T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN KATEGORİSİNDE İÇ KATEGORİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jihad Jamil MOHAMMED

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

AKSARAY, 2018

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342632 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "Jihad Jamil MOHAMMED", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN KATEGORİSİNDE İÇ KATEGORİLER ÜZERİNE" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN** ....

Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Yrd. Doç. Dr. Sedat TEMEL** ....

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Ayhan ERCİYES** ....

Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 23 Ocak 2018

Savunma Tarihi: 09 Şubat 2018

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışımda alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Jihad Jamil MOHAMMED

TEŞEKKÜR

Öncelikle Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN'a yüksek lisans öğrenimim boyunca verdiği desteklerden dolayı sonsuz şükranlarımı sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan aileme ve dostlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN KATEGORİSİNDE

İÇ KATEGORİLER ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Jihad Jamil MOHAMMED

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2018

ÖZET

Gruplar homotopi tipi 1 olan irtibatlı topolojik uzayların bir cebirsel modeli iken, çaprazlanmış modüller ise homotopi tipi 2 olan irtibatlı topolojik uzayların bir cebirsel modelidir. Çaprazlanmış modüller ilk olarak Whitehead tarafından tanımlanmışlardır. Daha sonra, Brown ve Spencer gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile grupların kategorisindeki iç grupoidlerin (diğer adıyla grup-grupoidlerin) kategorisinin denk olduğunu göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında benzer düşünce yapısı ile önce çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategoriler karakterize edilip bunların aslında birer iç grupoid olduğu gösterilmiştir. Son olarak ise çaprazlanmış kare olarak adlandırılan çaprazlanmış modüllerin üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinin çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç grupoidlerin kategorisine denk olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Çaprazlanmış Modül, Çaprazlanmış Kare, İç Kategori
Sayfa Adedi : 40
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

ON THE INTERNAL CATEGORIES WITHIN THE CATEGORY OF CROSSED MODULES

(M.Sc. Thesis)

Jihad Jamil MOHAMMED

AKSARAY UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 2018

ABSTRACT

Crossed modules are algebraic models of connected topological spaces of homotopy type 2 while groups are algebraic models of connected topological spaces of homotopy type 1. Crossed modules were originally defined by Whitehead. Brown and Spencer showed that the category of the crossed modules on the groups is equal to the category of the internal groupoids (also called group-groupoids) in the category of groups.

In this thesis study by a similar thought, first of all internal categories in the category of crossed modules are characterized and it has been shown that that these are actually internal groupoids. Finally, it has been shown that the category of crossed modules of the crossed modules called crossed squares equivalent to the category of internal groupoids in the category of crossed modules.

Keywords **:** Crossed Module, Crossed Square, Internal Category
Number of pages **:** 40
Adviser **:** Asst. Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN

1. GİRİŞ

Cebirsel topolojinin amaçlarından biri, bazı topolojik problemlere cebirsel yöntemlerle çözüm aramaktır. Özellikle topolojik uzaylar için temel grup kavramı bu amaç için çok kullanışlıdır. X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere x_0 noktasındaki tüm kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi $\pi_1(X, x_0)$ bir grup olup bu grup temel grup olarak adlandırılır. Temel grupları hesaplamak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Örtü uzayları teorisi ve Van-Kampen Teoremi bunlardan bazılarıdır. Abelyan olmayan gruplar Geometri, Analiz ve Fizikte geniş uygulamalara sahiptir. Temel grup kavramının yüksek mertebelere genelleştirilerek abelyan olmayan homotopi grupları elde edilmesi için yüksek boyutlu $\pi_n(X, x_0)$ homotopi grubu tanımlanmış, fakat $n \geq 2$ için bu grupların abelyan olduğu gözlenmiştir. Bunun üzerine $A \subseteq X$ ve $x_0 \in A$ olmak üzere $n \geq 1$ için n. mertebeden $\pi_n(X, A, x_0)$ relatif homotopi grubu tanımlanmış ve $n \geq 3$ için bu homotopi grupları abelyan olmasına rağmen $n = 2$ için $\pi_2(X, A, x_0)$ rölatif homotopi gruplarından bazılarının abelyan olmadığı doğrulanmıştır [1]. Bu uğraşı esnasında Whitehead $\rho : \pi_2(X, A, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ sınır fonksiyonunun bazı özel koşulları sağladığını gözlemlemiş ve bunu çaprazlanmış modül olarak adlandırmıştır. Burada $\pi_2(X, A, x_0)$ genelde abelyan değildir. Bu çalışmalar Van-Kampen Teoreminin yüksek boyutlu uzaylarda ispatına olanak sağlamıştır. O zamandan itibaren çaprazlanmış modül kavramı diğer alanlarda da önemli bir yer tutmuştur. Bu konuda yapılan önemli çalışmalardan bazıları Brown [2,3], Brown ve Higgins [4] ve Brown ve Huebschmann [5] dir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi, grup gösterimi teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli homoloji, kombinatör grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin birçok alanında önemli rolü vardır.

Lichtenbaum, Schlessinger [6] ve Gerstenhaber [7] çalışmalarında birleşmeli ve değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlamışlardır. Porter [8] çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Bununla birlikte, Arvasi ve Porter [9] çalışmalarında değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerle ilgili birçok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Lue [10] da, verilen bir çaprazlanmış modül otomorfizm grubunun çaprazlanmış modüllerin derivasyon grubuna etki ettiğini göstermiştir. Norrie [11] de bu çaprazlanmış modülün yukarıda belirtilen anlamda otomorfizm grubuna benzerliğini ispatlamış ve buna aktör çaprazlanmış modül adını vermiştir. Aktör kavramı, bir çaprazlanmış modülün diğeri üzerine etkisini tanımlamayla doğrudan ilgilidir. Çaprazlanmış modüller, 2-boyutlu cebirsel yapılar olarak düşünülebilirler [12].

Çaprazlanmış kare Guin-Walery ve Loday [13] tarafından cebirsel K-teorideki problemlere uygulanmak üzere tanımlanmıştır. Değişmeli cebir için benzer tanım Ellis tarafından [14] de verilmiştir. Homoloji teorisinde çaprazlanmış karenin bazı uygulamaları Lue [10], Brown ve Loday [15] çalışmalarında bulunabilir.

Gruplar için 2-çaprazlanmış modül kavramı [16] da tanımlanmıştır. Daha sonra bu kavramın farklı bir uygulaması olarak Grandjean ve Vale [17] tarafından 2-çaprazlanmış modüllerin (ko)homolojisi incelenmiştir. Ayrıca Arvasi [18] deki çalışmasında değişmeli cebirler için 2-çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Bu çalışmaların yanısıra Arvasi ve Porter [19], Mutlu ve Porter [20,21] ve Arvasi ve Ulualan [22] konuyla ilgili yapılan çalışmalardan bazıları olarak karşımıza çıkar.

Brown ve Spencer [23] de grupoidlerin kategorisindeki grup objeler (grupların kategorisindeki iç kategoriler) grup-grupoid olarak adlandırılmışdır. Yine [23] de grup-grupoidlerin kategorisi ile çaprazlanmış modüllerin kategorisinin denk olduğu, Loday [24] de Cat^1-grupların kategorisi ile çaprazlanmış modüllerin kategorisinin denk olduğu ve daha genel olarak Porter [8] de çok işlemli grupların kategorisindeki iç grupoidlerin kategorisi ile aynı tip çaprazlanmış modüllerin kategorisinin denk olduğu gösterilmiştir.

Matematikte, daha özel olarak kategori kuramında; iç kategoriler, küçük kategori kavramının genelleştirilmesidir ve sabit bir kategoriye göre tanımlanmıştır. Sabit kategori kümeler kategorisi olarak kabul edilirse, o zaman iç kategoriler küçük kategorilerdir. Genel olarak, iç kategoriler verilen kategorideki nesnelerin nesnesi ve morfizmalar nesnesi olarak düşünülen ve bir takım eşitlikleri sağlayan verilen kategorideki morfizmlerin bir kümesinden oluşan bir nesne çiftinden oluşur. Grup nesneleri, iç kategorilerin bilinen örnekleridir.

Bu tez çalışmasında öncelikle çaprazlanmış modüller ve iç kategoriler üzerinde literatürde bulunan çalışmalar incelenecek ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilecektir. Daha sonra [7] ve [8] kaynaklarında kullanılan benzer düşünce tarzı ile çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategori yapıları karakterize edilip bu yapıların bazı kategoriksel ve cebirsel özelliklerinden bahsedilecektir. Son olarak, beklenildiği üzere, çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategoriler ile çaprazlanmış kareler arasındaki ilişki incelenecektir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, grup etkileri, çaprazlanmış modüller, çekirdek ve genişlemeler gibi bazı teorik bilgileri içeren temel kavramlar verilecektir.

2.1 Grup genişlemeleri

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir küme ve $*$ A üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $(A,*)$ grup olarak adlandırılır

(i) *(birleşme)* her $a,b,c \in A$ için

$$a*(b*c)=(a*b)*c\ ,$$

(ii) *(birim eleman)* her $a \in A$ için

$$a*e=e*a=a$$

olacak şekilde bir tek $e \in A$ elemanı vardır,

(iii) *(ters eleman)* her $a \in A$ için

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$$

olacak şekilde bir $a^{-1} \in A$ elemanı vardır.

Ayrıca, yukarıdaki özelliklere ek olarak

(iv) her $a,b \in A$ için

$$a*b=b*a$$

ise bu gruba abelyan (veya değişmeli) grup denir.

A bir grup H da onun bir alt kümesi olmak üzere, eğer H, $*$ operatörüne göre bir grup yapısına sahip ise H ya A nın bir alt grubu denir ve $H \leq A$ ile gösterilir. N, A nın bir alt grubu ve $a*N=\{a*n : n \in N\}$ olmak üzere, her $a \in A$ için

$$a*N=N*a$$

ise N ye A nın normal alt grubu denir ve $N \lhd A$ ile gösterilir.

A bir grup ve N, A nın bir normal alt grubu olsun. Bu durumda

$$A/N=\{a*N : a \in A\}$$

kümesi üzerindeki

$$\begin{array}{ccc} A/N\times A/N & \to & A/N \\ (a*N,b*N) & \mapsto & (a*b)*N \end{array}$$

işlemi ile birlikte bir grup yapısı oluşturur ve bu grup A nın (N tarafından) bölüm grubu olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2. $(A,*)$ ve $(B,\cdot)$ iki grup ve $f:A\to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a,b\in A$ için

$$f(a*b)=f(a)\cdot f(b)$$

oluyorsa f ye grup homomorfizmi denir.

Eğer f birebir ise monomorfizm, örten ise epimorfizm, hem birebir hem de örten ise izomorfizm olarak adlandırılır. Bir A grubundan kendi üzerine tanımlanan izomorfizme otomorfizm denir ve $\mathbf{Aut}(A)$ ile gösterilir. Ayrıca tüm otomorfizmler bileşke işlemi ile birlikte bir grup yapısı oluşturur. Her $a\in A$ için

$$\begin{array}{ccccc} f_a & : & A & \to & A \\ & & x & \mapsto & f_a(x)=a*x*a^{-1} \end{array}$$

olarak verilen fonksiyon A nın bir otomorfizmidir. Bu tür otomorfizmler iç otomorfizm olarak adlandırılır ve $\mathbf{Inn}(A)$ ile gösterilir.

