
90	671	582	562	471	413	390	334	304	324	265	257	227	197	190
91	660	571	551	460	402	379	323	293	313	254	246	216	186	179
92	675	586	566	475	417	394	338	308	328	269	261	231	201	194
93	649	560	540	449	391	368	312	282	302	243	235	205	175	168
94	655	566	546	455	397	374	318	288	308	249	241	211	181	174
95	627	538	518	427	369	346	290	260	280	221	213	183	153	146
96	685	596	576	485	427	404	348	318	338	279	271	241	211	204
97	709	620	600	509	451	428	372	342	362	303	295	265	235	228
98	736	647	627	536	478	455	399	369	389	330	322	292	262	255
99	643	554	534	443	385	362	306	276	296	237	229	199	169	162
100	872	783	763	672	614	591	535	505	525	466	458	428	398	391
101	135	88	115	190	292	350	330	360	393	398	452	482	465	474
102	118	90	117	197	299	357	337	367	400	405	459	489	472	481
103	115	67	94	176	278	336	316	346	379	384	438	468	451	460
104	165	15	32	123	225	283	263	293	326	331	385	415	398	407
105	141	70	97	175	277	335	315	345	378	383	437	467	450	459
106	146	20	47	148	250	308	288	318	351	356	410	440	423	432
107	150	63	65	149	251	309	289	319	352	357	411	441	424	433
108	166	38	40	123	225	283	263	293	326	331	385	415	398	407
109	156	28	30	113	215	273	253	283	316	321	375	405	388	397
110	179	48	40	133	235	293	273	303	336	341	395	425	408	417

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
82	101	119	137	162	187	113	138	173	211	249	269	310	326	341
83	116	87	70	46	71	90	115	150	188	226	246	287	303	318
84	103	74	57	33	58	85	110	145	183	221	241	282	298	313
85	110	81	64	40	65	79	104	139	177	215	235	276	292	307
86	108	79	62	38	57	67	92	127	165	203	223	264	280	295
87	122	93	76	52	43	53	78	113	151	189	209	250	266	281
88	133	104	87	63	38	46	71	106	144	182	202	243	259	274
89	187	158	141	117	92	101	126	161	199	237	257	298	314	329
90	182	153	136	112	87	96	121	156	194	232	252	293	309	324
91	171	142	125	101	76	85	110	145	183	221	241	282	298	313
92	186	157	140	116	91	100	125	160	198	236	256	297	313	328
93	160	131	114	90	65	74	99	134	172	210	230	271	287	302
94	166	137	120	96	71	80	105	140	178	216	236	277	293	308
95	138	109	92	68	43	52	77	112	150	188	208	249	265	280
96	196	167	150	126	101	71	59	94	132	170	190	231	247	262
97	220	191	174	150	125	95	83	118	156	194	214	255	271	286
98	247	218	201	177	152	122	110	145	183	221	241	282	298	313
99	154	175	192	217	242	272	297	332	370	408	428	469	485	500
100	383	354	337	313	288	258	246	281	319	357	377	418	434	449
101	482	510	528	553	578	608	633	668	706	744	764	805	821	836
102	489	517	535	560	585	615	640	675	713	751	771	812	828	843
103	468	496	514	539	564	594	619	654	692	730	750	791	807	822
104	415	443	461	486	511	541	566	601	639	677	697	738	754	769
105	467	495	513	538	563	593	618	653	691	729	749	790	806	821
106	440	468	486	511	536	566	591	626	664	702	722	763	779	794
107	441	469	487	512	537	567	592	627	665	703	723	764	780	795
108	415	443	461	486	511	541	566	601	639	677	697	738	754	769
109	405	433	451	476	501	531	556	591	629	667	687	728	744	759
110	425	453	471	496	521	551	576	611	649	687	707	748	764	779

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
82	374	755	806	803	833	856	921	945	1025	1062	895	994	1215	1184
83	351	750	801	798	828	851	916	940	1020	1057	890	989	1210	1179
84	346	763	814	811	841	864	929	953	1033	1070	903	1002	1223	1192
85	340	764	815	812	842	865	930	954	1034	1071	904	1003	1224	1193
86	328	773	824	821	851	874	939	963	1043	1080	913	1012	1233	1202
87	314	787	838	835	865	888	953	977	1057	1094	927	1026	1247	1216
88	307	794	845	842	872	895	960	984	1064	1101	934	1033	1254	1223
89	362	846	897	894	924	947	1012	1036	1116	1153	986	1085	1306	1275
90	357	851	902	899	929	952	1017	1041	1121	1158	991	1090	1311	1280
91	346	862	913	910	940	963	1028	1052	1132	1169	1002	1101	1322	1291
92	361	877	928	925	955	978	1043	1067	1147	1184	1017	1116	1337	1306
93	335	873	924	921	951	974	1039	1063	1143	1180	1013	1112	1333	1302
94	341	842	893	890	920	943	1008	1032	1112	1149	982	1081	1302	1271
95	313	800	851	848	878	915	980	1004	1084	1121	954	1053	1274	1243
96	295	858	909	906	936	973	1038	1062	1142	1179	1012	1111	1332	1301
97	319	882	933	930	960	997	1062	1086	1166	1203	1036	1135	1356	1325
98	346	909	960	957	987	1024	1089	1113	1193	1230	1063	1162	1383	1352
99	533	816	867	864	894	931	996	1020	1100	1137	970	1069	1290	1259
100	482	1045	1096	1093	1123	1160	1225	1249	1329	1366	1199	1298	1519	1488
101	869	254	305	302	332	369	434	458	538	575	408	507	684	653
102	876	261	312	309	339	376	441	465	545	582	415	514	691	660
103	855	274	325	322	352	389	454	478	558	595	428	527	704	673
104	802	314	365	362	392	429	494	518	598	635	468	567	744	713
105	854	239	290	287	317	354	419	443	523	560	393	492	669	638
106	827	289	340	337	367	404	469	493	573	610	443	542	719	688
107	828	357	408	405	435	472	537	561	641	678	511	610	787	756
108	802	334	385	382	412	449	514	538	618	655	488	587	764	733
109	792	324	375	372	402	439	504	528	608	645	478	577	754	723
110	812	344	395	392	422	459	524	548	628	665	498	597	774	743

	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
82	1144	1141	1094	1168	1188	1258	1292	1295	1321	1346	1374	1399	1399	1391
83	1139	1136	1089	1163	1183	1253	1287	1290	1316	1341	1369	1394	1394	1386
84	1152	1149	1102	1176	1196	1266	1300	1303	1329	1354	1382	1407	1407	1399
85	1153	1150	1103	1177	1197	1267	1301	1304	1330	1355	1383	1408	1408	1400
86	1162	1159	1112	1186	1206	1276	1310	1313	1339	1364	1392	1417	1417	1409
87	1176	1173	1126	1200	1220	1290	1324	1327	1353	1378	1406	1431	1431	1423
88	1183	1180	1133	1207	1227	1297	1331	1334	1360	1385	1413	1438	1438	1430
89	1235	1232	1185	1259	1279	1349	1383	1386	1412	1437	1465	1490	1490	1482
90	1240	1237	1190	1264	1284	1354	1388	1391	1417	1442	1470	1495	1495	1487
91	1251	1248	1201	1275	1295	1365	1399	1402	1428	1453	1481	1506	1506	1498
92	1266	1263	1216	1290	1310	1380	1414	1417	1443	1468	1496	1521	1521	1513
93	1262	1259	1212	1286	1306	1376	1410	1413	1439	1464	1492	1517	1517	1509
94	1231	1228	1181	1255	1275	1345	1379	1382	1408	1433	1461	1486	1486	1478
95	1203	1200	1153	1227	1247	1317	1351	1354	1380	1405	1433	1458	1458	1450
96	1261	1258	1211	1285	1305	1375	1409	1412	1438	1463	1491	1516	1516	1508
97	1285	1282	1235	1309	1329	1399	1433	1436	1462	1487	1515	1540	1540	1532
98	1312	1309	1262	1336	1356	1426	1460	1463	1489	1514	1542	1567	1567	1559
99	1219	1216	1169	1243	1263	1333	1367	1370	1396	1421	1449	1474	1474	1466
100	1448	1445	1398	1472	1492	1562	1596	1599	1625	1650	1678	1703	1703	1695
101	613	610	563	648	668	738	772	775	801	826	854	879	879	871
102	620	617	570	655	675	745	779	782	808	833	861	886	886	878
103	633	630	583	668	688	758	792	795	821	846	874	899	899	891
104	673	670	623	708	728	798	832	835	861	886	914	939	939	931
105	598	595	548	633	653	723	757	760	786	811	839	864	864	856
106	648	645	598	683	703	773	807	810	836	861	889	914	914	906
107	716	713	666	751	771	841	875	878	904	929	957	982	982	974
108	693	690	643	728	748	818	852	855	881	906	934	959	959	951
109	683	680	633	718	738	808	842	845	871	896	924	949	949	941
110	703	700	653	738	758	828	862	865	891	916	944	969	969	961

	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
82	1274	1284	1291	1301	1313	1320	1328	437	424	449	442	432	414	415
83	1269	1279	1286	1296	1308	1315	1323	432	419	444	437	427	409	410
84	1282	1292	1299	1309	1321	1328	1336	445	432	457	450	440	422	423
85	1283	1293	1300	1310	1322	1329	1337	446	433	458	451	441	423	424
86	1292	1302	1309	1319	1331	1338	1346	455	442	467	460	450	432	433
87	1306	1316	1323	1333	1345	1352	1360	469	456	481	474	464	446	447
88	1313	1323	1330	1340	1352	1359	1367	476	463	488	481	471	453	454
89	1365	1375	1382	1392	1404	1411	1419	528	515	540	533	523	505	506
90	1370	1380	1387	1397	1409	1416	1424	533	520	545	538	528	510	511
91	1381	1391	1398	1408	1420	1427	1435	544	531	556	549	539	521	522
92	1396	1406	1413	1423	1435	1442	1450	559	546	571	564	554	536	537
93	1392	1402	1409	1419	1431	1438	1446	555	542	567	560	550	532	533
94	1361	1371	1378	1388	1400	1407	1415	524	511	536	529	519	501	502
95	1333	1343	1350	1360	1372	1379	1387	496	483	508	501	491	473	474
96	1391	1401	1408	1418	1430	1437	1445	554	541	566	559	549	531	532
97	1415	1425	1432	1442	1454	1461	1469	578	565	590	583	573	555	556
98	1442	1452	1459	1469	1481	1488	1496	605	592	617	610	600	582	583
99	1349	1359	1366	1376	1388	1395	1403	565	552	577	570	560	542	543
100	1578	1588	1595	1605	1617	1624	1632	741	728	753	746	736	718	719
101	754	764	771	781	793	800	808	91	102	103	100	117	112	112
102	761	771	778	788	800	807	815	93	104	105	102	115	114	114
103	774	784	791	801	813	820	828	70	81	82	79	96	91	91
104	814	824	831	841	853	860	868	48	45	60	57	46	35	19
105	739	749	756	766	778	785	793	73	84	85	82	99	94	94
106	789	799	806	816	828	835	843	23	34	35	32	49	44	44
107	857	867	874	884	896	903	911	91	90	103	100	91	80	64
108	834	844	851	861	873	880	888	68	65	80	77	66	55	39
109	824	834	841	851	863	870	878	58	55	70	67	56	45	29
110	844	854	861	871	883	890	898	78	75	90	87	76	65	49

	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
82	377	358	363	337	324	299	292	34	32	23	10	15	0	23
83	372	353	358	332	319	294	287	57	27	18	33	38	23	0
84	385	366	371	345	332	307	300	70	40	31	46	51	36	13
85	386	367	372	346	333	308	301	71	41	32	47	52	37	14
86	395	376	381	355	342	317	310	80	50	41	56	61	46	23
87	409	390	395	369	356	331	324	94	64	55	70	75	60	37
88	416	397	402	376	363	338	331	101	71	62	77	82	67	44
89	468	449	454	428	415	390	383	153	123	114	129	53	119	96
90	473	454	459	433	420	395	388	158	128	119	134	58	124	101
91	484	465	470	444	431	406	399	169	139	130	145	69	135	112
92	499	480	485	459	446	421	414	184	154	145	160	84	150	127
93	495	476	481	455	442	417	410	180	150	141	156	80	146	123
94	464	445	450	424	411	386	379	149	119	110	125	130	115	92
95	436	417	422	396	383	358	351	121	91	82	97	102	87	64
96	494	475	480	454	441	416	409	179	149	140	155	160	145	122
97	518	499	504	478	465	440	433	203	173	164	179	184	169	146
98	545	526	531	505	492	467	460	230	200	191	206	211	196	173
99	505	486	491	465	452	427	420	125	160	149	161	159	182	200
100	681	662	667	641	628	603	596	366	336	327	342	347	332	309
101	155	174	217	195	208	233	240	493	456	465	478	490	488	483
102	157	176	219	197	210	235	242	495	458	467	480	492	490	485
103	134	153	196	174	187	212	219	472	435	444	457	469	467	462
104	62	81	124	102	115	140	147	402	365	374	387	399	397	392
105	137	156	199	177	190	215	222	475	438	447	460	472	470	465
106	87	106	149	127	140	165	172	425	388	397	410	422	420	415
107	72	91	134	112	125	150	157	357	320	329	342	354	352	347
108	42	61	104	82	95	120	127	382	345	354	367	379	377	372
109	52	71	114	92	105	130	137	392	355	364	377	389	387	382
110	32	51	94	72	85	110	117	397	360	369	382	394	392	387

	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
82	36	37	46	60	67	119	124	135	150	146	115	87	145	169
83	13	14	23	37	44	96	101	112	127	123	92	64	122	146
84	0	7	18	32	39	91	96	107	122	118	87	59	117	141
85	7	0	12	26	33	85	90	101	116	112	81	53	111	135
86	18	12	0	14	21	73	78	89	104	100	69	41	99	123
87	32	26	14	0	7	59	64	75	90	86	55	27	85	109
88	39	33	21	7	0	52	57	68	83	79	48	20	78	102
89	91	85	73	59	52	0	5	16	31	27	77	49	126	150
90	96	90	78	64	57	5	0	11	26	22	72	44	121	145
91	107	101	89	75	68	16	11	0	15	11	61	33	110	134
92	122	116	104	90	83	31	26	15	0	26	23	48	63	72
93	118	112	100	86	79	27	22	11	26	0	50	22	99	123
94	87	81	69	55	48	77	72	61	23	50	0	28	63	71
95	59	53	41	27	20	49	44	33	48	22	28	0	77	101
96	117	111	99	85	78	126	121	110	63	99	63	77	0	24
97	141	135	123	109	102	150	145	134	72	123	71	101	24	0
98	168	162	150	136	129	177	172	161	99	150	98	128	51	27
99	195	189	177	163	156	104	109	120	135	131	181	153	215	191
100	304	298	286	272	265	313	308	297	235	286	234	264	187	163
101	496	497	506	520	527	579	584	595	610	606	575	547	605	629
102	498	499	508	522	529	581	586	597	612	608	577	549	607	631
103	475	476	485	499	506	558	563	574	589	585	554	526	584	608
104	405	406	415	429	436	488	493	504	519	515	484	456	514	538
105	478	479	488	502	509	561	566	577	592	588	557	529	587	611
106	428	429	438	452	459	511	516	527	542	538	507	479	537	561
107	360	361	370	384	391	443	448	459	474	470	439	411	469	493
108	385	386	395	409	416	468	473	484	499	495	464	436	494	518
109	395	396	405	419	426	478	483	494	509	505	474	446	504	528
110	400	401	410	424	431	483	488	499	514	510	479	451	509	533

	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
82	196	182	332	488	490	467	397	470	420	352	377	387	392
83	173	200	309	483	485	462	392	465	415	347	372	382	387
84	168	195	304	496	498	475	405	478	428	360	385	395	400
85	162	189	298	497	499	476	406	479	429	361	386	396	401
86	150	177	286	506	508	485	415	488	438	370	395	405	410
87	136	163	272	520	522	499	429	502	452	384	409	419	424
88	129	156	265	527	529	506	436	509	459	391	416	426	431
89	177	104	313	579	581	558	488	561	511	443	468	478	483
90	172	109	308	584	586	563	493	566	516	448	473	483	488
91	161	120	297	595	597	574	504	577	527	459	484	494	499
92	99	135	235	610	612	589	519	592	542	474	499	509	514
93	150	131	286	606	608	585	515	588	538	470	495	505	510
94	98	181	234	575	577	554	484	557	507	439	464	474	479
95	128	153	264	547	549	526	456	529	479	411	436	446	451
96	51	215	187	605	607	584	514	587	537	469	494	504	509
97	27	191	163	629	631	608	538	611	561	493	518	528	533
98	0	164	160	656	658	635	565	638	588	520	545	555	560
99	164	0	254	616	618	595	525	598	548	480	505	515	520
100	160	254	0	792	794	771	701	774	724	656	681	691	696
101	656	616	792	0	10	31	93	15	68	136	113	103	123
102	658	618	794	10	0	20	95	22	70	138	115	105	125
103	635	595	771	31	20	0	72	35	47	115	92	82	102
104	565	525	701	93	95	72	0	75	25	45	20	10	30
105	638	598	774	15	22	35	75	0	50	118	95	85	105
106	588	548	724	68	70	47	25	50	0	68	45	35	55
107	520	480	656	136	138	115	45	118	68	0	25	35	40
108	545	505	681	113	115	92	20	95	45	25	0	10	10
109	555	515	691	103	105	82	10	85	35	35	10	0	20
110	560	520	696	123	125	102	30	105	55	40	10	20	0

