

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

10.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİK DERSİ
SAYILAR ALT ÖĞRENME ALANINDAKİ
BAŞARI DÜZEYLERİ VE DÜŞÜNME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Nur Şebnem BAKIR

Ankara
Haziran, 2011

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

10.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİK DERSİ
SAYILAR ALT ÖĞRENME ALANINDAKİ
BAŞARI DÜZEYLERİ VE DÜŞÜNME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nur Şebnem BAKIR

Danışman: Yard. Doç. Dr. Selami ERCAN

**Ankara
Haziran, 2011**

JÜRİ ONAY SAYFASI

Nur Şebnem BAKIR' ın "10.Sınıf Öğrencilerinin Matematik Dersi Sayılar Alt Öğrenme Alanındaki Başarı Düzeyleri ve Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı tezi 08/06/2011 tarihinde, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

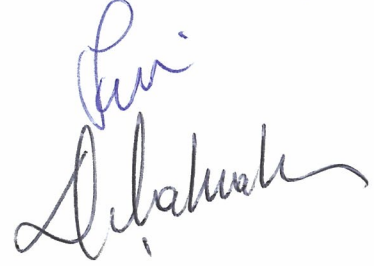
Adı Soyadı

İmza

Başkan : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN



Üye
(Tez Danışmanı) : Yrd. Doç. Dr. Selami ERCAN



Üye : Yrd. Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK

ÖNSÖZ

Araştırmanın gerçekleştirilmesinde önerileriyle bana destek olan ve yol gösteren, bilgi ve deneyimlerini paylaşan sayın danışman hocam Yard. Doç. Dr. Selami ERCAN'a ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi alanları eğitimi bölümü matematik eğitimi anabilim dalında yüksek lisansa başladığımız andan itibaren görüş ve önerilerinden yararlandığım, yapıcı eleştirileri ile bana yol gösteren Prof. Dr. Ziya ARGÜN, Prof. Dr. Ahmet ARIKAN ve Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU ve Doç.Dr. Ayşe UYAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Bu çalışma süresince değerli yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Araş.Gör. Gönül YAZGAN'a teşekkür ederim. Ayrıca tezin uygulama sürecine katkılarından dolayı matematik öğretmeni arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Sadece bu tez çalışması sürecinde değil, her zaman maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan sevgili annem Hava BAKIR'a ve babam Mustafa BAKIR'a teşekkürü borç bilirim. Son olarak çalışmalarım sırasında beni maddi ve manevi açıdan destekleyen, bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Nur Şebnem BAKIR

ÖZET

10.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİK DERSİ SAYILAR ALT ÖĞRENME ALANINDAKİ BAŞARI DÜZEYLERİ VE DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

BAKIR, Nur Şebnem

Yüksek Lisans, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Selami ERCAN

Haziran-2011, 97 sayfa

Bu araştırmanın temel amacı, 10. sınıf öğrencilerinin matematik dersi sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeylerini ve düşünme süreçlerinin belirlemektir. Nitel araştırma yönteminin benimsendiği bu çalışmada yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu, Ankara ili Çubuk ilçesinde bulunan bir genel lisede okuyan 6 öğrenci oluşturmaktadır. Bu öğrenciler araştırmacı tarafından hazırlanmış olan cebir testi, matematik öğretmenlerinin görüşleri ve bir önceki yılın matematik notları dikkate alınarak her farklı cebirsel düşünme düzeyinde (yüksek-orta-düşük) bir erkek ve bir kız öğrenci seçilmiştir. Veri toplamak amacıyla cebirsel düşünme becerilerini kullanmayı gerektiren 10 soru hazırlanmış ve öğrenciler bu sorular üzerinde çalışırken onlarla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Yazıya dökülen görüşme verileri, öğrencilerin kağıt üzerindeki çalışmaları ve araştırmacının notları bu çalışmanın veri kaynağını oluşturmaktadır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin mutlak değer, üslü ve köklü ifadeler konusunda, sayılarda genelliği ifade etmede, genelleştirme ve özelleştirme kavramlarını ifade etmede, ilişkileri göstermede sorun yaşadıkları; rasyonel sayılarda işlem yapmada başarılı oldukları görülmüştür. Elde edilen sonuçlara göre 9.sınıf cebir öğretimine ilişkin önerilerde bulunulmuştur.

ANAHTAR KELİME: cebir, cebirsel düşünme, sayılar öğrenme alanı, ortaöğretim, matematik dersi

ABSTRACT**THE 10TH GRADE STUDENTS' SUCCESS LEVELS AND
THEIR THINKING PROCESSES ON NUMBERS LEARNING
DOMAIN IN MATHEMATICS LESSON**

BAKIR, Nur Şebnem

Graduate, Department of Mathematics Education

Thesis Advisor: Yard. Doç. Dr. Selami ERCAN

June-2011, 97 pages

The main purpose of this study was to determine the 10th grade students' success levels and their thinking processes on numbers learning domain. Semi structured interview technique was used in this qualitative research study. Subjects of the study consists of 6 tenth grade students in a secondary school of Çubuk Province in Ankara. These students were selected according to their algebra test's performance, their mathematics grade and their mathematics teachers' view as there were one girl and one boy in each level. 10 problems were prepared for the data collection and semi structured interviews were performed with students while they were working on these problems. Transcribed interview data collected by the students and researcher's notes constituted this study's data source. According to the results of the study, while students have some problems about absolute value, radical and exponential expressions, generalization, abstraction, encounters with expressing generality in numbers, depicting relationships they have no problems about rational numbers. Based on the results some suggestions about teaching algebra in the 9th grade were included.

KEYWORDS: algebra, algebra thinking, number learning domain, secondary education, mathematics lesson

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
JÜRİNİN İMZA SAYFASI.....	i
ÖNSÖZ.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu.....	4
1.1.1. Cebir.....	4
1.1.2. Cebirsel Düşünme.....	5
1.1.3. Cebirsel Düşünmenin Gelişim Düzeyleri	7
1.1.4. Cebir Öğreniminde Zorluklar,Hatalar ve Kavram Yanılgıları.....	7
1.1.5. Aritmetikten Cebire Geçiş	9
1.1.6. Ortaöğretim Matematik Programında Cebir Öğretiminin Yeri	10
1.1.7. Problemin cümlesi.....	15
1.1.8. Alt problemler.....	15
1.2. Araştırmanın Amacı.....	15
1.3. Araştırmanın Önemi.....	16
1.4Araştırmanın Varsayımları	16
1.5 Araştırmanın Sınırlılıkları.....	17

1.6Tanımlar/ Terimler.....	17
2.İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	18
3.YÖNTEM.....	26
3.1. Araştırmanın Modeli.....	27
3.2. Evren ve Örneklem.....	29
3.3. Veri Toplama Yöntemi ve Araçları.....	30
3.4. Verilerin Analizi.....	40
4. BULGULAR VE YORUM.....	43
4.1. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular.....	43
4.2 İkinci Alt Probleme Ait Bulgular.....	52
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	83
5.1. Sonuç.....	83
5.2.Öneriler.....	84
KAYNAKÇA.....	86
EKLER.....	91
Ek 1. Cebir testi.....	91
Ek 2. Öğrenci görüşme soruları.....	95
Ek 3. İzin dilekçesi.....	97

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1. Aritmetik ve cebirin özelliklerinin karşılaştırılması.....	9
Tablo 2. Sayılar alt öğrenme alanları ve kazanımlar.....	12
Tablo 3. Cebir testindeki soru sayısının konulara göre dağılımı.....	31
Tablo 4. Mülakatta sorulan soruların konulara göre dağılımı.....	40
Tablo 5. Cebirsel düşünme düzeylerini belirleme testindeki soruların frekansı.....	47

Tablo 6. Cebirsel düşünme düzeyleri.....	48
Tablo 7. Öğrencilerin cebirsel düzeylerde bulunma yüzdeleri.....	50
Tablo 8. Uygulamaya katılan kız ve erkek öğrencilerin matematik notlarına göre yüzdeler dağılımları.....	51
Tablo 9. Görüşme yapılacak öğrencilerin seçim kriterlerine göre durumu.....	51
Tablo 10. Öğrencilerin 1. soru ile ilgili düşünme süreçleri.....	60
Tablo 11. Öğrencilerin köklü sayılar ve tamsayılar arasındaki ilişkiye yorumları....	82

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Okların kullanılarak verilerin kaydedilmesi.....	33
Şekil 2. 10.sınıf öğrencilerinin düzeylere göre dağılımı.....	49
Şekil 3. Öğrencilerin matematik notlarına göre dağılımı.....	50
Şekil 4. E-1'in 2.soruya verdiği yanıt.....	61
Şekil 5. K-1'in 2.soruya verdiği yanıt.....	62
Şekil 6. E-2'nin 2.soruya verdiği yanıt.....	62
Şekil 7. K-2'nin 2.soruya verdiği yanıt.....	63
Şekil 8. K-3'ün 2.soruya verdiği yanıt.....	63
Şekil 9. E-3'ün 2.soruya verdiği yanıt.....	64
Şekil 10. E-1'in 3.soruya verdiği yanıt.....	65
Şekil 11. E-2'nin 3.soruya verdiği yanıt.....	65
Şekil 12. E-2'nin 3.soruya verdiği yanıt.....	66
Şekil 13. K-2'nin 3.soruya verdiği yanıt.....	66
Şekil 14. E-3'ün 3.soruya verdiği yanıt.....	67

Şekil 15. K-3'ün 3.soruya verdiği yanıt.....	67
Şekil 16. E-1'in 4.soruya verdiği yanıt.....	68
Şekil 17. K-1'in 4.soruya verdiği yanıt.....	68
Şekil 18. E-2'nin 4.soruya verdiği yanıt.....	69
Şekil 19. K-2'nin 4.soruya verdiği yanıt.....	69
Şekil 20. E-3'ün 4.soruya verdiği yanıt.....	69
Şekil 21. E-1'in 5.soruya verdiği yanıt.....	70
Şekil 22. K-1'in 5.soruya verdiği yanıt.....	71
Şekil 23. K-2'nin 5.soruya verdiği yanıt.....	72
Şekil 24. K-3'ün 5.soruya verdiği yanıt.....	72
Şekil 25. E-1'in 6.soruya verdiği yanıt.....	73
Şekil 26. K-1'in 6.soruya verdiği yanıt.....	74
Şekil 27. E-2'nin 6.soruya verdiği yanıt.....	74
Şekil 28. K-2'nin 6.soruya verdiği yanıt.....	74
Şekil 29. E-1'in 7.soruya verdiği yanıt.....	75
Şekil 30. K-2'nin 7.soruya verdiği yanıt.....	75
Şekil 31. E-1'in 9.soruya verdiği yanıt.....	77
Şekil 32. K-1'in 10.soruya verdiği yanıt.....	78
Şekil 33. K-3'ün 10.soruya verdiği yanıt.....	78
Şekil 34. E-1'in 11.soruya verdiği yanıt.....	80
Şekil 35. E-2'nin 11.soruya verdiği yanıt.....	80
Şekil 37. K-2'nin 11.soruya verdiği yanıt.....	81
Şekil 38. E-3'ün 11.soruya verdiği yanıt.....	81

KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
EARGED	Eğitim Araştırma ve Geliştirme Başkanlığı
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PISA	Programme for International Student Assessment
ERIC	Education Resources Information Center
EBSCO	Elton B. Stephens Company
GOOGLE	Giving Options and Opinions Generously Linked Everywhere
CSMS	Concepts in Secondary Mathematics and Science
SOLO	Structure of Observed Learning Outcomes
OBEB	Ortak Bölenlerin En Büyüğü
OKEK	Ortak Katların En Küçüğü
vd.	Ve diğerleri
vb.	Ve benzeri
Akt.	Aktaran

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Matematik, örüntülerin ve düzenlerin bilimidir. Bir başka deyişle matematik sayı, şekil, uzay, büyüklük ve bunlar arasındaki ilişkilerin bilimidir. Matematik, bilgiyi işlemeyi, üretmeyi, tahminlerde bulunmayı ve bu dili kullanarak problem çözmeyi içerir. Burada önemli olan olguları içselleştirip onlara kendi anlamınızı yükleyerek ilişkileri, düzeni, deseni keşfedip problemi “ben matematik yapabilirim” duygusunu geliştirdikten sonra çözebilmektir.

Matematik öğrenimi, bireylere fiziksel dünyayı ve sosyal etkileşimleri anlamaya yardımcı olacak geniş bir bilgi ve beceri donanımını sağlar. Matematik öğrenimi, bireylere çeşitli deneyimlerini analiz edebilecekleri, açıklayabilecekleri, tahminde bulunabilecekleri ve problem çözebilecekleri bir dil ve sistematik kazandırır. Bunun yanında çeşitli matematiksel durumların incelendiği ortamlar oluşturarak bireylerin akıl yürütme becerilerinin gelişmesini hızlandırır.

Cebir, matematik öğrenimi içinde anahtar kavram olarak kabul edilmektedir. National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) (2000) standartlarına göre cebir, okul matematiğinde en önemli konu olmasa da okul matematiğini bütünleştirmede anahtar kavramlardan biridir. Lacampagne (1995) , ‘Cebir matematiğin dilidir. O temel cebirsel kavramların öğrenilmesi durumunda, ileri matematiksel konular için kapılar açar. O, öğrenilmemesi durumunda üniversite ve teknolojiye dayalı kariyer kapılarını kapatır ...’ demiştir (Akt.:Dede, Yalın ve Argün, 2002).

Araştırmacılar, öğrencilerin cebimin dilini anlamakta güçlük çektiklerini, yorumlayamadıklarını, cebirle ilgili birçok kavram yanılgısına ve hataya sahip olduklarını, öğretmenlerin öğrencilerinin hatalarını tahmin etmekte güçlük yaşadığını, öğrencilerin aritmetikten cebire geçerken zorlandıklarını ifade etmektedirler. Bu tür zorlukların en önemli nedenlerinden biri öğrencilerin neyi, nasıl düşünerek yaptığının

öğretmen tarafından bilinmemesidir. Bunun için cebirin öğrencilere onların ilişkilendiremedikleri sembolik bir dille gösterilmesi, cebirsel sözdiziminin hızlı olarak formüle edilmesi yerine öğrencilerden kendi matematik deneyimleriyle zihinsel davranışlarını oluşturmaları beklenmelidir. Bu nedenle bu araştırma, öğrencilerin cebirsel düşünme seviyelerinin bilinmesi, öğretmenin öğrencinin ne düşündüğünü yorumlaması, nedenlerin incelenmesi ve çözümlenmesi açısından önem taşımaktadır.

Program for International Student Assessment (PISA) (2006) matematik okuryazarlığı ölçeğinde öğrencilerimizin %76,4'ü ikinci düzeyde veya daha aşağısındadır. Öğrencilerimizin ortalama performansı ikinci yeterlik düzeyinde yer alırken, Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD) ülkeleri ortalama performansı üçüncü düzeyde bulunmaktadır. PISA 2009 sonuçlarına göre ise Türkiye'de karmaşık problem durumlarıyla başa çıkabilme gibi görevlerin yerine getirilmesini gerektiren 6. düzeyde yer alan öğrencilerin oranı %1,3 olmuştur. Bu oran OECD ortalamasının yarısı kadardır. Türkiye'de en fazla öğrenci 2. düzeyde bulunmaktadır. Uzmanlar tarafından temel yeterlik düzeyi olarak kabul edilen 2. düzeyin altında olan öğrencilerin oranı %42,2'dir. Ayrıca 1. düzeyin altında bulunan öğrencilerin oranı, OECD ortalamasının yaklaşık olarak iki katıdır. PISA sonuçlarına göre öğrencilerimiz yeterlik düzeylerine göre matematik okuryazarlığı ölçeğinde ortalama olarak şu yeterliklere sahiptir: İkinci düzeye erişmiş olan öğrenciler, doğrudan çıkarım yapmaktan başka bir beceriye gerek olmayan bir bağlamda ifade edilmiş olan durumları tanıyabilir ve yorumlayabilirler. Bu öğrenciler, tek bir kaynaktan gerekli bilgiyi elde edebilir ve sadece bir gösterim biçimini kullanabilirler. Bu düzeydeki öğrenciler temel algoritmaları, formülleri, işlem yollarını kullanabilirler. Doğrudan bir biçimde akıl yürütebilirler ve sonuçlar üzerinde görülenin ötesine geçmeyen yorumlar yapabilirler. Bu sonuçlar cebir öğretiminde de öğrencilerin düşünme süreçlerine önem verilmesi gerektiğini, öğrencilerin neyi, nasıl düşünerek bulduğunun sorulmasının gerekliliğini ve öğretmenlerin öğrencilerinin cebirsel düşüncelerini yorumlamalarının önemini göstermektedir.

Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Daire Başkanlığı (EARGED) (2005) tarafından yapılan, içinde cebir müfredatının da bulunduğu bir araştırma raporunun sonuçlarına göre matematik derslerinde gerçekleşmekte olan %50'nin altında kalan öğrenme düzeyinin, beklenin altında kaldığı görülmektedir. Matematik derslerinde mutlak başarı yüzdeleri ile ilgili ortalamalar %37-48 arasında kalmıştır. Temel eğitim

dönemi için bu düzeyde bir öğrenme yeterli sayılamaz. Bu dönemde öğrenme ürünlerinde eşitlik sağlanmak koşuluyla daha yüksek düzeylerde öğrenme gerekir. Öğrenme düzeyindeki düşüklüğün matematiğin sayılar ve geometri gibi alanların tümünde söz konusu olması bu dersin öğretiminin tümüyle ele alınması gerektiğine işaret etmektedir.

Türkiye'deki ortaöğretim matematik programı incelendiğinde 9.sınıf matematik programı ilköğretimle başlayan aritmetikten cebire geçişte bir köprü ve diğer 10,11 ve 12. sınıflar içinse sağlam bir zemin oluşturmaktadır. 9.sınıf matematik programı mantık ve cebir öğrenme alanı olmak üzere iki öğrenme alanından oluşmaktadır. Bu nedenle cebir öğrenme alanında verilen kazanımlarla beraber 9.sınıfta cebirsel düşünmenin temeli atılmaktadır. Konuların öğrenilmemesi halinde öğrenciler 10.sınıf matematik konuları olan polinomlar, ikinci dereceden denklemler, çarpanlara ayırma ve eşitsizlik konularında oldukça zorlanmaktadırlar.

Okul cebirinin tipik konuları; cebirsel ifadeleri basitleştirme, sayı sistemlerinin özellikleri, bir bilinmeyenli lineer ve kuadratik denklemler, 2 bilinmeyenli denklem sistemleri, sembolik gösterimler, farklı tür fonksiyonların (lineer, kuadratik, üssel, logaritmik, trigonometrik) grafikleri, diziler ve seriler konularını içerir. Bu konuları oluşturan etkinliklerin çoğunda cebirsel düşünme ve cebirsel sembolleştirme becerisi yer almaktadır. Öğrenciler cebirsel anlayışı tamamlayan bu iki yeteneği mutlaka kazanmalıdırlar.

Cebir öğretimine kalite kazandırmak için öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin belirlenmesi ve öğrencilerin soruları nasıl yorumladıkları neden ve nasıl düşündüklerinden yola çıkılarak öğretimin ona göre düzenlenmesine ihtiyaç vardır. Bu araştırma öğretim faaliyetlerine bu tür bir destek vermek amacıyla yapılmıştır. Araştırma farklı cebirsel düşünme düzeylerinde bulunan 10.sınıftaki öğrencilerin, 9.sınıf cebir öğrenme alanındaki başarı düzeylerinin belirlenmesi amacıyla yapılmıştır. Araştırmanın ayrıntılarına geçmeden konuyla yakın ilgisinden ötürü önce , cebir, cebirsel düşünme, aritmetik ve cebir arasındaki farklılıkların ne olduğu, cebir öğreniminde karşılaşılan hatalar ve kavram yanlışları, ortaöğretimde cebir öğretiminin yeri üzerinde durulacaktır.

1.1. Problem Durumu

1.1.1. Cebir

Matematiğin en önemli alanlarından birisi cebirdir. Cebir; yapı, bağıntı ve nicelik üzerine uğraşan bir matematik dalıdır. Bilinmeyen değerlerin, simge ve harflerle betimlenerek kurulan denklemlerle bulunması temeline dayanır. Cebir temellerini El Harezmi'den alır. *Cebir* sözcüğü de Harezmi'nin "*El'Kitab'ül-Muhtasar fi Hisab'il Cebri ve'l-Mukabele*" (Cebir ve Denklem Hesabı Üzerine Özet Kitap) adlı eserinden gelmektedir. Bu eser aynı zamanda doğu ve batının ilk bağımsız cebir kitabı olma özelliğini taşımaktadır.

Yaklaşık 4000 yıllık bir geçmişle matematiğin en eski çalışma alanlarından biri olan cebir, denklemleri çözmek için genel metotlar bulma çabalarının ortak bir sonucu olarak doğmuştur (Göker,1997). Cebir ile ilgili en eski bilgiler M.Ö 1700-1600 den kalan eski Mısır papirüsleri üzerine yazılmış olarak bulunmuştur. Kullanımı bazı basit denklemlerin çözümünden ibaret olduğu ortaya çıkmıştır. Mısırlılar ve Babilliler para, kar-zarar veya arazi ölçümleri ile ilgili nicelikleri içeren problemlere çözüm getirmek amacıyla cebiri kullanmıştır (Kiaren, 1992). Sonradan eski Yunan matematikçileri cebir ile geometriyi ortak olarak kullanmışlardır.

Günümüzde de cebirle ilgili birçok tanım yapılmıştır. Bu tanımların yanında bahsedilen zorlukların sebebini anlamak ve çözüm önerileri geliştirebilmek amacıyla cebir ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır.

Cebir geleneksel anlamda "genelleşmiş aritmetik" olarak tanımlanır ve o çoğunlukla aritmetiğin sembolik tarafı üzerinde yoğunlaşmıştır (örneğin, sembolik ifadelerin manipülasyonu, cebirsel denklemlerin çözümü, sembolik olarak gösterilen fonksiyonların araştırılması) (Tabach and Friedlander, 2003).

Cebir genellikle sayıların kullanıldığı, genellenmiş ifadelerin sıkça ve faydalı olarak kullanıldığı bir dildir. Eğer öğrenciler genellemeyi algılar ve ifade ederlerse cebiri bir ifade dili olarak anlayabilirler. İlk başta biraz zaman alabilir fakat zamanla öğrenciler cebirin usta kullanıcıları olabilirler.

Cebir; genel olarak, sayı ve semboller kullanarak incelenen ilişki veya ilişkileri genelleştirilmiş denklemlere dönüştüren bir matematik dalıdır (Akkaya, 2006). O'Bannon vd.(2002) cebiri, örüntülerin, kuralların ve sembollerin bir dili olarak tanımlarken, Sfard

(1995) cebiri genel hesaplama bilimi olarak tanımlamıştır. Kieran (1992)'a göre ise cebir harfleri kullanarak nicelikleri ve sayıları temsil etmenin yanında, bu sembollerle hesaplama yapmayı da sağladığını belirtmiştir. Taylor Cox (2003) ise cebirin, problemleri çözmek için bilinmeyen ve değişken barındıran, aritmetiğin genelleştirilmiş hali olduğunu söylemektedir. Lacampagne (1995) ise, cebiri matematiğin dili olarak tanımlamış ve cebirsel kavramların tam olarak öğrenilmesiyle ileri matematiğin kapılarının açılacağını aksi durumda ise üniversite ve teknolojiye dayalı kapıların kapanacağını belirtmiştir. Yine bu fikri savunan Kaput (1999), sembolik cebir olmadan ne yüksek matematiğin, ne de nicel bilimin yapılamayacağını, buna bağlı olarak da bugün sahip olunan teknoloji ve modern yaşamın olamayacağını söylemiştir.

Dede (2005), cebirsel sembollerin günlük dildeki kelimeler gibi buldukları içeriğe göre anlam kazandıklarını; cebirin anlamsal yönünün, bir içerikte kullanılan sembol ve bu sembolün temsil ettiği, söz-dizimsel yönünün bir içerikte kullanılan sembolün yalnızca matematiksel rolünü gösterdiğini belirtmiştir. Buna ek olarak, sembolün içerik ve referansının ortak olarak düşünülmesinin ise onun matematiksel rolünü gösterdiğini de söylemiştir.

(NCTM), her öğrencinin cebiri öğrenmesi gerektiğini savunmaktadır ve anaokulu öğreniminden ortaöğretim öğreniminin sonuna kadar olan dönem boyunca cebirin gerekli düzeylerini öğrenmeleri gerektiği belirtilmiştir.

1.1.2. Cebirsel Düşünme

Cebir ile ilişkisi olmasına rağmen cebirsel düşünme cebir teriminin sahip olduğundan daha geniş ve farklı bir anlama sahiptir. Cebirsel düşünme için tam bir tanım vermek oldukça zordur. Literatür incelendiğinde farklı uzmanların cebirsel düşünmenin farklı yönlerine vurgu yapan tanımlar verdikleri görülmüştür. Bu kısımda bazı uzmanlara göre cebirsel düşünmenin nasıl tanımlandığı verilmiştir.

Kieran ve Chalouh (1993) , sembollerini anlamlarını kavrayarak kullanma ve matematiksel akıl yürütmeyi cebirsel düşünmenin merkezine koymuşlardır. Onlara göre cebirsel düşünme, sembol ve işlemlerin anlamlarını inşa ederek zihinde matematiksel akıl yürütmenin gelişmesidir.

Herbert ve Brown (1997)' a göre ise cebirsel düşünme, verilen durumdan gerekli bilgileri seçerek, sözel olarak ifade edilmiş matematiksel bilgiyi, şekil, tablo, grafik ve denklemlerle temsil etme, elde edilen matematiksel bulguları (bilinmeyeni

bulmak, varsayımları test etmek ve fonksiyonel ilişkileri tanımlamak gibi) yorumlama ve farklı durumları analiz etmek için matematiksel sembol ve araçların kullanılmasıdır. Herbert ve Brown (1997)'un cebirsel düşünme tanımı bir matematiksel bilginin farklı gösterim şekilleriyle ifade edilmesi ve yorumlanabilmesine odaklanmıştır. Bu süreçte birey cebirsel sembollerden doğru bir şekilde yararlanmalıdır.

Bir başka çalışmada Greenes ve Findells (1998) cebirsel düşünmede değişken ve fonksiyon kavramına vurgu yapmış, farklı gösterim şekillerinden yararlanma ve akıl yürütme becerilerinin de önemine değinmişlerdir. Onlara göre cebirsel düşünme farklı gösterim şekilleriyle birlikte değişken kavramının anlamayı, fonksiyonlarla çalışmayı, cebirsel ilişkileri tanımlamayı, tümevarım ve tümdengelimli çıkarımları içermektedir.

NCTM (2000)'ye göre ise cebirsel olarak düşünme, fonksiyonları anlamayı, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel yapı ve durumları farklı şekillerde temsil ve analiz etmeyi, nicel ilişkileri temsil etmek ve anlamak için matematiksel modeller kullanmayı, gerçek yaşamda karşılaşılan farklı durumlardaki değişimi analiz etmeyi gerektirir.

Son olarak Kriegler (2004) cebirsel düşünmeyi matematiksel düşünme araçlarının gelişimi ve temel cebirsel fikirler üzerinde çalışma olmak üzere iki ana bileşenden oluşan bir yapı olarak tanımlamıştır.

Kriegler'in (2004) cebirsel düşünme için verdiği tanım burada verilen diğer tanımları kapsayacak niteliktedir ve bu çalışmada yapılacak olan cebirsel düşünme tanımını oldukça etkilemiştir. Bu çalışmada literatürde yer alan tanımların bir sentezi yapılarak cebirsel düşünme tanımlanmaya çalışılmıştır.