Tezin geri kalan kısmında karışıklık olmaması için grup işlemi toplam $(+)$, bir elemanın tersi $-a$ ve birim eleman 0 (sıfır) ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.3. $(A,*)$ ve $(B,\cdot)$ iki grup ve $f:A\to B$ bir fonksiyon olsun. $\ker f=\{a\in A : f(a)=0\}$ kümesi f nin çekirdeği olarak adlandırılır. Ayrıca, $\operatorname{Im} f=\{f(a) : a\in A\}$ kümesine de f nin görüntüsü denir.

Bir grup homomorfizmin çekirdeği başlangıçtaki grubun normal alt grubudur ve bir grup homomorfizmin görüntüsü de görüntüdeki grubun altgrubudur.

A ve B iki grup olsun.

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & : & B & \to & \mathbf{Aut}(A) \\ & & b & \mapsto & \varphi_b \end{array}$$

şeklindeki grup homomorfizmi A üzerine B nin (sol) etkisidir.

Grup elemanları ve işlemleri cinsinden sol etki tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.1.4. A ve B iki grup olsun. Eğer

$$\begin{array}{ccc} B\times A & \to & A \\ (b,a) & \mapsto & b\cdot a \end{array}$$

fonksiyonu her $a,a_1\in A$ ve $b,b_1\in B$ için

(i) $b\cdot(a+a_1)=b\cdot a+b\cdot a_1$,

(ii) $(b+b_1)\cdot a=b\cdot(b_1\cdot a)$ ve

(iii) $0\cdot a=a$

şartlarını sağlanıyorsa B, A üzerine etki ediyor denir.

Örnek 2.1.5. A bir grup ve N, A nın bir normal alt grubu olsun. Bu durumda her $a\in A$ ve $n\in N$ için $a\cdot n=a+n-a$ şeklinde tanımlı fonksiyon bir etkidir. Bu etki konjuge (eşlenik) etki olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.6. Bir

$$A\ :\ A_0\xrightarrow{f_1}A_1\xrightarrow{f_2}A_2\xrightarrow{f_3}\cdots\xrightarrow{f_n}A_n$$

grup ve grup homomorfizmleri dizisinde herbir homomorfizmin görüntüsü sonrakinin çekirdeğine eşit yani her $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ için $\operatorname{Im} f_k=\ker f_{k+1}$ ise bu dizi tam olarak adlandırılır.

A ve B tam dizileri arasındaki morfizm $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n):A\to B$ n-lisidir. Burada her $k\in\{0,1,2,...,n\}$ için $\alpha_k:A_k\to B_k$

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & : & A_0 & \xrightarrow{f_1} & A_1 & \xrightarrow{f_2} & A_2 & \xrightarrow{f_3} & \cdots & \xrightarrow{f_n} & A_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ B & : & B_0 & \xrightarrow[g_1]{} & B_1 & \xrightarrow[g_2]{} & B_2 & \xrightarrow[g_3]{} & \cdots & \xrightarrow[g_n]{} & B_n \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde grup homomorfizmleridir. Yani her $k\in\{0,1,2,...,n\}$ için $\alpha_{k+1}f_{k+1}=g_{k+1}\alpha_k$ dir.

Grup ve grup homomorfizmleri dizisi sınırlı veya sınırsız olabilir.

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B\longrightarrow 0$$

formundaki bir tam dizi kısa tam dizi olarak adlandırılır. Burada 0 bir elemanlı bir grup, i monomorfizm, p epimorfizm ve $\ker p = A$ dir. Bir kısa tam dizide E grubuna B nin A tarafından genişlemesi denir. Eğer $ps = 1_B$ olacak şekilde bir $s : B \to E$ grup homomorfizmi varsa bu genişlemeye ayrık (split) genişleme denir.

E, B nin A tarafından genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{cccc} \theta & : & E & \to & A \times B \\ & & e & \mapsto & \left(e - sp(e), p(e)\right) \end{array}$$

birebir ve örten bir fonksiyondur ve θ nın tersi

$$\begin{array}{cccc} \theta^{-1} & : & A \times B & \to & E \\ & & (a,b) & \mapsto & a + s(b) \end{array}$$

dır. Böylece θ bir izomorfizm olacak şekilde $A \times B$ üzerinde bir grup yapısı oluşturulabilir. $(a,b),(a_1,b_1) \in A \times B$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} (a,b) + (a_1,b_1) &= \theta\left(\theta^{-1}\left((a,b) + (a_1,b_1)\right)\right) \\ &= \theta\left(\theta^{-1}(a,b) + \theta^{-1}(a_1,b_1)\right) \\ &= \theta\left(a + s(b) + a_1 + s(b_1)\right) \\ &= \left(a + s(b) + a_1 + s(b_1) - s(b_1) - s(b), b + b_1\right) \\ &= \left(a + \left(s(b) + a_1 + s(b)\right), b + b_1\right) \end{aligned}$$

dır. $A \times B$ Kartezyen çarpımı yukarıdaki işlem ile birlikte bir grup yapısı oluşturur. Bu gruba A ve B nin yarı-direkt çarpımı (semi-direct product) denir ve $A \rtimes B$ şeklinde gösterilir. Burada B nin A tarafından ayrık genişlemesi

$$b \cdot a = s(b) + a - s(b)$$

şeklindeki işlem ile B nin A üzerine sol etkisini tanımlar. Bu tür etkiler türetilmiş etki olarak adlandırılır. Herhangi bir A grubu kendisi tarafından bir genişlemeye sahip olup bu bize

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\;i\;} A \rtimes A \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A \longrightarrow 0$$

şeklindeki konjuge etkiyi verir. Burada her $a, a_1 \in A$ için $i(a) = (a,0)$, $p(a,a_1) = a_1$ ve $s(a) = (0,a)$ dir.

2.2 Temel kategoriksel kavramlar

Bu bölümde [25] deki bazı temel kategoriksel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.2.1 [25] Bir $\mathbb{C}=(C_1,C_0,s,\mathrm{t},\varepsilon,m)$ kategorisi objeler sınıfı C_0, morfizmler sınıfı C_1, kaynak (source) ve hedef (target) fonksiyonları $s,t:C_1\to C_0$, birim obje fonksiyonu $\varepsilon:C_0\to C_1, x\mapsto\varepsilon(x)=1_x$ ve kısmi bileşke olarak adlandırılan $m:C_1*C_1\to C_1,(b,a)\to b\circ a$ dan oluşur. Burada $C_1*C_1=\{(b,a)\mid s(b)=t(a)\}$ olmak üzere bileşke işlemi

(i) *(birleşme)* her $a,b,c\in C_1$ için $s(b)=t(a)$ ve $s(c)=t(b)$ ile

$$c\circ(b\circ a)=(c\circ b)\circ a$$

(ii) *(birim morfizm)* her $a\in C_1$ için

$$\varepsilon(t(a))\circ a=1_{t(a)}\circ a=a \quad \text{ve} \quad a\circ\varepsilon(s(a))=a\circ 1_{s(a)}=a$$

şartlarını sağlamaktadır. Eğer $x,y\in C_0$ ise bu durumda x kaynağına ve y hedefine sahip tüm morfizmler kümesi $C(x,y)$ ile gösterilir. Yani,

$$C(x,y)=\{a\in C_1\mid s(a)=x \text{ and } t(a)=y\}$$

dır.

Örnek 2.2.2 Tüm kümeler ve kümeler arasındaki adi fonksiyonlar bir kategori oluşturur ve bu kategori kümeler kategorisi olarak adlandırılıp **Set** ile gösterilir.

Örnek 2.2.3 Tüm topolojik uzaylar ve aralarındaki sürekli fonksiyonlar bir kategori oluşturur ve bu kategori topolojik uzaylar kategorisi olarak adlandırılıp **Top** ile gösterilir.

Örnek 2.2.4 Tüm gruplar ve onlar arasındaki homomorfizmler bir kategori oluşturur ve bu kategori gruplar kategorisi olarak adlandırılıp **Gp** ile gösterilir.

Benzer şekilde halkalar ve halka homomorfizmleriyle **Ring** ile gösterilen halkalar kategorisi oluşturulur.

Tanım 2.2.5 [25] $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ iki kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{D}$ ye $\mathbb{C}$ nin alt kategorisi denir.

(i) D_0, C_0 ın alt sınıfıdır,

(ii) her $x, y \in D_0$ için $D(x,y) \subseteq C(x,y)$ dır,

(iii) D_1 deki bileşke C_1 deki bileşkenin bir kısıtlamasıdır,

(iv) her $x \in D_0$ için x e ait birim morfizm C_1 deki ile aynıdır.

Örnek 2.2.6 Birimli halkalar kategorisi **Ring$_1$**, halkalar kategorisi **Ring** in alt kategorisidir.

Tanım 2.2.7 [25] $\mathbb{C}$ nin bir $\mathbb{D}$ alt kategorisi her $x, y \in D_0$ obje çifti için $D(x,y) = C(x,y)$ ise $\mathbb{D}$ ye dolu (full) alt kategori, $D_0 = C_0$ ise $\mathbb{D}$ ye geniş (wide) alt kategori denir.

Örnek 2.2.8 $\mathbb{C}$ bir kategori olsun. Bu durumda yalnız $\mathbb{C}$ nin birim morfizmini içeren kategory $\mathbb{C}$ nin bir geniş alt kategorisidir.

Örnek 2.2.9 Abelyan gruplar kategorisi **Ab**, gruplar kategorisi **Gp** nin bir dolu alt kategorisidir.

Tanım 2.2.10 [25] $\mathbb{C}$ bir kategori ve $a \in C(x,y)$, $\mathbb{C}$ içinde bir morfizm olsun. Eğer $b \circ a = 1_x$ ve $a \circ b = 1_y$ olacak şekilde bir $b \in C(y,x)$ morfizmi varsa a ya $\mathbb{C}$ içinde bir izomorfizm, x, y objelerine de izomorftur denir ve $x \cong y$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımda verilen $b \in C(y,x)$ morfizmine $a \in C(x,y)$ morfizminin tersi denir ve a^{-1} şeklinde gösterilir. Aynı zamanda $b \in C(y,x)$ de bir izomorfizmdir.

Örnek 2.2.11 Kümeler kategorisi **Set** de izomorfizmler bijektif (birebir ve örten) tir. Topolojik uzaylar kategorisi **Top** da izomorfizmler homeomorfizmlerdir. Gruplar kategorisi **Gp** de izomorfizmler bijektif grup homomorfizmleridir.

Tanım 2.2.12 [25] $\mathbb{C}$ bir kategori ve x, $\mathbb{C}$ de bir obje olsun. Eğer $\mathbb{C}$ de x kaynaklı $(s(a) = x)$ yalnızca bir a morfizmi varsa x e $\mathbb{C}$ nin bir başlangıç (initial) objesi denir. Benzer şekilde, $\mathbb{C}$ de x hedefli $(t(a) = x)$ sadece bir a morfizmi varsa x e $\mathbb{C}$ nin bir bitiş (final) objesi denir. Eğer $\mathbb{C}$ deki bir obje hem başlangıç hem de bitiş objesi ise bu obje sıfır objsi olarak adlandırılır ve **0** ile gösterilir.

Örnek 2.2.13 Gruplar kategorisi **Gp** de tek elemanlı bir grup sıfır objedir.