EK – 2: Süre Olarak Müşterilerin Depoya Olan Uzaklıkları ve Kendi Aralarındaki Uzaklıklar

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	7,2	7,88	10,8	11,1	11,2	13,5	14,7	13	16,2	18,4	19,6	18,9	19,2
1	7,2	0	1,08	4,32	8,4	10,7	9,92	11,1	12,4	12,6	14,8	16	15,3	15,7
2	7,88	1,08	0	3,52	7,6	9,92	9,12	10,3	11,6	11,8	14	15,2	14,5	14,9
3	10,8	4,32	3,52	0	4,08	6,4	5,6	6,8	8,12	8,32	10,5	11,7	11	11,4
4	11,1	8,4	7,6	4,08	0	1,32	3,32	4,52	3,52	6,04	8,2	9,4	8,72	9,08
5	11,2	10,7	9,92	6,4	1,32	0	2,24	3,44	1,8	4,96	7,12	8,32	7,64	8
6	13,5	9,92	9,12	5,6	3,32	2,24	0	1,2	2,52	2,72	4,88	6,08	5,4	5,76
7	14,7	11,1	10,3	6,8	4,52	3,44	1,2	0	1,2	1,52	3,68	4,88	4,2	4,56
8	13	12,4	11,6	8,12	3,52	1,8	2,52	1,2	0	2,4	4,56	5,76	5,08	5,44
9	16,2	12,6	11,8	8,32	6,04	4,96	2,72	1,52	2,4	0	2,16	3,36	2,68	3,04
10	18,4	14,8	14	10,5	8,2	7,12	4,88	3,68	4,56	2,16	0	1,2	2,48	2,84
11	19,6	16	15,2	11,7	9,4	8,32	6,08	4,88	5,76	3,36	1,2	0	1,28	1,64
12	18,9	15,3	14,5	11	8,72	7,64	5,4	4,2	5,08	2,68	2,48	1,28	0	0,36
13	19,2	15,7	14,9	11,4	9,08	8	5,76	4,56	5,44	3,04	2,84	1,64	0,36	0
14	19,6	16	15,2	11,7	9,4	8,32	6,08	4,88	5,76	3,36	3,16	1,96	0,68	0,32
15	20,7	17,1	16,3	12,8	10,5	9,44	7,2	6	6,88	4,48	4,28	3,08	1,8	1,44
16	21,4	17,8	17	13,5	11,2	10,2	7,92	6,72	7,6	5,2	5	3,8	2,52	2,16
17	22,4	18,8	18	14,5	12,2	11,2	8,92	7,72	8,6	6,2	6	4,8	3,52	3,16
18	23,4	19,8	19	15,5	13,2	12,2	9,92	8,72	9,6	7,2	7	5,8	4,52	4,16
19	24,6	21	20,2	16,7	14,4	13,4	11,1	9,92	10,8	8,4	8,2	7	5,72	5,36
20	25,6	22	21,2	17,7	15,4	14,4	12,1	10,9	11,8	9,4	9,2	8	6,72	6,36
21	27	23,4	22,6	19,1	16,8	15,8	13,5	12,3	13,2	10,8	10,6	9,4	8,12	7,76
22	28,5	25	24,2	20,6	18,4	17,3	15	13,8	14,7	12,3	12,1	10,9	9,64	9,28
23	30	26,5	25,7	22,2	19,9	18,8	16,6	15,4	16,2	13,8	13,6	12,4	11,2	10,8
24	30,8	27,3	26,5	23	20,7	19,6	17,4	16,2	17	14,6	14,4	13,2	12	11,6
25	32,5	28,9	28,1	24,6	22,3	21,2	19	17,8	18,7	16,3	16,1	14,9	13,6	13,2
26	33,1	29,6	28,8	25,2	23	21,9	19,6	18,4	19,3	16,9	16,7	15,5	14,2	13,9
27	33,7	30,2	29,4	25,8	23,6	22,5	20,2	19	19,9	17,5	17,3	16,1	14,8	14,5
28	35	31,5	30,7	27,2	24,9	23,8	21,6	20,4	21,2	18,8	18,6	17,4	16,2	15,8
29	8,28	14,2	14,4	14,5	18,5	19,8	20,1	21,3	22,6	22,8	25	26,2	25,5	25,8
30	10,6	14,8	14,9	15	19	20,3	20,6	21,8	23,1	23,3	25,5	26,7	26	26,4
31	10,3	14,5	14,6	14,7	18,7	20	20,3	21,5	22,8	23	25,2	26,4	25,7	26,1
32	11,5	15,9	16	16,1	20,1	21,4	21,7	22,9	24,2	24,4	26,6	27,8	27,1	27,5
33	12,4	16,8	16,9	17	21	22,3	22,6	23,8	25,1	25,3	27,5	28,7	28	28,4
34	15	18,5	18,6	18,7	22,7	24	24,3	25,5	26,8	27	29,2	30,4	29,7	30,1
35	16	18,7	18,9	19	23	24,3	24,6	25,8	27,1	27,3	29,4	30,6	30	30,3
36	19,2	19	19,1	19,2	23,2	24,5	24,8	26	27,3	27,5	29,7	30,9	30,2	30,6
37	20,6	23,5	23,6	23,7	27,7	29	29,3	30,5	31,8	32	34,2	35,4	34,7	35,1
38	14	18,4	18,5	18,6	22,6	23,9	24,2	25,4	26,7	26,9	29,1	30,3	29,6	30
39	17,9	22	22,1	22,2	26,2	27,5	27,8	29	30,3	30,5	32,7	33,9	33,2	33,6

40	18,9	32,8	33	33	37	38,4	38,6	39,8	41,2	41,4	43,5	44,7	44	44,4
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	19,6	20,7	21,4	22,4	23,4	24,6	25,6	27	28,5	30	30,8	32,5	33,1	33,7
1	16	17,1	17,8	18,8	19,8	21	22	23,4	25	26,5	27,3	28,9	29,6	30,2
2	15,2	16,3	17	18	19	20,2	21,2	22,6	24,2	25,7	26,5	28,1	28,8	29,4
3	11,7	12,8	13,5	14,5	15,5	16,7	17,7	19,1	20,6	22,2	23	24,6	25,2	25,8
4	9,4	10,5	11,2	12,2	13,2	14,4	15,4	16,8	18,4	19,9	20,7	22,3	23	23,6
5	8,32	9,44	10,2	11,2	12,2	13,4	14,4	15,8	17,3	18,8	19,6	21,2	21,9	22,5
6	6,08	7,2	7,92	8,92	9,92	11,1	12,1	13,5	15	16,6	17,4	19	19,6	20,2
7	4,88	6	6,72	7,72	8,72	9,92	10,9	12,3	13,8	15,4	16,2	17,8	18,4	19
8	5,76	6,88	7,6	8,6	9,6	10,8	11,8	13,2	14,7	16,2	17	18,7	19,3	19,9
9	3,36	4,48	5,2	6,2	7,2	8,4	9,4	10,8	12,3	13,8	14,6	16,3	16,9	17,5
10	3,16	4,28	5	6	7	8,2	9,2	10,6	12,1	13,6	14,4	16,1	16,7	17,3
11	1,96	3,08	3,8	4,8	5,8	7	8	9,4	10,9	12,4	13,2	14,9	15,5	16,1
12	0,68	1,8	2,52	3,52	4,52	5,72	6,72	8,12	9,64	11,2	12	13,6	14,2	14,8
13	0,32	1,44	2,16	3,16	4,16	5,36	6,36	7,76	9,28	10,8	11,6	13,2	13,9	14,5
14	0	1,12	1,84	2,84	3,84	5,04	6,04	7,44	8,96	10,5	11,3	12,9	13,6	14,2
15	1,12	0	0,72	1,72	2,72	3,92	4,92	6,32	7,84	9,36	10,2	11,8	12,4	13
16	1,84	0,72	0	1	2	3,2	4,2	5,6	7,12	8,64	9,44	11,1	11,7	12,3
17	2,84	1,72	1	0	1	2,2	3,2	4,6	6,12	7,64	8,44	10,1	10,7	11,3
18	3,84	2,72	2	1	0	1,2	2,2	3,6	5,12	6,64	7,44	9,08	9,72	10,3
19	5,04	3,92	3,2	2,2	1,2	0	1	2,4	3,92	5,44	6,24	7,88	8,52	9,12
20	6,04	4,92	4,2	3,2	2,2	1	0	1,4	2,92	4,44	5,24	6,88	7,52	8,12
21	7,44	6,32	5,6	4,6	3,6	2,4	1,4	0	1,52	3,04	3,84	5,48	6,12	6,72
22	8,96	7,84	7,12	6,12	5,12	3,92	2,92	1,52	0	1,52	2,32	3,96	4,6	5,2
23	10,5	9,36	8,64	7,64	6,64	5,44	4,44	3,04	1,52	0	0,8	2,44	3,08	3,68
24	11,3	10,2	9,44	8,44	7,44	6,24	5,24	3,84	2,32	0,8	0	1,64	2,28	2,88
25	12,9	11,8	11,1	10,1	9,08	7,88	6,88	5,48	3,96	2,44	1,64	0	0,64	1,24
26	13,6	12,4	11,7	10,7	9,72	8,52	7,52	6,12	4,6	3,08	2,28	0,64	0	0,6
27	14,2	13	12,3	11,3	10,3	9,12	8,12	6,72	5,2	3,68	2,88	1,24	0,6	0
28	15,5	14,4	13,6	12,6	11,6	10,4	9,44	8,04	6,52	5	4,2	2,56	1,92	1,32
29	26,2	27,3	28	29	30	31,2	32,2	33,6	35,1	36,6	37,4	39,1	39,7	40,3
30	26,7	27,8	28,5	29,5	30,5	31,7	32,7	34,1	35,6	37,2	38	39,6	40,2	40,8
31	26,4	27,5	28,2	29,2	30,2	31,4	32,4	33,8	35,4	36,9	37,7	39,3	40	40,6
32	27,8	28,9	29,6	30,6	31,6	32,8	33,8	35,2	36,8	38,3	39,1	40,7	41,4	42
33	28,7	29,8	30,5	31,5	32,5	33,7	34,7	36,1	37,6	39,2	40	41,6	42,2	42,8
34	30,4	31,5	32,2	33,2	34,2	35,4	36,4	37,8	39,4	40,9	41,7	43,3	44	44,6
35	30,6	31,8	32,5	33,5	34,5	35,7	36,7	38,1	39,6	41,1	41,9	43,6	44,2	44,8
36	30,9	32	32,7	33,7	34,7	35,9	36,9	38,3	39,8	41,4	42,2	43,8	44,4	45
37	35,4	36,5	37,2	38,2	39,2	40,4	41,4	42,8	44,4	45,9	46,7	48,3	49	49,6
38	30,3	31,4	32,1	33,1	34,1	35,3	36,3	37,7	39,2	40,8	41,6	43,2	43,8	44,4
39	33,9	35	35,7	36,7	37,7	38,9	39,9	41,3	42,8	44,4	45,2	46,8	47,4	48
40	44,7	45,8	46,6	47,6	48,6	49,8	50,8	52,2	53,7	55,2	56	57,6	58,3	58,9

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
0	35	8,28	10,6	10,3	11,5	12,4	15	16	19,2	20,6	14	17,9	18,9	17,7
1	31,5	14,2	14,8	14,5	15,9	16,8	18,5	18,7	19	23,5	18,4	22	32,8	31,6
2	30,7	14,4	14,9	14,6	16	16,9	18,6	18,9	19,1	23,6	18,5	22,1	33	31,7
3	27,2	14,5	15	14,7	16,1	17	18,7	19	19,2	23,7	18,6	22,2	33	31,8
4	24,9	18,5	19	18,7	20,1	21	22,7	23	23,2	27,7	22,6	26,2	37	35,8
5	23,8	19,8	20,3	20	21,4	22,3	24	24,3	24,5	29	23,9	27,5	38,4	37,1
6	21,6	20,1	20,6	20,3	21,7	22,6	24,3	24,6	24,8	29,3	24,2	27,8	38,6	37,4
7	20,4	21,3	21,8	21,5	22,9	23,8	25,5	25,8	26	30,5	25,4	29	39,8	38,6
8	21,2	22,6	23,1	22,8	24,2	25,1	26,8	27,1	27,3	31,8	26,7	30,3	41,2	39,9
9	18,8	22,8	23,3	23	24,4	25,3	27	27,3	27,5	32	26,9	30,5	41,4	40,1
10	18,6	25	25,5	25,2	26,6	27,5	29,2	29,4	29,7	34,2	29,1	32,7	43,5	42,3
11	17,4	26,2	26,7	26,4	27,8	28,7	30,4	30,6	30,9	35,4	30,3	33,9	44,7	43,5
12	16,2	25,5	26	25,7	27,1	28	29,7	30	30,2	34,7	29,6	33,2	44	42,8
13	15,8	25,8	26,4	26,1	27,5	28,4	30,1	30,3	30,6	35,1	30	33,6	44,4	43,2
14	15,5	26,2	26,7	26,4	27,8	28,7	30,4	30,6	30,9	35,4	30,3	33,9	44,7	43,5
15	14,4	27,3	27,8	27,5	28,9	29,8	31,5	31,8	32	36,5	31,4	35	45,8	44,6
16	13,6	28	28,5	28,2	29,6	30,5	32,2	32,5	32,7	37,2	32,1	35,7	46,6	45,3
17	12,6	29	29,5	29,2	30,6	31,5	33,2	33,5	33,7	38,2	33,1	36,7	47,6	46,3
18	11,6	30	30,5	30,2	31,6	32,5	34,2	34,5	34,7	39,2	34,1	37,7	48,6	47,3
19	10,4	31,2	31,7	31,4	32,8	33,7	35,4	35,7	35,9	40,4	35,3	38,9	49,8	48,5
20	9,44	32,2	32,7	32,4	33,8	34,7	36,4	36,7	36,9	41,4	36,3	39,9	50,8	49,5
21	8,04	33,6	34,1	33,8	35,2	36,1	37,8	38,1	38,3	42,8	37,7	41,3	52,2	50,9
22	6,52	35,1	35,6	35,4	36,8	37,6	39,4	39,6	39,8	44,4	39,2	42,8	53,7	52,4
23	5	36,6	37,2	36,9	38,3	39,2	40,9	41,1	41,4	45,9	40,8	44,4	55,2	54
24	4,2	37,4	38	37,7	39,1	40	41,7	41,9	42,2	46,7	41,6	45,2	56	54,8
25	2,56	39,1	39,6	39,3	40,7	41,6	43,3	43,6	43,8	48,3	43,2	46,8	57,6	56,4
26	1,92	39,7	40,2	40	41,4	42,2	44	44,2	44,4	49	43,8	47,4	58,3	57
27	1,32	40,3	40,8	40,6	42	42,8	44,6	44,8	45	49,6	44,4	48	58,9	57,6
28	0	41,6	42,2	41,9	43,3	44,2	45,9	46,1	46,4	50,9	45,8	49,4	60,2	59
29	41,6	0	3,12	2,84	4,04	4,96	5,12	5,2	11,7	9,88	6,52	10,5	22,2	21
30	42,2	3,12	0	1,16	0,96	1,88	3,56	5,44	8,64	10,1	3,44	7,4	24,6	23,3
31	41,9	2,84	1,16	0	1,2	2,12	4,72	5,68	8,88	10,4	3,68	7,64	24,3	23
32	43,3	4,04	0,96	1,2	0	0,92	2,6	4,48	7,68	9,16	2,48	6,44	25,5	24,2
33	44,2	4,96	1,88	2,12	0,92	0	1,68	1,88	8,6	6,56	3,4	7,36	26,4	25,2
34	45,9	5,12	3,56	4,72	2,6	1,68	0	1	8,56	5,68	3,36	7,32	26,6	25,3
35	46,1	5,2	5,44	5,68	4,48	1,88	1	0	7,56	4,68	2,36	6,32	26,6	25,4
36	46,4	11,7	8,64	8,88	7,68	8,6	8,56	7,56	0	2,68	5,2	1,6	33,2	31,9
37	50,9	9,88	10,1	10,4	9,16	6,56	5,68	4,68	2,68	0	4,28	4,8	31,3	30,1
38	45,8	6,52	3,44	3,68	2,48	3,4	3,36	2,36	5,2	4,28	0	3,96	28	26,7
39	49,4	10,5	7,4	7,64	6,44	7,36	7,32	6,32	1,6	4,8	3,96	0	31,9	30,7
40	60,2	22,2	24,6	24,3	25,5	26,4	26,6	26,6	33,2	31,3	28	31,9	0	3,68