Cebirsel düşünme, matematiksel düşünmenin özel bir biçimidir ve yalnızca cebir çalışmalarıyla sınırlı değildir. Dolayısıyla matematiksel düşünmenin kullanıldığı problem çözme, çoklu gösterimlerden yararlanma ve akıl yürütme gibi becerileri içermektedir. Bunun yanı sıra bireyin cebirsel olarak düşünebilmesi cebirsel ifade ve ilişkileri zihninde anlamlarını oluşturarak kullanmasını, gerçek yaşam durumlarıyla ilgili ilişki ve kuralları araştırıp genelleme yapmasını gerektirmektedir.

Yapılan bu tanımdan anlaşılacağı gibi cebirsel düşünme;

- 1.Sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma
2. Çoklu gösterimlerden(sembolik, grafik, tablo gibi) yararlanma
- 3.Genellemeleri formüle etme gibi üç ana beceriden oluşmaktadır.

1.1.3. Cebirsel Düşünmenin Gelişim Düzeyleri

İngiltere’ de Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS) tarafından 13-15 yaş öğrencileri için yapılan cebir projesinin bulgularına göre öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlamalarının gelişimi sıralı olarak 4 ana safhada incelenebilir.(Hart vd.,1998)

Düzyey 1: Bu safhada tümüyle aritmetik işlemlerin sonucunda bir harfin değerini bulma, harfleri birer nesne adı olarak almak suretiyle sonuçlandırma veya içerdiği harflere rağmen bu harflere değer vermeden bir işlemi sonuçlandırma şeklindeki soruların çözülebildiği safhadır.

Düzyey 2: Bu düzey, 1. düzeyle soyutluluk bakımından aynı olup, farklılık soruların daha karmaşık olmasıdır.

Düzyey 3: Bu düzey harflerin bir bilinmeyen olarak algılandığı ve kullanılabilirdiği düzeylerdir.

Düzyey 4: Bu düzeyde çocuklar 3. safhadakilere benzer fakat daha karmaşık ifadelere anlam yükleyebilir ve işlemleri sonuçlandırabilir. (Akt.: Altun 2005).

1.1.4. Cebir Öğreniminde Karşılaşılan Zorluklar, Hatalar ve Kavram Yanılgıları

Öğrenciler olası hatalarla ve kavram yanılgıları ile olası sonuçlara ulaşmadan, kontrol etmeyi ve olasılıkları düşünmemektedir. Öğrencilerin birkaç hata yapmasını beklemek yerine olası sonuçlara ulaşmadan, hatalar üzerinde çalışmak gerekir. Öğrencilerin hatalarına dikkati çekerek öğrenmeleri sağlanabilir. Yanlış hesaplarından yola çıkarak doğru sonucu bulmaları istenebilir; fakat sürekli yanlış hatalar yapmalarına olanak sağlanırsa yanlış metodu benimseyebilirler. Yine de doğru ve yanlış cevapları karşılaştırarak doğru metodu bulmak iyi bir yöntemdir. Bu şekilde öğrenciler diğer soruları kendi mantık ve yaratıcılıklarını kullanarak çözerler.

Araştırmacılar yıllarca öğrencilerin yaptığı hataları toplamışlardır. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir:

- Öğrenciler, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ifadesinin $\frac{1}{a+b}$ veya $\frac{2}{a+b}$ ifadesine eşit olduğunu düşünmektedirler.
- Öğrenciler, $(a + b)^2$ ifadesinin açılımını $a^2 + b^2$; $(a + b)^3$ ifadesinin açılımını $a^3 + b^3$ şeklinde tanımlamaktadırlar.

- $3x + 4$ ifadesinden anlaşılın 7 veya $7x$; $2a + 3b$ ise $5ab$ veya $6ab$ olarak gösterilebilmektedir.
- Öğrenciler, genelleme yaparken bütün sayı kümelerini dikkate almadan tüm durumları düşündüklerini ifade ederler. Örneğin; bir çift sayı için $2n$ 'i düşünmesi istendiğinde, farklı sayılar için her zaman ifadenin çift sayı olduğunu, sonra $2n + 2n$ toplamının da çift sayı olduğunu ifade etmektedirler. Kesirler ve ondalıklı sayılar için sonucun doğru olmayabileceğini düşünmemektedirler.
- $axb, ab, a + b$ cebirsel ifadeleri arasında da karışıklık olabilir. ab iki basamaklı bir sayı olmak üzere $ab = 10a + b$ şeklindedir. Cebirde sayılar yan yana yazıldığında ab iki basamaklı sayısını soruda axb ya da $a + b$ olarak anlaşılabilir. Örneğin $\frac{23}{4}$; $\frac{2+3}{4}$ veya $\frac{2x3}{4}$ değildir.

Akkaya (2006)' nın çalışmasında elde edilen bulgulara göre öğrencilerde oluşan kavram yanılgıları şu şekilde belirlenmiştir:

1. Harflerin matematikte bir anlamı yoktur. Öğrencilere göre harfler sözel sembollerdir ve bu yüzden sayılar arasında yeri yoktur.
2. Harfler sayılar gibi davranmaz. Öğrenciler, harflerin kullanılmasının keyfi olduğunu ve diğer harflerle ilgisinin olmadığını anlayamamaktadırlar.
3. Harflerin basamak değeri vardır. Aritmetikte harfler genellikle sayıların basamaklarındaki bilinmeyen değerler için kullanılması ve aritmetiğin diğer konularında da harflerin benzer kullanımları öğrencilerin harfleri bu şekilde anlamalarını desteklemektedir.
4. Harfler nesnelere kısaltmasıdır. Örneğin $2k$ ifadesinin 2 kalemi temsil ettiği düşünülmektedir.
5. Harfler alfabetik konumlarına göre değer alırlar. Örneğin, c harfi alfabede üçüncü sırada olduğundan değerinin 3 olacağı düşünülmektedir.
6. Harfler alfabede olduğu gibi sıralanırlar.
7. “=” işareti daima bir sonuç üretir.
8. “+” ve “_” işareti daima bir sonuç üretir.

Öğrencilerin, cebiri anlamakta zorlanmalarının diğer nedenleri Dede (2005)'in çalışmasında şu şekilde yer almıştır:

- Cebirsel ifadeleri sadeleştirememeleri,

- Aritmetikten cebire geçişte yaşadıkları zorluklar (Dooren, Verschaffel, Ongehena 2003; Van Ameron, 2003),
- Denklemleri yanlış yorumlamaları (Real, 1996),
- Cebirsel sözel problemleri denklem olarak yazmadaki sıkıntıları (Dede, 2004; Herscovics Kieran, 1980; MacGregor and Stacey 1996; Real 1996; Stacey and MacGregor, 2000)
- Öğrencilerin, denklemleri gerçek yaşamdan ayrı bir olguymuş gibi algılamaları (Pope, 1994).

1.1.5. Aritmetikten Cebire Geçiş

Okulda öğrenciler öncelikle aritmetiği öğrenmektedirler. Her şeyin belirgin olduğu aritmetikten cebire geçiş süreci öğrencileri zorlayabilmektedir. Bu sürecin incelenmesi ve karışıklığa yol açan etkenlerin ortadan kaldırılması için gerekli önlemlerin alınması gerekmektedir.

Cebir ve aritmetik arasındaki benzerliklere ve farklılıklara yakından bakmak öğrencilerin cebir öğrenimiyle karşılaştıkları güçlükleri anlamamıza yardımcı olur. Cebir ve aritmetik arasında harflerin, sembollerin, ifadelerin yorumu ve eşitlik kavramına ilişkin farklılıklar vardır. Örneğin; cebirsel harfler değişkenler ya da bilinmeyen sayıları gösterirken, aritmetik harfler genellikle kısaltma ya da birimdir. Aritmetik ve cebir aynı zamanda birbirine bağlıdır. Örneğin, cebir ağırlıklı olarak aritmetiksel işlemlere dayanır ve aritmetiksel ifadeler bazen cebirsel olarak düşünülür.

Akkaya (2006) çalışmasında aritmetiğin ve cebirin karşılaştırmalı özelliğini vermiştir. Aşağıda verilen tabloda karşılaştırmalı olarak 10 özellik üzerinde durulmuştur.

Tablo 1. Aritmetik ve cebirin özelliklerinin karşılaştırılması

Özellikler	Aritmetik	Cebir
1	Genel amaç: sayısal bir çözüm bulmak	Genel amaç: problem çözümü Metotlarını genelleştirmek ve Sembolize etmek

2	Belli sayı durumları genelleştirilir.	Sayılar arasındaki ilişki genelleştirilir.
3	Tablo, hesaplama aracı olarak kullanılır.	Tablo, problem çözme aracı olarak kullanılır.
4	Sabit sayıların kullanılması	Değişkenlerin kullanılması
5	Harfler nesnelere ya da ölçüm etiketleridir.	Harfler değişkenler ya da bilinmeyenlerdir.
6	Sembolik ifadeler sonuçları gösterir.	Sembolik ifadeler sonuçlar ve süreçler olarak görülür.
7	Akıl yürütme bilinen değerlerle yapılır.	Akıl yürütme bilinmeyenlerle yapılır.
8	Eşit işareti sonuç belirtir.	Eşitlik işareti denklik belirtir.
9	Bilinmeyenler sonuç olarak belirlenir.	Bilinmeyenler başlangıç noktasıdır.
10	Bir bilinmeyenli lineer problemler kullanılır.	Denklemler sistemi ile çözülebilen problemler kullanılır.

Aritmetik ve cebir alanlarında harflerin kullanımındaki farklılıklar öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte zorluk çekmelerine neden olabilmektedir. Bunun yanı sıra tabloda belirtildiği üzere farklılıklardan bir diğeri aritmetiğin sonuçla ilgilenirken, cebirin süreçle ilgilenmesidir. Örneğin aritmetikte sonucu bulmak önemliyken, cebirde önce sürecin anlaşılıp değişkenlerle gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra sonuca ulaşmak esastır.

1.1.6. Ortaöğretim Matematik Öğretiminde Cebir Öğretiminin Yeri

Cebirsel düşünmenin başladığı ilk yer matematik derslerinin cebir alt öğrenme alanıdır. Matematik programı değişmeden önce cebire giriş konuları

ilköğretim 7. sınıfta yer almaktaydı. Bu durum yeni matematik programında değişmiştir. Cebir öğrenme alanı, İlköğretim 1-5. Sınıf Matematik Dersi Öğretim Programı'ndaki örüntüler alt öğrenme alanının kısmi bir uzantısı olarak ele alınmaktadır. İlköğretimin 6-8. sınıflarında öğrencilerin örüntüdeki kuralı genellemesi ve harfle ifade etmesi, temel beceri olarak ele alınmaktadır. Bu genellemeler, daha sonra bir değişkenin diğer bir değişkene bağlı olarak değiştiği iki bilinmeyenli denklemlerle ilişkilendirilmekte ve kavramların daha anlamlı öğrenilmesine yardımcı olmaktadır.

Ortaöğretim düzeyinde cebir öğrenimi, diğer düzeylere göre daha soyut durumdadır. Bu düzeyde öğrenciler grafiklerle, tablolarla, sözel kurularla ve sembollerle ifade edilmiş doğrusal fonksiyonlarla karşılaşmaktadırlar. Doğrusalın dışında doğrusal olmayan bazı fonksiyonlarla da karşılaşacaklardır. Bu düzeye ulaşana kadar geçen süreçte atılmış olacakları daha somut olan temeller, öğrencilerin geldikleri soyut düzeyde edinecekleri bilgileri anlamlandırmalarını sağlayacaktır.

NTCM (2000), her seviyede cebir müfredatının öğrencilerin cebirsel düşüncülerinin geliştirilmeye odaklanması gerektiğini önermektedir. Ülkemizde gerçekleştirilen matematikte reform hareketleri problem çözme, kavramsal anlama ve matematiksel düşünmeye daha özel olarak cebirsel düşünmeye vurgu yapmaktadır. Ortaöğretim matematik programının cebir alt öğrenme alanında geliştirmeyi hedeflediği beceriler; matematiksel model kurabilme, matematiksel düşünme, problem çözme, iletişim kurma, ilişkilendirme ve akıl yürütmedir.(MEB, 2005)

Ortaöğretim Matematik Dersi Programında cebir öğrenme alanı 9, 10, 11 ve 12. sınıf öğretim programlarında yer almaktadır. 9.sınıf öğretim programında yer alan 2 temel öğrenme alanından biri olan cebir öğrenme alanı, programda oldukça geniş ve önemli bir yer almaktadır. Bu bağlamda 9.sınıf cebir öğrenme alanı ilköğretimden ortaöğretime geçişte bir köprü ve üst sınıflara geçerken bir zemin teşkil etmektedir.

MEB (2005) Ortaöğretim Matematik Dersi Programında 9. Sınıflardaki cebir öğrenme alanı 3 alt öğrenme alanından oluşmaktadır:

- 1.Kümeler
- 2.Bağıntı, Fonksiyon ve İşlem
- 3.Sayılar

Araştırmamızda da ele aldığımız sayılar alt öğrenme alanının kazanımları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

Tablo 2. Sayılar alt öğrenme alanları ve kazanımlar

Alt öğrenme alanları	Kazanımlar
Doğal sayılar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Doğal sayılar kümesinde eşitliğin özelliklerini ve sadeleşme kurallarını belirtir. 2. Bir doğal sayının pozitif doğal sayı kuvvetini açıklar ve üslü ifadelere ait özellikleri gösterir. 3. Bir doğal sayının herhangi bir tabana göre yazılmasını göstererek değişik tabanlarda verilen sayılar arasında işlem yapar. 4. Asal sayıyı ve aralarında asal sayıları belirterek bir doğal sayıyı, asal çarpanlarına ayırır ve pozitif bölenlerinin sayısını bulur. 5. 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 ve 6, 15, 18 vb. ile bölünebilme kurallarını belirler. 6. İki ya da daha çok doğal sayının en büyük ortak bölenini ve en küçük ortak katını bulur.
Tamsayılar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tam sayılar kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yaparak toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini belirtir.
Rasyonel sayılar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Rasyonel sayıları ifade eder ve rasyonel sayıların eşitliğini açıklar. 2. Rasyonel sayılar kümesinde

	<p>toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yaparak toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini belirtir.</p> <p>3. İki rasyonel sayıyı bir eşitsizlik zinciri içinde sıralar ve bu sayıları sayı doğrusunda gösterir.</p> <p>4. İki rasyonel sayı arasında başka bir rasyonel sayı bularak rasyonel sayılar kümesinin yoğun olduğunu belirtir.</p> <p>5. Rasyonel sayıların ondalık açılımını yapar.</p>
Gerçek sayılar	<p>1. Rasyonel olmayan sayıların (irrasyonel sayıların) varlığını belirtir.</p> <p>2. Gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini belirtir.</p> <p>3. Gerçek sayılarda eşitsizliğin özelliklerini belirtir.</p> <p>4. Gerçek sayılar kümesinde açık, kapalı ve yarı açık aralıkları ifade eder.</p> <p>5. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini değişik sayı kümelerinde bulur.</p>
Mutlak değer	<p>1. Bir gerçek sayının mutlak değerini açıklar ve mutlak değer ile ilgili özellikleri belirtir.</p> <p>2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli</p>

	<p>bir veya iki mutlak değerli terim içeren denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.</p>
Üslü sayılar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bir gerçek sayının pozitif tam sayı ve negatif tam sayı kuvvetini açıklar ve üslü sayılara ait özellikleri gösterir. 2. Üslü sayıların eşitliğini ifade eder ve üslü sayılarla ilgili uygulamalar yapar.
Köklü sayılar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Negatif olmayan bir gerçek sayının karekökünü ve üslü biçimini açıklayarak kareköklü sayılara ait özellikleri belirtir ve kareköklü sayılarla ilgili uygulamalar yapar. 2. Bir gerçek sayının pozitif tam kuvvetten kökünü ve üslü biçimini açıklayarak köklü sayılara ait özellikleri, üslü sayıların özelliklerinden yararlanarak gösterir ve köklü sayılarla ilgili uygulamalar yapar.
Problemler	<ol style="list-style-type: none"> 1. Oran ve orantı, yüzde ve faiz, hareket vb. günlük hayatla ilgili problemleri çözer.

1.1.7. Problem Cümlesi

10.sınıf öğrencilerinin matematik dersi sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeyleri ve düşünme süreçlerinin nasıldır?

1.1.8. Alt Problemler

1. 10.sınıf öğrencilerinin sayılar alt öğrenme alanındaki cebirsel düşünme düzeyleri nelerdir?

2. Farklı cebirsel düşünme düzeyinde bulunan 10.sınıf öğrencilerinin matematik dersi sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeyleri ve düşünme süreçleri nasıldır?

1. 2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın konusunu oluşturan cebir öğrenme alanı geçmişte uygulanan yöntemlere bağlı olarak öğrenenler tarafından matematiğin en zor alanlarından birisi olarak görülmektedir. Bununla birlikte cebir, günlük yaşamda önemli rol oynamaktadır. Günlük yaşamda karşılaşılan problemleri anlamada ve çözüm yolu bulmada cebir önemli bir araç olarak ele alınması gerekir (Akkaya, 2006).

Cebir öğretimine ilköğretim düzeyinden itibaren başladığında etkili sonuçlar alınabilmektedir. Erken dönemde başlanan cebir öğrenimiyle, öğrencilerin cebirsel kavramları anlamalarında ve cebirsel düşünce düzeylerinde önemli ilerlemeler kaydedilmektedir.

Bu çalışmada zor bir alan olarak görülen cebir öğrenme alanında öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri belirlenerek düşünme düzeylerindeki benzerlikler ve farklılıkların belirlenmesi amaçlanmıştır. Bir anlamda öğrencilerin düşünme süreçleri incelenerek, düşünme süreçlerini geliştirmede öğretmenlerin öğrencileri anlama, düşünceleri yorumlama becerisi büyük bir öneme sahiptir. Bu şekilde etkili çözüm yollarını keşfedebiliriz.

Araştırmada, 10.sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini belirleyerek; farklı düzeylerde bulunan öğrencilerin sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeylerini ve düşünme süreçlerini tespit etmek amaçlanmıştır.

1.3. Araştırmanın Önemi

Bu araştırma farklı cebirsel düşünme düzeyinde bulunan öğrencilerin başarı düzeylerini belirlemeyi amaçlamaktadır. Wanjala and Orton (1996) tarafından yapılan araştırmanın sonuçları, öğretmenlerin öğrencilerin yapabilecekleri muhtemel hataların farkında olduklarını göstermekte, ancak öğretmenlerin çoğunun temel bilgi eksiklerinin olduğuna işaret etmektedir. Baki (1998) tarafından yapılan araştırmada da, öğrencilerin cebirsel işlemlere yönelik yapabilecekleri hataları tahmin etmede kıdemli öğretmenlerin kıdemsiz öğretmenlere göre daha fazla neden gösterdikleri belirlenmiştir. Yine, Ardahan ve Ersoy (1998) tarafından yapılan bir çalışmada da, öğretmenlerin yanılıklarının, öğrenci yanılıklarını önemli ölçüde etkilediği tespit edilmiştir. Bu bağlamda öğretmenlerin bu konudaki yeterlilikleri, bilgi ve tecrübeleri önemli bir yere sahip olmaktadır. Bundan dolayı öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin geliştirilmesinde öğretmenlerinin bu süreci anlama, açıklama, yorumlama yeterlilikleri ve geliştirdikleri çözüm yolları önemli bir etkililiğe sahiptir.

Bu araştırma, öğrencilerin cebir öğrenme alanındaki başarı düzeylerini belirlemek suretiyle, matematiğin önemli ve bir o kadar da zor olarak görülen sayılar alt öğrenme alanının kazanımlarının en etkili biçimde nasıl öğretilbileceği konusunda yol göstermesi bakımından önemlidir.

1.4. Araştırmanın Varsayımları

- Araştırmada kullanılan tüm testleri öğrencilerin tüm ciddiyet ve samimiyetle cevaplayacakları,
- Araştırmanın örneklemini oluşturan öğrenciler düşüncelerini ifade etmede, açıklamada ve uygulamada gerekli yeterliliğe sahip oldukları,
- Öğretmenler konularda yeterli bilgiye ve donanıma sahip oldukları,
- Öğretmenler araştırmanın konusu ile ilgili, kendilerini geliştirme ve çözüm yolları bulmada hevesli oldukları,
- Testi geliştirmek için görüşlerine başvurulmuş uzmanların alanlarında yeterli oldukları varsayılacaktır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırmada öngördüğümüz bazı sınırlılıklar şunlardır:

1. Ankara ili genel lisede okuyan 10. sınıf öğrencileri ile sınırlı tutulacaktır.
2. Öğrencilerin sınıf ortamından ayrı olarak çalışmaya katılacak olmasıdır. Ayrıntılı görüşmeler ve derinlemesine çalışma açısından ayrı bir ortam tercih edilecektir.
3. Öğrencilerin ölçme sorularına verecekleri yanıtlar ve öğretmenlerin bilgi ve yorumlamaları ile sınırlı tutulacaktır.
4. Araştırma 9. sınıf cebir öğrenme alanı sayılar alt öğrenme alanının bazı kazanımları ile sınırlı tutulacaktır.

1. 6. Tanımlar / Terimler

Cebir : Cebir bir dildir, cebir bir problem çözme aracıdır, cebir bir düşünme aracıdır, cebir bir okul dersidir (Dede ve Argün, 2003).

Cebirsel düşünme: Cebirsel düşünme; durumlardan bilgi çıkarımında bulunurken, bu bilgiyi matematiksel olarak kelimelerle, diyagramlarla, tablolarla, grafiklerle sunarken, eşitlik çözerken, önermeleri kontrol ederken ve fonksiyonel ilişkileri incelerken matematiksel sembol ve araçların kullanımınıdır (Herbert and Brown, 1997).

Düzyey: Bir nesnenin, bir kimsenin başka nesnelere veya kimselere göre olan değer ve yücelik derecesi, seviye: *"Eğitim düzeyi. Kültür düzeyi."*

Ortaöğretim: Ortaöğretimin amacı; öğrencilere asgarî ortak bir genel kültür vermek, birey ve toplum sorunlarını tanıtmak, çözüm yolları aramak, ülkenin sosyoekonomik ve kültürel kalkınmasına katkıda bulunacak bilinci kazandırarak, öğrencileri ilgi, yeti ve yetenekleri doğrultusunda, yükseköğretime, mesleğe, hayata, iş alanlarına hazırlamaktır.

BÖLÜM 2

İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Yapılan çalışmalar sonucunda, cebir öğretimi ve cebirsel düşünme üzerine yurt içinde ve yurt dışında yapılmış çok sayıda araştırmaya ulaşılmıştır. Bu araştırmalara EBSCO, ERIC, GOOGLE vb. veri tabanlarından 1997- 2010 yılları arasının taranması ve eldeki mevcut kaynaklarının incelenmesi suretiyle ulaşılmıştır. Yapılan bu çalışmaya benzerlik gösteren bazı çalışmalar ve bulguları aşağıda özetlenmektedir:

Gülpek (2006), ilköğretim 7. ve 8.sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin gelişimlerini incelemek amacıyla bir çalışma yapmıştır. Çalışmanın verileri, CSMS tarafından 11-16 yaş öğrencilerinin cebirsel ifadeleri anlama düzeyini ortaya çıkarmak amacıyla yapılan bir araştırmada kullanılan testin Türkçeye uyarlanmasıyla oluşturulan testin 211 öğrenciye uygulanmasıyla elde edilmiştir. 20 sorudan oluşan test soruları cebirsel ifadelerin karmaşıklığı ve harflerin üstlendikleri soyutluk derecesi dikkate alınarak sıralanmıştır. Hazırlanan test ders öğretmenleri tarafından, öğrencilerin cebirsel ifadelerle işlem yapmayı öğrenmesinin ardından uygulanmıştır. Uygulama sonucunda, önce öğrencilerin soruları doğru cevaplandırma sıklıklarına göre cebirsel düşünceleri 4 düzeye ayrılmış, sonra bu düzeylere ait soruları doğru cevaplandırmaları göz önünde tutularak öğrencilerin bu 4 düzeyden birinde bulunma yüzdeleri belirlenmiş ve sınıf düzeyleri arasında bu düzeylerdeki gelişimleri gözlenmiştir. Elde edilen bulgular sonucunda 7. ve 8.sınıftaki öğrencilerin cebirsel düşüncelerinde sınıf düzeyleri arasında çok az bir artış olduğu ve bu gelişimin öğrencinin ders içindeki başarısını etkilediği görülmüştür.

Harfli sembollerin kullanımı ile ilgili olarak Dede, Yalın ve Argün (2002), 8.sınıf öğrencilerinin değişken kavramını anlamaları ile ilgili olarak yaptıkları çalışmada, 120 öğrenciye 26 açık uçlu sorudan bir sınav uygulanmıştır. Ayrıca bu gruptan 15 öğrenci ile de bu sorular üzerinde yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Elde edilen veriler öğrencilerin değişken farklı kullanımlarını bilememe, değişkenin genelleme yapmadaki rolünün ve öneminin farkında olamama, değişkenin matematiğin alt bilim dallarındaki temsil yeteneğinin bilememe ve yorumlayamama, matematikte daha önceden öğrenilen bilgilerin yanlış transferi, değişken kavramıyla ilgili işlem yapabilme yetersizliğini ortaya koymuştur.

Baş, Erbaş ve Çetinkaya (2011), ortaöğretim matematik öğretmenlerinin, öğrencilerinin cebirsel düşünme yapıları hakkındaki bilgi ve düşüncelerini ortaya

çıkarmak ve bu bilgilerin gerçekte öğrencilerin düşünme yapılarını ne ölçüde yansıttığını belirlemeye çalışılmıştır. Araştırmanın katılımcıları 49 dokuzuncu sınıf öğrencisi ve 3 matematik öğretmenidir. Çalışmada ilk olarak öğrencilerin, bir genelleme etkinliği üzerinden cebirsel düşünme yapıları belirlenmiş, daha sonra öğretmenlerin bu düşünme yapısı üzerinde bilgileri ve beklentileri araştırılmıştır. Veriler, öğretmenlerle yapılan görüşmeler ve öğrencilerin çözüm kağıtlarından oluşmaktadır. Verilerin nitel analizi sonucunda, öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarına ilişkin beklentileri ile öğrencilerin gerçek performansları arasında önemli farklar olduğu, ancak çözüm kağıtlarını sistemli bir şekilde incelediklerinde, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yapılarını daha iyi anladıkları bulunmuştur.

Dede (2005), öğrencilerin denklemleri cebirsel sözel problemler yardımıyla yorumlarken kullandıkları stratejiler belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun için 5 açık uçlu sorudan oluşan bir testten yararlanılmıştır. Öğrencilerin, bu araştırmada verilen birinci dereceden denklemleri 8 kategoride yorumladıkları belirlenmiştir. Bu kategoriler doğru betimleme, ters anlama, sayı ilişkisi, mekanik denklem kullanımı, doğrudan ilişki, fiyat ağırlık vs. ilişkisi ekleme, özelleştirme ve direkt yazma olarak belirlenmiştir. Bu kategoriler genel anlamda incelendiğinde, öğrencilerin verilen denklemlerdeki harflerin neyi/neleri temsil ettiğine yönelik bilginin yetersiz düzeyde olduğu anlaşılmaktadır. Çalışma öğrencilerde denklem kavramının doğru bir şekilde oluşturulmasında öğretmene düşen sorumluluklardan hareketle öğretmenlere önerilerde bulunulmuştur.