Tanım 2.2.14 [25] $\mathbb{C}$ bir kategori, **0**, $\mathbb{C}$ nin bir sıfır objesi ve $a \in C(x, y)$, $\mathbb{C}$ de bir morfizm olsun. Bu durumda biricik $0_y \circ 0_x^{-1} = 0_{x,y} \in C(x, y)$ morfizmi sıfır morfizm olarak adlandırılır. Ayrıca, $\{k \in x \mid a(k) = 0_{x,y}(k)\}$ objesine $a \in C(x, y)$ nın çekirdeği denir ve bu obje $\ker a$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.15 Gruplar kategorisi **Gp** de $f : G \to H$ grup homomorfizminin çekirdeği, G nin $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = 0_H\}$ alt grubudur.

Tanım 2.2.16 [25] $\mathbb{C}$ bir kategori ve $a \in C(x, y)$, $b \in C(z, y)$ $\mathbb{C}$ de iki morfizm olsun. Eğer

(i) $a \circ p_1 = b \circ p_2$ ve

(ii) C_0 daki her m objesi ve $a \circ q_1 = b \circ q_2$ eşitliğini sağlayan $q_1 \in C(m, x)$ ve $q_2 \in C(m, z)$ morfizmleri için $p_1 \circ \varphi = q_1$ ve $p_2 \circ \varphi = q_2$ olacak şekilde bir tek $\varphi : m \to P$ morfizmi vardır.

şartlarını sağlan bir $P \in C_0$ objesi ve $p_1 \in C(P, x)$, $p_2 \in C(P, y)$ morfizmleri varsa (P, p_1, p_2) üçlüsüne yada kısaca P ye a ve b nin geri çekmesi (pullback) denir.

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & z \arrow[d, "b"] \\
& x \arrow[r, "a"'] & y
\end{tikzcd}$$

Örnek 2.2.17 Gruplar kategorisi **Gp** de $f : G \to K$ ve $g : H \to K$ iki grup homomorfizmi olsun. Bu durumda $(G\,{}_f\!\times_g H, \pi_1, \pi_2)$, f ve g nin geri çekmesidir. Burada $G\,{}_f\!\times_g H = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\}$ dır.

Tanım 2.2.18 [25] $\mathbb{C}$ bir kategori, I bir küme ve $\{x_i \mid i \in I\}$ objelerin bir sınıfı olsun. x_i objelerinin çarpımı her $i \in I$ için aşağıdaki evrensellik özelliğini sağlayan $\pi_i : x \to x_i$ morfizmleriyle birlikte $\mathbb{C}$ nin bir x objesidir:

- herhangi bir $y \in C_0$ objesi ve her $i \in I$ için $f_i : y \to x_i$ morfizmleri için $\pi_i \circ \varphi = f_i$ olacak şekilde biricik $\varphi : y \to x$ morfizmi vardır.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\pi_i"] & x_i \\
y \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Kategoriler arasındaki dönüşümler funktor olarak adlandırılır. Şimdi bir funktorun açık tanımını verelim.

Tanım 2.2.19 [25] $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ iki kategori, $F_1 : C_1 \to D_1$ ve $F_0 : C_0 \to D_0$ iki fonksiyon olsun. Eğer $F = (F_1, F_0)$ kategori yapı fonksiyonları s, t, ε ve m ile uyumlu ise F ye $\mathbb{C}$ den $\mathbb{D}$ ye bir funktor denir. Yani;

(i) her $a \in C_1$ için $s(F_1(a)) = F_0(s(a))$, $t(F_1(a)) = F_0(t(a))$

(ii) her $x \in C_0$ için $F_1(1_x) = 1_{F_0(x)}$

(iii) $s(b) = t(a)$ şartını sağlayan her $a, b \in C_1$ için $F_1(b \circ a) = F_1(b) \circ F_1(a)$ dir.

Örnek 2.2.20 $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ fonksiyonu her topolojik uzayı temel kümesine taşıyan bir funktordur. Bu funktor unutkan (forgetful) funktor olarak adlandırılır.

İki funktorun bileşkesinin de bir funktor olduğu aşikardır. O halde aralarındaki morfizmleri funktorlar olan küçük kategorilerin kategorisi oluşturulabilir ve bu kategori **Cat** ile gösterilir.

Tanım 2.2.21 [25] $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ iki funktor ve $\eta : C_0 \to D_1$ her $x \in C_0$ için $s(\eta(x)) = F_0(x)$ ve $t(\eta(x)) = G_0(x)$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer her $a \in C(x, y)$ için $G_1(a)\eta(x) = \eta(y)F_1(a)$ ise η doğal dönüşüm olarak adlandırılır ve $\eta : F \Rightarrow G$ ile gösterilir.

$$
\begin{tikzcd}
F_0(x) \arrow[r, "\eta(x)"] \arrow[d, "F_1(a)"'] & G_0(x) \arrow[d, "G_1(a)"] \\
F_0(y) \arrow[r, "\eta(y)"'] & G_0(y)
\end{tikzcd}
$$

$F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ funktorları için $\eta : F \Rightarrow G$ bir doğal dönüşüm olsun. Eğer her $x \in C_0$ için $\eta(x)$, $\mathbb{D}$ de bir izomorfizma ise $\eta : F \Rightarrow G$ doğal izomorfima olarak adlandırılır. Bu durumda, F ve G doğal denktir denir ve $F \simeq G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.22 [25] $F:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ bir funktor olsun. Eğer $G\circ F\simeq 1_{\mathbb{C}}$ ve $F\circ G\simeq 1_{\mathbb{D}}$ şartlarını sağlayan bir $G:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ funktoru varsa $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ denktir denir ve $\mathbb{C}\simeq\mathbb{D}$ ile gösterilir.

Her morfizmi bir izomorfizm olan kategoriye grupoid denir. Monoid sadece bir objeli kategori olarak düşünülebilirken, bir grup tek objeli bir grupoid olarak düşünülebilir. Grupoidler arasındaki morfizmler sıradan funktorlardır.

Örnek 2.2.23 X bir topolojik uzay olsun. X de $[0,1]\to X$ yollarının tüm relatif homotopi sınıfları kümesi $\pi\left(X\right)$, X üzerinde bir grupoiddir. Bu grupoid X in temel grupoidi olarak adlandırılır.

2.3 Gruplarda çaprazlanmış modüller (XMod)

Bu bölümde, [8] de verilen çaprazlanmış modüllerin tanımı verilecektir. Ayrıca, çaprazlanmış modüller hakkında bazı örnekler verilerek cebirsel özelliklerine değinilecektir.

Tanım 2.3.1 A ve B iki grup ve B nin soldan A üzerine etkisi var olsun. Eğer $\left(1_A,1_A\times\alpha,\alpha\right)$ ve $\left(\alpha,\alpha\times 1_B,1_B\right)$ ayrık genişleme morfizmleri ise $\alpha:A\to B$ grup homomorfizmi bir çaprazlanmış modül olarak adlandırılır ve $\left(A,B,\alpha\right)$ ile gösterilir [8].

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "1_A"'] & A\rtimes A \arrow[r, shift right, "p"'] \arrow[d, "1_A\times\alpha"'] & A \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"'] & A\rtimes B \arrow[r, shift right, "p"'] \arrow[d, "\alpha\times 1_B"'] & B \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] \arrow[d, "1_B"'] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] & B\rtimes B \arrow[r, shift right, "p"'] & B \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

Grup işlemleri ve etkiler içinde çaprazlanmış modüllerin tanımını vermek oldukça kullanışlıdır.

Önerme 2.3.2 [8] A ve B iki grup ve $\alpha:A\to B$ bir grup homomorfizmi olsun. B nin A üzerine bir etkisi verilsin. Bu durumda her $a,a_1\in A$ ve $b\in B$ için

(CM1) $\alpha\left(b\cdot a\right)=b+\alpha\left(a\right)-b$

(CM2) $\alpha\left(a\right)\cdot a_1=a+a_1-a$

şartları sağlanıyorsa (A,B,α) bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 2.3.3 Aşağıdaki homomorfizmlerin birer çaprazlanmış modül olduğunu göstermek oldukça kolaydır.

(i) X bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in A$ olsun. Bu durumda $\pi_2(X,A,x)$ ikinci relatif homotopi grubundan $\pi_1(X,x)$ temel gruba olan sınırlı ρ fonksiyonu bir çaprazlanmış modüldür.

(ii) G bir grup ve N, G nin bir normal alt grubu olsun. G nin N üzerine konjuge etkisi ile birlikte $N \xrightarrow{inc} G$ içine fonksiyonu bir çaprazlanmış modüldür.

(iii) L herhangi bir P-modül olmak üzere $1: L \to P$ aşikar homomorfizmi P nin L üzerine etkisiyle birikte bir çaprazlanmış P-modüldür.

(A,B,α) ve (A',B',α') iki çaprazlanmış modül olmak üzere (A,B,α) dan (A',B',α') ne $f = \langle f_A, f_B \rangle$ çaprazlanmış modül morfizmi her $a \in A$ ve $b \in B$ için

(i) $f_B\alpha = \alpha' f_A$ and

(ii) $f_A(b \cdot a) = f_B(b) \cdot f_A(a)$

şartlarını sağlayan $f_A : A \to A'$ ve $f_B : B \to B'$ grup homomorfizm çiftidir.

$$\begin{tikzcd}
B \times A \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "f_B \times f_A"'] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[d, "f_B"] \\
B' \times A' \arrow[r, "\cdot"] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B'
\end{tikzcd}$$

Yukarıda tanımlanan morfizm yardımıyla çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturulur ve bu kategori **XMod** ile gösterilir.

Tanım 2.3.4 [26,27] (A,B,α) ve (S,T,σ) iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

(i) $S \le A$, $T \le B$,

(ii) σ, α nın S ye kısıtlanması ve

(iii) T nin S üzerine etkisi B nin A üzerine indirgenmiş etkisidir

oluyorsa (S,T,σ) ye (A,B,α) nin alt çaprazlanmış modülü denir.

Tanım 2.3.5 [27] (A,B,α) bir çaprazlanmış modül ve (S,T,σ), (A,B,α) nın bir alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda

(i) $T \lhd B$,

(ii) her $b \in B$ ve $s \in S$ için $b \cdot s \in S$ ve

(iii) her $t \in T$ ve $a \in A$ için $t \cdot a - a \in S$

ise (S,T,σ) ye (A,B,α) nin normal alt çaprazlanmış modülü veya ideali denir.

Örnek 2.3.6 $f = \langle f_A, f_B \rangle : (A,B,\alpha) \to (A',B',\alpha')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda $f = \langle f_A, f_B \rangle$ nin çekirdeği

$$\ker f = \ker \langle f_A, f_B \rangle = \left(\ker f_A, \ker f_B, \alpha_{|\ker f_A} \right)$$

(A,B,α) nın idealidir. Ayrıca $f = \langle f_A, f_B \rangle$ nin görüntüsü

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \langle f_A, f_B \rangle = \left(\operatorname{Im} f_A, \operatorname{Im} f_B, \alpha'_{|\operatorname{Im} f_A} \right)$$

(A',B',α') nün alt çaprazlanmış modülüdür.

İdealler kullanılarak bölüm çaprazlanmış modül yapısı şu şekilde oluşturulabilir: (A,B,α) bir çaprazlanmış modül ve (S,T,σ), (A,B,α) nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$\left(A/S, B/T, \alpha^* \right)$$

üçlüsü bir çaprazlanmış modül olur, burada B/T nin A/S üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccc} B/T \times A/S & \to & A/S \\ (b+T, a+S) & \mapsto & (b \cdot a) + S \end{array}$$

ile α^* ise

$$\begin{array}{cccc} \alpha^* & : & A/S & \to & B/T \\ & & a+S & \mapsto & \alpha(a) + T \end{array}$$

şeklinde verilmektedir.

Tanım 2.3.7 Bir topolojik çaprazlanmış modül, A ve B topolojik grupları, $\alpha : A \to B$ sürekli grup homomorfizmi ve Teorem 2.3.2 koşullarını sağlayan B nin A üzerine sürekli bir etkisinden oluşur.

Şimdi gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi için geri çekme kavramını tanımlayacağız.

Tanım 2.3.8 (A,B,α), (M,P,μ) ve (C,D,γ) üç çaprazlanmış modül, $f = \langle f_A, f_B \rangle : (A,B,\alpha) \to (M,P,\mu)$ ve $g = \langle g_C, g_D \rangle : (C,D,\gamma) \to (M,P,\mu)$ iki çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda f ve g nin geri çekme çaprazlanmış modülü

$$\left(A\,{}_{f_A}\!\times_{g_C} C, B\,{}_{f_B}\!\times_{g_D} D, \alpha \times \gamma \right)$$

dir, burada $B\,{}_{f_B}\!\times_{g_D} D$ nin $A\,{}_{f_A}\!\times_{g_C} C$ üzerine etkisi her $(b,d) \in B\,{}_{f_B}\!\times_{g_D} D$ ve $(a,c) \in A\,{}_{f_A}\!\times_{g_C} C$ için

$$(b,d) \cdot (a,c) = (b \cdot a, d \cdot c) \in A_{f_A} \times_{g_C} C$$

şeklindedir.

2.4 Gruplarda çaprazlanmış kareler (X^2Mod)

Bu bölümde, [15] de verilen çaprazlanmış kare tanımı ve bazı örnekleri verilecektir.

Tanım 2.4.1 [15] Gruplar üzerinde bir çaprazlanmış kare P grubunun soldan L, M, N üzerine etkisiyle birlikte (burada M nin L ve N üzerine etkisi μ yoluyla ve N nin L ve M üzerine etkisi ν yoluyla verilmektedir) $\nu\lambda' = \mu\lambda$ şartını sağlayan $\lambda : L \to M$, $\lambda' : L \to N$, $\mu : M \to P$ ve $\nu : N \to P$ dört grup morfizmi ve $h : M \times N \to L$ fonksiyonundan oluşur ve aşağıdaki özellikler sağlanır: Her $l \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ve $p \in P$ için

(i) λ ve λ' P-denktir ve μ, ν ve $\kappa = \mu\lambda$ birer çaprazlanmış modüldür.

(ii) $\lambda h(m,n) = m + n \cdot (-m)$, $\lambda' h(m,n) = m \cdot n - n$,

(iii) $h(\lambda(l), n) = l + n \cdot (-l)$, $h(m, \lambda'(l)) = m \cdot l - l$,

(iv) $h(m + m', n) = m \cdot h(m', n) + h(m,n)$, $h(m, n + n') = h(m,n) + n \cdot h(m, n')$ ve

(v) $h(p \cdot m, p \cdot n) = p \cdot h(m,n)$ dir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & P \end{tikzcd}$$

Bir çaprazlanmış kare $S = (L, M, N, P)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.4.2 (A, B, α) bir çaprazlanmış modül ve (S, T, σ), (A, B, α) nın bir normal alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, hook, "\mathrm{inc}"'] & T \arrow[d, hook, "\mathrm{inc}"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

yapısı bir grup çaprazlanmış karedir ve burada B nin S üzerine etkisi B nin A üzerine etkisinden indirgenmiş olup B nin T üzerine etkisi konjuge etkidir. h fonksiyonu her $t \in T$ ve $a \in A$ için

$$\begin{array}{rccc} h: & T \times A & \to & S \\ & (t, a) & \mapsto & h(t, a) = t \cdot a - a \end{array}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bir topolojik çaprazlanmış kare örneği [15] de aşağıdaki gibi tanımlanan temel çaprazlanmış karedir:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "a"] \\ B \arrow[r, "b"'] & X \end{tikzcd}$$

şeklinde değişmeli karesini ele alalım. $F(f), f$ nin homotopi ağı ve $F(X)$, $F(g) \to F(a)$ nın homotopi ağı olsun. Bu durumda grupların değişmeli karesi

$$\begin{tikzcd} \pi_1 F(\boldsymbol{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 F(g) \arrow[d] \\ \pi_1 F(f) \arrow[r] & \pi_1(C) \end{tikzcd}$$

doğal bir çaprazlanmış kare yapısına sahiptir. Bu çaprazlanmış kare temel çaprazlanmış kare olarak adlandırılır.

$S_1 = (L_1, M_1, N_1, P_1)$ den $S_2 = (L_2, M_2, N_2, P_2)$ ye bir çaprazlanmış kare morfizmi $f = (f_L, f_M, f_N, f_P)$, etkileri ve h_1, h_2 fonksiyonları uyumlu olan $f_L : L_1 \to L_2$, $f_M : M_1 \to M_2$, $f_N : N_1 \to N_2$ ve $f_P : P_1 \to P_2$ dört grup homomorfizminden oluşur.

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[rr, "f_M"] \arrow[dd, dotted, "\mu_1"'] & & M_2 \arrow[dd, "\mu_2"] \\
L_1 \arrow[ur, "\lambda_1"] \arrow[rr, "f_L"] \arrow[dd, "\lambda_1'"'] & & L_2 \arrow[ur, "\lambda_2"'] \arrow[dd, "\lambda_2'"'] & \\
& P_1 \arrow[rr, dotted, "f_P"'] & & P_2 \\
N_1 \arrow[ur, "\nu_1"] \arrow[rr, "f_N"'] & & N_2 \arrow[ur, "\nu_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Yukarıda tanımlanan çaprazlanmış kareler arasındaki morfizmler ile birlikte oluşturulan gruplar üzerinde çaprazlanmış kareler kategorisi $\mathbf{X^2Mod}$ ile gösterilir. Çaprazlanmış kareler ile çaprazlanmış modüller üzerindeki çaprazlanmış modüller denktir [27].

2.5 İç kategoriler ve Brown-Spencer Teoremi

Tanım 2.5.1 $\mathbb{C}$ geri çekmeye sahip bir kategori olsun. $\mathbb{C}$ içinde bir C iç kategorisi, $\mathbb{C}$ nin C_1 ve C_0 objeleri ve $s,t : C_1 \to C_0$, $\varepsilon : C_0 \to C_1$ ve $m : C_1 \,{}_s\!\times_t C_1 \to C_1$ morfizmlerinden oluşur, burada $C_1 \,{}_s\!\times_t C_1$, s ve t nin aşağıdaki şartları sağlayan geri çekmesidir

(i) $s\varepsilon = t\varepsilon = 1_{C_0}$

(ii) $\pi_1 : C_1 \,{}_s\!\times_t C_1 \to C_1$ ve $\pi_2 : C_1 \,{}_s\!\times_t C_1 \to C_1$ projeksiyon olmak üzere $sm = s\pi_2$, $tm = t\pi_1$

(iii) $m(1_{C_1} \times m) = m(m \times 1_{C_1})$

(iv) $m(\varepsilon s, 1_{C_1}) = m(1_{C_1}, \varepsilon t) = 1_{C_1}$.

s, t, ε ve m morfizmleri sırasıyla kaynak (source), hedef (target), birim obje dünüşümü ve bileşke olarak adlandırılır. $\mathbb{C}$ içinde bir iç kategori $C = (C_1, C_0, s, t, \varepsilon, m)$ veya kısaca C olarak gösterilir.

Eğer $\mathbb{C}$ deki $n: C_1 \to C_1$ morfizmi

$$m(1,n) = \varepsilon s \quad \text{ve} \quad m(n,1) = \varepsilon t$$

şartlarını sağlıyorsa $C = (C_1, C_0, s, t, \varepsilon, m, n)$ ye $\mathbb{C}$ içinde bir iç grupoid denir.

C ve C', $\mathbb{C}$ içinde iki iç kategori olsun. Bu durumda C den C' ne $f = (f_1, f_0)$ morfizmi

(i) $sf_1 = f_0 s$, $tf_1 = f_0 t$

(ii) $\varepsilon f_0 = f_1 \varepsilon$

(iii) $m(f_1 \times f_1) = f_1 m$

şartlarını sağlayan $\mathbb{C}$ içinde $f_1 : C_1 \to C_1'$ ve $f_0 : C_0 \to C_0'$ morfizm çiftinden oluşur. Böylece yukarıda tanımlanan morfizmlerle birlikte keyfi bir $\mathbb{C}$ kategorisi içinde iç kategorilerin kategorisi oluşturulabilir ve bu kategori $\mathbf{Cat}(\mathbb{C})$ şeklinde gösterilir.

Gruplar kategorisindeki bir iç kategori grup-grupoid olarak adlandırılır [23]. Aynı zamanda grup-grupoidler küçük kategoriler kategorisinde grup objelerdir. Şimdi grup-grupoidlerin bazı özellikleri verilecektir.

G gruplar kategorisinde bir iç kategori olsun, yani bir grup-grupoid olsun. Bu durumda G_1 morfizmlerin objesi ve G_0 objelerin objesi grup yapısına sahiptir ve

(i) $s\varepsilon = t\varepsilon = 1_{G_0}$

(ii) $sm = s\pi_2$, $tm = t\pi_1$

(iii) $m(1_{G_1} \times m) = m(m \times 1_{G_1})$

(iv) $m(\varepsilon s, 1_{G_1}) = m(1_{G_1}, \varepsilon t) = 1_{G_1}$

şartlarını sağlayan $s,t: G_1 \to G_0$, $\varepsilon : G_0 \to G_1$ ve $m: G_1 {}_s\times_t G_1 \to G_1$ grup homomorfizmleri vardır. $s,t: G_1 \to G_0$, $\varepsilon : G_0 \to G_1$ ve $m: G_1 {}_s\times_t G_1 \to G_1$ grup homomorfizmleri olduğundan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.5.2 G gruplar kategorisinde bir iç kategori olsun. Bu durumda her $a, a', b, b' \in G_1$ ve $x, y \in G_0$ için

(i) $s(a+b) = s(a) + s(b)$

(ii) $t(a+b)=t(a)+t(b)$

(iii) $\varepsilon(x+y)=\varepsilon(x)+\varepsilon(y)$ yani $1_{x+y}=1_x+1_y$

(iv) $m((b,a)+(b',a'))=m((b',a'))+m((b',a'))$ yani

$$(b+b')\circ(a+a')=(b\circ a)+(b'\circ a')$$

dır.

Gruplar kategorisindeki iç kategorilerin grup-grupoid olarak adlandırıldıklarından dah önce bahsetmiştik. Grup-grupoidler arasındaki morfizmler grup homomorfizmi olan funktorlardır. Böylece **GpGd** ile gösterilen grup-grupoidlerin kategorisi oluşturulur.

Teorem 2.5.2 nin son şartı yer değiştirme kuralı olarak adlandırılır. Yer değiştirme kuralının uygulamaları aşağıda verilecektir.

G bir grup-grupoid olsun. Bu durumda G deki kısmi bileşke işlemi grup işlemi ile ifade edilebilir. [23]. Gerçekten $a\in G(x,y)$ ve $b\in G(y,z)$ alınırsa yer değişim kuralının bir uygulaması olarak

$$\begin{aligned} b\circ a &= (b+0)\circ(1_y+(-1_y+a)) \\ &= (b\circ 1_y)+(0\circ(-1_y+a)) \\ &= b-1_y+a \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$b\circ a=a-1_y+b$$

elde edilir.

Sonuç 2.5.3 [23] G bir grup-grupoid olsun. Bu durumda $\ker s$ ve $\ker t$ nin elemanları grup işlemi altında değişmelidir.

Yer değiştirme kuralının bir diğer uygulaması ise grup işlemi cinsinden bir morfizmin tersinin verilebilir olmasıdır. Yani, $a\in G(x,y)$ için

$$\begin{aligned} 1_y &= a\circ a^{-1} \\ &= a-1_x+a^{-1} \end{aligned}$$

dir. Böylece $a^{-1} = 1_x - a + 1_y$ elde edilir. Benzer şekilde $a^{-1} = 1_y - a + 1_x$ dir. Böylece grupların kategorisindeki her iç kategori aslında bir iç grupoiddir.

Bir başka sonuç ise şudur: Eğer $a, a_1 \in \ker s$ ve $t(a) = x$ ise $-1_x + a \in \ker t$ ve böylece a_1 ile değişmelidir. Bu

$$(-1_x + a) + a_1 = a_1 + (-1_x + a)$$

olmasını gerektirir ki buradan

$$a + a_1 - a = 1_x + a_1 - 1_x$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.5.4 (Brown-Spencer Teoremi [23]) Grup-grupoidlerin kategorisi **GpGd** ile çaprazlanmış modüllerin kategorisi **XMod** denktir.

İspat. Tezin son bölümünde detaylı bir şekilde inceleneceği için burada sadece ispatın taslağı verilecektir.

$$\varphi : \mathbf{GpGd} \to \mathbf{XMod}$$

funktorunu tanımlayalım. G bir grup-grupoid olsun. Bu durumda $A = \ker s$, $B = G_0$ ve α, t nin kısıtlanmışı olup B nin A üzerine etkisi $x \cdot a = 1_x + a - 1_x$ olmak üzere $\varphi(G) = (A, B, \alpha)$ bir çaprazlanmış modüldür. Bir $F : G \to H$ grup-grupoid morfizmi için $\varphi(f) = \langle f_1|_A, f_0 \rangle$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olur.

Tersine,

$$\psi : \mathbf{XMod} \to \mathbf{GpGd}$$

funktorunu tanımlayalım. (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda yarı-direkt çarpım grubu $A \rtimes B$, B üzerinde bir grup-grupoiddir, burada $s(a,b) = b$, $t(a,b) = \alpha(a) + b$, $\varepsilon(b) = (0,b)$ ve $b' = \alpha(a) + b$ olmak üzere bileşke

$$(a', b') \circ (a, b) = (a' + a, b)$$

dır. Bir $\langle f,g\rangle:(A,B,\alpha)\to(M,P,\mu)$ çaprazlanmış modül morfizmi için $\psi(\langle f,g\rangle)=(f\times g,g)$ bir grup-grupoid morfizmidir. Diğer detaylar açık olduğu için atlanmıştır.

3. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERDE İÇ KATEGORİLER Cat(XMod)

Bu bölümde, **XMod** çaprazlanmış modüller kategorisinde iç kategorileri araştıracağız.

3.1 Çaprazlanmış grupoidler

X gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi **XMod** de bir iç kategori olsun. Bu durumda X, $X_1=(A_1,B_1,\alpha_1)$ ve $X_0=(A_0,B_0,\alpha_0)$ çaprazlanmış modülleri ile sırasıyla kaynak, hedef, birim obje dönüşüm ve bileşke olarak adlandırılan $s=\langle s_A,s_B\rangle, t=\langle t_A,t_B\rangle : X_1\to X_0, \varepsilon=\langle \varepsilon_A,\varepsilon_B\rangle : X_0\to X_1, m=\langle m_A,m_B\rangle : X_1\,{}_s\!\times_t X_1\to X_1$ çaprazlanmış modül morfizmlerinden oluşmaktadır ve bunlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $s\varepsilon=t\varepsilon=1_{X_0}$

(ii) $sm=s\pi_2,\ tm=t\pi_1$ burada $\pi_1=\langle \pi_1,\pi_1\rangle$ ve $\pi_2=\langle \pi_2,\pi_2\rangle$ dönüşümleri sırasıyla X_1 üzerindeki birinci ve ikinci izdüşüm dönüşümleridir.

(iii) $m(1_{X_1}\times m)=m(m\times 1_{X_1})$

(iv) $m(\varepsilon s,1_{X_1})=m(1_{X_1},\varepsilon t)=1_{X_1}$

$$\begin{tikzcd}
A_{1\,s_A}\!\times_{t_A}A_1 \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "\alpha_1\times\alpha_1"'] & A_1 \arrow[r, shift left, "s_A"] \arrow[r, shift right, "t_A"'] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_0 \arrow[l, bend right, "\varepsilon_A"'] \arrow[d, "\alpha_0"] \\
B_{1\,s_B}\!\times_{t_B}B_1 \arrow[r, "m_B"'] & B_1 \arrow[r, shift left, "s_B"] \arrow[r, shift right, "t_B"'] & B_0 \arrow[l, bend left, "\varepsilon_B"]
\end{tikzcd}$$

XMod da bir iç kategori $X=(X_1,X_0,s,t,\varepsilon,m)$ veya karışıklık olmayacaksa kısaca X ile gösterilir. Birim objeler $\varepsilon_A(a_0)$ ve $\varepsilon_B(b_0)$ sırasıyla kısaca 1_{a_0} ve 1_{b_0} ile temsil edilir. Diğer taraftan elemanların bileşkesi $s_A(a_1)=t_A(a_1')$ ve $s_B(b_1)=t_B(b_1')$ olmak üzere her $a_1,a_1'\in A_1$ ve $b_1,b_1'\in B_1$ için $m_A(a_1,a_1')=a_1\circ a_1'$, $m_B(b_1,b_1')=b_1\circ b_1'$ ile gösterilecektir.

Şimdi iç kategorilerin bazı özellikleri ve birkaç lemma verilecektir.

Lemma 3.1.1 X, **XMod** da bir iç kategori olsun. Bu durumda her $i \in \{0,1\}$, $a_i, a_i' \in A_i$ ve $b_i \in B_i$ için

(i) $\alpha_i(a_i + a_i') = \alpha_i(a_i) + \alpha_i(a_i')$

(ii) $\alpha_i(b_i \cdot a_i) = b_i + \alpha_i(a_i) - b_i$

(iii) $\alpha_i(a_i) \cdot a_i' = a_i + a_i' - a_i$

dır .

İspat. $X_1 = (A_1, B_1, \alpha_1)$ ve $X_0 = (A_0, B_0, \alpha_0)$ çaprazlanmış modül olduğundan açıktır.

Lemma 3.1.2 X, **XMod** da bir iç kategori olsun. Bu durumda her $a_1, a_1', a_1'', a_1''' \in A_1$, $b_1, b_1', b_1'', b_1''' \in B_1$, $a_0, a_0' \in A_0$, ve $b_0, b_0' \in B_0$ için

(i) $s_A(a_1 + a_1') = s_A(a_1) + s_A(a_1')$, $s_B(b_1 + b_1') = s_B(b_1) + s_B(b_1')$,

$t_A(a_1 + a_1') = t_A(a_1) + t_A(a_1')$, $t_B(b_1 + b_1') = t_B(b_1) + t_B(b_1')$

(ii) $\alpha_0 s_A = s_B \alpha_1$, $\alpha_0 t_A = t_B \alpha_1$

(iii) $s_A(b_1 \cdot a_1) = s_B(b_1) \cdot s_A(a_1)$, $t_A(b_1 \cdot a_1) = t_B(b_1) \cdot t_A(a_1)$

(iv) $\varepsilon_A(a_0 + a_0') = \varepsilon_A(a_0) + \varepsilon_A(a_0'), \varepsilon_B(b_0 + b_0') = \varepsilon_B(b_0) + \varepsilon_B(b_0')$

(v) $\alpha_1 \varepsilon_A = \varepsilon_B \alpha_0$

(vi) $\varepsilon_A(b_0 \cdot a_0) = \varepsilon_B(b_0) \cdot \varepsilon_A(a_0)$

(vii) $s_A(a_1) = t_A(a_1'')$, $s_A(a_1') = t_A(a_1''')$ ile

$(a_1 + a_1') \circ (a_1'' + a_1''') = (a_1 \circ a_1'') + (a_1' \circ a_1''')$ ve

$s_B(b_1) = t_B(b_1'')$, $s_B(b_1') = t_B(b_1''')$ ile

$(b_1 + b_1') \circ (b_1'' + b_1''') = (b_1 \circ b_1'') \circ (b_1' \circ b_1''')$

(viii) $\alpha_1 m_A = m_B(\alpha_1 \times \alpha_1)$

(ix) $(b_1 \circ b_1') \cdot (a_1 \circ a_1') = (b_1 \cdot a_1) \circ (b_1' \cdot a_1')$

dır.

İspat. (i)-(iii) $s = \langle s_A, s_B \rangle$, $t = \langle t_A, t_B \rangle$ nın çaprazlanmış modül morfizmi olmasından aşikardır.

(iv)-(vi) $\varepsilon = \langle \varepsilon_A, \varepsilon_B \rangle$ nın çaprazlanmış modül morfizmi olmasından aşikardır. Bu şartlar altında, birim objeler için $\varepsilon(*) = 1_*$ sembolü kullanılmak üzere

(iv)' $1_{a_0+a_0'} = 1_{a_0} + 1_{a_0'}$, $1_{b_0+b_0'} = 1_{b_0} + 1_{b_0'}$

(v)' $\alpha_1(1_{a_0}) = 1_{\alpha_0(a_0)}$

(vi)' $1_{b_0 \cdot a_0} = 1_{b_0} \cdot 1_{a_0}$

elde edilir.

(vii)-(ix) $m = \langle m_A, m_B \rangle$ nın çaprazlanmış modül morfizmi olmasından aşikardır.

Sıradaki lemmalar $X = (X_1, X_0, s, t, \varepsilon, m)$ in bir kategori yapısına sahip olduğu için açıktır bundan dolayı ispatsız verilecektir.

Lemma 3.1.3 X, **XMod** da bir iç kategori olsun. Bu durumda her $a_0 \in A_0$ ve $b_0 \in B_0$ için

(i) $s_A(1_{a_0}) = t_A(1_{a_0}) = a_0$

(ii) $s_B(1_{b_0}) = t_B(1_{b_0}) = b_0$

dır.

Lemma 3.1.4 X, **XMod** da bir iç kategori olsun. Bu durumda her $a_1, a_1' \in A_1$ ve $b_1, b_1' \in B_1$ için

(i) $s_A(a_1 \circ a_1') = s_A(a_1')$, $s_B(b_1 \circ b_1') = s_B(b_1')$

(ii) $t_A(a_1 \circ a_1') = t_A(a_1')$ ve $t_B(b_1 \circ b_1') = t_B(b_1')$

dır.

Lemma 3.1.5 X, **XMod** da bir iç kategori olsun. Bu durumda $t_A(a_1'') = s_A(a_1')$, $t_A(a_1') = s_A(a_1)$, $t_B(b_1'') = s_B(b_1')$ ve $t_B(b_1'') = s_B(b_1')$ olmak üzere her $a_1, a_1', a_1'' \in A_1$ ve $b_1, b_1', b_1'' \in B_1$ için

(i) $a_1 \circ (a_1' \circ a_1'') = (a_1 \circ a_1') \circ a_1''$

(ii) $b_1 \circ (b_1' \circ b_1'') = (b_1 \circ b_1') \circ b_1''$

dır.

Lemma 3.1.6 X, **XMod** da bir iç kategori olsun. Bu durumda her $a_1 \in A_1$ ve $b_1 \in B_1$ için

(i) $1_{s_A(a_1)} \circ a_1 = a_1 = a_1 \circ 1_{t_A(a_1)}$

(ii) $1_{s_B(b_1)} \circ b_1 = b_1 = b_1 \circ 1_{t_B(b_1)}$

dır.

Bu özdeşlikler Lemma 3.1.2 nin **(vii)** şartında grup işlemleri ve bileşke arasında yer değiştirme özelliği olarak verilmiştir.

$$(a_1 + a_1') \circ (a_1'' + a_1''') = (a_1 \circ a_1'') + (a_1' \circ a_1''') \tag{3-1}$$

$$(b_1 + b_1') \circ (b_1'' + b_1''') = (b_1 \circ b_1'') \circ (b_1' \circ b_1''') \tag{3-2}$$

Yer değiştirme özelliğinin bir uygulaması da aşağıdaki sonuç ile verilecektir.

Sonuç 3.1.7 X, **XMod** da bir iç kategori olsun. Bu durumda A_1 ve B_1 deki bileşke A_1 ve B_1 üzerindeki grup işlemlerinin terimleri içinde $s_A(a_1) = t_A(a_1')$ ve $s_B(b_1) = t_B(b_1')$ olmak üzere sırasıyla her $a_1, a_1' \in A$, $b_1, b_1' \in B$ için

$$a_1 \circ a_1' = a_1 - 1_{s_A(a_1)} + a_1' = a_1' - 1_{s_A(a_1)} + a_1 \tag{3-3}$$

ve

$$b_1 \circ b_1' = b_1 - 1_{s_B(b_1)} + b_1' = b_1' - 1_{s_B(b_1)} + b_1 \tag{3-4}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat. İspat A_1 için yapılacaktır. A_1 ve A_0 gruplarının birim (sıfır) elemanı 0 ile gösterilmek üzere,

$$
\begin{aligned}
a_1 \circ a_1' &= (a_1 + 0) \circ \left(1_{s_A(a_1)} + \left(-1_{s_A(a_1)} + a_1'\right)\right) \\
&= \left(a_1 \circ 1_{s_A(a_1)}\right) + \left(0 \circ \left(-1_{s_A(a_1)} + a_1'\right)\right) \\
&= a_1 - 1_{s_A(a_1)} + a_1'
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
a_1 \circ a_1' &= (0 + a_1) \circ \left(\left(a_1' - 1_{s_A(a_1)}\right) + 1_{s_A(a_1)}\right) \\
&= \left(0 \circ \left(a_1' - 1_{s_A(a_1)}\right)\right) + \left(a_1 \circ 1_{s_A(a_1)}\right) \\
&= a_1' - 1_{s_A(a_1)} + a_1 .
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu sonuç yardımıyla eğer $s_A(a_1) = t_A(a_1') = 0$, yani $a_1 \in \ker s_A$ ve $a_1' \in \ker t_A$ ise

$$a_1 + a_1' = a_1' + a_1.$$

sonucuna varılır. Böylece $\ker s_A$ ve $\ker t_A$ nın elemanları değişmelidir. Benzer şekilde, $\ker s_B$ ve $\ker t_B$ nin de elemanları değişmelidir. Ayrıca, $a_1 \in A_1$ elemanı için $a_1^{-1} = 1_{s_A(a_1)} - a_1 + 1_{t_A(a_1)} \in A_1$ ifadesi a_1 in m_A bileşke dönüşümüne göre tersidir. Benzer şekilde, $b_1 \in B_1$ elemanı için $b_1^{-1} = 1_{s_B(b_1)} - b_1 + 1_{t_B(b_1)} \in B_1$ ifadesi b_1 in m_B bileşke dönüşümüne göre tersidir. Bu da $X = (X_1, X_0, s, t, \varepsilon, m, n)$ nın grupoid yapısına sahip olması anlamına gelir, burada $n = \langle n_A, n_B \rangle : X_1 \to X_1$

$$
\begin{array}{cccl}
n_A & : & A_1 & \to A_1 \\
 & & a_1 & \mapsto n_A(a_1) = a_1^{-1} = 1_{s_A(a_1)} - a_1 + 1_{t_A(a_1)}
\end{array}
$$

ve

$$
\begin{array}{cccl}
n_B & : & B_1 & \to B_1 \\
 & & b_1 & \mapsto n_B(b_1) = b_1^{-1} = 1_{s_B(b_1)} - b_1 + 1_{t_B(b_1)} .
\end{array}
$$

özelliklerine sahip çaprazlanmış modül morfizmidir. Her $a_1 \in A_1$ ve $b_1 \in B_1$ için $1_{s_A(a_1)} - a_1 + 1_{t_A(a_1)} = 1_{t_A(a_1)} - a_1 + 1_{s_A(a_1)}$ ve $1_{s_B(b_1)} - b_1 + 1_{t_B(b_1)} = 1_{t_B(b_1)} - b_1 + 1_{s_B(b_1)}$ olduğu açıktır.

Lemma 3.1.8 $a_1 \in A_1$ ve $b_1 \in B_1$ olsun. Bu durumda $b_1^{-1} \cdot a_1^{-1} = (b_1 \cdot a_1)^{-1}$ dır.

İspat. Lemma 3.1.2 nin **(ix)** şartı ve yer değiştirme özelliği yardımıyla

$$\begin{aligned}(b_1 \cdot a_1) \circ (b_1^{-1} \cdot a_1^{-1}) &= (b_1 \circ b_1^{-1}) \cdot (a_1 \circ a_1^{-1}) \\ &= 1_{s(b_1)} \cdot 1_{s(a_1)} \\ &= 1_{s(b_1) \cdot s(a_1)} \\ &= 1_{s(b_1 \cdot a_1)}\end{aligned}$$

elde edilir.

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisinde bir iç kategori, gruplardaki iç kategoriler kategorisinde bir çaprazlanmış modül obje olduğu aşikardır.

Tanım 3.1.9 X ve X', **XMod** da iki iç kategori olsun. X den X' ne bir morfizm (iç funktor) $f_0 s = s f_1$, $f_0 t = t f_1$, $f_1 \varepsilon = \varepsilon f_0$ ve $f_1 m = m(f_1 \times f_1)$ şartını sağlayan

$$f = \left(f_1 = \langle f_1^A, f_1^B \rangle, f_0 = \langle f_0^A, f_0^B \rangle\right) : X \to X'$$

çaprazlanmış modül morfizm çiftidir.

Böylece, morfizmleri yukarıda tanımlanan iç funktorlar olan gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisinde iç kategoriler (grupoidler) kategorisi oluşturulur. Bu kategori **Cat(XMod)** veya **Gpd(XMod)** ile gösterilir.

4. Cat(XMod) VE $\mathbf{X^2}$Mod ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisinde iç kategoriler kategorisi **Cat(XMod)** ile gruplar üzerinde çaprazlanmış karelerin kategorisi $\mathbf{X^2Mod}$ nin denk olduğu gösterilecektir.

4.1 Kategorilerin denklikleri

Teorem 4.1.1 Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisinde iç kategoriler kategorisi **Cat(XMod)** ile gruplar üzerinde çaprazlanmış karelerin kategorisi $\mathbf{X^2Mod}$ denktir.

İspat. Öncelikle

$$\eta : \mathbf{Cat}\left(\mathbf{XMod}\right) \to \mathbf{X^2Mod}$$

funktorunu şu şekilde tanımlayalım: $X = \left(X_1, X_0, s, t, \varepsilon, m, n\right)$, **Cat(XMod)** de bir obje olsun. Eğer $L = \ker s_A$, $M = \ker s_B$, $N = A_0$, $P = B_0$, $\lambda = \alpha_1 |_{\ker s_A}$, $\lambda' = t_A |_{\ker s_A}$, $\mu = t_B |_{\ker s_B}$ ve $\nu = \alpha_0$ alınırsa

$$\begin{array}{rcccl} h & : & M \times N & \to & L \\ & & (m,n) & \mapsto & h(m,n) = m \cdot 1_n - 1_n \end{array}$$

fonksiyonu ile birlikte $\eta\left(X\right) = S = \left(L, M, N, P\right)$ bir çaprazlanmış kare olur. Burada $\left(L, M, \lambda\right)$, $s = \left\langle s_A, s_B \right\rangle : \left(A_1, B_1, \alpha_1\right) \to \left(A_0, B_0, \alpha_0\right)$ nın çekirdek çaprazlanmış modülü olduğu için $\left(L, M, \lambda\right)$ bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca, Brown-Spencer Teoreminden $\left(L, N, \lambda'\right)$ ve $\left(M, P, \mu\right)$ nin birer çaprazlanmış modül olduğu açıktır. Son olarak, $\left(A_0, B_0, \alpha_0\right)$ a denk olduğundan $\left(N, P, \nu\right)$ de bir çaprazlanmış modüldür. Burada P nin N üzerine etkisi verilmiş olup, P nin M üzerine etkisi

$$\begin{array}{rcl} P \times M & \to & M \\ \left(p, m\right) & \mapsto & p \cdot m = 1_p + m - 1_p \end{array}$$

ve P nin L üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccc} P\times L & \to & L \\ (p,l) & \mapsto & p\cdot l = 1_p \cdot l \end{array}$$

şeklinde verilmektedir. Burada denklemin sağ tarafındaki etki B_1 in A_1 üzerine etkisidir. Şimdi Tanım 2.3.1 de verilen şartların sağlandığının gösterilmesi gerekmektedir.

(i) λ ile λ' nün P -denk ve $\kappa=\mu\lambda$ nin bir çaprazlanmış modül olduğunu göstermeliyiz. $l\in L$ ve $p\in P$ olsun. Bu durumda

$$\lambda(p\cdot l)=\alpha_1(1_p\cdot l)=1_p+\alpha_1(l)-1_p=p\cdot\lambda(l)$$

ve

$$\lambda'(p\cdot l)=t_A(1_p\cdot l)=t_B\left(1_p\right)\cdot t_A(l)=p\cdot\lambda'(l)$$

olduğundan λ ve λ' P -denktir. Şimdi (L,P,κ) nın bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

(CM1) $l\in L$ ve $p\in P$ olsun. Budurumda

$$\begin{aligned}\kappa(p\cdot l)&=\mu\lambda(p\cdot l)\\&=\mu\big(p\cdot\lambda(l)\big)\\&=p+\mu\big(\lambda(l)\big)-p\\&=p+\kappa(l)-p\end{aligned}$$

dir.

(CM2) $l,l'\in L$ olsun. Budurumda

$$\begin{aligned}\kappa(l)\cdot l'&=\mu\big(\lambda(l)\big)\cdot l'\\&=1_{\mu(\lambda(l))}\cdot l'\\&=1_{\nu(\lambda'(l))}\cdot l'\\&=\lambda\left(1_{\lambda'(l)}\right)\cdot l'\\&=1_{\lambda'(l)}+l'-1_{\lambda'(l)}\\&=l+l'-l\end{aligned}$$

olup (L,P,κ) bir çaprazlanmış modüldür.

(ii) $m\in M$ ve $n\in N$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\lambda h(m,n) &= \lambda\left(m\cdot 1_n - 1_n\right)\\
&= \lambda\left(m\cdot 1_n\right) - \lambda\left(1_n\right)\\
&= m + \lambda\left(1_n\right) - m - \lambda\left(1_n\right)\\
&= m + n\cdot\left(-m\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\lambda' h(m,n) &= \lambda'\left(m\cdot 1_n - 1_n\right)\\
&= \lambda'\left(m\cdot 1_n\right) - \lambda'\left(1_n\right)\\
&= \mu\left(m\right)\cdot\lambda'\left(1_n\right) - \lambda'\left(1_n\right)\\
&= \mu\left(m\right)\cdot n - n\\
&= m\cdot n - n
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(iii) $l \in L$, $m \in M$ ve $n \in N$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
h(\lambda(l),n) &= \lambda(l)\cdot 1_n - 1_n\\
&= \left(l + 1_n - l\right) - 1_n\\
&= l + \left(1_n - l - 1_n\right)\\
&= l + n\cdot(-l)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
h\left(m,\lambda'\left(l\right)\right) &= m\cdot 1_{\lambda'(l)} - 1_{\lambda'(l)}\\
&= \left(m\cdot 1_{\lambda'(l)} - 1_{\lambda'(l)} + l\right) - l\\
&= \left(m\cdot 1_{\lambda'(l)} \circ l\right) - l\\
&= \left(\left(m\cdot 1_{\lambda'(l)}\right)\circ\left(1_0\cdot l\right)\right) - l\\
&= ((m\circ 1_0)\cdot(1_{\lambda'(l)}\circ l)) - l\\
&= m\cdot l - l
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(iv) $m, m' \in M$ ve $n, n' \in N$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
h\left(m+m',n\right) &= \left(m+m'\right)\cdot 1_n - 1_n\\
&= m\cdot\left(m'\cdot 1_n\right) - 1_n\\
&= m\cdot\left(m'\cdot 1_n\right) + m\cdot\left(-1_n + 1_n\right) - 1_n\\
&= m\cdot\left(m'\cdot 1_n - 1_n\right) + m\cdot 1_n - 1_n\\
&= m\cdot h\left(m',n\right) + h\left(m,n\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
h(m,n+n') &= m\cdot 1_{n+n'} - 1_{n+n'} \\
&= m\cdot(1_n + 1_{n'}) - 1_{n'} - 1_n \\
&= (m\cdot 1_n - 1_n) + 1_n + (m\cdot 1_{n'} - 1_{n'}) - 1_{n'} \\
&= h(m,n) + n\cdot h(m,n')
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(v) $m\in M$, $n\in N$ ve $p\in P$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
h(p\cdot m, p\cdot n) &= h(1_p + m - 1_p, p\cdot n) \\
&= (1_p + m - 1_p)\cdot 1_{p\cdot n} - 1_{p\cdot n} \\
&= (1_p + m - 1_p)\cdot(1_p\cdot 1_n) - (1_p\cdot 1_n) \\
&= 1_p\cdot(m\cdot 1_n) + 1_p\cdot(-1_n) \\
&= 1_p\cdot(m\cdot 1_n - 1_n) \\
&= p\cdot h(m,n)
\end{aligned}
$$

elde edilir. **Cat(XMod)** kategorisi içinde

$$
f = \left(f_1 = \left\langle f_1^A, f_1^B\right\rangle, f_0 = \left\langle f_0^A, f_0^B\right\rangle\right) : X \to X'
$$

morfizmini alalım. Bu durumda

$$
\eta(f) = \left(f_L = f_1^A|_{\ker s_A}, f_M = f_1^B|_{\ker s_B}, f_N = f_0^A, f_P = f_0^B\right) : S \to S'
$$

bir çaprazlanmış kare morfizmidir.

Tersine,

$$
\psi : \mathbf{X^2Mod} \to \mathbf{Cat(XMod)}
$$

funktorunu şu şekilde tanımlayalım: $S=(L,M,N,P)$ gruplar üzerinde bir çaprazlanmış kare olsun. O halde

$$
\psi(S) = X = \left(X_1 = (A_1, B_1, \alpha_1), X_0 = (A_0, B_0, \alpha_0), s, t, \varepsilon, m\right)
$$

yapısı gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisinde bir iç kategoridir, burada

$$\left(A_1,B_1,\alpha_1\right)=\left(L\rtimes N,M\rtimes P,\lambda\times\nu\right),\ \left(A_0,B_0,\alpha_0\right)=\left(N,P,\nu\right),\ s_A\left(l,n\right)=n$$

$$s_B\left(m,p\right)=p\ ,\ t_A\left(l,n\right)=\lambda'\left(l\right)+n\ ,\ t_B\left(m,p\right)=\mu\left(m\right)+p\ ,\ \varepsilon_A\left(n\right)=\left(0,n\right)$$

$$\varepsilon_B\left(p\right)=\left(0,p\right)$$

$$\left(l',\lambda'\left(l\right)+n\right)\circ\left(l,n\right)=\left(l'+l,n\right)$$

$$\left(m',\lambda'\left(m\right)+p\right)\circ\left(m,p\right)=\left(m'+m,p\right).$$

dir. X_0 ın bir çaprazlanmış modül olduğu bilinmektedir. O halde $M\rtimes P$ nin $L\rtimes N$ üzerine etkisi

$$\left(m,p\right)\cdot\left(l,n\right)=\left(m\cdot\left(p\cdot l\right)+h\left(m,p\cdot n\right),p\cdot n\right)$$

ile birlikte $\left(L\rtimes N,M\rtimes P,\lambda\times\nu\right)$ nin bir çaprazlanmış modül olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

(CM1) $\left(l,n\right)\in L\rtimes N$ ve $\left(m,p\right)\in M\rtimes P$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left(\lambda\times\nu\right)\left(\left(m,p\right)\cdot\left(l,n\right)\right)&=\left(\lambda\times\nu\right)\left(m\cdot\left(p\cdot l\right)+h\left(m,p\cdot n\right),p\cdot n\right)\\
&=\left(\lambda\left(m\cdot\left(p\cdot l\right)+h\left(m,p\cdot n\right)\right),\nu\left(p\cdot n\right)\right)\\
&=\left(\lambda\left(m\cdot\left(p\cdot l\right)\right)+\lambda\left(h\left(m,p\cdot n\right)\right),p+\nu\left(n\right)-p\right)\\
&=\left(m+\lambda\left(p\cdot l\right)-m+m+\left(p\cdot n\right)\cdot\left(-m\right),p+\nu\left(n\right)-p\right)\\
&=\left(m+p\cdot\lambda\left(l\right)+\left(p\cdot n\right)\cdot\left(-m\right),p+\nu\left(n\right)-p\right)\\
&=\left(m+p\cdot\lambda\left(l\right)+\left(p+\nu\left(n\right)-p\right)\cdot\left(-m\right),p+\nu\left(n\right)-p\right)\\
&=\left(m+p\cdot\lambda\left(l\right)+\left(p+\nu\left(n\right)\right)\cdot\left(\left(-p\right)\cdot\left(-m\right)\right),p+\nu\left(n\right)-p\right)\\
&=\left(m+p\cdot\lambda\left(l\right),p+\nu\left(n\right)\right)+\left(\left(-p\right)\cdot\left(-m\right),-p\right)\\
&=\left(m,p\right)+\left(\lambda\left(l\right),\nu\left(n\right)\right)-\left(m,p\right)\\
&=\left(m,p\right)+\left(\lambda\times\nu\right)\left(l,n\right)-\left(m,p\right)
\end{aligned}$$

dır.

(CM2) $\left(l,n\right),\left(l',n'\right)\in L\rtimes N$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left(\lambda\times\nu\right)\left(\left(l,n\right)\right)\cdot\left(l',n'\right)&=\left(\lambda\left(l\right),\nu\left(n\right)\right)\cdot\left(l',n'\right)\\
&=\left(\lambda\left(l\right)\cdot\left(\nu\left(n\right)\cdot l'\right)+h\left(\lambda\left(l\right),\nu\left(n\right)\cdot n'\right),\nu\left(n\right)\cdot n'\right)\\
&=\left(\lambda\left(l\right)\cdot\left(n\cdot l'\right)+h\left(\lambda\left(l\right),n+n'-n\right),n+n'-n\right)\\
&=\left(l+n\cdot l'-l+l+\left(n+n'-n\right)\cdot\left(-l\right),n+n'-n\right)
\end{aligned}$$

$$=\left(l+n\cdot l'+\left(n+n'\right)\cdot\left(\left(-n\right)\cdot\left(-l\right)\right),n+n'-n\right)$$
$$=\left(l+n\cdot l',n+n'\right)+\left(\left(-n\right)\cdot\left(-l\right),-n\right)$$
$$=\left(l,n\right)+\left(l',n'\right)-\left(l,n\right)$$

olup $X_1=\left(L\rtimes N,M\rtimes P,\lambda\times\nu\right)$ bir çaprazlanmış modüldür. Şimdi $\psi\left(S\right)=X=\left(X_1=\left(A_1,B_1,\alpha_1\right),X_0=\left(A_0,B_0,\alpha_0\right),s,t,\varepsilon,m\right)$ nin Lemma 3.1.2 de verilen koşulları sağladığını göstermek gerekmektedir. $s_A,s_B,t_A,t_B,\varepsilon_A,\varepsilon_B,m_A$ ve m_B nin grup homomorfizmi olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde **(i)**, **(iv)** ve **(vii)** şartlarına bakmaya gerek yoktur.

(ii) $\left(l,n\right)\in L\rtimes N$ olsun. Bu durumda

$$\nu s_A\left(\left(l,n\right)\right)=\nu\left(n\right)$$
$$=s_A\left(\lambda\left(l\right),\nu\left(n\right)\right)$$
$$=s_B\left(\left(\lambda\times\nu\right)\left(l,n\right)\right)$$

ve

$$\nu t_A\left(l,n\right)=\nu\left(\lambda'\left(l\right)+n\right)$$
$$=\nu\left(\lambda'\left(l\right)\right)+\nu\left(n\right)$$
$$=\mu\left(\lambda\left(l\right)\right)+\nu\left(n\right)$$
$$=t_B\left(\left(\lambda\left(l\right),\nu\left(n\right)\right)\right)$$
$$=t_B\left(\left(\lambda\times\nu\right)\left(l,n\right)\right)$$

dir.

(iii) $\left(l,n\right)\in L\rtimes N$ ve $\left(m,p\right)\in M\rtimes P$ olsun. Bu durumda

$$s_A\left(\left(m,p\right)\cdot\left(l,n\right)\right)=p\cdot n=s_B\left(m,p\right)\cdot s_A\left(l,n\right)$$

ve

$$t_A\left(\left(m,p\right)\cdot\left(l,n\right)\right)=\lambda'\left(m\cdot\left(p\cdot l\right)+h\left(m,p\cdot n\right)\right)+p\cdot n$$
$$=\lambda'\left(m\cdot\left(p\cdot l\right)\right)+\lambda'\left(h\left(m,p\cdot n\right)\right)+p\cdot n$$
$$=\lambda'\left(\left(\mu\left(m\right)+p\right)\cdot l\right)+\left(m\cdot\left(p\cdot n\right)-p\cdot n\right)+p\cdot n$$
$$=\left(\mu\left(m\right)+p\right)\cdot\lambda'\left(l\right)+\left(\mu\left(m\right)+p\right)\cdot n$$
$$=\left(\mu\left(m\right)+p\right)\cdot\left(\lambda'\left(l\right)+n\right)$$
$$=t_B\left(m,p\right)\cdot t_A\left(l,n\right).$$

dir.

(v) $n \in N$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\alpha_1\varepsilon_A(n) &= \alpha_1(0,n)\\ &= (\lambda\times\nu)(0,n)\\ &= (\lambda(0),\nu(n))\\ &= \varepsilon_B\nu(n)\\ &= \varepsilon_B\alpha_0(n)\end{aligned}$$

dir.

(vi) $n \in N$ ve $p \in P$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\varepsilon_A(p\cdot n) &= (0,p\cdot n)\\ &= (0,p)\cdot(0,n)\\ &= \varepsilon_B(p)\cdot\varepsilon_A(n)\end{aligned}$$

dir.

(viii) $n' = \lambda'(l)+n$ olacak şekilde $(l,n),(l',n') \in L \rtimes N$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\alpha_1 m_A((l',n'),(l,n)) &= \alpha_1((l',n')\circ(l,n))\\ &= (\lambda\times\nu)((l'+l,n))\\ &= (\lambda(l'+l),\nu(n))\\ &= (\lambda(l')+\lambda(l),\nu(n))\\ &= (\lambda(l'),\mu(\lambda(l))+\nu(n))\circ(\lambda(l),\nu(n))\\ &= (\lambda(l'),\nu(\lambda'(l))+\nu(n))\circ(\lambda(l),\nu(n))\\ &= (\lambda(l'),\nu(\lambda'(l)+n))\circ(\lambda(l),\nu(n))\\ &= (\lambda(l'),\nu(n'))\circ(\lambda(l),\nu(n))\\ &= m_B((\lambda\times\nu)(l',n'),(\lambda\times\nu)(l,n))\\ &= m_B(\alpha_1\times\alpha_1)((l',n'),(l,n))\end{aligned}$$

dir.

(ix) $n' = \lambda'(l)+n$ ve $p' = \mu(m)+p$ olacak şekilde $(l,n),(l',n') \in L \rtimes N$ ve $(m,p),(m',p') \in M \rtimes P$ alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&((m',p')\circ(m,p))\cdot((l',n')\circ(l,n))=(m'+m,p)\cdot(l'+l,n)\\
&=((m'+m)\cdot(p\cdot(l'+l))+h(m'+m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+m'\cdot(p'\cdot l)+h(m-m+m'+m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+m'\cdot(p'\cdot l)+m\cdot h((-m)\cdot m',p\cdot n)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+m'\cdot(p'\cdot l)+h(m\cdot((-m)\cdot m'),m\cdot(p\cdot n))+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+m'\cdot(p'\cdot l)+h(m',p'\cdot n)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+m'\cdot(p'\cdot l)-(p'\cdot l)+(p'\cdot l)+h(m',p'\cdot n)-(p'\cdot l)+m\cdot(p\cdot l)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+h(m',(p'\cdot l))+\lambda'(p'\cdot l)\cdot h(m',p'\cdot n)+m\cdot(p\cdot l)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+h(m',p'\cdot\lambda'(l)+p'\cdot n)+m\cdot(p\cdot l)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+h(m',p'\cdot(\lambda'(l)+n))+m\cdot(p\cdot l)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+h(m',p'\cdot n')+m\cdot(p\cdot l)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=(m'\cdot(p'\cdot l')+h(m',p'\cdot n'),p'\cdot n')\circ(m\cdot(p\cdot l)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&=((m',p')\cdot(l',n'))\circ((m,p)\cdot(l,n))
\end{aligned}
$$

olup $\psi(S)=X=(X_1=(A_1,B_1,\alpha_1),X_0=(A_0,B_0,\alpha_0),s,t,\varepsilon,m)$, **Cat(XMod)** kategorisinde bir objedir. Şimdi

$$f=(f_L,f_M,f_N,f_P):S_1=(L_1,M_1,N_1,P_1)\rightarrow S_2=(L_2,M_2,N_2,P_2)$$

bir çaprazlanmış kare morfizmi olsun. Bu durumda $\psi(S_1)=X$ ve $\psi(S_2)=X'$ olmak üzere $\psi(f)=(\langle f_L\times f_N,f_M\times f_P\rangle,\langle f_N,f_P\rangle):X\rightarrow X'$ dönüşümü **Cat(XMod)** de bir morfizmdir.

Son olarak bu fanktorlardan bir doğal denklik elde edildiğini gösterelim. $U:1_{\mathbf{Cat(XMod)}}\Rightarrow\psi\eta$ doğal denkliği **Cat(XMod)** kategorisindeki bir X objesi ve her $a_1\in A_1$, $b_1\in B_1$ için

$$f_1^A(a_1)=(a_1-\varepsilon_A s_A(a_1),s_A(a_1)),$$

$$f_1^B(b_1)=(b_1-\varepsilon_B s_B(b_1),s_B(b_1)),$$

$$f_0^A=1_{A_0}\ \text{ve}\ f_0^B=1_{B_0}$$

olmak üzere $U_X=(f_1=\langle f_1^A,f_1^B\rangle,f_0=\langle f_0^A,f_0^B\rangle)$ şeklinde tanımlıdır. Tersine, $T:\eta\psi\Rightarrow 1_{\mathbf{X^2Mod}}$ doğal denkliği **X²Mod** kategorisindeki bir $S=(L,M,N,P)$ çaprazlanmış karesi için $T_S=(f_L=\pi_1,f_M=\pi_1,f_N=1_N,f_P=1_P)$ şeklinde tanımlıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Brown-Spencer teoremi ve [8] ile [23] kaynaklarında elde edilen yöntemler kullanılarak, öncelikle gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategoriler karakterize edilip bu iç kategorilerin aslında birer iç grupoid oldukları gösterilmiştir. Daha sonra, çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki bu iç kategoriler arasında iç fanktorlar tanımlanıp iç kategorilerin kategorisi elde edilmiştir. Bilinen bazı çaprazlanmış modüller kullanılarak çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategoriler için bazı cebirsel ve topolojik örnekler elde edilmiştir.

Son olarak, çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki çaprazlanmış modül objelerin kategorisi çaprazlanmış karelerin kategorisine denk olduğu gerçeğinden Brown-Spencer Teoremi kullanılarak gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategorilerin kategorisi ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinin denk olduğu ispatlanmış ve bu denklik kullanılarak çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategori örnekleri çaprazlanmış karelerin kategorisine aktarılmıştır. Böylece bazı çaprazlanmış kare örnekleri elde edilmiştir.

Çaprazlanmış karelerin irtibatlı (bağlantılı) homotopi 3-tipler için bir cebirsel model olduğu bilinmektedir. Böylece bu tezde elde edilen kategori denkliği ile çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategorilerin de irtibatlı (bağlantılı) homotopi 3-tipler için birer cebirsel model olduğu gösterilmiştir.

Bu tezdeki teknikler kullanılarak, benzer sonuçlar, sadece gruplar için değil, daha genel cebirsel kategoriler, yani çok işlemli grupların (Bkz. [8],[28],[29]) herhangi bir kategorisi için de ispatlanabilir. Bu anlamda, bu denklik herhangi birçok işlemli grupların kategorisinde çaprazlanmış kare kavramının tanımlanmasında yardımcı olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Whitehead, J.H.C., 1946. Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy group", Annals of Mathematics, 47, 4, 806 – 810.

[2] Brown, R., 1984. Coproducts of crossed P-modules: Applications to second homotopy groups and to the homology of groups, Topology, 23, 337 – 345.

[3] Brown, R., 1982. Higher dimensional group theory, in Low Dimensional Topology, London Mathematical Society Lecture Note Series, 48, 215 – 238.

[4] Brown, R., Higgins, P. J., 1978. On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces, Proceedings of the London Mathematical Society, 36, 193-212.

[5] Brown, R. ve Huebschmann, J., 1982. Identities among relations, in Low Dimensional Topology, London Mathematical Society Lecture Note Series, 48, 153 – 202.

[6] Lichtenbaum, S. ve Schlessinger, M., 1967. The cotangent complex of a morphism, Trans. Amer. Math. Soc., 128, 41 – 70.

[7] Gerstenhaber, M., 1966. On the deformation of rings and algebras, Annals of Mathematics, 84, 1 – 19.

[8] Porter, T., 1987. Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 30, 373 – 381.

[9] Arvasi, Z. ve Porter, T., 1996. Simplicial and crossed resolutions of commutative algebras, Journal of Algebra, 181, 426 – 448.

[10] Lue, T., 1979. Semi-complete crossed modules and holomorphs of groups, Bulletin of the London Mathematical Society, 11, 8 – 16.

[11] Norrie, K., 1990. Actions and automorphisms of crossed modules, Bulletin de la Société Mathématique de France, 1182, 2, 129 – 146.

[12] Brown, R., 1982. Higher dimensional group theory, in Low Dimensional Topology, London Mathematical Society Lecture Note Series, 48, 215 – 238.

[13] Guin-Walery, D. ve Loday, J.L., 1981. Obstructions Áléxcision en K-théorie Algébrique, Springer Lecture Notes in Mathematics, 854, 179 – 216.

[14] Ellis, G.J., 1988. Higher dimensional crossed modules of algebras, Journal of Pure and Applied Algebra, 52, 277 – 282.

[15] Brown, R. ve Loday, J.L., 1987. Homotopical excision, and Hurwicz theorems, for n-cubes of spaces, Proceedings of the London Mathematical Society, 54, 3, 176 – 192.

[16] Conduché, D., 84. Modules croisès gènèralisès de longueur 2, Journal of Pure and Applied Algebra, 34, 155 – 178.

[17] Grandjeán, A.R. ve Vale, M.J., 1986. 2-modulos cruzados en la cohomologia de André-Quillen, Memorias de la Real Academia de Ciencias, 22, 1 – 28.

[18] Arvasi, Z., 1997. Crossed Squares and 2-CrossedModules of Commutative Algebras, Theory and Applications of Categories, 3, 7, 160 – 181.

[19] Arvasi, Z. ve Porter, T., 1988. Freeness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, Applied Categorical Structures, 6, 4, 455 – 471.

[20] Mutlu, A. ve Porter, T., 1998. Freeness Conditions for 2-Crossed Modules and Complexes, Applied Categorical Structures, 4, 8, 174 – 194.

[21] Mutlu, A. ve Porter, T., 2000. Freeness Conditions for Crossed Squares and Squared Complexes, Kluwer Academic Publishers, 20, 8, 345 – 368.

[22] Arvasi, Z. ve Ulualan, E., 2007. Quadratic and 2-Crossed Modules of Algebras, Algebra Colloquium, 14, 4, 669 – 686.

[23] Brown, R. ve Spencer, C.B., 1976. G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen series A, 79, 4, 296 – 302.

[24] Loday, J.L., 1982. Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 24, 179 – 202.

[25] Borceux, F., 1994. Handbook of Categorical Algebra (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge, Cambridge University Press.

[26] Norrie, K.J., 1987. Crossed modules and analogues of group theorems, Ph. D. Thesis, King's College, England, UK.

[27] Norrie, K.J., 1990. Actions and automorphisms of crossed modules, Bull. Soc. Math. France, 118, 2, 129 – 146.

[28] Orzech, G., 1972. Obstruction theory in categories. I - II, Journal of Pure and Applied Algebra, 2, 287 – 314, 315 – 340.

[29] Higgins, P.J., 1956. Groups with multiple operators, Proceedings of the London Mathematical Society, 3, 6, 366 – 416.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	**:**	Jihad Jamil MOHAMMED
Doğum Tarihi ve Yeri	**:**	01 / 07 / 1978 – DUHOK / IRAK
E-posta adresi	**:**	cihad.cemil@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans	**:**	Duhok Üniversitesi, Matematik Bölümü, 1997
Yüksek Lisans	**:**	Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

Matematik Öğretmeni	İlkokul	1997 – 2005
Matematik Öğretmeni	Lise	2010 – ⋯