	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
0	16,1	16	14,1	28,4	29,2	32	33,4	33,5	34,6	35,6	36,7	37,7	37,7	37,4
1	30	29,8	28	30,8	31,6	34,4	35,7	35,8	36,9	37,9	39	40	40	39,7
2	30,1	30	28,1	30,9	31,7	34,5	35,9	36	37	38	39,2	40,2	40,2	39,8
3	30,2	30,1	28,2	31	31,8	34,6	36	36,1	37,1	38,1	39,2	40,2	40,2	39,9
4	34,2	34,1	32,2	35	35,8	38,6	40	40,1	41,1	42,1	43,2	44,2	44,2	43,9
5	35,5	35,4	33,5	36,3	37,1	39,9	41,3	41,4	42,4	43,4	44,6	45,6	45,6	45,2
6	35,8	35,7	33,8	36,6	37,4	40,2	41,6	41,7	42,7	43,7	44,8	45,8	45,8	45,5
7	37	36,9	35	37,8	38,6	41,4	42,8	42,9	43,9	44,9	46	47	47	46,7
8	38,3	38,2	36,3	39,1	39,9	42,7	44,1	44,2	45,2	46,2	47,4	48,4	48,4	48
9	38,5	38,4	36,5	39,3	40,1	42,9	44,3	44,4	45,4	46,4	47,6	48,6	48,6	48,2
10	40,7	40,6	38,7	41,5	42,3	45,1	46,4	46,6	47,6	48,6	49,7	50,7	50,7	50,4
11	41,9	41,8	39,9	42,7	43,5	46,3	47,6	47,8	48,8	49,8	50,9	51,9	51,9	51,6
12	41,2	41,1	39,2	42	42,8	45,6	47	47,1	48,1	49,1	50,2	51,2	51,2	50,9
13	41,6	41,4	39,6	42,4	43,2	46	47,3	47,4	48,5	49,5	50,6	51,6	51,6	51,3
14	41,9	41,8	39,9	42,7	43,5	46,3	47,6	47,8	48,8	49,8	50,9	51,9	51,9	51,6
15	43	42,9	41	43,8	44,6	47,4	48,8	48,9	49,9	50,9	52	53	53	52,7
16	43,7	43,6	41,7	44,5	45,3	48,1	49,5	49,6	50,6	51,6	52,8	53,8	53,8	53,4
17	44,7	44,6	42,7	45,5	46,3	49,1	50,5	50,6	51,6	52,6	53,8	54,8	54,8	54,4
18	45,7	45,6	43,7	46,5	47,3	50,1	51,5	51,6	52,6	53,6	54,8	55,8	55,8	55,4
19	46,9	46,8	44,9	47,7	48,5	51,3	52,7	52,8	53,8	54,8	56	57	57	56,6
20	47,9	47,8	45,9	48,7	49,5	52,3	53,7	53,8	54,8	55,8	57	58	58	57,6
21	49,3	49,2	47,3	50,1	50,9	53,7	55,1	55,2	56,2	57,2	58,4	59,4	59,4	59
22	50,8	50,7	48,8	51,6	52,4	55,2	56,6	56,7	57,8	58,8	59,9	60,9	60,9	60,6
23	52,4	52,2	50,4	53,2	54	56,8	58,1	58,2	59,3	60,3	61,4	62,4	62,4	62,1
24	53,2	53	51,2	54	54,8	57,6	58,9	59	60,1	61,1	62,2	63,2	63,2	62,9
25	54,8	54,7	52,8	55,6	56,4	59,2	60,6	60,7	61,7	62,7	63,8	64,8	64,8	64,5
26	55,4	55,3	53,4	56,2	57	59,8	61,2	61,3	62,4	63,4	64,5	65,5	65,5	65,2
27	56	55,9	54	56,8	57,6	60,4	61,8	61,9	63	64	65,1	66,1	66,1	65,8
28	57,4	57,2	55,4	58,2	59	61,8	63,1	63,2	64,3	65,3	66,4	67,4	67,4	67,1
29	19,4	19,3	17,4	21	21,8	24,6	26	26,1	27,2	28,2	29,3	30,3	30,3	30
30	21,7	21,6	19,7	19,4	20,2	23	24,3	24,4	25,5	26,5	27,6	28,6	28,6	28,3
31	21,4	21,3	19,4	18,2	19	21,8	23,2	23,3	24,3	25,3	26,4	27,4	27,4	27,1
32	22,6	22,5	20,6	18,6	19,4	22,2	23,6	23,7	24,7	25,7	26,8	27,8	27,8	27,5
33	23,6	23,4	21,6	19,5	20,3	23,1	24,5	24,6	25,6	26,6	27,8	28,8	28,8	28,4
34	23,7	23,6	21,7	21,2	22	24,8	26,2	26,3	27,3	28,3	29,4	30,4	30,4	30,1
35	23,8	23,7	21,8	23,1	23,9	26,7	28	28,2	29,2	30,2	31,3	32,3	32,3	32
36	30,3	30,2	28,3	13,3	14,1	16,9	18,3	18,4	19,4	20,4	21,6	22,6	22,6	22,2
37	28,5	28,4	26,5	16	16,8	19,6	21	21,1	22,1	23,1	24,2	25,2	25,2	24,9
38	25,1	25	23,1	16	16,8	19,6	20,9	21	22,1	23,1	24,2	25,2	25,2	24,9
39	29,1	29	27,1	14,9	15,7	18,5	19,9	20	21	22	23,2	24,2	24,2	23,8
40	2,84	3,72	4,84	46,8	47,6	50,4	51,8	51,9	53	54	55,1	56,1	56,1	55,8

	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0	32,7	33,1	33,4	33,8	34,2	34,5	34,8	8,52	8,4	7,08	6,96	8,44	8	7,36
1	35	35,4	35,6	36	36,5	36,8	37,1	1,36	0,84	1,84	1,56	1,16	0,44	1,12
2	35,1	35,5	35,8	36,2	36,7	37	37,3	1,6	1,08	2,08	1,8	1,4	0,68	0,76
3	35,2	35,6	35,9	36,3	36,8	37	37,4	4,48	3,96	4,08	3,8	4	3,88	3,92
4	39,2	39,6	39,9	40,3	40,8	41	41,4	8,48	7,96	8,08	7,8	8	7,88	7,92
5	40,5	40,9	41,2	41,6	42,1	42,4	42,7	9,8	9,28	9,4	9,12	9,32	9,2	9,24
6	40,8	41,2	41,5	41,9	42,4	42,6	43	10,1	9,56	9,68	9,4	9,6	9,48	9,52
7	42	42,4	42,7	43,1	43,6	43,8	44,2	11,3	10,8	10,9	10,6	10,8	10,7	10,7
8	43,3	43,7	44	44,4	44,9	45,2	45,5	12,6	12,1	12,2	11,9	12,1	12	12
9	43,5	43,9	44,2	44,6	45,1	45,4	45,7	12,8	12,3	12,4	12,1	12,3	12,2	12,2
10	45,7	46,1	46,4	46,8	47,2	47,5	47,8	15	14,4	14,6	14,3	14,5	14,4	14,4
11	46,9	47,3	47,6	48	48,4	48,7	49	16,2	15,6	15,8	15,5	15,7	15,6	15,6
12	46,2	46,6	46,9	47,3	47,8	48	48,4	15,5	15	15,1	14,8	15	14,9	14,9
13	46,6	47	47,2	47,6	48,1	48,4	48,7	15,8	15,3	15,4	15,2	15,4	15,2	15,3
14	46,9	47,3	47,6	48	48,4	48,7	49	16,2	15,6	15,8	15,5	15,7	15,6	15,6
15	48	48,4	48,7	49,1	49,6	49,8	50,2	17,3	16,8	16,9	16,6	16,8	16,7	16,7
16	48,7	49,1	49,4	49,8	50,3	50,6	50,9	18	17,5	17,6	17,3	17,5	17,4	17,4
17	49,7	50,1	50,4	50,8	51,3	51,6	51,9	19	18,5	18,6	18,3	18,5	18,4	18,4
18	50,7	51,1	51,4	51,8	52,3	52,6	52,9	20	19,5	19,6	19,3	19,5	19,4	19,4
19	51,9	52,3	52,6	53	53,5	53,8	54,1	21,2	20,7	20,8	20,5	20,7	20,6	20,6
20	52,9	53,3	53,6	54	54,5	54,8	55,1	22,2	21,7	21,8	21,5	21,7	21,6	21,6
21	54,3	54,7	55	55,4	55,9	56,2	56,5	23,6	23,1	23,2	22,9	23,1	23	23
22	55,8	56,2	56,5	56,9	57,4	57,7	58	25,1	24,6	24,7	24,4	24,6	24,5	24,6
23	57,4	57,8	58	58,4	58,9	59,2	59,5	26,6	26,1	26,2	26	26,2	26	26,1
24	58,2	58,6	58,8	59,2	59,7	60	60,3	27,4	26,9	27	26,8	27	26,8	26,9
25	59,8	60,2	60,5	60,9	61,4	61,6	62	29,1	28,6	28,7	28,4	28,6	28,5	28,5
26	60,4	60,8	61,1	61,5	62	62,3	62,6	29,7	29,2	29,3	29	29,2	29,1	29,2
27	61	61,4	61,7	62,1	62,6	62,9	63,2	30,3	29,8	29,9	29,6	29,8	29,7	29,8
28	62,4	62,8	63	63,4	63,9	64,2	64,5	31,6	31,1	31,2	31	31,2	31	31,1
29	25,2	25,6	25,9	26,3	26,8	27,1	27,4	12,6	13,2	12,2	12,6	13	13,6	14,2
30	23,6	24	24,3	24,7	25,2	25,4	25,8	14,7	15,3	14,2	14,6	15	15,6	16,3
31	22,4	22,8	23,1	23,5	24	24,3	24,6	14,6	15,2	14,1	14,5	14,9	15,5	16,2
32	22,8	23,2	23,5	23,9	24,4	24,7	25	15,8	16,4	15,3	15,7	16,1	16,7	17,4
33	23,8	24,2	24,4	24,8	25,3	25,6	25,9	16,7	17,3	16,2	16,6	17	17,6	18,3
34	25,4	25,8	26,1	26,5	27	27,3	27,6	19,3	19,9	18,8	19,2	19,6	20,2	20,9
35	27,3	27,7	28	28,4	28,9	29,2	29,5	20,2	20,8	19,8	20,2	20,6	21,2	21,8
36	17,6	18	18,2	18,6	19,1	19,4	19,7	23,4	24	23	23,4	23,8	24,4	25
37	20,2	20,6	20,9	21,3	21,8	22,1	22,4	24,9	25,5	24,4	24,8	25,2	25,8	26,5
38	20,2	20,6	20,9	21,3	21,8	22	22,4	18,2	18,8	17,8	18,2	18,6	19,2	19,8
39	19,2	19,6	19,8	20,2	20,7	21	21,3	22,2	22,8	21,7	22,1	22,5	23,1	23,8
40	51,1	51,5	51,8	52,2	52,6	52,9	53,2	31	31,6	30,6	31	31,4	32	32,6

	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
0	8,32	9,08	10,8	9,92	10,4	11,4	11,7	23,8	22,3	22,7	23,2	23,7	23,6	24,2
1	2,52	2,64	4,36	3,48	4	5	5,28	20,2	18,8	19,1	19,6	20,1	20	20,6
2	1,44	1,56	3,28	2,4	2,92	3,92	4,2	19,4	18	18,3	18,8	19,3	19,2	19,8
3	3,24	2,48	2,12	2,56	3,08	4,08	4,36	15,8	14,3	14,7	15,2	15,7	15,6	16,2
4	5,4	4,64	3,2	3,8	3,28	2,28	2	13,5	12	12,4	12,9	13,4	13,3	13,9
5	6,72	5,96	4,52	5,12	4,6	3,6	3,32	12,6	11,1	11,4	12	12,4	12,4	13
6	8,12	7,36	4,76	5,8	6,6	5,6	5,32	10,3	8,84	9,2	9,72	10,2	10,1	10,7
7	9,72	8,96	6,36	7,4	7,8	6,8	6,52	9,12	7,64	8	8,52	9	8,92	9,52
8	11	10,3	7,68	8,72	6,8	5,8	5,52	9,92	8,44	8,8	9,32	9,8	9,72	10,3
9	11,2	10,5	7,88	8,92	9,32	8,32	8,04	7,56	6,08	6,44	6,96	7,44	7,36	7,96
10	13,4	12,6	10	11,1	11,5	10,5	10,2	7,24	5,76	6,12	6,64	7,12	7,04	7,64
11	14,6	13,8	11,2	12,3	12,7	11,7	11,4	6,04	4,56	4,92	5,44	5,92	5,84	6,44
12	13,9	13,2	10,6	11,6	12	11	10,7	4,84	3,36	3,72	4,24	4,72	4,64	5,24
13	14,3	13,5	10,9	12	12,4	11,4	11,1	4,56	3,08	3,44	3,96	4,44	4,36	4,96
14	14,6	13,8	11,2	12,3	12,7	11,7	11,4	4,24	2,76	3,12	3,64	4,12	4,04	4,64
15	15,7	15	12,4	13,4	13,8	12,8	12,5	4,96	3,48	3,84	4,36	4,84	4,76	3,48
16	16,4	15,7	13,1	14,1	14,5	13,5	13,2	5,68	4,2	4,56	5,08	5,56	5,48	2,8
17	17,4	16,7	14,1	15,1	15,5	14,5	14,2	6,68	5,2	5,56	6,08	6,56	6,48	1,84
18	18,4	17,7	15,1	16,1	16,5	15,5	15,2	7,68	6,2	6,56	7,08	7,56	7,48	2,84
19	19,6	18,9	16,3	17,3	17,7	16,7	16,4	5,88	4,68	4,32	4,92	5,12	4,52	3,6
20	20,6	19,9	17,3	18,3	18,7	17,7	17,4	6,88	5,68	5,32	5,92	6,12	5,52	4,6
21	22	21,3	18,7	19,7	20,1	19,1	18,8	8,28	7,08	6,72	7,32	7,52	6,92	6
22	23,6	22,8	20,2	21,2	21,6	20,6	20,4	9,8	8,6	8,24	8,84	9,04	8,44	7,52
23	25,1	24,3	21,7	22,8	23,2	22,2	21,9	11,3	10,1	9,76	10,4	10,6	9,96	9,04
24	25,9	25,1	22,5	23,6	24	23	22,7	12,1	10,9	10,6	11,2	11,4	10,8	9,84
25	27,5	26,8	24,2	25,2	25,6	24,6	24,3	13,8	12,6	12,2	12,8	13	12,4	11,5
26	28,2	27,4	24,8	25,8	26,2	25,2	25	14,4	13,2	12,8	13,4	13,6	13	12,1
27	28,8	28	25,4	26,4	26,8	25,8	25,6	15	13,8	13,4	14	14,2	13,6	12,7
28	30,1	29,3	26,7	27,8	28,2	27,2	26,9	16,3	15,1	14,8	15,4	15,6	15	14
29	17,7	17	16,6	17	17,6	18,6	18,8	29	28,9	29,3	29,8	30,3	30,2	30
30	19,8	19	18,6	19,1	19,6	20,6	20,9	31	31	31,3	31,8	32,3	32,2	32
31	19,6	18,9	18,5	19	19,5	20,5	20,8	30,9	30,8	31,2	31,7	32,2	32,1	31,9
32	20,8	20,1	19,7	20,2	20,7	21,7	22	32,1	32	32,4	32,9	33,4	33,3	33,1
33	21,8	21	20,6	21,1	21,6	22,6	22,9	33	33	33,3	33,8	34,3	34,2	34
34	24,4	23,6	23,2	23,7	24,2	25,2	25,5	35,6	35,6	35,9	36,4	36,9	36,8	36,6
35	25,3	24,6	24,2	24,6	25,2	26,2	26,4	36,6	36,5	36,9	37,4	37,9	37,8	37,6
36	28,5	27,8	27,4	27,8	28,4	29,4	29,6	39,8	39,7	40,1	40,6	41,1	41	40,8
37	30	29,2	28,9	29,3	29,8	30,8	31,1	41,3	41,2	41,6	42,1	42,6	42,5	42,3
38	23,3	22,6	22,2	22,6	23,2	24,2	24,4	34,6	34,5	34,9	35,4	35,9	35,8	35,6
39	27,3	26,5	26,2	26,6	27,1	28,1	28,4	38,6	38,5	38,8	39,4	39,8	39,8	39,6
40	36,1	35,4	35	35,4	36	37	37,2	47,4	47,3	47,7	48,2	48,7	48,6	48,4