Mcgregor and Stacey (1997), CSMS araştırma projesinden yola çıkarak öğrencilerin cebirsel harfleri yorumlarken literatür içinde gözden kaçırılan yanlış yorumların nerelerden kaynaklandığını ve bu yanlış yorumların bilişsel seviyelerle ilişkilendirilip ilişkilendirilemeyeceği üzerine bir araştırma yapmışlardır. Araştırma ortaokullarda cebir öğretiminin kavramsal ve dilsel gereklerinin araştırıldığı büyük bir projenin bir bölümü olduğu ifade edilmiştir. Bu projede bilgi, 24 Avusturya okulu içinde 7. ve 8. Sınıflarda yaklaşık 2000 öğrenciye verilen kâğıt-kalem testlerinden elde edilmiştir. Bazı okullar 2, 3, 4. sınıf seviyeleri içinde aynı testi kullanmıştır, böylece bu sınıf seviyeleri için karşılaştırmalı bilgi sağlanmıştır. Araştırma çalışması 3 kısım içinde tartışılmıştır. Öncelikle hiç cebir öğretilmemiş 11-12 yaş öğrencilerinin cebirsel harfleri yorumlama yolları incelenmiştir. Ardından, onların normal 7. Sınıf müfredatlarının biçimlenmiş kısmı olan 8 haftalık cebir ünitesi içinde bu öğrenciler

tarafından yapılan gelişimin yorumu yapılmıştır. Ardından 22 okul içinde 7 den 10. Sınıfa kadar öğrenciler için kullanılan testlerin sonuçları raporlanmıştır. 10.sınıf öğrencileri 7.sınıf öğrencilerinden çok daha başarılı olmuşlardır. Fakat kolay maddelerde bile 10. sınıf öğrencilerinin %75 den azı başarılı olabilmıştır. 1.yıldan daha sonraki yıllarda ilerleme olsa da zor maddeler için başarı oranı % 50 ye ulaşamadığı gözlenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin genellikle harfleri ve cebirsel ifadeleri yorumlamalarını; sezgiye ve tahmine dayalı, bildikleri diğer sembol sistemlerle benzeterek ya da yanıltıcı öğretim materyalleriyle yanlış temel üzerine oluşturdukları görülmüştür. Bu yanlış yorumlar cebirin anlaşılmasını zorlaştırdığı, fark edilmez ve düzeltilmezse yıllarca devam edebileceği ifade edilmiştir. Araştırmacılar, genç öğrencilerin yanlış yorumlarının bilişsel gelişimin bir göstergesi olmadığını, bu yanlış yorumlamaların yeni bir gösterimi anlamlandırmak için yaptıkları iyi niyetli girişimler olduğu ya da diğer içeriklerdeki anlamları transfer ederek oluşturdukları görüşünü savunmuşlardır. Test edilen okullar içinde bazı sınıflardan elde edilen başarı ve diğerlerinden elde edilen zayıf performansın cebire başlamada farklı yaklaşımlar, öğretim materyalleri, öğretim stilleri ya da öğrenme ortamları gibi bazı faktörlerin güçlü bir etkisi olduğu da ifade edilmiştir. Çalışmada öğrencilerin harfleri yanlış yorumlamalarının bir sebebi de öğrencilerin yeni öğrenmelerdeki müdahaleler olduğu belirtilmiştir. Matematik müfredatının diğer bölümleri içinde cebirsel kavramlar kullanılmadığı zaman öğrencilerin bu gösterimleri unuttukları, yeni kavramlar ve gösterimler tanıtıldığında öğrencilerin önceden öğrendikleriyle bütünleştiremedikleri ve farkı ayırt edemedikleri gözlenmiştir. Öğretmenlere, cebir öğreniminde öğrencilerin matematiksel gösterim ve harflerle ilgili inançlarına dikkat edilmesi ve cebir için temel oluşturan deneyimler kazandırmaları tavsiye edilmiştir.

Hallagan (2006), öğretmenlerin öğrencilerinin eşdeğer ifadeler ve dağılma özelliği içeren cebirsel görevlerinin yanıtlarına model oluşturmalarını ele almıştır. Matematik öğretmeni olan Bruce'un öğrencilerin eşdeğer ifadeler ve dağılma özelliği ile ilgili çalışmalara verdikleri yanıtları tanımlamak için izlediği yol, oluşturduğu model ile öğrencilerin ve öğretmenlerin yaptıkları yanlışlar anlatılmaktadır. Bu çalışmada öğrencilerin düşünme yollarına eşlik eden kâğıtlar ve öğrencilerin çalışma yapraklarından oluşan bir kütüphane oluşturmak amacıyla iki aktivite tanımlanmıştır. Bu aktiviteler öğretmenlerin öğrencilerinin cebirsel düşüncelerinin modelini açığa vurmalarına yardım etmektedir ve geliştirdikleri modeli bir ileri seviyeye taşımaktadır. Analizin sonuçları öğretmen cebirsel öğretimde değişken kavramının rolü ile ilgili net

bir anlayış geliştirmiş olduğunu göstermektedir. Öğretmen ilk olarak görsel stratejiler kullanmıştır ve öğrencilerin iki ifadenin eşitliğini anlamalarına yardımcı olmada yararlılığını kavramaya başlamıştır. Bu çalışma Bruce'un eşdeğer ifadelerin öğretiminde kendi uygulamalarını yorumlamasını açıklamaktadır. Bu iki aktiviteyle birlikte Bruce'un geliştirdiği model öğrencilerin eşdeğer ifadeler ile ilgili cebirsel düşüncelerindeki çeşitliliği kanıtlamıştır. Öğrencilerinin düşüncelerini ifşa etmeleri çalışma yaprakları hazırlamaları istenmiştir. Bu çalışma yapraklarında öğrencilerin düşüncelerini açığa vurmalarını sağlayacak sorular hazırlanmıştır. Örneğin, öğrencilere s br uzunluklu bir karenin dışına 1 br uzaklıkta olacak şekilde bir kare çizmelerini ve oluşan yeni şeklin çevresini 4 farklı şekilde hesaplamaları istenmiştir ve bu ifadelerin eşitliğini açıklamaları istenmiştir.

a. $4(s + 1)$

b. $s + s + s + s + 4$

c. $2s + 2(s + 2)$

d. $4(s + 2) - 4$

e. A dan d ye bütün şıkların sonuçlarının neden $4s + 4$ olduğunu açıklayınız şeklindedir.

Baki ve Kartal (2004), çalışmasında ortaöğretim öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasını, işlem ve kavram bilgisi bağlamında değerlendirilmiştir. Bağıntı-fonksiyon-işlem, sayılar, polinomlar, çarpanlara ayırma ve birinci dereceden denklemler gibi konuları içeren işlemsel ve kavramsal bilgi gerektiren 20 soruluk uzun cevaplı yazılı sınavlar geliştirilmiştir. Pilot çalışmalar sonucunda sınavlara bağlı olarak öğrencilerin cebir bilgilerini karakterize eden bir ölçek geliştirilmiştir. Sınavlar beş ayrı lisede 250 10 ve 11.sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Öğrencilerin çözümleri geliştirilen karakterizasyon ölçeğine göre gruplanmış, değerlendirilmiş ve yorumlanmıştır. Sonuçlar değerlendirildiğinde öğrencilerin formülleri bilmesi, hesaplamaları doğru yapması ile değil, kavramları, işlemleri anlamasına ve matematiksel düşünmesinin gelişmesine bağlı olduğu çıkmıştır. Matematik öğretirken işlemsel çözüm yollarından çok kavram ve ilişkilere öncelik verilmesinin bu sorunu önemli ölçüde düzeltereğini öne sürmüşlerdir.

Çelik (2007), çalışmasında Structure of Observed Learning Outcomes (SOLO) taksonomisine göre matematik öğretmeni adaylarının cebirsel düşünme becerilerini, sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma, çoklu gösterimlerden yararlanma ve genellemeleri formüle etme ana başlıklarında karakterize etmektedir. Nitel araştırma

yönteminin benimsendiği bu çalışma, 8 matematik öğretmen adayı üzerinde yürütülmüştür. Veri toplamak amacıyla cebirsel düşünme becerilerini kullanmayı gerektiren 11 problem hazırlanmış ve öğretmen adayları bu problemler üzerinde çalışırken onlarla klinik mülakatlar yürütülmüştür. Klinik mülakatlar boyunca öğretmen adayları istedikleri yerde, istedikleri şekilde Derive yazılımını kullanma imkânına sahip olmuştur. Bu şekliyle Derive, araştırmacıya öğretmen adaylarının düşüncelerine ait izleri gözlemleyebileceği bir pencere sunacaktır. Yazıya dökülen mülakat verileri, öğrencilerin kâğıt-bilgisayar üzerindeki çalışmaları ve araştırmacının notları bu çalışmanın veri kaynaklarını oluşturmaktadır. SOLO taksonomisine göre yapılan analizde, çoğu öğretmen adayı sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma, çoklu gösterimlerden yararlanma ve genellemeleri formüle etmede ilişkilendirilmiş yapı düşünme seviyesinin altında yer almıştır. Bu durum sahip oldukları bilgi ve becerileri tutarlı bir yapı içerisinde bütünleştiremedikleri anlamına gelmektedir. Çalışma sonuçlarına bağlı olarak hizmet öncesi öğretmen eğitimi programları ve araştırmacılara çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

Çağdaşer (2008), çalışmasında ilköğretim 6. sınıf öğrencilerinin yapılandırmacı yaklaşımla cebir öğretimi sonucunda cebirsel düşünme düzeylerindeki değişimi tespit etmek amacıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırmaya 34'ü kız, 21'i erkek olmak üzere toplam 55 öğrenci katılmıştır. Okulun rastgele seçilen 6/A ve 6/B şubelerinde öğrenim gören tüm öğrenciler deneysel çalışmaya katılmışlardır. Yapılandırmacı yaklaşıma uygun olarak hazırlanan ve 6. sınıf Matematik Dersi Programında cebir öğrenme alanına ait kazanımların sınırları içerisinde düzenlenen uygulama etkinliklerinde Altun (2005)'in 'ilköğretim ikinci Kademedeki Matematik Öğretimi' adlı kitabından ve benzer kaynaklardan yararlanılmıştır. Etkinlikler, programda öngörülen süre çerçevesinde on ders saati ile sınırlandırılmıştır. Etkinliklerin seçiminde ve hazırlanmasında sınıfların fiziksel yapısı ve araç-gereçlerin grup çalışmasına uygunluğuna da önem verilmiştir. Öğrencilere, yapılandırmacı yaklaşımla cebir öğretimi sonucunda cebirsel düşünme düzeylerindeki değişimin tespiti için uygulamanın başında ve sonunda "Cebirsel Düşünme Düzeyleri Testi" uygulanmıştır. Elde edilen bulgular sonucunda yapılandırmacı yaklaşımla cebir öğretiminin, 6.sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini anlamlı derecede arttırdığı görülmüştür. Ayrıca, yapılandırmacı yaklaşımla cebir öğretiminin 6. sınıf öğrencilerinin matematiğe yönelik tutumlarında yarattığı değişim de alt problemlerden biri olarak araştırılmıştır. Araştırmada kullanılan ölçek verileri değerlendirildiğinde, yapılandırmacı yaklaşımla öğretim sonucunda 6. sınıf

öğrencilerinin matematiğe yönelik tutumlarının önemli derecede olumlu yönde değişim gösterdiği tespit edilmiştir.

Yenilmez ve Avcu (2009), yaptıkları araştırmanın temel amacı, ilköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki başarı düzeylerini belirlemektir. Nitel araştırma yönteminin benimsendiği bu çalışmada yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu, Eskişehir merkezinde bulunan bir ilköğretim okulunda altıncı sınıfta okuyan 6 öğrenci oluşturmaktadır. Bu öğrenciler, matematik başarı düzeylerine göre ve her başarı düzeyinde (yüksek-orta-düşük) bir erkek ve bir kız öğrenci olacak şekilde seçilmiştir. Verilerin toplanması aşamasında, yarı yapılandırılmış görüşme tekniğine uygun olarak öğrencilere denklem kurma ve çözüme ile ilgili becerilerini yoklayan dört açık uçlu soru yöneltilmiştir. Araştırmada betimsel tarama modeli uygulanmıştır. Katılımcıların cebirsel ifadeler hakkında kendi özgün ifadelerine dayalı olarak elde edilen veriler kategorileştirilerek içerik analizi yoluyla değerlendirilmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre; öğrencilerin eşitliğin gösterimi ve korunumu sorularında problem yaşamadığı ancak denklem kurma ve kurulan denklemi çözüme problemlerinde zorluk çektikleri gözlenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre altıncı sınıf cebir konularının öğretimine ilişkin öneriler getirilmiştir.

De Los Santos ve Patton (2008) ise aritmetik ve cebir arasındaki farkı ortaya koymak yerine ikisi arasında bağlantıyı tespit etmek amacı ile araştırma yapmışlardır. Bu çalışmanın amacı öğrencilerin görsel, sayısal ve cebirsel gösterimler kullanarak kendilerini ifade etmelerini sağlamaktır. 7. ve 10. sınıf öğrencilerine dört tane "sayımı tahmin et" soruları; görsel, sayısal ve cebirsel gösterimleri ifade etmeleri istenerek uygulanmıştır. 7. sınıf öğrencilerinin görsel temsildeki yanıtları onuncu sınıf öğrencilerine göre daha yüksek bulunmuştur. Sayısal ve cebirsel temsilde 7. sınıf ve 10. sınıf öğrencilerinin verdiği cevaplar arasında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Araştırmacılar bu çalışmada kullanılan yarı-somut ve görsel modellerin, birçok öğrenci için aritmetik ve cebir kavramları arasındaki bağlantının sağlanabileceği vurgulanmıştır.

Birgin ve Girbiz (2009), ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerini belirlemeye çalışmışlardır. Çalışma özel durum yöntemiyle çalışılmıştır. Çalışma grubunu 50 altıncı, 50 yedinci ve 60 sekizinci sınıf olmak üzere 160 öğrenci oluşturmuştur. Öğrencilerin işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerini belirlemek amacıyla 6'sı işlemsel 6'sı kavramsal olmak

üzere 12 sorudan oluşan iki aşamalı çoktan seçmeli test gruplara uygulanmıştır. Verilerin analizinde nitel ve nicel yöntemler kullanılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin işlemsel bilgi gerektiren sorulardaki performanslarının yeterli düzeyde olmamakla beraber kavramsal bilgi gerektiren sorulardaki performanslarından daha iyi olduğu saptanmıştır. Öğretmenlere rasyonel sayıların öğretimi ile ilgili önerilerde bulunulmuştur.

Alexandrou-Leonidou and Philippou (2005), öğrencilere karmaşık gelen cebirsel görevlerin zorluğu ile ilgili öğretmen görüşleri ve inanışlarını incelemiştir. Bu çalışma için hazırlanan test 93 altıncı sınıf öğrencisine uygulanmıştır ve 50 öğretmenden hazırlanan 14 görev içeren test maddelerini zorluk sıralamasına sokmaları istenmiştir. Öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarını, muhakemelerini kısmen tahmin ettikleri görülmüştür. Öğrenciler, öğretmenlerin tahminlerinin tersine, resim ve diyagram soruları yerine, sözel denklemleri ve problemleri daha kolay yapmışlardır. Bu uyumsuzluk öğretmenlerin verimli öğrenme etkinliklerinin düzenlenmesinde yardıma ihtiyaç duyduklarına işaret etmektedir.

Erbaş ve Ersoy (2002), değişik okul ve sınıf düzeylerinde öğrencilerin temel cebir kavramları ile ilgili zorluk ve yanlışları olduğuna dikkat çekmişlerdir. Yaptıkları çalışmada incelenen araştırma problemi, farklı okullardan bir grup öğrencinin eşitlik çözmedeki başarı ve buna bağlı olarak karşılaştıkları güçlükler, yapılan hatalar ve kavram yanlışlarıdır. Öğrencilerin başarıları arasında okul tipi, sınıf düzeyi ve bir önceki yıl matematik notuna göre anlamlı farklar bulunurken, cinsiyete göre karşılaştırıldığında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Ayrıca, öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitlikleri, denklemleri çözmek için kullandıkları yanlış kurallamalar belirlenmiştir. Buna göre, düşük başarı seviyesindeki öğrencilerde ve okullarda yapılan hatalar daha çok yanlış kurallamalar odaklı iken, orta ve yüksek başarı seviyesinde hataların daha çok aritmetiksel veya işlemsel olduğu ortaya çıkmaktadır. Ayrıca ortalama başarı düzeyinin göreceli olarak daha yüksek olduğu okullarda öğrenci hataları daha iyi teşhis edilebilmiştir.

Sarıer (2003), ortaöğretim matematik öğretmenlerinin cebir öğrenimi ve öğretimi ile görüşlerini belirlemek amacıyla araştırma yapmıştır. Araştırma Ankara ilindeki okullardan tespit edilerek seçilmiş olan 6 matematik öğretmeni ile yapılmıştır. Verilerin analizinde öğretmenlerin görüşleri fenomenographic yöntemle karşılaştırılmış, kategorilere ayrılmış ve yorumlanmıştır. Fenomenographic yöntemi,

bireylerin çeşitli olaylara ve nesnelere karşı olan algılarından tanımlama kategorileri oluşturmaya çalışır. Araştırmada cebirin yapısının, öğrencilerin kapasitesinin, matematik ders kitaplarının, öğretmenlerin, müfredatın ve öğrencilerin cebire bakışlarının cebir öğrenimi ve öğretimini önemli derecede etkilediği sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, özdeşlik sayısının fazla olması, konunun harflerle ifade edilmesi, öğrencilerin temel bilgilerinin eksik olması ve ders işlerken öğretmenin seçtiği örneklerin çarpanlara ayırma öğrenimi ve öğretimini etkilediği sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmenlerin seçiminde öğretmenin okulu, mezun olduğu fakülte ve öğretim deneyimi dikkate alınmıştır. Öğrenci düzeyleri, öğretim deneyimi ve mezun olunan fakültenin öğretmenlerinin görüşlerini etkilediği görülmüştür.

Çıkla Akkuş (2004), çoklu temsil temelli öğretimin, geleneksel öğretim yöntemiyle karşılaştırıldığında yedinci sınıf öğrencilerinin cebir performanslarına, matematiğe karşı tutumlarına ve temsil tercihlerine olan etkisini araştırmayı amaçlayan bir çalışma yapmıştır. Ayrıca öğrencilerin cebirsel problemleri çözerken, çoklu temsilleri nasıl kullandıklarının ve tercih ettikleri temsil biçimini seçmelerinin nedenlerinin ortaya çıkarılması düşünülmüştür. Çalışma 8 hafta süreyle 4 tane yedinci sınıfta sürdürülmüştür. Cebir performansını değerlendirme amacıyla cebir başarı testi, temsil biçimleri arasında dönüştürme beceri testi ve Chelsea cebir tanı testi olmak üzere 3 araç kullanılmıştır. Verilerin analizi sonucunda, çoklu temsil biçimiyle öğretim yapılan deney grubunun cebir performanslarının kontrol grubuna göre daha yüksek olduğu ortaya çıkmıştır. Yapılan görüşmeler sonucunda, çoklu temsil biçimiyle öğrenim gören öğrencilerin verilen cebir problemleri için farklı temsil biçimlerini kullanabildikleri ve bunlardan verilen duruma en uygun olanını seçebildikleri ortaya çıkmıştır.

BÖLÜM 3

YÖNTEM

Çalışma ile farklı cebirsel düşünme düzeyinde bulunan 10.sınıf öğrencilerinin, ortaöğretim matematik programının cebir öğrenme alanının sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeylerinin belirlenmesi ve düşünme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu çalışma, sayılar alt öğrenme alanı ile ilgili bazı kazanımlar göz önünde bulundurularak hazırlanmış olan cebir testinin sonucu, öğrencilerin bir önceki yılki matematik notları ve matematik öğretmenlerinin görüşleri dikkate alınarak seçilen 6 öğrenci ile yapılan görüşmelerin yorumlanması suretiyle yapılan nitel bir çalışmadır.

Araştırma iki aşamalıdır. İlk aşama 10.sınıf öğrencilerine hazırlanan cebir testinin uygulanarak sonuçların değerlendirilmesidir. Bu uygulamadan sonra matematik öğretmenlerinin görüşleri ve öğrencilerin matematik notları dikkate alınarak yüksek, orta ve düşük seviyelerde, her seviyede 2 öğrenci olmak üzere, 6 öğrenci tespit edilmiştir. İkinci aşamada ise düşük, orta ve yüksek seviyedeki 6 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşme ile öğrencilere toplam 10 soru yöneltilmiştir. Bu sorular hazırlanırken de uygulanan cebir testinde olduğu gibi soruların sayılar alt öğrenme alanı ile ilgili bir kazanıma denk gelmesine özen gösterilmiştir. Bundan sonra ise öğrenci cevaplarının yorumlanması suretiyle başarı düzeyleri ve öğrencilerin düşünme süreçleri incelenmiştir. Aynı düzeydeki öğrencilerin farklılıkları belirlenmiştir.

Çalışma nitel bir çalışma olduğundan her seviyedeki öğrencilerin düşünme süreçlerinin incelenmesi için öğrenci cevaplarının yorumlanması büyük bir önem taşımaktadır. Bu nedenle öğrencilerin düşüncelerini ifşa etmelerinde heyecan faktörü, fiziksel bir rahatsızlık ya da herhangi bir etkenin olumsuz etkileyebileceği göz önünde bulundurularak seçim aşamasına birer öğrenci daha eklenerek bu öğrencilerle de görüşme yapılmasına karar verilmiştir. Daha sonra seçilen öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Öğrencilerin cevaplarının yeterliliği dikkate alınarak çalışmamızın 6 katılımcısı belirlenmiş ve bu öğrencilerin düşünme süreçleri yorumlanmıştır.

3.1. Araştırmanın modeli

Araştırmanın amacı ve problem cümlesi ele alındığında hem amaca hizmet etme hem de probleme en iyi cevabı teşkil etmesi açısından nitel bir yöntemin kullanılması gerekmektedir. Bu nedenle yapılacak olan araştırma nitel bir tasarımda yürütülecektir. Nitel araştırma, gözlem, görüşme ve döküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırmadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Nitel araştırma deseni araştırmanın odağını, veri toplama ve analiz yaklaşımlarını belirlemede araştırmacıya yön göstermekle birlikte bu yönlendirme nicel araştırmadaki gibi sınırları keskin çizgilerle belirlenmiş bir yönlendirme değildir. Nitel araştırma desenleri araştırmacıya genel bir yaklaşım sağlar ve araştırmanın, belirli bir odak çerçevesinde, çeşitli aşamaların birbiriyle tutarlı olmasına katkıda bulunur. Bu desenler, araştırmalarda farklı boyutlarıyla ve birbirleriyle karşılaştırılmalı olarak kullanabilmektedirler (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Bu araştırmada nitel araştırma desenlerinden biri olan durum çalışması kullanılmıştır. Bu nedenle araştırmada nitel veri analizleri yoğun olarak kullanılmıştır.

Durum çalışması aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

Durum çalışması;

- 1) Güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi (içeriği) içinde çalışan,
- 2) Olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların keskin hatlarıyla belirgin olmadığı,
- 3) Birden fazla kanıt ve veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Diğer araştırma türlerinden ayrılan yönlerinden yola çıkarak, durum çalışmasının ‘nasıl’ ve ‘niçin’ sorularını temel alan, araştırmacının kontrol edemediği bir olgu ya da olayı derinliğine incelemesine olanak veren bir araştırma yöntemi olduğunu söylemek mümkündür (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Yıldırım ve Şimşek (2005)’e göre durum çalışması sekiz aşamadan oluşmaktadır;

- 1) Araştırma sorularının geliştirilmesi
- 2) Araştırmanın alt problemlerinin geliştirilmesi

- 3) Analiz biriminin saptanması
- 4) Çalışılacak durumun belirlenmesi
- 5) Araştırmaya katılacak bireylerin seçimi
- 6) Verilerin toplanması ve verinin önermelerle ya da alt problemlerle ilişkilendirilmesi
- 7) Verinin analiz edilmesi ve yorumlanması
- 8) Durum çalışmasının raporlaştırılması

Durum çalışmalarında toplanan veriler, yukarıda da açıklandığı gibi, betimsel ya da içerik analizi yoluyla analiz edilebilir. Doküman, gözlem, görüşme ya da bunların ikisinin veya üçünün birlikte kullanılması yoluyla toplanmış olan verilerin hangi yaklaşımla analiz edileceği, araştırmacının amacına ve toplanan verinin derinliğine bağlıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmede sorular önceden belirlenir ve bu sorularla veriler toplanmaya çalışılır (Karasar, 1998). Yarı yapılandırılmış görüşme tekniğinde, araştırmacı önceden sormayı planladığı soruları içeren görüşme protokolünü hazırlar. Buna karşın araştırmacı, görüşmenin akışına bağlı olarak değişik yan ya da alt sorularla görüşmenin akışını etkileyebilir ve kişinin yanıtlarını açmasını sağlayabilir (Türnüklü, 2000).

Çalışma esnasında öğrenciler sesli düşünme metodunu kullanarak seçilecek konulardaki matematiksel problemlerle uğraşırken araştırmacı tarafından gözlemlenecek bunun yanında video kayıtları alınacaktır. Ayrıca araştırmacı gözlemlerini notlar alarak kayda da geçecektir. Bu yaklaşımın en önemli avantajlarından biri, veri toplama sürecinde bütün metotların kullanılmasına imkân sağlamasıdır. Böylece ele alınan durum için gözden kaçabilecek noktaların oluşumu engellenmeye çalışılır.

Araştırma öğrencilerin zihinsel süreçlerinin derinlemesine olarak anlaşılmasını gerektirdiği için okulun belli ve uygun bir yerinde sınıf ortamından ayrı olarak yapılacaktır. Öğrencilerin her birine ayrı zamanlarda uygulanacaktır. Öğrencilerin tüm karalama kâğıtları araştırmacı tarafından alınacaktır.

3.2. Evren ve Örneklem

Bu araştırmanın çalışma grubunu 2010-2011 eğitim-öğretim yılında Ankara ili Çubuk ilçesinde genel bir lisede 10. sınıfta okuyan 89 öğrenci arasından seçilen 6 öğrenci oluşturmaktadır. Okulun seçiminde araştırmacının görevde bulunduğu kurum olması en önemli etkidir. Bu da öğrencilerle görüşmenin en uygun zamanda yapılmasına, görüşmelerin öğrencilerin ders saatlerine ve sınav dönemlerine gelmemesine, okul çıkış saatine denk gelmemesine olanak sağlamıştır. Mülakat yapılan öğrencilerle görüşmeler öğle arasında, ihtiyaçlarını karşılayabilecekleri bir zaman diliminden sonra yapılmıştır. Bu öğrencilerin sorulara kendilerine daha iyi vermelerini sağlamıştır. Seçilen öğrencilerin matematik başarıları açısından farklı düzeylerde olmalarına özen gösterilmiştir. Bunun için genel lisenin üç tane sayısal sınıfına ve bir tane eşit ağırlık sınıfında okuyan 10.sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Bu öğrencilere uygulanmasında matematik öğretmenlerinin görüşleri de alınarak soruları anlama, kendini ifade etme becerileri yeterli ve sınıf bazında matematiksel başarılarının farklılığının olması belirleyici neden olmuştur. Okulun diğer 10.sınıfları sözel sınıflardan oluşmaktadır. Bu öğrenciler bu sene matematik dersini almadıkları ve matematiksel başarı olarak incelenebilecek farklılıkları bulunmadığı için uygulama dışında bırakılmıştır. Daha sonra öğrencilere araştırmacı tarafından hazırlanmış olan cebir testi uygulanmış, bir önceki yılın matematik notu ve matematik öğretmenlerinin görüşleri esas alınmış ve yüksek, orta ve düşük seviyede toplam 6 öğrenci seçilmiştir. Her seviyeden bir kız ve bir erkek olmak üzere 2 öğrenci seçilmiştir. Düşüncelerini rahatlıkla ifade etme becerisine sahip ve çalışmaya katılmaya gönüllü öğrenciler seçilmiştir. Öğrencilerle yapılan mülakatlar video kaydı alındığından, kayıt esnasında kendini ifade edemeyen ya da sorulara cevap verirken düşünme süreçlerini ifade edemeyen öğrencilerin yerine başka öğrenciler seçilmiştir. Bu çalışmada erkek öğrenciler E-1, E-2 ve E-3; kız öğrenciler ise K-1, K-2 ve K-3 parametreleriyle kodlanmıştır. Bu öğrencilerden E-1 ve K-1 yüksek, E-2 ve K-2 orta, E-3 ve K-3 ise düşük matematik başarısına sahip öğrencileri belirtmektedir. Öğrencilere görüşme başlamadan önce ve görüşmenin bittiği zaman kayıtların gizli olduğu belirtilerek öğrencilerin rahat ve öğrenci cevaplarının akıcı olması sağlanmıştır.