	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
0	23,7	24	23,9	24,4	24,9	27	26,8	26,4	27	26	26,2	25,1	27,4	28,4
1	20,1	20,4	20,3	20,9	21,3	23,5	23,3	22,8	23,4	22,4	22,6	21,5	23,8	24,8
2	19,3	19,6	19,5	20,1	20,5	22,7	22,5	22	22,6	21,6	21,8	20,7	23	24
3	15,7	16	15,9	16,4	16,9	19	18,8	18,4	19	18	18,2	17,1	19,4	20,4
4	13,4	13,6	13,6	14,1	14,6	16,7	16,5	16,1	16,7	15,6	15,9	14,8	17,1	18
5	12,4	12,7	12,6	13,2	13,6	15,8	15,6	15,2	15,8	14,7	15	13,8	16,2	17,1
6	10,2	10,5	10,4	11	11,4	13,6	13,4	12,9	13,5	12,5	12,7	11,6	13,9	14,9
7	9	9,28	9,2	9,76	10,2	12,4	12,2	11,7	12,3	11,3	11,5	10,4	12,7	13,7
8	9,8	10,1	10	10,6	11	13,2	13	12,5	13,1	12,1	12,3	11,2	13,5	14,5
9	7,44	7,72	7,64	8,2	8,64	10,8	10,6	10,2	10,8	9,72	9,96	8,84	11,2	12,1
10	7,12	7,4	7,32	7,88	8,32	10,5	10,3	9,84	10,4	9,4	9,64	8,52	10,8	11,8
11	5,92	6,2	6,12	6,68	7,12	9,28	9,08	8,64	9,24	8,2	8,44	7,32	9,64	10,6
12	4,72	5	4,92	5,48	5,92	8,08	7,88	7,44	8,04	7	7,24	6,12	8,44	9,4
13	4,44	4,72	4,64	5,2	5,64	7,8	7,6	7,16	7,76	6,72	6,96	5,84	8,16	9,12
14	4,12	4,4	4,32	4,88	5,32	7,48	7,28	6,84	7,44	6,4	6,64	5,52	7,84	8,8
15	2,96	3,24	3,16	3,72	4,16	6,32	6,12	5,68	6,28	5,24	5,48	4,36	6,68	7,64
16	2,28	2,56	2,48	3,04	3,48	5,64	5,44	5	5,6	4,56	4,8	3,68	6	6,96
17	1,32	1,6	1,52	2,08	2,52	4,68	4,48	4,04	4,64	3,6	3,84	2,72	5,04	6
18	2,32	2,6	2,28	1,72	1,52	3,68	3,48	3,04	3,64	2,6	2,84	1,72	4,04	5
19	3,4	3,16	2,68	2,12	1,84	4,04	3,84	3,4	4	2,96	3,2	2,08	2,84	3,8
20	4,4	4,16	3,68	3,12	2,84	5,04	4,84	4,4	5	3,96	4,2	3,08	2,36	3,32
21	5,8	5,56	5,08	4,52	4,24	6,44	6,24	5,8	6,4	5,36	5,6	4,48	3,76	4,72
22	7,32	7,08	6,6	6,04	5,76	7,96	7,76	7,32	7,92	6,88	7,12	6	5,28	6,24
23	8,84	8,6	8,12	7,56	7,28	9,48	9,28	8,84	9,44	8,4	8,64	7,52	6,8	7,76
24	9,64	9,4	8,92	8,36	8,08	10,3	10,1	9,64	10,2	9,2	9,44	8,32	7,6	8,56
25	11,3	11	10,6	10	9,72	11,9	11,7	11,3	11,9	10,8	11,1	9,96	9,24	10,2
26	11,9	11,7	11,2	10,6	10,4	12,6	12,4	11,9	12,5	11,5	11,7	10,6	9,88	10,8
27	12,5	12,3	11,8	11,2	11	13,2	13	12,5	13,1	12,1	12,3	11,2	10,5	11,4
28	13,8	13,6	13,1	12,6	12,3	14,5	14,3	13,8	14,4	13,4	13,6	12,5	11,8	12,8
29	30,5	30,6	30,9	31,5	31,8	33,8	34	34,5	35,1	34,9	33,7	32	34,3	35,3
30	32,6	32,6	33	33,5	33,8	35,9	36,1	36,5	37,1	37	35,7	34	36,4	37,3
31	32,4	32,5	32,8	33,4	33,7	35,8	36	36,4	37	36,8	35,6	33,9	36,2	37,2
32	33,6	33,7	34	34,6	34,9	37	37,2	37,6	38,2	38	36,8	35,1	37,4	38,4
33	34,6	34,6	35	35,5	35,8	37,9	38,1	38,5	39,1	39	37,7	36,6	38,9	39,9
34	37,2	37,2	37,6	38,1	38,4	40,5	40,7	41,1	41,7	41,6	40,3	39,2	41,5	42,5
35	38,1	38,2	38,5	39,1	39,4	41,4	41,6	42,1	42,7	42,5	41,3	40,2	42,5	43,4
36	41,3	41,4	41,7	42,3	42,6	44,6	44,8	45,3	45,9	45,7	44,5	43,4	45,7	46,6
37	42,8	42,8	43,2	43,8	44	46,1	46,3	46,8	47,4	47,2	46	44,8	47,2	48,1
38	36,1	36,2	36,5	37,1	37,4	39,4	39,6	40,1	40,7	40,5	39,3	38,2	40,5	41,4
39	40,1	40,1	40,5	41	41,3	43,4	43,6	44	44,6	44,5	43,2	42,1	44,4	45,4
40	48,9	49	49,3	49,9	50,2	52,2	52,4	52,9	53,5	53,3	52,1	51	53,3	54,2

	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
0	29,4	25,7	34,9	5,4	4,72	4,6	6,6	5,64	5,84	6	6,64	6,24	7,16
1	25,9	22,2	31,3	3,52	3,6	2,68	0,6	2,8	0,8	2,52	1,52	1,12	1,92
2	25,1	21,4	30,5	4,6	4,68	3,76	1,28	3,88	1,88	2,6	1,6	1,2	1,6
3	21,4	17,7	26,9	7,6	7,88	7,04	4,92	7	5,92	5,96	4,92	4,52	5,32
4	19,1	15,4	24,6	11,7	12	11,1	9	11,1	10	10	9	8,6	9,4
5	18,2	14,5	23,6	14	14,3	13,4	11,3	13,4	12,3	12,4	11,3	10,9	11,7
6	16	12,2	21,4	13,2	13,5	12,6	10,5	12,6	11,5	11,6	10,5	10,1	10,9
7	14,8	11	20,2	14,4	14,7	13,8	11,7	13,8	12,7	12,8	11,7	11,3	12,1
8	15,6	11,8	21	15,7	16	15,2	13	15,1	14	14,1	13	12,6	13,4
9	13,2	9,48	18,6	15,9	16,2	15,4	13,2	15,3	14,2	14,3	13,2	12,8	13,6
10	12,9	9,16	18,3	18,1	18,4	17,5	15,4	17,5	16,4	16,4	15,4	15	15,8
11	11,7	7,96	17,1	19,3	19,6	18,7	16,6	18,7	17,6	17,6	16,6	16,2	17
12	10,5	6,76	15,9	18,6	18,9	18	15,9	18	16,9	17	15,9	15,5	16,3
13	10,2	6,48	15,6	19	19,2	18,4	16,3	18,4	17,3	17,3	16,3	15,9	16,7
14	9,88	6,16	15,3	19,3	19,6	18,7	16,6	18,7	17,6	17,6	16,6	16,2	17
15	8,72	7	14,2	20,4	20,7	19,8	17,7	19,8	18,7	18,8	17,7	17,3	18,1
16	8,04	7,68	13,5	21,1	21,4	20,6	18,4	20,5	19,4	19,5	18,4	18	18,8
17	7,08	8,68	12,5	22,1	22,4	21,6	19,4	21,5	20,4	20,5	19,4	19	19,8
18	6,08	9,68	11,5	23,1	23,4	22,6	20,4	22,5	21,4	21,5	20,4	20	20,8
19	4,88	10,9	10,3	24,3	24,6	23,8	21,6	23,7	22,6	22,7	21,6	21,2	22
20	4,4	11,9	9,84	25,3	25,6	24,8	22,6	24,7	23,6	23,7	22,6	22,2	23
21	5,8	13,3	11,2	26,7	27	26,2	24	26,1	25	25,1	24	23,6	24,4
22	7,32	14,8	12,8	28,2	28,5	27,7	25,6	27,6	26,6	26,6	25,6	25,2	26
23	8,84	16,3	14,3	29,8	30	29,2	27,1	29,2	28,1	28,1	27,1	26,7	27,5
24	9,64	17,1	15,1	30,6	30,8	30	27,9	30	28,9	28,9	27,9	27,5	28,3
25	11,3	18,8	16,7	32,2	32,5	31,6	29,5	31,6	30,5	30,6	29,5	29,1	29,9
26	11,9	19,4	17,4	32,8	33,1	32,3	30,2	32,2	31,2	31,2	30,2	29,8	30,6
27	12,5	20	18	33,4	33,7	32,9	30,8	32,8	31,8	31,8	30,8	30,4	31,2
28	13,8	21,3	19,3	34,8	35	34,2	32,1	34,2	33,1	33,1	32,1	31,7	32,5
29	36,4	32,6	41,8	10,2	10,4	11	12,6	9,56	11,6	14,3	13,4	13	13,8
30	38,4	34,7	43,8	12,2	12,5	13	14,6	11,6	13,6	16,3	15,4	15	15,8
31	38,3	34,6	43,7	12,1	12,4	12,9	14,5	11,5	13,5	16,2	15,3	14,9	15,7
32	39,5	35,8	44,9	13,3	13,6	14,1	15,7	12,7	14,7	17,4	16,5	16,1	16,9
33	41	37,2	46,4	14,8	15	15,6	17,2	14,2	16,2	18,9	18	17,6	18,4
34	43,6	39,8	49	17,4	17,6	18,2	19,8	16,8	18,8	21,5	20,6	20,2	21
35	44,5	40,8	50	18,3	18,6	19,1	20,7	17,7	19,7	22,4	21,5	21,1	21,9
36	47,7	44	53,2	21,5	21,8	22,3	23,9	20,9	22,9	25,6	24,7	24,3	25,1
37	49,2	45,5	54,6	23	23,3	23,8	25,4	22,4	24,4	27,1	26,2	25,8	26,6
38	42,5	38,8	48	16,3	16,6	17,1	18,7	15,7	17,7	20,4	19,5	19,1	19,9
39	46,5	42,8	51,9	20,3	20,6	21,1	22,7	19,7	21,7	24,4	23,5	23,1	23,9
40	55,3	51,6	60,8	27,4	27,6	28,2	29,8	26,8	28,8	31,5	30,6	30,2	31

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
41	17,7	31,6	31,7	31,8	35,8	37,1	37,4	38,6	39,9	40,1	42,3	43,5	42,8	43,2
42	16,1	30	30,1	30,2	34,2	35,5	35,8	37	38,3	38,5	40,7	41,9	41,2	41,6
43	16	29,8	30	30,1	34,1	35,4	35,7	36,9	38,2	38,4	40,6	41,8	41,1	41,4
44	14,1	28	28,1	28,2	32,2	33,5	33,8	35	36,3	36,5	38,7	39,9	39,2	39,6
45	28,4	30,8	30,9	31	35	36,3	36,6	37,8	39,1	39,3	41,5	42,7	42	42,4
46	29,2	31,6	31,7	31,8	35,8	37,1	37,4	38,6	39,9	40,1	42,3	43,5	42,8	43,2
47	32	34,4	34,5	34,6	38,6	39,9	40,2	41,4	42,7	42,9	45,1	46,3	45,6	46
48	33,4	35,7	35,9	36	40	41,3	41,6	42,8	44,1	44,3	46,4	47,6	47	47,3
49	33,5	35,8	36	36,1	40,1	41,4	41,7	42,9	44,2	44,4	46,6	47,8	47,1	47,4
50	34,6	36,9	37	37,1	41,1	42,4	42,7	43,9	45,2	45,4	47,6	48,8	48,1	48,5
51	35,6	37,9	38	38,1	42,1	43,4	43,7	44,9	46,2	46,4	48,6	49,8	49,1	49,5
52	36,7	39	39,2	39,2	43,2	44,6	44,8	46	47,4	47,6	49,7	50,9	50,2	50,6
53	37,7	40	40,2	40,2	44,2	45,6	45,8	47	48,4	48,6	50,7	51,9	51,2	51,6
54	37,7	40	40,2	40,2	44,2	45,6	45,8	47	48,4	48,6	50,7	51,9	51,2	51,6
55	37,4	39,7	39,8	39,9	43,9	45,2	45,5	46,7	48	48,2	50,4	51,6	50,9	51,3
56	32,7	35	35,1	35,2	39,2	40,5	40,8	42	43,3	43,5	45,7	46,9	46,2	46,6
57	33,1	35,4	35,5	35,6	39,6	40,9	41,2	42,4	43,7	43,9	46,1	47,3	46,6	47
58	33,4	35,6	35,8	35,9	39,9	41,2	41,5	42,7	44	44,2	46,4	47,6	46,9	47,2
59	33,8	36	36,2	36,3	40,3	41,6	41,9	43,1	44,4	44,6	46,8	48	47,3	47,6
60	34,2	36,5	36,7	36,8	40,8	42,1	42,4	43,6	44,9	45,1	47,2	48,4	47,8	48,1
61	34,5	36,8	37	37	41	42,4	42,6	43,8	45,2	45,4	47,5	48,7	48	48,4
62	34,8	37,1	37,3	37,4	41,4	42,7	43	44,2	45,5	45,7	47,8	49	48,4	48,7
63	8,52	1,36	1,6	4,48	8,48	9,8	10,1	11,3	12,6	12,8	15	16,2	15,5	15,8
64	8,4	0,84	1,08	3,96	7,96	9,28	9,56	10,8	12,1	12,3	14,4	15,6	15	15,3
65	7,08	1,84	2,08	4,08	8,08	9,4	9,68	10,9	12,2	12,4	14,6	15,8	15,1	15,4
66	6,96	1,56	1,8	3,8	7,8	9,12	9,4	10,6	11,9	12,1	14,3	15,5	14,8	15,2
67	8,44	1,16	1,4	4	8	9,32	9,6	10,8	12,1	12,3	14,5	15,7	15	15,4
68	8	0,44	0,68	3,88	7,88	9,2	9,48	10,7	12	12,2	14,4	15,6	14,9	15,2
69	7,36	1,12	0,76	3,92	7,92	9,24	9,52	10,7	12	12,2	14,4	15,6	14,9	15,3
70	8,32	2,52	1,44	3,24	5,4	6,72	8,12	9,72	11	11,2	13,4	14,6	13,9	14,3
71	9,08	2,64	1,56	2,48	4,64	5,96	7,36	8,96	10,3	10,5	12,6	13,8	13,2	13,5
72	10,8	4,36	3,28	2,12	3,2	4,52	4,76	6,36	7,68	7,88	10	11,2	10,6	10,9
73	9,92	3,48	2,4	2,56	3,8	5,12	5,8	7,4	8,72	8,92	11,1	12,3	11,6	12
74	10,4	4	2,92	3,08	3,28	4,6	6,6	7,8	6,8	9,32	11,5	12,7	12	12,4
75	11,4	5	3,92	4,08	2,28	3,6	5,6	6,8	5,8	8,32	10,5	11,7	11	11,4
76	11,7	5,28	4,2	4,36	2	3,32	5,32	6,52	5,52	8,04	10,2	11,4	10,7	11,1
77	23,8	20,2	19,4	15,8	13,5	12,6	10,3	9,12	9,92	7,56	7,24	6,04	4,84	4,56
78	22,3	18,8	18	14,3	12	11,1	8,84	7,64	8,44	6,08	5,76	4,56	3,36	3,08
79	22,7	19,1	18,3	14,7	12,4	11,4	9,2	8	8,8	6,44	6,12	4,92	3,72	3,44
80	23,2	19,6	18,8	15,2	12,9	12	9,72	8,52	9,32	6,96	6,64	5,44	4,24	3,96
81	23,7	20,1	19,3	15,7	13,4	12,4	10,2	9	9,8	7,44	7,12	5,92	4,72	4,44

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
41	43,5	44,6	45,3	46,3	47,3	48,5	49,5	50,9	52,4	54	54,8	56,4	57	57,6
42	41,9	43	43,7	44,7	45,7	46,9	47,9	49,3	50,8	52,4	53,2	54,8	55,4	56
43	41,8	42,9	43,6	44,6	45,6	46,8	47,8	49,2	50,7	52,2	53	54,7	55,3	55,9
44	39,9	41	41,7	42,7	43,7	44,9	45,9	47,3	48,8	50,4	51,2	52,8	53,4	54
45	42,7	43,8	44,5	45,5	46,5	47,7	48,7	50,1	51,6	53,2	54	55,6	56,2	56,8
46	43,5	44,6	45,3	46,3	47,3	48,5	49,5	50,9	52,4	54	54,8	56,4	57	57,6
47	46,3	47,4	48,1	49,1	50,1	51,3	52,3	53,7	55,2	56,8	57,6	59,2	59,8	60,4
48	47,6	48,8	49,5	50,5	51,5	52,7	53,7	55,1	56,6	58,1	58,9	60,6	61,2	61,8
49	47,8	48,9	49,6	50,6	51,6	52,8	53,8	55,2	56,7	58,2	59	60,7	61,3	61,9
50	48,8	49,9	50,6	51,6	52,6	53,8	54,8	56,2	57,8	59,3	60,1	61,7	62,4	63
51	49,8	50,9	51,6	52,6	53,6	54,8	55,8	57,2	58,8	60,3	61,1	62,7	63,4	64
52	50,9	52	52,8	53,8	54,8	56	57	58,4	59,9	61,4	62,2	63,8	64,5	65,1
53	51,9	53	53,8	54,8	55,8	57	58	59,4	60,9	62,4	63,2	64,8	65,5	66,1
54	51,9	53	53,8	54,8	55,8	57	58	59,4	60,9	62,4	63,2	64,8	65,5	66,1
55	51,6	52,7	53,4	54,4	55,4	56,6	57,6	59	60,6	62,1	62,9	64,5	65,2	65,8
56	46,9	48	48,7	49,7	50,7	51,9	52,9	54,3	55,8	57,4	58,2	59,8	60,4	61
57	47,3	48,4	49,1	50,1	51,1	52,3	53,3	54,7	56,2	57,8	58,6	60,2	60,8	61,4
58	47,6	48,7	49,4	50,4	51,4	52,6	53,6	55	56,5	58	58,8	60,5	61,1	61,7
59	48	49,1	49,8	50,8	51,8	53	54	55,4	56,9	58,4	59,2	60,9	61,5	62,1
60	48,4	49,6	50,3	51,3	52,3	53,5	54,5	55,9	57,4	58,9	59,7	61,4	62	62,6
61	48,7	49,8	50,6	51,6	52,6	53,8	54,8	56,2	57,7	59,2	60	61,6	62,3	62,9
62	49	50,2	50,9	51,9	52,9	54,1	55,1	56,5	58	59,5	60,3	62	62,6	63,2
63	16,2	17,3	18	19	20	21,2	22,2	23,6	25,1	26,6	27,4	29,1	29,7	30,3
64	15,6	16,8	17,5	18,5	19,5	20,7	21,7	23,1	24,6	26,1	26,9	28,6	29,2	29,8
65	15,8	16,9	17,6	18,6	19,6	20,8	21,8	23,2	24,7	26,2	27	28,7	29,3	29,9
66	15,5	16,6	17,3	18,3	19,3	20,5	21,5	22,9	24,4	26	26,8	28,4	29	29,6
67	15,7	16,8	17,5	18,5	19,5	20,7	21,7	23,1	24,6	26,2	27	28,6	29,2	29,8
68	15,6	16,7	17,4	18,4	19,4	20,6	21,6	23	24,5	26	26,8	28,5	29,1	29,7
69	15,6	16,7	17,4	18,4	19,4	20,6	21,6	23	24,6	26,1	26,9	28,5	29,2	29,8
70	14,6	15,7	16,4	17,4	18,4	19,6	20,6	22	23,6	25,1	25,9	27,5	28,2	28,8
71	13,8	15	15,7	16,7	17,7	18,9	19,9	21,3	22,8	24,3	25,1	26,8	27,4	28
72	11,2	12,4	13,1	14,1	15,1	16,3	17,3	18,7	20,2	21,7	22,5	24,2	24,8	25,4
73	12,3	13,4	14,1	15,1	16,1	17,3	18,3	19,7	21,2	22,8	23,6	25,2	25,8	26,4
74	12,7	13,8	14,5	15,5	16,5	17,7	18,7	20,1	21,6	23,2	24	25,6	26,2	26,8
75	11,7	12,8	13,5	14,5	15,5	16,7	17,7	19,1	20,6	22,2	23	24,6	25,2	25,8
76	11,4	12,5	13,2	14,2	15,2	16,4	17,4	18,8	20,4	21,9	22,7	24,3	25	25,6
77	4,24	4,96	5,68	6,68	7,68	8,88	10,28	11,88	13,68	15,68	17,92	20,32	22,88	25,6
78	2,76	3,48	4,2	5,2	6,2	7,68	9,36	11,28	13,44	15,84	18,48	21,36	24,48	27,84
79	3,12	3,84	4,56	5,56	6,56	7,84	9,44	11,36	13,52	15,92	18,56	21,44	24,56	27,92
80	3,64	4,36	5,08	6,08	7,08	8,48	10,16	12,16	14,48	17,12	19,92	22,88	25,92	29,04
81	4,12	4,84	5,56	6,56	7,56	9,04	10,88	13,04	15,52	18,32	21,36	24,56	27,92	31,44

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
41	59	21	23,3	23	24,2	25,2	25,3	25,4	31,9	30,1	26,7	30,7	3,68	0
42	57,4	19,4	21,7	21,4	22,6	23,6	23,7	23,8	30,3	28,5	25,1	29,1	2,84	3
43	57,2	19,3	21,6	21,3	22,5	23,4	23,6	23,7	30,2	28,4	25	29	3,72	2,4
44	55,4	17,4	19,7	19,4	20,6	21,6	21,7	21,8	28,3	26,5	23,1	27,1	4,84	3,6
45	58,2	21	19,4	18,2	18,6	19,5	21,2	23,1	13,3	16	16	14,9	46,8	45,6
46	59	21,8	20,2	19	19,4	20,3	22	23,9	14,1	16,8	16,8	15,7	47,6	46,4
47	61,8	24,6	23	21,8	22,2	23,1	24,8	26,7	16,9	19,6	19,6	18,5	50,4	49,2
48	63,1	26	24,3	23,2	23,6	24,5	26,2	28	18,3	21	20,9	19,9	51,8	50,6
49	63,2	26,1	24,4	23,3	23,7	24,6	26,3	28,2	18,4	21,1	21	20	51,9	50,7
50	64,3	27,2	25,5	24,3	24,7	25,6	27,3	29,2	19,4	22,1	22,1	21	53	51,7
51	65,3	28,2	26,5	25,3	25,7	26,6	28,3	30,2	20,4	23,1	23,1	22	54	52,7
52	66,4	29,3	27,6	26,4	26,8	27,8	29,4	31,3	21,6	24,2	24,2	23,2	55,1	53,8
53	67,4	30,3	28,6	27,4	27,8	28,8	30,4	32,3	22,6	25,2	25,2	24,2	56,1	54,8
54	67,4	30,3	28,6	27,4	27,8	28,8	30,4	32,3	22,6	25,2	25,2	24,2	56,1	54,8
55	67,1	30	28,3	27,1	27,5	28,4	30,1	32	22,2	24,9	24,9	23,8	55,8	54,5
56	62,4	25,2	23,6	22,4	22,8	23,8	25,4	27,3	17,6	20,2	20,2	19,2	51,1	49,8
57	62,8	25,6	24	22,8	23,2	24,2	25,8	27,7	18	20,6	20,6	19,6	51,5	50,2
58	63	25,9	24,3	23,1	23,5	24,4	26,1	28	18,2	20,9	20,9	19,8	51,8	50,5
59	63,4	26,3	24,7	23,5	23,9	24,8	26,5	28,4	18,6	21,3	21,3	20,2	52,2	50,9
60	63,9	26,8	25,2	24	24,4	25,3	27	28,9	19,1	21,8	21,8	20,7	52,6	51,4
61	64,2	27,1	25,4	24,3	24,7	25,6	27,3	29,2	19,4	22,1	22	21	52,9	51,7
62	64,5	27,4	25,8	24,6	25	25,9	27,6	29,5	19,7	22,4	22,4	21,3	53,2	52
63	31,6	12,6	14,7	14,6	15,8	16,7	19,3	20,2	23,4	24,9	18,2	22,2	31	29,8
64	31,1	13,2	15,3	15,2	16,4	17,3	19,9	20,8	24	25,5	18,8	22,8	31,6	30,4
65	31,2	12,2	14,2	14,1	15,3	16,2	18,8	19,8	23	24,4	17,8	21,7	30,6	29,3
66	31	12,6	14,6	14,5	15,7	16,6	19,2	20,2	23,4	24,8	18,2	22,1	31	29,7
67	31,2	13	15	14,9	16,1	17	19,6	20,6	23,8	25,2	18,6	22,5	31,4	30,1
68	31	13,6	15,6	15,5	16,7	17,6	20,2	21,2	24,4	25,8	19,2	23,1	32	30,7
69	31,1	14,2	16,3	16,2	17,4	18,3	20,9	21,8	25	26,5	19,8	23,8	32,6	31,4
70	30,1	17,7	19,8	19,6	20,8	21,8	24,4	25,3	28,5	30	23,3	27,3	36,1	34,9
71	29,3	17	19	18,9	20,1	21	23,6	24,6	27,8	29,2	22,6	26,5	35,4	34,1
72	26,7	16,6	18,6	18,5	19,7	20,6	23,2	24,2	27,4	28,9	22,2	26,2	35	33,8
73	27,8	17	19,1	19	20,2	21,1	23,7	24,6	27,8	29,3	22,6	26,6	35,4	34,2
74	28,2	17,6	19,6	19,5	20,7	21,6	24,2	25,2	28,4	29,8	23,2	27,1	36	34,7
75	27,2	18,6	20,6	20,5	21,7	22,6	25,2	26,2	29,4	30,8	24,2	28,1	37	35,7
76	26,9	18,8	20,9	20,8	22	22,9	25,5	26,4	29,6	31,1	24,4	28,4	37,2	36
77	16,3	29	31	30,9	32,1	33	35,6	36,6	39,8	41,3	34,6	38,6	47,4	46,2
78	15,1	28,9	31	30,8	32	33	35,6	36,5	39,7	41,2	34,5	38,5	47,3	46,1
79	14,8	29,3	31,3	31,2	32,4	33,3	35,9	36,9	40,1	41,6	34,9	38,8	47,7	46,4
80	15,4	29,8	31,8	31,7	32,9	33,8	36,4	37,4	40,6	42,1	35,4	39,4	48,2	47
81	15,6	30,3	32,3	32,2	33,4	34,3	36,9	37,9	41,1	42,6	35,9	39,8	48,7	47,4

	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
41	3	2,4	3,6	45,6	46,4	49,2	50,6	50,7	51,7	52,7	53,8	54,8	54,8	54,5
42	0	0,88	2	44	44,8	47,6	49	49,1	50,1	51,1	52,2	53,2	53,2	52,9
43	0,88	0	1,88	43,9	44,7	47,5	48,8	49	50	51	52,1	53,1	53,1	52,8
44	2	1,88	0	42	42,8	45,6	47	47,1	48,1	49,1	50,2	51,2	51,2	50,9
45	44	43,9	42	0	0,8	3,6	4,96	5,08	6,12	7,12	8,24	9,24	9,24	8,92
46	44,8	44,7	42,8	0,8	0	2,8	4,16	4,28	5,32	6,32	7,44	8,44	8,44	8,12
47	47,6	47,5	45,6	3,6	2,8	0	1,76	1,48	2,52	3,52	4,64	5,64	5,64	5,32
48	49	48,8	47	4,96	4,16	1,76	0	3,24	1,68	2,68	3,8	4,8	4,8	4,48
49	49,1	49	47,1	5,08	4,28	1,48	3,24	0	1,8	2,56	3,68	4,68	4,68	4,36
50	50,1	50	48,1	6,12	5,32	2,52	1,68	1,8	0	1	2,12	3,12	3,12	2,8
51	51,1	51	49,1	7,12	6,32	3,52	2,68	2,56	1	0	1,12	2,12	2,12	1,8
52	52,2	52,1	50,2	8,24	7,44	4,64	3,8	3,68	2,12	1,12	0	1	1	0,68
53	53,2	53,1	51,2	9,24	8,44	5,64	4,8	4,68	3,12	2,12	1	0	0,52	1,04
54	53,2	53,1	51,2	9,24	8,44	5,64	4,8	4,68	3,12	2,12	1	0,52	0	0,76
55	52,9	52,8	50,9	8,92	8,12	5,32	4,48	4,36	2,8	1,8	0,68	1,04	0,76	0
56	48,2	48,1	46,2	4,24	5,04	7,84	9,2	9,32	10,4	11,4	12,5	13,5	13,5	13,2
57	48,6	48,5	46,6	4,64	5,44	8,24	9,6	9,72	10,8	11,8	12,9	13,9	13,9	13,6
58	48,9	48,8	46,9	4,92	5,72	8,52	9,88	10	11	12	13,2	14,2	14,2	13,8
59	49,3	49,2	47,3	5,32	6,12	8,92	10,3	10,4	11,4	12,4	13,6	14,6	14,6	14,2
60	49,8	49,7	47,8	5,8	6,6	9,4	10,8	10,9	11,9	12,9	14	15	15	14,7
61	50,1	50	48,1	6,08	6,88	9,68	11	11,2	12,2	13,2	14,3	15,3	15,3	15
62	50,4	50,3	48,4	6,4	7,2	10	11,4	11,5	12,5	13,5	14,6	15,6	15,6	15,3
63	28,2	28,1	26,2	28,2	29	31,8	33,2	33,3	34,3	35,3	36,4	37,4	37,4	37,1
64	28,8	28,7	26,8	28,8	29,6	32,4	33,8	33,9	34,9	35,9	37	38	38	37,7
65	27,7	27,6	25,7	27,7	28,5	31,3	32,7	32,8	33,8	34,8	36	37	37	36,6
66	28,1	28	26,1	28,1	28,9	31,7	33,1	33,2	34,2	35,2	36,4	37,4	37,4	37
67	28,5	28,4	26,5	28,5	29,3	32,1	33,5	33,6	34,6	35,6	36,8	37,8	37,8	37,4
68	29,1	29	27,1	29,1	29,9	32,7	34,1	34,2	35,2	36,2	37,4	38,4	38,4	38
69	29,8	29,7	27,8	29,8	30,6	33,4	34,8	34,9	35,9	36,9	38	39	39	38,7
70	33,3	33,2	31,3	34,2	35	37,8	39,2	39,3	40,4	41,4	42,5	43,5	43,5	43,2
71	32,5	32,4	30,5	33,5	34,3	37,1	38,4	38,6	39,6	40,6	41,7	42,7	42,7	42,4
72	32,2	32	30,2	33,1	33,9	36,7	38,1	38,2	39,2	40,2	41,4	42,4	42,4	42
73	32,6	32,5	30,6	33,6	34,4	37,2	38,5	38,6	39,7	40,7	41,8	42,8	42,8	42,5
74	33,1	33	31,1	34,1	34,9	37,7	39	39,2	40,2	41,2	42,3	43,3	43,3	43
75	34,1	34	32,1	35,1	35,9	38,7	40	40,2	41,2	42,2	43,3	44,3	44,3	44
76	34,4	34,3	32,4	35,4	36,2	39	40,3	40,4	41,5	42,5	43,6	44,6	44,6	44,3
77	44,6	44,4	42,6	45,5	46,3	49,1	50,5	50,6	51,6	52,6	53,8	54,8	54,8	54,4
78	44,5	44,4	42,5	45,4	46,2	49	50,4	50,5	51,6	52,6	53,7	54,7	54,7	54,4
79	44,8	44,7	42,8	45,8	46,6	49,4	50,8	50,9	51,9	52,9	54	55	55	54,7
80	45,4	45,2	43,4	46,3	47,1	49,9	51,3	51,4	52,4	53,4	54,6	55,6	55,6	55,2
81	45,8	45,7	43,8	46,8	47,6	50,4	51,8	51,9	52,9	53,9	55	56	56	55,7