3.3. Veri Toplama Yöntemi ve Araçları

Bu çalışmada veriler uygulanan cebir testi, 6 öğrenci ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmede uygulanan mülakat soruları ve öğrencilerinin cevaplarının bulunduğu kâğıtlar, görüşmenin görüntü kaydı yardımıyla toplanmıştır.

Bu araştırmada, biri öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin tespit edilmesini, diğeri öğrencilerin neyi neden yaptıklarının belirlenmesini amaçlayan iki veri toplama aracı kullanılmıştır.

Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin tespiti amacıyla çalışmada kullanılan test, cebir kitabından çevirisi yapılmış olan açık uçlu sorular, uzman görüşleri, matematik öğretmenlerinin görüşleri alınarak hazırlanmıştır. Cebir kitabı “Developing Thinking in Algebra”, John Mason, Alan Graham ve Sue Johnston-Wilder (2005) tarafından hazırlanmış olup matematiksel düşünmenin gelişimi üzerine yazılmış olan üç kitaptan biridir. Diğer iki kitap geometrik düşünme, olasılıklı düşünme üzerine kurulmuştur. Araştırmamızda kullandığımız cebirsel düşünme üzerine olan kitabın amacı, öğrencilerin cebirsel düşüncelerinin gelişmesine yardımcı olmaktır. Öğrencilere belli ödevler sunulmuş, matematiksel ve pedagojik yorumu yapılmış, öğrencilerin sıkılmadan, kendi anlayışlarını oluşturmalarına olanak sağlanmıştır. Kitaptaki alıştırmalar öğrencilerin ifadeleri nasıl yorumladıklarını anlamak için açık uçlu sorulardan oluşmuş olup hem öğrencilere hem öğretmenlere rehber niteliğindedir. Testte Küchemann (1981)’in sınıflandırdığı 6 tür *–harfin değerlendirildiği, harfin yok sayıldığı, harfin bir nesne olarak kullanıldığı, harfin belli bir bilinmeyen olarak kullanıldığı, harfin genelleştirilmiş bir sayı olarak kullanıldığı ve harfin bir değişken olarak kullanıldığı–* yorumunu içeren sorular da yer almaktadır. Testte 22 soru mevcuttur, ancak soruların bazıları alt maddelerden oluştuğundan testte 27 madde bulunmaktadır. Her bir sorunun (MEB, 2005) tarafından hazırlanmış olan ortaöğretim matematik programı cebir öğrenme alanı sayılar alt öğrenme alanı ile ilgili kazanımlar göz önüne alınarak hazırlanmış, her sorunun farklı bir kazanımı temsil etmesine özen gösterilmiştir. Cebir testinde sorulan soruların kazanımlarının cebir öğrenme alanındaki konulara göre dağılımı aşağıda verilen tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3. Cebir testindeki soru sayısının konulara göre dağılımı

Konular	Soru Sayısı
Doğal Sayılar	5
Tam Sayılar	2
Rasyonel Sayılar	8
Gerçek Sayılar	3
Üslü Sayılar	2
Köklü Sayılar	1
Problemler	1
Toplam	22

Cebir testinde yer alan 22 sorunun 7'si işlem becerisi gerektiren, diğerleri ise öğrencilerin nasıl düşündüğünü anlamamızı sağlayacak açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. İşlem soruları üslü sayılarda, rasyonel sayılarda uygulama becerisini yoklayan, problem çözme becerisi gerektiren, reel sayılarda eşitsizlik çözme ve iki sayının ortak bölenlerinin en büyüğü (obeb) kavramı ile ilgili sorulardır. Açık uçlu sorularda ise rasyonel sayılarda sıralama, köklü sayı tamsayı ilişkisi, bölünebilme, sayıları cebirsel olarak ifade edebilme, genelleme yapma becerileri yoklanmıştır.

Soruların hazırlanma aşaması bittikten sonra, konu alanındaki üç uzmandan ve matematik öğretmeninden soru metinlerini inceleyerek soruların açık ve anlaşılır olup olmadığını, ele alınan konuyu kapsayıp kapsamadığını kontrol etmeleri istenmiştir. Ayrıca değişik seviyelerdeki üç öğrenciye uygulanmış, soruların anlaşılabilirliği ve açık olup olmadığı kontrol edilmiştir. Yapılan kontrollerden sonra, düzey belirleme sorularının istenilen verileri sağladığı kanısına varılmıştır. Çalışmaya katılan öğrenciler test uygulaması öncesinde cebirsel ifadelerle ilgili işlem yapma konusunda eğitim almış bulunuyorlardı. Öğrenme alanlarının süreleri göz önünde bulundurularak 9.sınıf öğrencilerinin yeterli bilgiye sahip olmadığı düşünülerek 10.sınıf öğrencilerine uygulanmasına karar verilmiştir.

Testte sorulan sorularda öğrencilerin sayılar konusundaki genelleme deneyimlerine bakılmıştır. Bu duruma, öğrencilerin aritmetik kullanımının potansiyeline bir cevap alma yolu olarak değil ama üstü kapalı cebirsel düşünceden, belirgin cebirsel düşünceye geçiş için ortam hazırlayan yöntemleri ortaya çıkarma yolu olarak bakabiliriz.

Sayılar alt öğrenme alanı ile ilgili olarak hazırlanmış olan cebir testinde yer alan bazı sorular ve yorumları aşağıdaki şekilde verilmiştir:

1.Soru: $a + c + b = a + d + b$ eşitliği verilsin. Bu eşitlik her zaman doğru mudur? Bazen mi? Hiçbir zaman doğru değil midir?

Yorum

Bu soru harfin genelleştirilmiş bir sayı olarak kullanıldığı yorumunu içeren bir sorudur. Harfin özel bir değere sahip olarak düşünüldüğü durumun yani bir harfin belli bir bilinmeyen olarak düşünülmesinin aksine burada genelleştirilmiş bir sayı olarak kullanılan bir harf birden fazla değer alabilir. Burada harf çoklu değerleri göstermek için kullanılır. Bu özel bir bilinmeyen olarak kullanılan bir harf ile terstir. Özel bilinmeyende harf sadece bir değer alabiliyordu. Bu soruda a ve b eşit işaretinin her bir tarafında da özdeş olarak alınır. Böylece c ve d birkaç değer alabilir, onların değerleri aynıdır, denklem doğrudur.

3. Soru: $5.(p + q) - 2.(p + q)$ ifadesini en sade hale getiriniz.

Yorum

Bu soru harfin bir nesne olarak kullanıldığı yorumunu içermektedir. Bu kategorideki maddelerde harf bir nesne ya da bir kısaltma olarak kullanılan maddelerden oluşur. Örneğin $2p + 5p = ?$

Bu örnekteki harf “portakal” ın yerini tutan p gibi bir ad olarak kullanılabilirler. Alternatif olarak harfler gerçek bir nesnenin yerini alabilirler: beş tane p artı q, $5p + 5q$ ya eşittir.

15. Soru: “5 ekle, 3’le çarp, 1 çıkart, 2’ye böl” aritmetik işlemler serisi verildiğinde, cevap olarak 13’ü veren bir başlangıç rakamı bulunuz. Daha genel olarak, elde olan bir sonucu üretecek bir başlangıç rakamı bulmak için bir yöntem geliştiriniz.

Yorum

Bu soru ile öğrenciden istenen, her zaman seriyi gerçekleştirip cevabı bulması yerine uygun bir başlangıç rakamı bulmak için seriyi geri almaya çalışmasıdır. Bu soru ile öğrenci matematiksel yapma ve geri alma örneğini uygulamış olacaktır. Böylelikle geri alma adımlarını uygun bir şekilde dile getirmesi istenirken aslında öğrencinin soruyu çözerken ne yaptığının ve nasıl düşündüğünün farkında olması sağlanacaktır.

Sorudaki işlemler serisi çok açık değilse ya da nasıl ele alınacağı belirgin değilse, daha basit bir örnek üzerinde çalışılabilir. Örneğin; öğrenci işlemler serisini sadece ‘3 ekle’ ye ya da ‘çarpı 5’ indirebilir. Önemli olan burada öğrencinin işlemi geri alırken

kullandığı yöntemdir. Geri alma işlemi aşağıda örnekleri verilen fonksiyon mekanizması, oklar ya da parantezler gibi kayıt yöntemleri ile yapılabilir.

İşlemler serisini aşağıdaki gibi kullanışlı şekillerle kaydedebiliriz:

Aritmetik yapanların, işlemleri belirli bir şekilde kaydedenlere göre işlemleri hatırlayabilmesi çok daha az muhtemeldir. İşlemlerin bir listesini yapmak basit bir kayıttır: 5 ekleyin; çarpı 3; eksi 1; bölü 2; çıktı 13. Bir başka yaklaşım her bir işlemi bir fonksiyon mekanizması olarak birer girdi ve çıktıyla resmetmektir.

Girdi: a

5 ekle: $a + 5$

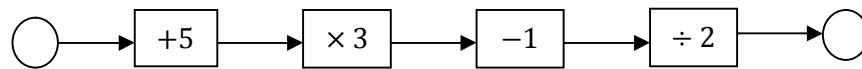
Çarpı 3: $(a + 5) \times 3 = a \times 3 + 15$

Eksi 1: $(a \times 3 + 15) - 1 = a \times 3 + 14$

5'e böl: $(a \times 3 + 14) / 2 = a \times (3 / 2) + 7$

Çıktı: 13

Ancak bir başka yaklaşım fonksiyon mekanizması yerine Şekil 1'de görüldüğü gibi okları kullanarak sadeleştirmektir:



Şekil 1. Okların kullanılarak verilerin kaydedilmesi

Bir diğeri ise ifadeleri parantez işaretleri kullanarak yazmaktır. Bu yöntemi de şu şekilde ifade edebiliriz:

$$(a); ((a) + 5); (((a) + 5)) \times 3; (((((a) + 5)) \times 3) - 1); ((((((a) + 5)) \times 3) - 1) / 2$$

Her yeni işlemin, bir öncekinin sonucunun parantez içine konularak uygulandığına ve böylece işlemin önceki cevabın sadece bir bölümüne değil tümüne uygulandığına dikkat edilmesi gerekmektedir.

Matematiksel işlemi yapma ve geri alma matematikte yaygın bir temadır, çünkü bir problemi ‘geri alma’, ‘yapma’nın sıradan ve basit olduğu durumlarda bile birçok çözüme sahip olmanın yanında yaratıcılık ve konuya tam hâkimiyet gerektirir. Yapma ve geri alma toplama ve çıkarma, çarpma ve bölme, üslü sayılar ve algoritmalar, köklü ifadeler ve dörtgenler arasındaki ilişkili kavramanın bir yoludur.

18. Soru: İki basamaklı bir doğal sayı sayın. İki basamaklı bu sayının rakamlarını yer değiştirerek elde ettiğiniz yeni bir sayı yazınız. Bu iki sayının farkını hesaplayınız ve çıkan sayının 9’a daima bölünebilir olduğunu gösteriniz. Bunu bu şekilde yazılabilecek bütün iki basamaklı sayılar için doğru olduğunu gösteriniz. Beş basamaklı sayılarda durum nasıldır?

Yorum

Bu soru ile öğrencilerden genelleme yapmaları beklenmiştir. Öğrenciler iki basamaklı bir doğal sayıyı kolayca yazabilmektedir. Daha sonra ise iki basamaklı sayının rakamlarını yer değiştirerek yeni bir sayı oluşturabilmektedirler. Bu iki sayının farkını alıp, elde ettikleri sayının 9’a bölünebildiğini söyleyebilmektedirler. Aritmetik işlem yeteneği olan bir öğrenci bu soruyu kolayca yapabilmektedir. Sorunun devamında ise iki basamaklı sayının genel bir ifadesi istenmiştir. Bu şekilde yazacağı sayıya diğer işlem adımlarını uygulayarak elde ettiği ifadenin 9’a tam bölünebilir olduğunu göstermesi beklenmiştir. Bir sayının genel bir şeklini ifade etmek gerçekten de sayıları ve sayıların özelliklerini kavramayı kuvvetlendirir. Özelleştirme ve genelleştirme sadece çalışmalarını ilginç hale getiren şeyler değildir. Bu çalışmalar hem bazı iddiaları ya da tahminleri ortaya atmak hem de bunları anlamlı hale getirmek için matematiksel düşüncenin temelinde yer alırlar. Öğrenciler üstesinden gelmeye çalıştıkları soruyu anlayabilmeleri için anlatımı daha açık, çok kolay ya da zor da olmayan özel bir örnek bulup bulmayacağı sorusunu kendilerine sormayı alışkanlık hale getirmelidirler. Bu şekilde yapılan çalışmalar öğrencilerin sayıları tanımasını sağlayarak, sayı özelliklerini kavramada öğrencinin anlamlı bir yol izlenmesini sağlayabilir.

Soru 7.Toplamları 1 olan iki sayı alınız. Bu iki sayıdan büyük olanın karesine küçük sayı eklenirse mi daha büyük olur yoksa küçük olanın karesine büyük sayı eklenirse mi daha büyük olur?

Yorum

Doğal olan tepki bazı örnekler denemektir. Özel durumları seçmek aritmetiği kolaylaştırır. Örneğin; sayılar 0 ve 1 ya da $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2}$ seçilebilir. Fakat bu değerlerden başka çok fazla olasılık vardır. Rasyonel sayılarla $\frac{1}{3}$ ve $\frac{2}{3}$, ondalık sayılarla da 0,3 ve 0,7 gibi örneklerin denenmesi de mümkündür. 1,5 ve $-0,5$ değerleri için de denememiz mümkündür.

Öğrenciler belirli bir sayıda örneği denemiş olarak, aslında iki cevabın da aynı olacağına ikna olabilirler. Fakat toplamları 1 olan hangi sayılar seçilirse seçilsin; iki hesaplamanın da aynı cevabı vereceğini kesin olarak bilemeyiz. Çünkü bir durumun doğruluğunu kabul etmek için tüm varsayımlar için doğru olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Gizli bir genelleme olduğu sürece yapılacak en iyi şey bu genellemeyi açıklamaktır. Öncelikle bu genellemeyi kelimelerle ifade edip açıklamak gerekir, daha sonra ise cebirsel olarak ifade edebiliriz. Bu tür sorularda verileri cebirsel olarak ifade edip, işlem yapmak boşa zaman harcamadan en doğru sonuca ulaşmamızı sağlar.

x herhangi bir sayı olsun. ' x ... olsun' gibi bir söylemin düşünüldüğünden çok daha fazla bir gücü vardır ve tüm sayılar üzerinde bu gücü kullanır. Aynı zamanda problemi çözecek muhtemel değerlerle ilgili bir gerçeği ortaya çıkarır; toplamları 1 olacağından, ikinci sayı $1 - x$ olmalıdır. Daha sonrasında ise karşılaştıracağımız iki ifade $x^2 + (1 - x)$ ve $(1 - x)^2 + x$ dir. Bu ifadelerde x değeri yerine koyulacak herhangi bir değer için, her iki ifadenin aynı sonucu verdiğini görmek mümkündür. $(1 - x)^2$ ifadesini $(1 - x) \times (1 - x)$ yazabildiğimizden dolayı ve parantez içlerindeki her değer diğer parantez içindeki her bir değerle çarpılacağından, $(1 - x)^2 + x = 1 - x - x + x^2 + x = 1 - x + x^2$ ifadesi elde edilir, ki bu da diğer ifadenin aynısıdır. Bu yüzden iki ifade her zaman aynı değeri verir. Bu alıştırmamızın önemli bir özelliği bazı genel ya da özel durumların ifadeye vermiş olduğu doğal tepkidir. Bunları denemenin amacı ise hesaplamaları yapmanın yanı sıra bu yapıyı anlayabilmek, onu tecrübe edebilmektir.

16. Soru: Değeri 3 ile 4 arasında olan bir rasyonel sayı yazınız. Değeri 3 ile 4 arasında olan ve paydası 5 olan bir rasyonel sayı yazınız, daha sonra bu şekilde yazılabilecek tüm rasyonel sayıları yazmanın bir yolunu bulunuz.

Yorum

Bunun üzerinde çalışmanın yollarından birisi, mümkün olan kesirli sayıların bir listesini yapıp daha sonra, $\frac{16}{5}, \frac{17}{5}, \frac{18}{5}, \frac{19}{5}, \dots$ gibi ifade edilebilir bir düzen aramaktır. Burada, paydası 5 olanlar $m = 1, 2, 3, 4$ için $\frac{15+m}{5}$ formundadır. Bu soru paydası 5'in katı olan kesirli sayılar istenip kısıtlandığında paydası 10 olanlar $m = 1, \dots, 9$ için $\frac{30+m}{10}$ formundadır. Paydası 15 olanlar ise $m = 11, \dots, 14$ için $\frac{45+m}{15}$ formundadır ve bu şekilde devam eder. Bu yerel genellemelerden, n pozitif tamsayı v $m = 1, \dots, 5n - 1$ değerleri için $\frac{15n+m}{15}$ şeklinde bir genelleme belirleyebiliriz.

Birçok kısıtlamayı tek seferde uygulayarak tüm olası örnekleri bulmaya çalışmak, aşama aşama gidip her bir aşamada başa bir kısıtlama ekleyerek bulmaya çalışmaktan çok daha zor olan bir durumdur. Bu herhangi bir problem üzerinde sıkışıp kaldığımızda kullanabileceğimiz bir çare olabilir. Kısıtlamalar dışarıdan veya öğrenen kişi tarafından da konulabilir, bazen çok faydalı olabilir bazen de çalışılan konu üzerindeki ilerlemeyi engelleyebilir.

14. Soru: İki farklı rasyonel sayı yazınız. payı yazdığımız bu iki rasyonel sayının paylarının toplamı ve paydası da bu iki rasyonel sayının paydalarının toplamı olan yeni bir rasyonel sayı elde ediniz. Bu üç rasyonel sayıyı sıraladığımızda elde ettiğiniz rasyonel sayı her zaman başladığımız iki rasyonel sayı arasında kalıyor mu?

Yorum

Bu rasyonel sayıları karşılaştırma ve iki rasyonel sayı arasında kalan sayıları bulma sorusu olarak düşünülebilir. Aritmetik tek bir sayıyı cevap bulmak için hesaplamalar süreci olarak tanımlanabilir. Aritmetiği öğrenmek için cebirsel düşünme gerekir. Bunun sebeplerinden biri sayılar üzerinde cebirsel düşünmenin gerekliliğidir. Öğrenci seçtiği rasyonel sayıları birbirine denk olan rasyonel sayılardan seçerse doğru sonuca ulaşamayacaktır. Öğrencilerden bu durumda bir rasyonel sayıya denk olan bütün rasyonel sayıları ezberlemeleri beklenmeyecektir. Cebirsel düşünmenin önemi bu kısıtlama, seçme sürecini hızlandırma ve yüzlerce örnek çözmeye yerine aritmetiğin püf noktası olan hesaplama yöntemlerini öğrenmektir.

20. Soru: Aşağıdaki örneklere kendi değişkenlerinizi yazınız ve indirimi hesaplayarak, küçükten büyüğe sıralayınız.

- 1 fiyatına 2 al
- 1 alana 1 bedava
- 1 alana 2.si %25 indirimli
- 2 alana 1 bedava
- 1 alana 2.si %50 indirimli
- 2 fiyatına 3 al

Yorum

İndirimi hesaplamak için izlenebilecek yol parçaların her birine 100 TL demek ve her biri için ne kadar orijinal fiyat verildiğini hesaplamaktır. Aritmetiğin ardında gizlenmiş genellemeler vardır. Bu yüzden fiyat verilmez herhangi bir fiyata uygulanır. Büyük ihtimalle pozitif tüm sayıları içeren bir tane al veya iki tane al bir tane bedava al ve bir tane indirimli al, indirimli fiyat üzerinden 1 veya 2 tane alabileceğinizi ifade eder ve indirim %100 den %0 a kadar herhangi bir oranda olabilir.

18. Soru: 5 ile bölüdüğü zaman 2 kalanını veren bütün sayılarla ilgili birer ifade yazınız.

Yorum

5 ile bölüdüğü zaman 2 kalanını veren bütün sayıları araştırmak, pozitif ve negatif sayılar için bu durumu sağlayan sayıları araştırmak anlamına gelmektedir. Öğrencilerden beklenen zihinlerinden sayıları düşünmeleri sayıdan 2 çıkarıldığı zaman 5'in katı oluyorsa bu sayı istenen sayıdır diye düşünmeleridir. Yani $-3, -5$ ' ten 2 sayı büyüktür, o da 5 in çarpanıdır. Böylece -3 ün 5'e bölümünden kalan 2'dir. Kalan her zaman 0'dan büyük eşit ve bölenden küçüktür. Böylelikle öğrenciler $5n + 2$ formundaki sayılar için 5 e bölümünden kalan her zaman 2'dir sonucuna ulaşabilir.

Soru kalıbında bazı değişiklikler yapılarak değişik sorular üretilebilir. Örneğin "*5 ile bölüdüğü zaman aynı kalanı veren 2 ve 7 sayılarının gözlemini genelleyiniz*" sorusu oluşturulabilir. Bu soru ise aynı durumu görmenin bir başka yoludur. Eğer iki sayının

farkı m ise bu iki sayının da m ' ye bölümünden kalan aynı sayıdır. Buradan hareketle kendimize “ m ile bölüldüğü zaman r kalanını veren sayıların hepsini genel bir ifade olarak yazınız” sorusunu sorduğumuzda r 'nin $0 < r < m$ ve $n = qm + r$ olduğu zaman n 'nin m ile bölümünden kalanı olduğu görülmektedir. Burada q bölümdür ve n 'yi elde etmek için m ' nin bazı çarpanlarını negatif olmayan en küçük r sayısına ekleyebiliriz.

Yapıyı anlamlandırmak ve neler olduğu hakkında bir fikre sahip olmak için genellemeyi kullanarak kendine özgü durumlar denemek iyi bir yoldur. Kendine özgü durumları denemek ayrıca varsayımları test etmek için iyi bir yöntemdir. Fakat tüm muhtemel olasılıkları denemeden asla bir varsayımı geçerli kılamazsınız. Genelleme hazırlamak gibi soruların amacı öğrencilerin bu tip soruları cevaplamakta güçlük çekmemelerini sağlamak , örneği verilen sorunun bütün çeşitlerine aşına olunsun dıyedir.

Öğrencilerin bu tür genellemeleri oluşturması için soru kalıplarını iyi anlaması ve yorumlaması gerekir. Öğrencilere uygulanan test maddelerin çoğu açık uçlu sorulardan oluştuğu için ifadelerin açık ve anlaşılır olması büyük önem taşımaktadır. Öğrencilerin soruları okuduklarında anlamadıkları noktaları sormaları için matematik öğretmenleri ile görüşülerek anlaşılmayan noktalar düzeltilmiştir. Ayrıca araştırmacının görevde olduğu okulda uygulandığı için, araştırmacı testin uygulanmasından önce açıklamalarda bulunmuştur ve gelen ek sorulara cevap vermiştir.

Cebir testi uygulandıktan sonra öğrencilerin sınav kâğıtları üzerindeki cevapları incelenmek amacıyla alınmıştır. Öğrencilerin cevapları incelenmiş, sınıflandırılmış ve asıl çalışmanın yürütüleceği öğrencilerin seçimi için temel olmuştur. Öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşme yapmadan önce uygulanan bu sınav aşağıdaki amaçlara hizmet etmek için kullanılmıştır:

1. Yarı yapılandırılmış görüşme yapılacak olan öğrencileri belirlemek
2. Öğrencilerin teste verdiği cevaplardan hareketle görüşmeler sırasında öğrencilere yöneltilecek soruları ayrıntılandırmak amaçlandırılmıştır.

Öğrencilere cebir testi uygulandıktan sonra öğrencilerin verdikleri cevaplar incelenmiş ve kategoriler oluşturulmuştur. Açık uçlu sorularda öğrencilerden istenen cevap belirlenip buna göre doğru, eksik, hatalı cevaplar ve boş bırakılan sorular değerlendirilmiş ve bir düzey belirlemesi yapılmıştır. Bu belirlemeden sonra bir önceki yılın matematik notları ve matematik öğretmenlerinin görüşleri alınarak

görüşme yapmak için yüksek, orta ve düşük seviyelerde öğrenci seçimi yapılmıştır. Amaç bu farklı seviyelerdeki öğrencilerin başarı düzeylerini ve düşünme süreçleri incelemektir. Bu yüzden öğrencilerin cevapları büyük önem taşımaktadır. Düşünme süreçleri incelenecek ve yorumlanacak olan 6 katılımcı olmasına rağmen ilk aşamada katılımcı sayısı 12 kişi olarak tutulmuştur. Bunun nedeni ise öğrencilerin video kaydı alınırken kendilerini ifade etmede sıkıntı yaşamaları ihtimalidir. Bu şekilde görüşmeler yapılmış ve sorulara verdikleri cevaplar ile akıcı ve rahat bir tutum izleyen 6 öğrencinin düşünme süreçleri ve başarı düzeyleri çalışmaya yansıtılmıştır.

Öğrencilerin cebirsel ifadeleri nasıl yorumladıklarını tespit etmek için (EK-2) 5'i açık uçlu olmak üzere toplam 10 sorudan oluşan bir test uygulanmıştır. Testteki sorular, yarı yapılandırılmış görüşme tekniği temel alınarak yöneltmiştir. Sorular cebirsel ifadeler konusu ile ilgili kazanımlar göz önüne alınarak hazırlanmış, her sorunun farklı bir kazanımı temsil etmesine özen gösterilmiştir. Konu alanındaki üç uzmandan soru metinlerini inceleyerek sorulan soruların açık ve anlaşılır olup olmadığını, ele alınan konuyu kapsayıp kapsamadığını kontrol etmeleri istenmiştir. Yapılan kontrollerden sonra, görüşme sorularının istenilen verileri sağladığı kanısına varılarak veri toplama aşamasına geçilmiştir. Sorular, öğrencilere birebir görüşme esnasında yöneltmiş olup her görüşme video kaydına alınmıştır. Öğrencilerle yapılan birebir görüşmeler esnasında alınan video kayıtlarından değerlendirme sırasında yararlanılmıştır. Öğrencilerle yapılan görüşmelerin her biri 30-35 dakika sürmüştür.

Bu çalışmada öğrencilerin cebir bilgi ve becerilerini gerektiren bir durumla karşılaştıklarında ne düşündüklerini, nasıl düşündüklerini ve neden öyle düşündüklerini ortaya çıkarmayı amaçlayan bu çalışma için yarı yapılandırılmış görüşmenin yukarıda açıklanan niteliği ile en uygun metot olduğuna karar verilmiştir. Görüşme ile öğrencilerden;

1.Yazılı olarak verilen soruları cevaplandırmaları (Bu şekilde öğrencilerin yöntem ve düşünmeleri tanımlanmıştır).

2.Her bir soru için cevaplarının ne olduğunu ve bu cevaba nasıl ulaştıklarını açıklamaları (Sesli düşünme protokolü).

3.İhtiyaç duyulan ek soruları cevaplamaları(“ Bunu nasıl yaptın?”, “Nasıl düşündün?”, “Neden?” gibi soruların yanında problemin içeriği ile ilgili sorular) beklenmiştir.

Öğrencilerin görüşme sorularına verdikleri yazılı cevaplar ve görüşmeler esnasında alınan video kayıtları düşünme ve zihinsel süreçlerinin fiziksel göstergeleri olarak kullanılmıştır.

Mülakatta sorulan soruların sayılar alt öğrenme alanındaki konulara göre dağılımı aşağıdaki şekildedir:

Tablo 4. Mülakatta sorulan sorularının konulara göre dağılımı

Sorular	Konular
1.Soru	Doğal Sayılar
2.Soru	Rasyonel Sayılar
3.Soru	Üslü Sayılar
4.Soru	Rasyonel Sayılar
5. Soru	Köklü Sayılar
6.Soru	Üslü Sayılar
7.Soru	Köklü Sayılar
8.Soru	Özelden – Genele Kavramı
9.Soru	Rasyonel Sayılar-Tamsayılar
10.Soru	Köklü Sayılar-Tamsayılar

3.4. Verilerin Analizi

Nitel veriler belirli bir düzeyde sayılara indirgenebilir. Ancak nitel verilerin sayılara indirgenmesindeki amaç çeşitli istatistik hesaplamalardan yararlanarak genellemelere ulaşmak ya da değişkenler arasındaki ilişkiyi istatistiksel olarak açıklamak değildir (Yıldırım ve Şimşek, 2005) . Nitel verilerin sayısallaştırılmasındaki temel amaçlardan birkaçı Yıldırım ve Şimşek tarafından aşağıdaki şekilde açıklanmıştır:

- 1.Sayısallaştırmanın güvenilirliği artırması
- 2.Yanlılığı azaltması
- 3.Verilerin analizi sonucunda ortaya çıkan tema ve kategoriler arasında karşılaştırma yapmayı kolaylaştırması ve
- 4.Küçük ölçekli bir araştırma veya durum çalışmasında elde edilen sonuçların, daha geniş çaplı anket çalışmaları ile tekrar sınanmasına fırsat vermesi.

Alt problemlerdeki sorulara cevap aranırken başvurulan analizler sırasıyla şöyledir:

Yapılan araştırmada yüksek, orta ve düşük cebirsel düşünme seviyelerinde ikişer öğrenci tespit etmek için aşağıda açıklandığı şekilde basit hesaplamalardan yararlanılmıştır.

Önce araştırma kapsamındaki öğrenciler cebir testindeki soruları doğru cevaplandırma yüzdelerine göre dört seviyeye ayrıştırılarak bir düzey belirlenmesi yapılmıştır. Böylelikle 1.alt problem cevaplandırılmıştır. Birinci alt probleme cevap aranırken verilerin analizinde öncelikle öğrencilerin cebir testindeki sorulara verdikleri cevapların kodlaması yapılmıştır. İşlem sorularında doğru sonucu bulan öğrenciler doğru, yanlış sonucu bulan öğrenciler hata ve boş bırakan öğrenciler ise boş olarak kodlanmıştır. Açık uçlu sorularda ise sorudaki alt problemlere paralel olarak düşüncesini örneklerle destekleyen öğrencilerin cevapları doğru olarak, soru ve cevap arasında bağlantı bulunmayan, soruyu yanlış cevaplayan öğrencilerin cevapları hata olarak, boş bırakan öğrencilerin cevapları ise boş olarak kodlanmıştır.

Öğrencilerin matematik öğretmenlerinin görüşleri ve bir önceki yılın matematik notları da dikkate alınarak yüksek, orta ve düşük seviyelerde, her seviyede bir kız ve bir erkek olmak üzere, toplam 12 öğrenci belirlenmiştir. Bu öğrencilerin video kayıtları ve görüşmelerdeki tutumları izlenerek asıl çalışmanın yürütüleceği 6 öğrenci belirlenmiştir. Bu da nitel olan çalışmanın verilerinin incelenmesinde ve yorumlamasında yarar sağlamıştır. Ayrıca öğrenci seçiminde cebirsel düşünme seviyelerinin yanı sıra matematik öğretmenlerinin görüşlerinin ve bir önceki yılki matematik notlarının dikkate alınması araştırmacının seçimde kararsız kalmamasını sağlamıştır.

Bu çalışma için temel veriler 6 öğrenci ile yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen verilerdir. 2.alt probleme cevap aranırken analize başlamadan önce mülakatların görüntü kaydı yazıya dökülmüştür. Bu işlem yapılırken araştırmacı mülakat boyunca yaptığı gözlemler ışığında yazıya açıklayıcı notlar eklemiştir. Yazıya dökülen mülakat verileri, araştırmacının notları, matematik öğretmenlerinin görüşleri ile de desteklenerek analize başlanmıştır.

Araştırmada öğrencilerin cebirsel ifadeler hakkında kendi özgün ifadelerine dayalı olarak elde edilen veriler kategorileştirilerek içerik analizi yoluyla değerlendirilmiştir. İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Betimsel analizde özetlenen ve yorumlanan veriler, içerik analizinde daha derin bir işleme tabi tutulur ve betimsel bir yaklaşımla fark edilemeyen kavram ve temalar bu analiz sonucu keşfedilebilir. Bu amaçla toplanan verilerin önce

kavramsallaştırılması, daha sonra da ortaya çıkan kavramlara göre mantıklı bir biçimde düzenlenmesi ve buna göre veriyi açıklayan temaların saptanması gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

BÖLÜM 4

BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde, toplanmış olan verilerin ikinci bölümde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri sonucunda elde edilen bulgular, araştırmanın alt problemlerine göre sunulmuştur.

a. Birinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

Birinci alt problem *‘10.sınıf öğrencilerinin sayılar alt öğrenme alanındaki cebirsel düşünme seviyeleri nelerdir?’* şeklinde ifade edilmişti.

10.sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin belirlenmesi, yarı yapılandırılmış mülakatta görüşme yapılacak 6 öğrencinin seçimi ve mülakatta sorulacak soruların da çerçevesini oluşturmak amacıyla kullanılan cebir testi Ankara Çubuk ilçesinde genel bir lisede okuyan 51’i kız 38’i erkek olmak üzere toplam 89, 10.sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Bu alt probleme cevap aranırken önce öğrencilere uygulanan cebir testindeki soruların doğru yapılma sıklıklarına göre bir düzey belirlemesi yapılmış ve 4 düzey ortaya çıkmıştır. Sonra bu düzeyleri ifade eden soruların en az 2/3’sine verilen doğru cevap verenlerin o düzeyde olduğu düşüncesi esas alınarak öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri tespit edilmiştir. 1. düzeyde yer alan sorularda yeterli sayıya ulaşamayan öğrencilerin seviyeleri ise 0 olarak kaydedilmiştir.

Cebir testinde yer alan açık uçlu soruların bazıları alt problemler içermektedir. Bu soruların doğru ya da yanlış olma durumu incelenirken öğrencilerin soruyu anlama ve etkili bir biçimde ifade etme gücü aranmıştır. Soruyu yanlış bir biçimde anlayan, soruyla ilgili bir anlayış oluşturamayan öğrencilerin cevapları hatalı kodlanmıştır. Açık uçlu sorularda yer alan görevleri yerine getiren, kendi anlayışlarını etkili bir biçimde açıklamaya çalışan, örnekleyen öğrencilerin cevapları doğru kaydedilmiştir. İşlem sorularında ise işlem adımlarını doğru bir şekilde izleyip sonuca ulaşan öğrencilerin doğru, yanlış cevaba ulaşan öğrencilerin cevabı yanlış olarak kodlanmıştır. Teste hiç

cevaplanmayan soru maddeleri boş olarak kodlanmıştır. Cebir testinde yer alan soruların öğrenci cevapları açısından değerlendirilmesine örnek olarak aşağıda bazı sorulara yer verilmiştir.

1. İşlem Soruları

11.soru : $2^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (2^2)^3 + - 2^2 + 2^0 + 2^1 = ?$

Bu soruda öğrenciden beklenen bir sayının kuvvet alma işlemini doğru bir şekilde yapması ve sonuca ulaşmasıdır.

Soruyu $4 + 9 + 4 + 9 + 64 + (-4) + 1 + 2 = 89$ olarak hesaplayıp doğru sonuca ulaşan öğrencilerin cevapları doğru olarak kodlanmıştır. Bu soru üslü sayılarda parantezin önemine dikkat çekmektedir. Yanlış cevaplayan öğrencilerin birçoğu parantezi göz ardı ederek işlemlerine devam etmiş, bir kısmı ise yanlış çarpma, toplama ve çıkarma işlemi yaparak yanlış sonuca ulaşmışlardır.

20.soru: Aşağıdaki örneklere kendi değişkenlerinizi yazınız ve indirimi hesaplayarak küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

- a) 1 fiyatına 2 al
- b) 1 alana 1 bedava
- c) 1 alana 2.si %25 indirimli
- d) 2 alana 1 bedava
- e) 1 alana 2.si %50 indirimli
- f) 2 fiyatına 3 al

Bu soruda her bir parçanın fiyatını 100 TL düşünerek, her bir parçanın maliyetine ne kadar olduğu belirlenip, satış fiyatı ile arasındaki fark bulunarak indirim hesaplanabilir. Bu şekilde bir yol izlenerek a ve b şıkında parça başına 50 TL düştüğü için %50'lik bir indirim, c şıkında ise parça başına 87,5 TL düştüğü için % 12,5'lük indirim, d şıkında 66,6 TL düştüğü için %33,3 lük indirim, e şıkında 75 TL düştüğü için %25' lik bir indirim , f şıkında ise 66,6 TL düştüğü için % 33,3 lük bir indirim söz konusudur. Bundan dolayı sıralama $c < e < d = f < a = b$ şeklinde olmaktadır. Soruyu bu şekilde cevaplayan öğrencilerin cevapları doğru kabul edilmiştir. Öğrencilerin çoğu bu soruyu boş bırakmış veya hata yapmışlardır. Öğrencilerden bazı şıklardaki indirim oranını doğru bulup diğerlerinde yanlış sonuca ulaşanların cevapları hatalı olarak kodlanmıştır. Çünkü bu en son istenen indirim sıralamasında öğrencileri yanlışla götürmüştür.

22.soru: Bir tüccar aldığı 36 ton linyit ve 48 ton kok kömürünü birbirine karıştırmadan bir kamyonla deposuna taşımak istiyor. Taşıma sırasında kamyonun boş yer kalmaması koşuluyla tüccarın en az seferde taşınabilmesi için kaç tonluk kamyon tercih etmesi gerekir?

Bu soruda istenen 36 ve 48 sayılarının her ikisini de bölen en büyük sayıyı bulmaktır. Bunun için iki sayının obeb'ini hesaplamamız gerekir. Bu iki sayının obeb'ini hesapladığımızda $obeb(36,48)=12$ elde ederiz. O halde bu iki çeşit kömürün taşınabilmesi için 12 tonluk bir kamyon gerekmektedir. Soruyu bu şekilde doğru cevaplayan öğrencilerin cevabı doğru olarak kodlanmıştır. Bu soruda öğrencilerin en çok hata yaptıkları sorulardan birisidir. Bunun nedeni olarak öğrencilerin obeb kavramını ne zaman kullanacaklarını bilememesi ve bir diğer kavram olan iki sayının ortak katlarının en küçüğü kavramı (okek) ile karıştırmaları diyebiliriz.

4. Açık uçlu sorular

2.soru : İki sayıyı çarptığımız zaman çıkan sonuç; bu iki sayının her birinden büyük olur mu?

Öğrencilerden istenen olası bütün durumları düşünmeleri ve düşündükleri bu durumu örneklerle destekleyerek açıklamalarıdır. Bu soruyu bazı durumlarda büyük, bazı durumlarda küçük ve bazı durumlarda ise eşit olabilir şeklinde düşünen öğrencilerin cevapları doğru olarak kodlanmıştır. Tek bir şekilde düşünmeyip olası bütün durumları düşünmeye çalışan öğrencilerin cevapları doğru olarak kodlanmıştır. Örneğin; öğrenciler iki sayıyı 4 ve 5 alırsak çıkan sonuç büyük olur, sayılardan birisi 0 ya da 1 olursa, sonuç sayılardan birisine eşit olur. Sayılardan birisi negatif birisi pozitif olduğu durumlarda ise çıkan sonuç her iki sayıdan da küçük olur şeklinde ifade etmişlerdir. Bu soru çoğu öğrenci tarafından birden fazla durum için düşünülmüştür.

5.soru: Bir yarımı kaç farklı şekilde ifade edebiliriz?

Bu soruda ise öğrenciden istenen durumu birkaç şekilde ifade etmeleridir. Öğrenciler bir yarımı rasyonel olarak, yüzdelik olarak ya da şekil yardımıyla ifade etmişlerdir. Bir yarımı birden fazla değişik biçimde ifade eden öğrencilerin cevabı doğru olarak kodlanmıştır. Öğrencilerin çoğu rasyonel olarak ifade etmiş ve rasyonel sayıların denliğini kullanarak birden fazla şekilde bir yarımı ifade etmişlerdir. Çok az öğrenci diğer gösterim şekilleri ile ifade etmiştir.

6.Soru: 2 ve $\frac{1}{2}$, 3 ve $\frac{1}{3}$, 4 ve $\frac{1}{4}$ arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

Öğrencilerden ilişkinin çarpımlarının 1 olması, birinin tamsayı diğerinin rasyonel sayı olması, çarpma işlemine göre terslerinin olması şeklinde ifade edilen cevapları doğru olarak kodlanmıştır. Öğrencilerin 2 tane $\frac{1}{2}$, 3 tane $\frac{1}{3}$ ve 4 tane $\frac{1}{4}$ ile bir bütün elde ederiz yorumları doğru olarak kodlanmıştır. Diğer ifadeler ise yanlış olarak kodlanmıştır.

9.soru: Bir sayıya başka bir sayı eklediğimizde daima cevap ilk sayıdan büyük olur mu? Açıklayınız.

Öğrencilerden bu soruya *bazen büyük olur* şeklinde cevap verip, bu durumu örnekleyen öğrencilerin cevapları doğru olarak kodlanmıştır. Bu soruyu doğru cevaplayan öğrenciler, sayıların pozitif, negatif veya tamsayı, rasyonel sayı olma durumlarından en az birini göz önünde tutarak örneklemiştir. Bu iki sayının toplamının daima büyük olduğunu ifade eden öğrencilerin cevapları yanlış olarak kodlanmıştır.

14.soru: İki farklı rasyonel sayı yazınız. Payı yazdığınız bu iki rasyonel sayının paylarının toplamı ve paydası da bu iki rasyonel sayının paydalarının toplamı olan yeni bir rasyonel sayı elde ediniz. Bu üç rasyonel sayıyı sıraladığınızda elde ettiğiniz rasyonel sayı her zaman başladığınız iki rasyonel sayı arasında kalıyor mu?

Bu soruda iki farklı rasyonel sayı yazarak, istenen adımları doğru bir şekilde uygulayarak bu üç rasyonel sayı arasında bir sıralamanın olduğunu gösteren öğrencilerin cevapları doğru olarak kodlanmıştır. Birbirine denk rasyonel sayılar yazıp sıralamayı yanlış yapan öğrencilerin cevapları yanlış olarak kodlanmıştır.

İşlem sorularının ve açık uçlu soruların bu şekilde kodlaması yapıldıktan sonra öğrencilerin soruları doğru cevaplama yüzdeleri hesaplanmıştır. Bu şekilde yapılan inceleme ile beraber öğrencilerin soruları doğru cevaplama yüzdeleri Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Cebir testindeki soruların frekansı

Soru Numarası	Doğru Cevaplayan Öğrenci Sayısı	Yanlış Cevaplayan Öğrenci Sayısı	Boş Bırakan Öğrenci Sayısı	Doğru Cevaplanma Yüzdesi (%)
1	44	43	2	49,4
2	61	27	1	68,5
3	49	26	14	55
4	23	63	3	25,8
5	55	32	2	61,7
6	35	17	37	39,3
7	49	31	9	55
8	57	8	14	44,9
9	65	21	3	73
10	68	10	11	76
11	51	31	7	57,3
12	43	34	12	48
13	39	17	33	43,8
14	27	37	25	30
15	57	7	25	64
16	15	22	52	16,8
17	40	38	11	44,9
18	54	22	13	60,6
19	26	39	24	29,2
20	22	28	39	24,7
21	7	46	36	7,9
22	17	42	30	19

Öğrencilerin testteki soruları doğru cevaplama yüzdeleri incelendiğinde %76'lık bir oranla 9.sorunun en yüksek oranda doğru cevaplandığını görmekteyiz. Bu yukarıda değerlendirilmesi yapılan sorulardan birisidir. Yapılma oranı yüksek sorulardan bir diğeri ise % 73'lük oranla 10.sorudur. Bu soru rasyonel sayılarda

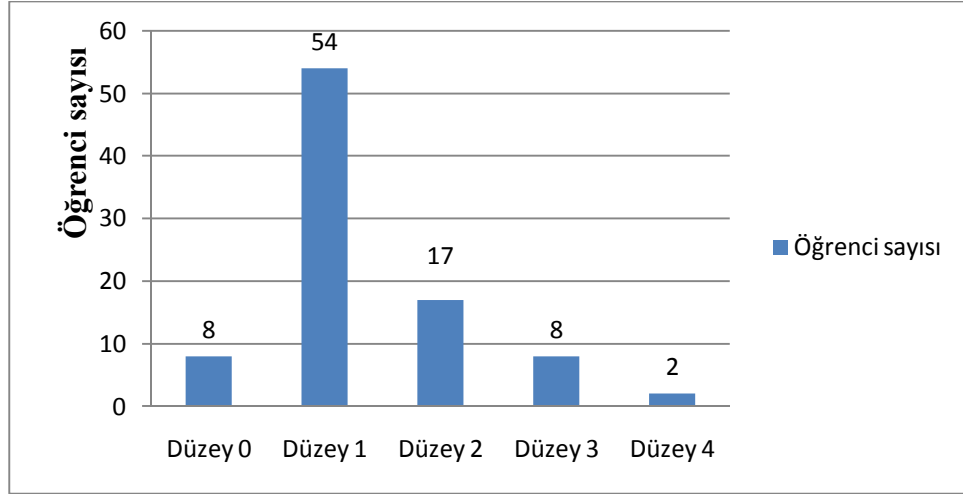
çıkarma işleminin sağlamanın kontrolünün yapılmasını gerektiren bir sorudur. Öğrencilerin çoğu sorunun çözümündeki hatayı bularak ifade etmişlerdir. Doğru cevaplanma yüzdesi düşük olan sorulara baktığımızda %20.soru olan kar-zarar problemi %24,7'lik bir oranla, 21. soru reel sayılarda eşitsizlik sorusu %7,9'luk bir oranla ve 22.soru ise obeb problemi ise % 19'luk bir oranla doğru yapılmıştır. Öğrenciler bu soruları büyük oranda boş bırakmışlardır. Öğrencilerin soruları doğru cevaplandırma yüzdelere göre 4 düzey belirlemesi yapılmıştır. Cebir testinin sonucuna göre oluşan düzeyler ve öğrencilerin bu düzeylerde sayılabilmesi için yapmaları gereken soru sayısı Tablo 6'da gösterilmiştir.

Tablo 6. Cebir testinin sonucuna göre oluşan düşünme seviyeleri

	Soruların yapılma sıklığı	Sorular	Kabul edilen doğru sayısı
Düzyey 1	%77-%49	15,18,11,10,9,1,2,3,5,7	6 ve üstü
Düzyey 2	%48-%31	14,13,12,6,8	3 ve üstü
Düzyey 3	%30-%20	20,19,17,4	2 ve üstü
Düzyey4	%19-%7	21,16,22	2 ve üstü

Tablo 6 incelendiğinde; öğrencilere sorulan sorularla birlikte öğrencilerin cebir testindeki değerlendirmesinde en çok cevaplandırılan ve başarı oranının yüksek olduğu soruların bazı işlem soruları ve çeşitli sayı kümelerindeki toplama, çarpma işleminin özellikleri olduğu görülmüştür. Başarı oranının yüksek olduğu bu sorular 1.düzyey sorulardır. Başarı oranının düşük olduğu bağlantı kurma, ilişki kurma, harfin bir bilinmeyen olarak algılandığı ve kullanıldığı durumlar, özel bir durumdan genel bir ifade oluşturma soruları üst düzey düşünmeyi gerektiren sorulardır. Başarı oranının düşük olduğu bu sorular 3. ve 4. düzey soruları oluşturmaktadır.

Öğrenci sayılarının bu şekilde yapılacak değerlendirme ile cebirsel düşünme düzeylerine göre dağılımı Şekil 2'de gösterilmiştir. Düzey 0, Düzey 1' deki soruları 4'ten az doğru cevaplandıranları göstermektedir.



Şekil 2. 10.sınıf öğrencilerinin düzeylere göre dağılımı

Uygulamanın yapıldığı öğrencilerin birçoğu şekil 2’de görüldüğü gibi düzey 1 de bulunmaktadır. Bu düzeyde bulunan öğrenciler sorunun açıkça belirtildiği, çözüm için gerekli bütün bilgilerin verildiği, bilinen bir kapsam içerisinde sunulmuş olan soruları yanıtlayabilirler. Bu öğrenciler, bilinen durumlarla ilgili olarak verilen belirgin yönergelerle göre bilgileri ayırt edebilir ve rutin işlemleri yapabilirler. Düzey 1’ den sonra en çok öğrenci düzey 2’ de bulunmaktadır. bu düzeyde bulunan öğrencilerin yaptığı soruları incelediğimizde soruların sayılar arasındaki ilişkileri kavrama, bir durumu kendi ifadeleriyle açıklama ve yorumlama becerisi gerektiren sorularda başarılı oldukları söylenebilir. Bunun dışında cebir testinde yer alan ve yapılma oranı düşük olan sorulara baktığımızda istenilen şartları sağlayan sayıları bulma, bu sayılar arasında istenilen işlemleri yapma soruları, genel bir ifade oluşturma soruları ve problem sorusu ilk başta gelebilir. Bu soruları yapan öğrenciler 3. ve 4. düzeyde bulunmaktadır. Bu düzeydeki öğrenciler yorumlarını, sonuçlarını ve muhakemelerini anlatan kısa raporlar oluşturabilirler. Basit problem çözme stratejilerini seçip kullanabilirler. Bu öğrenciler, farklı bilgi kaynaklarına dayanan gösterimleri yorumlayıp kullanabilir ve bu kaynaklardan hareketle doğrudan muhakeme yapabilirler.

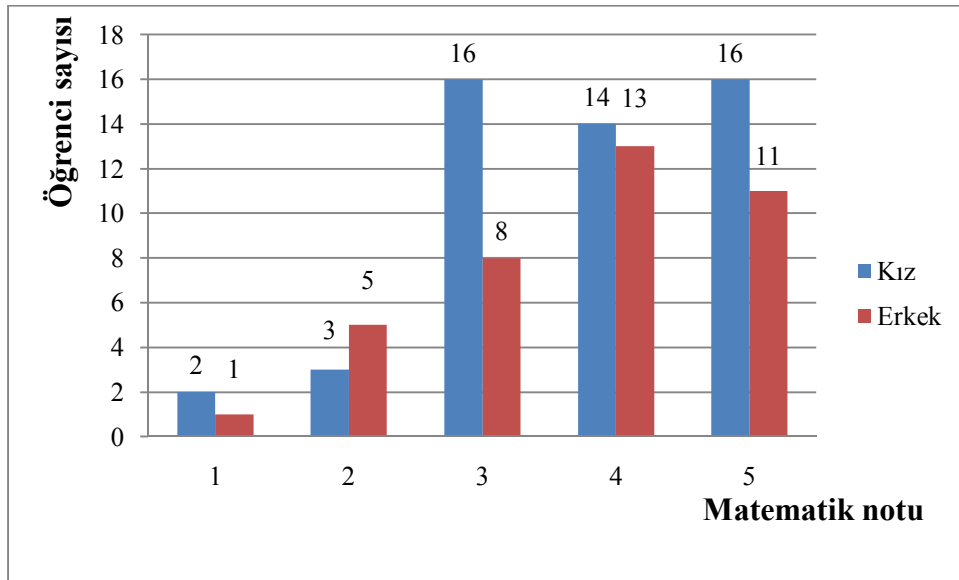
Öğrencilerin düzeylere göre dağılımı hakkında bilgi sahibi olmak için her bir düzeyde bulunan öğrenci oranına bakılmıştır. Uygulama yapılan genel lisedeki öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinde bulunma yüzdeleri Tablo 7’ de verilmiştir.

Tablo 7. Öğrencilerin cebirsel düzeylerde bulunma yüzdeleri

	10.sınıf (%)
Düzye 0	8,9
Düzye 1	60,6
Düzye 2	19,1
Düzye 3	8,9
Düzye 4	2,2

Öğrencilerin çoğu 1. ve 2.düzye de yer almaktadır. Yani doğrudan çıkarım yapmaktan başka bir beceriye gerek duyulmayan durumları tanıyıp yorumlayabilir ve görülen sonuçların ötesine geçmeyen yorumlar yapabilmektedirler. Çok az öğrenci 3. ve 4. düzeyde bulunmaktadır. Bu öğrencilerin yorumlama, ilişkileri ortaya çıkarma, problem çözme becerilerinin geliştiği söylenebilir. 1.düzye de bulunan sorulara yeterli sayıda cevap veremeyen öğrenciler düzey 0 olarak belirlenmiştir. Bu öğrencilerde düzey 2' den sonra en yüksek orana sahiptir.

Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin tespiti amacıyla çalışmada kullanılan test ile birlikte öğrencilerden bir önceki yılın matematik notlarını da yazmalarını istenmiştir. Kız ve erkek öğrencilerin matematik notlarına göre dağılımı Şekil 3'te verilmiştir.



Şekil 3. Öğrencilerin matematik notlarına göre dağılımı

Cebir testi genel lisede 10.sınıfta okuyan 3 tane sayısal ve 1 tane eşit ağırlık sınıfına uygulanmıştır. Öğrencilerin 9. sınıf matematik notlarına bakıldığında ilk sırayı notu 5

ve 4 olanlar, daha sonra 3 ve en sonunda da matematik notu 1 ve 2 olanlar gelmektedir. Kız ve erkek öğrencilerin matematik notlarına göre dağılımı hakkında daha detaylı bilgi sahibi olmak için uygulamaya katılan kız ve erkek öğrencilerin 9.sınıf matematik notlarına göre yüzdeleri Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo 8. Uygulamaya katılan kız ve erkek öğrencilerin matematik notlarına göre yüzdeler dağılımları

Notu	Kız(%)	Erkek (%)
5	17,9	12,3
4	15,7	14,6
3	17,9	8,9
2	3,3	5,6
1	2,2	1,1

Kız ve erkek öğrencilerin matematik notlarına baktığımız zaman kız ve erkek sayılarının paralel olduğunu söyleyebiliriz. Öğrencilerin matematik notlarına göre dağılımına bakıldığında kız ve erkek öğrenci sayılarında matematik notu 3 olanlar hariç anlamlı bir fark yoktur. Bu da uygulamaya katılan kız öğrenci sayısının erkek öğrenci sayısından daha fazla olmasından kaynaklanabilir.

Öğrencilerin başarı düzeylerinin belirlenmesi, sorulara nasıl ve neye göre düşünerek cevapladıklarının belirlenmesi için cebirsel düşünme seviyeleri, matematik notları dikkate alınarak ve matematik öğretmenleri ile görüşülerek düşük, orta ve yüksek seviyede bulunan 6 öğrenci seçilmiştir. Bu öğrencilerle cebir testinde sorulmuş sorular da göz önünde bulundurularak görüşmeler yapılarak ikinci alt probleme cevap aranmıştır. Öğrencilerin seçilmesinde göz önünde bulundurulacak faktörler ve bu faktörlere göre öğrencilerin durumları Tablo 9’ da belirtilmiştir.

Tablo 9. Görüşme yapılacak öğrencilerin seçim kriterlerine göre durumu

Mülakat yapılan öğrenciler	Cebirsel düşünme düzeyleri	9.sınıf matematik notları	Matematik öğretmenlerinin görüşleri
E-1	Düzyey 4	5	İyi
K-1	Düzyey 3	4	İyi
E-2	Düzyey 3	4	İyi
K-2	Düzyey 2	3	Orta
E-3	Düzyey 1	2	Orta
K-3	Düzyey 1	1	Zayıf

Yarı yapılandırılmış görüşme yapılan ve düşünme süreçleri incelenen öğrencilerden yüksek seviyedeki erkek öğrenci E-1, kız öğrenci K-1, orta seviyedeki erkek öğrenci E-2 kız öğrenci K-2 ve düşük seviyedeki erkek öğrenci E-3, kız öğrenci ise K-3 olarak kodlanmıştır. Uygulama araştırmacının görevde bulunduğu okulda yapıldığından araştırmacının dersine girmediği sınıflardan olmasına özen gösterilmiştir. Uygulama cebir testinin sonuçlarından sonra matematik öğretmenlerinin öğrenciler hakkındaki görüşleri de alınarak seçim yapılmıştır.

4.2. İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

‘10.sınıf öğrencilerinin sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeyleri ve düşünme süreçleri nasıldır?’ şeklinde ifade edilen ikinci alt probleme cevap aranırken öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerini belirlemek amacıyla uygulanan cebir testinin yanı sıra matematik notları ile beraber matematik öğretmenlerinin görüşleri de alınarak her seviyeden bir kız bir erkek öğrenci ile görüşülmesine karar verilmiştir.

Yapılan görüşmeler her bir soru için farklı seviyedeki öğrenciler için ayrı ayrı incelenmiştir. Cebir testinde incelediğimiz sorulara paralel olarak araştırmacının amacına yönelik olarak sayılar alt öğrenme alanı ile ilgili becerileri ölçmeye yönelik öğrencilerin başarı durumları her bir soru için analiz edilmiş, öğrencilerin düşünme süreçleri yansıtılmıştır. Araştırmada öğrencilerden alınan benzer cevaplar gruplandırılarak değerlendirilmiştir. Her bir sorunun analizinde öğrencilerin düşünme süreçleri yansıtılırken E-1,K-1 ,E-2 ,K-2, E-3, K-3 sıralaması izlenecektir. Öğrencilerin her bir soru için düşünme süreçleri ve işlem soruları için yaptıkları işlemler çalışmaya yansıtılacaktır.

Kazanım: 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 ve 6, 15, 18 vb. ile bölünebilme kurallarını belirler.(MEB, 2005)

Soru1: Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin? Bu şekildeki sayılara bir kaç tane örnek verebilir misin? Aynı şekilde kendisinden 1 çıkardığınızda hem 2 hem de 3 ile tam bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin? Bunun gibi olan ve daha büyük bir sayı söyleyebilir misin? Şimdi ise kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem 4 ile bölünebilen sayılara örnek verebilir misin? Bu

şekildeki sayılara başka örnekler verip gözlemlediklerini belirtir misin? Bu şekilde olan tüm sayıları açıklayabilir misin?

Birinci soru; 6 öğrencinin de örnekler verebildiği ama genelleme yaparken zorlandıkları soru olmuştur. Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünebilen sayılara bütün öğrenciler doğru yanıtlar vermiştir. İstenen sayıları bulmada izledikleri yolu kolayca açıklamışlardır. Diğer istenen durumlar için de örnek vermeleri istendiğinde birbirine yakın sayıları örnek vermişlerdir. En sonunda bu şekilde yazılabilecek bütün sayıları yazmaları istendiğinde yüksek ve orta seviyedeki öğrenciler hariç başarılı olamamışlardır.

E-1 bu soruya doğru yanıt vermiştir. E-1' in bir önceki yılki matematik notu 5'tir. Uygulanan cebir testinde bütün sorulara cevap vermiştir. Ayır edici sorulara verdiği yanıtlar ve zihinsel sürecini ifade etmedeki yol dikkat çekici bulunmuştur. Matematik öğretmenlerinin görüşü alınarak öğrencinin de gönüllü olması ile görüşmeye karar verilmiştir. E-1 görüşülen öğrenci grubundaki yüksek seviyedeki erkek öğrenciyi temsil etmektedir. Öğrencinin araştırmacının sorduğu sorulara verdiği yanıtlar aşağıdaki şekildedir:

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünen sayılara bir kaç tane örnek verir misin?

E-1: 11, 7, 9, gibi sayılar.

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem de 3' e tam bölünebilen sayılara örnek verir misin?

E-1: 7, 31, 61, 91.

A: Nasıl düşündün? Bu sayıları zihninde nasıl belirledin?

E-1: 3 ile bölünebilen çift sayıları düşünüyorum.

A: Peki kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölünebilen sayılara örnek verir misin?

E-1: 60...61.

A: Başka örnek verir misin?

E-1: *60'ın katlarını alırım, 121 olur.*

A: *2 ile bölüldüğünde 1 kalanını veren bütün sayıları nasıl ifade edersin?*

E-1: *2'nin katı artı 1, $2k+1$.*

A: *Aynı şekilde diğer durumdaki bütün sayıları nasıl ifade edersin?*

E-1: *3 ün katlarının çift olanlarını düşünürüm. Bunların en küçüğü 6 olduğu için $6n+1$ olur.*

A: *Peki kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölünebilen bütün sayıları nasıl ifade edersin?*

E-1: ...

A: *Bunların üçünü birden bölen en küçük sayıdan gidebilir misin?*

E-1: *Üç sayının en küçük ortak katı 12'dir. Buna 1 eklerim. $12n+1$ olur.*

E-1'in birinci soruya verdiği yanıtlar bu şekildedir. Öğrenci bilinmeyen yerine harf kullanarak verdiği özel örnekleri bu şekilde yazılabilecek bütün sayılara genellemiştir.

K-1'in uygulanan cebir testinde orta seviyededir, geçen yılki matematik notu 4, matematik öğretmeninin görüşleri olumludur. Bundan dolayı K-1 yüksek düzeydeki kız öğrenciyi temsil etmektedir. K-1'in 1.soruya verdiği yanıtlar aşağıdaki şekildedir:

A: *Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünebilen sayılar söyler misin?*

K-1: *13, 15, 17.*

A: *Peki bu sayıları nasıl belirliyorsun?*

K-1: *Çift sayıların 1 fazlasını alıyorum.*

A: *Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem de 3 ile tam bölünebilen sayılar söyler misin?*

K-1: *13, 25.*

A: *Bu sayıları nasıl belirliyorsun?*

K-1: *Zihnimde çift sayıları düşünüyorum. Bu sayıların aynı zamanda 3 ile tam bölünenlerini düşünüyorum. 1 fazlasını alıyorum.*

A: *Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölünebilen sayılar söyler misin?*

K-1: *25, 37.*

A: *Bütün bu sayıları açıklayabilecek bir ifade söyler misin?*

K-1: *Formül gibi bir şey mi? $2n+1$ olabilir.*

A: *Diğer durumlar için ne düşünüyorsun?*

K-1: *Yine aynı ifade olabilir; fakat hepsini vermiyor, olmaz. Bütün sayıları elde edebileceğim bir ifade bulamıyorum.*

K-1'in 1.soruya verdiği yanıtlar bu şekildedir. Öğrenci istenen durumlara verdiği örnekleri nedenleriyle birlikte açıklamıştır. İlk durumda istenen şartlara uygun yazılabilecek bütün sayılar için genel bir ifade yazmış; fakat diğer durumlar için oluşturamamıştır.

Öğrencilerden E-2 orta düzeydeki erkek öğrenciyi temsil etmektedir. Bir önceki yılki matematik notu 4 olan öğrencinin, ders öğretmenlerinin de görüşü alınarak mülakat yapılmasına karar verilmiştir. Mülakat yapılmasındaki öncelikli neden ise öğrencinin isteği, düşüncelerini ifşa etmedeki becerisi olmuştur.

Öğrencilerden E-2'nin birinci soruda araştırmacının sorduğu sorulara verdiği yanıtlar aşağıdaki gibidir:

A: *Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünebilen sayılara örnek verir misin?*

E-2: *Bütün tek sayılar.*

A: *Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem de 3 ile tam bölünebilen sayılara örnek verir misin?*

E-2: *13, 16, 17, 19.*

A: *Bu sayıları nasıl belirledin?*

E-2: 13'ten 1 çıkardım, hem 2 hem de 3 ile tam bölündü.

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölünen sayılara örnek verir misin?

E-2: 13, 25.

A: Bunun gibi yazılabilecek tüm sayıları nasıl ifade edersin?

E-2: $12n$ 'dir. 12 'nin katlarıdır. Hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölünür. 1 kalanını vereceği için $12n+1$ 'dir.

A: Hem 2 hem de 3 ile bölüldüğünde 1 kalanını veren bütün sayıları nasıl ifade edersin?

E-2: $6n+1$.

A: Diğer durumu nasıl ifade edersin?

E-2: $2n+1$.

E-2 sorulan bütün sorulara doğru yanıt vermiş, sayıları seçerken izlediği yolu açıklamıştır. Şartlara uygun yazılabilecek bütün sayılar için genel ifadeler oluşturmuştur.

K-2 orta düzey grubundan seçilen kız öğrencidir. Öğrencinin geçen yılki matematik notu 3'tür. Öğrencinin 1.soru ile ilgili araştırmacının sorduğu sorulara verdiği yanıtlar aşağıdaki şekildedir:

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünebilen bilen sayılara örnek verir misin?

K-2: 91, 41.

A: Bu sayıları belirlerken nasıl düşünüyorsun?

K-2: 91 sayısından 1 çıkarıyorum, 90 buluyorum. 90 sayısı da 2'nin katı bir sayı tam bölünür.

A: Tamam. Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem de 3 ile tam bölünebilen bir sayı söyler misin?

K-2:91, 61 olabilir. Sayılardan 1 çıkarıyorum, hem 2 hem de 3 ile tam bölünebilmesine bakıyorum.

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölünebilen bir sayı söyler misin?

K-2:121.

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünen sayıları bütün sayıları açıklayabilir misin? Böyle bir ifade oluşturabilir misin?

K-2: Genel bir ifade mi oluşturacağım?

A : Evet.

K-2: Çift sayıların gösterimi $2n$ 'dir. $2n-1$ ifadesi bizden istenen ifadedir.

A: Aynı şekilde diğer durumlar için böyle birer ifade söyleyebilir misin?

K-2:Aklıma gelmiyor.

K-2 soruda istenen bütün durumlar için örnekler vermiştir. Zihninde istenen durumları sağlayacak sayıları tespit ettiğini ve bir kurala göre hareket etmediğini söylemiştir. İstenen durumlara uygun yazılabilecek bütün sayıları yazması istendiğinde genel bir ifade oluşturacağını sezmiş ; fakat sadece ilk durum için böyle bir ifade oluşturmuştur.

E-3 uygulanan cebir testindeki cevaplar incelenmiş ve düşük seviyede bulunan öğrenci olarak kodlanmıştır. Öğrencinin geçen yılki matematik notu 2'dir. Matematik öğretmenin görüşleri alınarak öğrenci ile görüşülmesine karar verilmiştir. E-3'ün birinci soruya verdiği yanıtlar aşağıdaki şekildedir:

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin?

E-3: Tek sayılar. 3, 5, 7.

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem de 3 ile bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin?

E-3: Tek sayılardan 1 çıkardığımda 2 ile tam bölünür ama 3 ile bölünmez. Hem çift olup hem de 3 ile tam bölünebilen sayı yoktur.

A: 3'ün katı olan çift sayı bulabilir misin?

E-3: 3'ün katı 9 var; 9 da 2 ile tam bölünmez.

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin?

E-3:13. Bir çıkardım. Hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölündü. Bu sayı bir önceki durum içinde uygun bir örnek olabilir. 1 çıkardığımızda hem 2 hem de 3 ile tam bölünüyor.

A: İlk durumdaki bütün sayıları açıklayabilecek bir ifade yazabilir misin?

E3:Tüm tek sayılar diyebiliriz.

A: Bunu bilinmeyen kullanarak ifade edebilir misin?

E3: Hayır.

E-3 ilk durumu hemen örneklemiştir. İkinci durum için örnek sayılar bulamayacağını söylemiş; fakat üçüncü durum için verdiği örneğin o durumu da sağladığını fark etmiştir. E-3 istenen şartlara uygun genel bir ifade hiçbir durum için oluşturamamıştır.

K-3'ün uygulanan cebir testindeki düzeyi düşüktür. Öğrencinin geçen yılki matematik notu 1'dir. Matematik öğretmeni ile de görüşülmüş ve K-3'ün sınıf düzeyine göre matematik başarısının iyi olmadığını söylemiştir. K-3'ün ilk soruya verdiği yanıtlar aşağıdaki gibidir:

A: Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin?

K-3: 5, 7, 11.

A: Bu şekildeki sayıları zihninde nasıl oluşturuyorsun?

K-3: 2 ile tam bölünen sayıları biliyorum. Bu sayılardan 1 çıkarıyorum ve buluyorum.

A:Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem de 3 ile tam bölünebilen bir sayı söyler misin?

K-3:7, 13. *Bu sayıları da aynı şekilde buluyorum. Kendisinden 1 çıkarıyorum, $13 - 1 = 12$. 12 sayısı da hem 2 hem de 3 ile tam bölünür.*

A: *Daha büyük bir sayı söyleyebilir misin?*

K-3: 91. $91 - 1 = 90$ 'dır. 90 sayısı da hem 2 hem de 3 ile tam bölünür.

A: *Kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem de 4 ile tam bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin?*

K-3:13.

A: *13'ten daha büyük bir sayı söyleyebilir misin?*

K-3: *Daha büyük bir sayı aklıma gelmiyor.*

A: *Peki. Bu koşulu sağlayan 13'ten daha küçük bir sayı var mıdır?*

K-3: *Yoktur. Hem 2'ye hem 3 e bölünen, hem 2'ye hem 4'e bölünen sayılar vardır; ama üçünü de tam bölünen sayı yoktur.*

A: *Bu şekilde yazılabilecek bütün sayıları nasıl ifade edersin?*

K-3: ...

A: *Çift sayıları nasıl ifade edersin?*

K-3: $n^2 + n$.

A: *Peki. 5, 7, 11'i verecek bir ifade oluşturabilir misin?*

K-3: *Hayır.*

K-3 ilk iki durum için örnekler vermiştir. Üçüncü durum için ise bu şekilde bir sayı bulamayacağını ifade etmiştir. Bu şekilde yazılabilecek bütün sayılar için genel bir ifade oluşturamamıştır.

Bu soruda öğrenciler hangi sayıya 1 eklesem 2 ile tam bölünür diye düşünmüşlerdir. Öğrenciler uygun sayılara birkaç tane örnek vermişlerdir. Öğrenciler ilk buldukları sayılara göre ikinci ve üçüncü örneği bulurken daha çok zorlanmışlardır. Üçüncü sayıyı yazmak için ilk iki sayıya dikkat etmişlerdir. Bu soruda istenen öğrencinin sınırsız sayıda mümkün cevapları ve özel durumları aşarak genelleme

yapmasıdır. Genelliği açıklamak kısmen kolay değildir; çünkü birkaç değişebilen “şeyler” vardır. Öğrencilerden ifade etmesi istendiğinde “bir şey” veya “herhangi bir şey” gibi genel etiketleri kullanmasının önüne geçilmelidir. Öğrencinin içinde genelleme yetisi doğası gereği vardır. Öğretmenlerin bu güçlerini kullanmada onları teşvik etmesi ve takdir etmesi gerekir. Öğretmenin öğrencilere verilenlere uygun sayılar yazdığına neyi değiştirdiğine neyi koruduğuna yani neyin aynen kaldığına dikkat etmesini sağlamak gerekmektedir. Bu süreçte öğrencinin de ne yaptığını izlemesi ve genelliği bulmak için odaklanması sağlanabilir. Öğrencilerin düşünme süreçleri ve genel bir ifade oluşturmalarına ilişkin bilgiler Tablo 10’ da verilmiştir.

Tablo 10. Öğrencilerin 1. soru ile ilgili düşünme süreçleri

Öğrenci	Düşünme süreci	Genel bir ifade oluşturma
E-1	Çift sayıların 1 fazlası	$2n+1$
	3’ün katlarının çift olanlarına 1 ekledim	$6n+1$
	Bu sayıların okek’ini aldım, 1 ekledim	$12n+1$
K-1	Çift sayıların 1 fazlası	$2n+1$
	3etam bölünen çift sayıların 1 fazlası	-
	3 ve 4’e bölünen sayıların 1 fazlası	-
E-2	Bütün tek sayılar	$2n+1$
	1 çıkarınca hem 2 hem de 3’e bölünenler	$6n+1$
	12’nin katlarının 1 fazlası	$12n+1$
K-2	Zihnimde sayılardan 1 çıkarıyorum,	$2n+1$
	istenen sayılara bölünüp bölünmediğine	-
	bakıyorum	-
E-3	Tek sayılar	-
	1 çıkarıp bölünüp bölünmediğine	-
	bakarım.	-
K-3	Kendisinden 1 çıkarıyorum istenen	-
	sayılara bölünüp bölünmediğine	-

bakıyorum. Ama üçünü birden bölen sayı
yoktur.

Öğrenciler bu soruda bu koşulları sağlayan bütün sayıları ifade etmede iyi ve orta seviyedeki öğrenciler dışında başarısız olmuşlardır. Bu da başarısız olan öğrencilerin harfin bir bilinmeyen, değişken olarak kullanıldığı safha olan 3. ve 4. düzeyde olmaması ile paralellik göstermektedir.

Bundan sonraki 2.,3.,4.,5.,6. ve 7. sorular işlem sorularıdır, öğrencilerin rasyonel , üslü ve köklü sayılar ile ilgili işle becerileri yoklanmıştır. Öğrencilerin işlem özelliklerini anlamlı bir şekilde öğrenip öğrenmediğine bakılarak düşünme süreçleri yansıtılacaktır.

Kazanım: Rasyonel sayılar kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yaparak toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini belirtir.(MEB, 2005)

Soru 2: $\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^{-1}} - \frac{1}{4} : (-\frac{1}{5} : \frac{2}{10})$ işleminin sonucunu bulurken sesli olarak düşünebilir misin?

İkinci soru 6 öğrencinin de cevapladığı ve bir sonuca ulaşmış olduğu sorulardan birisi olmuştur. Öğrencilerden sadece E-1 bu soruya doğru yanıt vermiştir. E-1 rasyonel sayılarla işlem sorusuna önce parantez içindeki ifadeyi yaparak başlamıştır. Daha sonra soldan sağa doğru üslü ifadenin (-1).kuvvetini alarak işleme devam etmiş, işlem önceliğini de dikkate alarak doğru sonuca ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 4'te gösterilmiştir.

$$\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^{-1}} - \frac{1}{4} : (-\frac{1}{5} : \frac{2}{10})$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = (-\frac{1}{4})$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Şekil 4. E-1'in 2.soruya verdiği yanıt

Öğrencilerden K-1 işlem önceliğine dikkat etmiştir. Rasyonel sayının (-1). kuvvetini almış, fakat rasyonel sayılarla bölme işleminin kuralını göz ardı ederek tekrar ters çevirmemiştir. Diğer bütün durumlara dikkat ettiği halde ilk başta yaptığı hata ile yanlış sonuca ulaşmıştır. Kontrol yapması istendiğinde aynı hatayı tekrarlayarak aynı sonucu bulmuştur. Verilen cevap Şekil 5'te gösterilmiştir.

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{7} : \frac{2}{10} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \cdot 2$$

$$\downarrow$$

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} : \left(-\frac{1}{7} \cdot \frac{10^2}{2} \right)$$

$$\frac{3}{4} \cdot -1 = -\frac{3}{4}$$

Şekil 5. K-1'in 2.soruya verdiği yanıt

Öğrencilerden E-2 işleme parantez içini yaparak başlamıştır. Rasyonel ifadenin (-1). kuvvetini alırken rasyonel sayıyı ters çevirmek yerine ifadenin önüne " - " işareti getirmiştir. Soldan sağa doğru işlemi devam ettirerek önce çıkarma işlemini daha sonra bölme işlemini yapmıştır. Bu hata ile işlemi tamamlamış ve yanlış sonuca ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 6'ta gösterilmiştir.

$$\frac{-1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{5} : \frac{1}{10} \right)$$

$$\frac{1}{2}^{-1} \cdot 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\frac{-1}{1} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{-5}{4} : \frac{-1}{5} = \frac{-5}{4} \cdot \frac{5}{-1} = \frac{25}{4}$$

Şekil 6. E-2'nin 2.soruya verdiği yanıt

K-2 işlem sorusunu işlem önceliğine ve rasyonel sayılarla bölme işleminin kuralına uyarak işlemi devam ettirmiştir. Fakat $(1/2)^{-1} = -2$ olarak aldığı için işlemin sonucunu yanlış bulmuştur. K-2 işlemin sonucunu kontrol etmiş, fakat herhangi bir hata bulamamıştır. Verilen cevap Şekil 7’de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{5} : \frac{2}{10}\right) \\ & \frac{\frac{1}{2}}{-2} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{2}\right) \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{1} - \frac{1}{4} : (-1) \\ & \frac{-2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \\ & -\frac{2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{1} + \frac{1}{4} \quad \frac{-4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} \text{ ''} \end{aligned}$$

Şekil 7. K-2'nin 2.soruya verdiği yanıt

K-3 soruda (-1). kuvvet alındığında sayının işaretinin değiştiğini söylemiştir. Fakat sonradan bu konuda kararsız kalmıştır. İlk rasyonel sayılarla bölme işleminde birinciyi aynen yazmış, ikinciyi ters çevirip çarpmıştır. Fakat aynı durumu parantez içindeki ifadeye transfer edememiştir. Rasyonel sayılarla bölme işleminde payda eşitlemeye çalışmıştır. Bu sayıların birbirine bölünemeyeceğini söyleyerek işlemi burada sonlandırmıştır. Hatasının (-1). kuvveti alırken kaynaklandığını söylemiştir. Verilen cevap Şekil 8’de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} & 2) \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{5} : \frac{2}{10}\right) \\ & \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{1}{4} = \frac{2}{2} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ & \frac{-1}{5} : \frac{2}{10} = \frac{-2}{10} : \frac{2}{10} = \frac{1}{10} \quad \frac{3}{4} : \frac{1}{10} = \\ & \frac{-1}{5} : \frac{2}{10} = \frac{-1}{5} \cdot \frac{10}{2} = \frac{-10}{10} = -1 \\ & \frac{3}{4} : \frac{1}{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{1} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Şekil 8. K-3'ün 2.soruya verdiği yanıt

E-3 ilk olarak üslü ifadeden işlemi yapmaya başlamıştır. Üslü ifadelerde üssün (-1) olmasına tereddütle yaklaşarak bu şekildeki durumlarda işaret ters çevrilir diye söyleyerek kuvveti sayının önüne taşımıştır. Daha sonra parantez içindeki ifadeyi yaparak rasyonel sayılarla bölme işlemini uygulamıştır. İşlem önceliği sırasını doğru bir şekilde takip etmiştir. Fakat işleme başlarken yaptığı hata yüzünden yanlış sonuca ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 9’da gösterilmiştir.

$$2. \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) : \left(-\frac{1}{5} : \frac{2}{10} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) : \left(-\frac{1}{5} : \frac{2}{10} \right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} : \left(-\frac{1}{5} : \frac{2}{10} \right)$$

$$1 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^{-1} : \left(-\frac{1}{5} : \frac{2}{10} \right)$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{2} = \frac{1}{1}$$

Şekil 9. E-3’ün 2.soruya verdiği yanıt

En çok yapılan hatalardan biri rasyonel bir sayının (-1). kuvvetini alma sorusunda öğrencilerin çoğunun “ters çevrilir” ifadesini kullanarak $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}$ olarak elde etmeleridir. Yüksek düzeyde belirlediğimiz öğrenciler hariç hemen hepsi bu hatayı yapmışlardır. Öğrencilerin öğretmenlerinin üslü ifadelerde (-1). kuvvette sayının ters çevrilmesi ibaresini işaretin ters çevrilmesi olarak algılamışlardır ve kodlamışlardır.

Üslü ifadelerle ait özellikler ve uygulamaları öğrencilerin karşısına ortaöğretimin her kademesinde matematik derslerinde öğrencilerin karşısına gelmektedir. Öğrencilerin bu özellikleri uygularken nasıl düşündüğünün belirlenmesi ve düşünme süreçlerinin ortaya çıkarılması için bu konu ile ilgili bir soru yöneltilmiştir.

Kazanım: Bir gerçek sayının pozitif tam sayı ve negatif tam sayı kuvvetini açıklar ve üslü sayılara ait özellikleri gösterir. (MEB, 2005)

Soru 3: $\frac{(-64)^5 \cdot (-4)^{-3}}{-8^5}$ işleminin sonucu kaçtır?

E-1, 64 sayısını 4'ün kuvveti biçiminde yazmıştır. Üslü ifadelerde tabanlar aynı olduğunda çarpım durumunda üslerin toplanacağını belirtmiştir. Paydadaki 8'i ise 2 ve 4 ün çarpımı şeklinde yazarak gerekli sadeleştirme işlemlerini yaparak sonuca ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 10'da gösterilmiştir.

$$\frac{(-64)^5 \cdot (-4)^{-3}}{-8^5} = \frac{(-4^3)^5 \cdot (-4)^{-3}}{-2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3} = \frac{(-4)^{15} \cdot (-4)^{-3}}{-2^9} = \frac{(-4)^{12}}{-2^9} = \frac{(2^2)^{12}}{-2^9} = \frac{2^{24}}{-2^9} = -2^{15} = -32768$$

Şekil 10. E-1'in 3.soruya verdiği yanıt

K-1, 64 sayısını önce 8'in bir kuvveti biçiminde yazmıştır. Daha sonra hepsinin 2'nin kuvveti biçiminde yazılabileceğini düşünerek bütün üslü sayıları aynı tabanda yazmıştır. Daha sonra her bir sayının, parantezin içindeki ve dışındaki üslerini çarpmıştır. Sayılar aynı tabanda ve çarpım durumunda olduğundan üsleri toplamıştır. Aynı şekilde bir diğer durumda da bölme işleminde üsleri çıkartmış ve doğru sonuca ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 11'de gösterilmiştir.

$$\frac{(-64)^5 \cdot (-4)^{-3}}{-8^5} = \frac{(-8^2)^5 \cdot (-4)^{-3}}{-8^5} = \frac{(-8)^{10} \cdot (-4)^{-3}}{-8^5} = \frac{(-2^3)^{10} \cdot (-2)^{-3}}{-2^5} = \frac{(-2)^{30} \cdot (-2)^{-3}}{-2^5} = \frac{(-2)^{27}}{-2^5} = (-2)^{22} = -4096$$

Şekil 11. K-1'in 3.soruya verdiği yanıt

E-2 soruya üslü ifadenin işaretini belirleyerek başlamış, verilen üslü ifade kaçınıcı kuvvetse sayıları o kadar sayının çarpımı biçiminde yazmıştır. Payda ve paydada ortak olanları sadeleştirmeye çalışmış, geri kalan sayıları çarpmıştır. Çarpım sonucunda büyük sayılar çıkınca kafası karışmış ve işlemi sonuçlandırmadan bırakmıştır. E-2 bu tür üslü ifade sorularında hep bu yöntemi uyguladığını dile getirmiştir. Verilen cevap Şekil 12'de gösterilmiştir.

Şekil 12. E-2'nin 3.soruya verdiği yanıt

K-2 ilk olarak üslü sayıları aynı tabanda yazmaya karar vermiştir. Bütün sayıları 2'nin kuvvetleri biçiminde yazmıştır. Daha sonra üslü sayının parantez içindeki ve dışındaki kuvvetlerini çarpmıştır. Üslü sayılarda tabanlar aynı ise üsler toplanır diyerek üsleri toplamış, daha sonraki aşamada ise bölme durumunda üsler çıkarılır diyerek üsleri çıkarmıştır. $(-2)^5 = -32$ sonucunu bularak işlem sorusunu doğru cevaplamıştır. Verilen cevap Şekil 13'te gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
 3) \frac{(-64)^5 \cdot (-4)^{-5}}{(-8)^5} &= \frac{(-2^6)^5 \cdot (-2^2)^{-5}}{(-2^3)^5} = \frac{(-2)^{30} \cdot (-2)^{-10}}{(-2)^{15}} \\
 &= \frac{(-2)^{20}}{(-2)^{15}} = (-2)^5 = -32_{ii}
 \end{aligned}$$

Şekil 13. K-2'nin 3.soruya verdiği yanıt

E-3 üslü sayılardaki negatif işareti dikkate almamıştır. Hem tabanda hem üs olarak bulunan negatif sayıları göz ardı ederek işleme devam etmiştir. 64 sayısını 8^2 , 4 sayısını 2^2 biçiminde yazmıştır. Üsleri çarparak kesrin payında üsleri eşit olan çarpım durumunda iki üslü sayı elde etmiştir. Bu durumda tabanları çarpılacağını düşünerek bunu uygulamıştır. Üs olarak bulunan sayı ile tabanda bulunan sayıyı çarparak üslü sayının sonucunu yanlış bir şekilde elde etmiştir. Aynı şekilde paydaya da aynı yanlışlığı tekrarlayarak yanlış sonuca ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 14'te gösterilmiştir.

$$3) \frac{(-64)^5 \cdot (-4)^{-5}}{-8^5} = \frac{(8^2)^5 \cdot (2^2)^{-5}}{(-2^3)^5} = \frac{8^{10} \cdot 2^{-10}}{-2^{15}} = \frac{16^{10}}{-2^{15}} = \frac{16^{\cancel{10}}}{32^3} = \frac{16}{3}$$

Şekil 14. E-3'ün 3.soruya verdiği yanıt

K-3 üslü sayının üssü negatif olduğu için sayının negatif olacağını söyleyerek başlamıştır. 64 büyük bir sayı olduğu için sayıyı çarpamayacağımız için aynen yazarız demiştir. 5 tane 4 sayısını çarpmaya çalışmıştır. Çarpım sırasında sayılar büyüyünce işleme devam edemeyeceğini söylemiştir. Sayılar büyük olunca 1 koyuyorduk aslında demiştir. Derste öğretmeni anlatınca anladığını, fakat kendisinin yapamadığını söylemiştir. Verilen cevap Şekil 15'te gösterilmiştir.

$$3) \frac{(-64)^5 \cdot (-4)^{-5}}{-8^5} = \frac{(-64)^5 \cdot (-4)^{-5}}{-8^5}$$

4.4.4.4.4
16 32

Şekil 15. K-3'ün 3.soruya verdiği yanıt

Kazanım: Rasyonel sayıların ondalık açılımını yapar. (MEB, 2005)

Soru 4: $\frac{a}{0,2} = \frac{b}{0,3} = \frac{c}{0,5}$ ise a,b,c tamsayılarını küçükten büyüğe doğru sıralar mısın?

Dördüncü soru başarı oranının en yüksek olduğu sorulardan birisidir. E-1, ilk başta paydaları eşitlemeye çalışmış daha sonra payda bulunan sayıların yanına katsayı geleceği için vazgeçmiştir. Daha sonra paydadaki ondalık sayıları rasyonel hale

getirmiştir. Paydadaki bu ondalık sayılar arasında bir büyüklük sıralaması yapmıştır. Paydası en büyük olan c tamsayısının en büyük olacağını söylemiştir. Verilen cevap Şekil 16'da gösterilmiştir.

$$\frac{a}{0,2} = \frac{b}{0,3} = \frac{c}{0,5}$$

$$\frac{a}{60} = \frac{b}{10} = \frac{c}{60}$$

$$c > b > a$$

Şekil 16. E-1'in 4.soruya verdiği yanıt

K-1 ilk olarak paydadaki ondalık sayıları rasyonel sayıya çevirmiştir. Daha sonra $a \cdot \frac{10}{2} = b \cdot \frac{10}{3} = c \cdot \frac{10}{5}$ haline getirmiştir. a'nın katsayısı en büyük olduğundan a en büyük sayıdır demiştir. Daha sonra b, en küçük sayı da c olur demiştir. Verilen cevap Şekil 17'de gösterilmiştir.

$$\frac{a}{\frac{2}{10}} = \frac{b}{\frac{3}{10}} = \frac{c}{\frac{5}{10}}$$

$$a \cdot \frac{10}{2} = \frac{10a}{2} \quad \frac{10b}{3} \quad \frac{10c}{5}$$

$$a > \frac{10b}{3} > \frac{10c}{5}$$

$$a > b > c$$

Şekil 17. K-1'in 4.soruya verdiği yanıt

E-2 de paydadaki ondalık sayıları rasyonel hale getirmiştir. Paydaları büyüklük sıralamasına sokmuştur. Bu sıralamayı da şu şekilde ifade etmiştir: “ Bir elmayı ikiye böldüğümüzde en büyük olur, daha sonra bir elmayı üçe böldüğümüzde ve en küçük de beşe böldüğümüzde olur. Bu yüzden en büyük c'nin paydası olacağından en büyük c tamsayısı olur” demiştir. Verilen cevap Şekil 18'de gösterilmiştir.

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{1}{2}$$

$$a < b < c$$

Şekil 18. E-2'nin 4.soruya verdiği yanıt

K-2, ilk olarak paydaları ondalık sayı biçiminde yazmıştır. Daha sonra ise birinciyi aynen yazarım, ikinciyi ters çevirip çarparım diyerek $5a$, $3b$ ve $2c$ ifadelerini elde etmiştir. Daha sonra ise sıralamayı bu katsayılar göre yaparak en büyük sayı a , sonra b ve en küçük sayı c demiştir. K-2 ifadeler arasındaki eşitliği dikkate almamıştır. Verilen cevap Şekil 19'da gösterilmiştir.

$$4) \frac{a}{0,2} = \frac{b}{0,3} = \frac{c}{0,5} = \frac{a}{\frac{2}{10}} = a \cdot \frac{10}{2} = \frac{10a}{2} = 5a$$

$$\frac{b}{\frac{3}{10}} = b \cdot \frac{10}{3} = \frac{10b}{3}$$

$$b = \frac{3b}{3}$$

$$\frac{c}{\frac{5}{10}} = c \cdot \frac{10}{5} = c = \frac{2c}{1}$$

$$5a > b > c$$

Şekil 19. K-2'nin 4.soruya verdiği yanıt

E-3, aradaki eşitlik kavramını göz ardı ederek kesirlerde paydası büyük olan daha büyüktür şeklinde düşünmüştür. Sıfıra yakın olanın daha büyük sayı olduğunu düşünmüştür. $0,2$ sayısının en büyük olduğunu bu durumda da büyüklük sıralamasının soldan sağa doğru olacağını belirtmiştir. Fakat a , b ve c sayılarının büyüklük sıralaması için her hangi bir ifade yazamamıştır. Verilen cevap Şekil 20'de gösterilmiştir.

$$4) \frac{a}{0,2} = \frac{b}{0,3} = \frac{c}{0,5}$$

$$\frac{a}{0,2} > \frac{b}{0,3} > \frac{c}{0,5}$$

Şekil 20. E-3'ün 4.soruya verdiği yanıt

K-3, ilk olarak paydalara bakmıştır. Paydadaki sayıları sıralamıştır. Paydası küçük olan en küçüktür demiştir. Ama paydaları eşitlediğinde ise a sayısını en büyük sayı ile çarpacağımız için en büyük a sayısı olur demiştir.

Bu soru eğer çoktan seçmeli bir testte sorulmuş olsaydı akademik başarısı vasat olan bir öğrenci bile doğru cevabı verebilecekti. Ancak sorunun açık uçlu olması yani öğrencilerden soruyu çözerken düşüncelerini ifade etmelerinin istenmesi başarı oranını ciddi ölçüde düşürmüştür. Bu da hiç kuşkusuz, başarılı diyebileceğimiz öğrencilerin bile neye göre başarılı oldukları tartışmasını gündeme getirecektir.

Kazanımlar: 1.Negatif olmayan bir gerçek sayının karekökünü ve üslü biçimini açıklayarak kareköklü sayılara ait özellikleri belirtir ve kareköklü sayılarla ilgili uygulamalar yapar.

2. Bir gerçek sayının mutlak değerini açıklar ve mutlak değer ile ilgili özellikleri belirtir.

Soru 5: $a < 0 < b$ ise $\sqrt{a^2} - \sqrt[3]{b^3} + \sqrt[3]{27a^3} + |a - b|$ işleminin sonucunu bulurken sesli olarak düşünebilir misin?

Bu soru 6 öğrencinin de en çok zorlandığı soru olmuştur. Bu soruya 6 öğrenciden doğru cevap veren olmamıştır. E-1 soruyu çözmeye başlamadan önce sesli olarak a'nın sıfırdan küçük b'nin sıfırdan büyük olması durumunu tekrarlamıştır. a' nın soru kalıbında negatif olarak verilmesi ama ifadede önünde negatif olduğunu belirten " - " işaretinin olmamasının kafasını karıştırdığını söylemiştir. Mutlak değer içinde verilen $a - b$ ifadesini ise mutlak değerın dışına negatif ifade çıkmaz diyerek $a + b$ olarak yazmıştır. Mutlak değer içindeki ifadenin negatif olup olmama durumunu incelememiş, ifadenin negatif olmasını " - " işaretinin olmasına bağlamıştır. Verilen cevap Şekil 21'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
 0 < a < b \quad & \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{b^3} + \sqrt[3]{27a^3} + |a-b| \\
 & a - b + 3a + |a-b| \\
 & -a - b \quad - 2a + a + b \\
 & \boxed{-3a}
 \end{aligned}$$

Şekil 21. E-1'in 5.soruya verdiği yanıt

K-1 ilk olarak a sayısının negatif, b sayısının pozitif olduğunu söylemiştir. Daha sonraki adımda ise a'nın negatif, b'nin pozitif olma durumunu sadece mutlak değerli ifade kullanmıştır. Mutlak değer içindeki ifadenin negatif ya da pozitif olma durumunu incelemek için a ve b yerine sayı vermiştir. İfadenin negatif olduğuna karar vermiştir; mutlak değer dışına çıkarken "+" olmalıdır demiştir. Öğrenci, köklü ifadeler ve mutlak değer ile ilgili bilgisine güvenmemektedir. Soruyu tereddütle tamamlamış ve doğru olduğundan emin olamamıştır. Verilen cevap Şekil 22'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{b^3} + \sqrt[3]{27a^3} + |a-b| \\ & a - b + 27a + |a-b| \\ & a - b + 27a + a + b \\ & 27a \end{aligned}$$

Şekil 22. K-1'in 5.soruya verdiği yanıt

E-2 bu soruda herhangi bir fikrinin olmadığını söylemiştir.

K-2 a'nın sıfırdan küçük negatif ve b'nin sıfırdan büyük pozitif bir sayı olduğunu söylemiştir. a sayısının üssü olan 2'nin karekökü götürdüğünü, aynı şekilde b'nin üssü olan 3'ün küp kökü götürdüğünü söylemiştir. 27 sayısını ise küp kökten dışarı çıkarırken herhangi bir işlem yapmamış, aynen dışarı çıkarmıştır. Mutlak değerli ifade için ise mutlak değerli bir ifadenin dışına negatif çıkamayacağını söyleyerek mutlak değer dışına a sayısını (-1) ile çarpmış çıkartmıştır. b sayısının pozitif sayı olduğunu söyleyerek önündeki "-" işaretini "+" yaparak ifadenin dışına çıkartmıştır. Gerekli toplama ve çıkarma işlemlerini yaparak $-27a$ sonucuna ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 23'te gösterilmiştir.

$$5) a < 0 < b \quad \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{b^3} + \sqrt[3]{27a^3} + |a-b|$$

$$0 - b - 27a + (-a+b) = \cancel{0} - \cancel{b} - 27a - \cancel{a} + \cancel{b} = -27a$$

Şekil 23. K-2'nin 5.soruya verdiği yanıt

E-3 bu soru ile ilgili herhangi bir fikrinin olmadığını ve yapamayacağını söylemiştir.

K-3 soruda sayının üssü olan kare ile karekökü götürmüş, b'nin kuvvetinin kökün derecesi olan 3 ile sadeleştirmiş, aynı şekilde a'nın 3.kuvvetinin de kökün derecesindeki 3 ile sadeleştirmiştir. Mutlak değer içindeki ifade için ise pozitif çıkmalı diyerek $a - b$ ifadesini $a + b$ şeklinde mutlak değer dışına çıkarmıştır. Elde ettiği ifadeleri kendi arasında toplayıp, çıkartabilseydi devam edip 27 sayısını kökten dışarı çıkarmayı deneyip, sonuca ulaşabileceğini düşünmektedir. Verilen cevap Şekil 24'te gösterilmiştir.

$$4) \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{b^3} + \sqrt[3]{27a^3} + |a-b|$$

$$a - \sqrt{b} + \sqrt{27a} + |a-b|$$

$$a - \sqrt{b} + \sqrt{27a} + a + b$$

Şekil 24. K-3'ün 5.soruya verdiği yanıt

Öğrencilerin "mutlak değer" alt öğrenme alanı ile ilgili birçok yanlış anlamaya sahip oldukları gözlenmiştir. Görüşmelerde elde edilen veriler incelendiğinde öğrencilerin çoğu $a < 0 < b$ ise $|a - b| = a + b$ olarak ifade etmişlerdir. Mutlak değerli ifadelerde dışarı negatif çıkmayacağını vurgulayarak işaretin değiştiğinde durumun pozitif olacağını düşünmüşlerdir. Değer verme yöntemini kullansalar da herhangi bir sonuca varamamışlardır. Aynı soruda kareköklü ifadeler de yer verilmiştir. Öğrenciler a'nın negatif olup olmama durumuna bakmadan $\sqrt{a^2} = a$ olarak elde etmişlerdir.

Kazanım: Üslü sayıların eşitliğini ifade eder ve üslü sayılarla ilgili uygulamalar yapar. (MEB,2005)

Soru 6: $(0,2)^x \cdot 25^{x+1} = 100$ olduğuna göre $5^{-2x} = ?$

Altıncı soru öğrencilerin en çok zorlandıkları sorulardan biri olmuştur. E-1 bu soruyu doğru cevaplayan tek öğrenci olmuştur. İlk olarak ondalık ifadeyi rasyonel hale çevirmiş, 25 sayısını 5 in kuvvetini biçimde yazmıştır. Aynı tabanda yazdığı üslü ifadeler çarpım durumunda olduğu için topladığını belirterek işlemin sonunda 5^x in karşılığını elde etmiştir. Daha sonra istenen ifadeyi elde etmek için bulduğu değeri yerine yazmış ve doğru sonuca ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 25'te gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
 (0,2)^x \cdot 25^{x+1} &= 100 & 5^{1-2x} &= ? \\
 \left(\frac{2}{10}\right)^x \cdot (5^2)^{x+1} & & 5^1 &= 5^{-2x} \\
 \left(\frac{2}{10}\right)^x \cdot 5^{2x+2} &= 100 & 5 \cdot \frac{1}{76} & \\
 \left(\frac{2}{10}\right)^x \cdot 5^{2x} \cdot 5^2 & & \frac{5}{16} & \\
 \left(\frac{2}{10}\right)^x \cdot 5^{2x} \cdot 25 &= \frac{100}{25} & & \\
 \left(\frac{2}{10}\right)^x \cdot 5^{2x} &= 4 & & \\
 & & (5^{-1})^x \cdot 5^{2x} &= 4 \\
 & & 5^{-x} \cdot 5^{2x} &= 4 \\
 & & 5^x &= 4
 \end{aligned}$$

Şekil 25. E-1'in 6.soruya verdiği yanıt

K-1 de bu soruyu en sonda yaptığı işlem hatası hariç doğru bir şekilde yürütmüştür. İlk adımda $5^x = 4$ ifadesini elde etmiştir. İstenen 5^{1-2x} ifadesini bulmak için; $5^{1-2x} = 5^1 \cdot 5^{-2x}$ olarak yazmıştır. 5^{-2x} ifadesini ise 5^x cinsinde yazmaya çalışmıştır. Dolayısıyla $5^{-2x} = 5^{-x} \cdot 5^{-x}$ olarak yazmıştır. Ancak $5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ çarpımında hata yaparak yanlış sonuca ulaşmıştır. Verilen cevap Şekil 26'da gösterilmiştir.

K-3 bu soruyla ilgili bilgisinin olmadığını; bu tür soruları derste iyi anladığını evde ve yazılıda yapamadığını dile getirmiştir.

Kazanım: Bir gerçek sayının pozitif tam kuvvetten kökünü ve üslü biçimini açıklayarak köklü sayılara ait özellikleri, üslü sayıların özelliklerinden yararlanarak gösterir ve köklü sayılarla ilgili uygulamalar yapar. (MEB, 2005)

Soru 7: $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[6]{32}$, $d = \sqrt[4]{8}$, $e = \sqrt[12]{128}$ sayılarının en büyüğü hangisidir? Açıklar mısın?

Bu soru başarı oranının en düşük olduğu sorudur. Hiçbir öğrenci bu soruya doğru yanıt verememiştir. E-1 bu soruda kök derecelerini eşitlemeye çalışmıştır. Kök derecesi en büyük olan 12 olduğu için bu sayıda eşitlerim demiştir. Kökün derecesini eşitlerken kökün içindeki ifadeyi bu sayıyla çarpmış ve hata yapmıştır. Bu soruda köklü sayılarla üslü sayılar arasındaki ilişkiyi kullanarak cevaplamaya çalışan öğrenci olamamıştır. Verilen cevap Şekil 29’da gösterilmiştir.

$$a = \sqrt{2} \quad b = \sqrt[3]{4} \quad c = \sqrt[4]{32} \quad d = \sqrt[4]{8} \quad e = \sqrt[12]{128}$$

$$a = \sqrt[12]{12} \quad b = \sqrt[12]{16} \quad c = \sqrt[12]{32} \quad d = \sqrt[12]{24} \quad e = \sqrt[12]{128}$$

$$e > c > d > b > a$$

Şekil 29. E-1’in 7.soruya verdiği yanıt

K-1 kökün içindeki ifadeleri 2’nin kuvvetleri biçiminde yazmıştır. Fakat dereceleri farklı olduğu için büyüklük sıralaması yapamayacağını söylemiştir. Kök dereceleri aynı olsaydı kökün içindeki ifadelerden büyük olanın daha büyük olacağını söylemiştir. Verilen cevap Şekil 30’da gösterilmiştir.

$$a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt[3]{4}, \quad c = \sqrt[4]{32}, \quad d = \sqrt[4]{8}, \quad e = \sqrt[12]{128}$$

$$\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{2^2} \quad \sqrt[4]{2^5}, \quad d = \sqrt[4]{2^3} \quad e = \sqrt[12]{2^7}$$

Şekil 30. K-2’nin 7.soruya verdiği yanıt

E-2 köklü ifadeleri sıralarken kökün derecesine baktığını kökün derecesi en büyük olanın en büyük olduğunu söylemiştir.

K-2 bu soru hakkında bir fikrinin olmadığını söylemiştir.

E-3 bu soruda en büyük köklü sayının e olduğunu söylemiştir. Bunun nedeninin ise kök içindeki ifadelere bakıldığında en büyük olan sayının o olmasından kaynaklandığını belirtmiştir.

K-3 de bu soruyu yapamayacağını söylemiştir. Köklü ifadelerin derecelerini göstererek derecesi 4 ve 12 olan köklü sayıyla daha önce karşılaşmadığını söylemiştir. Araştırmacının sorusu üzerine köklü ifadeleri üslü biçimde yazamamıştır.

Soru 8: Size göre “ özelden genele” ifadesi ne anlama gelmektedir? Bu ifade matematikte ne anlama gelmektedir? Bir örnek verebilir misin?

E-1 bu soruda özelden genele ifadesinin özel açıklamaların hepsinin bütünüyle genel açıklamaya götürmesi şeklinde yorumlamış, matematikte ne anlama geldiği ile örnek veremeyeceğini ifade etmiştir.

K-1 özelden genele ifadesini günlük hayattan verdiği örneklerle açıklamaya çalışmıştır. Örnek olarak; meşe özel, ağaç genel; kedi özel, hayvan geneldir demiştir. Matematikte örnek olarak formül aklına gelmediğini ama en çok geometride kullandığını belirtmiştir. Açılarına göre özel dik üçgenlerin kenarları arasındaki bağıntıyı veren kuralı bildiği için bunu diğer bu şekildeki üçgenlere uyguladığını vurgulamıştır.

E-2 özelden genele ifadesini matematikte ne anlama geldiğini şu şekilde ifade etmiştir: *“Bir formülde bir sayıyı kullandığımız zaman mesela 2-3 sayı için kullandık diyelim. 2 sayıda da aynı sonuç çıkıyorsa yine diğer sorularda da kullanırız. Diğer sorularda da aynı şey çıkıyorsa özel ifadeden çıkararak genelleşir. Genel ifade olur. Matematik derslerinde problemleri çözerken kendim buluyorum bu tür yollar ama genelde yanlış çıkıyor. Matematikte kullandığımız bu tür genelleme örneği aklıma gelmedi”* demiştir.

K-2 bu soruyu yapamayacağını söylemiştir.

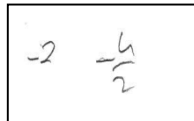
E-3 özel ifadelerin kişiden kişiye değişebileceğini, genel bir ifadenin ise değişemeyeceğini, herkesin aynı şekilde bildiği ifadeler olduğunu söylemiştir. Matematikte buna 2^3 sayısının özel bir ifade olduğunu, bu sayının 2.2.2 şeklinde yazılabildiğinin ise genel bir ifadeden kaynaklandığını dile getirmiştir.

K-3 özelden genele ifadesini şu şekilde açıklamıştır: Kedi- köpek- hayvan örneğini vermiştir. En son söylediği ifadenin diğerlerini kapsadığını söylemiştir. Ancak matematikte böyle bir örneğin aklına gelmediğini söylemiştir.

Kazanım:Rasyonel sayıları ifade eder ve rasyonel sayıların eşitliğini açıklar. (MEB, 2005)

Soru 10: Rasyonel sayılar kümesinin tamsayılar kümesini kapsar mı? Düşünceni destekleyecek bir örnek verebilir misin?

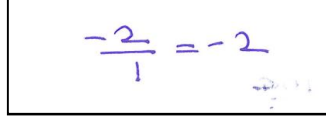
Onuncu soru 6 öğrencinin de cevapladığı, fakat sayı kümelerini tanımlamada zorluk çektiği ve örnekleyemediği bir sorudur. E-1 rasyonel sayıların tamsayılar kümesini kapsadığını ifade etmiştir. “ -2 tamsayısını $-4/2$ olarak yazabilirim ve bu şekilde her tamsayıya bir rasyonel sayı karşılık geleceğinden, rasyonel sayılar kümesi tamsayılar kümesini kapsar” şeklinde ifade etmiştir. Verilen cevap Şekil 31’de gösterilmiştir.



$$\boxed{-2 \quad -\frac{4}{2}}$$

Şekil 31. E-1’in 10.soruya verdiği yanıt

K-1, rasyonel sayılar kesirli sayılardır, tamsayılar normal bildiğimiz sayılardır demiştir. Rasyonel sayılar kümesinin tamsayılar kümesini kapsadığını söylemiştir. Bunun nedeni olarak tamsayılar kümesinde alacağımız herhangi bir elemanın aynı zamanda rasyonel bir sayı olduğunu göstermiştir. Bunu destekleyecek iki örnek vermiş ve bunu her tamsayı için düşünebileceğimizi ve rasyonel sayılar kümesinin tamsayılar kümesini kapsadığını bu şekilde görebileceğimizi belirtmiştir. Verilen cevap Şekil 33’te gösterilmiştir.



$$\frac{-2}{1} = -2$$

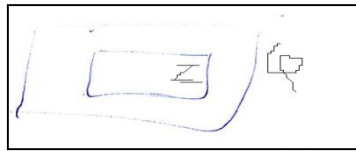
Şekil 32. K-1'in 10.soruya verdiği yanıt

E-2 rasyonel sayıları $1/2, 1/4, 1/8, \dots$ gibi sayıları örnek vererek tanımlamaya çalışmış, tamsayılar kümesi için ise $1, 2, \dots$ gibi sayılardır diye ifade etmiştir. Rasyonel sayılar kümesinin tamsayılar kümesini kapsayıp kapsamadığı hakkında net bir yanıt verememiştir.

K-2 rasyonel sayılar kümesi “ $1/5, \dots$ biçimindeki sayılardan oluşmaktadır” demiştir. Tamsayılar kümesi ise “ $-2, -5, \dots$ biçimindeki sayılardan oluşur” demiştir. Rasyonel sayılar kümesinin tamsayılar kümesini kapsadığını söylemiştir. Fakat bunu destekleyecek herhangi bir örnek bulamamıştır.

E-3 rasyonel sayılar kümesini tanımlayamamıştır. Aynı soru kesirli biçimde yazılabilen sayılar dendiğinde ise tamsayılar kümesinin $1, 2, 3, \dots$ olduğunu söylemiştir. Tamsayılar kümesinin rasyonel sayıları kapsadığını çünkü tam ifadesinin daha büyük olduğunu kesirli sayıyı kapsadığını belirtmiştir.

K-3 rasyonel sayılar kümesini tanımlarken $1/2, 2/4, \dots$ gibi sayılardan oluştuğunu ifade etmiştir. Tamsayılar kümesi için $1, 2, 3, 4, \dots, 10'$ a kadar olan sayılardır demiştir. Rasyonel sayılar kümesinin tamsayılar kümesini kapsadığını bunu küme çizerek öğretmenin gösterdiğini ama nedenini söylemediği için kendisinin de söyleyemeyeceğini dile getirmiştir. Verilen cevap Şekil 33'te gösterilmiştir.



Şekil 33. K-3'ün 10.soruya verdiği yanıt

Öğrencilerin bu soru ile birlikte sayı kümelerini anlamlı bir halde öğrenip öğrenmedikleri anlaşılmaya çalışılmıştır. Rasyonel sayılar kümesi ve tamsayılar kümesi kavramları öğrenciye sorulmuş, alt küme kavramından bahsedilerek hangisinin

bir diğeri kapsayacağı sorulmuştur. Yüksek, orta ve düşük seviyedeki öğrencilerin düşünme süreçleri ve örnekleri tablo 10'da birlikte verilmiştir.

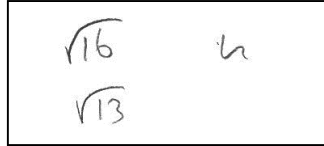
Tablo 10. Rasyonel sayılar ve tamsayılar kümesi arasındaki ilişkiye dair öğrenci yorumları

Öğrenci	Rasyonel sayılar kümesi Tamsayılar kümesi	Örnekleme
E-1	Rasyonel sayılar kümesi tamsayılar kümesini kapsar.	$-2 = -4 / 2$
K-1	Rasyonel sayılar kümesi tamsayılar kümesini kapsar.	$-2 = -2 / 1$
E-2	Tamsayılar kümesi rasyonel sayılar kümesini kapsar.	-
K-2	Rasyonel sayılar kümesi tamsayılar kümesini kapsar.	-
E-3	Tamsayılar kümesi kesirli sayılardan oluşan kümeyi kapsar.	Tam daha büyüktür.
K-3	Rasyonel sayılar kümesi tamsayılar kümesini kapsar.	Venn şeması

Kazanım: Rasyonel olmayan sayıların (irrasyonel sayıların) varlığını belirtir.(MEB,2005)

Soru 11: Köklü sayılar ile tamsayılar arasında nasıl bir ilişki vardır? Bu ilişkiyi açıklayan örnekler veriniz. Her tamsayıya karşılık gelen bir köklü sayı bulabilir miyiz?

11.soruyu yanıtlarken E-1 $\sqrt{16}$ köklü sayısının 4'e eşit olduğunu ve 4'ün bir tamsayı olduğunu söylemiştir. Araştırmacının “her köklü sayının bir tamsayı karşılığı var mıdır?” sorusuna ise olmadığını $\sqrt{13}$ sayısının herhangi bir tamsayıya karşılık gelmediğini belirtmiştir. Ama her tamsayının bir köklü sayı karşılığının olduğunu buna da $\sqrt{64} = 8$ örneğini vermiştir. Verilen cevap Şekil 34'te gösterilmiştir.



$$\begin{array}{l} \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{13} \end{array}$$

Şekil 34. E-1'in 11.soruya verdiği yanıt

K-1 de her tamsayının bir köklü sayı karşılığı olduğunu örneklerle destekleyerek açıklamıştır. Fakat bunun tersi durumun her zaman gerçekleşmediğini belirtmiştir. Bunun için de tamsayıya karşılık gelmeyen köklü sayı örnekleri vermiştir.

E-2 köklü sayılarla tamsayılar arasındaki ilişkiyi $\sqrt{4} = 2$ örneği ile açıklamıştır. Köklü sayıya bu şekilde kökten dışarı çıkıp tamsayılara karşılık gelebileceğini ifade ederek bu şekilde her tamsayıya bir köklü sayının karşılık geleceğini $3 = \sqrt{9}$, $5 = \sqrt{25}$, $4 = \sqrt{16}$ örnekleriyle açıklamıştır. “Ancak her köklü sayının bir tamsayı karşılığı yoktur. Örneğin $\sqrt{5}$ 'in tamsayı karşılığı yoktur.” demiştir. Verilen cevap Şekil 35'te gösterilmiştir.



$$\begin{array}{l} \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{5} = 3 \end{array}$$

Şekil 35. E-2'nin 11.soruya verdiği yanıt

K-2 her köklü sayının bir tamsayı karşılığı olduğunu örneklerle açıklamıştır. Biraz durakladıktan sonra $\sqrt{5}$ sayısının bir tamsayı karşılığı olmadığını söylemiştir. Araştırmacının sorusu üzerine her tamsayıya ise bir köklü sayı karşılık gelmediğini söylemiştir. Verilen cevap Şekil 36'da gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \sqrt{9} &= 3, \\ \sqrt{4} &= 2, \\ \sqrt{25} &= 5, \end{aligned}$$

Şekil 36. K-2'nin 11.soruya verdiği yanıt

E-3' den köklü sayı örneği istenmiştir. Köklü sayılara örnekler vererek bunlara karşılık gelebilecek tamsayıları yazmıştır. Fakat her köklü sayının bir tamsayı karşılığı olmadığını belirterek bunu $\sqrt{55}$ sayısı ile açıklamıştır. Her tamsayının ise bir köklü sayıya karşılık gelebileceğini belirtmiştir. Bu düşüncesini de zihninde tekrarladığı birkaç tamsayı için örnekler vererek desteklemiştir. Verilen cevap Şekil 37'de gösterilmiştir.

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{8} = 2 \quad \sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{55}$$

Şekil 37. E-3'ün 11.soruya verdiği yanıt

K-3'den bir köklü sayı örneği vermesi istenmiştir. $\sqrt{4} = 2$ ve $\sqrt{25} = 5$ örneklerini vermiştir. Ama her köklü sayının bir tamsayı karşılığı gelmediğini örnek olarak da $\sqrt{13}$ sayısının herhangi bir tamsayıya karşılık gelmediğini söylemiştir. Her tamsayının bir köklü sayı olmadığını söylemiştir. Araştırmacının 3'e karşılık gelen bir köklü sayı olup olmadığı sorusuna $\sqrt{9}$ cevabını vermiştir. Aynı şekilde $4 = \sqrt{16}$ olduğunu ifade etmiştir. “O halde bulabiliyoruz. Sanırım 13 için de kök içinde 13.13 yaparız.” demiştir.

Öğrencilerin köklü sayılarla tamsayılar arasında bir bağlantı kurması istenmiştir. Yüksek, orta ve düşük seviyedeki öğrencilerin cevapları ve örnekleri birlikte Tablo 11' de gösterilmiştir.

Tablo 11. Öğrencilerin köklü sayılar ve tamsayılar arasındaki ilişkiye yorumları

Öğrenci	Köklü sayılar Tamsayılar	Örnekleme
E-1	Her tamsayının bir köklü sayı karşılığı vardır ama tersi doğru değildir.	$\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{13}$
K-1	Her tamsayının bir köklü sayı karşılığı vardır ama tersi doğru değildir.	$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{5}$
E-2	Her tamsayının bir köklü sayı karşılığı vardır ama tersi doğru değildir.	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{5}$
K-2	Her tamsayının bir köklü sayı karşılığı vardır ama tersi doğru değildir.	$\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{5}$
E-3	Her tamsayının bir köklü sayı karşılığı vardır ama tersi doğru değildir.	$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{55}$
K-3	Her tamsayının bir köklü sayı karşılığı vardır ama tersi doğru değildir.	$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{13}$

Öğrenciler tabloda görüldüğü gibi kareköklü sayılar ile tamsayılar arasında ilişki kurmuş ve kurdukları bu ilişkiyi örneklerle desteklemişlerdir. Sadece orta seviyedeki kız öğrenci K-2 bir tamsayıya karşılık gelen birden fazla köklü sayı örneği verdiği halde her tamsayıya bir köklü sayı karşılık gelmez diyerek hata yapmıştır.

BÖLÜM V

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde, yapılan çalışmada elde edilen bulgular doğrultusunda ortaya çıkan sonuçlar özetlenmekte ve bu sonuçlara bağlı bazı öneriler sunulmaktadır.

1.1.Sonuçlar

Birinci alt problem *‘10.sınıf öğrencilerinin sayılar alt öğrenme alanındaki cebirsel düşünme seviyeleri nelerdir?’* biçiminde yazılmış ve önce bu sorunun cevabı aranmıştır.

Bu alt problemin cevabı olarak;

10. sınıftaki öğrencilerin çoğunluğunun düzey 1 ve düzey 2 de olduğu, çok az öğrencinin düzey 3 ve düzey 4 de olduğu ortaya çıkmıştır.

Cebir testinde öğrencilerin soruları doğru cevaplandırma yüzdeleri incelendiğinde öğrencilerin problem, eşitsizlik ve obeb sorusunda en çok zorlandığı görülmektedir. Bunun sebebi bu konular ile ilgili öğrencilerin eksik öğrenmeleri olduğu söylenebilir. Bu eksik öğrenmelerin 10.sınıf matematik konularının öğrenilmesini olumsuz yönde etkileyebilmektedir. Bu durumda öğrencilerin matematiğe karşı olumsuz tutum içine girmelerine neden olabilmektedir.

Araştırmanın ikinci alt problemi *‘10.sınıf öğrencilerinin sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeyleri ve düşünme süreçleri nasıldır?’* şeklinde ifade edilmişti.

Yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlarda aynı seviyede bulunan öğrencilerde önemli ölçüde bir fark görülmemiştir. Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine göre verdikleri cevaplar, o düzeyde istenen becerilerle karşılaştırıldığında sonuçların paralellik gösterdiği görülmektedir.

Öğrencilerin güçlük çektikleri ve zorlandıkları durum “özelden genele” ifadesini matematikte ifade etmeleri istendiğinde ortaya çıkmıştır. Bu ifadeyi öğrenciler güncel örnekler ya da diğer derslerde kullandıkları terimlerden örneklerle açıklamaya çalışmışlardır. Bunda matematik öğretmenlerinin özel durumlar için birkaç

örnek verip bunu tüm böyle durumlar için uygulayabiliriz şeklinde bir açıklama yerine bu “formülü” ya da bu “kuralı” şeklinde ifade ettikleri anlaşılmıştır.

Bilindiği üzere aritmetiksel işlem yapma becerisi yani sayılarla işlem yapabilme kabiliyeti cebirsel işlem becerisi için gerekli bir alt yapıdır. Sayılarla işlem yapabilme kabiliyeti olan ve onları istediği gibi kullanabilenler yani onlarla dört işlem, üs ve kök alma gibi işlemler yapabilenlerin cebir işlem yapabilme (harfli ifadelerle veya bilinmeyenlerle işlem yapabilme kabiliyetleri) kabiliyetlerinin de son derece iyi olduğu gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin zihninde genel bir ifade veya bir sayı kümesi oluşması yeterince mümkün olmamıştır. Küme kavramını ve sayı kümelerini iyi bir şekilde öğrenen öğrenciler, genelleştirme ve değişkeni sayı kümeleriyle tanımlamada daha az sıkıntı yaşayabilirler. Elde edilen sonuçlardan verilen bir özdeşlikteki değişkeni öğrencilerin farklı sayı kümeleriyle (tamsayılar, doğal sayılar, v.s.) tanımladıkları ortaya çıkmıştır. Örnekleme grubunda yer alan öğrencilerin değişkeni genelleştirmede bir takım öğrenme zorluklarına sahip oldukları gözlemlenmiştir. Öğrenciler değişkenin genel bir sayı olarak kullanılması konusunda bir hayli zorluklar yaşamaktadırlar.

1.2.Öneriler

Araştırmadan elde edilen bulgular doğrultusunda ilköğretimde cebirsel ifadeler konusunun öğretimine yönelik olarak aşağıdaki öneriler geliştirilebilir:

1. Öğrencilerin büyük çoğunluğunun Düzey 1 ve Düzey 2’ de olduğundan, 9. sınıftaki öğrencilere sayılar alt öğrenme alanı öğretilirken acele edilmemeli, öğrencilerin kendi kavramlarını oluşturmalarına fırsat verilmelidir.
2. Testte çok az yapılan ya da hiç yapılamayan soru maddeleri incelendiğinde sayılar öğrenme alanının öğretimine öğrencilerin yaşadığı zorluklar göz önüne alındığında geniş bir süre ayrılmasının daha iyi olacağı görüşüdeyiz.
3. Cebirle ilgili ilkeler, sayılardaki ilişkileri ve bilinmeyen bir niceliğin, denklemleri çözmede ve formülü değerlendirmede bir harf olarak nasıl gösterilebildiğinin anlaşılması olabilir. Öğrencilere genelleştirmeyi betimleme ve denklemleri kurma amacıyla cebirin dilini nasıl kullanacakları öğretilmelidir. Simgeleme anlayışları geliştikçe, öğrencilere simgesel ifadeleri nasıl düzenleyecekleri ve çalışma yapacakları öğretilmelidir.

4. Öğretmenler cebir öğretimine başlamadan önce öğrencilerin konu ile ilgili geçmiş bilgilerini test etmeli, varsa sahip oldukları yanlış anlamaları düzeltme yoluna gitmelidirler.
5. Cebir öğretiminin farklı yaklaşımları matematik eğitimi uzmanlarının ve deneyimli matematik öğretmenlerinin görev alacağı geniş çaplı projeler gerçekleştirilmelidir.
6. Bu araştırma genel bir lisede okuyan 10. sınıf öğrencileri ile sınırlı tutulmuştur. Değişik sınıf düzeylerinde, değişik okul türlerinde ve daha büyük bir örnekleme bu konu ile ilgili deneysel araştırmanın yapılması daha sağlam bir bilginin elde edilmesini sağlayabilir.
7. Bu çalışmada öğrencilerin sadece cebir bilgisi ele alınmıştır.9.sınıf matematik programının sayılar alt öğrenme alanı ve kazanımları ele alınmıştır. Matematiğin kümeler, fonksiyonlar ve geometri gibi diğer konularında da benzer araştırmalar yapılarak öğrencinin matematik bilgisinin doğasını belirleyecek yeni ölçütler oluşturulabilir ve öğrencilerin zihin yapılarını keşfetmede , düşüncelerini ifşa etmede yeni yollar geliştirilebilir .

KAYNAKÇA

- Ardahan, H. ve Ersoy, Y. (1998). Yönlü sayılarla ilgili sözel problemlerde olası yanlışlar ve öğretmenlerin tanıları. *III. Ulusal Fen Bilimleri eğitimi Sempozyumu*. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, 23-25 Eylül, 50-55.
- Akkaya, R. ve Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanlışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31, 180-185.
- Alexandrou-Leonidou V. and Philippou G. N. (2005). Teachers' beliefs about students' development of the pre-algebraic concept of equation . *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 41-48.
- Altun, M. (2005). *İlköğretim ikinci kademedeki matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel.
- Baki, A. (1998). *Cebirle ilgili yanlışların değerlendirilmesi*. 3. Ulusal Fen Bilimleri Sempozyumu, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Baki, A. ve Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2, 1, 27-46.
- Baş, S., Erbaş, A. K. ve Çetinkaya, S. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri. *Eğitim ve Bilim Education*, 35(159), 41-55.
- Birgin, O. ve Girbiz, R. (2009). İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Eğitim Fakültesi Dergisi*, 22(2), 529-550.
- Çağdaşer, B. (2008). *Cebir öğrenme alanının yapılandırmacı yaklaşımla öğretiminin 6.sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon
- Çıkla Akkus, O. (2004). *The Effects of Multiple Representations Based Instruction on Seventh Grade Students' Algebra Performance, Attitude Toward Mathematics, and Representation Preference*. Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara

- Dede Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir öğrencilere neden zor gelmektedir?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 1-12.
- Dede, Y., Yalın, H.İ., Argün, Z. (2002, 16-18 Eylül). *İlköğretim 8.sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanlışları*. V. Ulusal Fen Bilimleri Ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunuldu, ODTÜ, Ankara.
- Dede, Y. (2004, Mayıs). *Öğrencilerin cebirsel sözel problemleri denklem olarak yazarken kullandıkları çözüm stratejilerinin belirlenmesi*. Matematik Sempozyumu ve Sergilerinde sunuldu, Milli Kütüphane Konferans Salonları, Ankara.
- Dede, Y. (2005). I.Dereceden denklemlerin yorumlanması: eğitim fakültesi 1.sınıf öğrencileri üzerine bir çalışma. *Cumhuriyet Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 29(2), 197-205
- De Los Santos, E. P. (2008). "Guess my number" problems and algebraic thinking. *Studies in Learning, Evaluation, Innovation and Development*, 5(4), 11–22.
- Dooren, W., Verschaffel, L. and Ongeheva, P. (2003). Preservice teachers preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6: 27-52.
- Erbaş ,A.K., Ersoy, Y. (2002), *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin eşitliklerin çözümündeki başarıları ve olası kavram yanlışları*. V. Ulusal Fen ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunuldu, ODTÜ, Ankara.
- Göker, L. (1997). *Matematik tarihi ve Türk-İslam matematikçilerinin yeri*, İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.
- Gülpek, P. (2006). *İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin gelişimleri*. Yüksek Lisans Tezi. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.
- Greenes, C. and Findell, C. (1998). Algebra puzzles and problems (grade 7), mountainview, CA: Creative Publications.

- Hallagan, J. E. (2006). The case of Bruce: a teacher's model of his students' algebraic thinking about equivalent expressions. *Mathematics Education Research Journal*, 18(1), 103–12.
- Hart vd. (1981). *Algebra. children's understanding mathematics: 11-16(eds.)*, London: Dietmar Küchemann.
- Hart vd. (1998). *Children's understanding mathematics: 11-16*, General Editor K.M. Hart, The CSMS Mathematics Team.
- Herbert, K. ve Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 340-344.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*, 133–155.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 390-419.
- Kieran, C. ve Chalouh, L., 1993, Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra, Editör: Douglas T. Owens, In *Research ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*, Reston, VA: NCTM.
- Kriegler, S. (2004). Just what is algebraic thinking?.
<http://www.math.ucla.edu/%7Ekriegler/pub/algebrat.html> , 17 Aralık 2004.
- Lacampagne, C. (1995). Conceptual framework for the algebra initiative of the national institute on student achievement, curriculum and assesment. (Eds. Lacampagne, C., Blair, W. and Kaput, J.). *The algebra initiative colloquium*, 2, 237-242.
- MacGregor, M. and Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation : 11-15, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.
- Mason J., Alan G. and Wilder J. S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. The Open University in association with Paul Chapman Publishing.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2005). *Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11, 12.sınıflar) Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu*. Ankara: MEB.

NCTM 2000 “Principles and Standarts for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics Pub., Reston/VA, (Çevrimiçi)
<http://standarts.nctm.org>, 21 Ocak 2007

O’Bannon v.dğr.,2002, *Indiana’s Academic Standards. Grade 7English/Language Arts, Mathematics,Science, Social Studies*. Indiana State Dept.of Public Instruction, Indiana State Department of Education, Indianapolis,Indiana State Commission for Higher Education, Indianapolis

PISA (2006). PISA 2006 projesi ulusal ön raporu. MEB : EARGED.

PISA (2009). PISA 2009 projesi ulusal ön raporu. MEB: EARGED.

Pope, L. (1994). Teaching algebra. *Mathematics Education: A Handbook for Teachers, elsington College of Education*, 1, 88-99 .

Real, L., F. (1996). Secondary pupils translation of algebraic relationships into everyday language: a hong kong study. *Psychology of Mathematics Education* , 20, 280-287.

Sarier, Y. (2003). Lise matematik öğretmenlerinin cebir öğrenimi ve öğretimi ile ilgili görüşleri. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sfard, A.(1995).The development of algebra. *Historical and Psychological Perspectives. Journal Of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.

Tabach, M. and Friedlander, A. (2003). The role of context in learning beginning algebra. *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italia.

- Taylor Cox, J. (2003, Ocak). Algebra in Early Years? Yes. *Young Children*, ss. 14-21
- Türnüklü, A. (2000). Eğitim bilim araştırmalarında etkin olarak kullanılabilen nitel bir araştırma tekniği: görüşme. *Kuram ve uygulamada eğitim yönetimi*, 6(24), 543-559.
- Yenilmez, A., Avcu, T. (2009). Altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki başarı düzeyleri. *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 37-45.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63- 75.
- Wanjala, E.K. & Orton, A. (1996). Teachers' knowledge of pupils' errors in algebra. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 20th, Valencia, Spain, 8-12, (4), 411-418.

EKLER
EK 1
CEBİR TESTİ

Adı soyadı:

Yaşı:

Önceki yılki matematik dersi notu:

Bu çalışma Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen Ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği Bilim Dalında yapılan bir tez çalışmasıdır. Çalışmada bulunan sorulara vereceğiniz cevaplar çalışmanın geçerliliği ve güvenilirliği açısından çok önemlidir. Herhangi bir şekilde notla değerlendirilmeyecektir. Kısa ve öz cevaplar yerine uzun ve detaylı cevaplar yazmanızı tercih ederiz . Çalışmamıza samimiyetle katıldığınız için teşekkür ederiz.

Sorular:

1. $a+c=b+a+d+b$ eşitliği verilsin. Bu eşitlik her zaman doğru mudur? Bazen mi? Hiç bir zaman doğru değil midir?
2. İki sayıyı çarptığımız zaman çıkan sonuç ; bu iki sayının her birinden büyük olur mu?
3. $5.(p+q) - 2.(p+q)$ ifadesini en sade hale getiriniz.
4. $\frac{-a}{6} = \frac{-b}{2} = \frac{-c}{4}$ ise a, b, c yi küçükten büyüğe sıralayınız.
5. Bir yarımı kaç farklı şekilde ifade edebiliriz?
6. 1 ve $\frac{1}{2}$, 3 ve $\frac{1}{3}$, 4 ve $\frac{1}{4}$ arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

7. Toplamları 1 olan iki sayı alınız. Bu iki sayıdan büyük olanın karesine küçük sayı eklenirse mi daha büyük olur yoksa küçük olanın karesine büyük sayı eklenirse mi daha büyük olur?
8. $\frac{5}{2}$ yi başka şekilde nasıl yazabiliriz?
9. Bir sayıya başka bir sayı eklediğimizde daima cevap ilk sayıdan büyük olur mu? Açıklayınız .
10. $\frac{5}{4} - \frac{9}{12} = \frac{5-9}{4-12} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} = \frac{15-9}{12}$ hesapları kontrol edip , hatanın nerde olduğunu ifade ediniz.
11. $2^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (2^2)^3 + -2^2 + 2^0 + 2^1 = ?$
12. -1 ve 1, -2 ve 2, -3 ve 3 arasındaki ortak ilişki için ne düşünebiliriz ?
13. $\sqrt{2}$ ve 2 , $\sqrt{3}$ ve 3 , $\sqrt{4}$ ve 4 arasındaki ortak ilişki için ne düşünebiliriz?
14. İki farklı rasyonel sayı yazınız. payı yazdığınız bu iki rasyonel sayının paylarının toplamı ve paydası da bu iki rasyonel sayının paydalarının toplamı olan yeni bir

rasyonel sayı elde ediniz. Bu üç rasyonel sayıyı sıraladığınızda elde ettiğiniz rasyonel sayı her zaman başladığınız iki rasyonel sayı arasında kalıyor mu?

15. (5 ekle, 3'le çarp, 1 çıkart, 2'ye böl) bir aritmetik işlemler serisi verildiğinde, cevap olarak 13'ü veren bir başlangıç rakamı bulunuz. Daha genel olarak, elde olan bir sonucu üretecek bir başlangıç rakamı bulmak için bir yöntem geliştiriniz.

16. Değeri 3 ile 4 arasında olan bir rasyonel sayı yazınız. Değeri 3 ile 4 arasında olan ve paydası 5 olan bir rasyonel sayı yazınız, daha sonra bu şekilde yazılabilecek tüm rasyonel sayıları yazmanın bir yolunu bulunuz.

17. İki basamaklı bir doğal sayı sayın. İki basamaklı bu sayının rakamlarını yer değiştirerek elde ettiğiniz yeni bir sayı yazınız. Bu iki sayının farkını hesaplayınız ve çıkan sayının 9'a daima bölünebilir olduğunu gösteriniz. Bunu bu şekilde yazılabilecek bütün iki basamaklı sayılar için doğru olduğunu gösteriniz. Beş basamaklı sayılarda durum nasıldır?

18. 5 ile bölündüğü zaman 2 kalanını veren bütün sayılarla ilgili birer ifade yazınız.

19. 5 sayısını nasıl ifade edebiliriz?

20. Aşağıdaki örneklere kendi değişkenlerinizi yazınız ve indirimi hesaplayarak, küçükten büyüğe sıralayınız.

- 1 fiyatına 2 al
- 1 alana 1 bedava
- 1 alana 2.si %25 indirimli
- 2 alana 1 bedava
- 1 alana 2.si %50 indirimli

- 2 fiyatına 3 al

21. $x, y \in R$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 5 \end{aligned} \text{ olduğuna göre } (x - y) \text{ ifadesinin değeri en az kaç olur ?}$$

22. Bir tüccar aldığı 36 ton linyit ve 48 ton kok kömürünü birbirine karıştırmadan bir kamyonla deposuna taşımak istiyor. Taşıma sırasında kamyonunda boş yer kalmaması koşuluyla tüccarın en az seferde taşıtabilmesi için kaç tonluk kamyon tercih etmesi gerekir?

EK 2
ÖĞRENCİ GÖRÜŞME FORMU

Adı:

Tarih: / ... / 2011

Soyadı:

Saat: / ...

Okul:

Bu görüşme; farklı cebirsel düşünme seviyelerinde bulunan 10.sınıf öğrencilerin sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeylerini ve düşünme süreçlerini belirlemeyi amaçlayan bir tez çalışması kapsamında yapılmaktadır. Görüşme sonucunda elde edilen kişisel veriler araştırmacı dışında başka bir kurum ya da şahısla paylaşılmayacaktır. Yapılacak olan görüşme yaklaşık 30-40 dakikalık bir zaman dilimini kapsayacaktır.

Katılımınız ve katkılarınız için teşekkür ederim.

Nur Şebnem Bakır

Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü YL Öğrencisi

1. Kendisinden 1 çıkarıldığında 2 ile tam bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin? Bu şekildeki sayılara bir kaç tane örnek verebilir misin? Aynı şekilde kendisinden 1 çıkardığımızda hem 2 hem de 3 ile tam bölünebilen bir sayı söyleyebilir misin? Bunun gibi olan ve daha büyük bir sayı söyleyebilir misin? Şimdi ise kendisinden 1 çıkarıldığında hem 2 hem 3 hem 4 ile bölünebilen sayılara örnek verebilir misin? Bu şekildeki sayılara başka örnekler verip gözlemlediklerini belirtir misin? Bu şekilde olan tüm sayıları açıklayabilir misin?
2. $\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{5} : \frac{2}{10} \right)$ işleminin sonucunu bulurken sesli olarak düşünebilir misin?
3. $\frac{(-64)^5 \cdot (-4)^{-3}}{-8^5}$ işleminin sonucu kaçtır?

4. $\frac{a}{0.2} = \frac{b}{0.3} = \frac{c}{0.5}$ ise a,b,c tamsayılarını küçükten büyüğe doğru sıralar mısın?
5. $a < 0 < b$ ise $\sqrt{a^2} - \sqrt[3]{b^3} + \sqrt[3]{27a^3} + |a - b|$ işleminin sonucunu bulurken sesli olarak düşünebilir misin?
6. $(0.2)^x \cdot 25^{x+1} = 100$ olduğuna göre $5^{1-2x} = ?$
7. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[6]{32}$, $d = \sqrt[4]{8}$, $e = \sqrt[12]{128}$ sayılarının en büyüğü hangisidir? Açıklar mısın?
8. Size göre “ özelden genele” ifadesi nedir? Bu ifade matematikte ne anlama gelmektedir? Bir örnek verebilir misin?
9. Rasyonel sayılar kümesi tamsayılar kümesini kapsar mı? Düşünceni destekleyecek bir örnek verebilir misin?
10. Köklü sayılar ile tamsayılar arasında nasıl bir ilişki vardır ? Bu ilişkiyi açıklayan örnekler veriniz. Her tamsayıya karşılık gelen bir köklü sayı bulabilir miyiz?

T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

BÖLÜM: İstatistik Bölümü
SAYI : B.B.08.4.MEM.4.06.00.04-312/110649 24/12/2010
KONU : Araştırma İzni
Nur Şebnem BAKIR

GAZI ÜNİVERSİTESİNE
(Eğitim Bilimleri Enstitüsü)

İlgi : a) MEB Bağı Okul ve Kurumlarda Yapılacak Araştırma ve Araştırma Desteğine Yönelik İzin ve Uygulama Yönergesi,
b) Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsünün 10/12/2010 tarih ve 9392 sayılı yazısı.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans öğrencisi Nur Şebnem BAKIR' ın "**Ortaöğretim 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin geliştirilmesi matematik öğretmenlerinin bu süreçteki tahmin becerileri ve çözüm önerileri**" konulu tezi ile ilgili çalışma yapma isteği Müdürlüğümüzce uygun görülmüş ve araştırmanın yapılacağı İlçe Milli Eğitim Müdürlüğüne bilgi verilmiştir.

Mühürlü anketler (6 sayfadan oluşan) ekte gönderilmiş olup, uygulama yapılacak sayıda çoğaltılması ve çalışmanın bitiminde iki örneğinin (CD/disket) Müdürlüğümüz İstatistik Bölümüne gönderilmesini rica ederim.


Gülçin UYSAL

İ Müdür a.
Müdür Yardımcısı

EKLER :
Anket (6 sayfa)