	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
41	49,8	50,2	50,5	50,9	51,4	51,7	52	29,8	30,4	29,3	29,7	30,1	30,7	31,4
42	48,2	48,6	48,9	49,3	49,8	50,1	50,4	28,2	28,8	27,7	28,1	28,5	29,1	29,8
43	48,1	48,5	48,8	49,2	49,7	50	50,3	28,1	28,7	27,6	28	28,4	29	29,7
44	46,2	46,6	46,9	47,3	47,8	48,1	48,4	26,2	26,8	25,7	26,1	26,5	27,1	27,8
45	4,24	4,64	4,92	5,32	5,8	6,08	6,4	28,2	28,8	27,7	28,1	28,5	29,1	29,8
46	5,04	5,44	5,72	6,12	6,6	6,88	7,2	29	29,6	28,5	28,9	29,3	29,9	30,6
47	7,84	8,24	8,52	8,92	9,4	9,68	10	31,8	32,4	31,3	31,7	32,1	32,7	33,4
48	9,2	9,6	9,88	10,3	10,8	11	11,4	33,2	33,8	32,7	33,1	33,5	34,1	34,8
49	9,32	9,72	10	10,4	10,9	11,2	11,5	33,3	33,9	32,8	33,2	33,6	34,2	34,9
50	10,4	10,8	11	11,4	11,9	12,2	12,5	34,3	34,9	33,8	34,2	34,6	35,2	35,9
51	11,4	11,8	12	12,4	12,9	13,2	13,5	35,3	35,9	34,8	35,2	35,6	36,2	36,9
52	12,5	12,9	13,2	13,6	14	14,3	14,6	36,4	37	36	36,4	36,8	37,4	38
53	13,5	13,9	14,2	14,6	15	15,3	15,6	37,4	38	37	37,4	37,8	38,4	39
54	13,5	13,9	14,2	14,6	15	15,3	15,6	37,4	38	37	37,4	37,8	38,4	39
55	13,2	13,6	13,8	14,2	14,7	15	15,3	37,1	37,7	36,6	37	37,4	38	38,7
56	0	0,4	0,68	1,08	1,56	1,72	2,04	32,4	33	32	32,4	32,8	33,4	34
57	0,4	0	0,28	0,68	1,16	1,44	1,76	32,8	33,4	32,4	32,8	33,2	33,8	34,4
58	0,68	0,28	0	0,4	0,88	1,16	1,48	33,1	33,7	32,6	33	33,4	34	34,7
59	1,08	0,68	0,4	0	0,48	0,76	1,08	33,5	34,1	33	33,4	33,8	34,4	35,1
60	1,56	1,16	0,88	0,48	0	0,28	0,6	34	34,6	33,5	33,9	34,3	34,9	35,6
61	1,72	1,44	1,16	0,76	0,28	0	0,32	34,3	34,9	33,8	34,2	34,6	35,2	35,9
62	2,04	1,76	1,48	1,08	0,6	0,32	0	34,6	35,2	34,1	34,5	34,9	35,5	36,2
63	32,4	32,8	33,1	33,5	34	34,3	34,6	0	0,6	0,48	0,76	0,8	0,92	1,6
64	33	33,4	33,7	34,1	34,6	34,9	35,2	0,6	0	1,08	0,84	0,4	0,4	1,08
65	32	32,4	32,6	33	33,5	33,8	34,1	0,48	1,08	0	0,4	0,8	1,4	2,08
66	32,4	32,8	33	33,4	33,9	34,2	34,5	0,76	0,84	0,4	0	0,4	1,12	1,8
67	32,8	33,2	33,4	33,8	34,3	34,6	34,9	0,8	0,4	0,8	0,4	0	0,72	1,4
68	33,4	33,8	34	34,4	34,9	35,2	35,5	0,92	0,4	1,4	1,12	0,72	0	0,68
69	34	34,4	34,7	35,1	35,6	35,9	36,2	1,6	1,08	2,08	1,8	1,4	0,68	0
70	38,5	38,9	39,2	39,6	40	40,3	40,6	3,08	2,56	3,56	3,28	2,88	2,16	2,2
71	37,7	38,1	38,4	38,8	39,3	39,6	39,9	3,16	2,64	3,64	3,36	2,96	2,24	2,28
72	37,4	37,8	38	38,4	38,9	39,2	39,5	4,88	4,36	5,36	5,08	4,68	3,96	4
73	37,8	38,2	38,5	38,9	39,4	39,6	40	4	3,48	4,48	4,2	3,8	3,08	3,12
74	38,3	38,7	39	39,4	39,9	40,2	40,5	4,52	4	5	4,72	4,32	3,6	3,64
75	39,3	39,7	40	40,4	40,9	41,2	41,5	5,52	5	6	5,72	5,32	4,6	4,64
76	39,6	40	40,3	40,7	41,2	41,4	41,8	5,8	5,28	6,28	6	5,6	4,88	4,92
77	49,8	50,2	50,4	50,8	51,3	51,6	51,9	17,7	17,2	18,2	17,9	17,5	16,8	16,8
78	49,7	50,1	50,4	50,8	51,2	51,5	51,8	16,2	15,7	16,7	16,4	16	15,3	15,3
79	50	50,4	50,7	51,1	51,6	51,9	52,2	16,6	16	17	16,8	16,4	15,6	15,7
80	50,6	51	51,2	51,6	52,1	52,4	52,7	17,1	16,6	17,6	17,3	16,9	16,2	16,2
81	51	51,4	51,7	52,1	52,6	52,9	53,2	17,6	17	18	17,8	17,4	16,6	16,7

	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
41	34,9	34,1	33,8	34,2	34,7	35,7	36	46,2	46,1	46,4	47	47,4	47,4	47,2
42	33,3	32,5	32,2	32,6	33,1	34,1	34,4	44,6	44,5	44,8	45,4	45,8	45,8	45,6
43	33,2	32,4	32	32,5	33	34	34,3	44,4	44,4	44,7	45,2	45,7	45,6	45,4
44	31,3	30,5	30,2	30,6	31,1	32,1	32,4	42,6	42,5	42,8	43,4	43,8	43,8	43,6
45	34,2	33,5	33,1	33,6	34,1	35,1	35,4	45,5	45,4	45,8	46,3	46,8	46,7	46,5
46	35	34,3	33,9	34,4	34,9	35,9	36,2	46,3	46,2	46,6	47,1	47,6	47,5	47,3
47	37,8	37,1	36,7	37,2	37,7	38,7	39	49,1	49	49,4	49,9	50,4	50,3	50,1
48	39,2	38,4	38,1	38,5	39	40	40,3	50,5	50,4	50,8	51,3	51,8	51,7	51,5
49	39,3	38,6	38,2	38,6	39,2	40,2	40,4	50,6	50,5	50,9	51,4	51,9	51,8	51,6
50	40,4	39,6	39,2	39,7	40,2	41,2	41,5	51,6	51,6	51,9	52,4	52,9	52,8	52,6
51	41,4	40,6	40,2	40,7	41,2	42,2	42,5	52,6	52,6	52,9	53,4	53,9	53,8	53,6
52	42,5	41,7	41,4	41,8	42,3	43,3	43,6	53,8	53,7	54	54,6	55	55	54,8
53	43,5	42,7	42,4	42,8	43,3	44,3	44,6	54,8	54,7	55	55,6	56	56	55,8
54	43,5	42,7	42,4	42,8	43,3	44,3	44,6	54,8	54,7	55	55,6	56	56	55,8
55	43,2	42,4	42	42,5	43	44	44,3	54,4	54,4	54,7	55,2	55,7	55,6	55,4
56	38,5	37,7	37,4	37,8	38,3	39,3	39,6	49,8	49,7	50	50,6	51	51	50,8
57	38,9	38,1	37,8	38,2	38,7	39,7	40	50,2	50,1	50,4	51	51,4	51,4	51,2
58	39,2	38,4	38	38,5	39	40	40,3	50,4	50,4	50,7	51,2	51,7	51,6	51,4
59	39,6	38,8	38,4	38,9	39,4	40,4	40,7	50,8	50,8	51,1	51,6	52,1	52	51,8
60	40	39,3	38,9	39,4	39,9	40,9	41,2	51,3	51,2	51,6	52,1	52,6	52,5	52,3
61	40,3	39,6	39,2	39,6	40,2	41,2	41,4	51,6	51,5	51,9	52,4	52,9	52,8	52,6
62	40,6	39,9	39,5	40	40,5	41,5	41,8	51,9	51,8	52,2	52,7	53,2	53,1	52,9
63	3,08	3,16	4,88	4	4,52	5,52	5,8	17,7	16,2	16,6	17,1	17,6	17,5	17,3
64	2,56	2,64	4,36	3,48	4	5	5,28	17,2	15,7	16	16,6	17	17	16,8
65	3,56	3,64	5,36	4,48	5	6	6,28	18,2	16,7	17	17,6	18	18	17,8
66	3,28	3,36	5,08	4,2	4,72	5,72	6	17,9	16,4	16,8	17,3	17,8	17,7	17,5
67	2,88	2,96	4,68	3,8	4,32	5,32	5,6	17,5	16	16,4	16,9	17,4	17,3	17,1
68	2,16	2,24	3,96	3,08	3,6	4,6	4,88	16,8	15,3	15,6	16,2	16,6	16,6	16,4
69	2,2	2,28	4	3,12	3,64	4,64	4,92	16,8	15,3	15,7	16,2	16,7	16,6	16,4
70	0	0,76	2,48	1,6	2,12	3,12	3,4	15,3	13,8	14,2	14,7	15,2	15,1	14,9
71	0,76	0	1,72	0,84	1,36	2,36	2,64	14,5	13	13,4	13,9	14,4	14,3	14,1
72	2,48	1,72	0	1,04	1,56	2,56	2,84	14,7	13,2	13,6	14,1	14,6	14,5	14,3
73	1,6	0,84	1,04	0	0,52	1,52	1,8	13,7	12,2	12,6	13,1	13,6	13,5	13,3
74	2,12	1,36	1,56	0,52	0	1	1,28	13,2	11,7	12	12,6	13	13	12,8
75	3,12	2,36	2,56	1,52	1	0	0,28	12,2	10,7	11	11,6	12	12	11,8
76	3,4	2,64	2,84	1,8	1,28	0,28	0	11,9	10,4	10,8	11,3	11,8	11,7	11,5
77	15,3	14,5	14,7	13,7	13,2	12,2	11,9	0	1,48	1,4	0,96	1,44	1,36	2,28
78	13,8	13	13,2	12,2	11,7	10,7	10,4	1,48	0	0,36	0,88	1,36	1,28	1,08
79	14,2	13,4	13,6	12,6	12	11	10,8	1,4	0,36	0	0,52	1	0,92	0,72
80	14,7	13,9	14,1	13,1	12,6	11,6	11,3	0,96	0,88	0,52	0	0,48	0,4	1,32
81	15,2	14,4	14,6	13,6	13	12	11,8	1,44	1,36	1	0,48	0	0,6	1,52

	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
41	47,7	47,7	48,1	48,6	48,9	51	51,2	51,6	52,2	52,1	50,8	49,7	52	53
42	46,1	46,1	46,5	47	47,3	49,4	49,6	50	50,6	50,5	49,2	48,1	50,4	51,4
43	46	46	46,4	46,9	47,2	49,3	49,5	49,9	50,5	50,4	49,1	48	50,3	51,3
44	44,1	44,1	44,5	45	45,3	47,4	47,6	48	48,6	48,5	47,2	46,1	48,4	49,4
45	47	47,1	47,4	48	48,3	50,4	50,6	51	51,6	51,4	50,2	49,1	51,4	52,4
46	47,8	47,9	48,2	48,8	49,1	51,2	51,4	51,8	52,4	52,2	51	49,9	52,2	53,2
47	50,6	50,7	51	51,6	51,9	54	54,2	54,6	55,2	55	53,8	52,7	55	56
48	52	52	52,4	53	53,2	55,3	55,5	56	56,6	56,4	55,2	54	56,4	57,3
49	52,1	52,2	52,5	53,1	53,4	55,4	55,6	56,1	56,7	56,5	55,3	54,2	56,5	57,4
50	53,2	53,2	53,6	54,1	54,4	56,5	56,7	57,1	57,7	57,6	56,3	55,2	57,5	58,5
51	54,2	54,2	54,6	55,1	55,4	57,5	57,7	58,1	58,7	58,6	57,3	56,2	58,5	59,5
52	55,3	55,3	55,7	56,2	56,5	58,6	58,8	59,2	59,8	59,7	58,4	57,3	59,6	60,6
53	56,3	56,3	56,7	57,2	57,5	59,6	59,8	60,2	60,8	60,7	59,4	58,3	60,6	61,6
54	56,3	56,3	56,7	57,2	57,5	59,6	59,8	60,2	60,8	60,7	59,4	58,3	60,6	61,6
55	56	56	56,4	56,9	57,2	59,3	59,5	59,9	60,5	60,4	59,1	58	60,3	61,3
56	51,3	51,3	51,7	52,2	52,5	54,6	54,8	55,2	55,8	55,7	54,4	53,3	55,6	56,6
57	51,7	51,7	52,1	52,6	52,9	55	55,2	55,6	56,2	56,1	54,8	53,7	56	57
58	52	52	52,4	52,9	53,2	55,3	55,5	55,9	56,5	56,4	55,1	54	56,3	57,3
59	52,4	52,4	52,8	53,3	53,6	55,7	55,9	56,3	56,9	56,8	55,5	54,4	56,7	57,7
60	52,8	52,9	53,2	53,8	54,1	56,2	56,4	56,8	57,4	57,2	56	54,9	57,2	58,2
61	53,1	53,2	53,5	54,1	54,4	56,4	56,6	57,1	57,7	57,5	56,3	55,2	57,5	58,4
62	53,4	53,5	53,8	54,4	54,7	56,8	57	57,4	58	57,8	56,6	55,5	57,8	58,8
63	17,8	17,8	18,2	18,8	19	21,1	21,3	21,8	22,4	22,2	21	19,8	22,2	23,1
64	17,3	17,3	17,7	18,2	18,5	20,6	20,8	21,2	21,8	21,7	20,4	19,3	21,6	22,6
65	18,3	18,3	18,7	19,2	19,5	21,6	21,8	22,2	22,8	22,7	21,4	20,3	22,6	23,6
66	18	18	18,4	19	19,2	21,3	21,5	22	22,6	22,4	21,2	20	22,4	23,3
67	17,6	17,6	18	18,6	18,8	20,9	21,1	21,6	22,2	22	20,8	19,6	22	22,9
68	16,9	16,9	17,3	17,8	18,1	20,2	20,4	20,8	21,4	21,3	20	18,9	21,2	22,2
69	16,9	17	17,3	17,9	18,2	20,2	20,4	20,9	21,5	21,3	20,1	19	21,3	22,2
70	15,4	15,4	15,8	16,4	16,6	18,7	18,9	19,4	20	19,8	18,6	17,4	19,8	20,7
71	14,6	14,7	15	15,6	15,9	18	18,2	18,6	19,2	19	17,8	16,7	19	20
72	14,8	14,9	15,2	15,8	16,1	18,2	18,4	18,8	19,4	19,2	18	16,9	19,2	20,2
73	13,8	13,8	14,2	14,8	15	17,1	17,3	17,8	18,4	18,2	17	15,8	18,2	19,1
74	13,3	13,3	13,7	14,2	14,5	16,6	16,8	17,2	17,8	17,7	16,4	15,3	17,6	18,6
75	12,3	12,3	12,7	13,2	13,5	15,6	15,8	16,2	16,8	16,7	15,4	14,3	16,6	17,6
76	12	12	12,4	13	13,2	15,3	15,5	16	16,6	16,4	15,2	14	16,4	17,3
77	2,8	2,84	3,2	3,76	4,04	6,12	6,32	6,76	7,36	7,2	5,96	4,84	7,16	8,12
78	1,6	1,64	2	2,56	2,84	4,92	5,12	5,56	6,16	6	4,76	3,64	5,96	6,92
79	1,24	1,28	1,64	2,2	2,48	4,56	4,76	5,2	5,8	5,64	4,4	3,28	5,6	6,56
80	1,84	1,88	2,24	2,8	3,08	5,16	5,36	5,8	6,4	6,24	5	3,88	6,2	7,16
81	2,04	2,08	2,44	3	3,28	2,12	2,32	2,76	3,36	3,2	5,2	4,08	6,4	7,36

	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
41	54,1	50,4	59,5	26,1	26,4	26,9	28,5	25,5	27,5	30,2	29,3	28,9	29,7
42	52,5	48,8	57,9	24,5	24,8	25,3	26,9	23,9	25,9	28,6	27,7	27,3	28,1
43	52,4	48,6	57,8	24,4	24,7	25,2	26,8	23,8	25,8	28,5	27,6	27,2	28
44	50,5	46,8	55,9	22,5	22,8	23,3	24,9	21,9	23,9	26,6	25,7	25,3	26,1
45	53,4	49,7	58,9	25,9	26,2	26,7	28,3	25,3	27,3	30	29,1	28,7	29,5
46	54,2	50,5	59,7	26,7	27	27,5	29,1	26,1	28,1	30,8	29,9	29,5	30,3
47	57	53,3	62,5	29,5	29,8	30,3	31,9	28,9	30,9	33,6	32,7	32,3	33,1
48	58,4	54,7	63,8	30,9	31,2	31,7	33,3	30,3	32,3	35	34,1	33,7	34,5
49	58,5	54,8	64	31	31,3	31,8	33,4	30,4	32,4	35,1	34,2	33,8	34,6
50	59,6	55,8	65	32	32,3	32,8	34,4	31,4	33,4	36,2	35,2	34,8	35,6
51	60,6	56,8	66	33	33,3	33,8	35,4	32,4	34,4	37,2	36,2	35,8	36,6
52	61,7	58	67,1	34,2	34,4	35	36,6	33,6	35,6	38,3	37,4	37	37,8
53	62,7	59	68,1	35,2	35,4	36	37,6	34,6	36,6	39,3	38,4	38	38,8
54	62,7	59	68,1	35,2	35,4	36	37,6	34,6	36,6	39,3	38,4	38	38,8
55	62,4	58,6	67,8	34,8	35,1	35,6	37,2	34,2	36,2	39	38	37,6	38,4
56	57,7	54	63,1	30,2	30,4	31	32,6	29,6	31,6	34,3	33,4	33	33,8
57	58,1	54,4	63,5	30,6	30,8	31,4	33	30	32	34,7	33,8	33,4	34,2
58	58,4	54,6	63,8	30,8	31,1	31,6	33,2	30,2	32,2	35	34	33,6	34,4
59	58,8	55	64,2	31,2	31,5	32	33,6	30,6	32,6	35,4	34,4	34	34,8
60	59,2	55,5	64,7	31,7	32	32,5	34,1	31,1	33,1	35,8	34,9	34,5	35,3
61	59,5	55,8	65	32	32,3	32,8	34,4	31,4	33,4	36,1	35,2	34,8	35,6
62	59,8	56,1	65,3	32,3	32,6	33,1	34,7	31,7	33,7	36,4	35,5	35,1	35,9
63	24,2	22,6	29,6	3,64	3,72	2,8	1,92	2,92	0,92	3,64	2,72	2,32	3,12
64	23,7	22,1	29,1	4,08	4,16	3,24	1,8	3,36	1,36	3,6	2,6	2,2	3
65	24,7	23,1	30,1	4,12	4,2	3,28	2,4	3,4	1,4	4,12	3,2	2,8	3,6
66	24,4	22,8	29,8	4	4,08	3,16	2,28	3,28	1,28	4	3,08	2,68	3,48
67	24	22,4	29,4	4,68	4,6	3,84	1,84	3,96	1,96	3,64	2,64	2,24	3,04
68	23,3	21,7	28,7	4,48	4,56	3,64	1,4	3,76	1,76	3,2	2,2	1,8	2,6
69	23,3	21,7	28,8	4,48	4,56	3,64	0,76	3,76	1,76	2,56	1,56	1,16	1,96
70	21,8	20,2	27,2	6,2	6,28	5,36	2,48	5,48	3,48	2,88	1,68	2,08	1,28
71	21	19,4	26,5	6,96	7,04	6,12	3,24	6,24	4,24	3,64	2,44	2,84	2,04
72	21,2	19,6	26,7	8,68	8,76	7,84	4,96	7,96	5,96	5,36	4,16	4,56	3,76
73	20,2	18,6	25,6	7,8	7,88	6,96	4,08	7,08	5,08	4,48	3,28	3,68	2,88
74	19,7	18,1	25,1	8,32	8,4	7,48	4,6	7,6	5,6	5	3,8	4,2	3,4
75	18,7	17,1	24,1	9,32	9,4	8,48	5,6	8,6	6,6	6	4,8	5,2	4,4
76	18,4	16,8	23,8	9,6	9,68	8,76	5,88	8,88	6,88	6,28	5,08	5,48	4,68
77	9,2	5	14,6	19,7	19,8	18,9	16,1	19	17	14,3	15,3	15,7	15,9
78	8	6,4	13,4	18,2	18,3	17,4	14,6	17,5	15,5	12,8	13,8	14,2	14,4
79	7,64	5,96	13,1	18,6	18,7	17,8	15	17,9	15,9	13,2	14,2	14,6	14,8
80	8,24	6,44	13,7	19,1	19,2	18,3	15,5	18,4	16,4	13,7	14,7	15,1	15,3
81	8,44	6,36	13,9	19,6	19,7	18,8	16	18,9	16,9	14,2	15,2	15,6	15,8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
82	23,6	20	19,2	15,6	13,3	12,4	10,1	8,92	9,72	7,36	7,04	5,84	4,64	4,36
83	24,2	20,6	19,8	16,2	13,9	13	10,7	9,52	10,3	7,96	7,64	6,44	5,24	4,96
84	23,7	20,1	19,3	15,7	13,4	12,4	10,2	9	9,8	7,44	7,12	5,92	4,72	4,44
85	24	20,4	19,6	16	13,6	12,7	10,5	9,28	10,1	7,72	7,4	6,2	5	4,72
86	23,9	20,3	19,5	15,9	13,6	12,6	10,4	9,2	10	7,64	7,32	6,12	4,92	4,64
87	24,4	20,9	20,1	16,4	14,1	13,2	11	9,76	10,6	8,2	7,88	6,68	5,48	5,2
88	24,9	21,3	20,5	16,9	14,6	13,6	11,4	10,2	11	8,64	8,32	7,12	5,92	5,64
89	27	23,5	22,7	19	16,7	15,8	13,6	12,4	13,2	10,8	10,5	9,28	8,08	7,8
90	26,8	23,3	22,5	18,8	16,5	15,6	13,4	12,2	13	10,6	10,3	9,08	7,88	7,6
91	26,4	22,8	22	18,4	16,1	15,2	12,9	11,7	12,5	10,2	9,84	8,64	7,44	7,16
92	27	23,4	22,6	19	16,7	15,8	13,5	12,3	13,1	10,8	10,4	9,24	8,04	7,76
93	26	22,4	21,6	18	15,6	14,7	12,5	11,3	12,1	9,72	9,4	8,2	7	6,72
94	26,2	22,6	21,8	18,2	15,9	15	12,7	11,5	12,3	9,96	9,64	8,44	7,24	6,96
95	25,1	21,5	20,7	17,1	14,8	13,8	11,6	10,4	11,2	8,84	8,52	7,32	6,12	5,84
96	27,4	23,8	23	19,4	17,1	16,2	13,9	12,7	13,5	11,2	10,8	9,64	8,44	8,16
97	28,4	24,8	24	20,4	18	17,1	14,9	13,7	14,5	12,1	11,8	10,6	9,4	9,12
98	29,4	25,9	25,1	21,4	19,1	18,2	16	14,8	15,6	13,2	12,9	11,7	10,5	10,2
99	25,7	22,2	21,4	17,7	15,4	14,5	12,2	11	11,8	9,48	9,16	7,96	6,76	6,48
100	34,9	31,3	30,5	26,9	24,6	23,6	21,4	20,2	21	18,6	18,3	17,1	15,9	15,6
101	5,4	3,52	4,6	7,6	11,7	14	13,2	14,4	15,7	15,9	18,1	19,3	18,6	19
102	4,72	3,6	4,68	7,88	12	14,3	13,5	14,7	16	16,2	18,4	19,6	18,9	19,2
103	4,6	2,68	3,76	7,04	11,1	13,4	12,6	13,8	15,2	15,4	17,5	18,7	18	18,4
104	6,6	0,6	1,28	4,92	9	11,3	10,5	11,7	13	13,2	15,4	16,6	15,9	16,3
105	5,64	2,8	3,88	7	11,1	13,4	12,6	13,8	15,1	15,3	17,5	18,7	18	18,4
106	5,84	0,8	1,88	5,92	10	12,3	11,5	12,7	14	14,2	16,4	17,6	16,9	17,3
107	6	2,52	2,6	5,96	10	12,4	11,6	12,8	14,1	14,3	16,4	17,6	17	17,3
108	6,64	1,52	1,6	4,92	9	11,3	10,5	11,7	13	13,2	15,4	16,6	15,9	16,3
109	6,24	1,12	1,2	4,52	8,6	10,9	10,1	11,3	12,6	12,8	15	16,2	15,5	15,9
110	7,16	1,92	1,6	5,32	9,4	11,7	10,9	12,1	13,4	13,6	15,8	17	16,3	16,7

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
82	4,04	4,76	5,48	6,48	7,48	4,52	5,52	6,92	8,44	9,96	10,8	12,4	13	13,6
83	4,64	3,48	2,8	1,84	2,84	3,6	4,6	6	7,52	9,04	9,84	11,5	12,1	12,7
84	4,12	2,96	2,28	1,32	2,32	3,4	4,4	5,8	7,32	8,84	9,64	11,3	11,9	12,5
85	4,4	3,24	2,56	1,6	2,6	3,16	4,16	5,56	7,08	8,6	9,4	11	11,7	12,3
86	4,32	3,16	2,48	1,52	2,28	2,68	3,68	5,08	6,6	8,12	8,92	10,6	11,2	11,8
87	4,88	3,72	3,04	2,08	1,72	2,12	3,12	4,52	6,04	7,56	8,36	10	10,6	11,2
88	5,32	4,16	3,48	2,52	1,52	1,84	2,84	4,24	5,76	7,28	8,08	9,72	10,4	11
89	7,48	6,32	5,64	4,68	3,68	4,04	5,04	6,44	7,96	9,48	10,3	11,9	12,6	13,2
90	7,28	6,12	5,44	4,48	3,48	3,84	4,84	6,24	7,76	9,28	10,1	11,7	12,4	13
91	6,84	5,68	5	4,04	3,04	3,4	4,4	5,8	7,32	8,84	9,64	11,3	11,9	12,5
92	7,44	6,28	5,6	4,64	3,64	4	5	6,4	7,92	9,44	10,2	11,9	12,5	13,1
93	6,4	5,24	4,56	3,6	2,6	2,96	3,96	5,36	6,88	8,4	9,2	10,8	11,5	12,1
94	6,64	5,48	4,8	3,84	2,84	3,2	4,2	5,6	7,12	8,64	9,44	11,1	11,7	12,3
95	5,52	4,36	3,68	2,72	1,72	2,08	3,08	4,48	6	7,52	8,32	9,96	10,6	11,2
96	7,84	6,68	6	5,04	4,04	2,84	2,36	3,76	5,28	6,8	7,6	9,24	9,88	10,5
97	8,8	7,64	6,96	6	5	3,8	3,32	4,72	6,24	7,76	8,56	10,2	10,8	11,4
98	9,88	8,72	8,04	7,08	6,08	4,88	4,4	5,8	7,32	8,84	9,64	11,3	11,9	12,5
99	6,16	7	7,68	8,68	9,68	10,9	11,9	13,3	14,8	16,3	17,1	18,8	19,4	20
100	15,3	14,2	13,5	12,5	11,5	10,3	9,84	11,2	12,8	14,3	15,1	16,7	17,4	18
101	19,3	20,4	21,1	22,1	23,1	24,3	25,3	26,7	28,2	29,8	30,6	32,2	32,8	33,4
102	19,6	20,7	21,4	22,4	23,4	24,6	25,6	27	28,5	30	30,8	32,5	33,1	33,7
103	18,7	19,8	20,6	21,6	22,6	23,8	24,8	26,2	27,7	29,2	30	31,6	32,3	32,9
104	16,6	17,7	18,4	19,4	20,4	21,6	22,6	24	25,6	27,1	27,9	29,5	30,2	30,8
105	18,7	19,8	20,5	21,5	22,5	23,7	24,7	26,1	27,6	29,2	30	31,6	32,2	32,8
106	17,6	18,7	19,4	20,4	21,4	22,6	23,6	25	26,6	28,1	28,9	30,5	31,2	31,8
107	17,6	18,8	19,5	20,5	21,5	22,7	23,7	25,1	26,6	28,1	28,9	30,6	31,2	31,8
108	16,6	17,7	18,4	19,4	20,4	21,6	22,6	24	25,6	27,1	27,9	29,5	30,2	30,8
109	16,2	17,3	18	19	20	21,2	22,2	23,6	25,2	26,7	27,5	29,1	29,8	30,4
110	17	18,1	18,8	19,8	20,8	22	23	24,4	26	27,5	28,3	29,9	30,6	31,2

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
82	15	30,2	32,2	32,1	33,3	34,2	36,8	37,8	41	42,5	35,8	39,8	48,6	47,4
83	14	30	32	31,9	33,1	34	36,6	37,6	40,8	42,3	35,6	39,6	48,4	47,2
84	13,8	30,5	32,6	32,4	33,6	34,6	37,2	38,1	41,3	42,8	36,1	40,1	48,9	47,7
85	13,6	30,6	32,6	32,5	33,7	34,6	37,2	38,2	41,4	42,8	36,2	40,1	49	47,7
86	13,1	30,9	33	32,8	34	35	37,6	38,5	41,7	43,2	36,5	40,5	49,3	48,1
87	12,6	31,5	33,5	33,4	34,6	35,5	38,1	39,1	42,3	43,8	37,1	41	49,9	48,6
88	12,3	31,8	33,8	33,7	34,9	35,8	38,4	39,4	42,6	44	37,4	41,3	50,2	48,9
89	14,5	33,8	35,9	35,8	37	37,9	40,5	41,4	44,6	46,1	39,4	43,4	52,2	51
90	14,3	34	36,1	36	37,2	38,1	40,7	41,6	44,8	46,3	39,6	43,6	52,4	51,2
91	13,8	34,5	36,5	36,4	37,6	38,5	41,1	42,1	45,3	46,8	40,1	44	52,9	51,6
92	14,4	35,1	37,1	37	38,2	39,1	41,7	42,7	45,9	47,4	40,7	44,6	53,5	52,2
93	13,4	34,9	37	36,8	38	39	41,6	42,5	45,7	47,2	40,5	44,5	53,3	52,1
94	13,6	33,7	35,7	35,6	36,8	37,7	40,3	41,3	44,5	46	39,3	43,2	52,1	50,8
95	12,5	32	34	33,9	35,1	36,6	39,2	40,2	43,4	44,8	38,2	42,1	51	49,7
96	11,8	34,3	36,4	36,2	37,4	38,9	41,5	42,5	45,7	47,2	40,5	44,4	53,3	52
97	12,8	35,3	37,3	37,2	38,4	39,9	42,5	43,4	46,6	48,1	41,4	45,4	54,2	53
98	13,8	36,4	38,4	38,3	39,5	41	43,6	44,5	47,7	49,2	42,5	46,5	55,3	54,1
99	21,3	32,6	34,7	34,6	35,8	37,2	39,8	40,8	44	45,5	38,8	42,8	51,6	50,4
100	19,3	41,8	43,8	43,7	44,9	46,4	49	50	53,2	54,6	48	51,9	60,8	59,5
101	34,8	10,2	12,2	12,1	13,3	14,8	17,4	18,3	21,5	23	16,3	20,3	27,4	26,1
102	35	10,4	12,5	12,4	13,6	15	17,6	18,6	21,8	23,3	16,6	20,6	27,6	26,4
103	34,2	11	13	12,9	14,1	15,6	18,2	19,1	22,3	23,8	17,1	21,1	28,2	26,9
104	32,1	12,6	14,6	14,5	15,7	17,2	19,8	20,7	23,9	25,4	18,7	22,7	29,8	28,5
105	34,2	9,56	11,6	11,5	12,7	14,2	16,8	17,7	20,9	22,4	15,7	19,7	26,8	25,5
106	33,1	11,6	13,6	13,5	14,7	16,2	18,8	19,7	22,9	24,4	17,7	21,7	28,8	27,5
107	33,1	14,3	16,3	16,2	17,4	18,9	21,5	22,4	25,6	27,1	20,4	24,4	31,5	30,2
108	32,1	13,4	15,4	15,3	16,5	18	20,6	21,5	24,7	26,2	19,5	23,5	30,6	29,3
109	31,7	13	15	14,9	16,1	17,6	20,2	21,1	24,3	25,8	19,1	23,1	30,2	28,9
110	32,5	13,8	15,8	15,7	16,9	18,4	21	21,9	25,1	26,6	19,9	23,9	31	29,7

	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
82	45,8	45,6	43,8	46,7	47,5	50,3	51,7	51,8	52,8	53,8	55	56	56	55,6
83	45,6	45,4	43,6	46,5	47,3	50,1	51,5	51,6	52,6	53,6	54,8	55,8	55,8	55,4
84	46,1	46	44,1	47	47,8	50,6	52	52,1	53,2	54,2	55,3	56,3	56,3	56
85	46,1	46	44,1	47,1	47,9	50,7	52	52,2	53,2	54,2	55,3	56,3	56,3	56
86	46,5	46,4	44,5	47,4	48,2	51	52,4	52,5	53,6	54,6	55,7	56,7	56,7	56,4
87	47	46,9	45	48	48,8	51,6	53	53,1	54,1	55,1	56,2	57,2	57,2	56,9
88	47,3	47,2	45,3	48,3	49,1	51,9	53,2	53,4	54,4	55,4	56,5	57,5	57,5	57,2
89	49,4	49,3	47,4	50,4	51,2	54	55,3	55,4	56,5	57,5	58,6	59,6	59,6	59,3
90	49,6	49,5	47,6	50,6	51,4	54,2	55,5	55,6	56,7	57,7	58,8	59,8	59,8	59,5
91	50	49,9	48	51	51,8	54,6	56	56,1	57,1	58,1	59,2	60,2	60,2	59,9
92	50,6	50,5	48,6	51,6	52,4	55,2	56,6	56,7	57,7	58,7	59,8	60,8	60,8	60,5
93	50,5	50,4	48,5	51,4	52,2	55	56,4	56,5	57,6	58,6	59,7	60,7	60,7	60,4
94	49,2	49,1	47,2	50,2	51	53,8	55,2	55,3	56,3	57,3	58,4	59,4	59,4	59,1
95	48,1	48	46,1	49,1	49,9	52,7	54	54,2	55,2	56,2	57,3	58,3	58,3	58
96	50,4	50,3	48,4	51,4	52,2	55	56,4	56,5	57,5	58,5	59,6	60,6	60,6	60,3
97	51,4	51,3	49,4	52,4	53,2	56	57,3	57,4	58,5	59,5	60,6	61,6	61,6	61,3
98	52,5	52,4	50,5	53,4	54,2	57	58,4	58,5	59,6	60,6	61,7	62,7	62,7	62,4
99	48,8	48,6	46,8	49,7	50,5	53,3	54,7	54,8	55,8	56,8	58	59	59	58,6
100	57,9	57,8	55,9	58,9	59,7	62,5	63,8	64	65	66	67,1	68,1	68,1	67,8
101	24,5	24,4	22,5	25,9	26,7	29,5	30,9	31	32	33	34,2	35,2	35,2	34,8
102	24,8	24,7	22,8	26,2	27	29,8	31,2	31,3	32,3	33,3	34,4	35,4	35,4	35,1
103	25,3	25,2	23,3	26,7	27,5	30,3	31,7	31,8	32,8	33,8	35	36	36	35,6
104	26,9	26,8	24,9	28,3	29,1	31,9	33,3	33,4	34,4	35,4	36,6	37,6	37,6	37,2
105	23,9	23,8	21,9	25,3	26,1	28,9	30,3	30,4	31,4	32,4	33,6	34,6	34,6	34,2
106	25,9	25,8	23,9	27,3	28,1	30,9	32,3	32,4	33,4	34,4	35,6	36,6	36,6	36,2
107	28,6	28,5	26,6	30	30,8	33,6	35	35,1	36,2	37,2	38,3	39,3	39,3	39
108	27,7	27,6	25,7	29,1	29,9	32,7	34,1	34,2	35,2	36,2	37,4	38,4	38,4	38
109	27,3	27,2	25,3	28,7	29,5	32,3	33,7	33,8	34,8	35,8	37	38	38	37,6
110	28,1	28	26,1	29,5	30,3	33,1	34,5	34,6	35,6	36,6	37,8	38,8	38,8	38,4

	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
82	51	51,4	51,6	52	52,5	52,8	53,1	17,5	17	18	17,7	17,3	16,6	16,6
83	50,8	51,2	51,4	51,8	52,3	52,6	52,9	17,3	16,8	17,8	17,5	17,1	16,4	16,4
84	51,3	51,7	52	52,4	52,8	53,1	53,4	17,8	17,3	18,3	18	17,6	16,9	16,9
85	51,3	51,7	52	52,4	52,9	53,2	53,5	17,8	17,3	18,3	18	17,6	16,9	17
86	51,7	52,1	52,4	52,8	53,2	53,5	53,8	18,2	17,7	18,7	18,4	18	17,3	17,3
87	52,2	52,6	52,9	53,3	53,8	54,1	54,4	18,8	18,2	19,2	19	18,6	17,8	17,9
88	52,5	52,9	53,2	53,6	54,1	54,4	54,7	19	18,5	19,5	19,2	18,8	18,1	18,2
89	54,6	55	55,3	55,7	56,2	56,4	56,8	21,1	20,6	21,6	21,3	20,9	20,2	20,2
90	54,8	55,2	55,5	55,9	56,4	56,6	57	21,3	20,8	21,8	21,5	21,1	20,4	20,4
91	55,2	55,6	55,9	56,3	56,8	57,1	57,4	21,8	21,2	22,2	22	21,6	20,8	20,9
92	55,8	56,2	56,5	56,9	57,4	57,7	58	22,4	21,8	22,8	22,6	22,2	21,4	21,5
93	55,7	56,1	56,4	56,8	57,2	57,5	57,8	22,2	21,7	22,7	22,4	22	21,3	21,3
94	54,4	54,8	55,1	55,5	56	56,3	56,6	21	20,4	21,4	21,2	20,8	20	20,1
95	53,3	53,7	54	54,4	54,9	55,2	55,5	19,8	19,3	20,3	20	19,6	18,9	19
96	55,6	56	56,3	56,7	57,2	57,5	57,8	22,2	21,6	22,6	22,4	22	21,2	21,3
97	56,6	57	57,3	57,7	58,2	58,4	58,8	23,1	22,6	23,6	23,3	22,9	22,2	22,2
98	57,7	58,1	58,4	58,8	59,2	59,5	59,8	24,2	23,7	24,7	24,4	24	23,3	23,3
99	54	54,4	54,6	55	55,5	55,8	56,1	22,6	22,1	23,1	22,8	22,4	21,7	21,7
100	63,1	63,5	63,8	64,2	64,7	65	65,3	29,6	29,1	30,1	29,8	29,4	28,7	28,8
101	30,2	30,6	30,8	31,2	31,7	32	32,3	3,64	4,08	4,12	4	4,68	4,48	4,48
102	30,4	30,8	31,1	31,5	32	32,3	32,6	3,72	4,16	4,2	4,08	4,6	4,56	4,56
103	31	31,4	31,6	32	32,5	32,8	33,1	2,8	3,24	3,28	3,16	3,84	3,64	3,64
104	32,6	33	33,2	33,6	34,1	34,4	34,7	1,92	1,8	2,4	2,28	1,84	1,4	0,76
105	29,6	30	30,2	30,6	31,1	31,4	31,7	2,92	3,36	3,4	3,28	3,96	3,76	3,76
106	31,6	32	32,2	32,6	33,1	33,4	33,7	0,92	1,36	1,4	1,28	1,96	1,76	1,76
107	34,3	34,7	35	35,4	35,8	36,1	36,4	3,64	3,6	4,12	4	3,64	3,2	2,56
108	33,4	33,8	34	34,4	34,9	35,2	35,5	2,72	2,6	3,2	3,08	2,64	2,2	1,56
109	33	33,4	33,6	34	34,5	34,8	35,1	2,32	2,2	2,8	2,68	2,24	1,8	1,16
110	33,8	34,2	34,4	34,8	35,3	35,6	35,9	3,12	3	3,6	3,48	3,04	2,6	1,96

	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
82	15,1	14,3	14,5	13,5	13	12	11,7	1,36	1,28	0,92	0,4	0,6	0	0,92
83	14,9	14,1	14,3	13,3	12,8	11,8	11,5	2,28	1,08	0,72	1,32	1,52	0,92	0
84	15,4	14,6	14,8	13,8	13,3	12,3	12	2,8	1,6	1,24	1,84	2,04	1,44	0,52
85	15,4	14,7	14,9	13,8	13,3	12,3	12	2,84	1,64	1,28	1,88	2,08	1,48	0,56
86	15,8	15	15,2	14,2	13,7	12,7	12,4	3,2	2	1,64	2,24	2,44	1,84	0,92
87	16,4	15,6	15,8	14,8	14,2	13,2	13	3,76	2,56	2,2	2,8	3	2,4	1,48
88	16,6	15,9	16,1	15	14,5	13,5	13,2	4,04	2,84	2,48	3,08	3,28	2,68	1,76
89	18,7	18	18,2	17,1	16,6	15,6	15,3	6,12	4,92	4,56	5,16	2,12	4,76	3,84
90	18,9	18,2	18,4	17,3	16,8	15,8	15,5	6,32	5,12	4,76	5,36	2,32	4,96	4,04
91	19,4	18,6	18,8	17,8	17,2	16,2	16	6,76	5,56	5,2	5,8	2,76	5,4	4,48
92	20	19,2	19,4	18,4	17,8	16,8	16,6	7,36	6,16	5,8	6,4	3,36	6	5,08
93	19,8	19	19,2	18,2	17,7	16,7	16,4	7,2	6	5,64	6,24	3,2	5,84	4,92
94	18,6	17,8	18	17	16,4	15,4	15,2	5,96	4,76	4,4	5	5,2	4,6	3,68
95	17,4	16,7	16,9	15,8	15,3	14,3	14	4,84	3,64	3,28	3,88	4,08	3,48	2,56
96	19,8	19	19,2	18,2	17,6	16,6	16,4	7,16	5,96	5,6	6,2	6,4	5,8	4,88
97	20,7	20	20,2	19,1	18,6	17,6	17,3	8,12	6,92	6,56	7,16	7,36	6,76	5,84
98	21,8	21	21,2	20,2	19,7	18,7	18,4	9,2	8	7,64	8,24	8,44	7,84	6,92
99	20,2	19,4	19,6	18,6	18,1	17,1	16,8	5	6,4	5,96	6,44	6,36	7,28	8
100	27,2	26,5	26,7	25,6	25,1	24,1	23,8	14,6	13,4	13,1	13,7	13,9	13,3	12,4
101	6,2	6,96	8,68	7,8	8,32	9,32	9,6	19,7	18,2	18,6	19,1	19,6	19,5	19,3
102	6,28	7,04	8,76	7,88	8,4	9,4	9,68	19,8	18,3	18,7	19,2	19,7	19,6	19,4
103	5,36	6,12	7,84	6,96	7,48	8,48	8,76	18,9	17,4	17,8	18,3	18,8	18,7	18,5
104	2,48	3,24	4,96	4,08	4,6	5,6	5,88	16,1	14,6	15	15,5	16	15,9	15,7
105	5,48	6,24	7,96	7,08	7,6	8,6	8,88	19	17,5	17,9	18,4	18,9	18,8	18,6
106	3,48	4,24	5,96	5,08	5,6	6,6	6,88	17	15,5	15,9	16,4	16,9	16,8	16,6
107	2,88	3,64	5,36	4,48	5	6	6,28	14,3	12,8	13,2	13,7	14,2	14,1	13,9
108	1,68	2,44	4,16	3,28	3,8	4,8	5,08	15,3	13,8	14,2	14,7	15,2	15,1	14,9
109	2,08	2,84	4,56	3,68	4,2	5,2	5,48	15,7	14,2	14,6	15,1	15,6	15,5	15,3
110	1,28	2,04	3,76	2,88	3,4	4,4	4,68	15,9	14,4	14,8	15,3	15,8	15,7	15,5

	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
82	1,44	1,48	1,84	2,4	2,68	4,76	4,96	5,4	6	5,84	4,6	3,48	5,8	6,76
83	0,52	0,56	0,92	1,48	1,76	3,84	4,04	4,48	5,08	4,92	3,68	2,56	4,88	5,84
84	0	0,28	0,72	1,28	1,56	3,64	3,84	4,28	4,88	4,72	3,48	2,36	4,68	5,64
85	0,28	0	0,48	1,04	1,32	3,4	3,6	4,04	4,64	4,48	3,24	2,12	4,44	5,4
86	0,72	0,48	0	0,56	0,84	2,92	3,12	3,56	4,16	4	2,76	1,64	3,96	4,92
87	1,28	1,04	0,56	0	0,28	2,36	2,56	3	3,6	3,44	2,2	1,08	3,4	4,36
88	1,56	1,32	0,84	0,28	0	2,08	2,28	2,72	3,32	3,16	1,92	0,8	3,12	4,08
89	3,64	3,4	2,92	2,36	2,08	0	0,2	0,64	1,24	1,08	3,08	1,96	5,04	6
90	3,84	3,6	3,12	2,56	2,28	0,2	0	0,44	1,04	0,88	2,88	1,76	4,84	5,8
91	4,28	4,04	3,56	3	2,72	0,64	0,44	0	0,6	0,44	2,44	1,32	4,4	5,36
92	4,88	4,64	4,16	3,6	3,32	1,24	1,04	0,6	0	1,04	0,92	1,92	2,52	2,88
93	4,72	4,48	4	3,44	3,16	1,08	0,88	0,44	1,04	0	2	0,88	3,96	4,92
94	3,48	3,24	2,76	2,2	1,92	3,08	2,88	2,44	0,92	2	0	1,12	2,52	2,84
95	2,36	2,12	1,64	1,08	0,8	1,96	1,76	1,32	1,92	0,88	1,12	0	3,08	4,04
96	4,68	4,44	3,96	3,4	3,12	5,04	4,84	4,4	2,52	3,96	2,52	3,08	0	0,96
97	5,64	5,4	4,92	4,36	4,08	6	5,8	5,36	2,88	4,92	2,84	4,04	0,96	0
98	6,72	6,48	6	5,44	5,16	7,08	6,88	6,44	3,96	6	3,92	5,12	2,04	1,08
99	7,8	7,56	7,08	6,52	6,24	4,16	4,36	4,8	5,4	5,24	7,24	6,12	8,6	7,64
100	12,2	11,9	11,4	10,9	10,6	12,5	12,3	11,9	9,4	11,4	9,36	10,6	7,48	6,52
101	19,8	19,9	20,2	20,8	21,1	23,2	23,4	23,8	24,4	24,2	23	21,9	24,2	25,2
102	19,9	20	20,3	20,9	21,2	23,2	23,4	23,9	24,5	24,3	23,1	22	24,3	25,2
103	19	19	19,4	20	20,2	22,3	22,5	23	23,6	23,4	22,2	21	23,4	24,3
104	16,2	16,2	16,6	17,2	17,4	19,5	19,7	20,2	20,8	20,6	19,4	18,2	20,6	21,5
105	19,1	19,2	19,5	20,1	20,4	22,4	22,6	23,1	23,7	23,5	22,3	21,2	23,5	24,4
106	17,1	17,2	17,5	18,1	18,4	20,4	20,6	21,1	21,7	21,5	20,3	19,2	21,5	22,4
107	14,4	14,4	14,8	15,4	15,6	17,7	17,9	18,4	19	18,8	17,6	16,4	18,8	19,7
108	15,4	15,4	15,8	16,4	16,6	18,7	18,9	19,4	20	19,8	18,6	17,4	19,8	20,7
109	15,8	15,8	16,2	16,8	17	19,1	19,3	19,8	20,4	20,2	19	17,8	20,2	21,1
110	16	16	16,4	17	17,2	19,3	19,5	20	20,6	20,4	19,2	18	20,4	21,3

	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
82	7,84	7,28	13,3	19,5	19,6	18,7	15,9	18,8	16,8	14,1	15,1	15,5	15,7
83	6,92	8	12,4	19,3	19,4	18,5	15,7	18,6	16,6	13,9	14,9	15,3	15,5
84	6,72	7,8	12,2	19,8	19,9	19	16,2	19,1	17,1	14,4	15,4	15,8	16
85	6,48	7,56	11,9	19,9	20	19	16,2	19,2	17,2	14,4	15,4	15,8	16
86	6	7,08	11,4	20,2	20,3	19,4	16,6	19,5	17,5	14,8	15,8	16,2	16,4
87	5,44	6,52	10,9	20,8	20,9	20	17,2	20,1	18,1	15,4	16,4	16,8	17
88	5,16	6,24	10,6	21,1	21,2	20,2	17,4	20,4	18,4	15,6	16,6	17	17,2
89	7,08	4,16	12,5	23,2	23,2	22,3	19,5	22,4	20,4	17,7	18,7	19,1	19,3
90	6,88	4,36	12,3	23,4	23,4	22,5	19,7	22,6	20,6	17,9	18,9	19,3	19,5
91	6,44	4,8	11,9	23,8	23,9	23	20,2	23,1	21,1	18,4	19,4	19,8	20
92	3,96	5,4	9,4	24,4	24,5	23,6	20,8	23,7	21,7	19	20	20,4	20,6
93	6	5,24	11,4	24,2	24,3	23,4	20,6	23,5	21,5	18,8	19,8	20,2	20,4
94	3,92	7,24	9,36	23	23,1	22,2	19,4	22,3	20,3	17,6	18,6	19	19,2
95	5,12	6,12	10,6	21,9	22	21	18,2	21,2	19,2	16,4	17,4	17,8	18
96	2,04	8,6	7,48	24,2	24,3	23,4	20,6	23,5	21,5	18,8	19,8	20,2	20,4
97	1,08	7,64	6,52	25,2	25,2	24,3	21,5	24,4	22,4	19,7	20,7	21,1	21,3
98	0	6,56	6,4	26,2	26,3	25,4	22,6	25,5	23,5	20,8	21,8	22,2	22,4
99	6,56	0	10,2	24,6	24,7	23,8	21	23,9	21,9	19,2	20,2	20,6	20,8
100	6,4	10,2	0	31,7	31,8	30,8	28	31	29	26,2	27,2	27,6	27,8
101	26,2	24,6	31,7	0	0,4	1,24	3,72	0,6	2,72	5,44	4,52	4,12	4,92
102	26,3	24,7	31,8	0,4	0	0,8	3,8	0,88	2,8	5,52	4,6	4,2	5
103	25,4	23,8	30,8	1,24	0,8	0	2,88	1,4	1,88	4,6	3,68	3,28	4,08
104	22,6	21	28	3,72	3,8	2,88	0	3	1	1,8	0,8	0,4	1,2
105	25,5	23,9	31	0,6	0,88	1,4	3	0	2	4,72	3,8	3,4	4,2
106	23,5	21,9	29	2,72	2,8	1,88	1	2	0	2,72	1,8	1,4	2,2
107	20,8	19,2	26,2	5,44	5,52	4,6	1,8	4,72	2,72	0	1	1,4	1,6
108	21,8	20,2	27,2	4,52	4,6	3,68	0,8	3,8	1,8	1	0	0,4	0,4
109	22,2	20,6	27,6	4,12	4,2	3,28	0,4	3,4	1,4	1,4	0,4	0	0,8
110	22,4	20,8	27,8	4,92	5	4,08	1,2	4,2	2,2	1,6	0,4	0,8	0

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

ADI VE SOYADI : Mert DEMİRCİOĞLU
DOĞUM YERİ VE TARİHİ : Adana- 17.03.1979
MEDENİ HALİ : Evli
ADRES : Ç.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Balcalı
01330 ADANA
TELEFON (İŞ) : (0322) 338 72 54 (184 Dahili)
FAX : (0322) 338 72 83
E-MAIL : mdemircioglu@cu.edu.tr

EĞİTİM DURUMU

2003 – 2009 : Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü
İşletme Anabilim Dalı Doktora
2000 – 2003 : Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü
İşletme Anabilim Dalı Yüksek Lisans
1996 – 2000 : Çukurova Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık
Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü
1989 – 1996 : Adana Anadolu Lisesi

YABANCI DİL : İngilizce- İyi Derecede

İŞ TECRÜBESİ

2001 – Devam Ediyor : Araştırma Görevlisi
Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü
İşletme Bölümü, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı