GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ BİLİŞSEL İSTEM DÜZEYİ YÜKSEK MATEMATİKSEL PROBLEMLERİ ÇÖZMEDE YAŞADIKLARI ZORLUKLAR VE BU ZORLUKLARA DAİR ATIFLARI

Nida Emül

DOKTORA TEZİ
İLKÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL, 2019

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

YAZARIN

Adı : Nida

Soyadı : Emül

Bölümü : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

Teslim Tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı : Matematik Öğretmen Adaylarının Bilişsel İstem Düzeyi Yüksek Matematiksel Problemleri Çözmede Yaşadıkları Zorluklar Ve Bu Zorluklara Dair Atıfları

İngilizce Adı : Pre-service Mathematics Teachers' Difficulties In Solving High Cognitive Demand Mathematical Problems and Attribitions to Their Difficulties

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı : Nida EMÜL

İmza :

JÜRİ ONAY SAYFASI

Nida EMÜL tarafından hazırlanan “Matematik Öğretmen Adaylarının Bilişsel İstem Düzeyi Yüksek Matematiksel Problemleri Çözmede Yaşadıkları Zorluklar Ve Bu Zorluklara Dair Atıfları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof.Dr. Ahmet ARIKAN …………………………

(Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Başkan: Prof.Dr. Erdinç ÇAKIROĞLU …………………………

(Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Orta Doğu Teknik Üniversitesi)

Üye: Prof.Dr. Yüksel TUFAN …………………………

(Kimya Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Üye: Doç.Dr. İ.Elif YETKİN ÖZDEMİR …………………………

(Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi)

Üye: Doç.Dr. Selami ERCAN …………………………

(Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Tez Savunma Tarihi: 16/09/2019

Bu tezin Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Selma YEL

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü …………………………

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının her aşamasında görüş ve önerileriyle bana yol gösteren, yapıcı eleştirileri ve olumlu yaklaşımlarıyla karşılaştığım zorlukların üstesinden gelmemi kolaylaştıran tez danışmanım Prof.Dr. Ahmet ARIKAN'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans ve doktora programı kapsamındaki derslerimizde ve ayrıca araştırma görevlisi olarak üstlendiğim sorumluluklarda birer talebesi olarak talep eden, isteyen olmadığım zamanlarda dahi iyi birer öğrenci ve akademisyen olmama katkıda bulunmak üzere bilgi ve tecrübelerini her zaman paylaşan Prof.Dr. Ziya ARGÜN'e,

Tez izleme komitemde bulunarak çalışmama değerli katkılarda bulunan Prof.Dr. Erdinç ÇAKIROĞLU'na ve Doç.Dr. İ.Elif YETKİN ÖZDEMİR'e,

Tezin çeşitli aşamalarında görüşlerinden önemli ölçüde yararlandığım Doç.Dr.Kevser AKTAŞ'a, Arş.Gör.Dr.Hilal GÜLKILIK'a ve Arş.Gör.Dr.H. Aydan KAPLAN'a,

Çalışma boyunca sıkıntılarıma ortak olan ve yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım Arş.Gör.Dr.Dilşad GÜVEN AKDENİZ'e, Arş.Gör.Fatma Nur AKTAŞ'a, Arş.Gör.E. Selcen YAKICI TOPBAŞ'a,

Çalışma koşullarımı iyileştiren, Gazi Eğitim Fakültesi ve Amasya Eğitim Fakültesi'ndeki tüm öğretim görevlilerine ve yöneticilerine,

Uygulamayı gerçekleştirmeme yardımcı olan ancak isimlerini açıklayamadığım tüm kişi ve kurumlara, özellikle katılımcı öğretmen adaylarına,

Tez çalışmam için bana maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel Teknoloji ve Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na, teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her aşamasında bana vermiş oldukları tarifi imkânsız desteklerini tez çalışmam boyunca da esirgemeyen annem Ayşe EMÜL ve babam Aydın EMÜL'e ve kız kardeşlerim ve ailelerine ise teşekkürlerim sonsuzdur.

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ BİLİŞSEL İSTEM DÜZEYİ YÜKSEK MATEMATİKSEL PROBLEMLERİ ÇÖZMEDE YAŞADIKLARI ZORLUKLAR VE BU ZORLUKLARA DAİR ATIFLARI

(Doktora Tezi)

Nida Emül

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2019

ÖZ

Araştırmalar, bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevlere katılma fırsatlarına sahip olduklarında, öğrencilerin üst düzey düşünme ve muhakeme etme becerilerinin geliştiğini ve matematiksel kavramlarla ilgili anlayışlarının zenginleştiğini göstermiştir. Buna bağlı olarak öğretmenlerin bu tür görevleri yerine getirmede gerekli bilgi ve becerilere sahip olması beklenir. Nitekim üst düzey düşünme ve muhakeme becerilerini geliştirmeye yönelik öğrenme ortamlarını düzenleme, öğretmen yeterlilikleri arasında yer almaktadır. Dolayısıyla öğretmen yetiştirme programlarının bu beklentiyi karşılayacak nitelikte iyileştirilmesinde, öğretmen adaylarının sahip olduğu zorlukların belirlenmesinin yararlı olacağı düşünülmektedir. Bu kapsamda bu araştırma ile amaç, sayılar teorisi bağlamında bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede öğretmen adaylarının yaşadıkları zorlukları incelemek ve bu zorlukları adayların görüş ve değerlendirmeleriyle birlikte tartışarak bu yönde ilgili literatüre katkıda bulunmaktır. Bu amaç doğrultusunda i) Öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede yaşadıkları zorluklar nelerdir?, ii) Öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede yaşadıkları zorlukları nelere atfetmektedir? sorularının yanıtı aranmıştır. Nitel araştırma yaklaşımıyla yürütülen araştırmanın katılımcıları, amaçsal durum örneklemelerinden kolay ulaşılabilir ve ölçüt durum örnekleme yöntemlerinin birlikte kullanımı ile belirlenen dört öğretmen adayı olmuştur. Veriler, seçmeli bir ders kapsamında yürütülen problem çözme oturumları ve bu oturumlardan sonra yapılan yarı yapılandırılmış sorular içeren bireysel görüşmeler ile elde edilmiştir. Problem çözme oturumlarında öğretmen adaylarından bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel problemleri çözmeleri istenirken; bireysel görüşmelerde problemlerin çözümlerini değerlendirmeleri istenmiş ve bu süreçte yaşadıkları zorluklara dair görüşleri alınmıştır. Elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz teknikleri kullanılmıştır. Bulgular, öğretmen adaylarının muhakeme sürecinde yaşadığı zorlukların kaynağının çoğunlukla matematiksel kavramlara yönelik zayıf kavrayışları olduğunu göstermiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının muhakeme eylemlerindeki strateji seçimlerinde problemlerin matematiksel kavramlar açısından değerlendirilmesinden daha çok stratejik ve epistemolojik bilgilerinin etkin olması bir diğer önemli bulgulardandır. Diğer taraftan öğretmen adaylarının yaşadığı zorlukları kavramsal ve stratejik bilgi eksikliklerinin yanında, sıklıkla bu tür problemleri çözebilecek öğretim faaliyetleri içerisinde bulunmamalarına atfettikleri görülmüştür. Elde edilen sonuçlar ışığında araştırmacı ve uygulayıcılara yönelik öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Öğretmen adayları, matematiksel muhakeme, matematiksel problem çözme, sayılar teorisi, bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel problemler

Sayfa Adedi : 192

Danışman : Prof.Dr. Ahmet ARIKAN

PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' DIFFICULTIES IN SOLVING HIGH COGNITIVE DEMAND MATHEMATICAL PROBLEMS AND THEIR ATTRIBITIONS THEIR DIFFICULTIES

(Ph.D. Thesis)

Nida Emül

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

September 2019

ABSTRACT

The literature has shown that, whenever students have the opportunity to participate in high cognitive demand mathematical problems, their high level thinking and reasoning skills develop and their understanding of mathematical concepts is enriched. Accordingly, teachers are expected to have the necessary knowledge and skills to perform such tasks. Hence, organizing learning environments that aimed at developing high level thinking and reasoning skills are among the competencies of teachers. Therefore, it is thought that identifying the difficulties of preservice teachers will be beneficial for improving teacher training programs to meet this expectation. In this context, the purpose of this research is to examine preservice teachers' difficulties in reasoning high cognitive demand mathematical problems in the context of number theory and to contribute to the related literature by discussing these difficulties with the opinions and evaluations of them. For this purpose the following questions are considered: i) What are the difficulties that preservice teachers have in reasoning mathematical tasks with high cognitive demand?, ii) To what extent do prospective teachers attribute the difficulties they have in performing mathematical tasks with high cognitive demand? Participants of the study which was conducted with qualitative research approach, were four pre-service teachers who were easily accessible from purposive case sampling and determined by using criterion case sampling methods together. The data were obtained through problem solving sessions conducted within the scope of an elective course and individual interviews with semi-structured questions after the sessions. In the problem solving sessions, preservice teachers were asked to solve the problems selected from the national or international high school mathematics olympics; in the individual interviews, pre-service teachers were asked to evaluate the solutions of the problems and explain their opinions about the difficulties they experienced in their reasoning process. Descriptive analysis techniques were used in the analysis of the obtained data. The findings showed that the source of the difficulties experienced by the pre-service teachers in the reasoning process is mostly their weak understanding of mathematical concepts. Another important finding is that epistemological knowledge is more effective than the requirements of the problems in the strategy choices in all pre-service teachers' reasoning actions. On the other hand, in addition to the lack of conceptual and strategic knowledge, it was seen that the pre-service teachers frequently attributed the difficulties to their lack of teaching activities that could solve such problems. In the light of the results, suggestions for researchers and practitioners were presented.

Key Words : Pre-service teachers, mathematical reasoning, mathematical problems solving, number theory, high cognitive demand mathematical problems

Page number : 192

Supervisor : Prof.Dr. Ahmet ARIKAN

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
ÖA	Öğretmen Adayı

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel problemleri çözmede yaşadıkları zorlukları ve bu süreçte yaşadıkları zorlukları neye atfettiklerini incelemektir. Dolayısıyla bu bölümde; bu amacın ortaya konulmasını motive eden bilgilere yer verilmiştir. Öncelikle matematiksel muhakeme ve bu kapsamda literatürde öne çıkan problemler; sonra öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel problemlerde muhakeme etmelerinin neden önemli görüldüğü açıklanmaya çalışılmıştır. Daha sonra ise verilen bu bilgiler doğrultusunda çalışmanın amacı ve araştırma problemleri ortaya konulmuş; varsayım ve tanımlar ele alındıktan sonra ikinci bölüme geçilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Muhakeme, matematik eğitiminin her alanında ve düzeyinde merkezi öneme sahiptir. Matematik eğitiminin her kademesinde muhakeme üzerine yapılan herhangi bir vurgu ise matematiksel gerekçelendirmeye dikkat çeker. Matematikçiler için, matematiksel gerekçelendirmenin nihai sonucu ise çoğunlukla matematiksel bir ispattır (Yackel & Hanna, 2003). Muhakeme ve ispat, tüm ülkelerde anaokulundan 12. sınıfa kadar her seviyede matematik müfredatının önemli bir unsuru halindedir (NCTM, 2000; MEB, 2018). Matematiksel süreç becerilerinden biri olarak ele alınan muhakeme, aynı zamanda problem çözme, ispat, ilişkilendirme, iletişim ve temsil etme gibi diğer süreç becerilerinin de tezahür etmesinde etken olarak kabul edilir (NCTM, 2009). Milli Eğitim Bakanlığı (MEB)'nın 1-8 sınıflar Matematik dersi öğretim programında muhakeme becerisi (MEB, 2018a), 9-12 sınıflar Matematik dersi öğretim programında ise muhakeme ve ispat becerisi öğrencilere kazandırılması hedeflenen temel beceriler arasında yer almaktadır (MEB, 2018b). Bu durum ise öncelikle öğretmenlerin bu becerilerde yetkin olması gerekliliğini doğurmaktadır (Jones, 1997; Toh, Leong, Toh & Ho, 2014). Bu beceriler, öğretmen eğitimi programlarında yer alan derslerde matematiksel anlamayı gerçekleştirmek için bir araç olarak yer almasının yanı sıra başlı başına edinilmesi gerekli bir beceri olarak öğrenme çıktıları arasında yer almaktadır. Matematik eğitimi literatüründe yer alan araştırmalara göre ise bu alanda yaşanılan güçlükler süregelen bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır (Lockwood, Ellis & Lynch, 2016).

Matematiksel muhakeme, genel olarak, bir kişinin gördüğü, düşündüğü ve sonuçlandırdığı şeyleri açıklamak için kullandığı matematiksel deneyimleri ve bilgileri arasındaki tüm ilişkileri içerir (Artigue & Burrill, 2007). Matematiksel bir ispat ise belirli muhakeme ve gerekçelendirme türlerini ifade etmenin formel bir yolu olarak tanımlanabilir. Bu tanımlamalar kapsamında ilgili araştırma sonuçları, tüm öğretim düzeyinden öğrencilerin muhakeme etmede zorluklar yaşadığı yönündedir (Mejía-Ramos, Weber & Fuller, 2015; Pedemonte, 2007; Zazkis & Villanueva, 2016). Bu araştırmalara göre muhakeme etmede görülen zorlukların kaynağı, matematiksel bilgiye dayalı etkenler, stratejik etkenler, epistemolojik etkenler, duyuşsal etkenler olarak sayılabilir (Somerhoff, Ufer & Kollar, 2015; Ufer, Heinze & Reiss, 2008; Zazkis, Weber & Mejía-Ramos, 2015). Matematiksel bilgiye dayalı zorluklar, öğrencilerin matematiksel kavramlara dair tanımları, teoremleri, özellikleri ve işlemleri anlamadaki sıkıntılarından kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin gerekli bilgiye sahip olmamaları, mevcut bilgilerini doğrudan veya ilişkisel olarak kullanamamaları, muhakeme sürecinde çıkarım yapamamalarına veya yanlış çıkarımlar yapmalarına neden olur (Weber, 2001). Stratejik etkenlere dayalı zorluklar, öğrencilerin genel ve alana özgü stratejik bilgi ve yaklaşımlarından kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin hangi stratejileri bildikleri, bu stratejileri gerekli durumlarda etkin kullanıp kullanamamaları ile ilgilidir (Zazkis, Weber & Mejía-Ramos, 2015). Örneğin genelleme yapmak veya belirli formüllere ulaşmak için örneklerin stratejik olarak seçimi, bu etkenler içerisinde ele alınabilir (Lockwood, Ellis & Lynch, 2016). Epistemolojik etkenlere dayalı zorluklar, öğrenciler ile öğretmenlerinin veya matematikçilerin bir muhakeme eyleminin ikna ediciliğine dair görüş farklılığından kaynaklanmaktadır. Matematik eğitimcileri, özellikle lisans düzeyindeki öğrencilerin matematiksel iddialarını gerekçelendirmede kullandıkları delillerin matematikçilerle ortak niteliksel özelliklere sahip olması gerektiğini savunurlar. Başka bir deyişe, özel birkaç örnek ile ulaştıkları sonuçlara veya kitap gibi bir otoriteye atfa dayanarak değil tümdengelimle muhakeme ile matematiksel iddialarını gerekçelendirmelidirler (Weber, Inglis & Ramos, 2014). Ancak öğrencilerin, özellikle bir dizi örnek üzerinde yapılan işlemler sonucunda matematiksel bir ifadenin doğruluğuna ikna olma yanılgısına sıkça düştükleri görülmüştür (Lockwood, Ellis & Lynch, 2016). İnanç, motivasyon, kaygı gibi etmenler ise duyuşsal faktörler olarak ele alınır (Somerhoff, Ufer & Kollar, 2015; Ufer, Heinze & Reiss, 2008).

Öğretmen adaylarının lisans eğitimleri süresince almış oldukları dersler düşünüldüğünde, söz konusu zorlukları aşmış ve yalnızca ilgili konu alanına yönelik temel kavramları ve prosedürleri uygulamaya yönelik matematiksel görevlerin değil üst düzey düşünme ve muhakeme becerisi gerektiren görevlerin dahi üstesinden gelebilecek matematiksel bilgi ve becerileri kazanmış oldukları öğretimlerinin doğal bir sonucu olarak düşünülebilir. Nitekim gelecek nesillerin öğreticisi olma sorumluluğuna sahip olmaları bakımından, MEB tarafından belirlenen öğretmen yeterlikleri göz önüne alındığında, öğretmen adaylarının üst düzey düşünme ve muhakeme becerilerini geliştirmeye yönelik öğrenme ortamlarını düzenlemeye ve gerektiğinde öğrencilerine ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatları için rehberlik etmeye hazır olmaları beklenir (MEB, 2017b). Ancak İç Anadolu Bölgesi'ndeki bir devlet üniversitesinin ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programının son sınıfında öğrenim gören beş öğretmen adayıyla yapılan bir pilot çalışma ile üst düzey muhakeme becerisi gerektiren matematiksel problemlerde adayların muhakeme süreçleri incelendiğinde, literatürde yer aldığı gibi, çeşitli zorluklara sahip oldukları görülmüştür. Bu nedenle öğretmen adaylarının bu kapsamda yani üst düzey muhakeme becerisi gerektiren matematiksel görevlerde sahip oldukları zorluklar çalışılmaya değer görülmüştür. Çünkü yaşanılan zorlukların açık ve detaylı bir şekilde bilinmesi ve betimlenmesinin, öğretme ve öğrenme ortamlarının iyileştirilmesine rehberlik edeceği düşünülmektedir.

Muhakeme sürecini belirleyici etmenler yukarıda incelenenlerden farklı başlıklar altında karşımıza çıkabilir. Ayrıca genel bir çerçeve sunması açısından ayrı ayrı gruplanmış olsalar da bu etmenlerin birbirleriyle ilişkili olduğu görülebilir. Sommerhoff, Ufer ve Kollar (2015), matematik eğitimde uluslararası araştırmaları geniş bir biçimde kapsadığı gerekçesiyle 2010-2014 yılları arasında muhakeme ve ispat ile ilgili PME'de (The Psychology of Mathematics Education) sunulan araştırmalar üzerine bir tarama çalışması yapmışlardır. Bu çalışmanın sonuçlarına göre, bu alanda yapılan araştırmalar gerekli bilgi ve beceri açısından geniş bir çerçeveye sahiptir fakat tek başlarına ele alındığında ağırlıklı olarak, muhakeme sürecinde matematiksel bilgiye dayalı güçlükler gibi, tek bir etmene dayalı olarak çalışılmış veya raporlaştırılmıştır. Ayrıca literatürün geri kalanında da çalışmaların benzer özellikte olduğu görülebilir (Rapanta, Garcia-Mila & Gilabert, 2013). Ancak, Sommerhoff vd.'nin de dikkat çektiği gibi bütünsel bir yaklaşımla, tüm etmenleri hesaba katarak, aralarındaki ilişki ve etkileşimleri incelemenin, muhakeme sürecinin etkili bir şekilde nasıl destekleneceği konusunda daha ayrıntılı bilgi sağlayacağı söylenebilir. Böyle bir araştırmayı yürütmenin öncelikle kullanılacak matematiksel görevlerin belirlenmesi ve değerlendirmesi açısından bazı zorluklar barındırdığı açıktır. Ancak belirli sınırlılıklara sahip olduğu düşünülse de literatüre katkısı bakımından bu türden araştırmalara ihtiyaç olduğu söylenebilir.

Diğer taraftan literatürdeki çalışmaların büyük bir kısmının ya bir muhakeme eyleminde bulunma ya da verilen hazır bir muhakeme eylemini değerlendirme şeklinde olduğu görülmüştür (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco 2014; Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007). Bunun yanında öğrencilerin kendi muhakeme eylemlerinin geçerliliğine ve bu süreçte yaşadıkları zorluklara ilişkin görüşlerinin alındığı veya bir probleme yönelik beklenen örnek bir çözüme göre kendi çözümlerini değerlendikleri araştırmalara pek az rastlanmaktadır. Bunlardan biri olarak, Stylianides ve Stylianides (2009) öğretmen adaylarıyla muhakemede bulunma ve ardından kendi muhakeme süreçlerini değerlendirme faaliyetlerine yönelik bir araştırma yürütmüşlerdir. Araştırmacılar, literatürdeki araştırmalarda az rastlanmasına karşın oluşturma ve değerlendirme faaliyetlerinin bir arada yürütülmesinin bireylerin muhakeme sürecini daha iyi aydınlattığını gözlemlemişlerdir. Örneğin araştırmalarında deneysel muhakemede bulunan adaylar arasında, muhakemelerinin matematiksel olarak sınırlılıklarını bilen ve bilmeyenleri ayırt edebilme imkanı bulduklarını ve böylece adayların performanslarını daha iyi inceleyip yorumlayabildiklerini belirtmişlerdir. Öte yandan bir durumun neden gerçekleştiğine dair bireylerin görüşlerini araştıran atıf teorisini eğitim bilimleri alanında başarı odaklı çalışan araştırmalara göre de bireylerin değerlendirme sırasında yaptıkları açıklamalar performanslarını daha iyi anlamaya yardımcı olur (Graham, 1991; Kloosterman, 1984; Middleton & Spanias, 1999). Üstelik "Bu görevde neden başarısız oldum?" gibi neden sorularının yanıtı arandığında, ortaya konulan yanıtlar olumsuz veya beklenmedik sonuçların nedenlerini öğrenmek/anlamlandırmak için önemsenir. Başka bir deyişle bir durumun gerçek veya birey tarafından algılanan nedenlerini aramak, problemli bir duruma çözüm getirmeye yardımcı olması açısından işlevsel görülür (Graham, 1991).

Bu kapsamda söz konusu araştırma için amaç, sayılar teorisi bağlamında bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevlerde öğretmen adaylarının muhakeme sürecinde yaşadıkları zorlukları incelemek ve bu zorlukları adayların görüş ve değerlendirmeleriyle birlikte tartışarak bu yönde ilgili literatüre katkıda bulunmaktır.

1.2. Araştırmanın Önemi

Ülkelerin teknolojik, ekonomik, siyasi ve askeri anlamda güçlü olmak için kendi fabrikalarında, laboratuarlarında, araştırma ve geliştirme birimlerinde çalışacak, bilim ve teknoloji üretip geliştirebilecek üst düzey uzmanlara ihtiyacı vardır. Bu uzmanların varlığı, toplumdaki daha yüksek yetenek ve beceriye sahip bireylerin belirlenmesine ve yetiştirilmesine dayanır (MEB, 2013a). Mineral yatakları gibi diğer kaynakların aksine eğer bu bireyler bir kez keşfedilmez ve geliştirilemez ise sonsuza dek kaybolurlar (Kenderov vd., 2009).

Ülkemiz için tarihsel sürece bakıldığında, Selçuklularda Nizamiye Medreselerinde, Osmanlı İmparatorluğunda ise Enderun Mekteplerinde özel yetenekli bireylerin eğitim faaliyetlerinin yürütüldüğü ifade edilebilir (TBMM, 2012). Cumhuriyetin kuruluşu ile bireylerin yetişmesi için ortam ve imkan sağlama misyonuna sahip bakanlıklar ile yurtdışına öğrenci gönderimi, fen liselerinin kurulması gibi özel yeteneklilerin eğitimine yönelik çeşitli yasal düzenlemeler ve uygulamalar yapılmıştır (MEB, 2013b). Günümüzde de MEB bünyesinde 2011 yılında oluşturulan Özel Eğitim ve Rehberlik Hizmetleri Genel Müdürlüğü birimi altındaki Özel Yeteneklerin Geliştirilmesi alt birimi ile bu bireylerin eğitimine yönelik faaliyetler sürdürülmektedir. Bu birim; özel yetenekli bireylerin tespit edilmesi, yönlendirilmesi, yetiştirilmesi ile ilgili tüm iş ve işlemleri yürütme temel görevine sahiptir. Buna bağlı olarak özel yetenekli bireylerin eğitimine yönelik modeller geliştirmek, değerlendirmek ve yaygınlaştırmak gibi faaliyetlerde bulunur (MEB, 2013b; MEB,2015).

Özel yetenekli öğrenciler için ülkemizde uygulanmakta olan en kapsamlı eğitim modeli Bilim ve Sanat Merkezleridir (BİLSEM) (MEB, 2013b). İlki 1995 yılında Ankara'da kurulan bu merkezlerden bugün 81 ilde toplam 116 tane bulunmaktadır ve yaygınlaştırılması çalışması sürdürülmektedir (MEB, 2017a). Öğrenciler, BİLSEM'lerde örgün eğitimleri dışındaki zamanlarda ilgi ve yetenekleri doğrultusunda eğitim almaktadırlar. Bu merkezlerde uygulanacak programların geliştirilmesi, görev yapacak öğretmenlerin seçilmesi gibi pek çok konuda iyileştirici çalışmalar devam etmektedir. Bunun yanında ülke genelinde daha fazla özel yetenekli bireye erişim imkanı sağlanması ve eğitimlerinde sürekliliğin korunması için zenginleştirilmiş eğitim programları modelinin uygulanması önerilmektedir. Bu modele göre, bireylerin ilgi, yetenek ve potansiyellerine göre hazırlanan etkinliklerle öğretim uygulamaları çeşitlendirilerek normal eğitim süreci içerisinde bireylere gerekli destekler sunulmaya çalışılır (MEB, 2013a). Bu türden bir yaklaşım özel yetenekli olarak belirlenmemiş olsa dahi bulunduğu sınıf ortalamasının üstünde performans gösterebilecek pek çok öğrenci için de önem arz etmektedir. Nitekim özel yetenekli bireylerin tanılamasına dair fikir ayrılıklarının olduğu da bilinmektedir. Klasik teorilere göre özel yetenekli bireyler, öğrencilerin %2-3'ü kadarıdır. Özel yetenekli bireyler üzerinde çalışmalar yapan ve MEB raporlarında da görüşlerine yer verilen Renzulli'ye göre ise bu oran oldukça azdır ve bu bireyler %15 lik dilimde olabilirler (TBMM, 2012). Bu durumda örgün eğitim kapsamında her bir öğrenicinin potansiyelini yükseltmek önem kazanmaktadır. Nitekim okullar, bireysel yetenek ve potansiyellerin tanımlandığı ve geliştirildiği yerler olarak betimlenir. Daha iyi birer düşünür olmak herkes için önemlidir ve muhakeme becerisi sadece özel yetenekli bireylerin geliştirmesi gereken bir beceri değildir. Ülkelerin çoğunda ise okullarda uygulanan matematik öğretim programı içeriklerinin ve kaynaklarının, ortalama becerilere sahip öğrencilerin ihtiyaçlarına cevap verecek şekilde tasarlandığı bilinmektedir. Dolayısıyla yalnızca özel yetenekli bireyler değil bu programların gerekliliklerinden daha üst düzeyde başarı gösterebilme potansiyeline sahip bireyler için de programlar geliştirici fırsatlar sunmaz (Kenderov vd., 2009). Hazır bulunuşluk düzeylerine uygun eğitim fırsatları sunulmaması halinde de bireylerin çabuk sıkılma, kolay öğrenmenin verdiği rehavete kapılma ve bir süre sonra başarısızlığa düşme tehlikeleriyle karşı karşıya kalabildileri görülmektedir (Barbeau & Taylor, 2009).

Bir okuldaki ve sınıftaki süre giden şeylerin çoğu ise doğrudan veya dolaylı olarak öğretmenle ilgilidir (Bela. 1968). Zira özel yetenekli bireyler için yapılabilecek olan her şeyden önce gelen tespit işlemi dahi hâlihazırdaki öğretmenlerinin değerlendirmelerine bağlıdır (TBMM, 2012). MEB'in bu kapsamda stratejik hedeflerinden biri, eğitimin tüm kademelerindeki öğretmenlerin özel yetenekli bireylerin eğitimi ve öğretimi konularında bilgi ve becerilerini geliştirmektir (MEB, 2013b). Nitekim her ne kadar genel olarak öğretim programlarının içeriği ortalama beceriye sahip öğrencilerin ihtiyaçlarına cevap verecek nitelikte olsa da (Kenderov vd., 2009), sınıf sadece eğitimin evlerinden biridir.

Bilgi ve becerileri edinme ve edindirme süreci birçok biçimde ve birçok yerde gerçekleşebilir. Öğretmenler, sınıf içinde olduğu kadar sınıf dışındaki etkinliklerle öğrencilere katkı sunabilir. Diğer dallarda olduğu gibi teknoloji yönelimli dünyamızda esaslı role sahip matematik alanındaki yetenekli bireylerin tespiti ve bu yeteneklerinin geliştirilmesinde de öğretmenler kritik role sahiptir. Bu durumda ise öğretmenlerin temel bir araç olarak kullanabilecekleri zorlayıcı matematiksel görevler değer kazanır (MEB, 2013a). Çünkü bireylerin belirli bir alandaki yetenek ve becerileri o alanda standardın dışında/üzerinde görevler aracılığı ile tespit edilebilir ve ancak bu görevlerle geliştirilebilir (Diezmann & Watters, 2002).

Öğrencilerden daha önce öğrendikleri bilgileri doğrudan hatırlamalarını veya daha önce gösterilmiş prosedürleri tekrar etmelerini isteyen görevler bir tür öğrenci düşünmesini gerektirirken; öğrencilerin kavramları ilişkilendirme, argümanlar oluşturma ve test etmesini gerektiren zorlu görevler, başka türden bir düşünme sürecini, daha üst düzey bir düşünme sürecini gerektirir (Tekkumru-Kisa & Stein, 2015). Maier (aktaran Lewis & Smith, 1993) öğrenilen davranış/tekrarlayan düşünme biçimi ve muhakeme kavramları ile üst düzey düşünme becerisini betimlemeye çalışmıştır. Araştırmacıya göre; öğrenilen davranış, deneyimler sonucunda oluşturulmuş davranış örüntüleri içindeki ilişkilerin tekrarından oluşur. Çarpım tablosunu tekrarlanan uygulamalarla öğrenmek, öğrenilen davranışlara örnek olarak verilebilir. Buna karşın dikdörtgenin alanının nasıl hesaplanacağını bilen birinin buradan paralelkenarın alanını nasıl hesaplayabileceğine ulaşması, yani iki veya daha fazla ayrık bilgi veya deneyimin birleştirilmesi ile ortaya çıkan davranış biçimi öğrenilen davranıştan farklıdır ve bu düşünce biçimi muhakemeyi oluşturur ve Maier'e göre muhakeme de problem çözmedir. Benzer şekilde NCTM (1989) de problem çözme sürecini farklı düşünme biçimi/düzeyleri ve muhakeme ile açıklamıştır. Buna göre, problem çözme etkinliği temel ve bütünleşik süreçlerden oluşmaktadır. Verilerin gözlenmesi, ölçülmesi, tahmin edilmesi, sınıflandırılması ve kaydedilmesi temel süreç içerisinde yer alırken; verilerin yorumlanması, değişkenlerin kontrol edilmesi, hipotezlerin formüle edilmesi ve test edilmesi entegre süreçler içerisinde yer alır. Hiyerarşi oluşturan bu süreçler aynı zamanda gerektirdiği düşünme düzeyleri arasındaki farkı ortaya koyar (aktaran Lewis & Smith, 1993). Esasen uluslararası literatürde yaygın olarak atıf alan NCTM'nin yayınlarındaki öğretim uygulamaları ile ilgili reform nitelindeki tavsiyelerin ve tüm ülkelerdeki müfredat geliştirme çabalarının altında yatan ana hedef de öğrencilerin matematiksel anlayışını artırmak ve bununla birlikte daha iyi birer matematikçi ve düşünür olmalarına yardımcı olmaktır (Henningsen ve Stein, 1997). Öğrencilerin nasıl düşüneceğini, muhakeme edeceğini öğrenmesi için fırsatlar ise iştirak etmeleri istenen matematiksel görevlerde saklıdır (Doyle, 1983). Öğrencilerin karşılaştıkları görevler matematiksel gerçeklikleri ezberlemeyi veya prosedürel hesaplamalar yapmayı gerektiriyorsa, öğrencilerin hesaplama becerileri kolaylaşır; eğer matematiksel fikirler üzerine düşünmeyi, kavramsal bilgilerini yeniden anlamlandırmalarını ve muhakeme etmeyi gerektiriyorsa öğrencilerin yetenekli matematiksel problem çözücüler haline gelmeleri ve matematiksel fikirlerin zengin anlayışlarını inşa etmeleri muhtemeldir (Boston, 2013). Bu anlamda zorlayıcı matematiksel görevler; öğrencilerin kavramsal anlayışlarını zenginleştirmenin yanı sıra üst düzey düşünme, problem çözme, muhakeme gibi becerilerinin gelişimini destekler (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Üstelik bu görevlerin sınıflarda kullanılması için tüm sınıfın iyi akademik dereceye sahip olması gerekmez. Çünkü bir görev her sınıfta belirli biçimlerde kullanılabilir hale getirilebilir. Aynı görev bir kişi için kolaylaştırılabilir veya zorlaştırılabilir. Yani bir görevin zorlayıcılığı bu görevin nasıl sunulduğuna da bağlıdır. Örneğin verilen bir görevde en başından bir tahminde bulunmak için bile zorlanan bir öğrenciye nasıl bir yol izleyeceği ile ilgili ipucu verilirken; zaten belirli bir yanıtı olan öğrenciden bu yanıtı gerekçelendirmesi istenebilir. Dolayısıyla bu türden görevlerin her sınıf düzeyinde öğretmenlerin uygun desteği ile kullanılabilir olduğu söylenebilir (Barbeau & Taylor, 2009). Öğretmenlerin, zorlayıcı veya bu araştırma kapsamında ele alınan şekliyle bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel problemleri öğretim faaliyetlerinin bir parçası olarak kullanmalarını etkileyen en önemli faktör ise bu görevler için gerekli bilgi ve becerilere sahip olmalarıdır (Sullivan & Mornane, 2014). Yani bu problemleri çözmede öncelikle kendilerinin yetkinleşmiş olmaları gerekir (Barbeau & Taylor, 2009).

Özetlemek gerekirse; muhakeme, matematik öğretim programlarında kazandırılması gerekli temel beceriler arasında yer almaktadır (MEB, 2018a; MEB, 2018b). Bunun yanında üst düzey düşünme ve muhakeme becerilerini geliştirmeye yönelik öğrenme ortamlarını düzenleme, öğretmen yeterlilikleri arasında yer almaktadır (MEB, 2017b). Ayrıca araştırmalar, bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevlere katılma fırsatlarına sahip olduklarında, öğrencilerin muhakeme ve gerekçelendirme becerisi ve niteliğinin geliştirilebileceğini göstermiştir (Boston & Smith, 2011; Sullivan & Mornane, 2014). Buna bağlı olarak öğretmenlerin bu tür görevleri yerine getirmede gerekli bilgi ve becerilere sahip olması beklenir. Öğretmen yetiştirme programlarının bu beklentiyi karşılayacak nitelikte iyileştirilmesinde, öğretmen adaylarının sahip olduğu zorlukların belirlenmesinin yararlı olacağı düşünülmektedir. Ayrıca, bu zorlukların bütüncül ve öğretmen adaylarının görüş ve değerlendirmeleri kapsamında incelenmesi bakımından da bu çalışma ile ilgili literatüre katkı sunulacağına inanılmaktadır.

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu araştırma ile amaç, sayılar teorisi bağlamında bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede öğretmen adaylarının yaşadıkları zorlukları incelemek ve bu zorlukları adayların görüş ve değerlendirmeleriyle birlikte tartışarak bu yönde ilgili literatüre katkıda bulunmaktır. Dolayısıyla aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. Öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede yaşadıkları zorluklar nelerdir?
2. Öğretmen adayları bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede yaşadıkları zorlukları nelere atfetmektedir?

1.4. Araştırmanın Varsayımları

Matematiksel bir görevin bilişsel istem düzeyi, “Kavramsal Çerçeve” bölümündeki ilgili başlık altında açıklanacağı üzere öğrencilerin tümü için aynı olmayabilir. Araştırma için matematiksel görevlerin belirlenmesinde uzman görüşünden ve pilot çalışma verilerinden yararlanılmıştır. Ayrıca veri toplama süresince, katılımcıların performansı göz önünde bulundurularak oluşturulan problem havuzundan uygun seçimler yapılmaya çalışılmıştır. Buna rağmen seçilen görevlerin, tüm katılımcılar için bilişsel istem düzeyi yüksek nitelikte olduğunun bir varsayım olduğu kabul edilebilir.

1.5. Tanımlar

Matematiksel Muhakeme: Matematiksel bir problemi çözme sürecinde iddiada bulunmak ve sonuca varmak için benimsenen/uygulanan düşünce dizisidir. (Lithner, 2000). Bu düşünce dizisi; kişinin gördüğü, düşündüğü ve sonuçlandırdığı şeyleri açıklamak için kullandığı matematiksel deneyimleri ve bilgileri arasındaki tüm ilişkileri içerir (Artigue & Burrill, 2007).

Muhakeme Eylemi: Matematiksel bir problemi çözme sürecinde ortaya konulan muhakeme sürecinin anlamlı her bir alt süreci olarak tanımlanan bu ifade, temel alınan matematiksel muhakeme tanımı çerçevesinde araşmacı tarafından betimlenmiştir.

Bilişsel İstem Düzeyi Yüksek Matematiksel Görev: Matematiksel kavramları ve kavramlar arasındaki ilişkileri anlama ve yeniden keşfetme; varsayımda bulunma, gerekçelendirme, matematiksel bilgiyi yorumlama gibi "matematik yapma" eylemine karşılık gelecek şekilde süreçler ve problem çözme stratejilerinin etkin ve esnek bir şekilde kullanımını gerektiren problem durumlarıdır (Stein & Smith,1998; Smith & Stein, 1998).

Matematiksel Bilgi: Kavramsal ve işlemsel bilgi ve bu bilgiler arasındaki ilişkiden oluşur. Matematiksel muhakeme süreci matematiksel kavramlara dair bilginin derinlemesine sahip olunmasıyla gerçekleşebilir (Hiebert & Lefevre, 1986). Öğretmen adaylarının matematiksel kavramlara yönelik yetersiz bilgilerinden kaynaklı yaşadığı zorluklar, matematiksel bilgiye dayalı zorluklar olarak nitelendirilmiştir.

Stratejik Bilgi: Strateji, bir problemi çözmek için adım adım izlenen yöntemdir. Matematiksel muhakeme süreci stratejileri bilmeyi ve bu stratejileri verimli bir şekilde kullanmayı gerektirir (Star & Rittle-Johnson, 2008). Öğretmen adaylarının strateji seçme ve uygulamada yaşadıkları zorluklar, stratejik bilgiye dayalı zorluklar olarak nitelendirilmiştir.

Epistemolojik Bilgi: Bir muhakeme eyleminin matematiksel olarak geçerliliğine dair bilgidir. Epistemolojik bilgiye dayalı zorluklar, öğrenciler ile öğretmenlerinin veya matematikçilerin bir muhakeme eyleminin ikna ediciliğine dair görüş farklılığından kaynaklanmaktadır (Weber, Inglis & Ramos, 2014). Katılımcıları öğretmen adayı olan bu çalışmada da, süreç içerisinde iddialarını nasıl ortaya koyarlarsa koysunlar katılımcılardan muhakemelerini formel biçimde sonlandırmaları, yani yanıtlarını ispatlamaları beklenmiştir.

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde öncelikle literatürdeki başlıca çalışmalardan yararlanarak, matematiksel muhakeme kavramının çalışma kapsamında ele alınış biçimini temellendiren tanım ve betimlemelere yer verilmiştir. Daha sonra araştırmanın amacı doğrultusunda sırasıyla bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel problemler, problem çözme süreci ve Sayılar Teorisi alanından seçilen problemlerin kapsamı ile ilgili bilgi sunulmuştur. En son kısımda ise araştırmanın problemlerini şekillendiren ve elde edilen verilerin analizinde yararlanılan; muhakeme süresini etkileyen etmenler ve atıf teorisi, literatürdeki ilgili çalışmalarla birlikte açıklanmaya çalışılmıştır.

2.1. Matematiksel Muhakeme

İngilizcede “reasoning” olarak geçen kavram, Türkçe kaynaklarda “muhakeme” veya “akıl yürütme” sözcükleriyle ele alınmaktadır. Arapça kökenli bir sözcük olan muhakeme; akıl yürütmeyi de içine alan daha kapsamlı bir terim olarak kabul edildiğinden (Umay, 2003), bu çalışmada akıl yürütme yerine muhakeme sözcüğünün kullanılması tercih edilmiştir. Arapçada “hüküm” sözcüğü ile aynı köke sahip olan (Selçuk, 2013) bu terimin, Türk Dil Kurumu’na ait sözlüklerde yargılama, usa vurma, bir sorunu çözmek için çıkar yol arama şeklinde tanımlandığı görülmektedir. Bununla birlikte Cuban (1984), hem sosyal hem de fen bilimciler için düşünme becerisi, problem çözme, eleştirel düşünme kavramlarının yanında muhakeme kavramının da belirli bir tanımının ortaya konulmasının oldukça zahmetli bir iş olduğunu ifade etmiştir. Hatta bu işin zorluğunu anlatmak için zahmetli kelimesinin hafif kalacağını belirterek bu alanı kavramsal bir bataklığa benzetmiştir (aktaran Lewis & Smith, 1993). Buna dayalı olarak “Matematik muhakemedir.”, “Muhakeme olmadan matematik yapılamaz.”, “Matematiği bilme ve yapma için muhakeme esastır.” (NCTM, 1989) gibi ifadelerle temelinin muhakeme olduğu vurgulanan, muhakeme yapmakla bir tutulan matematik alanında da benzer bir durumla karşı karşıya kalınmaktadır. “Matematiksel muhakeme, matematikçilerin yaptığı şeydir” (Brodie, 2009, s. v) gibi genel yaklaşımların yanı sıra ve belki de bu yaklaşıma dayanarak matematik yapmanın özünde bulunan kavram olması ve çeşitli matematiksel uygulamalarda yer alması sebebiyle farklı tanımlama ve betimlemeler ile karşımıza çıkmaktadır (Jeannotte & Kieran, 2017). Başka bir deyişle yapılan tanımlamalar ele alındığında bir fikir birliğinin olmadığı görülmektedir. Diğer taraftan herhangi bir tanımlamanın yapılmadan ele alındığı çalışmalara da sıkça rastlanmaktadır (örneğin, Benbow, Lubinski, Shea, & Eftekhari-Sanjani, 2000). Matematik eğitimcilerinin bir tanımlama yapmadan muhakeme kavramını kullanıyor olmalarını; Yackel ve Hanna (2003), tıpkı “anlama” kavramı gibi, ne olduğu üzerinde evrensel bir anlayış olduğu varsayımından kaynaklanabileceğini belirtmiştir. Farklı bakış açıları olsa da bu araştırma kapsamında bu kavramın nasıl ele alındığı aşağıda açıklanmaya çalışılmıştır.

Matematiksel muhakemenin, genel bir tanımla, bir kişinin gördüğü, düşündüğü ve sonuçlandırdığı şeyleri açıklamak için kullandığı matematiksel deneyimleri ve bilgileri arasındaki tüm ilişkileri içerdiğini söyleyebiliriz (Artigue & Burrill, 2007). Tanımı inceleyecek olursak, kişiye matematiksel bilgisine ve deneyimine başvurarak açıklama yaptırtan şey kendisini muhakeme yapmaya iten amacıdır. Muhakeme, açıkça ortaya konulmamış veya basitçe bir durumu anlamak için dahi olsa, bir amaç yokluğunda gerçekleşmez. Bunun yanında amaca ulaşmak için görülen şeylerin doğrudan ortaya konulması yeterli değildir. Çünkü muhakeme, verilerin ötesine gitme ile yani çıkarımda bulunma ile gerçekleştirilir. Yani başka bir deyişle matematiksel muhakeme, matematiksel nesneler ve ilişkiler hakkında amaçlı çıkarımda bulunma işidir (Conner ve diğ., 2014). Bu iş keşfetme, açıklama, doğrulama, sistematikleştirme ve iletişim gibi birçok fonksiyona sahip olabilir (Yackel ve Hanna 2003).

Matematiksel muhakeme sürecinde amaca hizmet edecek şekilde verilerin ele alınması ve koordine edilmesi, çıkarımların yapılması ve bu çıkarımların işe koşulması için yapılan düşünme süreci ise kısıtlıdır. Yani muhakeme sürecinde gerçekleşen düşünme, kendi kendini kısıtlayan bir düşünce süreci olarak nitelendirilebilir (Moshman, 1995). Boero’nun (2006) önerisiyle son yıllarda matematiksel muhakeme sürecinin analizinde sosyolog Jülgen Habermas’ın akılcılık teorisini kullanan çalışmalarda (örneğin, Goizueta, Mariotti, & Planas, 2014; Urhan, 2018) bu kısıtlama, teorinin ortaya koyduğu üzere akılcı davranma şeklinde açıklanmaktadır. Buna göre bir amaca ulaşmak için bir etkinlik içerisinde olan kişi sadece kendi düşüncesi ile değil aynı zamanda geçerli kriterlerin ve iletişim araçlarının seçimi ve sınırlamalarını da hesaba katarak davranıyorsa o kişi akılcı davranıyordur. Matematiğin nesneleriyle ilgili akıl yürütme olan matematiksel muhakemedeki kısıtlayıcılar matematiksel bilgi ve normlardır ve ancak bu kısıtlamalar sonucunda amaca hizmet edecek şekilde mantıklı veya geçerli çıkarımlar ortaya konulabilir. Buna göre yararlanılan matematiksel bilgilerin doğru ve yerinde kullanılıyor olması gerekir. Sıklıkla kabul edilen genel norm ise verilerden ve matematiksel tanım ve kurallardan yola çıkarak muhakemede bulunulması yani bilinen adıyla tümdengelimli muhakemede bulunmaktır. Hatta matematiksel muhakemenin sıklıkla bu formdaki muhakeme ile eş anlamlı kullanıldığı dahi görülebilir. Literatürde kabul gören başka bir görüşe göre ise süreç sonunda mantıklı veya geçerli çıkarımlar ortaya konulmasa da matematiksel muhakemenin gerçekleşmediği söylenemez. Bu kabule göre, matematiksel muhakeme süreci hata veya eksikler barındırabileceği gibi informel açıklama ve gerekçelendirmelerden formel çıkarımlara ve ayrıca özel ve sınırlı sayıdaki gözlemlere kadar birçok formda olabilir. Muhakeme süreci genellikle basit/temel keşifler, yanlış iddialar veya sonuca ulaşılmadan önce ortaya konulan kısmi açıklamalar ile başlar. Öğrencilerin öğrenim düzeyi arttıkça muhakeme konusundaki bilgi ve anlayışlarını geliştirmeleri beklenir ve muhakeme süreci veya sonunda ortaya koydukları açıklamalar için kabul görme standartları artar (NCTM, 2000).

Muhakeme ile ilgili bir başka önemli nokta ise sahip olduğu ikili doğasıdır. Yukarıdaki muhakeme tanımlamalarına göre matematiksel nesnelerle ilgili matematiksel bilgi ve deneyimler kapsamında düşünme ve ilişki kurma işi süreç yönüne, bu süreç sonunda ortaya konulan açıklama, sonuç veya çıkarımlar ise ürün yönüne işaret etmektedir (Jeonnatte & Kieran, 2017). Nitekim son yıllarda özel bir form olarak ispat kavramını da içine alacak şekilde farklı derecede formelliğe sahip muhakemeleri ifade etmek için kullanılan argümantasyon veya argüman terimlerine sıkça rastlanılmaktadır. Bunlardan ilki muhakemenin süreç yönü ikincisi ise ürün yönü ele alındığında kullanılmaktadır (Lerman, 2014). Argümantasyonun iki veya daha fazla kişi arasında tartışmaya dayalı bir şekilde gerçekleştiğini belirten araştırmacılar olmakla birlikte; Jeonnatte ve Kieran (2017), matematiksel muhakeme ile ilgili kavramsal bir çerçeve çizmeyi amaçladığı çalışmasında Anna Sfard'ın matematiksel bilişe iletişimsel yaklaşım teorisine (commognition) dayanarak kişinin düşünme sürecini kendisi ile iletişim kurması olarak kabul ederek bireyin tek başına da hem süreç hem de ürüne dayalı muhakemede bulunduğunu belirtmiştir.

Toulmin'e (1958) göre, bir argümanın yapısı her biri farklı bir rol oynayan bir dizi ifadeden oluşur. Bunlardan iddia, veri ve gerekçe temel bileşenler olarak ele alınır. İddia, doğruluğu kabul edilen ifade; veri ise iddiaya destek olan gerçek ifadeler olarak tanımlanır. Veri ile iddia arasındaki ilişkiyi ortaya koyan ifade ise gerekçe olarak ele alınır. Gerekçe(ler) tanım, teorem, ilke veya kural olabilir. Bu temel bileşenlerin yanında Toulmin, iddianın geçerli olduğu koşulları ifade eden niceleyici; gerekçenin neden geçerli olduğunu açıklamaya yarayan destek ve argümanın geçerli olmadığı durumları açıklayan ve gerekirse iddianın değiştirilmesini gerektiren koşulları içeren çürütücü olmak üzere yardımcı bileşen olarak adlandırdığı üç bileşen daha ortaya koymuştur. Diğer taraftan Peirce'e (1955) atfedilerek açıklanan ve özellikle son yıllarda argümantasyonun bu temel bileşenleri ile ilişkilendirilerek incelenen üç muhakeme tipinden bahsedilebilir: tümdengelimli (dedüktif) , tümevarımlı (indüktif) ve abdüktif. Tümdengelimli muhakeme, verilerden ve bir kuraldan/ilkeden yola çıkarak bir iddianın ortaya konulmasını sağlayan muhakeme biçimi olarak tanımlanmaktadır (Pedemonte, 2001). Buna göre, önce veriler belirlenir; sonrasında bir kural, ilke ya da prensip kullanılarak iddia ortaya çıkartılır. İndüktif muhakemede iddia, özel durumların bir genellemesi olarak ortaya konulur. Bir başka deyişle, iddia konu ya da durumla ilgili özel bir veya birkaç örnekten yola çıkılarak oluşturulur (Pedemonte, 2001). Abdüktif muhakemede ise iddia, veri tanımlanmadan önce ortaya konulur. Gözlenen bir gerçekten yola çıkarak, bir iddianın ortaya konulmasını sağlayan bir muhakeme biçimidir ve söz konusu gerçek verilerin tümüne ulaşılamasa da iddianın öne sürülmesini sağlar. Bir çeşit olasılıklı düşünme olarak betimlenir ve çoğunlukla bir keşif anıyla (aha moment) sürpriz bir şekilde iddia ortaya atılır ve daha sonra bu iddiayı destekleyen gerekçeler araştırılır (Arzarello, Micheletti, Olivero & Rebutti, 1998).

Matematiksel muhakemenin formal biçimi yani matematiksel olarak kabul gören ifade şekli olarak nitelenebilecek olan ispat tümdengelimlidir. Bunun yanında keşfetme ve varsayımda bulunma süreçlerinde abdüktif ve indüktif muhakeme önemli yer edinir. Kısmi açıklamalar ve çeşitli hipotezlerle başlayan muhakeme sürecinin, özellikle öğrencilerin öğrenim hayatları boyunca matematiksel muhakemeye yönelik bilgi düzeyleri arttıkça daha formel biçimde sonlandırılması beklenir (NCTM, 2009). Matematik eğitimcileri lisans düzeyine gelmiş öğrencilerin muhakeme sürecinde elde ettikleri ilişki, sonuç ve iddialarını, ispat olarak nitelendirilebilecek tümdengelimli bir muhakeme ile gerekçelendirmeleri gerektiğini savunurlar (Weber, Inglis & Ramos, 2014).

Bu çalışmada katılımcılar açısından muhakemenin amacı bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmektir. Yani başka bir deyişle problem çözmedir. Bu kapsamda matematik eğitimi literatürü incelendiğinde özellikle Lithner (2000, 2003, 2008) tarafından ortaya konulan tanımla bu çalışmada muhakeme kavramına olan yaklaşımın örtüştüğü görülmektedir. Bu tanıma göre; matematiksel muhakeme matematiksel bir görevi çözme sürecinde iddiada bulunmak ve sonuca varmak için benimsenen/uygulanan düşünce dizisidir. Formel mantığa dayanmak zorunda değildir, yani ispatla sınırlı değildir ve sezgisel ve örtülü gerekçelere dayalı olabileceği gibi yanlış da olabilir. Muhakeme, bir düşünce süreci, bu sürecin bir ürünü veya her ikisi olarak görülebilir (Lithner, 2008). Bununla birlikte, katılımcıları öğretmen adayı olan bu araştırmada, süreç içerisinde iddialarını nasıl ortaya koyarlarsa koysunlar katılımcılardan muhakemelerini, bulundukları öğrenim düzeyine uygun bir şekilde, matematiksel olarak gerekçelendirmeleri yani ispatlamaları beklenmiştir. Ayrıca, bir matematiksel görevi yerine getirmek için geçirilen muhakeme sürecinin her bir anlamlı alt süreci için, bu sırada ortaya konulan düşünce ve eylemi niteleyecek şekilde "muhakeme eylemi" ifadesi kullanılmıştır.

2.2. Matematiksel Problem ve Problem Çözme Süreci

2.2.1. Bilişsel İstem Düzeyi Yüksek Matematiksel Görevler

Matematik eğitimi literatüründe matematiksel görevlerin genel olarak alıştırma ve problem olmak üzere iki gruba ayrıldığı görülmektedir. Birey, karşılaştığı matematiksel bir görevde kendisinden istenene ulaşmak için hangi matematiksel eylem dizisini uygulaması gerektiğini biliyorsa bu görev o birey için alıştırmadır. Buna karşılık nasıl bir yol izleyeceği ile ilgili bir belirsizlik durumu içerisinde ise bu görev o birey için bir problemdir (Hayes,1989; Mayer ve Wittrock, 1996). Yani problem çözme sürecinde, verilen durumdan hedef duruma varmak için izleyeceği matematiksel eylemler birey için açık değildir ve bireyin görevi tamamlamak için daha üretken bir düşünme sürecine girmesi gerekir (Lesh & Zawojewski, 2007). Bu düşünce süreci de muhakemede bulunmayı gerektirir.

Diğer taraftan matematiksel bir görevin alıştırma ya da problem olarak nitelenmesi muhatabına bağlıdır. Biri için gerçek bir bilmece oluşturan durum, bir başkası için basit bir hatırlama meselesi olabilir. Ayrıca ilk kez karşılaşıldığında problem durumu oluşturan bir görevin benzeri ile ikinci kez karşılaşıldığında bu görev artık bir alıştırma haline gelmiş olabilir (Barbeau & Taylor, 2009, s.5). Charles ve Lester (1982), öğrencinin karşılaştığı bir görevde i) çözümü bulmak istemesi veya ihtiyaç duyması, ii) çözümü bulmak için hazırda herhangi bir yönteme sahip olmaması, iii) çözüme ulaşmak için herhangi bir çaba harcamak zorunda olması halinde söz konusu bu görevin öğrenci için bir problem olduğunun söylenebileceğini belirtmiştir.

Öğrenciler için kısaca zorlayıcı, kafa karıştırıcı olarak nitelendirilebilecek matematiksel görevlerden sıklıkla yalnızca "problem" olarak ifade edildiği görülebilse de problemlerin de kendi içinde zorluk düzeyine göre sınıflandırılması sonucunda "zor problem", "zorlayıcı/meydan okuyucu problem (challenging problems)", "yüksek dereceli problem (high level mathematical problems)", "bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevler (high cognitive demand mathematical task)" şeklinde ifadeler kullanıldığı görülmektedir. Ancak belirli bir matematiksel görevi problem olarak nitelemek kolay olmadığı gibi bir problemi zorlayıcı olarak nitelendirmek benzer nedenle kolay değildir.

Mary Kay Stein adlı araştırmacının farklı zamanlarda farklı araştırmacılarla birlikte yaptığı çalışmalarda, matematiksel görevlerin sınıflandırılmasına dair detaylı betimlemeler yapılmıştır. Stein, Grover ve Henningsen (1996) "belirli bir matematiksel düşünceyi ele alan matematiksel bir problem veya problemler grubu" olarak tanımladıkları matematiksel görevleri bilişsel istem düzeyi yüksek ve düşük olanlar olmak üzere iki kategoriye ayırmışlardır. Bu tanımlamaya göre bilişsel istemden kasıt, görevin öğrenci için gerektirdiği düşünme ve muhakeme sürecinin karakteristiğidir. Bilişsel istem düzeyi düşük görevler, ne ve nasıl yapılması konusundaki belirsizliğin az olduğu görevlerdir. Bilişsel istem düzeyi yüksek görevler ise öğrenciyi tam bir problem durumuyla karşı karşıya bırakır. Stein, daha sonra Smith ile yaptığı çalışmalarda bu görevleri iki alt kategoriye ayırarak bilişsel istem düzeyine göre dört görev tipi belirlemiş ve literatürdeki ilgili çalışmalardan yararlanarak aşağıdaki gibi karakterize etmişlerdir (Stein & Smith,1998; Smith & Stein, 1998):

Hatırlama (istem düzeyi düşük görevler): Belirsizlik yoktur. Daha önce öğrenilen tanımların, kuralların, formüllerin, algoritmaların veya prosedürlerin hatırlanarak doğrudan uygulanmasını içeren görevlerdir.

İlişkisiz prosedürlü görevler (istem düzeyi düşük görevler): Ne yapılması gerektiği ve nasıl yapılacağı hakkında çok az belirsizlik vardır. Algoritmiktir ve kullanılan prosedürün ne olduğunun açıklanması dışında açıklama gerektirmez.

İlişkili prosedürlü görevler (istem düzeyi yüksek görevler): Kavramlarla doğrudan ilişkili dar kapsamlı algoritmalar yerine daha kapsamlı genel prosedürler gerektirir. Ancak genel prosedürler izlenebilse de, bu prosedürler anlamsızca takip edilemezler. Öğrencilerin, görevi başarıyla tamamlamak için prosedürlerin altında yatan kavramsal fikirlerle meşgul olmaları gerekir.

Matematik yapma (istem düzeyi yüksek görevler): Gelişmiş ve algoritmik olmayan bir düşünmeyi zorunlu kılar. Kolayca öngörülebilir bir yaklaşımla çözülemez veya görevin içinde çözüm yoluna dair bir ipucu bulunmaz. Öğrencilerin görevi analiz etmelerini ve olası çözüm stratejilerini aktif bir şekilde incelemelerini ve bu sırada ilgili bilgi ve deneyimlerini ilişkili ve uygun bir şekilde kullanmalarını gerektirir. Dolayısıyla bu görevler çözüm sürecinin öngörülemeyen doğası nedeniyle öğrenci için bir miktar endişe verici olabilir.

Araştırmacıların ortaokul öğrencileri için kesirler ve kesirlerin ondalık ve yüzdelik denklikleri arasındaki ilişkiyi belirlemeye dair verdikleri örnekler tablodaki gibidir (Stein ve Smith,1998):

Tablo 1

Görev Tiplerine Dair Örnekler

Görev tipi	Örnek
Hatırlama	1/2 ve 1/4 kesirlerinin ondalık ve yüzdelik değerleri nelerdir?
İlişkisiz prosedürlü görevler	3/8 kesrine karşılık gelen ondalık ve yüzdelik ifadeleri bulunuz.
İlişkili prosedürlü görevler	10×10’luk bir kareli kağıt kullanarak, 3/5 kesrinin karşılık geldiği ondalık ve yüzdelik eşdeğerlerini belirleyiniz.
Matematik yapma	4x10'luk dikdörtgen bir kareli kağıtta 6 kareyi karalayınız. Buna göre aşağıdakilerin her birinin nasıl belirleneceğini açıklayınız: (a) karalı alanın yüzdesi, (b) karalı alanın ondalık kısmı ve (c) karalı alanın kesirli kısmı.

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere, bir problem öğrencilerin henüz bilmedikleri kavramları veya prosedürleri içerdiği için zor olarak nitelenmez. Yani zorlayıcı görevden kasıt, x sınıfındaki öğrenciler için $x+2$ sınıfının konularının yer aldığı bir görev değildir. *x* sınıfındaki öğrencilerin halihazırda gördükleri konular kapsamında edinmiş olmaları beklenen bilgi ve becerileri etkin kullanmaları gereken görevlerdir. İyi bir zorlayıcı görevin, genellikle açıklama, sorgulama, hipotezde bulunma, çoklu yöntemsel yaklaşımları bilme ve uygulama, ortaya konulan çözümleri değerlendirme etkinliklerini içerdiği söylenebilir (Sullivan & Mornane, 2014).

Yukarıdaki bilgilerden hareketle; çalışma kapsamında, bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel problemlerden kasıt, matematiksel kavramları ve kavramlar arasındaki ilişkileri anlama ve yeniden keşfetme; varsayımda bulunma, gerekçelendirme, matematiksel bilgiyi yorumlama gibi "matematik yapma" eylemine karşılık gelecek şekilde süreçler ve problem çözme stratejilerinin etkin ve esnek bir şekilde kullanımını gerektiren problem durumları olmuştur (Barbeau, & Taylor, 2009; Stein & Smith,1998; Smith & Stein, 1998).

2.2.2. Problem Çözme Süreci

Aşikar bir çözüm yoluna sahip olunmayan bir problemle karşılaşıldığında problem çözme denilen süreç içerisine girilir (Mayer, 1992). Matematik eğitiminde problem çözme sürecinin aşamaları olarak George Polya (1957)'nın "How to Solve It (Nasıl Çözmeli?)" adlı eserinde önerdiği modelin sıklıkla temel alındığı görülmektedir. Buna göre problem çözme süreci şu aşamalardan oluşmaktadır:

Problemi anlama: Problemin verileri ve bilinmeyenleri tanımlanır. Problem durumu çeşitli yönleri dikkate alınarak incelenir ve gerekirse tekrar ifade edilir.

Plan yapma: Bilinmeyeni elde etmek için nasıl bir yol izleneceğine dair bir plan oluşturulur. Bu sırada tüm veriler kullanıldığından ve gerekli şartların sağlandığından emin olunmalıdır.

Planı Uygulama: Belirlenen plan uygulanır. Bu süreçte plan, ana hatlara sahip genel bir taslak sunar. Başarılı bir şekilde bir sonuç elde edebilmek için bu ana hatlar altındaki işlemler, doğruluğundan kuşku edilmeyecek şekilde ayrıntılı bir şekilde yapılır.

Kontrol: Sonuç kontrol edilir. Çözüm, iyileştirilebilir ise yeniden düzenlenir. Eğer sonuç yanlış ise aşamalar tekrarlanır.

Literatürde temelde aynı olan fakat aşama sayısı bakımından farklı modeller de yer almaktadır. Örneğin Schoenfeld (1982), okuma, analiz, keşfetme, planlama/uygulama ve doğrulama olarak ele almıştır. Ayrıca Furinghetti ve Morselli (2009), Weber (2005) gibi bazı araştırmacılar iddiada bulunma ve ispatlama sürecini de problem çözmenin özel bir durumu olduğunu ve benzer süreçlerden oluştuğunu belirtmişlerdir. Bu aşamaların her biri çeşitli muhakeme eylemleri ile gerçekleştirebilirdir. Nitekim NCTM'nin (2009) lise matematiğinde muhakemeyi ele aldığı yayınında, problem çözme amaçlı muhakeme için, üretken düşünme yöntemleri olarak tanımladıkları muhakeme alışkanlıklarını problemi analiz etme, bir strateji uygulama, farklı matematiksel bağlamlarla ilişki kurma ve çözümü problem durumuna yansıtma başlıkları altında listelemişlerdir. İlgili matematiksel kavramları, prosedürleri veya temsilleri belirlemek, ilgili değişkenleri tanımlamak, örüntü ve ilişkileri aramak, özel durumlar düşünmek, hipotezde bulunmak, bir stratejiyi uygulamak, çözümü organize etmek, çözümü doğrulamak bu listeden örnek olarak verilebilir.

2.3. Sayılar Teorisi ve Programdaki Yeri

Doğal sayıların yapısı ve ilişkileri ile ilgili çalışma alanı "Elemanter Sayı Teorisi" olarak bilinir (Sinclair, Zazkis, & Liljedahl, 2003). İngilizce "elemantary" kelimesine dayanan "elemanter" nitelemesi basit veya kolay anlamında değil sayı kavramının genişletildiği cebirsel sayı teorisinden veya hesap makinesini kullanan analitik sayı teorisinden ayırmak için kullanılır (Zazkis, 2007). Bu araştırmada bu alandan bahsedilirken yalnızca "Sayılar Teorisi" ifadesi kullanılmıştır. Rosen (2005) araştırmalarında, sayılar teorisini; sayıların özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri çalışan matematiğin bir dalı olarak tanımlamıştır.

Doğal sayılar ve bu sayı kümesine ilişkin temel bilgilerin, ilk ve ortaokulda sayılar ve işlemler öğrenme alanı altında; lisede ise sayılar ve cebir öğrenme alanı altında öğrencilere kazandırılması hedeflenir. Örneğin üçüncü sınıfta tek ve çift sayıları kavrama, altıncı sınıfta asal sayılar, ortak bölen, ortak kat kavramlarını edinme, sekizinci sınıfta iki doğal sayının en büyük ortak bölen ile en küçük ortak katlarını hesaplama kazanımları yer alır (MEB, 2018a). Dokuzuncu sınıfta bölünebilme kuralları, on birinci sınıfta asal sayılar ve asal çarpanlarına ayırma konuları yer alır (MEB, 2018b). Lisans düzeyinde ise son sınıfta Sayılar Teorisi dersi çerçevesinde bu alandaki temel kavramların özelliklerinin daha detaylı ve kapsamlı bir biçimde kazandırılması amaçlanır.

Zazkis (2007), Eric Temple Bell'in "Matematik: Bilimin Kraliçesi ve Hizmetçisi" adlı kitabına ve Kar Friedrich Gauss'un aritmetiği "Matematiğin Kraliçesi" olarak ifade edişine atıfta bulunarak, sayılar teorisini, matematik eğitimi ve öğretmen eğitiminin hem bir kraliçesi hem de bir hizmetçisi olarak betimlemiştir. Zazkis'e göre bu ikilik sayı teorisine dayalı argümanların gücü ve zarafetinde ve bunun yanında öğrencilere matematiksel fikirleri ve matematiksel bir etkinliğin özünü sunmada sağladığı faydada yatmaktadır. Dolayısıyla matematikte bir öğrenme alanı olmasının yanı sıra matematik eğitimi alanında bir araştırma yürütmede zengin bir çalışma alanı sunmaktadır. Ortaokul düzeyinden üniversite düzeyine kadar her öğrenci tamsayılarla rahat bir şekilde uğraşabildiğinden, problem çözme, akıl yürütme, genelleme, soyutlama, argüman oluşturma ve değerlendirme çalışmaları için sunduğu zengin içerikle ideal bir alan olarak görülmektedir (Selden & Selden, 2002). Dolayısıyla yürütülmesi planlanan bu araştırmada kullanılacak matematiksel görevlerin sayılar teorisi dersi konuları kapsamında seçilmesi uygun görülmüştür.

2.4. Matematiksel Muhakeme Sürecini Etkileyen Etkenler

Schoenfeld (1985), problem çözmede başarılı olmak için gerekli etmenleri; i) uygun kaynaklar (matematiksel kavramlar ve prosedürler), ii) heuristik (problem çözme stratejileri), iii) izleme ve kontrol (süreci izleme ve kontrol etme, üst biliş), iv) inanç ve duyuşsal faktörler (matematiğe yönelik inanç ve motivasyon gibi duyuşsal eğilimler) olarak ortaya koymuştur. Benzer şekilde Mayer ve Wittrock (2006) ilgili literatürden yararlanarak problem çözme için gerekli bilgileri kavramsal ve işlemsel bilgi, stratejik bilgi, üst biliş ve inanç olarak ele almıştır. Sommerhoff, Ufer ve Kollar (2015), ilgili literatürden yararlanarak muhakemede bulunmanın belirleyicileri olarak altı faktör ortaya koymuşlardır: i) Metodolojik bilgi; bir ispat için kabul kriterleri bilgisi, ii) Matematiksel bilgi; matematiksel kavramlara yönelik kavramsal ve işlemsel bilgi, iii) Matematiksel stratejik bilgi; matematiksel bir görev için hangi kavramların ve temsillerin yaralı olacağı bilgisi, iv) Problem çözme becerileri; problem çözme becerisi ve stratejileri, v) İnanç; matematiksel bilginin doğasına yönelik eğilimler, vi) Duyuşsal etkenler; duygu ve motivasyon gibi duyuşsal eğilimler. Weber (2005) ise matematiksel muhakemede yaşanılan zorlukları matematiksel kavramlar, stratejiler ve neyin ispat olarak kabul edileceğiyle ilgili yetersizlikler olarak ele almıştır.

Bu çalışmada, literatürde yer alan etkenlerden bilişsel olanları göz önünde bulundurulmuştur. Çünkü veriler, duyuşsal faktörlere etki etme ihtimali olacak şartlarda toplanılmıştır. Örneğin "Pilot Çalışma" başlığı altında nedenleri açıklanacağı üzere katılımcıların sınıf ortamında diğer arkadaşları ile birlikte problem çözme oturumlarına katılıyor olmasının motivasyonlarına olumlu yönde etki edeceği düşünülmüştür. Ayrıca yukarıda verilen bazı bileşenlerin birbirini kapsadığı görülerek Weber (2005) tarafından önerilen etkenlerin alınması uygun görülmüştür. Dolayısıyla muhakeme etmede görülen zorlukların kaynağı olarak matematiksel bilgiye dayalı etkenler, stratejik bilgiye dayalı etkenler ve epistemolojik bilgiye dayalı etkenlere odaklanılmıştır. Aşağıda bu etkenlerle ilgili bilgiler sunulmuştur.

2.4.1. Matematiksel Bilgi

Matematiksel bilgi, kavramsal ve işlemsel bilgi ve bu bilgiler arasındaki ilişkiden oluşur (Hiebert ve Lefevre, 1986). Her zaman ayrılabilir olmasa da, matematiksel bilginin gelişimini ve matematiksel etkinliklerin içeriğini daha iyi anlamak için bu iki bilgi türünü ayırt etmek faydalı bulunmuştur (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Hiebert ve Lefevre (1986) kavramsal bilgiyi "ilişki bakımından zengin bilgi" olarak tanımlamış ve matematiksel kavramların ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerin ne olduğunu bilme şeklinde açıklamıştır. Buna göre kavramsal bilgi izole bilgi parçaları şeklinden ziyade birbiriyle ilişkili bir bilgi ağı şeklinde düşünülmelidir. İşlemsel bilgiyi ise genel olarak "nasıl yapılacağını bilme" şeklinde tanımlamış ve iki kısımda ele almışlardır. Bunlardan ilki matematiksel dilin ve sembollerin gösteriminine yönelik bilgi türüdür ve matematiksel fikirleri temsil edebilmeyi ve matematiksel sembolleri kullanabilmeyi içerir. Bu bilgi, genel olarak matematiksel ifadelerle ilgili yüzeysel farkındalıktır ve herhangi bir anlam içermez. Örneğin $3+\square=5$ doğru bir gösterim biçimi iken $3+=\square 8$ anlamlı veya kabul edilebilir bir matematiksel gösterim değildir. İşlemsel bilgiye dair ikinci bilgi türü ise matematiksel bir görevi tamamlamak için gerekli algoritmaları, kuralları veya prosedürleri kapsar. İki basamaklı iki tamsayının çarpımını bulmak için nasıl bir prosedür izleneceğini bilmek bu bilgi türüne örnek verilebilir.

Kavramsal ve işlemsel bilgi ile ilgili literatürde bulunan diğer tanımlamalar da benzer şekildedir. Örneğin Rittle-Johnson ve Alibali, (1999), kavramsal bilgiyi, matematik alanı ile ilgili prensiplerin açık veya dolaylı olarak anlaşılması ve bilgiler arasındaki ilişkiyi bilme olarak tanımlarken; işlemsel bilgiyi daha çok problem çözme sürecinde yapılan algoritmik işlemler, hesaplamalar gibi izlenen eylem dizisi şeklinde ele amıştır. Anderson (1995)'a göre kavramsal bilgi "nedir" sorusuna yanıt olacak şekilde bir organize bilgi bütünüdür. İşlemsel bilgi ise “nasıl” sorusunun cevabı olacak şekilde bir bilgi türü olarak daha çok takip edilmesi gerekli adımlar silsilesidir; algoritmaları ve yöntemleri içerir. Skemp (1976), bu bilgi türlerini matematiksel anlama kavramı altında ele almıştır. Matematiksel anlamayı ilişkisel ve araçsal anlama olmak üzere ikiye ayıran araştırmacı, ilişkisel anlamayı hem ne olduğunu hem de neden olduğunu bilme olarak; araçsal anlamayı ise “nedensiz kurallar” olarak tanımlamıştır. Buna göre herhangi bir problem durumuyla karşılaşan araçsal anlamaya sahip öğrenciler, bu durumla ilgili kuralları nedenini bilmeden uygularlar; ilişkisel anlamaya sahip öğrenciler ise bu kuralların neden çalıştığını ve verilen problem durumunun neden bir parçası olduğunu bilirler. Ancak buradan, Skemp (1976)’in de vurguladığı üzere, ilişkisel anlamanın/kavramsal bilginin, araçsal anlamadan/işlemsel bilgiden daha değerli olduğu şeklinde bir çıkarımda bulunmak doğru değildir.

Diğer taraftan kavramsal ve işlemsel bilginin edinilmesi belirli bir sırada ve birbirinden bağımsız gerçekleşmez (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Bu iki bilgi türü birbiri ile yinelemeli bir etkileşim halinde yapılanarak bireyin matematik bilgisini oluşturur (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Dolayısıyla bu iki bilgi türü ilişkilendirilmeden matematiksel görevlerde başarı sağlanamaz. Kavramlar ve işlemler birbiriyle bağlantılı olmadığında, öğrenciler ya problemleri çözemezler ya da cevaplar üretebilirler ancak ne yaptıklarını anlamazlar. Örneğin bölme işlemi gerektiren matematiksel bir problemde, öncelikle bölme algoritmasının bilinmesi gereklidir. Bunun yanında bir tek tamsayıyı, çift bir tamsayıya bölen kişi kalansız bir bölme yapamayacağının farkında olmalıdır. Ayrıca problem durumu, kalansız bölme işlemi gerektiriyor ve bölme işlemi sonucunda kalan değer bulunuyorsa; bu durumda ancak yeterli kavramsal bilgiye sahip bir öğrenci elde ettiği sonucu problem durumuna uygun bir şekilde yorumlayabilir (Hiebert & Lefevre, 1986). Daha karmaşık işlemler ve süreçler gerektiren matematiksel görevlerde de görevi analiz etme, çözüme ulaşmak için strateji seçimi ve uygulanması, çözümün doğrulanması gibi her aşamada kavramsal ve işlemsel bilgiden etkileşimli olarak yararlanılır (Hiebert & Lefevre, 1986; Schoenfeld, 1987). Basit bir şekilde kişinin ne kadar matematiksel bilgisi varsa o kadar iyi muhakemede bulunabilir denebilir. Ancak muhakeme sürecinde matematiksel bilgiyi işe koşmak göründüğünden daha derin bir mevzudur ve açıklaması güçtür (Mamona-Downs & Downs, 2005). Nitekim bazı araştırmalar, öğrencilerin genellikle doğrudan matematiksel kavramlara dair bilgiyi ölçen testlerde başarılı olmakla birlikte bu bilgileri kullanmaları gerekli matematiksel görevleri yerine getirmede benzer başarıyı gösteremeyerek daha düşük performans sergiledikleri sonucunu ortaya koymuştur. Çünkü bir bilginin nasıl kullanılacağını/uygulanacağını bilmek, bilginin kendisine “sahip olmak” kadar önemlidir (Mamona-Downs & Downs, 2005). Bir başka deyişle bir tanım ya da teoremin basitçe ne olduğunu bilmek, matematiksel muhakeme sürecinde kullanılabileceğini veya doğru bir şekilde uygulanabileceğini garanti etmez (Weber, 2001). Araştırmalar, öğrencilerin belirli matematiksel kavramları ve bu kavramlara dair tanım, teorem ve prosedürleri bilmenin ötesinde, bunları ne zaman kullanacaklarına dair stratejik yaklaşıma veya sezgilere sahip olmaları gerektiğini bildirmektedir (Moshman, 1995; Weber, 2001). Schoenfeld (1992) de problem çözmeyi sadece neyi bildiğimizle değil bildiğimizi nasıl ve ne zaman kullandığımızla ilişkilendirmiştir.

Diğer taraftan matematiksel bilgi muhakeme sürecinde uygulanabilir hale getirilmeli, özellikle ispatlarda uygun mantıksal çıkarımlar yapmak için matematiksel kavramların gerekli özelliklerine odaklanılabilmelidir (Bills ve Tall, 1998; Selden, 2011; Selden, Benkhalti, & Selden, 2014). Bunu yapabilmek için ise temsiller önemli role sahiptir. Usiskin (2015), matematiksel bir kavramın farklı temsillerini bilmeyi ve bu temsiller arasında geçiş yapmayı o kavramla ilgili derinlemesine matematiksel bilgiye sahip olmanın önemli bir göstergesi olarak ele almıştır. Temsil, genel olarak bir amaçla bir şeyin yerine geçen başka bir şey olarak tanımlanabilir (Palmer, 1978; Goldin & Kaput 1996). Bir problemi çözmek için sırasıyla; uygun temsili seçme, temsilleri doğru ve uygun bir şekilde manipüle etme ve yorumlama gereklidir (Gholamazad, Liljedahl, & Zazkis, 2003). Örneğin tek bir tamsayı; "n" bir tamsayı olmak üzere "$2n+1$" şeklinde temsil edilebilir ve bu temsil muhakeme sürecinde tek tamsayılarla ilgili üzerinde işlem yapılabilir bir nesne sunar ve muhakeme etmeyi kolaylaştırır. Böylece örneğin iki ardışık tek tamsayının toplamının 4'ün bir katı olduğu gerçeği, "$(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$" şeklindeki işlemler sonucunda yapılacak genelleme ile kolaylıkla ifade edilebilir (Tall, 1998). Benzer şekilde, Bills ve Tall (1998) de matematiksel muhakemede özellikle argümanların formelleştirilmesi sürecinde matematiksel kavramların verimli bir şekilde kullanılmasını “uygulanabilir tanım (operable definition)” kavramı ile açıklamıştır. Örneğin A ve B gibi iki kümenin eşitliği “Eğer $A=B$ ise o zaman A ve B kümeleri aynı elemanlara sahiptir.” şeklinde ifade edilebilir. Ancak iki kümenin eşitliğinin gösterilmesinde ancak “$A=B$ olduğundan eğer $x \in A$ ise o zaman $x \in B$ dir.” ifadesinin kullanılması bireyi üretken bir sonuca götürebilir (Selden, 2011). Yani birey, tanımları üzerinde çalışılabilir forma dönüştürmelidir (Bills ve Tall, 1998). Bunun söz konusu kavramlarla ilgili derinlemesine matematiksel bilgi gerektirdiği açıktır.

Boero (2001)’nun matematiksel muhakemede özellikle cebirsel çözümlerin en önemli yönlerinden biri olarak gördüğü dönüşümsel (tranformational) ve öngörülü (anticipation) düşünce de yine matematiksel bilgi ile gerçekleşebilir. Dönüşümsel düşünce bir problemi matematiksel olarak ele almayı, problem durumunu basitleştirmeyi ve problemi çözmeyi sağlar. Tüm dönüşüm süreçlerinin ortak bileşeni ise öngörülü düşüncedir. Dönüşümü etkin bir şekilde yönlendirmek için, problemin amacına uygun olarak dönüştürülecek nesnenin çeşitli dönüşümsel olasılıkları ve dönüşümden sonra beklenenin öngörülmesi gerekir. Bu öngörü, muhakeme sürecinde değişen durumun takibini ve süreci planlamayı sağlar. Matematiksel bilgi ve temsiller, bu iki düşünce sürecinde önemli roldedir. Örneğin yukarıda örneklenen ardışık iki tek tamsayının toplamının her zaman 4’ün katı olacağının gösteriminde; iki tek tamsayı için uygun temsillerin seçilmesi ve cebirsel işlemlerin 4’ün katı olacağını gösterir bir tamsayı temsili elde edecek şekilde yürütülmesinde bu iki düşünce tipi ve bu düşünceleri yürütmek için matematiksel bilgi gereklidir.

Özetle matematiksel muhakeme süreci matematiksel kavramlara dair bilginin derinlemesine sahip olunmasıyla gerçekleşebilir. Öğretmen adaylarının bu süreçte matematiksel kavramlara yönelik bilgilerinden kaynaklı yaşadığı zorluklar, matematiksel bilgiye dayalı zorluklar olarak nitelendirilmiştir. Bu zorluklar, öğrencilerin yanlış çıkarımlar yapmalarına veya bir argüman oluşturmak için gereken kritik bir çıkarımı yapamamalarına ve mevcut bilgilerini ilişkisel olarak kullanamamalarına neden olur (Weber, 2001). Diğer taraftan matematiksel muhakeme sürecinde hangi bilgi türünün kullanıldığını belirlemek kolay değildir. İşlemsel bilgi daha gözlemlenebilir olmakla birlikte kavramsal bilgi, muhakeme sürecinde örtük veya açık olabilir ve bu nedenle sözlü olmak zorunda değildir (Goldin-Meadow, Alibali, & Church, 1993).

İlgili literatür incelendiğinde; problem çözme sürecinde temel kaynağın problem bağlamı kapsamında matematiksel bilgiye sahip olmak olduğu bilindiğinden (Chapman, 2015; Mayer & Wittrock, 2006; Schoenfeld, 1985), pek çok çalışmada öğrencilerin bir kavramla ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılmasında problemlerin kullanıldığı ve bu problemleri çözebilmenin o kavramın öğrenildiğinin göstergelerinden biri olarak ele alındığı görülmektedir. Bu araştırmalar genellikle öğrencilerin işlemsel bilgi gerektiren problemlerde kavramsal bilgi gerektiren problemlere göre daha başarılı olduğunu ortaya koymuştur (Akgün, Işık, Tatar, İşleyen & Soylu,2012; Dündar, 2015; Dündar & Yaman, 2015; Yenilmez & Yaşa; 2007). Örneğin Akgün, Işık, Tatar, İşleyen ve Soylu (2012), ilköğretim matematik öğretmenliğinin üçüncü sınıfında öğrenim gören 97 öğrenci ile yürüttükleri çalışmada; öğrencilerin seriler kavramıyla ilgili işlemsel bilgi gerektiren sorularda oldukça başarılı olduklarını, ancak kavramsal özelliklerinin kullanılmasını gerektiren problemlerde zorluk yaşadıklarını ortaya koymuşlardır. Dündar'ın (2015), seriler konusu bağlamında 64 ilköğretim matematik öğretmeni ile gerçekleştirdiği araştırma da bu bulguyu destekler nitelikte sonuçlar ortaya koymuştur.

Muhakeme sürecinde matematiksel kavramların kullanılması ile ilgili bir diğer önemli bulgu son yıllarda argüman oluşturma ve bu argümanı formelleştirme süreci arasındaki ilişkiyi inceleyen araştırmacılar tarafından ortaya konulmuştur. Buna göre bir argümanın ispatlanması sürecinde kullanılması gerekli matematiksel kavramlara ait tanım, teorem, temsil gibi referanslar eğer söz konusu argümanın ortaya konulması sürecinde de kullanıldı ise bilişsel süreklilik sağlanarak ispatlama işi kolaylaşmaktadır. Aksi takdirde bilişsel bir kırılma yaşanacağından öğrenciler argümanlarını gerekçelendirmede zorlanmaktadırlar. Pedemonte (2007)'nin ortaya koyduğu bu ilişkisel durumun varlığı araştırma sonuçları ile desteklenmiştir (Bülbül & Urhan, 2016; Martinez & Pedemonte, 2014; Zazkis & Villanueva, 2016). Ayrıca benzer bir bulgu da Stylianou (2013) tarafından ortaya konulmuştur. Stylianou, problem çözme sürecinde temsil etme ve doğrulama süreçlerinin etkileşimini incelemek amacıyla; 12-14 yaş grubundaki 24 altıncısı sınıf öğrencisi ile çalışmış ve öğrencilerin seçtikleri temsillerin genellemelere varma şekillerini ve dolayısıyla yanıtlarını gerekçelendirme biçimlerini etkilediği bulgusuna ulaşmıştır. Stylianou, aynı zamanda öğrencilerin sundukları gerekçelerin temsil biçimlerini etkilediğini dolayısıyla gerekçelendirme ve temsillerin bu süreçte birbirini dinamik olarak yinelemeli döngülerde etkilediğini belirlemiştir.

Diğer taraftan araştırma bulgularına göre bireyler bir matematiksel kavramla ilgili doğru bir tanımlama yapabilseler dahi ilgili problemleri çözmede zorluk yaşayabilmektedir. Örneğin Elia, Panaoura, Eracleous ve Gagatsis, (2007), on birinci sınıfta öğrenim gören 179 öğrenci ile fonksiyon kavramını tanımlama, bu kavrama ilişkin farklı temsilleri yorumlama ve fonksiyon kavramı ile ilişkili problemleri çözme becerileri arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Bulgular, fonksiyon kavramını doğru tanımlayabilen öğrencilerin çoğunluğunun, problemleri çözmede başarılı olamadığını göstermiştir. Haj-Yahya, Hershkowitz ve Dreyfus (2014), 11. sınıf öğrencilerinin öğrencilerin geometrik tanımları anlamadaki zorluklarının ispatlama sürecini anlamalarını ve dolayısıyla ispatlama becerisini etkilediğini bulmuşlardır. Sayılar Teorisi kapsamında literatür incelendiğinde Zazkis ve Campbell (1996)'in benzer bulguyu ortaya koyduğu görülmektedir.

Araştırmacılar, Aritmetiğin Temel Teoremine dair matematiksel anlamalarını ortaya çıkarmak amacıyla 54 sınıf öğretmeni adayıyla bir çalışma yürütmüş ve adayların birçoğunun teoremin ne olduğunu ve özelliklerini basitçe açıklayabildiklerini ancak çeşitli problem durumlarına uygulayamadıklarını ortaya koymuşlardır. Knapp (2006)'ın ispatlama sürecinde tanımların kullanılmasına dair araştırma raporu da matematiksel bir kavramın tanımını bilmenin muhakeme sürecinde kullanılmasını garanti etmeyeceğini gösterir niteliktedir. Knapp matematik lisans programı öğrencileri ile ispat uygulamalarına dayalı yaptığı araştırma sonucunda ilgili literatüre dayanarak; ispat yapabilmek için matematiksel kavramlarla ilgili tanımların bilinmesi, bir kavramla ilgili eşdeğer tanımlar var ise uygun olanın seçilmesi ve seçilen tanımın verimli bir şekilde kullanılması gerektiğini ortaya koymuştur.

Bir diğer önemli bulgu ise bir kavramla ilgili farklı temsil biçimlerini bilen ve bu temsil biçimlerini birbirine dönüştürebilenlerin, söz konu kavramla ilgili problemleri çözmede daha başarılı olduklarıdır. Örneğin Gagatsis ve Shiakalli (2004), 195 üniversite öğrencisi ile yürüttükleri çalışmada fonksiyonların temsil biçimleri arasında dönüşüm yapanların problem çözmede daha başarılı olduklarını göstermiştir. Sayılar Teorisi kapsamında literatür taraması yapıldığında, matematik eğitiminde temsiller üzerine pek çok araştırma yer almasına rağmen tamsayıların temsili ile ilişkili az sayıda çalışmaya rastlanılmıştır. Bunlardan biri tamsayıların temsillerini Lesh, Post ve Behr (1987)'un temsil ile ilgili tanımlamalarına dayanarak iki ayrı gruba ayıran Zazkis ve Gadowsky (2001)'un çalışmasıdır. Lesh vd., şeffaf ve opak olmak üzere temsilleri iki ayrı gruba ayırmışlardır. Buna göre şeffaf bir temsil, temsil edilen fikir veya yapıdan daha fazla veya daha az bir anlam taşımaz ve temsil ettiği şeyin anlamını açıkça ortaya koyar. Buna karşın opak bir temsil, fikirlerin veya yapıların yalnızca bazı yönlerini vurgular. Bu ayrımı sayıların temsil edilmesi üzerine ele alan Zazkis ve Gadowsky, sayılarla ilgili temsillerin, bazı özellikleri göz önüne serse de; her zaman barındıkları başka özellikleri taşıması dolayısıyla opak olduğunu öne sürmüşlerdir. Örneğin 784 sayısı 28^2 olarak temsil edildiğinde mükemmel kare olduğu açıkça görülebilmektedir ancak bu sayının 98 ile bölünebildiği bu temsilden açık değildir. Yani $784 = 28^2$ temsilinde, 784'ün mükemmel kare olması şeffaf; 98 ile bölünebilmesi ise opaktır. Bu durumda sayıların temsilleri ve farklı temsillerinde saklı özelliklerin farkında olunması önemlidir. Zazkis ve Campbell (1996) Aritmetiğin Temel Teoremine dair doğru tanımlama ve özellikleri bilmelerine rağmen sınıf öğretmeni adaylarının problemleri çözmede zorlandıklarını ortaya koyduğu araştırmalarında; "

$K = 16199 = 97 \cdot 167$ ve 97 ve 167 sayıları asal olduğuna göre K tamsayısı 13 ile bölünebilir midir?" sorusunu bazı adayların K'nin yani 16199 sayısısın birler basamağı 9 olduğundan ve 9, 3'ün bir tam katı olduğundan mümkün olabileceği yanıtını vererek; ancak çarpma ve bölme işlemeleriyle uzun hesaplamalar sonucunda doğru yanıta ulaşabildiklerini bildirmişlerdir. Araştırmacılar bu zorluğun kaynağının adayların bir sayı çarpanlara ayrılmış formda sunulduğunda sayıların diğer özelliklerini belirlemede zorlanmaları ile açıklamıştır.

Özetlenecek olursa; matematiksel bilgi ve muhakeme kapsamında yapılan araştırmalar; öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgilerini etkileşimli bir şekilde kullandıklarında daha başarılı olduğunu, bir kavrama ait tanımlamaları yapılabilmelerinin o kavramla ilgili problemleri çözebileceklerini garanti etmediğini, muhakeme sürecinde başarılı olabilmek için kavramların farklı temsil biçimlerini tanıma ve bu temsilleri dönüştürebilmenin gerekli olduğunu ortaya koymuştur. Nitekim Panaoura vd. (2017), 15-17 yaş aralığındaki toplam 756 öğrenci ile yürüttükleri çalışmada öğrencilerin fonksiyon kavramını matematiksel olarak anlamalarına ilişkin dört boyutlu bir yapısal model ortaya koymuşlardır. Bu modele göre kavramın tanımlanması, farklı temsil biçimlerinin tanınması, farklı temsil biçimlerinin yorumlanması boyutları ile birlikte bir diğer boyut kavramla ilgili problemleri çözebilmedir. Yapılan araştırmalarda da problem çözme sürecinde karşılaşılan zorlukların, matematiksel bilginin çeşitli özellikleri ile ilişkilendirilerek ele alındığı görülebilmektedir.

2.4.2. Stratejik Bilgi

Strateji, bir problemi çözmek için adım adım izlenen yöntemdir (Star & Rittle-Johnson, 2008). Bir strateji, belirli bir matematiksel görevi yerine getirmek için kullanılabilecek yöntemlerden sadece biridir. Matematik problemlerinin tamamını çözebilecek bir strateji olmadığı gibi, bir problem birden fazla strateji ile çözülebilirdir (Saczynski, Willis, & Warner-Schaie, 2002).

Geriye doğru çalışma, örüntü bulma, farklı bakış açısı benimseme, daha basit ve denk bir problemi çözme, uç noktaları düşünme, görsel temsillerden yararlanma, bilinçli tahmin ve kontrol, tüm ihtimalleri göz önüne alma, verileri düzenleme stratejileri problem çözme ile ilgili literatürde yer alan başlıca stratejilerdendir (Posamentier ve Krulik, 1998). Ayrıca bu çalışmada olduğu gibi yanıta nasıl bir strateji ile varılırsa varılsın ispatlama gerektiren problem çözme süreçlerinde doğrudan ispat, tümevarım ile ispat, durum incelemeli ispat, çelişki ile ispat gibi ispat tekniklerinin bilinmesi gereklidir (Jeannotte & Kieran, 2017). Nitekim Ericson ve Flowers (1999), "Principles of Mathematical Problem Solving" adlı kitabında literatürde yaygın olarak bilinen problem çözme stratejileri ve ispat tekniklerini bir arada ele alarak bu yöntemleri problem çözme ilkeleri olarak betimlemiştir. Bu çalışmada da literatürde sıklıkla problem çözme stratejileri olarak geçen yöntemler ve ispat teknikleri olarak geçen yöntemler bir arada, stratejiler olarak ele alınmıştır.

Problem çözmede stratejileri bilmenin yanı sıra bu stratejilerin ne zaman ve nasıl kullanılacağını bilmek de önemlidir (Polya, 1957; Star vd., 2015). Stratejileri yeni problem durumlarına uyarlayabilen ve ayrıca strateji kullanmada esnek olan yani görevi yerine getirinceye kadar farklı stratejilerle problem durumunu yeniden ele alabilen bireylerin daha başarılı oldukları bilinmektedir (Star & Rittle-Johnson, 2008). Strateji esnekliği olarak da tanımlanan bu durum genel olarak, verilen bir problem için birden fazla çözüm yöntemi üretme, kullanma ve değerlendirme olarak betimlenir. Dolayısıyla strateji esnekliğinin temel şartı öncelikle strateji türlerini bilmektir. İkinci önemli nokta ise stratejilerin etkinliği bilgisini içerir. Esnek problem çözücüler, belirli bağlamlarda hangi stratejilerin daha verimli olduğunu bilirler. Dolayısıyla strateji esnekliği için yeterli matematiksel bilgiye de sahip olunmalıdır (Star vd., 2015). Özetle; stratejilerin bilimesi ve uygun olanın seçilmesi ile ancak muhakeme süreci başarılı bir şekilde sonlandırabilir. Hintikka ve Bachman (1991) bu durumu kavramlara dayalı kurallar ve stratejiye dayalı kurallar ile açıklamaya çalışmıştır. Muhakemede bulunmayı oyun oynamaya benzeten araştırmacılar kavramlara dayalı kuralların temel hareketleri tanımladığını ve bir oyunda neyin kabul edilebilir ve neyin kabul edilemez olduğunu açıkladığını belirtmiştir. Stratejik kurallar ise bir oyunun nasıl oynandığını anlatır ve stratejik kuralların oluşturulması genellikle daha zordur. Örneğin satranç oyununda kavramlara dayalı kurallar, hangi taşın nasıl hareket edebileceğine dair kurallardır. Ancak bu kurallar, oyun sürecinde hangi taşın oynanacağına dair bir bilgiyi içermez ve iyi bir satranç oyuncusu olmaya yetmez.

Matematiksel muhakeme sürecinde strateji esnekliği için matematiksel kavramların rolü düşünüldüğünde, temsillerin ön plana çıktığı görülmektedir. Nitekim Bills ve Tall (1998) matematiksel muhakeme sürecinde belirli bir yöntemi seçmede ve uygulamada ve ayrıca tanımların gerekli özelliklerine odaklanılabilmede temsil seçiminin önemini vurgulamıştır. Örneğin birey, doğal sayıların ardışıklık özelliğini ve bir n doğal sayısının ardışığının $n+1$ şeklinde temsil edilebileceğini matematiksel bilgisi kapsamında bilebilir. Ancak muhakeme sürecinde üç ardışık sayıyı ifade ederken $n, n+1, n+2$ gösteriminin mi yoksa

$n-1, n, n+1$ gösteriminin mi daha üretken sonuçlar vereceğinin dikkate alınması ve uygulanması stratejik bir yaklaşım gerektirir.

Diğer taraftan sıklıkla problemi anlama, stratejiyi seçme ve seçilen stratejiyi uygulama ve kontrol şeklinde alınan (Polya, 1957) problem çözme sürecinden ikisinin doğrudan stratejiler ile olduğu görülse de diğer aşamalarda da önemli role sahiptir (Van De Walle, 1994). Örneğin Sayılar Teorisi bağlamındaki bir problemde, problem durumunu anlamlandırmada veya iddiaların doğruluğunu test etmede örneklerin stratejik olarak seçimi önemlidir.

Özetle matematiksel muhakeme; stratejileri bilmek ve bu startaejileri verimli bir şekilde kullanmayı gerektirir. Üstelik stratejik bilgi sadece bir plan oluşturma aşamasında değil muhakeme sürecinin her aşamasında önemlidir. Öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme sürecinde stratejileri seçme ve uygulamada yaşadıkları zorlukları, stratejik bilgiye dayalı zorluklar olarak nitelendirilmiştir.

İlgili literatür incelendiğinde; temel bulgulardan biri öğrencilerin strateji türlerine dair bilgisinin muhakeme sürecindeki başarılarını olumlu etkilediğidir. Yazgan (2015), altıncı sınıf öğrencileri ile yürüttüğü çalışmada; çoklu regresyon analizi sonucunda, öğrencilerin strateji bilgilerinin rutin olmayan problem çözme başarılarının %65'ini açıkladığını göstermiştir. Nitekim araştırmacıların strateji esnekliğini geliştirmek ve buna bağlı olarak muhakemedeki zorluklarını azaltmak için yaptıkları deneysel çalışmalarda doğrudan strateji öğretimine yönelik uygulamaların da etkili olduğu belirlenmiştir (Sonay ve Bulut; 2014; Star & Rittle-Johnson, 2008). Bununla birlikte; Star ve Rittle-Johnson (2008), altıncı sınıfı yeni bitirmiş 132 öğrenci ile yaz tatili boyunca süren bir çalışma yürüterek kısa bir strateji öğretiminden sonra öğrencilerin çoklu stratejileri keşfedecekleri öğretim uygulamaları ve doğrudan strateji öğretimi yaptıkları öğretim uygulamalarının strateji esnekliğinin kazandırılmasına etkisini incelemişler ve her iki öğretim uygulamasının da problem çözmede esnekliği arttırdığı sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca keşfetmeye dayalı etkinliklerin çoklu stratejilerin kullanımını; doğrudan öğretimin ise stratejilerin etkili kullanımını kolaylaştırdığı bulgusunu elde etmiş ve buna dayalı olarak her iki etkinlik türünün bir arada yürütülmesini önermişlerdir.

Doğru stratejiyi seçmenin her zaman herkes için bir problemin doğru cevabını bulmayı garanti etmediği ise bir başka önemli bulgudur. Örneğin, Erbaş ve Okur (2012), 5 lise birinci sınıf öğrencisi ile yürüttükleri çalışmalarında bir problemde doğru sonuca götürecek stratejileri kullanan öğrencilerden hepsinin doğru yanıtı elde edemediklerini gözlemlemiştir. Seçilen stratejinin etkili olarak kullanılmasında problem bağlamıyla ilgili matematiksel kavramlara yönelik bilgi de etkilir. İsrael (2003), sekizinci sınıf öğrencileri ile yürüttüğü çalışmasında başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin problemin çözümüne katkıda bulunacak stratejileri seçmede ve uygulamada daha başarılı olduklarını bildirmiştir. Stars vd. (2015) strateji esnekliğini etkileyen etmenler konusunda yaptıkları kapsamlı araştımada benzer sonuca ulaşmıştır. Bir proje kapsamında 34 öğretmen ve 605 öğrenciden cebir dersleri bağlamında topladıkları verilerle öğrencilerin strateji esnekliklerinin bir yıl boyunca gelişimi ile öğrenci ve öğretmenlerin demografik özellikleri ve sınıftaki öğretim uygulamaları arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Analizler sonucunda öğretmenlerin mesleki deneyimleri ile öğrencilerin esneklik kazanımları ve ayrıca öğretmenlerin sınıftaki sorgulamaya dayalı uygulamaları arasında bir ilişki bulunamamıştır. Bununla birlikte öğrencilerin akademik başarıları ile strateji esnekliliği gelişimleri arasında pozitif yönde ilişki bulunmuştur.

Muhakeme sürecinde karşılaşılan stratejik zorluklardan bir diğeri ise; bu süreci argüman oluşturma ve bu argümanı formelleştirme olarak ayırıp; karşılaştırmalı olarak inceleyen araştırmacılar tarafından ortaya konulmuştur. Pedemonte (2007), bir argümanı ispatlama sürecinde yararlanılması gerekli muhakeme yapısı eğer söz konusu argümanı oluşturma sürecinde de kullanıldıysa bilişsel bir süreklilik yaşanacağından ispatlama işinin kolaylaşacağını aksi takdirde süreci yeniden yapılandırmanın bireylerde zorluk oluşturacağını belirtmiştir. Bununla birlikte Pedemonte daha sonra yaptığı çalışmalarda bu durumun özellikle geometri alanında gözlemleneceğini belirtmiştir. Örneğin cebir alanında; örneklere dayalı indüktif bir muhakeme ile argüman oluşturan bir öğrencinin daha sonra sadece temsil biçimlerini değiştirerek cebirsel bir ispat yapmasının daha az zorlayıcı olduğunu ortaya koymuşladır (Martinez & Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2008).

Özetle yapılan çalışmaların çoklu strateji bilgisine sahip olan ve matematiksel bilgisi yüksek olan öğrencilerin problem çözmede daha iyi stratejik esneklik gösterdiğini bildirdiği görülmektedir.

2.4.3. Epistemolojik Bilgi

Matematik eğitimcileri, özellikle lisans düzeyindeki öğrencilerin matematiksel iddialarını gerekçelendirmede kullandıkları delillerin matematikçilerle ortak niteliksel özelliklere sahip olması gerektiğini savunurlar (Weber, Inglis & Ramos, 2014). Başka bir deyişle öğrencilerden muhakeme sürecinde ulaştıkları sonuçları ispatlamaları beklenir. Ancak neyi ispat olarak kabul edebiliriz? Bu soru, ciddi olarak matematik yapmakla uğraşan her insanın kendisine en az bir kez sorduğu basit bir sorudur. Ancak soru ne kadar basit ise cevabının da o denli zor ve karmaşık olduğunu söylemek mümkündür (Hanna, 1983).

Muhakeme kavramında olduğu gibi muhakemenin özel bir formu olan ispatın ne olduğu konusunda da Hanna'ya (1983) göre matematik tarihi boyunca matematikçiler arasında asla bir fikir birliği olmamıştır ve olmayacaktır da. İspatlamanın matematik yapmanın bir parçası olduğu ve aslında matematiğin olduğu her yerde ispatlamanın da olduğu görüşünün (Reid ve Knipping, 2010) yanı sıra pek çok kaynağa göre günümüz matematiksel ispat geleneğinin kökenleri Yunanlılara dayanmaktadır ve aksiyomatik yapıdadır (Almeida, 2003; Kleiner, 1991). Ancak matematik tarihi boyunca uygulamaları tek türlü olmamış ve ispat kavramı değişken bir gelişim göstermiştir. 16. ve 17. yüzyılda Viete, Descartes ve Leibniz'in çalışmalarında ispatlarda sembolik gösterim güçlü bir yöntem olarak ortaya çıkmıştır. 18. yüzyıl ve 19. yüzyılların başlarında ise Avrupa matematiğinde, ortaya konulan matematiksel sonuçları tümevarımsal şekilde sistematikleştirmeden, doğruluğuna dair açıklamalar ve deliller sunulan ve Hint ve Çin ispat geleneklerine benzeyen sezgisel ispat geleneğinin takip edildiği görülmüştür. 19. yüzyılda Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange gibi dönemin önde gelen matematikçilerinin eleştirel yaklaşımları ve Boole'nin mantık üzerine çalışmaları ile aksiyomatik yöntem yeniden doğmuştur. 20. Yüzyılın başlarında ortaya çıkan biçimselcilik, mantıkçılık ve sezgicilik felsefi akımları ile ispatın ne olduğu ve ispatı nelerin oluşturduğuyla ilgili görüşler tartışılmaya devam etmiştir. Örneğin biçimselciler matematiği aksiyomatik sistemlerin bir çalışması olarak görürken, sezgiselciler bu görüşü matematiğin anlamının yok edilmesi ve sembolik manipülasyona indirgenmesi olarak eleştirmiş ve aksiyomatik yaklaşımın matematiksel keşfi ve yaratıcılığı önleyerek matematiksel düşünceyi sınırladığını savunmuşlardır. Ayrıca 20. yüzyılın ortalarında bilgisayarların icadı ile ispatlama sürecinde bilgisayarların kullanılmasının uygunluğu, tartışma konularından biri haline gelmiştir. İspat kavramının tarihsel gelişimine dair bu kısa bakış dahi neyin ispat olarak kabul edilebileceği sorusu ne kadar basit ise cevabının da o denli zor ve karmaşık olduğunu göstermektedir (aktaran Lee, K., & Smith III; Hanna, 1983). Nitekim Stylianides (2007b), bu durumun bir yansıması olarak yani matematikçiler arasında dahi net bir durum söz konusu değilken özellikle okul matematiğinde neyin ispat olarak kabul edilebileceğine dair bir netliğin olmamasının sürpriz olmadığını belirtmiştir.

Diğer taraftan matematik eğitimcilerinin ispat kavramını ele almasında, sınıf normları önemli bir ölçüt olmuştur ve bu yaklaşım her yaştan öğrenci grubuyla ispatlama alıştırmaları yapabilmek ve sınıf etkinliklerine ispatlamayı entegre edebilmek için önemli görülmüştür. Örneğin Stylianides (2007a), yaptığı araştırma sonucunda sınıf kültüründe ele alınabilecek ispat kavramını şöyle tanımlamıştır:

"İspat, matematiksel bir iddiayı doğrulamak ya da çürütmek için şu özellikleri sağlayan matematiksel bir argümandır; (1) Sınıf topluluğu tarafından doğru olarak kabul edilmiş ve herhangi başka bir kanıta ihtiyaç duyulmayan matematiksel ifadeleri (kabul edilmiş ifadeler kümesi) kullanır (2) Sınıf topluluğu tarafından bilinen ve geçerli olan veya sınıf topluluğunun kavramsal erişim sınırları içerisindeki muhakeme biçimlerini (argümantasyon türleri) kullanır (3) İletişimde sınıf topluluğu tarafından bilinen ve topluluğun yapısına uygun olan veya kavramsal erişim sınırları içerisindeki ifade etme biçimlerini (argüman temsil biçimleri) kullanır (s. 291).

Stylianides'in bu tanımında; kabul edilen ifadeler kümesi, argümantasyon türleri, argümantasyon temsil biçimleri olmak üzere üç bileşen olduğu görülmektedir. Stylianides, bunlardan kabul edilen ifadeler kümesini tanımlar, aksiyomlar ve teoremler; argümantasyon türlerini mantıksal çıkarım kurallarının uygulanması, genel ifadelerin türetilmesinde tanımların kullanılması, karşıt örneklerin oluşturulması; argümanın temsil biçimlerini ise görsel temsiller, sembolik cebirsel ifadeler şeklinde örneklemiştir. Stylianides (2007a)'in bu tanımla birlikte ispat kavramının sınıf topluluğu normlarına göre değerlendirilmesinin önemini vurguladığı görülmektedir. Araştırmacı tanımda belirttiği sınıf topluluğunun öncelikle öğrencilerden oluştuğunu bildirmiştir. Bununla birlikte literatürde sosyomatematiksel normlarla ilgili öncü kabul edilebilecek çalışması ile bilinen Yackel ve Cobb'un 1996'da yayınlanan araştırmalarına atıfta bulunarak öğretmenin bu toplulukta matematik disiplininin temsilcisi olarak özel bir üyeliğe sahip olduğunun altının çizmiştir. Dolayısıyla sınıf topluluğunun bildiği veya bilmesi gerekli sınırları belirlemede öğretmenin büyük oranda belirleyici olduğu belirtilebilir. Öğretmenin belirleyiciliğinin ise kişisel görüş ve düşüncelerden ziyade matematiksel kavramlar, bireylerin gelişim düzeyleri ve alandaki ilgili araştırma sonuçları dikkate alınarak hazırlanan müfredatlara dayanacağı söylenebilir. Alt sınıf düzeylerinde öğrencilerin kısmi açıklamaları ve özel örneklerle yapacakları deneysel çalışmaları yeterli görülürken, öğrencilerin öğrenim hayatları boyunca matematiksel muhakemeye yönelik bilgi düzeyleri arttıkça daha formel argümanlar ortaya koymaları beklenir (NCTM, 2009). Matematik eğitimcileri lisans düzeyine gelmiş öğrencilerin muhakeme sürecinde elde ettikleri ilişki, sonuç ve iddialarını, ispat olarak nitelendirilebilecek tümdengelimli bir muhakeme ile gerekçelendirmeleri veya cebirsel ispatlarla ortaya koymaları gerektiğini savunurlar (Weber, Inglis & Ramos, 2014).

Yukarıdaki açıklamalardan hareketle bu çalışma kapsamında ispat kavramı için Boero (1999), Harel ve Sowder (1998) ve Rav (1999)'un tanımlamaları temel alınmıştır. Boero, ispatı "*muhakeme sürecinin ürünü*" olarak tanımlamıştır. Harel ve Sowder yorumlama, tahminde bulunma, genelleme gibi zihinsel eylemlerden biri olarak gördükleri ispatlamayı, "*bir gözlemin doğruluğu hakkındaki şüpheleri oluşturmak ya da ortadan kaldırmak için birey tarafından ortaya konan süreç*" olarak betimlemiştir. Rav'e göre ise ispatlar *"matematikçilerin problemleri çözmek için matematiksel işleyiş biçimini sergileme ve probleme önerilen çözümün doğruluğunu gerekçelendirme yolu"* şeklindedir. Problem çözme kapsamında matematiksel muhakeme kavramının ele alındığı bu çalışmada da ispat bu tanımıyla ele alınmıştır. Ayrıca, bu araştırmada ele alınan matematiksel muhakeme tanımı çerçevesinde düşünülecek olursa ispatlamayı matematiksel nesnelerle ilgili bilgi ve deneyimlere dayalı düşünme süreciyle elde edilen sonuçları doğrulamak olarak da betimleyebiliriz. Katılımcıları öğretmen adayı olan bu çalışmada da, süreç içerisinde iddialarını nasıl ortaya koyarlarsa koysunlar katılımcılardan muhakemelerini formel biçimde sonlandırmaları, yani yanıtlarını ispatlamaları beklenmiştir. Yani ortaya koydukları iddiaları, elde ettikleri sonuçları doğruluğuna dair şüphe bırakmayacak şekilde gerekçelendirmeleri beklenmektedir. Buna dayalı olarak yaşadıkları zorluklar ise epistemolojik etkenlere dayalı zorluklar olarak nitelenmiştir.

İlgili literatür incelendiğinde; çeşitli öğrenim düzeylerindeki öğrencilerin neyi ispat olarak kabul ettiklerini başka bir deyişle hangi özellikteki muhakemelerini ikna edici bulduklarına dair pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük çoğunluğunun Harel ve Sowder (1998, 2007)'un bu kapsamda ortaya koydukları modeli temel aldığı görülmektedir. Harel ve Sowder (1998), öğrencilerin matematiksel bir gözlemi nasıl gerekçelendirdiklerini, gözlemin doğruluğuna kendilerini ve başkalarını nasıl ikna ettiklerini "ispat şeması" olarak kavramsallaştırmış ve yürüttükleri öğretim uygulamalarına dayanarak dışsal (otorite, ritüel, sembolik), deneysel (indüktif, sezgisel) ve dedüktif (dönüşümsel, aksiyomatik) olmak üzere her biri alt kategorilere sahip üç farklı ispat şeması betimlemişlerdir. Harel ve Sowder (1998, 2007)'e göre bir argümanın doğruluğunu öğretmen veya kitap gibi dış etmenlere dayandıranlar dışsal ve otorite; argümanın daha önce bildikleri ispatların görünüşlerine benzer olduğu için doğruluğuna ikna olanlar dışsal ve ritüel; anlamsızca manipüle edilmiş sembollerden oluşan bir ifadeyi ikna edici bulanlar dışsal ve sembolik ispat şemasına sahiptir. Bir veya daha fazla örnek üzerinde çalışarak elde ettiği sonuçları ikna edici bulanlar deneysel ve indüktif; hislerine dayanarak bir gözlemin doğruluğunu ikna edici bulanlar deneysel ve algısal ispat şemasına sahiptir. Matematiksel nesneler ile işlemlere, temsillerin manipülasyonuna dayalı olarak bir sonucu ikna edici bulanlar dedüktif ve dönüşümsel ve tümdengelimli çıkarım yapanlar aksiyomatik ispat şemasına sahiptir. Buna göre daha önce açıklandığı üzere muhakeme ile ilgili yeterli bilgi sahibi olduktan sonra öğrencilerden beklenen dedüktif ispat şemasına sahip olmalarıdır.

Harel ve Sowder (1998, 2007), kişinin birden fazla ispat şemasına sahip olabileceğini vurgulamışlardır. Matematik öğretmenliği programlarında öğrenim gören öğrenciler ile yapılan araştırma sonuçlarının bu bulguyu destekler nitelikte olduğu görülmektedir. Örneğin Uygan, Tanışlı, ve Köse (2014)'nin ispatlama ve örnek ispatların geçerliliğini değerlendirme yoluyla üç ilköğretim matematik öğretmeni adayının muhakeme süreçlerini inceledikleri çalışmalarında; öğretmen adaylarının ispatlama sürecinde deduktif ve dışsal-deneysel ispat şemalarına sahip oldukları görülmüştür. Adayların verilen bir ispatın doğruluğunu değerlendirmede ise bu ispatları derslerde ele aldıklar ispatlarla karşılaştırdıkları gözlenmiş ve buradan dışsal ispat şemasına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmacılar bu sonucu alan derslerinin sırasıyla tanım, teorem ve ispat ve öğretmen merkezli uygulamalarla yürütülmesinin öğretmen adaylarına muhakeme becerisi kazandırmaktan çok ezberleme alışkanlığı kazandırması şeklinde yorumlamışlardır. Benzer şekilde, Pala ve Narlı (2018) matematik öğretmenliği programının ikinci sınıfında öğrenin gören 100 öğrenci ile nitel yaklaşımla yürüttükleri çalışmalarında, sayılabilirlik kavramı ile ilgili oluşturdukları ispatlar çerçevesinde öğrencilerin sahip olduğu ispat şemalarını belirlemeye çalışmış ve katılımcılarının yalnızca %9'unun istenen ispatı oluşturabildikleri ve önemli bir kısmının dışsal ve deneysel şemalara sahip olduğunu ve en sık sergilenen ispat şemasının deneysel ispat şeması olduğu bulgusunu elde etmişlerdir. Araştırmacılar katılımcıların ispatlarını detaylı incelediklerinde bu sonucun genellikle adayların kavramsal bilgi eksikliğinden kaynaklandığını belirtmişlerdir. Nitekim akademik başarı göz önünde bulundurularak yürütülen çalışma sonuçları bu bulguyu destekler niteliktedir. Sarı, Altun ve Aşkar (2007), öğrencilerin ispatla ilgili görüşlerini ve ispatlama süreçlerini incelemeyi amaçladıkları çalışmada düşük, orta ve yüksek akademik başarıya sahip toplam 3 öğrenci ile analiz dersi bağlamında nitel bir çalışma yürütmüşlerdir. Öğrencilerin kanıtlama sürecindeki başarılarının analiz dersinde gösterdikleri başarıya paralel olduğu görülürken düşük akademik başarıya sahip öğrencinin deduktif ispat şeması sergilediğine rastlanılmamıştır. Doruk ve Kaplan (2017), ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özelliklerini incelemeyi amaçladıkları çalışmalarında sekiz katılımcı ile görev temelli görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Harel ve Sowder (1998, 2007)'ın modelini kullanarak yaptıkları analiz sonucunda öğretmen adaylarının önermelerinin doğruluklarını belirlemede bir zorluk yaşamamalarına rağmen ispatlamada zorluk yaşadıkları gözlenmiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların çoğunun matematiksel olarak geçerli olmadığı tespit edilirken akademik başarısı düşük öğretmen adaylarının dedüktif ispat şemasını daha az sıklıkta sergilediği tespit edilmiştir. Benzer şekilde Çontay ve Duatepe-Paksu (2019), ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının neler olduğunu ve bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını incelemeyi amaçladıkları araştırmalarında düşük, orta ve yüksek akademik başarıya sahip üç ilköğretim matematik öğretmeni adayıyla ispatın doğasına ilişkin ve Sayılar Teorisi bağlamında görev temelli görüşmeler yapmışlardır. Harel ve Sowder (1998, 2007)'ın ispat şeması modelini kullandıkları analizleri sonucunda öğretmen adaylarının en çok dışsal en az ise deneysel ispat şemasını sergilediklerine ulaşılmıştır. Ayrıca yüksek akademik ortalamaya sahip öğretmen adayının dedüktif ispat şemasını daha sık sergilediği gözlenmiştir.

Özetle, yapılan çalışmalar incelendiğinde, lisans düzeyindeki öğrencilerin dahi bir argümanın matematiksel olarak geçerliliğini belirlemede zorluklara sahip oldukları görülmüştür. Bununla birlikte; bu sonuç ile akademik başarıları arasında ilişki olduğu görülmüştür.

2.5. Atıf Teorisi

Kökü sosyal psikolojiye, Avusturyalı psikolog Fritz Heider'ın çalışmalarına, dayanan nedensel atıf teorisini eğitimle ilgili çalışmalarda kullanan ilk isim 1972 yılında Weiner olmuştur. Atıf teorisyenleri nedensellik algısını veya belirli bir olayın neden gerçekleştiğine dair bireylerin görüşlerini araştırmışlardır. Dolayısıyla nedensel atıf kuramı, bireylerin bir görevde başarılı veya başarısız olmalarına dair verdikleri sebeplerle ya da yaptıkları atıflarla ilgilenir (Weiner, 1972). Bilişsel ve farklı alanlara uygulanabilir olması açısından bu teori, akademik başarıyı sağlamak için yararlanılabilecek birçok yöntemden biri olarak kabul edilir ve diğer yaklaşımlarla birlikte bireylerin performanslarını nasıl açıkladıklarını ve değerlendirdiklerini anlamaya yardımcı olur

(Graham, 1991; Kloosterman, 1984; Middleton & Spanias, 1999). "Bu sınavda neden başarısız oldum?" gibi neden sorularının yanıtı aranır ve bu soruların yanıtları başarısızlık durumlarına dair açıklamaların ne olduğunu bilmek ve olumsuz veya beklenmedik sonuçların nedenlerini öğrenmek/anlamlandırmak için önemsenir. Başka bir deyişle bir durumun gerçek veya birey tarafından algılanan nedenlerini aramak, problemli bir duruma çözüm getirmeye yardımcı olması açısından işlevsel görülür (Graham, 1991). Ayrıca, bireyler belirli bir bağlamda başarılı veya başarısız olma nedenlerini ortaya koymaya çalışırken performanslarını değerlendirerek çeşitli açıklamalar yaparlar ve yaptıkları bu değerlendirme ve açıklamalar, söz konusu bağlamda yaşadıkları süreci anlamaya yardımcı olur (Cortés-Suárez & Sandiford, 2008). Dolayısıyla öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri muhakeme etmede neden zorlandıklarının araştırıldığı bu çalışmada, araştırma problemlerinden biri öğretmen adaylarının yaşadıkları zorluklara neyi atfettikleri olmuştur. Bunun için öğretmen adaylarının muhakeme sürecinde yaşadıkları zorluklara dair görüşleri "neden" sorusu çerçevesinde alınmış ve belirttikleri görüşler atıf kuramı çerçevesinde analiz edilmiştir.

İlgili literatürde bireylerin akademik bir görevdeki başarısı ya da başarısızlığını hastalık, öğretmen, aile gibi çeşitli faktörlerin yanında çoğunlukla yetenek, çaba, şans ve görevin zorluğuna atfettikleri görülmüştür (Graham, 1991; Weiner, 2010). Ayrıca Weiner (1979)'ın, literatürdeki çalışmalardan yola çıkarak atfedilen nedenler için konum, kararlılık ve kontrol edilebilirlik şeklinde üç boyutlu bir model ortaya koyduğu ve daha sonra yapılan çalışmaların atıf kuramını bu boyutlar çerçevesinde ele aldığı görülmektedir. Konum boyutu nedenin bireyin kendisinden mi yoksa kendisi dışındaki etkenlerden mi kaynaklı olduğuyla ilgilidir ve buna dayalı olarak içsel ve dışsal olarak iki alt boyuta ayrılmıştır. Örneğin yetenek ve çaba, kişinin kendisi ile ilgili olduğundan içseldir, ancak şans ve görevin zorluğu gibi atıflar ise dışsaldır. Kararlılık, ortaya konulan nedenin zaman içinde değişebilirliğini ifade edecek şekilde sabit ve değişken olmak üzere boyutlandırılmıştır. Örneğin belirli bir görev bağlamında yetenek sabit iken çaba değişkendir. Kontrol edilebilirlik boyutu ise kişinin atfettiği nedene yönelik etki edebilirliği ile ilgidir. Görevin zorluğu veya öğretmenin tercih ettiği öğretim metodu bireyin kendisi tarafından kontrol edilemezdir ancak çaba kontrol edilebilirdir. Ayrıca görüleceği üzere bir neden birden fazla boyutun özelliğini taşıyabilir. Örneğin hastalık içsel, geçici ve kontrol edilemez, öğretmene bağlı nedenler dışsal, geçici ve kontrol edilemez, çaba içsel, değişken ve kontrol edilebilirdir. Diğer taraftan kişilerin her zaman rasyonel bir şekilde atıf yaptıklarını söylemek mümkün değildir. Örneğin 'kendini kayırma eğilimi' ile ifade edilen eğilime sahip öğrencilerin başarılarını içsel, başarısızlıklarını ise dışsal faktörlere atfettikleri belirlenmiştir (Baştürk, 2013)

Matematik eğitimi kapsamında yapılan çalışmaların, diğer alanlarda olduğu gibi, genellikle özel bir bağlamdan ziyade genel matematik başarısı üzerine yapıldığı görülmektedir. Bu çalışmaların, öğrencinin matematikteki başarı veya başarısızlıklarına olan nedensel yüklemelerinin, gelecekte bu ders için gösterecekleri çaba ve motivasyonlarını ve sonuçta yine başarı durumlarını etkileyeceği şeklindeki görüşün (Kloosterman, 1984; Weiner, 2001; 2010) motivasyonu ile yapıldığını söylemek mümkündür. Nitekim matematik başarısı ve atıf üzerine yapılan ilk araştırma bulguları da öğrencilerin başarı ya da başarısızlıklarına olan atıf niteliklerinin başarı gösterme eğilimleri ile ilişkili olduğu bulunmuştur. Örneğin Meyer ve Fennema (1985), sekizinci sınıfta öğrenim gören öğrencilerin matematik başarılarına yaptıkları atıf ile bu öğrencilerin on birinci sınıftaki başarıları arasındaki ilişkiyi incelemiş ve en yüksek korelasyonun yetenek atfı ile on birinci sınıftaki matematik başarısı/başarısızlığı arasında olduğunu ortaya koymuşlardır (aktaran Middleton & Spanias, 1999). Yani, başarılarını matematikteki yeteneklerine atfeden öğrencilerin başarılı olma; başarısızlıklarını ise matematikteki yeteneklerinin yetersizliğine atfeden öğrencilerin ise başarısız olma eğiliminde olduğu görülmüştür. Bu durum kendisini matematikte yeterli yeteneğe sahip gören öğrenciler için sakıncasız şeklinde yorumlanabilse de başarısızlığını yetersiz yeteneğe sahip olmaya atfeden öğrenciler için aynı şeyin söylenemeyeceği açıktır. Öğrencilerin sorumluluk üstlenerek çalışma motivasyonlarını olumlu etkilemesi açısından istenilen, başarısızlıklarını içsel, değişken ve kontrol edilebilir faktörlere atfetmeleridir. Ancak matematik başarısının içsel, değişken ve kontrol edilebilir bir faktör olan çabadan ziyade, dışsal, sabit ve kontrol edilemez bir faktör olan yeteneğe bağlı olduğu görüşü matematiksel mitler arasında gösterilmektedir (National Research Council, 1991). Nitekim farklı öğretim düzeylerinde yapılan çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin matematik başarılarına/başarısızlıklarına çaba ile birlikte en çok atıfta bulundukları faktörün yetenek olduğu bulgusuna ulaşılmıştır (Boekaerts, Otten, & Voeten, 2003, Dede vd., 2017; Georgiou 1999; Lloyd, Walsh, & Yailagh, 2005). Bununla birlikte Boekaerts vd. (2003), 113 ortaokul öğrencisi ile yaptığı çalışma sonucunda öğrencilerin başarılarını çabaya, başarısızlıklarını ise yeteneğe atfetme eğilimde oldukları bulgusuna ulaşmıştır. Lloyd vd.'nin (2005) 62 dördüncü, 99 yedinci sınıf öğrencisi ile yaptığı çalışma bu bulguyu destekler nitelikte olmuştur. Lloyd vd.'nin çalışmaları sonucunda ortaya koyduğu bir diğer önemli bulgu ise dördüncü sınıf öğrencilerinin başarı/başarısızlıkları için çaba faktörüne yedinci sınıf öğrencilerine göre daha çok atıfta bulunmaları olmuştur. Araştırmacılar bu durumu küçük yaştaki öğrencilerin yetenek ve çaba kavramları arasındaki farkı tam olarak anlamlandıramamalarının bir sonucu olabileceği şeklinde açıklamıştır. Ayrıca Lloyd vd.'nin yaş faktörüne bağlı olarak elde ettikleri bir başka bulgu ise dördüncü sınıf öğrencilerinin yedinci sınıf öğrencilerine oranla öğretmen desteğine daha çok atıfta bulunmaları olmuştur. Bu sonucu ise küçük yaştaki öğrencilerin öğretmenlerine olan güven ve bağlılıklarının daha fazla olabileceği şeklinde yorumlamışlardır.

Matematiksel başarı ve atıf kapsamındaki çalışmalar incelendiğinde önemli görülen bir diğer bulgu cinsiyet faktörüne göre nedensel atıfların değişkenlik göstermesidir. Amit (1988), bir üniversitenin farklı programlarının birinci sınıfında öğrenim gören 135 kız, 166 erkek öğrenci ile yaptığı araştırma sonucunda genel olarak, kız öğrencilerin matematikteki başarılarını çoğunlukla görevin kolaylığı, destekleyici öğrenme ortamı gibi dışsal ve değişken nedenlere, erkek öğrencilerin ise matematikteki başarılarını içsel ve sabit olarak nitelenen yeteneğe atfettiğini bulmuşlardır. Boruchovitch (2004) üçüncü, beşinci ve yedinci sınıfta öğrenim gören toplam 110 öğrenci ile öğrencilerin bir matematik sınavındaki başarı/başarısızlıklarını en çok çaba, iyi öğretmen, görevlerin zorluğu, heyecan ve şans faktörlerine atfettiği, bunun yanında erkek öğrencilerin kızlara göre hem başarı hem de başarısızlıklarını dışsal nedenlere daha çok atfettikleri görülmüştür. Polaki ve Nenty (2001), eğitim ve fen fakülteleri dahil olmak üzere bir üniversitenin altı fakültesinde birinci sınıfta öğrenim gören 551 öğrenci ile çalışma yapmış ve erkeklerin başarısız performanslarını çaba ve şans gibi değişken ve kontrol edilebilir faktörlere, kızların başarısız performanslarını ise yetenek ve görevin zorluğu gibi sabit ve kontrol edilemeyen faktörlere atfettikleri sonucuna ulaşmıştır. Bununla birlikte araştırma bulgularına göre öğrencilerin başarılı performanslarına yönelik atıflarında anlamlı bir farklılık görülmemiştir. Ancak 717 lise öğrencisi ile yürüttüğü başka bir çalışmasında Nenty (2010), kız ve erkek öğrencilerin matematiksel başarı/başarısızlıklarına yaptıkları atıfları arasında anlamlı bir farklılık bulmamıştır.

Diğer taraftan literatürde genel matematiksel başarının/başarısızlığın yanında daha özel bir bağlama odaklanarak öğrencilerin başarı/başarısızlık atıflarını inceleyen araştırmaya oldukça az rastlanmaktadır. Bunlardan biri Cortés-Suárez ve Sandiford (2008), cebir dersini almış ve 173'ü bu dersten kalan, 237'si geçen öğrenciler olmak üzere 410 lisans öğrencisi ile yürüttüğü çalışmadır. Çaba hem dersten geçen hem de kalan öğrencilerin en çok atfettikleri faktör olmakla birlikte dersi geçenler arasında atfetme oranı %53 iken dersten kalanlar arasında atfetme oranı %40 olarak bulunmuştur. İkinci en yüksek sıklıkla atıf yapılan yetenek faktörü ise her iki gruptan neredeyse eşit oranda atıf almıştır. Üçüncü en yüksek sıklıkla atıf yapılan görevin zorluğu faktörünün oranı ise dersten geçenler arasında %10 iken dersten kalanlar arasında %18 oranında olduğu belirlenmiştir. Daha özel bir bağlamda yapılan ve sonuçları mevcut çalışıma için yararlı bulunan diğer bir çalışma ise Baştürk (2013) tarafından yapılmıştır. Fen bilgisi öğretmenliği programının birinci sınıfında öğrenim gören 67 öğrenci ile yürüttüğü çalışmasında öğrencilerin ispat yapabilmede başarılı ve başarısız olma nedenlerini incelemeyi amaçlayan Baştürk, oluşturduğu 5'li dereceli Likert tipinde bir anketle verilerini toplamıştır. Araştırma sonuçlarına göre en yüksek puanlanan maddeler dışsal, kalıcı ve kontrol edilemez etkenler olmuştur. Buna göre öğrencilerin ispatlamada başarısız olma nedenlerini üniversiteye gelene kadar sorgulamaya dayalı olmayan ezbere bir öğretim almalarına, üniversitedeki öğretim elemanlarının ispatlama konusunda öğrencilerin seviyesine uygun öğretim yapmamalarına ve ispatlama görevlerinin zorluğuna atfetmişlerdir. Öğrenciler ayrıca içsel, kalıcı ve kontrol edilemez bir faktör olarak ispat yapma yeteneğine ve içsel, geçici ve kontrol edilebilir bir faktör olarak matematiksel kavramlara ilişkin yetersiz bilgiye sahip olmalarına ve ispatlama ile ilgili yöntemsel bilgi yetersizliklerine atfetmişlerdir.

Matematik başarısı ve atıf kapsamında yapılan çalışmaların, diğer alanlarda olduğu gibi, ortak önerisi öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel başarılarını çaba gibi içsel, değiştirebilir veya kontrol edilebilir nitelikteki faktörlere atfetmelerini sağlayacak uygun etkinlikler ve söylem biçimleri geliştirmeleridir. Öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevlerde muhakeme etmede yaşadıkları zorlukların incelenerek bu kapsamda öneriler sunulmaya çalışılan bu çalışmada, problem çözme oturumlarından sonra öğrencilerin yaşadıkları zorluklara dair düşünceleri atıf teorisine dayanılarak incelenmesi uygun görülmüştür.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın nasıl yürütüldüğüne dair bilgi verilmiştir. Öncelikle araştırma deseni açıklanmış daha sonra ise verilerin nasıl toplandığına dair ilgili başlıklar altında detaylı bilgiler sunulmuştur.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu araştırma ile sayılar teorisi bağlamında bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevlerde öğretmen adaylarının yaşadıkları zorlukların ve yaşadıkları zorluklara neyi atfettiklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda araştırma, nitel araştırma yaklaşımıyla yürütülmüştür. Nitel araştırma yaklaşımları, bir gerçekliği tek başına veya belirli bağlamların ve etkileşimlerin bir parçası olarak anlama çabasıdır (Patton, 2002). Süreç, anlayış ve anlama odaklanma, veriyi toplama ve analiz etmede araştırmacının birincil vasıta olması, tümevarımsal bir süreçle sonuca varılması ve elde edilen sonucun detaylı bir şekilde betimlenmesi bu türden araştırmaların başlıca özellikleridir (Merriam, 2009). Bu kapsamda, nitel araştırma yaklaşımı bu araştırmanın amacına uygun bir yaklaşım olarak görülmüş ve araştırmanın yürütülmesinde bu yaklaşımın özellikleri dikkate alınmıştır. Bununla birlikte nitel araştırma yaklaşımları fenomenoloji, gömülü teori, etnografik, durum çalışması gibi her biri belirli karakteristiğe sahip türlere ayrılmakta olup (Creswell, 2007; Merriam, 2009; Patton, 2002;) bu araştırma durum çalışması desenine sahiptir.

Durum çalışmaları birey, süreç, kurum, program gibi sınırlı bir olgunun derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesine olanak tanır (Merriam, 2009). Bu desen özellikle "nasıl" veya "niçin" sorularının kullanıldığı araştırmalarda tercih edilmektedir (Yin, 2002). Stake (2000), durum çalışmasının metodolojik bir seçim olmasından ziyade, çalışmak üzere neyin seçildiği ile ilgili olduğunu belirterek çalışılan şeyin yani durumun bu desenin önemli bir karakteristiği olduğunun altını çizmiştir. Buna göre araştırılacak durum, sınırlı bir birimdir. Bu sınırlı durum, belirli bir sürecin, konunun veya kaygının bir kesiti olduğu için seçilir. Belirlenen durum, bir olgunun örneği olan tek bir kişi, bir kurum veya bir program olabilir. Diğer taraftan bir araştırmayı durum çalışması yapan şey konusu değil analiz birimidir. Bir çalışmada neyin analiz edildiği yani odağın ne olduğu, aynı zamanda durumun ne olduğunu belirginleştirir ve bu anlamda belirlilik durum çalışmasının önemli özelliklerindendir (Merriam, 2009). Dolayısıyla, öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri muhakeme etmede adaylarının yaşadığı zorluklar ve yaşadıkları zorluklara dair atıfların birer durum olarak ele alarak incelendiği bu çalışma, bir durum çalışması olarak tasarlanmıştır.

Öğretmen adaylarına seçmeli bir ders kapsamında problem çözme oturumları yapılmış ve bu oturumlarda katılımcılar kendilerine verilen blişsel istem düzeyi yüksek matematiksel problemleri bireysel olarak çözmeye çalışmışlardır. Bu oturumlardan sonra ise her bir katılımcı ile yarı yapılandırılmış sorular içeren bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde katılımcılardan muhakeme eylemlerinde neden zorlandıklarına dair görüşleri alınmıştır. Bu çalışma kapsamında; gerçekleştirilen bu süreçlerde katılımcıların muhakeme eylemlerinde yaşadıkları zorluklar ve bu zorluklara dair görüşleri/atıfları durum olarak ele alınmış ve incelenmiştir.

3.2. Pilot Çalışma

Araştırma için 2016-2017 eğitim-öğretim yılı bahar dönemi içerisinde bir pilot çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programının son sınıfında öğrenim gören 2 öğretmen adayı ile ikili grup halinde çalıştıkları ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği programının son sınıfında öğrenim gören 3 öğretmen adayıyla bireysel çalıştıklar toplam dört görev temelli görüşmeler yapılmıştır. Bu adaylar akademik başarıları ve gönüllülük ilkesi dikkate alınarak belirlenmiştir. Ayrıca lisans programları süresince bazı derslerin birlikte yürütülmüş olması sebebiyle araştırmacıyla iletişim kurmaya alışkın olduklarından görüş ve fikirlerini araştırmacı ile açıkça paylaştıklarını ifade etmişlerdir. Yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarından araştırmada da kullanılan problemlerden ikisini (P-3 ve P-6) çözmeleri istenmiştir.

Öncelikle bu pilot çalışma ile öğretmen adaylarının bu problemlerde muhakeme etmede çeşitli zorluklar yaşadıkları gözlenmiştir ve bu gözlem araştırmanın problem durumunu desteklemiştir. Bunun dışında bu pilot çalışmadaki gözlemler ve bu gözlemler sonucunda araştırmanın nasıl yürütüleceğine dair alınan kararlar şunlar olmuştur:

Verilerin seçmeli bir ders kapsamında toplanılması: Araştırmada kullanılacak problemlerin Sayılar Teorisi bağlamında olması ve bu dersin 2016-2017 eğitim-öğretim yılında son sınıf öğretim programının bahar döneminde bulunması dolayısıyla adaylarla bu dönem içerisinde bir ön çalışma yapılması uygun görülmüştür. Ancak son sınıfta bulunan adayların, hem fakültede takip ettikleri dersler, hem öğretmenlik uygulaması kapsamında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı okullarda geçirdikleri süreler ve hem de Kamu Personeli Seçme Sınavının hazırlıkları dolayısıyla görüşme için akademik başarısı yüksek öğretmen adaylarından gönüllü aday bulmak ve randevu ayarlamak oldukça zor olmuştur. Birinci görüşme, lisans ders programı ve Kamu Personeli Seçme Sınavına hazırlık programları dolayısıyla adayların isteği üzerine hafta sonu yapılmıştır ve adaylar görüşme için belirli bir süre kısıtlaması isteğinde bulunmamışlardır. Belirlenen gün ve saatte araştırmacının fakültedeki odasında bir araya gelinmiş ve sırasıyla belirlenen problemler verilerek öğretmen adaylarından birlikte çözmeleri istenmiştir. Öğretmen adayları her iki problemi de okuduktan sonra daha önce bu tür problemler çözmediklerini ifade ederek öncelikle problemlerin zorluğundan şikâyetçi olmuş, yaklaşık yarım saatlik bir süreden sonra ise ayıracak daha fazla zamana sahip olmalarına ve verdikleri yanıtlardan emin olmamalarına rağmen sıkıldıklarını, çözemeyeceklerini düşündüklerini ve muhakeme sürecine son vermek istediklerini belirtmişlerdir. Ancak literatüre göre bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevlerin çözümü için öncelikle yeterli zamanın ayrılması gereklidir (Nolte & Pamperien, 2017). Bu sırada yapılan gözlemlere göre, öğretmen adaylarının yaklaşık 15 dakika uğraştıktan sonra problemi artık çözemeyeceklerine dair bir yargı oluşturmalarının ve kendi talepleri olsa da hafta sonu fakültede bulunmalarının adaylarda motivasyon eksikliği oluşturduğundan süreci sonlandırmak istedikleri söylenebilir. Bireysel olarak gerçekleştirilen diğer görev temelli görüşmeler hafta içi olacak şekilde planlanmıştır. Ayrıca daha rahat ve esnek bir düşünme süreci geçirmeleri ve çözüm sürecine yeterli zamanı ayırabilmeleri için adaylara görüşülmesi planlanan günden iki gün önce problemler verilmiş; birbirlerinden veya herhangi bir kaynaktan yardım almadan, nihai çözümleriyle birlikte çözüm aşamasındaki tüm fikirlerini ve çözüm önerilerini, doğru veya yanlış ayırt etmeksizin, not ederek gelmeleri istenmiştir. Üç aday da problemlerin zorluğu nedeniyle ve yoğun programa sahip oldukları gerekçesiyle görüşme tarihini erteleme isteğinde bulunmuşlar ve yapılan görüşme planı aksaklığa uğramıştır. Ayrıca her ne kadar adaylar çözüm süreçlerini detaylı bir şekilde not ederek gelmiş olsalar da, araştırmalarda zaman ve mekan ile ilgili değişkenlerin verinin kalitesini etkilediği bilinmektedir (Punch, 2005). Bununla birlikte araştırmacının yanında katılımcıların da araştırmadan yarar sağlaması araştırma etiği açısından salık verilmektedir (Creswell, 2007). Dolayısıyla araştırma verilerinin seçmeli bir ders kapsamında ve bu ders dışında, dersi seçen adaylardan belirlenen katılımcılarla yürütülecek görüşmeler ile toplanılması uygun bulunmuştur. Katılımcıların sınıf ortamında arkadaşlarıyla birlikte çözüm sürecine katılıyor olmaları ve verilen görevler kapsamında kredi tamamlayacak olmalarının onları motive edeceği düşünülmüştür. Açılan dersin, dersin seçen tüm öğrenciler ve bu öğrencilerden belirlenen katılımcılar açısından ortaya çıkacak etik problemler ve ayrıca araştırma desenine uygun veri toplayabilmek için alınan önlemler bu bölümdeki ilgili başlıklar altında verilmiştir.

Verilerin toplanması için yarıyılın belirlenmesi: 2017-2018 eğitim-öğretim yılı itibari ile Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği lisans programında Sayılar Teorisi dersi son sınıfın güz döneminde yer almaktadır. Araştırma uygulamasının da aynı dönemde yapılmasına karar verilmiştir. Çünkü hem araştırmacı ve danışmanının gözlemlerine hem de yukarıda pilot çalışmadaki adaylardan alınan görüşlere göre Kamu Personeli Seçme Sınavının son sınıf bahar dönemi bitmeden yapılması ve mezuniyet hazırlıkları dolayısıyla, öğretmen adayları son sınıf bahar döneminde daha sık devamsızlık yapma ve fakültedeki dersleriyle daha az ilgilenme eğiliminde olmaktadırlar.

Adayların problemleri bireysel olarak çözmesi: Pilot çalışmadaki ilk görüşme, yukarıda da belirtildiği üzere, iki öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiş ve adaylardan verilen matematiksel görevleri birlikte çözmeleri istenmiştir. Ancak bu durumda adayların işbirliği içinde çalışma için gerekli sosyal ve bilişsel becerilerin (Bkz: Hesse, Care, Buder, Sassenberg, & Griffin, 2015) göz önüne alınması ve sürecin söylemsel ve süreç yaklaşımı (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco 2014) benimsenerek analiz edilmesi ihtiyacının doğduğu gözlemlenmiştir. Bu durumun araştırmanın problem durumuna hizmet edebileceği düşünülmediğinden diğer görüşmeler için belirlenen adaylardan problemleri bireysel çözmeleri istenmiştir. Araştırma verilerinin toplanılması sırasında da adayların verilen görevleri bireysel çözmelerine karar verilmiştir.

3.3. Araştırmanın Katılımcıları

Araştırmanın katılımcıları, amaçsal durum örneklemelerinden kolay ulaşılabilir ve ölçüt durum örnekleme yöntemlerinin birlikte kullanımı ile belirlenmiştir. Kolay ulaşılabilir örnekleme, araştırmacılara zaman ve çaba tasarrufu açısından avantaj sağlar. Ölçüt örnekleme yönteminde ise önceden belirlenmiş ölçütleri karşılayan durumlar seçildiğinden, bu seçim verilerin zenginleşmesine fayda sağlar (Patton, 2002). Dolayısıyla araştırmanın sağlıklı bir şekilde yürütülebilmesi için bu ölçütlerin seçilmesi uygun görülmüştür.

Araştırma verileri, araştırmacı ve danışmanının görev yaptığı bir devlet üniversitesinin Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği programının yedinci yarıyılında açılan seçmeli bir ders kapsamında toplanmıştır. Bölümde, bu seçmeli dersin alternatifi olacak şekilde başka bir seçmeli ders açılmadığından dersi kredisi yeterli olan tüm öğretmen adayları (son sınıf öğrencileri) ve ayrıca atık yılında olan iki öğretmen adayı olmak üzere toplan 19 kişi seçmiştir. Bu seçmeli dersin alternatifinin olmaması ilgili ana bilim dalınca programdaki ders ve öğretim üyesi sayısı dikkate alınarak alınmış bir karar olup araştırma yapılacak olmasından bağımsızdır. Bununla birlikte bu durumun sınıf mevcudunun kalabalık olması sebebiyle araştırmanın aleyhine ve ancak akademik başarısı yüksek öğretmen adaylarının da dersi seçmiş olması bakımından katılımcıların belirlenmesinde araştırmanın lehine sonuçlar doğurduğu söylenebilir.

Söz konusu seçmeli derse kayıt yaptıran öğretmen adaylarının akademik başarılarına göre sıralı bir listesi oluşturulmuştur. Diğer taraftan önceki dönemlerde yer alan ve çalışma bağlamıyla ilişkili Soyut Matematik ve Cebire Giriş derslerini başarı ile tamamlayıp tamamlamadıkları ve ilgili dönemde Sayılar Teorisi dersini alıp almadıkları not edilmiştir. Derslerin başlamasıyla öğretmen adaylarına ilk haftaki derste, dönem boyunca dersin nasıl yürütüleceği ve yapılacak araştırma ile ilgili kısaca bilgi verilmiştir. Belirlenecek olan katılımcılarla ders dışında yapılan bireysel görüşmelerin yalnızca araştırmaya katkı sağlayacağının altı çizilmiş, hem dersin yürütülmesi hem de dönem sonu değerlendirmelerinde tüm öğretmen adaylarının eşit koşullarda olacağı belirtilmiştir. Daha sonra her bir öğretmen adayından araştırmaya katılımcı olmayı isteyip istememe durumlarını nedenleriyle açıklayarak yazmaları ve ayrıca fakültede veya fakülte dışında takip ettikleri dersler kapsamında haftalık programları istenmiştir. İkinci hafta ise hem öğretmen adaylarını problemlere ısındırma hem de katılımcı seçme konusunda yardımcı olması amacıyla Sayılar Teorisi bağlamında orta zorlukta nitelenebilecek iki problem verilerek adaylardan çözmeleri istenmiştir. Bu süreç sonunda sırasıyla;

- ✓ Öğretmen adaylarının çalışmaya katılma konusundaki gönüllülükleri ve haftalık programları,
- ✓ Genel akademik ortalamaları ve problemleri çözebilmek için alınması gerekli dersler,
- ✓ İkinci hafta verilen görevleri yerine getirme için gözlenen motivasyonları ve ders sonunda teslim ettikleri belgelere göstermiş oldukları özen,
- ✓ Öğretmen adaylarına dair geçmiş yıllardan edinilen gözlemlere dayanarak görüşmelere aksatmadan katılma konusunda sorumluluğa ve iyi iletişim becerisine sahip olma,

ölçütleri dikkate alınarak beşi kadın ikisi erkek olmak üzere yedi öğretmen adayı katılımcı olarak belirlenmiştir. Her iki erkek öğretmen adayı da ilerleyen haftalarda çözümlerine gösterdikleri özeni azalttıkları için çalışma dışında bırakılmıştır. Geriye kalan kadın öğretmen adaylarından biri pilot katılımcı diğer dördü ise esas katılımcı olarak belirlenmiştir. Pilot katılımcı ile oturumlar sonrası ilk görüşmeler yapılmıştır. Belirlenen dört öğretmen adayı sınıfındaki akademik başarısı en yüksek ilk beş öğrenci arasında yer almaktadır. Ancak katılımcıların yer aldığı sınıfın; çalışmanın yürütüldüğü matematik öğretmenliği lisans programının geçmiş yıllarına göre daha düşük akademik başarıya sahip olduğunu, hem genel akademik ortalamalarına hem de söz konusu programın öğretim üyelerinin görüşlerine dayanarak söylemek mümkünüdür. Aşağıda her bir katılımcıya ilişkin kısa bilgiler yer almaktadır.

3.3.1. Öğretmen Adayı 1

Katılımcı olarak belirlenen ve ÖA1 ile kodlanan öğretmen adayı, Anadolu Öğretmen Lisesi mezunudur. Matematik dersine olan ilgi, yetenek ve başarısının öğrenim hayatı boyunca hep yüksek olduğunu bununla birlikte iş olanaklarını da hesaba katarak matematik öğretmenliği programını tercih ettiğini ve bu programda okuyor olmaktan memnuniyet duyduğunu belirtmiştir. Lisans programına başladığında matematik alan derslerinin matematiksel tanımlara odaklı işlendiğinden beklediği gibi olmadığını ancak bu türden derslerin matematiksel düşüncesini geliştirdiğini fark ederek bu programda okuyor olmaktan memnun olduğunu belirtmiştir.

ÖA1, lisans programında bulunan Geometri derslerinde zorlandığını, kendisini en başarılı bulduğu dersin ise Topoloji dersi olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte Sayılar Teorisi dersini, matematik için temel kavram olan sayıların özellikleri ile ilgili olduğundan lisans programındaki en gerekli derslerden biri olarak gördüğünü ifade etmiştir. ÖA1 ayrıca matematiksel kavramların tanımlarını ve tanımlar arasındaki ilişkiyi ve teoremlerin ispatını incelemekten ziyade problem çözmekten hoşlandığını ve bu konuda kendini başarılı bulduğunu dile getirmiştir.

3.3.2. Öğretmen Adayı 2

Katılımcı olarak belirlenen ve ÖA2 ile kodlanan öğretmen adayı, Anadolu Öğretmen Lisesi mezunudur. Matematik dersine olan ilgisinin ve başarısının öğrenim hayatı boyunca yüksek olduğunu belirten ÖA2, matematik öğretmeni olmayı küçüklüğünden beri istediğini belirtmiştir. Ancak matematik öğretmenliği lisans programına başladığında derslerin beklediği gibi olmadığını ve bu programda öğrenim görüyor olmaktan memnun kalmadığını söylemiştir. Bunun nedenini, lisede problem çözmekten hoşlandığını ancak lisans programındaki alan derslerinde matematiksel tanım ve teoremlere odaklanmaları olarak açıklamıştır. Daha sonra ise derslerin içeriğini daha iyi anlamaya başladığını ve bu ders içeriklerinin kendisinin matematiksel düşünmesini geliştirdiğini fark ederek programı sevmeye başladığını belirtmiştir.

ÖA2, lisans programında bulunan Cebir derslerine karşı ilgisinin diğer derslere göre daha fazla olduğunu ve Analiz derslerinde zorlandığını ancak bununla birlikte tüm derslerde kendisini başarılı bulduğunu bildirmiştir. Sayılar Teorisi dersinin matematiksel düşünmesine katkıda bulunduğunu ve bu dersteki ilgi ve başarısını da yüksek bulduğunu eklemiştir. Problem çözmekten hoşlandığını ve kendisini problem çözmede başarılı bulduğunu belirten ÖA2, bununla birlikte matematiksel kavramların tanımlarını ve tanımlar arasındaki ilişkiyi ve teoremlerin ispatını incelemekten hoşlandığını aksi halde problemleri doğru bir şekilde çözemeyeceğini düşündüğünü ifade etmiştir.

3.3.3. Öğretmen Adayı 3

Katılımcı olarak belirlenen ve ÖA3 ile kodlanan öğretmen adayı, Anadolu Öğretmen Lisesi mezunudur. İlk ve ortaokulda matematiğe olan ilgi ve başarısını normal, lisede ise yüksek olarak niteleyen ÖA3, lisedeki matematik öğretmenini sevdiğini ve onun gibi bir öğretmen olmak istemesinin matematik öğretmenliği programını tercih etmesinde etkili olduğunu ve bu programda okuyor olmaktan memnun olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte lisans programındaki matematik derslerinin lisedekinden farklı oluşundan dolayı birinci sınıfta adapte olmakta zorlandığını eklemiştir.

Lisans programında bulunan ve Soyut Cebir ve Topoloji gibi bazı derslerin öğretmenlik mesleğini icra edeceği zamanlarda öğrencilerine kazandırmaya çalışacağı kavramlarla doğrudan ilişkili olmasa da tüm derslerin kendisinin matematiksel olarak ufkunu açtığını ve derslerden zevk aldığını belirtmiştir. Cebir, Topoloji ve Sayılar Teorisi derslerinde hem zorlandığını hem de bu derslerde kendisini başarılı bulduğunu söyleyen ÖA3, Sayılar Teorisi dersinin matematiğin temel derslerinden biri olarak gördüğünü dile getirmiştir. Problem çözmekten hoşlandığını, kendisini bu konuda iddialı görmese de başarılı bulduğunu bununla birlikte daha zorlayıcı olsa da matematiksel kavramlarla ilgili tanım, teorem ve ispatları incelemekten de hoşlandığını ifade etmiştir.

3.3.4. Öğretmen Adayı 4

Katılımcı olarak belirlenen ve ÖA4 ile kodlanan öğretmen adayı, Anadolu Öğretmen Lisesi mezunudur. İlköğretim yıllarında matematik dersinin en sevdiği ve en başarılı olduğu ders olduğunu belirten ÖA4, ortaöğretim yıllarında bu derste ilköğretimdeki kadar üst düzey bir başarı sergilemediğini ve aslında matematik öğretmenliği programının lisans hedeflerinden biri olmadığını belirtmiştir. Ancak çok istekli girmediği bu bölümde ikinci sınıftan itibaren matematiğe karşı ilgisinin arttığını ve kendisini bu programda mutlu ve başarılı hissettiğini söylemiştir. Lisans programının birinci sınıfında derslerden memnun olmamasını, matematik alan derslerinin sırasıyla tanım, teorem, ispat, uygulama şeklinde işlenmesine ancak kendisinin kavramlara ilişkin özelliklerin verilip daha sonra bu özelliklerle ilgili soru çözülmesi şeklinde işlenmesi gerektiğine inanması şeklinde açıklamıştır. İkinci sınıftan itibaren ise ispatları gerekli görmeye başladığını ve hatta lise düzeyinde dahi bu türden uygulamalara yer verilmesi gerektiğini düşünmeye başladığını ve artık okuduğu bölümden memnun olmaya başladığını belirtmiştir.

Lisans programında bulunan Cebir ve Topoloji derslerinin kendisinin matematiksel düşünme yeteneğini artırdığını düşündüğünü belirten ÖA4, genel olarak Geometri ve Cebir derslerine çalışmaktan zevk aldığını ve bu derslerde başarılı olduğunu bildirmiştir. Sınav kaygısı olmadan matematik çalışmayı çok eğlenceli bulduğunu özellikle Geometri ve Cebir derslerinde konuların birbiriyle olan ilişkisini görmenin ve anlamanın kendisini, sınavlardan yüksek not almaktan daha mutlu ettiğini söylemiştir. Tamsayılar ve özelliklerinin matematikteki her kavram için önemli olduğunu düşündüğünü ancak Sayılar Teorisi dersine lisans programının son yılında olduğundan ve Kamu Personeline Giriş Sınavına hazırlıkları dolayısıyla yeterince zaman ayırmadığını belirtmiştir. Problem çözme konusunda kendisini başarılı bulan ÖA4, matematiksel kavramlar ve kavramlar arasındaki ilişkilere hâkim olduğunu ve dolayısıyla karşılaştığı her problemle ilgili fikir yürütebildiğini bildirmiştir.

3.4. Verilerin Toplanması

Yukarıda "Pilot Çalışma" başlığı altında verilen nedenlerden dolayı araştırma verileri 2017-2018 eğitim-öğretim yılı güz döneminde açılan seçmeli bir ders kapsamında oluşturulan problem çözme oturumları ve araştırmanın katılımcılarıyla ders dışındaki yarı yapılandırılmış sorular kullanılan bireysel görüşmelerle toplanmıştır. Akademik takvime göre söz konusu dönem 18 Eylül'de başlayıp 29 Aralık 2017'de sona erecek şekilde 15 hafta sürmüştür. Bu haftalardan biri vize haftası olup, üniversitenin ilgili yönetmeliği dolayısıyla vize haftalarında ders yapılmamaktadır. Bunu dışında dersi alan tüm öğretmen adaylarıyla derslerin yapıldığı haftalar çok özel mazeretleri dışında devamsızlık yapmalarına izin verilmeyeceği ve belirlenecek iki hafta birlikte derse ara verileceği konusunda anlaşılmıştır. Dersler Pazartesi günleri saat 13:30'da başlamıştır. Bu ders iki kredilik olup arasız toplam süresi yüz dakikadır. Verilerin toplanmasında sınıf içindeki zaman kullanımı yaklaşık olarak aşağıdaki gibi olmuştur:

- ✓ Bir önceki derste çözülen problemin doğru çözümüne dair yaklaşık 10 dakikalık tartışma,
- ✓ Adaylara problemleri çözmeleri için yaklaşık 80 dakikalık süre tanınması,
- ✓ Adaylara problem ve çözümü ile ilgili düşüncelerini yazmaları için yaklaşık 10 dakikalık süre tanınması.

Dönemin ilk haftasında derslerin nasıl yürütüleceğine dair öğretmen adaylarına bilgi verilip yapılacak araştırmaya katılmak isteyip istemediklerine dair görüşleri alındıktan sonra ders bitirilmiştir. İkinci hafta hem öğretmen adaylarını problemlere ısındırma hem de katılımcı seçme konusunda yardımcı olması amacıyla diğer problemlere kıyasla basit bir problem verilerek öğretmen adaylarından çözmeleri ve çözümlerini değerlendirmeleri istenmiştir. Daha sonraki haftalarda ise araştırmada ele alınan problemler ile birlikte her hafta bir problem çözülmüştür. Her hafta zorlayıcı bir problem çözmekten öğretmen adaylarının sıkılmasını, yorulmasını engellemek ve problemlerin zorluğuna dair önyargılarını azaltmak için bazı haftalarda, çalışma kapsamında analiz edilmeyen, daha kolay problemler çözülmüştür. Bu problemlere dair örnekler "Ekler" bölümünde verilmiştir. Problem çözme oturumlarından sonra ise her bir katılımcı ile sınıf dışında yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler aşağıdaki şekilde yürütülmüştür:

- ✓ Yaklaşık 20 dakikalık bir süre içerisinde öğretmen adayının o haftaki probleme dair muhakeme sürecini problem çözme oturumundan sonra teslim ettiği yazılı dokümanlar üzerinden anlatması ve yaşadıkları zorluklara dair görüşlerinin alınması,
- ✓ Öğretmen adayına o haftaki problemle ilgili örnek bir çözümün verilmesi ve çözümü anlaması için yaklaşık 25 dakikalık bir sürenin tanınması,
- ✓ Yaklaşık 20 dakikalık bir süre içerisinde öğretmen adayının verilen problem çözümünü, kendi çözümü ile değerlendirmesini yapması.

3.5. Veri Toplama Araçları

Veriler, zorlayıcı ve öğretmen adayları için yüksek bilişsel istem gerektirdiği düşünülen ulusal veya uluslararası lise matematik olimpiyat problemleri arasından seçilen problemler kullanılarak toplanılmıştır (Andreescu, Andrica, & Feng, 2007; Gürlü, 2012; Özdemir, 2016). Olimpiyat problemlerinin, genel olarak çoklu bilgi ve becerinin bir arada kullanılmasını (Burton, 2007) ve standart olmayan düşünme yollarını izlemeyi (Freiman & Sriraman, 2007; Losada & Rejali, 2015) gerektirdiği bilinmektedir. Bu problemler arasından öncelikle bir havuz oluşturulmuştur. Bu problem havuzu oluşturulurken öncelikle problemleri çözebilmek için gerekli matematiksel kavramlar dikkate alınmıştır. Bu kavramlar küme, bağıntı, fonksiyon gibi ortaöğretim matematik öğretmenliği lisans programının ilk iki yarıyılında yer alan Soyut Matematik dersi kapsamında öğretmen adaylarına kazandırılması beklenen temel matematiksel kavramlar ile araştırmanın yapıldığı yarıyılda yer alan Sayılar Teorisi dersi kapsamında yer alan tamsayılar ve özellikleri, bölünebilme, asal sayılar ve kongrüens ile sınırlı tutulmuştur. Bununla birlikte problemlerin katılımcılar için zorluk oluşturması istendiğinden, her bir problem bu kavramların farklı özelliklerine odaklanmayı gerektirecek şekilde çeşitlilik sağlanmaya çalışılmıştır. Aynı sebeple, problemlerin benzer stratejiler kullanılarak çözülebilir olmamasına dikkat edilmiştir. Yani problemlerin, adaylar için gerçek bir problem durumu yaratacak özelliklerde olacak şekilde seçilmesine özen gösterilmiştir. Seçimlerin yapılmasında Cebir alanında doktorasını yapmış ve ilgili anabilim dalında Sayılar Teorisi dersini yürüten öğretim üyesinin görüşleri alınmış ve problem havuzu kesinleştirilmiştir. Çalışma kapsamında ele alınan problemler ve özellikleri Tablo 2'de verilmiştir. Ayrıca bu problemlere dair örnek çözümler "Ekler" bölümündedir.

Tablo 2

Veri Toplamada Kullanılan Problemler

Problemler	Açıklama
P-1: $\sqrt[3]{n}$ 'den küçük tüm pozitif tam sayılara bölünebilen en büyük n tamsayısını bulunuz.	Bu problemde ardışık tamsayıların en küçük ortak katını alma fikri ile bir iddiada bulunulması ve daha sonra bu iddianın istenilen koşulları sağlayan en büyük n tamsayısını belirttiği ispatlanmalıdır. Ardışık tamsayıların en küçük ortak katını alma fikri ile bir iddiada bulunmanın öğretmen adaylarını zorlamayacağı, ancak bu iddianın ispatı için adayların biraz daha fazla çaba göstermeleri gerektiği öngörülmüştür.
P-2: $n(173+n)$ ifadesini tam kare yapan n pozitif tamsayılarını bulunuz.	İstenilen şartı sağlayan bir tamsayı bulunmaktadır. Bu tamsayının bulunabilmesi için sayıların temsil biçimleri arasında geçiş yapmak ve iki tamsayının karesinin çarpımının bir tamsayının karesine eşit olacağı fikrinden yola çıkmak gerekmektedir. Bu yolla yanıta varıldığında, ortaya konulan çözüm aynı zamanda cebirsel bir ispat niteliğinde olacaktır. Öğretmen adaylarının verilen problem ifadesinden yola çıkarak iki tamsayının karesinin çarpımının bir tamsayının karesine eşit olacağı fikrini ortaya koymada çaba göstermeleri gerektiği öngörülmüştür.
P-3: Birçok pozitif tamsayı iki veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak ifade edilebilir. Örneğin, 24=7+8+9 ve 51=25+26. İki veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak ifade edilemeyen pozitif tamsayılara ilginç sayı denir. Tüm ilginç sayıları bulunuz.	Bu problemde özel sayı örnekleri ile deneme yanılma stratejisi izlenip induktif bir çıkarımda bulunarak veya genel sayı temsillerinden yola çıkılarak genellemelere varılıp daha sonra ortaya konulan iddia ispatlanmalıdır. İki veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı şeklinde ifade edilemeyen pozitif tamsayılarla ilgili iddiada bulunmanın zorlayıcı olmadığı ancak iddianın ispatlanması sürecinde öğretmen adaylarının biraz daha fazla çaba göstermeleri gerektiği öngörülmüştür.
P-4: $S(m,n)=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+...+\frac{1}{m+n}$ şeklinde tanımlanan toplamın sonucu tamsayı olacak şekilde pozitif m ve n tamsayılarını var mıdır?	Bu problemde özel sayı örnekleri ile deneme yanılma yapılarak istenilen şartı sağlaya m ve n değerlerinin bulunamayacağına dair bir genelleme yapılıp daha sonra ortaya konulan iddia ispatlanmalıdır. Öğretmen adaylarının istenilen şartları sağlayan m ve n pozitif tamsayılarının bulunamayacağını tahmin etmelerinin zorlayıcı olmadığı ancak ispatlama sürecinde biraz daha fazla çaba göstermeleri gerektiği öngörülmüştür.
P-5: a, b ve c , $a<b<c$ şartını sağlayan pozitif tamsayılar olsun. Negatif olmayan tüm tamsayılar $a^2+b^2-c^2$ şeklinde ifade edilebilir mi?	Bu problemde özel sayı örnekleri ile deneme yanılma yapıp negatif olmayan tüm tamsayıların istenilen biçimde ifade edilebildiğine dair bir genelleme yapılıp daha sonra ortaya konulan iddia ispatlanabilir veya sayı temsilleri ile çalışılarak genellemeye varılabilir ki bu durumda ortaya konulan çözüm aynı zamanda cebirsel bir ispat niteliğinde olacaktır. Öğretmen adaylarının negatif olmayan her tamsayının istenilen şartlarda yazılabileceğini gözlemlemesinin zorlayıcı olmadığı ancak ispatlama sürecinde biraz daha fazla çaba göstermeleri gerektiği öngörülmüştür.
P-6: *d* sayısı, 2, 5 ve 13'ten farklı olan herhangi bir pozitif tam sayı olsun ve $\{2,5,13,d\}$ kümesi verilsin. $a.b-1$, bir tamsayısının karesi olmayacak şekilde $\{2,5,13,d\}$ kümesinden birbirinden farklı *a* ve *b* tamsayıları her zaman seçilebilir mi?	Bu problemde $\{2,5,13,d\}$ kümesinden *2,5,13* tamsayıları ikişerli olarak ele alındığında $a.b-1$ 'in tam kare olduğu gözlemlendikten sonra 2 ve d, 5 ve d, 13 ve d sayı ikilileri için $a.b-1$ ifadesi örneklerle veya tamsayıların özelliklerine göre incelenerek yanıt ispatlanabilir. Herhangi bir d tamsayısı için istenilen şartların her zaman sağlandığının gözlenmesinin öğretmen adayları için zorlayıcı olmayacağı ancak bu gözlemlerinin sonuçlarını ispatlamak için biraz daha fazla çaba harcamaları gerektiği öngörülmüştür.

Problem çözme oturumlarından sonra öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış sorular içeren bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler aşağıdaki sorular çerçevesinde yürütülmüştür:

- Çözüm sürecinde neler yaptığınızı açıklayınız.
- Çözümünüzün doğruluğunu tartışınız.
- Çözümünüzün sizce tam ya da eksik yönleri nelerdir?
- Çözüm sürecinde yaşadığınız sıkıntılar oldu mu? Nelerdir?
- Verilen örnek çözümü inceleyip anlatınız.
- Kendi çözümünüzü, size verilen örnek çözüm ile karşılaştırınız.

Sonuç olarak; problemlere ait adayların karalamalarının ve nihai çözümlerinin bulunduğu yazılı belgeler, sınıf içindeki grup tartışmalarına dair kayıtlar, öğretmen adaylarının problemlere, problemlerin çözümlerine ve kendi çözümlerine dair oluşturdukları yazılı belgeler ve görüşme kayıtları ve araştırmacının gözlem notları veri kaynaklarını oluşturmuştur.

3.6. Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik, araştırmanın inanırlılığı ve aktarılabilirliği ile ilişkilidir. Araştırmanın inanırlılığı bulguların gerçeğe uyup uymadığıyla ilişkilidir. Nitel bir araştırmada nesnel olarak gerçek veya doğru olanı tam anlamıyla ortaya koymanın mümkün olmadığı bilinmekle birlikte inanırlılığı artırmak için çeşitli stratejiler kullanılır. Bu stratejiler, çeşitleme (veri, yöntem ve araştırmacı), katılımcı teyidi, veri toplama süreçlerine uygun ve yeterli katılım, araştırmacının duruşu ve uzman incelemesi olarak sıralanabilir (Merriam, 2009). Bu kapsamda her bir strateji için araştırmanın yürütülmesi ve raporlaştırılması sürecinde izlenenler şöyle olmuştur:

Çeşitleme (veri, yöntem ve araştırmacı): Araştırmada katılımcılara problem çözme sürecindeki her bir işlemi atlamadan yazmaları istenmiş ve karalama kağıdı veya silgi kullanımları engellenmiştir. Çözüm sürecinden sonra çözümlerine dair değerlendirmelerini ifade etmeleri istenmiştir. Ayrıca problem çözme oturumları süresince araştırmacı, gözlem notları almıştır. Problem çözme oturumlarından sonra gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış sorular içeren bireysel görüşmelerde öncelikle çözüm sürecinde ne yaptıklarını yazılı belgeleri üzerinden tekrar anlatmaları istenmiş daha sonra ise probleme dair örnek bir çözüm verilerek kendi çözüm süreçlerini karşılaştırmalı ve eleştirel bir şekilde değerlendirmeleri istenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarından yaşadığı zorluklara dair bireysel görüşleri alınmıştır. Dolayısıyla çeşitleme stratejisi kapsamında çoklu veri kaynaklarından yararlanılarak inanırlılığın artırılmasına çalışılmıştır.

Katılımcı teyidi: Bireysel görüşmeler sırasında katılımcılardan yazılı dokümanlarda yer alan çözümlerini yeniden anlatmalarının istenmesi katılımcı teyidi olarak iş görmüştür ve gerekli durumlarda araştırmacı daha açık söylemlerde bulunmalarını sağlayacak sorular yöneltmiştir.

Veri toplama süreçlerine uygun ve yeterli katılım: Seçmeli bir ders kapsamında verilerin toplanıldığı çalışmada, katılımcılarla bir eğitim-öğretim dönemi boyunca etkileşimde bulunulmuştur. Bununla birlikte çalışmanın raporlaştırılması için dört katılımcının verileri kullanılmış ancak çalışma sırasında daha fazla katılımcıdan veri toplanılmıştır. Bu sayı katılımcılardan araştırmanın sonucuna yeni katkı sağlamadığı yani veri doygunluğu dikkate alınarak belirlenmiştir.

Araştırmacının duruşu: Araştırmacı araştırmayla ilgili kişisel ön yargı ve kabullerini, eğilimlerini araştırma süreci boyunca eleştirel bir biçimde düşünmeye çalışmış ve araştırmanın inanırlığını artıracak şekilde değiştirme gayreti içerisinde olmuştur. Örneğin araştırmacı, problemlerin bağlamının Sayılar Teorisi kapsamında temel konular içerdiğinden veri toplama sürecinin başında katılımcıların matematiksel kavramlara dayalı zorluklar yaşamış olmalarından ziyade dikkatsizliklerine dayalı basit işlem hataları yaptıklarını düşünme eğiliminde olduğunu fark etmiş ve daha sonra öğretmen adaylarının yaşadığı zorlukların kaynağını daha iyi belirleyebilmek adına ön yargılarını bir kenara bırakarak daha nesnel bir yaklaşım sergilemeye çalışmıştır.

Uzman incelemesi: Araştırma bir tez olduğu için bir danışman gözetiminde yürütülmüştür.

Araştırmanın aktarılabilirliliği çalışma sonuçlarının farklı durumlara ne kadar aktarılabileceği başka bir deyişle sonuçların genellenebilir olması ile ilgilidir (Merriam, 2009). Nitel araştırmalarda istatistiksel anlamda genellenebilirlik mümkün olmasa da benzer durum ve gruplara uyarlanabilecek anlamlı sonuçlar sunulabilir. Bunun sağlanması yani aktarılabilirlik olasılığının artırılması için zengin tanımlama ve örneklem seçimi stratejileri kullanılır. Bu kapsamda her bir strateji için araştırmanın yürütülmesi ve raporlaştırılması sürecinde izlenenler şöyle olmuştur:

Zengin tanımlama: Katılımcılar ve araştırmanın yürütüldüğü ortamlarla ilgili detaylı bilgiler verilmeye çalışılmıştır. Ayrıca katılımcılara ait dokümanlardan ve görüşmelerden alıntılar yapılarak bulgular destelenmeye çalışılmıştır.

Örneklem seçimi: Araştırmada amaçlı örnekleme türlerinden ölçüt durum örnekleme kullanılmıştır.

Araştırmanın güvenirliliği veya tutarlılığı elde edilen bulguların yeniden üretilip üretilemeyeceği ile ilgilidir. İnsan düşünce ve davranışlarının durağan olamaması sosyal bilimlerde güvenirliliğin sağlanmasını zorlaştırmaktadır. Nitel çalışmalarda özellikle ulaşılan sonuçların toplanan verilerle ne derece tutarlı olduğu üzerinde durulduğu söylenebilir. Bunu sağlamak için üçgenleme, uzman incelemesi, araştırmacının konumu ve denetleme tekniği stratejilerinin kullanılması önerilmektedir (Merriam, 2009). Bu stratejilerden ilk üçü için izlenilenler geçerlilik kapsamında yukarıda açıklanmıştır. Denetleme tekniği için verilerin nasıl toplandığı ve analiz edildiği araştırmanın ilgili kısmında detaylı bir şekilde betimlenmeye çalışılmıştır.

3.7. Araştırmacının Rolü ve Etik

Nitel araştırmalarda, araştırmacılar katılımcılarla genellikle yoğun bir deneyim içerisindedir ve dolayısıyla stratejik, etik ve kişisel konular baş gösterir (Creswell, 2007). Bir ders kapsamında problem çözme oturumlarının yapılması ve ardından belirlenen katılımcılarla yarı yapılandırılmış sorular içeren bireysel görüşmelerin yürütülmesi şeklinde verilerin toplandığı bu araştırmada araştırmacının rolünü belirlemesi kritik bir husus olmuştur.

Araştırmacı öncelikle bu dersi tüm öğretmen adaylarına katkı sağlayacak şekilde tasarlamaya özen göstermiştir. Uygulama süresince ele alınan farklı problemlerin adayların hem sayılarla ilgili problem çeşitlerine dair hem de problem çözme ve muhakemede bulunmaya yönelik bilgi ve becerilerine katkıda bulunacağına inanılmıştır. Dönemin ilk haftasında henüz katılımcılar seçilmeden ve gönüllü olup olmayacaklarına dair görüşleri alınmadan, katılımcı grupla ders dışında yapılan bireysel görüşmelerin yalnızca araştırmaya katkı sağlayacağının altı çizilmiş, hem dersin yürütülmesi hem de dönem sonu değerlendirmelerinde tüm adayların eşit koşullarda olacağının güvencesi verilmiştir. Araştırmacı ve danışmanının, dersi seçen öğretmen adayı grubuyla daha önceki yıllarda çeşitli dersleri birlikte yürütmüş olmalarının, bu güven ortamının sağlanmasına olumlu katkıda bulunduğu söylenebilir. Derslere bir önceki hafta üzerinde çalışılan problemin çözümü verilerek başlanmıştır. Çözümler öğretmen adaylarına detaylı bir şekilde sunulmakla birlikte bu sırada öğretmen adaylarına problemin çözümü dışında örneğin seçilen ispat metodunun ilgili problem durumu için özellikle neden uygun olduğu gibi muhakeme sürecini etkileyen etmenlere yönelik genel bilgiler vermekten kaçınılmıştır. Problem çözme oturumları süresince ise katılımcılarla birlikte tüm öğretmen adaylarının problem durumunu metinsel olarak doğru anlamalarını sağlama dışında herhangi bir ipucu veya dönüt verilmemiştir. Sınıf dışındaki görüşmeler de araştırmacı tarafından yapılmış ve kayıt altına alınmıştır. Bu süreçte veri kaynaklarının anlaşılabilir olması adına, adaylara ifadelerini açıcı sorular yöneltmiştir.

3.8. Verilerin Analizi

Elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz tercih edilmiştir (Patton, 2002). Araştırmanın birinci problemine ait verileri analiz etmek için öncelikle öğretmen adaylarının her bir matematiksel görevi yerine getirmek için geçirdiği muhakeme süreci (düşünce dizisi) "muhakeme eylemi" denilen anlamlı alt süreçlere (alt dizilere) ayrılmış ve takip edilmesini kıolaylaştırmak için kullanılan strateji baz alınarak isimlendirilmiştir. Bu süreçlerde öğretmen adaylarının ne amaçla muhakemede bulunduğu, hangi strateji ve kavramları kullandıkları belirlenerek bu sırada yaşadıkları zorluklar tespit edilmiştir. Bu zorluklar Kavramsal Çerçeve bölümünde ele alınan muhakeme sürecini etkileyen etmenler ışığında ele alınmış ve zorluğun hangi etmenden kaynaklandığına dair betimleme yapılmıştır.

Diğer taraftan, muhakeme sürecini etkileyen etmenlerin etkileşim halinde olduğu göz önünde bulundurulduğunda zorlukların nedenini ortaya koymanın güç olduğu söylenebilir. Örneğin "İki tek tamsayının toplamı her zaman çift bir tamsayı mıdır?" problemini yanıtlamaya çalışan bir öğrenci düşünelim. Bir öğrenci, aşağıdaki gibi bir çözüme sahip olsun:

"m ve n iki tek tamsayı olsun.

O zaman $m = 2t + 1$ ve $n = 2k + 1$ olacak şekilde t, k tamsayıları vardır:

$m + n = (2t + 1) + (2k + 1) = 2(t + k) + 2 = 2(t + k + 1)$

$t + k + 1$ bir tamsayı olduğundan ve " a tamsayısı çift ise o zaman $a = 2x$ olacak şekilde bir x tamsayısı var" olduğundan iki tek tamsayının toplamı her zaman çifttir."

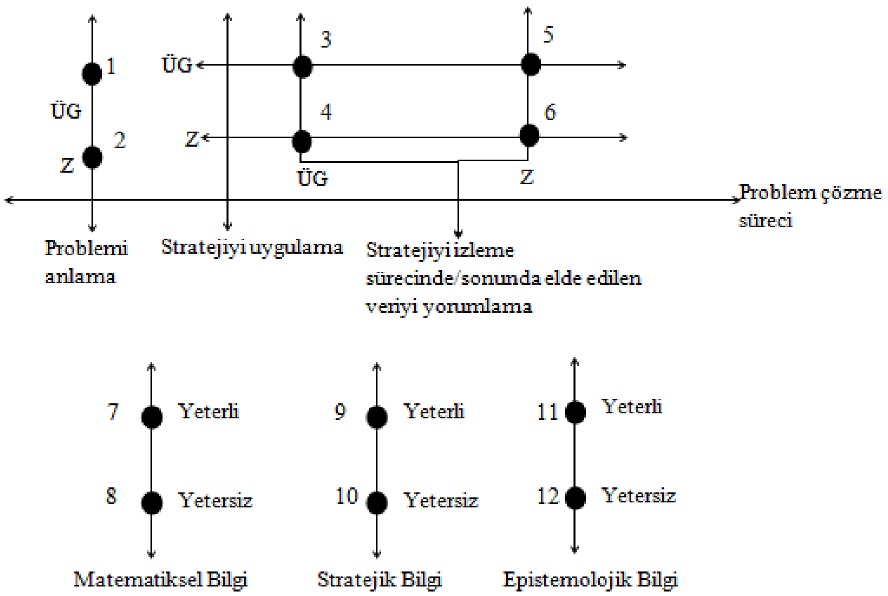
Şekil 1. Örnek bir çözüm

Söz konusu öğrencinin ayrıca çözümünün doğru olduğundan emin olduğunu bildirdiğini düşünelim. Öğrencinin, bu çözümü incelendiğinde sırasıyla “temsillerle doğrudan işlem yapılabilir”; “ n bir tek tamsayı ise o zaman $n = 2t + 1$ olacak şekilde bir t tamsayısı vardır”; “iki tek tamsayı birbirine eşit veya birbirinden farklı olabilir o zaman ikinci tamsayıyı temsil ederken ilkinden yani t’den farklı bir temsil örneğin k kullanmalıyım”, “temsilleri toplarken işe yarar bir sonuç elde etmem için toplama işleminin dağılma, birleşme gibi özelliklerini kullanmalıyım”, “ $t + k + 1$ ifadesi bir a tamsayısı ile temsil edilebilir”; “ m bir çift tamsayı ise o zaman $m = 2a$ olacak şekilde bir a tamsayısı vardır”; “genel tamsayı temsilleri ile çalıştığım için yaptığım çözüm genellenebilir ve doğrudan ispattır” şeklindeki bilgi ve düşüncelere sahip olması muhtemeldir. Dolayısıyla bu çözümü ortaya koyabilmek için gerekli matematiksel kavramlarla ilgili gerekli bilgiye sahip olduğu, kavramlarla ilgili temsil biçimlerini bildiği ve stratejik olarak kullanabildiği, problem çözme stratejileri ve ispat metotlarını göz önünde bulundurarak uygun olanı seçtiği ve ayrıca bu süreçte duyuşsal olarak kendini problemi çözecek şekilde düzenlediği söylenebilir. Dolayısıyla doğru ve özellikle yanlış bir çözüm ortaya koyan birinin çözümündeki zorlukları belirlemek ve matematiksel bilgi, stratejik bilgi gibi bir başlık altında toplamak kolay olmasa da öğrencilerin çözümleri ve söylemleri doğrultusunda baskın olarak öne çıkan durum dikkate alınmıştır. Ayrıca bulgular sunulurken öğretme adaylarının söylemleri ile ilgili çözümlerindeki görüntü kaydı bir arada verilmiştir. Böylece sözlü veya yazılı ifade becerilerinden kaynaklanan sıkıntıların önüne geçilmeye ve ayrıca yorumlar desteklenmeye çalışılmıştır.

Bununla birlikte, her bir problemle ilgili öğretmen adaylarının muhakeme eylemleri ve bu süreçte yaşadıkları zorluklar belirlendikten sonra; bu zorluklar problem çözme sürecinin problemi anlama, bir strateji seçme ve uygulama ve bu sırada elde edilen veriyi değerlendirme süreçleri kapsamında değerlendirilerek bir görsel şema oluşturulmuştur. Bu şema ile okuyucuya bulgular ile ilgili özet ve bütüncül bir şekilde bulgular sunulmaya çalışılmıştır. Bu görsel şema ve bu şemadaki her bir konumun ne anlam ifade ettiği Tablo 3’teki gibidir:

Tablo 3

Görsel Şema ve Bu Şemaya Ait Göstergeler

Göstergeler	ÜG: Üstesinden gelme Z: Zorlanma 1:Problemi anlama 2:Problemi anlamada zorluk görülmesi 3:Seçilen stratejiyi doğru izleme ve süreç esnasında/sonunda elde ettiği veriyi doğru yorumlama 4:Seçilen stratejiyi doğru izlemede zorlanma ancak süreç esnasında/sonunda elde ettiği veriyi doğru yorumlama 5:Seçilen stratejiyi doğru izleme ancak süreç esnasında/sonunda elde ettiği veriyi yorumlamada zorlanma 6:Seçilen stratejiyi izlemede ve süreç esnasında/sonunda elde ettiği veriyi yorumlamada zorlanma 7, 8: Sırasıyla matematiksel bilgiye dayalı zorluk yaşanması-yaşanmaması 9, 10: Sırasıyla stratejik bilgiye dayalı zorluk yaşanması-yaşanmaması 11, 12: Sırasıyla epistemolojik bilgiye dayalı zorluk yaşanması-yaşanmaması
Görsel Şema	

Tabloda verilen şemadaki numaralı yerlere öğretmen adaylarının muhakeme eylemleri, örneğin birinci öğretmen adayının birinci muhakeme eylemi "$ÖA_1ME_1$" şeklinde kodlanarak konumlandırılmıştır. Daha sonra ise analiz sırasında yaşanılan zorluklara odaklanıldığı için, zorluğun yaşanmasına neden olan etkenler; 2,8,10,12 göstergelerinden bu muhakeme eylemlerini işaret eden oklar yardımıyla gösterilmiştir. Aşağıdaki tabloda 3,4,5 ve 6 için örnek muhakeme eylemleri verilmiştir. 3 için verilen örnekte; ÖA3 ele aldığı temsillerle üç ardışık tamsayıyı toplamış ve elde etiği sonuca göre 3'ün katı olan tamsayıların ardışık pozitif tamsayıların toplamı olarak yazılabileceğini bildirmiştir. 4 için verilen örnekte; ÖA1 tümevarımla ispat stratejisini P-5 için uygun olmayan bir şekilde izlemiş ancak süreç sonunda bu stratejinin problem için uygun olmadığını ve probleme dair bir veri elde edemediğini bildirmiştir. 5 için verilen örnekte; ÖA3 dört ardışık tamsayıyı doğru şekilde toplamış ancak çıkan sonucu tamsayıların yalnızca teklik ve çiftlik özelliklerine göre yorumladığı için ilgili P-3 için yanlış bir iddiada bulunmuştur. 6 için verilen örnekte; ÖA1 cebirsel işlemleri sırasında çarpanlara ayırma ile ilgili zorluk yaşamış ve aynı zamanda elde ettiği cebirsel ifadeleri yorumlamada güçlük çekmiştir.

Tablo 4

Örnek Muhakeme Eylemleri

Numara	ÖA	Muhakeme eylemi
3	ÖA3	II) $a=n+(n+1)+(n+2)$ olsun Buradan $a=3n+3$ $a=3(n+1)$ dir Buradan 3'ün katı olan pozitif tamsayıların ilginç tamsayı olmadığını söyleriz.
4	ÖA1	Tümevarım uygulayalım: $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $k=0$ için $a^2+b^2=c^2+0$ $k=n$ için doğru olduğunu kabul edelim $a^2+b^2=c^2+n$ $k=n+1$ için gösterelim: $a^2+b^2=c^2+n+1$
5	ÖA3	III) $a=n+(n+1)+(n+2)+(n+3)$ olsun Buradan $a=4n+6$ dır. $a=2(2n+3)$ dır Buradan a nın çift sayı olduğu görülür. Buradan 2 hariç çift pozitif tamsayıların ilginç sayı olmadığını söylemiştik
6	ÖA1	$(a+b)^2-c^2=2(n+ab)$ $(a+b-c)(a+b+c)=2(n+ab)$ $a+b-c=2$ $a+b+c=n+ab$ $2c=2+n+ab$ $c=1+\frac{n+ab}{2}$ (böyle $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ old. sezgisel olarak görülür)

Araştırmanın ikinci problemine ait verileri analiz etmek için ise Nedensel Atıf Teorisi temel alınmıştır. Problem çözme oturumları sonunda öğretmen adaylarından çözümlerini değerlendirmeleri istenmiş ve ayrıca daha sonra problemlerin doğru çözümleri incetilerek bu süreçte neden zorluk yaşadıklarına dair görüşleri alınmıştır. Dolayısıyla bireylerin bir görevde başarılı veya başarısız olmalarına dair verdikleri sebeplerle ya da yaptıkları atıflarla ilgilenen (Kloosterman, 1984) atıf teorisinin, adayların bu yöndeki görüşlerinin analizinde temel alınması uygun bulunmuştur. Bu teori çerçevesinde zorluklara yönelik atıflar Weiner (1972, 2010)'ın konum boyutu altında incelenmiştir. Ancak Kavramsal Çerçeve bölümünde bahsedildiği gibi bir etken birden fazla boyutun özelliğini taşıyabilir (konum, kararlılık, kontrol edilebilirlik). Araştırmanın amacı göz önüne alındığında, karmaşıklığın da önüne geçmek istenerek konum boyutunun ele alınması uygun bulunmuştur. Konum boyutu, kişinin yaşadığı bir duruma dair ortaya koyduğu nedenin bireyin kendisinden mi yoksa kendisi dışındaki etkenlerden mi kaynaklı olduğuyla ilgilidir ve buna dayalı olarak içsel ve dışsal atıflar olarak iki alt boyuta ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının atıfları kodlanmış ve benzer kodlu veriler kategoriler altında toplanmıştır. Daha sonra bu kategorinin içsel mi ve dışsal mı olduğuna karar verilmiş ve son olarak tüm kategoriler içsel ve dışsal boyutları altında toplanmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu araştırmada aşağıdaki iki araştırma problemine yanıt aranmaktadır:

1. Öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede yaşadıkları zorluklar nelerdir?
2. Öğretmen adayları bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede yaşadıkları zorluklara nelere atfetmektedir?

Bu bölümde, bu araştırma problemlerine ait bulgular, araştırma problemleri ile ilişkili olarak iki başlık halinde sunulmuştur.

4.1. Birinci Probleme İlişkin Bulgular

Bu araştırmanın ilk araştırma problemini yanıtlamak için elde edilen bulgular her bir problem ve katılımcı için ayrı ayrı ele alınarak, katılımcıların muhakeme süreçleri kronolojik sıra ile ve yaşadıkları zorluklar betimlenerek açıklanmaya çalışılmıştır. Katılımcıların söylemlerinden ve yazılı dokümanlarından doğrudan alıntılarla birlikte süreç ayrıntılı bir biçimde betimlenmiştir.

4.1.1. Problem-1'e Ait Bulgular

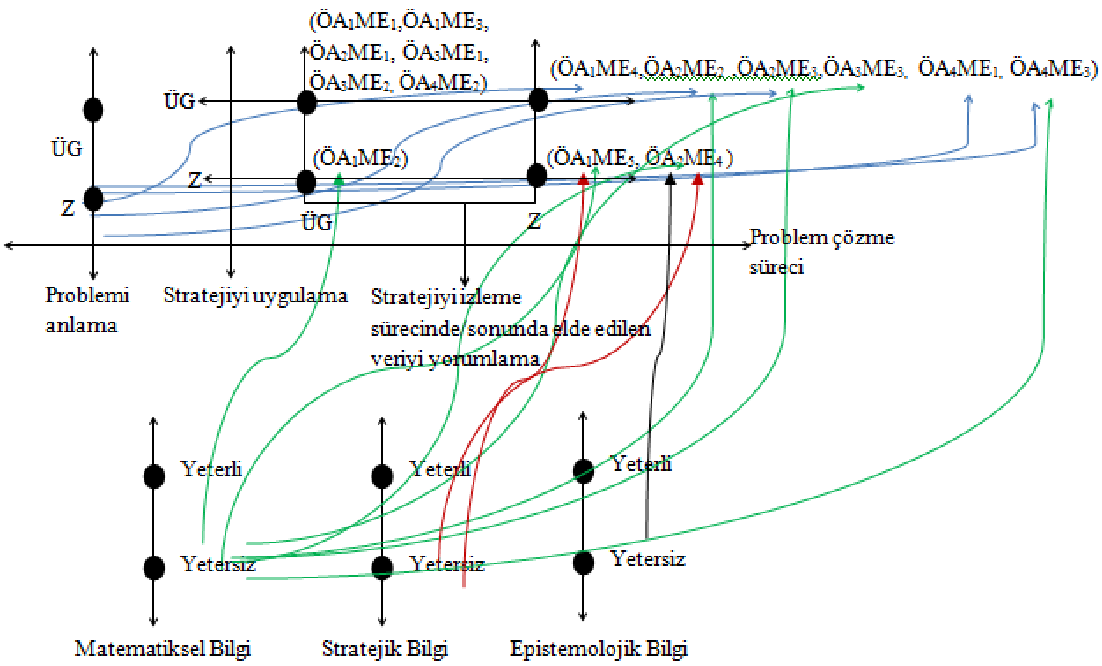
"$\sqrt[3]{n}$ 'den küçük tüm pozitif tamsayılara bölünebilen en büyük n tamsayısını bulunuz." ifadesine sahip P-1'e göre n tamsayısı $\sqrt[3]{n}$ 'den küçük tüm tamsayılara kalansız bölünebildiğinden $a < \sqrt[3]{n}$ olmak üzere n tamsayısı 1'den a 'ya kadar olan ardışık tüm tamsayılara bölünebilmelidir. Buradan ardışık pozitif tamsayıların en küçük ortak katını alma fikri ile bir iddiada bulunulabilir ve daha sonra bu iddianın istenilen koşulları sağlayan en büyük n tamsayısını belirttiği ispatlanabilir. Bu probleme dair örnek bir çözüm “Ekler” bölümünde verilmiştir.

Öğretmen adaylarının P-1 çözüm sürecindeki muhakeme eylemleri ve bu muhakeme eylemleri sürecinde yaşadıkları zorluklar Tablo 5 ve Şekil 2’deki gibidir. Her bir öğretmen adayının muhakeme eylemlerinde çeşitli stratejilere başvurdukları görülmektedir. Süreç sonunda öğretmen adaylarından ÖA1 ve ÖA3 n’nin 420 olacağı yanıtını vermiş ancak bu yanıtlarını gerekçelendirememişlerdir. ÖA2 n’nin sonsuz sayıdaki asal sayıların çarpımı olarak sonsuz büyüklükteki bir tamsayı; ÖA4 ise ardışık pozitif tamsayıların ekoklarının bir katı olarak yine sonsuz büyüklükte bir tamsayı olduğunu iddia etmiştir. Daha sonra ayrıntılı olarak verilecek muhakeme eylemlerinden de görüleceği üzere öğretmen adaylarının stratejik ve kavramsal bilgi bakımından zorluk yaşamadıkları muhakeme eylemleri genellikle problemin çözümüne dair bir veri elde edemedikleri süreçler olmuştur. Diğer muhakeme eylemlerinde öğretmen adaylarının yaşadıkları zorlukların çoğunlukla matematiksel bilgiye dayalı olduğunu ve problemi mantıksal olarak anlamamaktan kaynaklandığını söylemek mümkündür. Öğretmen adayları, bölme kavramı için asal sayılara odaklanırken tamsayıların diğer özelliklerini birbiriyle ilişkilendirmede sıkıntı çekmişlerdir. Dolayısıyla çözüm için gerekli en küçük ortak kat özelliğini doğru yanıtı bulacak veya verdikleri yanıtı gerekçelendirecek şekilde kullanamamışlardır. Bu durum öğretmen adaylarının problem durumunu iyi analiz etmemelerinin bir sonucu olarak da yorumlanabilir. Diğer taraftan bu problem için öncelikle deneme yanılma stratejisini izleyerek 1‘den başlayıp ardışık tamsayıların çarpımlarını inceleyerek bir iddiada bulunmanın kolay olduğu öngörülmekteydi ancak süreçte adayların deneme yanılma stratejisinin avantajlarından yararlanmadıkları görülmüştür. Ayrıca adaylardan ÖA2 tümevarımla iddiasını kanıtlamış olduğunu düşünerek yanıtından emin olduğunu bildirirken, diğer adaylar çözümlerinin kesinliği konusunda şüphelerinin olduğunu dile getirmişlerdir.

Tablo 5

Öğretmen Adaylarının P-1 İçin Muhakeme Eylemleri

Öğretmen Adayı	Muhakeme Eylemi
ÖA1	ÖA_1ME_1: Deneme yanılma stratejisi ÖA_1ME_2: Bölme tanımına dayalı cebirsel strateji ÖA_1ME_3: ATT ve bölme tanımına dayalı cebirsel strateji ÖA_1ME_4: Durum inceleme stratejisi: Tek tamsayıları inceleme ÖA_1ME_5: Durum inceleme stratejisi: Çift tamsayıları inceleme
ÖA2	ÖA_2ME_1: Bölme tanımına dayalı cebirsel strateji ÖA_2ME_2: Bölünebilme ve asal sayı tanımına dayalı çıkarımda bulunma ÖA_2ME_3: Bölünebilme ve asal sayı tanımına dayalı çıkarımda bulunma ÖA_2ME_4: İddiasını tümevarımla ispat
ÖA3	ÖA_3ME_1: Deneme yanılma stratejisi ÖA_3ME_2: Bölünebilme ve asal sayı tanımına dayalı çıkarımda bulunma ÖA_3ME_3: Asal sayılar ve ekok tanımına dayalı cebirsel strateji
ÖA4	ÖA_4ME_1: Durum inceleme stratejisi: Tek tamsayıları inceleme ÖA_4ME_2: Durum inceleme stratejisi: Çift tamsayıları inceleme ÖA_4ME_3: Deneme yanılma stratejisi



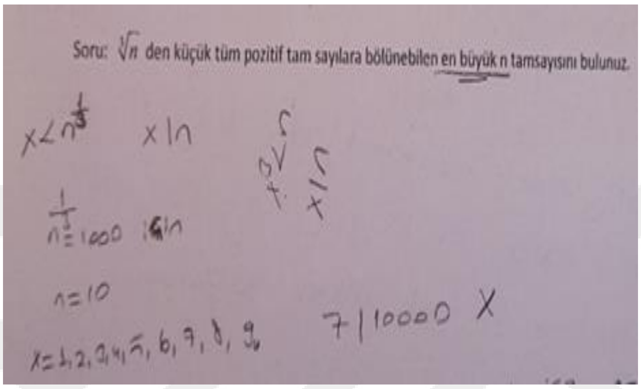
Şekil 2. Öğretmen adaylarının P-1 için muhakeme eylemleri

Öğretmen adaylarının bu probleme dair muhakeme süreçleriyle ilgili ayrıntılı bulgular ise şöyledir:

4.1.1.1. ÖA1'in P-1 için muhakeme süreci

ÖA1 öncelikle özel bir örnek olarak seçtiği 1000 tamsayısını problemde verilen koşullar altında problemi anlamak amacıyla incelemiştir (Şekil 3):

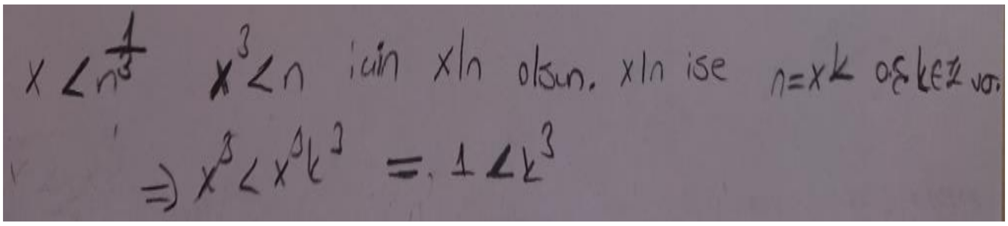
ÖA1: Öyle bir n varmış ve $n^{\frac{1}{3}}$'ten küçükmüş. Ve bu x, bizim n sayısını bölüyormuş. Ben onun için önce dedim ki 1000 sayısını alayım. Buna göre 9'a kadar olan sayılar 1000'i bölmek zorunda. Burada aslında soruyu anlamaya çalıştım ben.



Şekil 3. ÖA1'in P-1için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Söylemlerine göre incelediği örnekle problem durumunu anladığı düşünülen ÖA1, öncelikle bölme tanımına dayalı cebirsel bir strateji ile yanıt aramıştır (Şekil 4):

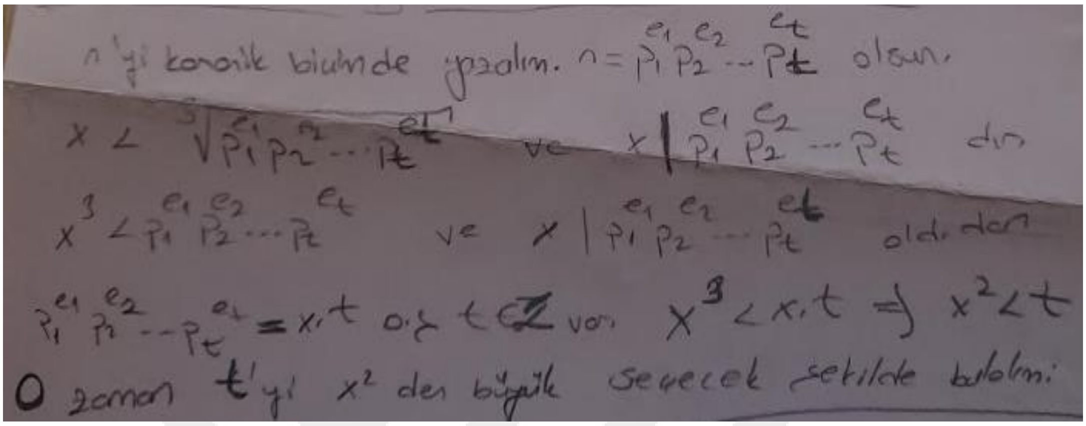
ÖA1: Sonra da dedim ki x böler n ise $n = x.k$ olacak şekilde k var. Buradan nereye ulaşabilirim diye düşündüm.



Şekil 4. ÖA1'in P-1 için bölme tanımına dayalı cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

ÖA1 bölme tanımını temel olarak izlediği cebirsel yolda Şekil 4'te görüldüğü gibi "$x|n$ ise $n = x \cdot k$ olacak şekilde $k \in \square$ var" olduğunu ifade etmiş ancak daha sonra cebirsel işlemleri yaparken "$n = x.k$" yerine "$n = x^3.k^3$" eşitliğini ele almıştır. Bu strateji ile doğrudan yanıta varılamayacağı açık olmakla birlikte, ÖA1'in bu süreçte işlem hatası yaptığı görülmektedir. Daha sonra ele aldığı eşitsizlikte yaptığı sadeleştirme işlemi sonucunda "$1 < k^3$" eşitsizliğine ulaşan ÖA1, bu eşitsizlik ile ilgili "1, k^3'ten küçük kaldı. Bu şartı sağlayan çok fazla tamsayı olduğu için buradan bir yere gelemedim." diyerek problemin yanıtına dair bir bilgi edinemediğini fark etmiştir. Sonra aritmetiğin temel teoreminden yani tüm doğal sayıların asal çarpanları biçiminde yazılabileceği matematiksel gerçeklikten yola çıktığı başka bir cebirsel stratejiyi izlemiştir (Şekil 5):

ÖA1: Buradan vazgeçtim. Sonra n'yi asal çarpanlarına ayırabiliyorum. Kanonik biçimde yazdım. Belki bir şeyler elde ederim diye.



Şekil 5. ÖA1'in P-1 için ATT ve bölme tanımına dayalı cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

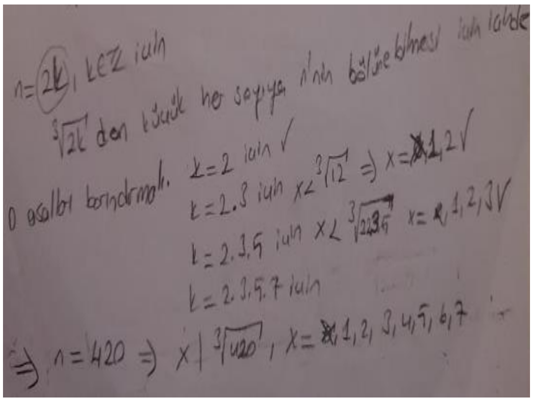
ÖA1 aritmetiğin temel teoremini dikkate alarak izlediği cebirsel stratejide Şekil 3'te görüldüğü gibi öncelikle belirlediği temsillerle n'yi asal çarpanlarına ayırmış ve $x \mid \sqrt[3]{n}$ ifadesini n'yi asal sayıların çarpımı şeklinde ifade ederken kullandığı temsillerle ($p_1^{e1}, p_2^{e2}, \dots$) yeniden ifade etmiştir. Daha sonra ilk çözümünde olduğu gibi bölme tanımını kullanan ÖA1, aritmetiğin temel teoremine göre oluşturduğu temsil biçimini değiştirerek, eğer işlem hatası yapmasaydı ilk çözümünde elde edeceği " $x^2 < t$ " eşitsizliğini elde etmiştir. ÖA1 izlediği bu strateji soncunda da problemin yanıtına dair bir bilgi elde edemeyeceğini fark etmiştir:

ÖA1: Sonra yine ilk çözümle benzer şey geldi. O yüzden bundan da vazgeçtim. Yanlış oldu yani. Bulamadım daha doğrusu bir şey çıkartamadım. Çok genel kaldığı için bir şey elde edemedim.

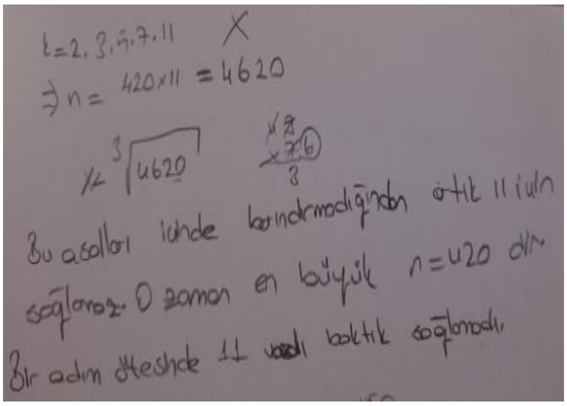
ÖA1'in her iki muhakeme eyleminde de matematiksel gerçeklikleri temel alarak belirlediği temsillerle verilen ifadeleri yeniden temsil ettiği ve daha sonra değişkenleri manipüle ederek cebirsel işlemler yaptığı görülmektedir. İzlenen bu genel yollarla probleme dair bir iddiada bulunmanın güç olduğu açıktır. Bu durum ÖA1'in strateji seçiminde öngörülü olamadığı şeklinde yorumlanabilir. Bununla birlikte bu süreç sonunda ÖA1'in problem durumuna özgü daha özel bir ilişkilendirme yapma ihtiyacı duyması, bu stratejilerin yürüttüğü muhakeme sürecine olumlu bir katkısı olabilirdi. Ancak bu stratejiler ile problemin yanıtına dair bir bilgi elde edinemediğini belirten ÖA1, yine genel bir yaklaşımla, bu kez tamsayıların tek ve çift olma özelliğini dikkate alarak durum inceleme stratejik yaklaşımı ile n'nin tek ve çift olma durumlarını incelemeye karar vermiştir. Öncelikle n'nin tek tamsayı olması durumunu incelemiş ve buradan bir çıkarımda bulunmuştur:

ÖA1: Sonra dedim ki tamsayıları incelediğim için bir tek tamsayılara bir de çift tamsayılara bakayım. Ben aslında n'yi özelleştirmeye çalıştım. Önce $n = 2k+1$ olsun dedim. Sonra çift sayılar, bu sayıyı bölmeyeceğinden tek sayıları eledim. Çünkü $2k+1$'den küçük tamsayılarda mutlaka bir tane çift sayı vardır. En küçük 2 var mesela.

n'nin tek tamsayı olma durumunu incelerken tek ve çift tamsayıların tanımına dayalı genel bir çıkarımda bulunarak n'nin tek tamsayı olamayacağı çıkarımında bulunan ÖA1'in bu sırada problem durumunu dikkate almadığı söylenebilir. Bu durum aynı zamanda bir argüman oluştururken niceleyicileri göz ardı ettiği şeklinde de yorumlanabilir. Çünkü problem durumuna bakıldığında n'nin *1,3,5* ve *7* tek tamsayı değerlerini alabileceği görülmektedir. Bununla birlikte n'nin en büyük değerinin bir tek tamsayı olamayacağı iddiasının doğru olma olasılığı yüksektir ancak ÖA1 $\sqrt[3]{n}$'in 2'den büyük olması halinde şartları sağlayabilen bir n değerinin bulunduğuna dair bir veriye henüz sahip değildir. ÖA1, daha sonra çift tamsayıları inceleyerek çözüm sürecine devam etmiştir (Şekil 6).



(a)



(b)

Şekil 6. ÖA1'in P-1 için durum inceleme stratejisini izlediği muhakeme eylemi: Çift tamsayıları inceleme

n'i, çift tamsayı olma durumunu incelediği için, $n = 2k$ şeklinde temsil eden ÖA1, Şekil 4'te görüldüğü gibi k değişkenini büyüklüğü sırasıyla artan asal sayıların çarpımlarının 2 katına eşitleyerek elde ettiği n tamsayılarını incelemiştir. Bu inceleme yoluna göre en küçük asal sayı zaten çift olduğundan n'yi çift tamsayı yapmak için tekrar 2 ile çarpmaya gerek olmadığı açıktır. Burada ÖA1'in izlediği strateji gereği tüm çift tamsayıları incelemeye odaklanmak yerine, bölünebilme için asal sayı kavramına odaklandığı düşünülmüştür. ÖA1'in çözüm süreciyle ilgili açıklamaları da bu yorumu desteklemektedir:

ÖA1: $n = 2k$ olsun dedim. Buradan da k'lara baktım. Aslında genellemeye ulaşmaya çalıştım burada. Tam göstermedim ama $k = 2$ için baktığımızda zaten sağlıyor. Sonra $k = 2 \cdot 3$ için baktım. $n = 12$ oluyor ve $\sqrt[3]{12}$ 1 ve 2'yi bölüyor. Sonra $k = 2 \cdot 3 \cdot 5$ için baktım. Bunların da hepsi bu köklü ifadenin içini bölüyor. Çünkü zaten içinde aynı asal çarpanlar var.

ÖA1 bu çözüm yoluna, Şekil 5'te görüldüğü gibi k'nın çarpanlarına yeni asal sayıları ekleyerek devam etmiş ve inceleme sonucunda bir iddiada bulunmuştur:

ÖA1: 7'den sonraki asal çarpanlar için öyle bir sayı geliyor ki 11'den büyük asalları da içinde barındırıyor. Bu sefer o asal sayılara bölünmüyor. O yüzden de en fazla 7'ye kadar oluyor diye buldum. k, 7'ye kadar gelince de n 420'ye eşit oldu. Çünkü sonrakilere baktığımda arada başka asallar kaldığı için üçüncü dereceden kökünden küçük kalan sayılar için bölünmüyor diye buldum.

Açıklamalarında görüldüğü üzere ÖA1, 420'nin problemde istenilen şartları sağladığını belirtmiştir. Problemin doğru yanıtı 420 olmakla birlikte ÖA1'in 420 sonucuna şans eseri vardığı düşünülmektedir. Böyle düşünülmesinin nedenlerinden biri ÖA1'in bu sırada takip ettiğini belirttiği durum inceleme stratejisinden uzaklaşması ve izlediği yolda k'yı elde ederken asal sayıların birden büyük kuvvetlerini dikkate almaması ile tüm çift tamsayıları incelememiş olmasıdır. Bir diğer neden ise doğru yanıta varılabilmesi için yararlanılması gerekli olan tamsayıların en küçük ortak katı özelliğinden bahsetmemiş olmasıdır. ÖA1'in çözüm sürecinde ekok ile ilgili bir fikre sahip olmayıp yalnızca asal sayı fikrine odaklandığı 7 asal sayısından sonra 2'nin üçüncü kuvveti olan 8'i ve 3'ün karesi olan 9'u dikkate almayarak 11 asal sayısını incelemeye koyulmasından (Şekil 6) ve ayrıca açıklamalarından da görülmektedir:

Araştırmacı: Neden asal çarpanlarına ayırdığında 2,3,5,7 diye sırasıyla gittin? Biz k'yı bu şekilde mi almalıyız?

ÖA1: Böyle almayabiliriz. İçinden sadece 3'ten sonra 7'ye geçebiliriz. Ama böyle daha genel incelemiş oldum bence.

Bununla birlikte, ÖA1 yaptığı çözümü bir ispat niteliğinde görmediğini yani ortaya koyduğu muhakeme eylemlerinin problemin yanıtının 420 olduğunu kesin olarak doğrulamaya yeterli olmadığını bildirmiştir:

Araştırmacı: Peki yanıtın kesin olarak 420 mi?

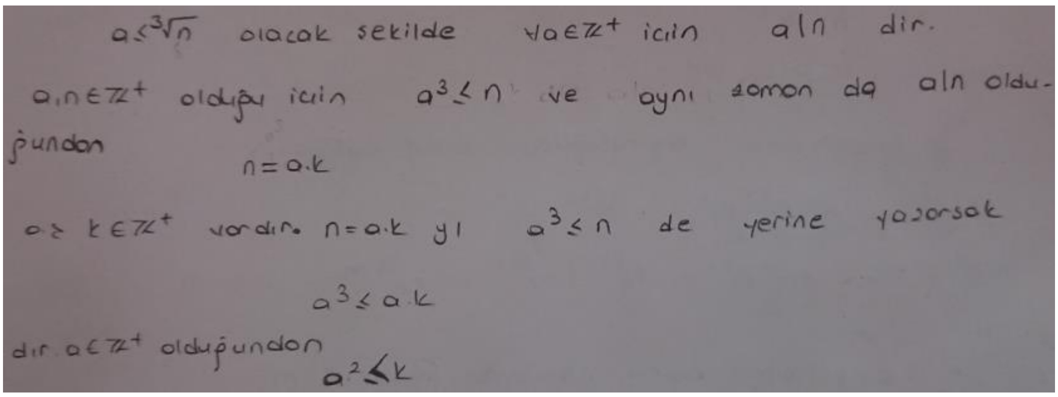
ÖA1: 420'nin en büyük olduğunu düşünüyorum sezgisel olarak. Böyle de birazcık göstermeye çalıştım ama daha büyükler var mı onları gösteremedim. Olmadığını düşünüyorum ama matematiksel olarak ifade edemedim. Sayılar genişleyince araya başka asalların da girdiğini ve o kendi asal çarpanları içinde o asalı barındırmadığından onlara bölünemeyeceğini söyledim. Öyle ama bunu daha güzel ifade edemedim tabi.

Açıklamalarından görüldüğü üzere ÖA1'in sınırlı sayıda örnek ile çalışarak iddiada bulunmanın matematiksel olarak geçerliliğinin sınırlılıklarının farkında olduğu söylenebilir.

4.1.1.2. ÖA2'in P-1 için muhakeme süreci

ÖA2, öncelikle bölme tanımına dayalı cebirsel bir strateji ile yanıt aramıştır (Şekil 7):

ÖA2: $a \leq \sqrt[3]{n}$ olacak şekilde her $a \in Z^+$ için a böler n dedim. Buradan a böler n olduğu için $n = a.k$ şeklinde yazılabilir dedim. Yerine yazıp işlem yapınca $a^2 \leq k$ geldi. Ama buradan sonra ilerleyemedim. Bir yere varamadım. Sonra başka bir çözüme geçtim.



Şekil 7. ÖA2'nin P-1 için bölme tanımına dayalı cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

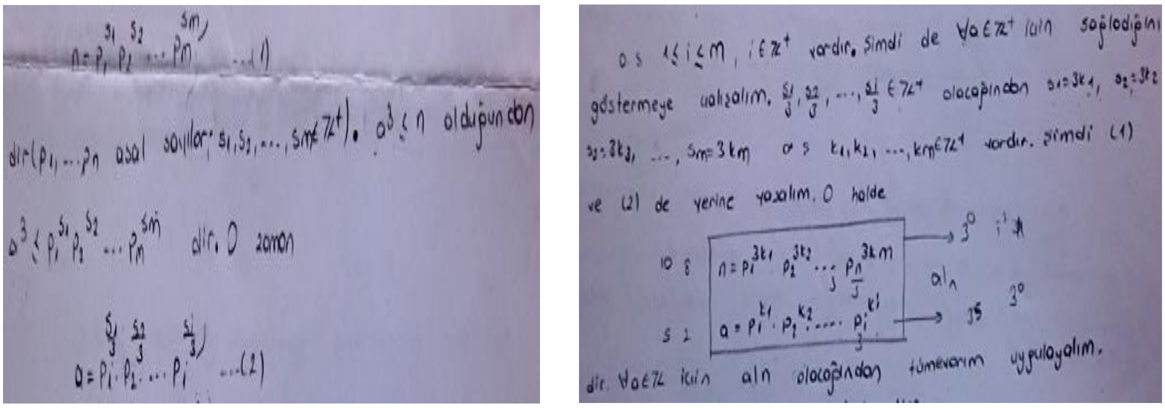
Şekil 7'de görüldüğü gibi bölme tanımından yararlanarak izlediği cebirsel strateji ile genel bir ifadeye ulaşan ÖA2, buradan problemin yanıtına yönelik bir çıkarımda bulunamayacağını belirleyebilmiş ve stratejisini sonlandırmıştır. Daha sonra asal sayı tanımından yola çıkarak bir çıkarımda bulunmuştur:

ÖA2: Önce kabul edelim ki n bir asal sayı olsun dedim. n bir asal sayı olduğu zaman sadece kendisi ve 1'e bölüneceğinden n asal sayı olamaz. Yani asal olursa $\sqrt[3]{n}$'den küçük sayılara bölünemez. O halde n bileşik tamsayıdır.

n'nin bir asal sayı olamayacağını iddia eden ÖA2'nın bu sırada bölünebilme için önemli gördüğü asal sayılara odaklanıp, küp kökü 2'den küçük olan tamsayıları dikkate almadığı için n ile ilgili yanlış bir iddiada bulunduğu söylenebilir. Asal sayı, bölünebilme için önemli ve dikkate alınması gerekli bir kavram olsa da problem durumuna göre n'in 2,5 ve 7 asal sayı değerlerini alabileceği görülmektedir. n'nin en büyük değerinin bir asal sayı olmama olasılığı yüksek olmakla birlikte, ÖA2 n'in kesin olarak bileşik tamsayı olduğu iddiasında bulunmak için yeterli veriye henüz sahip değildir. Bu durum, ÖA2'nin problem durumundan uzaklaştığı ve ayrıca bir argüman oluştururken niceleyicileri göz ardı ettiği şeklinde yorumlanabilir. ÖA2 daha sonra bölünebilme için asal sayılara odaklanmayı sürdürerek; bölünebilme ve asal sayı tanımına dayalı bir iddiada bulunmuştur:

ÖA2: Sonra sezgisel olarak düşündüm ve ona göre çözüm yaptım. Sonsuz sayıda asal sayı vardır. Ben bunları yani sonsuz sayıda asal sayının çarpımını küp kökten çıkardığım zaman mutlaka böler diye düşündüm. Yani çok çok büyük bir sayı var. Bunu gösterdim.

ÖA2, bölünebilme için yalnızca asal sayılara odaklanarak n'in en büyük değerinin sonsuz çokluktaki asal sayların çarpımı olacağı şeklindeki bu iddiasından sonra, iddiasını ispatlamak üzere n ve $\sqrt[3]{n}$ 'den küçük a tamsayılarını asal çarpanları şeklinde ifade etmiştir (Şekil 8).



(a) (b)

Şekil 8. ÖA2'nin P-1 için tümevarım stratejisini izlemek üzere cebirsel temsiller oluşturması

Şekil 8'de görüldüğü gibi ÖA2, n'nin asal çarpanlarının kuvvetlerini 3'ün katları olarak almış ve $\sqrt[3]{n}$ 'den küçük a tamsayılarının asal çarpanlarının kuvvetlerini de buna dayalı olarak belirlemiştir. Araştırmacı bu kuvvetleri neden 3'ün katları olarak aldığını sormuştur:

ÖA2: O zaman dedim ki bileşik sayıdır. Oradan n bileşik sayısını kanonik biçimde yazdım.

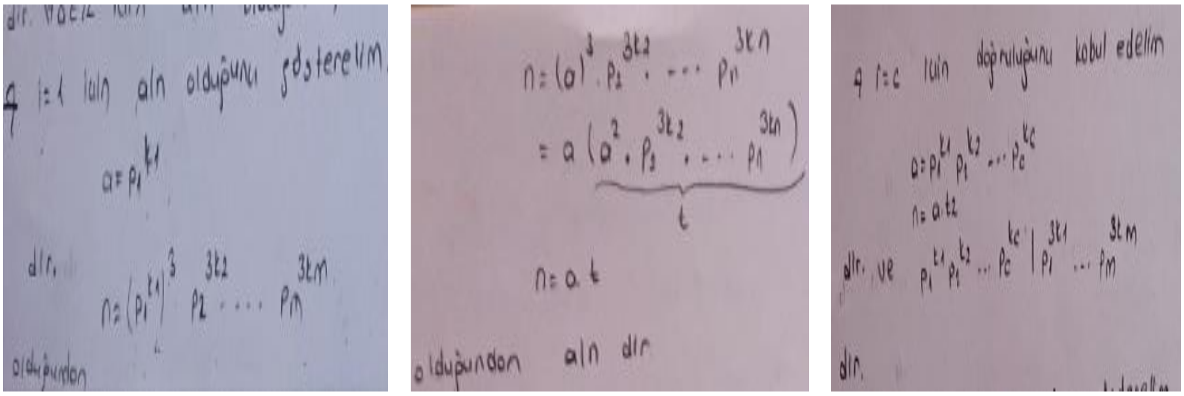
Araştırmacı: Bu kuvvetler 3'e bölünebiliyor mu?

ÖA2: Yani ben onu şöyle düşündüm. Bileşik sayıları ifade ederken biz kuvvetler tamsayı olacak diyorduk ya bir de soruya göre tamsayı olmak zorunda olduğu için. Her a, n'ye bölünecek ya.

n ve a'nın bir tamsayı ve asal çarpanlarının kuvvetlerinin birer tamsayı olması gerekli olmakla birlikte $\sqrt[3]{n}$ bir tamsayıya eşit olmak zorunda değildir. Yani n 'nin asal çarpanlarının kuvvetleri 3'ün katları olmak zorunda değildir. Yukarıdaki diyalogdan görüleceği üzere, araştırmacı bu kuvvetleri neden 3'ün katları olarak aldığını sorduğunda ÖA2'nin problem durumunu tam olarak anlamlandırmadığı görülmüştür.

n ve $\sqrt[3]{n}$ 'den küçük a tamsayılarını asal çarpanları şeklinde temsil eden ÖA2 daha sonra bu temsilleri kullanarak iddiasını tümevarımla ispatlamaya karar vermiştir:

ÖA2: Sonra da dedim ki her a böler n olacağını göstermeye çalışıyorum ya tümevarım yapayım. Oradan i'nin 1 olma durumunu yani $a = p_1^{k_1}$ olma durumunu inceledim. Onun doğruluğunu gösterdim. Oradan $n = (p_1^{k_1})^3$ şeklinde yazıldığı için burayı a^3 şeklinde yazdım. Oradan da işte birleşme özelliği olduğundan a'yı dışarı atıp oradan gösterdim. Yani şu şeklide yazıldığından burası da bir t tamsayısı olacağından böler dedim. Sonra $i = c$ için doğruluğunu kabul edelim ve $c+1$ için bunu gösterdim. Sonra tümevarımla doğruluğunu göstermiş oldum dedim. Yani çok çok büyük bir sayıdır.



(a) (b) (c)

Şekil 9. ÖA2'nin P-1 için tümevarım stratejini izlediği muhakeme eylemi

Bilindiği üzere bir önermenin tüm doğal sayılar için doğruluğunun tümevarım stratejisi ile ispatında $n=1$ için önermenin doğruluğu; daha sonra ise n için doğru olduğu kabul edilerek bu kabule göre $n+1$ için de doğru olduğu gösterilir. ÖA2'nın iddiasını ispatlamak için bu stratejiyi uygun bulduğu düşünülerek çözümü incelediğinde, Şekil 7'de görüldüğü gibi anlamsız bir biçimde temsilleri manipüle ettiği görülmektedir. Örneğin yukarıda verilen açıklamasından da görüleceği üzere i'nin 1 olma durumunda a'yı $a = p_1^{k_1}$ olarak ele almış yani p asal çarpanının indisini ve aynı zamanda kuvvetinin indisini 1 olarak ele almış ve daha sonra $n = (p_1^{k_1})^3.p_2^{3k_2}.p_3^{3k_3}...p_n^{3k_n}$ olarak aldığı n için a'nın n'yi bölebildiğini göstermeye çalışmıştır. Ancak bu durumda problem durumuna göre $\sqrt[3]{n}$'nin a'dan başka bölenlerinin de olması gerekeceği açıktır. Burada ÖA2'nın ispatında problem durumundan uzaklaştığı veya problemi mantıksal olarak anlayamadığı yorumu yapılabilir. Ayrıca tümevarım stratejisini de doğru uygulamadığı ve yalnızca temsilleri anlamsız bir şekilde manipüle ettiği görülmektedir. Bununla birlikte ÖA2, probleme dair çözümünü değerlendirirken ispatının doğruluğundan emin olduğunu belirtmiştir. Üstelik yapılan görüşmede nasıl yaptığını açıklamada zorlansa da ispatının doğruluğuna dair görüşünde ısrarcı olmuş ve yaptığı ispatı çok beğendiğine dair ifadelerde bulunmuştur:

Araştırmacı: Sonuç olarak n'nin en büyük değerini sonsuz çokluktaki tüm asal sayıların çarpımı olarak mı buldun? Yani burada bunu mu ispatladın?

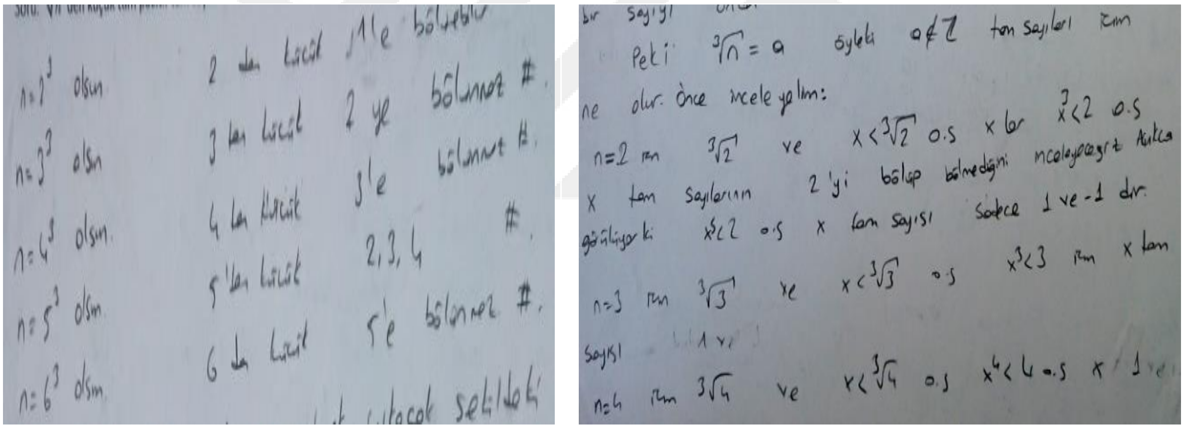
ÖA2: Evet. Asal sayılar sonsuz tane, onun en büyüğünü bulamayacağım için böyle yaptım. Yani bütün asal sayıların çarpımı şeklinde yazıp onu ben küp kökten çıkardığım zaman bölünür. Çıkıyor da zaten yani ben öyle düşündüm. Yani sezgisel olarak bunu düşünüp daha sonra işleme döktüğümde çelişki oluşmayınca öyledir dedim. Benim mantığıma çok yattı. Çelişkiye düşebilirdim ama düşmedim. Bence çok mantıklı ben hiç bu kadar güzel ispat yapmamıştım.

Yaptığı çözüm ve açıklamalarından hareketle ÖA2'nın aralarında mantıksal bir ilişki bulunmasa da sembolik manipülasyonlarla yapılan ve görüntü olarak daha önce gördüğü ispatlara benzeyen çözümünü ispat olarak görme eğiliminde olduğu söylenebilir.

4.1.1.3. ÖA3'in P-1 için muhakeme süreci

ÖA3 öncelikle deneme yanılma stratejisi ile sırasıyla köklü ifadeden tamsayı olacak şekilde çıkacak ve çıkmayacak şekilde seçtiği tamsayıları incelemiştir:

ÖA3: Ben deneme yanılma ile gittim. İlk başta incelemesi kolay olsun diye küp kökten tamsayı olarak çıkacak sayılarla çalıştım. Burada sadece 2^3'ü buldum. Sonra tamsayı çıkmasa da sayıları inceleyeyim dedim. 10 oldu mesela 1 ve 2'yi bölüyor.



(a) (b)

Şekil 10. ÖA3'ün P-1 için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Şekil 10'dan ve ÖA3'nin yukarıdaki açıklamasından görüldüğü üzere ÖA3, deneme yanılma stratejisi ile öncelikle kolay olması için köklü ifadeden tamsayı çıkacak şekilde 1'den 6'ya kadar olan tamsayıların küpünü ele almış ve buradan $n = 2^3$'ün istenen şartları sağladığını gözlemlemiştir. Daha sonra köklü ifadeden tamsayı çıkmayacak şekilde 14'e kadar olan ardışık tüm tamsayıları ve daha sonra rastgele seçtiği 26, 28, 65 tamsayılarını incelemiştir. Bu incelme sırasında 10'un istenen şartları sağladığını gözlemlemiştir. Problem durumu ile herhangi bir ilişkilendirmede bulunmadan bu şekilde tamsayıları tek tek deneyerek bir iddiada bulunmanın güç olduğu açıktır. Başka bir deyişle izlediği deneme yanılma stratejisinde problem durumuna yönelik etkin örnek seçimlerinde bulunamadığı söylenebilir. Bununla birlikte bu süreç sonunda ÖA3'ün problem durumunu anlamlandırması ve problem durumuna özgü daha özel bir ilişkilendirme yapma ihtiyacı duyması, bu stratejinin muhakeme sürecine olumlu bir katkısı olabilirdi. Ancak problem durumunu daha iyi anlamak için çalışmak yerine izlediği stratejinin sınırlıklarına odaklanan ÖA3 bu stratejiden vazgeçmiş, asal sayı tanımından yola çıkarak başka bir strateji belirlemeye çalışmıştır:

ÖA3: Daha sonra devam ettim ama deneme yanılma ile gittiğim için ben nerede duracağımı bir türlü kestiremedim. Daha sonra buradan da ben bir yere varamayacağım deyip bıraktım.

Araştırmacı: Sonra ne yaptın?

ÖA3: Sonra asal sayılarla çalışmamız gerektiğini düşündüm. Asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11 diye gidiyor. Ben dedim ki n'yi bunların küpü olacak şekilde belirlersem yani bu n'nin içine bu asal sayıları yerleştirsem n bunların hepsine bölünür. Hani küp kökü bir tamsayı olacak ve bu tamsayıdan küçük tamsayılar n'yi bölecek. Asal sayılar böler dedim. Ama bu durumda asal olmayan sayıların bölüp bölmeyeceğine karar vermek uğraştırıcı olur.

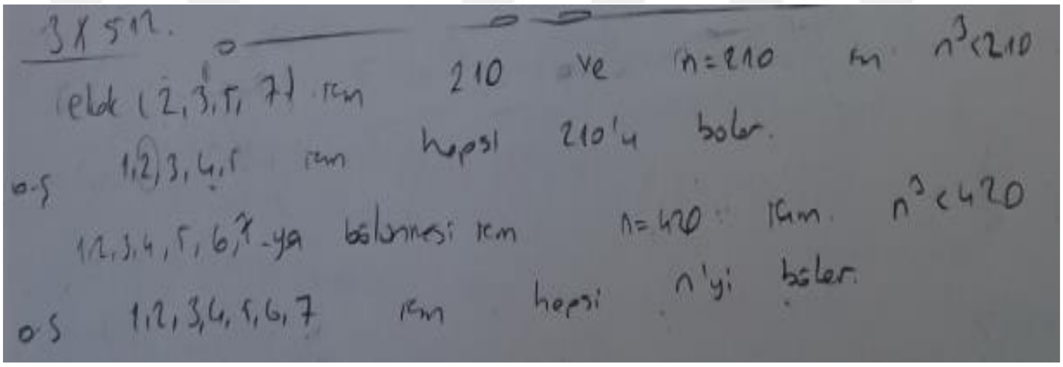
Açıklamalarında görüldüğü gibi ÖA3'ün öncelikle bölünebilme için asal sayılara odaklanarak n'yi tüm asal sayıların çarpımının küpü olarak almayı düşündüğü ancak daha sonra buna dayalı bir stratejiyi uygularken asal olmayan tamsayıların n'yi bölüp bölmediğini incelemenin zor olduğunu bildirmiştir. n'yi tüm asal sayıların çarpımı olarak ele aldığında asal olmayan bazı tamsayılara bölünemeyeceği açıktır. Bu durum, her ne kadar asal olmayan tamsayıları söz konusu etmiş olsa da ÖA3'ün çözüm için odağının asal sayılar olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Nitekim daha sonra asal sayıların ekok'unu almaya dayalı bir strateji ile muhakeme sürecine devam etmiştir:

ÖA3: Sonra dedim ki yine özel sayıları seçeyim ama nerede duracağım belli değil. Sonra da dedim ki asal sayıların ekok'unu alayım. Ama işte oradan da tüm asal sayıların ekok'unu almak çok uğraştırıcı bir şey. 2, 3, 5, 7 asal sayıları var ya ben bunların bir ekok'unu alayım dedim.

Araştırmacı: Ekok'larını bulmaya nasıl karar verdin?

ÖA3: Şu şekilde; biz α'nın küp kökünü aldığımız zaman bundan küçük sayıların alfayı bölmesini istiyoruz. Mesela 5 ise 1, 2, 3, 4'ü bölsün. O yüzden ben ilk başta bölme bölünebilme kurallarından giderek asal sayıları n'nin içine yerleştireyim dedim. Böyle giderek ekok bulmaya çalıştım. Ama tabi çok uğraştırıcı oldu. Zaten sadece 420'yi bulmuşum.

Burada ÖA3'ün problemi çözmesini sağlayacak ekok fikrini ortaya atmış olsa da odağının bölünebilme için asal sayılar olduğu görülmektedir. Çünkü n , $\sqrt[3]{n}$ 'ten küçük tüm tamsayılara bölünebileceğinden yani $\sqrt[3]{n}$ 'ten küçük en büyük tamsayı a olmak üzere 1'den a 'ya kadar olan ardışık tamsayıları bölebileceğinden bu ardışık tamsayıların ekok'undan bahsetmek yerine asal sayıların ekok'unu bulmuş ve daha sonra ardışık tam sayıları söz konusu etmiştir. Matematiksel kavramlara dayalı bu fikir karmaşıklığı 2, 3, 5 ve 7 tamsayılarının ekok'unu bulup bir iddiada bulunduğunu belirttiği Şekil 9'daki çözümünde de görülmektedir.



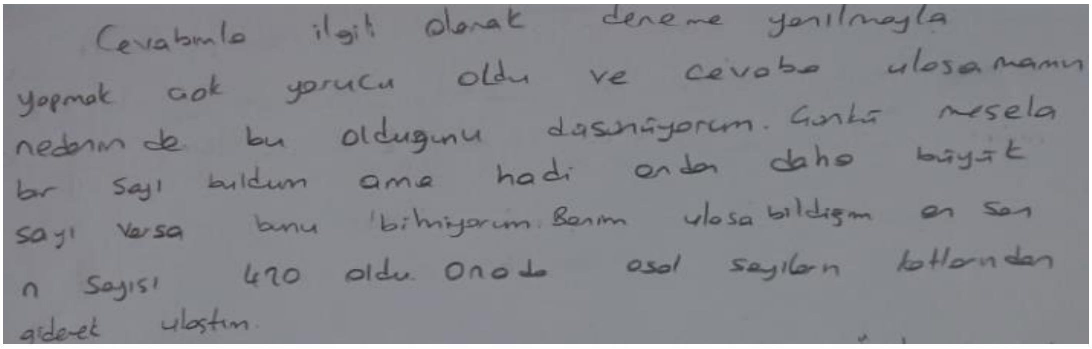
Şekil 11. ÖA3'ün P-1 için asal sayı ve ekok tanımına dayalı cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

Şekil 11'den de görüldüğü üzere ÖA3 7'ye kadar olan asal sayıları dikkate alıp, ekok özelliğinden n 'nin 420 olacağına dair bir sonuca varmıştır. 420 problemin doğru yanıtı olmakla birlikte ÖA3'nin bu sonuca şans eseri vardığı söylenebilir. Çünkü hem ardışık tamsayıların ekok'u ile ilgili yeterli bir açıklamada bulunmamış ve hem de aşağıdaki diyalogdan görüleceği üzere daha büyük bir tamsayı bulanamayacağı için değil daha büyük tamsayılarla nereye kadar uğraşmaya devam edeceğini kestiremediği için daha büyük tamsayılar için bir inceleme yapmamıştır. Yani iddiasını gerekçelendirememiştir. Bununla birlikte ÖA3, yanıtından emin olmadığını hem çözümü değerlendirme sürecinde (Şekil 12) hem de görüşme sırasında belirtmiştir:

Araştırmacı: Neden daha sonra daha büyük sayılar için bakmadın?

ÖA3: Çünkü daha büyük sayılarla uğraşmak istemedim. Sadece yaklaşmak istedim. Bunu buldum ama size garantileyemem yani kesinlikle budur diyemem. Çünkü ispatlayamadım.

Belki de ondan daha büyük bir sayı da vardır. Yani bu hep böyle devam edebilir. Zaten nerede duracağım belli değil ki.


Cevabımla ilgili olarak deneme yanılmayla yapmak çok yorucu oldu ve cevaba ulaşamamın nedenin de bu olduğunu düşünüyorum. Çünkü mesela bir sayı buldum ama hadi ondan daha büyük sayı varsa bunu bilmiyorum. Benim ulaşabildiğim en son n sayısı 420 oldu. Onada asal sayıların katlarından giderek ulaştım.

Şekil 12. ÖA3'ün P-1 için yaptığı çözüm ile ilgili değerlendirmesi

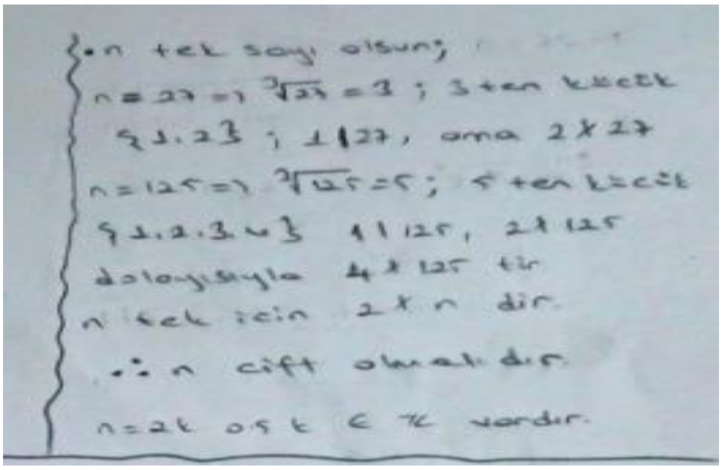
Buradan ÖA3'in ifadelerine göre sınırlı sayıda örnek ile çalışarak iddiada bulunmanın matematiksel olarak geçerliliğinin sınırlılıklarının farkında olduğu söylenebilir.

4.1.1.4. ÖA4'ün P-1 için muhakeme süreci

ÖA4 öncelikle durum inceleme stratejisini izleyerek n 'nin tek olma durumunu incelemiştir:

Araştırmacı: Ne yaptın burada?

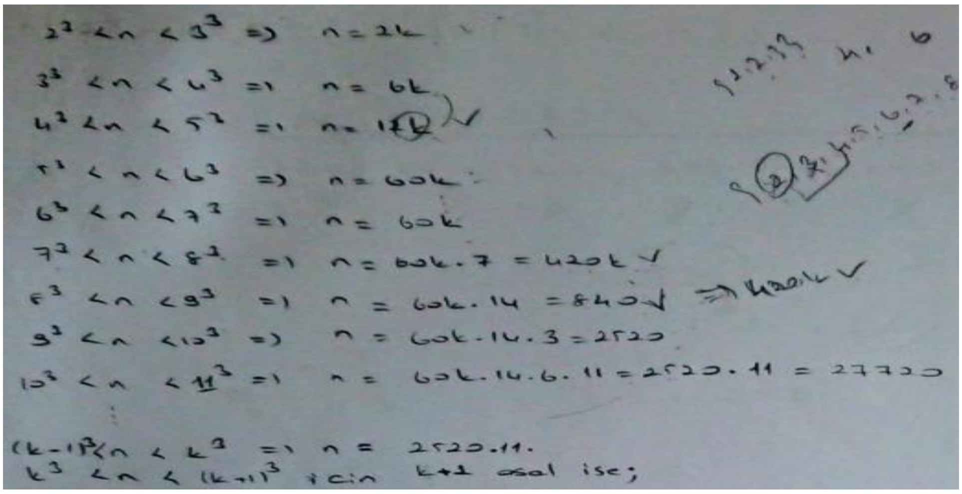
ÖA4: Önce $n^{\frac{1}{3}}$ 'ten küçük tüm pozitif tamsayıları nasıl belirleyebilirim diye düşündüm. n tek olsun dedim ben. Hani durumları inceledim. Teklik durumu çiftlik durumu nasıl gelecek diye. n tek olduğunda mesela 27 için denediğimde 3'ten küçük sayılar 1 ve 2 geliyor. 1, 27'yi bölüyor; ama 2, 27'yi bölmüyor. O yüzden dedim ki 2'ye bölünebilmesi için n çift olmak zorunda. Çünkü en küçük asal sayı 2 mesela. Öyle sayılar bulmalıyım ki 2 o sayıyı bölsün dedim. O yüzden n kesinlikle çift olmalıdır dedim.



Şekil 13. ÖA4'ün P-1 için durum inceleme stratejisini izlediği muhakeme eylemi

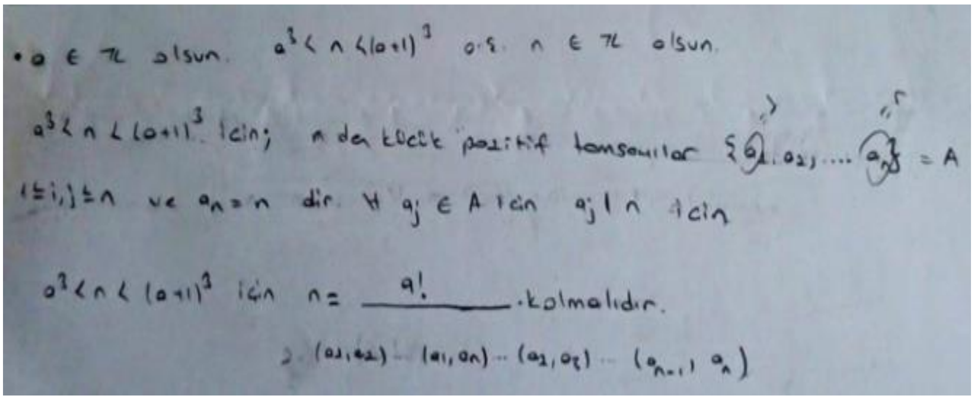
ÖA4, Şekil'de görüldüğü gibi n 'nin tek tamsayı olma durumunu incelerken deneme yanılma stratejisi ile 27, 25 gibi görece büyük tamsayıları incelemiş ve buradan tek ve çift tamsayıların tanımına dayalı genel bir çıkarımda bulunarak n 'nin bir tek tamsayı kesinlikle olamayacağı iddiasında bulunmuştur. Oysa problem durumuna bakıldığında n 'nin *1,3,5* ve *7* tek sayı değerlerini alabileceği görülmektedir. n 'nin en büyük değerinin bir tek tamsayı olamayacağı iddiasının doğru olma olasılığı yüksek olmakla birlikte, ÖA4 $\sqrt[3]{n}$ 'in 2'den büyük olması halinde şartları sağlayabilen bir n değerinin bulunduğuna dair bir veriye henüz sahip değildir. ÖA4, daha sonra çift tamsayıları inceleyerek çözüm sürecine devam etmiştir. Çift tamsayıları incelerken asal sayıların n'i bölebilmesi koşulunu nasıl sağlayacağını belirlemede zorluk yaşadığından bir çıkarımda bulunmadan deneme yanılma stratejisi ile ardışık sayılarla oluşturduğu aralıklara göre n'i belirlemeye çalışmıştır (Şekil 14-15):

ÖA4: Sonra çift sayılar üzerinde çalıştım. 8 aldığımda oluyor. Ondan sonra 64 aldığımda 3'e bölünemiyor dedim. Hani bu şekilde gittiğimde bir asal sayı sıkıntı çıkarıyor bize. Sonra aralıklar alarak ilerledim. İlk başta şey için düşündüm; 1'in küpü ve 2'nin küpünü bulmuştum zaten onu incelemedim. Sonra 2'nin küpü ile 3'ün küpü arasındaki sayıları inceledim. Hani bu şekilde ardışık sayıların küpü arasında kalan sayıları inceleyecek şekilde yaptım ve belli bir kural buldum (Şekil 14). Ben sayıları a 'nın küpü şeklinde yazdım ve bu kümeyi indeksledim. i ve j verdim. Bu kümeden seçtiğim her eleman n'yi bölmek zorunda. Benim tek şeyim burada bu n'yi belirlemek. $a!$ çarpı şurada 2 yok, 2 fazla olmuş. $a!$ ve buradaki sayıların ikişerli ebob'larına bölersem o sayının katı olacak şekilde hangi sayı için seçersem bulmuş oluyorum (Şekil 15). Tam ifade edemedim şimdi.



Şekil 14. ÖA4'ün P-1 için cebirsel deneme yanılma stratejisi izlediği muhakeme eylemi

Şekil 14'teki çözümünde görüldüğü üzere ÖA4 1'den başlayarak ardışık sayıların ekok'unu almış ve elde ettiği sayıyı k çarpanı ile çarpmıştır. ÖA4'ün bu şekilde elde ettiği n tamsayılarının ekok'larını aldığı ardışık tamsayılara tam bölünebileceği aşikar olmakla birlikte $a!$ 'den büyük k tamsayı çarpanları için elde edilecek n tamsayılarının küp kökünün belirlenen bu ardışık sayınların en büyüğünden daha büyük bir değer alacağı açıktır. Dolayısıyla bu sırada ÖA4'ün problem durumunu mantıksal olarak anlayamamış olduğunu söylemek mümkündür.



Şekil 15. ÖA4'ün P-1 için deneme yanılma stratejisinden elde ettiği sonuç

Diğer taraftan bu yolla elde etiği ifadeleri genelleştirerek Şekil 15'te görüldüğü gibi n için bir eşitlik elde etmiş ve n 'in sonsuz büyüklükte olabileceği iddiasında bulunmuştur:

Araştırmacı: O zaman en büyük sayı nedir?

ÖA4: En büyük sayıyı işte ben belirleyemiyorum. Sonsuz bence. Öyle bir kanıya ulaştım.

Şekil 14'teki çözümünde görüldüğü üzere ÖA4 1'den başlayarak ardışık sayıların ekok'unu almış ve elde ettiği sayıyı k çarpanı ile çarpmıştır. Bu şekilde elde ettiği sayının belirlediği aralıkta kalıp kalmadığını test etmediği için n 'in sonsuz büyüklükte olabileceğini düşünmüştür. Bununla birlikte çözüm yolundan emin olmasa da yanıtının doğru olduğunu düşündüğünü iletmiştir.

Araştırmacı: Yanıtının doğruluğu ile ilgili ne düşünüyorsun?

ÖA4: Çözüm biraz sezgisel kalmış olabilir ama bence çok doğru.

4.1.2. Problem-2'ye Ait Bulgular

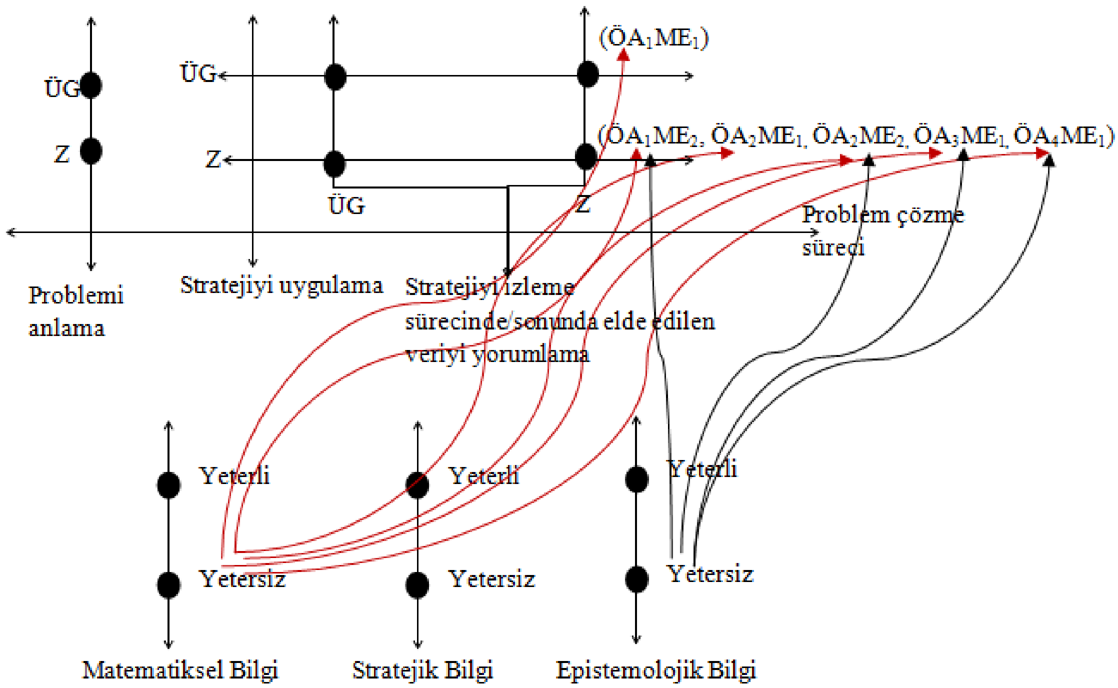
"$n(173+n)$ ifadesini tam kare yapan n pozitif tamsayılarını bulunuz." ifadesine sahip P-2'ye göre $n(173+n)$ 'i tam kare yapan n pozitif tamsayıları bulunmalıdır. Bu tamsayı bir tanedir ve doğrudan cebirsel işlemlerle bulunamamaktadır. Bulunabilmesi için sayıların temsil biçimleri arasında geçiş yapmak ve iki tamsayının karesinin çarpımının bir tamsayının karesine eşit olacağı fikrinden yola çıkılabilir. Bu yolla yanıta varıldığında, ortaya konulan çözüm aynı zamanda cebirsel bir ispat niteliğinde olacaktır. Bu probleme dair örnek bir çözüm "Ekler" bölümünde verilmiştir.

Öğretmen adaylarının P-2 çözüm sürecindeki muhakeme eylemleri ve bu muhakeme eylemleri sürecinde yaşadıkları zorluklar Tablo 6 ve Şekil 16'daki gibidir. Süreç sonunda tüm öğretmen adayları problemde istenen şartları sağlayan bir n tamsayısının bulunamayacağını iddia etmişlerdir. Öğretmen adaylarını tümünün bu problem için yalnızca cebirsel stratejiye başvurdukları görülmektedir. Bu durumun problemin karaktersitiğinin doğal bir sonucu olduğu söylenebilir. Bununla birlikte öğretmen adayları izledikleri cebirsel stratejide, muhakeme eylemlerinin daha detaylı anlatıldığı kısımda görüleceği üzere problem durumuyla ilgili matematiksel kavramların özelliklerini analiz etmeden, cebirsel işlem yaparak bilinmeyenleri bulmaya odaklanmışlardır. Bu sırada öğretmen adaylarının tümü, çarpanlara ayırma ve tamsayıların temsillerini yorumlama ile ilgili benzer zorlukları yaşamıştır. Örneğin ÖA4, $173n=(\mathrm{a}-n)(\mathrm{a}+n)$ eşitliğinde $(\mathrm{a}-n)$ 'i 173'e ve $(a+n)$ 'i de n 'e eşitlemiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları bu hata, bu problemle ilgili doğru bir çıkarımda bulunamamalarına neden olmuştur. Bununla birlikte öğretmen adayları denklem çözerek yanıta vardıklarından çözümlerinin doğruluğundan emin olduklarını bildirmişlerdir. Öğretmen adaylarının cebirsel denklemler sonucunda elde edilen sonuçların doğruluğu ile ilgili bilgileri epistemolojik bakımdan doğru olsa da bu durum bu problem durumunda, stratejiyi doğru uygulayamadıklarından, yeni strateji veya kavramsal bilgi ilişkisi arayışında bulunmadan çözüm süreçlerini bitirmelerine neden olmuştur.

Tablo 6

Öğretmen Adaylarının P-2 İçin Muhakeme Eylemleri

Öğretmen Adayı	Muhakeme Eylemi
ÖA1	$ÖA_1ME_1$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji $ÖA_1ME_2$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji
ÖA2	$ÖA_2ME_1$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji $ÖA_2ME_2$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji
ÖA3	$ÖA_3ME_1$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji
ÖA4	$ÖA_4ME_1$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji



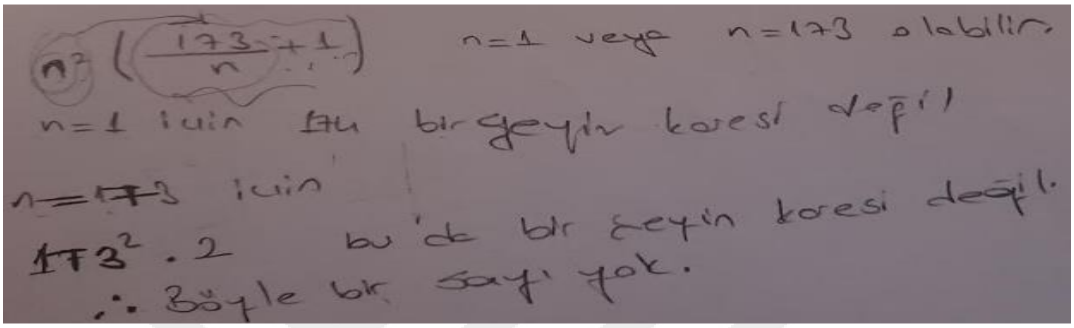
Şekil 16. Öğretmen adaylarının P-2 için muhakeme eylemleri

Öğretmen adaylarının bu probleme dair muhakeme süreçleriyle ilgili ayrıntılı bulgular ise şöyledir:

4.1.2.1. ÖA1'in P-2 için muhakeme süreci

ÖA1, öncelikle problemde verilen " $n(173+n)$ " ifadesinden yola çıkarak cebirsel bir strateji izlemiş ve buradan bir çıkarımda bulunmuştur:

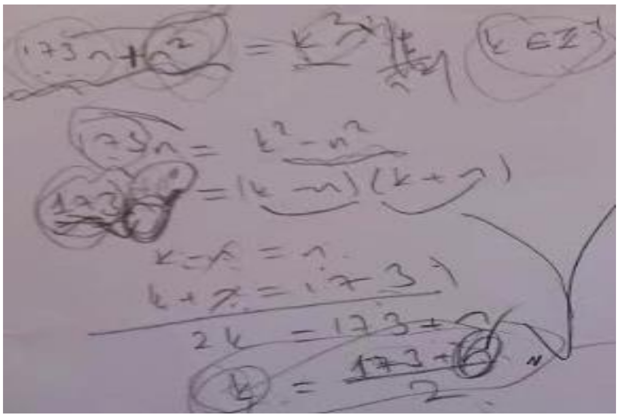
ÖA1: Cevabı bulmak için sayıları tek tek denemek zor olur diye düşündüm. Hani nasıl özelleştirebilirim diye baktım. Bunu n^2 parantezine aldım. Buradan $n^2(\frac{173}{n}+1)$ oldu. Bize pozitif tamsayıları soruyor. Tamsayı dediği için buranın $(\frac{173}{n}+1)$ tamsayı olması gerekir. 173 asal sayı olduğu için bölenleri 1 ve 173'tür zaten. n yerine 1 ve 173 koydum. İkisi de bir şeylerin karesi olmadı. O yüzden ben böyle bir sayı yok dedim.



Şekil 17. ÖA1'in P-2 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği ilk muhakeme eylemi

ÖA1, yukarıdaki açıklamalarından görüleceği üzere, izlediği cebirsel stratejide elde ettiği $n^2(\frac{173}{n}+1)$ çarpımının bir tamsayıya eşit olması için $(\frac{173}{n}+1)$ çarpanının da bir tamsayıya eşit olması gerektiği iddiasında bulunmuştur. Yani iki sayının çarpımının tamsayı olabilmesi için çarpanlardan her ikisinin de tamsayı olması gerektiği yanılgısına düşmüştür. Dolayısıyla ÖA1 matematiksel bilgi kaynaklı yaşadığı bu zorlukla yanlış bir çıkarımda bulunmuş ve 173 asal sayı olduğundan ve bölenleri olan $n=1$ ve $n=173$ için problemde istenilen koşullar sağlanmadığından çözüm kümesinin boş küme olduğunu iddia etmiştir. Bununla birlikte problemin ifadesi ÖA1'in bu iddiasından emin olmamasına neden olmuş ve başka bir cebirsel strateji ile problemi tekrar çözmüştür (Şekil 18):

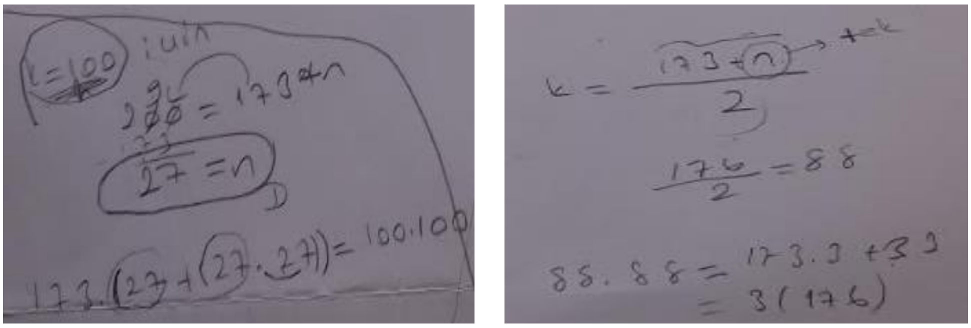
ÖA1: Problemde istendiğine göre bir tamsayı vardır diye emin olamadım bu çözümden. Çünkü var mıdır diye sormamış zaten. Şurada tekrar baktım.



Şekil 18. ÖA1'in P-2 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği ikinci muhakeme eylemi

Şekil 18'de görüldüğü gibi ÖA1, bu kez "$n(173+n)$" ifadesini bir k tamsayısının karesine eşitleyerek başladığı cebirsel stratejiyi izlemiştir. Çözüm incelendiğinde ÖA1'in $173n = (k-n)(k+n)$ eşitliğinde $(k-n)$'in ya 173'e ya da n'e eşit olacağını düşündüğü görülmektedir. Bu sırada ÖA1'in bir tamsayının çarpanlarına tek türlü ayrılabileceğini düşündüğü yani çarpanlara ayırma konusunda matematiksel bilgi kaynaklı zorluk yaşadığı söylenebilir. Yaptığı cebirsel işlemler sonucunda k ile n arasında bir bağıntı bulan ÖA1, bu bağıntıya göre özel değerleri ele alarak bir iddiada bulunmaya çalışmıştır:

ÖA1: k, n'ye bu şekilde bağlıymış yani. k'ya bir tane değer verdim ben. $k=100$ olsun dedim. Buna bağlı gelen n için sağlanması lazımdı. Ama buradan baktım olmadı. Aslında onun gelmesi lazımdı. Tam bulmadım ama vardır. Burada bölü 2 var ya yani $k = \dfrac{173+n}{2}$ o zaman sonucun tamsayı olması için n'nin kesinlikle tek olması lazım. Şimdi buradan tek sayıları düşünürsek hangi sayıları bulabiliriz diye düşündüm. Bakayım hepsi oluyorsa bütün tek sayılardır dedim. 3 için baktım olmadı. Ama buradan belki bulunabilir diye düşündüm ama tam bulamadım. Başka bir şey yapamadım.



(a) (b)

Şekil 19. ÖA1'in P-2 için izlediği cebirsel strateji ile elde ettiği verilerden çıkarımda bulunma eylemleri

Şekil 19'da görüldüğü üzere matematiksel bilgiye dayalı yaşadığı zorluk sonucunda k ile n arasında $k = \frac{173+n}{2}$ bağıntısını elde eden ÖA1, öncelikle k'ye rastgele bir değer (100) verip bulduğu n değeri için (27) istenilen koşulların sağlanmadığını görmüştür. Daha sonra n'ye değer vererek k'nın bulunabileceğini ve n'nin tek olması gerektiğini belirtmiştir. Öncelikle tüm tek tamsayıların olabileceğini düşünse de ele aldığı 3 tek tamsayısı için problemde istenilen koşullar sağlanmadığından bu iddiasından vazgeçmiş ancak n'nin bir tek tamsayı olarak bulunabileceğini belirterek çözümünü bitirmiştir. ÖA1'in söz eşitliğe çarpanlara ayırma konusunda yaşadığı matematiksel bilgiye dayalı zorluk sonucunda ulaşmış olması ile birlikte yorumlayış biçimi aynı zaman eşitlik, denklem, değişken gibi kavramlara dair de zorluklara sahip olduğunu göstermiştir. Yaşadığı bu zorluklar sonucunda yanlış iddialarda bulunarak çözüm sürecini sonlandırmıştır:

Araştırmacı: Peki problemde böyle bir sayı var mıdır diyor?

ÖA1: Hı öyle bir k vardır evet tamam buradan bulunabilir.

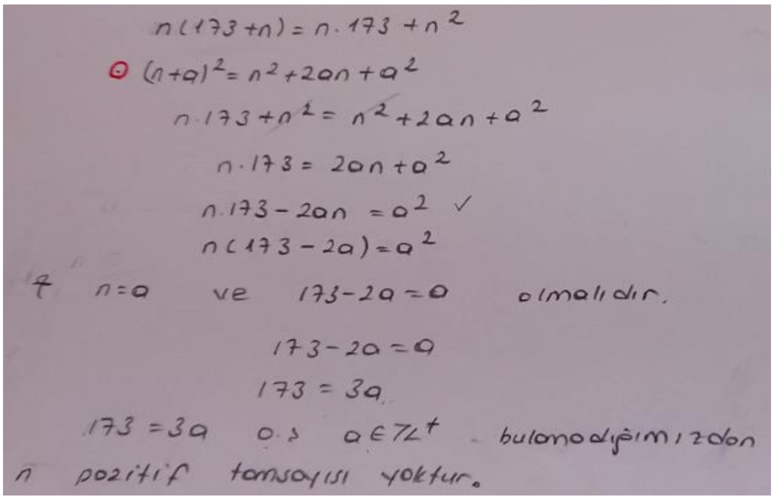
Araştırmacı: Varsa bul diyor ya da buradan vardır diyebiliyor musun?

ÖA1: Buradan vardır diyebiliyorum. Şu an ama ne olduğunu bulamadım.

4.1.2.2. ÖA2'nın P-2 için muhakeme süreci

ÖA2, öncelikle problemde verilen "$n(173+n)$" ifadesinin bir tamsayının karesine eşit olması halinde bu tamsayının n'den büyük olması gerektiği çıkarımında bulunmuştur. Daha sonra bu çıkarımını temel alarak cebirsel bir strateji izlemiştir:

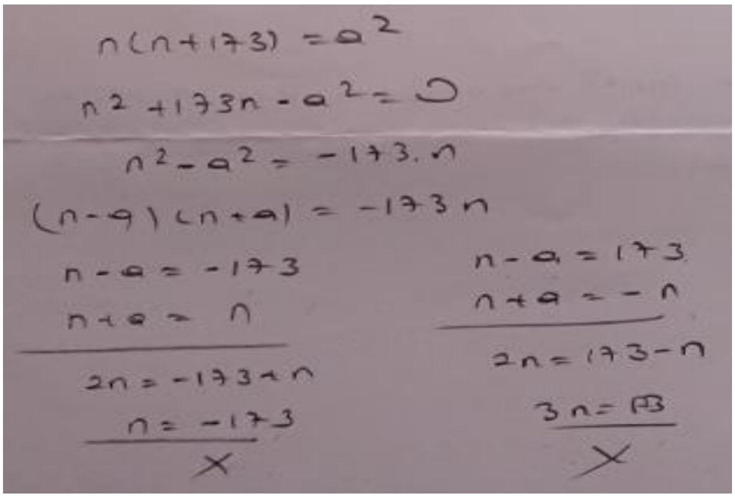
ÖA2: Bu bir tam kare ifadesi olarak yazılsın dedim. Hani n'den büyük bir sayı olacak ya bir de a sabiti alıp $(n+a)^2$'ye eşitledim. Bu sonuca ulaştım (Şekil 20).



Şekil 20. ÖA2'nin P-2 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği ilk muhakeme eylemi

Şekil 17'deki çözüm incelendiğinde ÖA2'nın $n(173-2a)=a^2$ eşitliğinden $n=a$ ve $173-2a=a$ eşitliklerini elde ettiği görülmektedir. Bulduğu eşitliklerden yaptığı işlemlerle $173=3a$ eşitliğine ulaşan ÖA2 buradan bir n tamsayının bulunamayacağını iddia etmiştir. Yani ÖA2'nin çarpanlara ayırma konusunda yaşadığı matematiksel bilgiye dayalı zorluk yanlış bir iddiada bulunmasına sebep olmuştur. ÖA2 problem çözme oturumunda artan vakti olduğu nedeniyle başka bir çözüm daha yapmıştır. Cebirsel stratejiye dayalı bu ikinci çözümünde ise ilk çözümünden farklı olarak bu kez $n(173+n)$ ifadesini yalnız bir a tamsayısına eşitleyerek işlemler yapmıştır (Şekil 21):

ÖA2: Vaktim vardı başka bir çözüm daha yaptım daha güzel oldu. Tam kare şeklinde yazılabileceğini yine kabul ettim. Buradan $n^2+173n-a^2=0$ ve $(n-a).(n+a)=-173n$ geldi. $(n-a)$ 'ya 173, $(n+a)$ 'ya n dediğimde $n=-173$ oldu. n pozitif tamsayı olduğundan sağlamadı. $(n-a)$ 'ya n, $(n+a)$ 'ya 173 dediğimde de yine çıkmadı. n bulunamıyor yani.



Şekil 21. ÖA2'nin P-2 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği ikinci muhakeme eylemi

ÖA2'nın izlediği ilk cebirsel stratejiden çok az farklılığı bulunan bu stratejide de ilkinde olduğu gibi bir tamsayının iki tamsayının çarpımı şeklinde tek türlü yazılabileceği şeklinde ifade edilebilecek çarpanlara ayırma konusunda doğru olmayan fikri dolayısıyla $n = -173$ ve $3n = 173$ eşitliklerini elde ettiği ve buradan n'in bulunamadığı iddiasında bulunduğu görülmektedir. Başka bir deyişle matematiksel bilgisinden kaynaklı yaşadığı zorluk yanlış bir çıkarımda bulunmasına neden olmuştur. Diğer taraftan ÖA2'nin cebirsel çözümlerin matematiksel olarak kabul edilebilirliğine yönelik bilgisi çözümünden emin olmasına ve bu problem için muhakeme sürecini bitirmesine neden olmuştur:

Araştırmacı: Yanıtın ile ilgili ne düşünüyorsun? Yani doğru mudur sence?

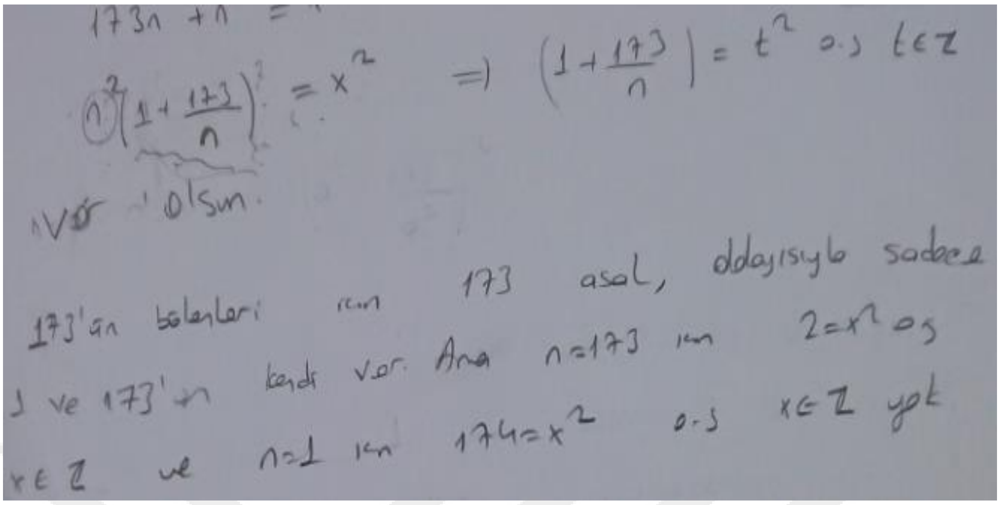
ÖA2: Evet yani denklem çözerek yaptım.

4.1.2.3. ÖA3'ün P-2 için muhakeme süreci

ÖA3, P-2 için çözüm sürecinde $n(173+n)$ ifadesini bir x tamsayısının karesine eşitleyerek başladığı cebirsel bir strateji izlemiştir (Şekil 22):

ÖA3: Kabul edelim ki tam kare olsun dedim ve x^2'ye eşitledim. Bunu n^2 parantezine aldım. Buranın tam kare olması için (eşitliğin sağ tarafı) buranın da (eşitliğin sol tarafı) tam kare olması gerekir. Zaten n^2 de sıkıntı yok. $(1+\dfrac{173}{n})$'nin bir şeyin karesi şeklinde olması gerekiyor. Ona da t^2 olsun dedim. Dolayısıyla 173'ün bölenlerine odaklandım. 173 asal bir sayı, 1 ve kendisi var sadece. Onları da yerine yazdığım zaman mesela $173 = x^2$

olacak şekilde ya da $x^2 = 2$ olacak şekilde bir tamsayı yok. Bulamadım. Dolayısıyla dedim ki hiçbir n pozitif tamsayısı için yazılamaz.



Şekil 22. ÖA3'ün P-2 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

Yukarıdaki söyleminde ÖA3'nin doğru yanıta varmasını sağlayacak yani "eşitliğin sağ tarafı bir tamsayının karesi ise sol tarafı da ya da sol taraftaki çarpanların her biri de bir tamsayının karesidir" şeklinde ifade edilebilecek bir fikir yürüttüğü görülmektedir. Ancak daha sonra bu fikirden uzaklaşmıştır. Problemde verilen ifadeyi n^2 parantezinde alarak yeniden temsil etmesinin bu fikirle doğru yanıta varmasına engel olduğu söylenebilir. Ayrıca bu sırada bir tamsayının iki tamsayının çarpımı şeklinde tek türlü yazılabileceği şeklindeki doğru olmayan matematiksel bilgisine dayanarak işlemler yapmasıyla elde ettiği eşitlikler yanlış çıkarımda bulunmasına neden olmuştur. Kısaca matematiksel bilgiye dayalı yaşadığı zorluk yanlış çıkarımda bulunmasına yol açmıştır. Dolayısıyla stratejinin başında ortaya koyduğu fikri temel alarak ifadenin başka temsilleri üzerinde çalışma ihtiyacı duymadığı söylenebilir.

Diğer taraftan "cebirsel işlemler"'e yaptığı vurgu ile cebirsel çözümlerin matematiksel olarak kabul edilebilirliğine yönelik doğru bilgiye sahip olduğu düşünülen ÖA3, süreçte yaşadığı zorluklar nedeniyle aslında yanlış olan çözümünden emin olduğunu belirtmiştir:

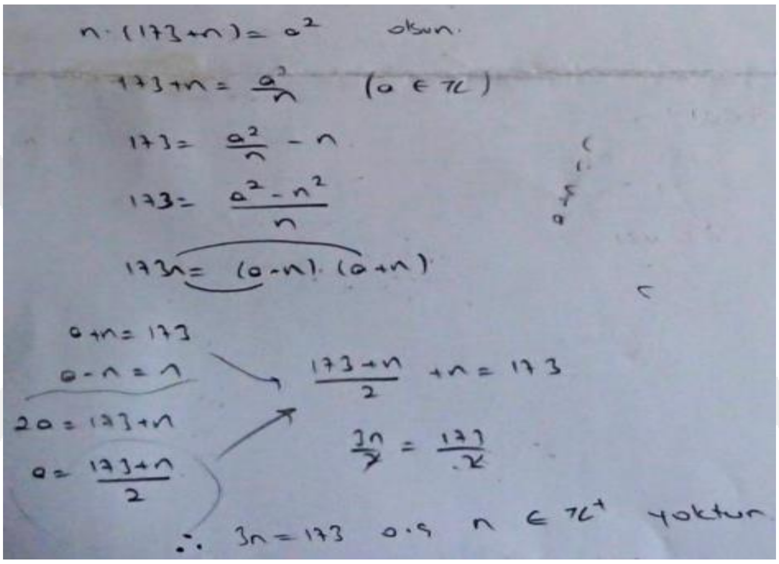
Araştırmacı: Bu çözümünün doğruluğu ilgili ne düşünüyorsun? Yanıtından emin misin?

ÖA3: Benim çok içime sindi. Doğru olduğunu da düşünüyorum. Burada cebirsel işlemler yaptım ve evet n bulunmuyor.

4.1.2.4. ÖA4’ün P-2 için muhakeme süreci

ÖA4, P-2’yi çözebilmek için $n(173+n)$ ifadesini bir a tamsayısının karesine eşitleyerek başladığı cebirsel bir strateji izlemiştir (Şekil 23):

ÖA4: a^2 olsun dedim. Ben burada 173’ü yalnız bırakmaya çalıştım. Hani a ile n arasında bir ilişki bulayım en azından değerleri bulabilirim diye düşündüm. Denklemi çözdüm. Burada 173 asal sayı zaten. 173, asal olduğu için bunları 173 ve n diye çarpanlarına ayırdım. Sonra buradan normal denklem çözdüm. Sonra yerine yazdığımda $3n = 173$ buldum. 173, 3’e bölünemediği için de böyle bir sayı yoktur dedim



Şekil 23. ÖA4’ün P-2 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

Şekil 23’teki çözüm incelendiğinde ÖA4’ün $173n = (a-n)(a+n)$ eşitliğinde $(a-n)$ ’i 173’e ve $(a+n)$ ’i de n ’e eşitlediği görülmektedir. Bulduğu eşitliklerden yaptığı işlemlerle $3n = 173$ eşitliğine ulaşan ÖA4’ün buradan bir n tamsayının bulunamayacağını iddia ettiği görülmektedir. Yani ÖA4’ün çarpanlara ayırma konusunda yaşadığı matematiksel bilgiye dayalı zorluk yanlış bir iddiada bulunmasına sebep olmuştur. Bununla birlikte cebirsel bir çözüm yaptığını düşünerek ÖA4 çözümünün doğru olduğunu düşündüğünü ifade etmiştir. Dolayısıyla ÖA4’ün cebirsel çözümlerin matematiksel olarak kabul edilebilirliğine yönelik bilgisi çözümünden emin olmasına ve bu problem için muhakeme sürecini bitirmesine neden olduğu söylenebilir:

Araştırmacı: Burada bitti değil mi çözümün?

ÖA4: Hı hı aynen. Doğru olduğunu düşünüyorum. Zaten denklem çözünce çıktı.

4.1.3. Problem-3'e Ait Bulgular

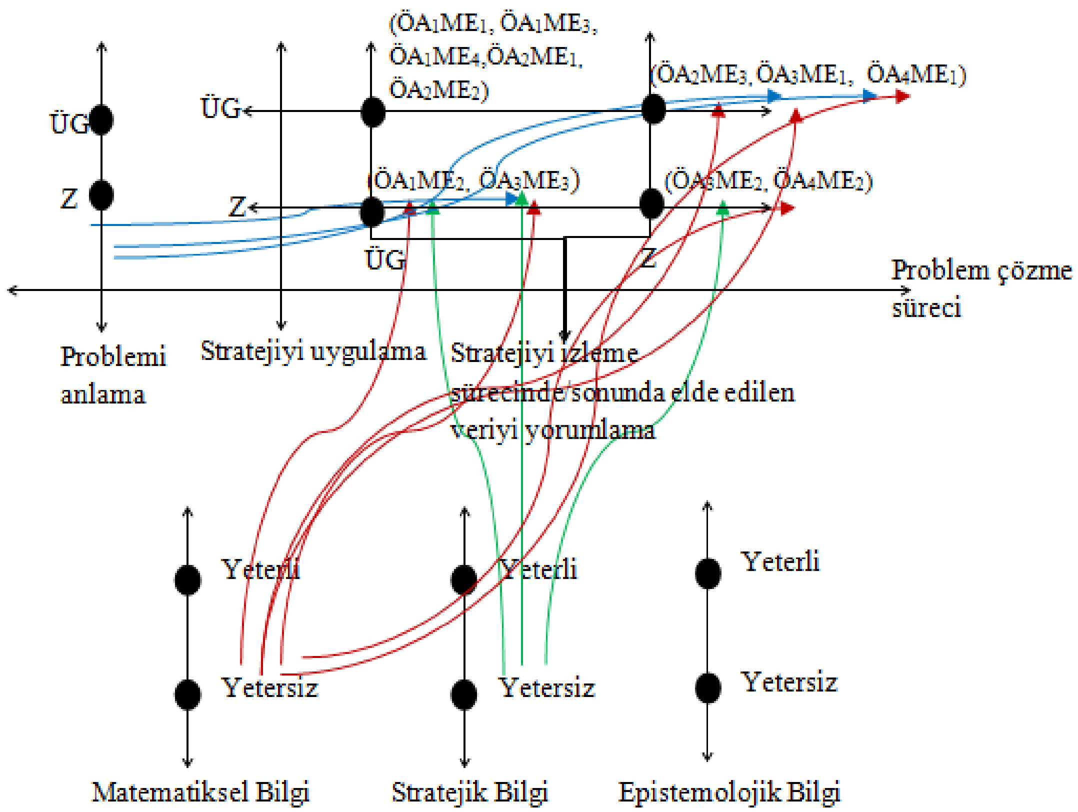
"Birçok pozitif tamsayı iki veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak ifade edilebilir. Örneğin, 24=7+8+9 ve 51=25+26. İki veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak ifade edilemeyen pozitif tamsayılara ilginç sayı denir. Tüm ilginç sayıları bulunuz." ifadesine sahip P-3'e göre iki veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı şeklinde ifade edilemeyen pozitif tamsayıların hangileri olduğu istenmektedir. Bunun için özel sayı örnekleri ile deneme yanılma yapılarak bir çıkarımda bulunulabilir veya genel sayı temsillerinden yola çıkılarak genellemelere varılıp daha sonra ortaya konulan iddia ispatlanabilir. Bu probleme dair örnek bir çözüm "Ekler" bölümünde verilmiştir.

Öğretmen adaylarının P-3 çözüm sürecindeki muhakeme eylemleri ve bu muhakeme eylemleri sürecinde yaşadıkları zorluklar Tablo 7 ve Şekil 24'teki gibidir. ÖA2 ve ÖA4'ün cebirsel stratejileri izlerken diğer iki adayın farklı stratejileri de izlediği görülmektedir. Bulgular kısmında da görüleceği üzere süreç sonunda öğretmen adaylarından ÖA1 toplam formülüne dayalı genel bir çözüm ortaya koymuştur. ÖA1 çözümünde öncelikle deneme yanılma stratejisiyle yanıta ulaşmış ancak bu yanıtını; 18 ve 20 tamsayılarını ardışık tamsayıların toplamı olarak ifade edemediğinden aksine örnek bulduğunu düşünerek çürütmüştür. ÖA1'in bu süreçte yetrince örnekle inceleme yapmadığı yani seçtiği stratejiyi etkin kullanamadığı söylenebilir. ÖA2, çözüm sürecinde "$a = 2(2n+3)$" eşitliğini elde etmiştir. Bu eşitlikten a'nın bir çift tamsayı olmasının yanında 4 ile bölümünden kalanın 2 olduğu görülmektedir. Ancak ÖA2 bu ifade ile elde ettiği sonucu yalnızca çift tamsayılara genelleyerek; tamsayıların temsillerini yorumlama ve tüm çift tamsayıların aynı özellikle olacağı düşüncesiyle yanlış bir iddia ile çözüm sürecini sonlandırmıştır. ÖA3 ise doğru yanıtı vermiş ancak özellikle çelişki ile ispat stratejisinde yaşadığı zorluklardan dolayı bu yanıtını doğrulayamamıştır. ÖA4 ise deneme yanılma stratejisi sonunda bir genellemeye vararak doğru çözüm kümesini sunmuş ancak temsilleri tanımadaki yaşadığı zorluktan ve tamsayıların özelliklerini ilişkilendiremediğinden bu kümenin özelliklerini tam anlamıyla ortaya koyamamıştır. Özetle ÖA1 ve ÖA3'ün çözüm sürecinde stratejik zorluklar, ÖA2 ve ÖA4'ün çözüm sürecinde ise kavramsal zorluklar adayların muhakeme eylemlerini doğru bir şekilde sürdürmelerine engel olmuştur. Diğer taraftan öğretmen adaylarının ortaya koydukları çözümleriyle ilgili değerlendirmeleri analiz edildiğinde epistemolojik bilgilerine dayalı zorluk yaşadıklarına rastlanılmamıştır.

Tablo 7

Öğretmen Adaylarının P-3 İçin Muhakeme Eylemleri

Öğretmen Adayı	Muhakeme Eylemi
ÖA1	ÖA$_1$ME$_1$: Deneme yanılma stratejisi
	ÖA$_1$ME$_2$: Aksine örnek bulma stratejisi
	ÖA$_1$ME$_3$: Toplam formülüne dayalı cebirsel strateji
ÖA2	ÖA$_2$ME$_1$: Ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji
	ÖA$_2$ME$_2$: Ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji
	ÖA$_2$ME$_3$: Ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji
ÖA3	ÖA$_3$ME$_1$: Deneme yanılma stratejisi
	ÖA$_3$ME$_2$: Çelişki ile ispat stratejisi
	ÖA$_3$ME$_3$: Tümevarımla ispat stratejisi
ÖA4	ÖA$_4$ME$_1$: Ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji
	ÖA$_4$ME$_2$: Ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji



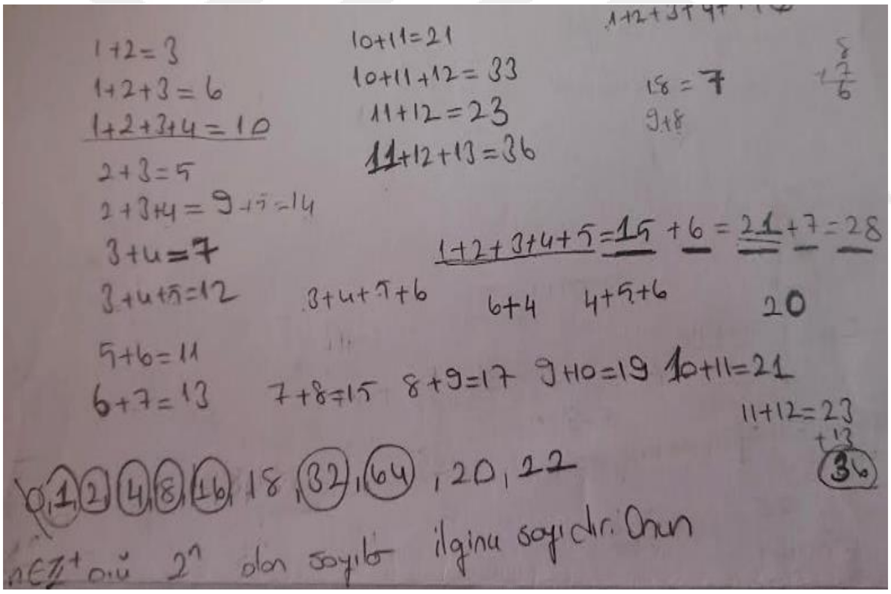
Şekil 24. Öğretmen adaylarının P-3 için muhakeme eylemleri

Öğretmen adaylarının bu probleme dair muhakeme süreçleriyle ilgili ayrıntılı bulgular ise şöyledir:

4.1.3.1. *ÖA1'in P-3 için muhakeme süreci*

ÖA1 öncelikle özel örnekleri inceleyip buradan genellemeye ulaşmak istediğini belirttiği bir stratejiyi yani deneme yanılma stratejisini izlemiş ve bu süreçteki gözlemleri sonucunda çıkarımlarda bulunmuştur (Şekil 25).

ÖA1: Öncelikle kafamda bir şeyler oluşsun diye ardışık sayıları topladım. Bakalım ne geliyor ne gelmiyor diye. Sonra ifade edilebilenler neler, yani belirli bir genellemeye varabilir miyim diye birkaç tane deneme yaptım. Sonra buradan 1, 2, 4, 8, 16 diye birkaç tane sayı buldum. Sonra buradan dedim ki 2'nin kuvvetleri ilginç sayıdır. 128'i deneyemedim. Yani 64'ten sonrasını şey yapamadım ama hani öyle düşündüm.



Şekil 25. ÖA1'in P-3 için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

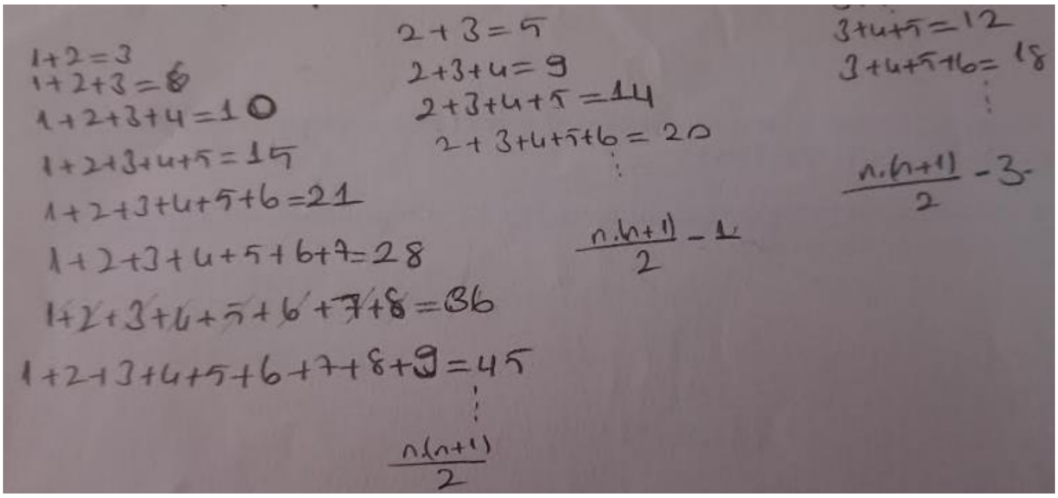
Şekil 25'ten de görüleceği üzere ÖA1 genel olarak 15'ten küçük tamsayılar içerisinden seçtiği ardışık iki, üç ve dört pozitif tamsayıyı toplayarak, her biri için birkaç deneme yapmıştır. Bu süreçte elde ettiği toplamları inceleyen ÖA1, bir genelleme yapmış ve yanıtın 2^n olacağı iddiasında bulunmuştur. ÖA1, daha sonra bu iddiasını test etmek için aksine örnek verme stratejisi ile 2'nin kuvveti olmayan 18 ve 20 tamsayılarını ele alıp, bu tamsayıları ardışık sayıların toplamı olarak yazmaya çalışmıştır:

ÖA1: Ben 18’i de ardışık sayıların toplamı şeklinde yazamadım. Ama 18, 2’nin bir kuvveti değil. Orada bir çelişkiye düştüm. 20’yi de yazamadım. O da 2’nin bir kuvveti değil. Çelişkiye düştüm sonra bu çözümü bıraktım.

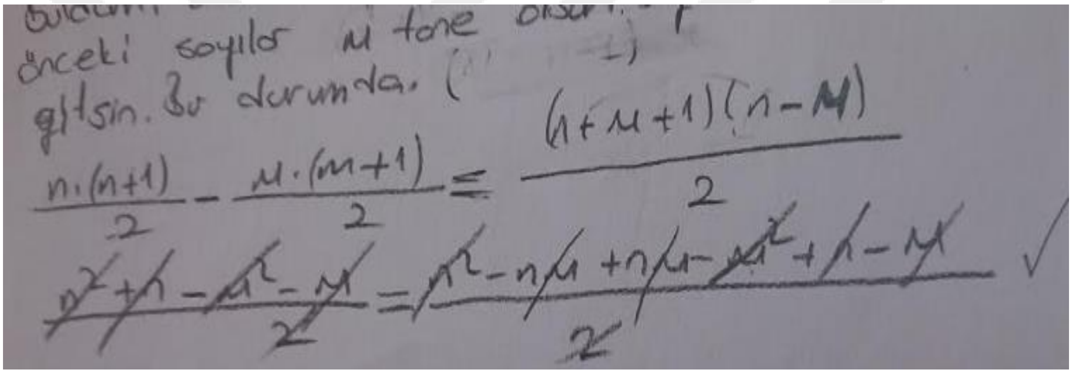
Açıklamalarından görüldüğü üzere ÖA1, iddiasını test ederken seçtiği 18 ve 20 tamsayılarını ardışık pozitif tamsayıların toplamı olarak yazamadığı için iddiasını çürüttüğünü belirtmiştir. Burada incelediği örneklerle bir genellemeye vararak problemin yanıtına dair doğru bir iddiada bulunan ÖA1’in, iddiasını test etmek için seçtiği tamsayıları ardışık tamsayıların toplamı şeklinde yazabilmek için uygun tamsayı grupları ile yeterince denemede bulunmadığı söylenebilir. Başka bir deyişle iddiasını test etmek için aksine örnek stratejisi uygun olmakla birlikte bu stratejiyi uygularken toplamları 18 ve 20 olacak şekilde örnek sayılar seçmede stratejik yaklaşamamıştır. Diğer taraftan problem durumunu mantıken anlamadığı ve ardışık sayıların toplamlarına dair fikirlerle problem durumuna yaklaşmadığı söylenebilir. Çünkü aksi halde 1’den büyük tek tamsayı böleni olan 18 ve 20 tamsayılarının bu tek sayıların kardinali adedince ardışık tamsayının toplamı olarak yazılabileceğini (Ör: $3|18$ ve $18 \div 3 = 6$ olduğundan $18 = 5 + 6 + 7$ şeklinde yazılabilir.) düşünmenin zor olmayacağı açıktır. Özetle, problem çözme yaklaşımına, stratejik yaklaşımına ve matematiksel bilgiye dayalı zorluklar ÖA1’in aslında doğru olan iddiasını çürüttüğünü düşünmesine neden olmuştur.

ÖA1, daha sonra ardışık pozitif tamsayıların toplamını bulmada kullanıldığı bilinen genel formülü temel aldığı bir strateji ile muhakeme sürecine devam etmiştir (Şekil 26-27):

ÖA1: Sonra ardışık sayıların toplamından gideyim dedim. Oradan belki genel bir formül falan bulurum diye düşündüm. Dedim ki önceki sayılar m tane olsun. Ardışık sayılar da $m+1$’den n’ye kadar gitsin. Sonra $m+1$’den n’ye kadar giden sayıların toplamından m’ye kadar olan sayıların toplamını çıkardım. Böylece $m+1$’den n’ye kadar olan sayıların toplamını bulmuş oldum.



Şekil 26. ÖA1’in P-3 için toplam formülüne dayalı cebirsel stratejiyi izlemek üzere hazırlığı



Şekil 27. ÖA1’in P-3 için toplam formülüne dayalı cebirsel stratejiyi izlediği muhakeme eylemi

“$\frac{n.(n+1)}{2}$” formülünün 1’den n’ye kadar olan ardışık tamsayıların toplamını verdiği bilinmektedir. Bu formülden yararlanarak Şekil 22’de görüldüğü gibi $m+1$’den n’ye kadar olan ardışık tamsayıların toplamını bulan ÖA1 “Bunun dışındakiler ilginç sayıdır dedim.” diyerek genel bir sonuca varmıştır. ÖA1, ardışık tamsayıların toplam formülünün temel alarak cebirsel işlemler sonucunda elde ettiği ifadenin doğru olduğunu belirtmekle birlikte iddiasını çok genel kaldığı yönünde eleştirmiştir:

ÖA1: Bunun dışında kalanlar dedim ama kendimi eleştirdim ben.

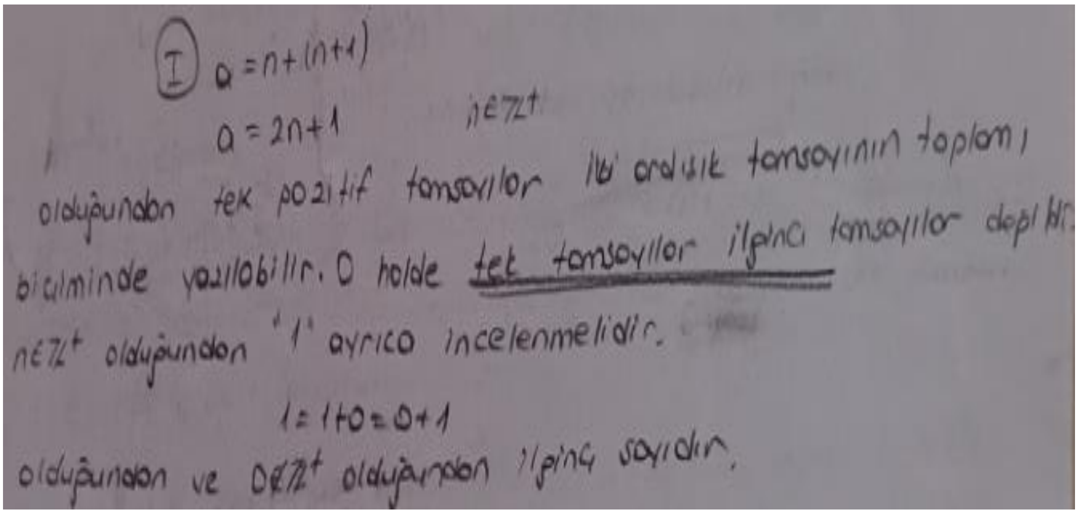
Araştırmacı: Nasıl eleştirdin?

ÖA1: Eminim aslında. Böyle bulunabilir ama bu çözüm o kadar genel ve açık ki. m’yi ne seçeceğim n’yi ne seçeceğim belli değil. İki tane bilinmeyen var. Ama yazdığımızda da bulabiliriz. Bütün sayılar için denemek tabi çok zor.

4.1.3.2. ÖA2'in P-3 için muhakeme süreci

ÖA2 öncelikle ardışık pozitif tamsayıların toplamı olarak yazılabilen tamsayıları bulup daha sonra yazılamayanları bulmayı düşündüğünü belirttiği cebirsel bir strateji izlemiştir. Öncelikle genel sayı temsilleri ile iki ardışık sayının toplamını incelemiş ve buradan bir çıkarımda bulunmuştur:

ÖA2: Ben ilk olarak dedim ki ardışık olarak yazılabilenleri göstereyim. Sonra yazılamayanları o şekilde bulayım. İki ardışık sayının toplamı şeklinde yazılanlar tek sayılardır o yüzden tek sayıları eledim direk. Hani tek sayılar iki ardışık sayının toplamı biçiminde yazılabiliyor. Ama buradan 1'i eledim.



I $a = n + (n+1)$

$a = 2n+1 \quad n \in \mathbb{Z}^+$

olduğundan tek pozitif tamsayılar iki ardışık tamsayının toplamı biçiminde yazılabilir. O halde tek tamsayılar ilginç tamsayılar değil(dir).

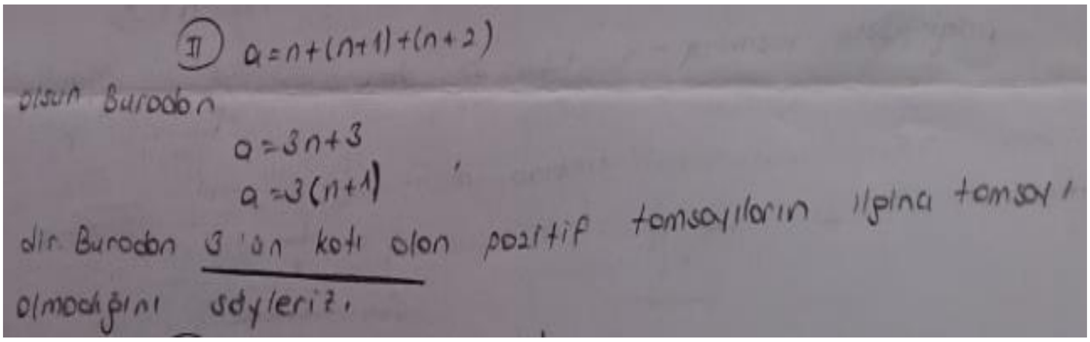
$n \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan '1' ayrıca incelenmelidir.

$1 = 1+0 = 0+1$

olduğundan ve $0 \notin \mathbb{Z}^+$ olduğundan ilginç sayıdır.

Şekil 28. ÖA2'nin P-3 için ardışık sayılara daylı cebirsel strateji izlediği ilk muhakeme eylemi

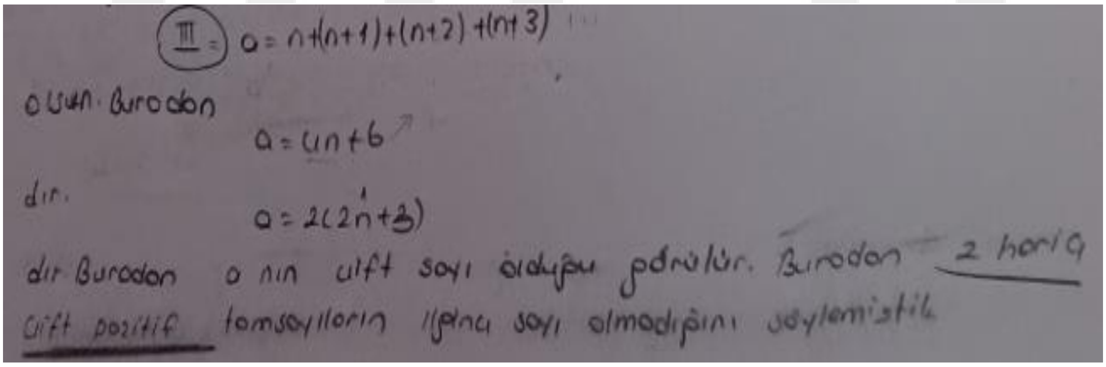
Şekil 28'de görüldüğü gibi cebirsel bir strateji izleyen ÖA2, genel sayı temsilleri ile n ve $n+1$ şeklinde ele aldığı iki ardışık tamsayının toplamını $2n+1$ şeklinde bulduğundan tek sayıların iki ardışık tamsayının toplamı şeklinde yazılabileceği iddiasında bulunmuş ve sonra problemde "ardışık pozitif tamsayıların toplamı" ifadesi bulunduğundan ve n sıfır değerini alamayacağından 1'i hariç tutmuştur. Daha sonra genel sayı temsilleri ile üç ardışık sayıyı toplamıştır (Şekil 29).



Şekil 29. ÖA2'nin P-3 için ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji izlediği ikinci muhakeme eylemi

Şekil 29'da görüldüğü gibi üç ardışık sayı temsilini topladıktan sonra bu toplamı 3 parantezine alarak 3'ün katı olan tamsayıların da ardışık sayıların toplamı şeklinde yazılabileceğini iddia eden ÖA2 dört ardışık sayının toplamını incelemeye başlayarak cebirsel stratejisini izlemeye devam etmiştir:

ÖA2: Sonra dört ardışık sayı için baktım. Buradan da $4n+6$ geldi. 2 parantezine aldım ve $2(2n+3)$ geldi. Buradan dedim ki çift sayıları da bu şekilde eleyebilirim. Ama 2'yi eledim. Sonra burada n yerine en küçük 1 alabileceğim için 10'dan küçük diğer çift sayıları da elemem gerekiyordu. Yani sonuç olarak 1,2,4,6,8 ilginç sayı oluyor.



Şekil 30. ÖA2'nin P-3 için ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji izlediği üçüncü muhakeme eylemi

Şekil 30'da görüldüğü gibi genel sayı temsilleri ile ardışık dört sayının toplamının çift sayı olacağını gözlemleyen ÖA2, buradan n'nin en küçük 1 tamsayı değerini alabildiğini göz önünde bulundurarak 10'dan küçük çift sayıların ardışık pozitif tamsayıların toplamı olarak yazılabileceğini düşünmüş ve daha önce elde ettiği 1 tamsayısını da çözüm kümesinin içerisine katarak 1,2,4,6 ve 8'in ilginç sayı olacağı iddiasında bulunmuştur. Dört ardışık pozitif tamsayının toplamının, dördün bir katı olacağı için bir çift tamsayı olacağı ve bu gerçeğin ÖA2'nın elde ettiği $a = 2(2n+3)$ eşitliğinden de görülüyor olduğu açıktır. Ancak bu eşitlik, a pozitif tamsayısının çift olmaktan başka özelliklerini de ortaya koymaktadır.

Nitekim tüm çift tamsayıların 2 ile tam bölünebilir olmaları ortak özellikleridir ancak çift tamsayılar birbirinden farklı özellikleri barındırabilirler. Örneğin a çift pozitif tamsayısının 4 ile bölümünden kalanın 2 olduğu görülmektedir. Bu durum, ÖA2'nın tüm çift tamsayıların aynı özellikleri taşıdığını düşündüğü şeklinde yorumlanmıştır. Dolayısıyla matematiksel bilgiye dayalı sahip olduğu zorluk, yanlış bir iddiada bulunmasına neden olmuştur. Aşağıdaki diyalog da bu yorumu destekler niteliktedir:

Araştırmacı: Dört ardışık sayının toplamından başka çift sayılarla ilgili bir deneme yapmayı düşünmedin mi?

ÖA2: Hayır çünkü toplamları $4n+6$ geldi. Oradan 2 parantezine aldım ve $2(2n+3)$ geldi. Dedim ki bu o zaman çift sayı olacak. 2 çarpanı geliyor ya başta. O yüzden çift sayıları direk eledim. 1 hariç tekleri de elemiştim zaten.

Diğer taraftan ÖA2 problem çözme oturumunun sonunda yaptığı yorumda probleme dair doğru sonuca ulaştığını düşündüğünü ancak ifade etme bakımından çözümünde eksiklikler olabileceğini belirtmiştir. Bu düşüncesini görüşme sırasında da yenilemiştir:

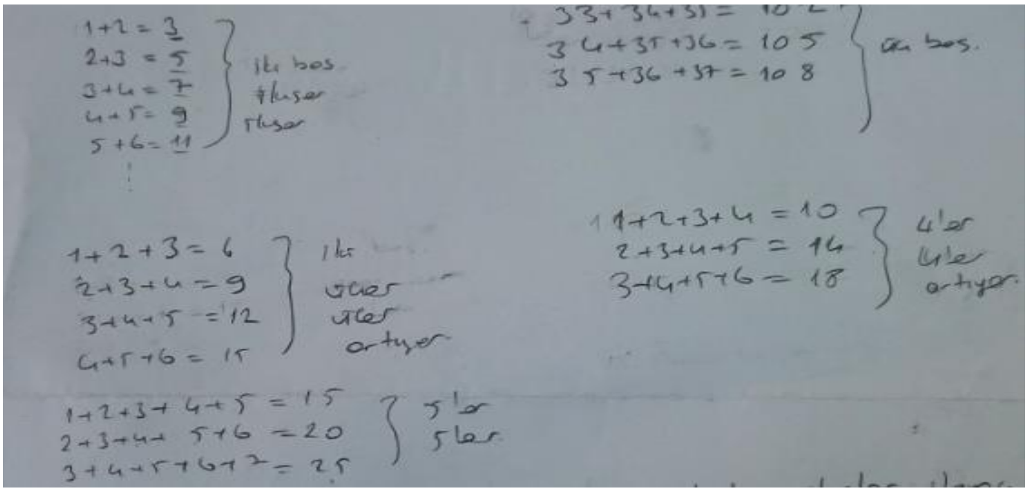
Araştırmacı: Yorumunda çözümünün doğru olduğunu düşündüğünü belirtmişsin.

ÖA2: Evet bence doğru. İlk olarak bir a pozitif tamsayısı aldım ve bu a sayısının ilginç bir sayı olduğunu kabul ettim. Sonra bir genellemeye gittim. Buradan doğru sonuca ulaştığımı düşünüyorum. Tam ifade edemediğim için çözümümde eksiklikler olabilir.

4.1.3.3. ÖA3'in P-3 için muhakeme süreci

ÖA3 öncelikle ele aldığı özel örneklerle sırasıyla, iki, üç, dört ve beş ardışık sayının toplamı için birkaç durumu inceleyerek yani deneme yanılma stratejisini izleyerek buradan bir genellemeye varmaya çalışmıştır (Şekil 31):

ÖA3: İlk başta biraz denedim. Daha sonra oradan baktım ki olmuyor ama bir şey dikkatimi çekti yaparken. Çift sayılar arasında aramalıyız dedim. Çünkü tek sayılar iki ardışık sayının toplamı şeklinde yazılabiliyordu. Sonra dördün katları da ilginç değil dedim ama baktım ki 2'nin kuvvetleri hariç yazılabiliyordu.



Şekil 31. ÖA3'ün P-3 için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Şekil 31'de görüldüğü gibi ÖA3, genel olarak 10'dan küçük tamsayılar içerisinden seçtiği ardışık iki, üç ve dört pozitif tamsayıyı toplamış ve her biri için birkaç deneme yapmıştır. Elde ettiği toplamlara dair gözlemleri sonucunda öncelikle tek sayıların hepsinin iki ardışık sayının toplamı olarak yazılabileceğini iddia etmiştir. İlginç sayıları çift sayılar arasında ararken dördün katı olanların ilginç sayı olamayacağı iddiasında bulunmuş sonra ise bu iddiasını çürüterek 2'nin kuvvetlerinin ilginç sayı olduğunu iddia etmiştir. Daha sonra bu iddiasını sayı örnekleri ile test etmiştir:

ÖA3: Mesela 16'yı denedim 32'yi denedim. Gerçekten de bunların yazılamadığını gördüm. Diğerleri mesela şu aradaki 15 ile 22 arasındaki tüm sayıları denedim.

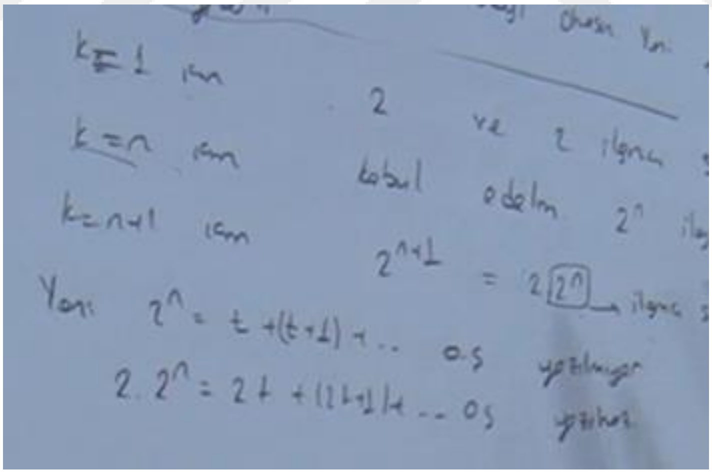
Bununla birlikte ÖA3'nin çıkarımda bulunurken 2'nin tek sayıya eşit olan tek kuvvetini yani $2^0 = 1$'i ihmal ettiği görülmektedir. Yani problem durumunda verilen sayı kümesinin ve matematiksel kavramların özelliklerini ihmal ederek aşırı genellemede bulunduğu söylenebilir. ÖA3 daha sonra 2'nin kuvveti olarak ortaya koyduğu iddiasını çelişki ile ispat stratejisini kullanarak ispatlamak istediğini ancak daha sonra vazgeçtiğini açıklamıştır:

Araştırmacı: Çelişki ile ispattan neden vazgeçtin?

ÖA3: Çünkü ben zaten bunun olduğunu düşünüyorum (çözüm kümesini gösteriyor) ve ben burada aksine bir şey bulamam zaten. Ama ben şöyle düşündüm buradaki her şey ilginç sayı. Çelişkiye varmam için buradan bir sayı seçmeliyim ki onu iki ardışık sayının toplamı şeklinde yazabileyim. Ama zaten ilginç sayı olduğunu yani yazılamadığını düşündüğüm için seçemiyorum. Benim aklıma gelmiyor. Hani düşündüm bulamadım. Bulamadığım için çelişkiden vazgeçtim. Hani çürütemediğimi düşündüğüm için. Zaten aksine bir örnek bulamam ben burada.

ÖA3'nin açıklamalarından da görüldüğü üzere çelişki ile ispat stratejisini doğru kavrayamadığı düşünülmektedir. Çünkü seçtiği bu stratejiye göre çözüm kümesi içerisinden aldığı bir elemanın ardışık pozitif tamsayıların toplamı olarak yazılabildiğini iddia edip çelişkiye düşmesi gerekirken, ÖA3 çözüm kümesi içerisinde gerçekten bu şekilde yazılamayan bir tamsayı aradığını ifade etmiştir. Stratejik bilgiye dayalı yaşadığı bu zorluktan sonra ÖA3 tümevarım stratejisi ile iddiasını ispatlamaya çalışarak muhakeme sürecine devam etmiştir:

ÖA3: O yüzden dedim tümevarımla bakayım. Tümevarım yapmak için de ilk başta $k=1$ için gerçekten 2 ilginç sayı. O zaman n için kabul edelim bunu dedim. $n+1$ için gerçekten olduğunu göstereceğim. 2^{n+1}, 2.2^{n} şeklinde yazılabiliyor ve ben de biliyorum ki 2^{n} ilginç sayı değildir. İlginç olsaydı zaten mesela $t+(t+1)+...$ şeklinde yazılacaktı. Hani olsaydı eğer. Bunun başında 2 var ya 2 ile çarptığımızda da şöyle bir format geliyor elime ($2t+(2t+1)+...$). Bu da yine ardışık sayılar. Bu yazılamıyorsa bu da yine yazılamaz. Sonuçta bu $t+(t+1)+...$ şeklinde yazılamıyordu. Bunun 2 katını alınca da yine yazılamayacak. Dolayısıyla $n+1$ için de göstermiş olduğumu hissediyorum.



Şekil 32. ÖA3'ün P-3 için tümevarım stratejisini izlediği muhakeme eylemi

ÖA3'nin Şekil 32'de görülen çözümü ve çözüme dair açıklamaları incelendiğine kabullerinden yola çıkarak ifadeleri aralarında mantıksal bir ilişki olmadan tümevarım stratejisini kullandığı görülmektedir. Dolayısıyla ÖA3'nin seçtiği stratejiyi doğru uygulama konusunda zorluk yaşadığı söylenebilir. Bununla birlikte kendisi de yaptığı ispatın doğruluğundan emin olmadığını belirtmiştir:

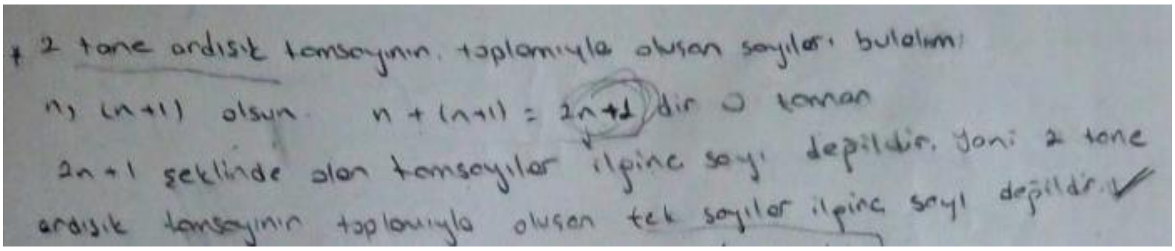
Araştırmacı: Yaptığın bu ispatı doğru buluyor musun?

ÖA3: Yaptığım şeyle alakalı yani açıkçası şuradan şuraya ben dedim ki hani bu yazılamıyorsa bu da yazılamaz diyorum ama hani neye dayanarak diyorum bunu, bana öyle geliyor belki de. Yani pek emin değilim.

4.1.3.4. ÖA4'ün P-3 için muhakeme süreci

ÖA4, ardışık pozitif tamsayıların toplamı olarak yazılabilen tamsayıları bulup daha sonra yazılamayanları bulmayı düşündüğünü belirttiği cebirsel bir strateji izlemiştir. Bunun için öncelikle genel sayı temsilleri ile iki ardışık sayının toplamını incelemiş ve buradan bir çıkarımda bulunmuştur (Şekil 33):

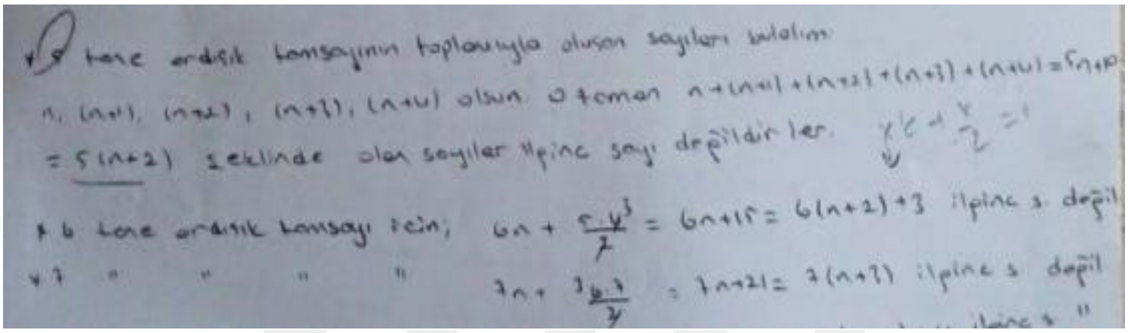
ÖA4: Şimdi soruda iki veya daha fazla sayı demiş. Ben önce ikiden daha fazlaya gitmeyi düşündüm. Önce iki tane sayı ile ulaşmaya çalıştım. Hani ilginç sayıyı bulmaktan ziyade ilginç olmayanları bulursam daha net gidebilirim diye düşündüm. O yüzden iki tane ardışık sayılarla başladım. Burada sayıları n ve $n+1$ şeklinde aldım. Toplamları zaten $2n+1$ şeklinde olacağı için bu ilginç sayı olmuyor dedim. $2n+1$ şeklinde olanlar yani tek sayılar ilginç sayı olmuyor. Çift sayılar ilginç sayı oluyor dedim. Buna bir yıldız koydum. Bu dursun dedim.



Şekil 33. ÖA4'ün P-3 için ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji izlediği ilk muhakeme eylemi

Şekil 33'te görüldüğü gibi cebirsel bir strateji izleyen ÖA4, genel sayı temsilleri ile n ve $n+1$ şeklinde ele aldığı iki ardışık tamsayının toplamını $2n+1$ şeklinde bulduğundan tek sayıların iki ardışık tamsayının toplamı şeklinde yazılabileceği iddiasında bulunmuştur. ÖA4'ün bu sırada problem durumundan uzaklaşarak aşırı genellemede bulunduğu söylenebilir. Çünkü n problem durumuna göre sıfır olamayacağından bir tek tamsayı olan 1 de iki ardışık pozitif tamsayının toplamı şeklinde yazılamaz. ÖA4 daha sonra $n, n+1, n+2, \ldots$ şeklinde ele aldığı genel sayı temsilleri ile on üç ardışık sayının toplamına kadar cebirsel stratejisini uygulamaya devam etmiş ve elde ettiği eşitliklerden çıkarımlarda bulunmuştur:

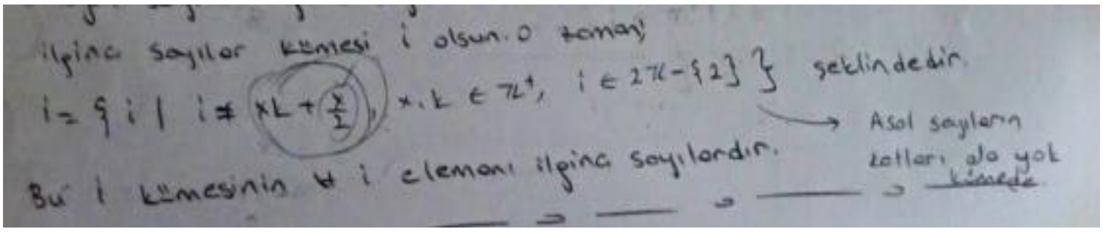
ÖA4: Sonra üç sayı için aynı şeyi düşündüğümde bu şekilde bir eşitlik elde ettim ve 3'ün katı şeklinde olarak düşündüm bunu da. Bu şekilde düşündüğümde $3(n+1)$ şeklinde olanlar ilginç sayı değildir dedim. Dört, beş ve böyle diğerlerine baktım. Belli bir kural bulmaya çalıştım. Bu şekilde düşündüğümde asal sayıların ve katlarının ilginç sayı olmadığı gibi bir eşitliğe ulaştım. Daha sonra diğer yani asal sayıların dışındaki sayılar için de bir eşitliğe ulaştım. Sayının katı olacak ve katının yarısı da kalanı şeklinde olursa bunlar ilginç sayı değildir dedim. Hani bu şekildeki eşitliği sağlayan sayılar ilginç sayı değildir dedim.



Şekil 34. ÖA4'ün P-3 için ardışık sayılara dayalı cebirsel strateji izlediği ikinci muhakeme eylemi

Şekil 34'ten ve yukarıdaki açıklamalarından görüleceği üzere ÖA4 izlediği cebirsel strateji sonucunda tek sayıda ardışık sayıyı topladığında bu tek tamsayının bir tam katını elde etmiştir. Elde ettiği bu toplamlardan yola çıkarak asal sayıların ve asal sayıların tamsayı katlarının ilginç olamayacağı çıkarımında bulunmuştur. Burada ÖA4'ün bir çift asal sayı olan 2 tamsayısını göz ardı etmesinin yanlış bir genellemede bulunmasına neden olduğu görülmektedir. ÖA4 çift sayıda ardışık sayıyı topladığında ise bu çift sayının bir tamsayı katı ile ve bu çift tamsayının yarısının toplamı şeklinde eşitliklere ulaşmış ve bu sonucu genelleyerek $xk+\frac{x}{2}$ eşitliğini oluşturmuştur. Daha sonra ÖA4, tek tamsayılar ilginç sayı olamaz, asal sayılar ve asal sayıların tam katları ilginç olamaz ve $xk+\frac{x}{2}$ şeklinde yazılabilen sayılar ilginç olamaz şeklinde ifade edilebilecek çıkarımlarından Şekil 35'te görülen ilginç sayı kümesini oluşturmuştur:

ÖA4: Bulduğum üç şeyi birleştirip yani onların kesişim kümesi şeklinde düşündüm. Hani kesişim kümesini sağlayan elemanlar ilginç sayı değildir. O zaman kesişim kümesinin tümleyeni de ilginç sayılardır diye düşündüm.



Şekil 35. ÖA4'ün P-3 için çözüm kümesi

ÖA4'ün oluşturduğu kümeyi incelediğimizde $xk+\frac{x}{2}$ şeklinde ifade edilemeyen i çift tamsayılarının ilginç olduğunu belirtmiştir. Bu eşitliğin bir tamsayı olması için x'in bir çift tamsayı olacağı açıktır. Dolayısıyla n bir pozitif tamsayı olmak üzere $x=2n$ olarak aldığımızda $xk+\frac{x}{2}=2nk+\frac{2n}{2}=2nk+n=n(2k+1)$ eşitliği elde edilir ki bu da i'nin tek tamsayı böleni olmayan sayıları yani problemde istenilen ilginç tamsayıları verir. Elde edilen bu eşitlik tek başına problemin doğru yanıtını ifade edebilecek özellikte olmakla birlikte ÖA4'ün elde ettiği bu cebirsel ifadeleri ilişkilendirmede ve anlamlandırmada güçlük çekmesi bulduğu sonuçları anlamlı bir şekilde yorumlayamamasına neden olmuştur:

Araştırmacı: Bu küme mi senin yanıtın?

ÖA4: Yok sonra şunu şey yaptım. Şunu ekledim. Hani asal sayılar diye düşünmüştüm en başta sonra asal sayıların katları da olabilir diye düşündüm.

Araştırmacı: Asal sayılar ilginç mi?

ÖA4: Değil. Ben bunu hani tümleyeni zaten eşitlikte de asal sayı olmadığını belirttim burada. Asal sayıların katlarının da olmayacağını düşündüm O şekilde gitmeye çalıştım. Hani belli bir sayıyı deneyerek değil de hani somut bir şey olsun istedim.

Araştırmacı: Dolayısıyla şurada şu kümen senin ilginç sayılar kümen mi?

ÖA4: Aynen çünkü eşit değildir şeklinde tanımladım burada.

Araştırmacı: Cevabından emin misin?

ÖA4: Çok emin değilim. Yani çok tatmin olmadım ama. Hani bir sayıyı denemektense bunu yapardım yani.

Araştırmacı: Yani belirlediğin üç özellikten emin değil misin?

ÖA4: Eminim ama belki başka bir yöntemle bulunmalıdır.

Açıklamalarından görüldüğü üzere, ÖA4 yanıtından emin olmuş ancak çözüm yolununun bu yanıtının doğruluğunu kesin bir şekilde göstermeye yeterli olmadığını düşünmüştür.

4.1.4. Problem-4'e Ait Bulgular

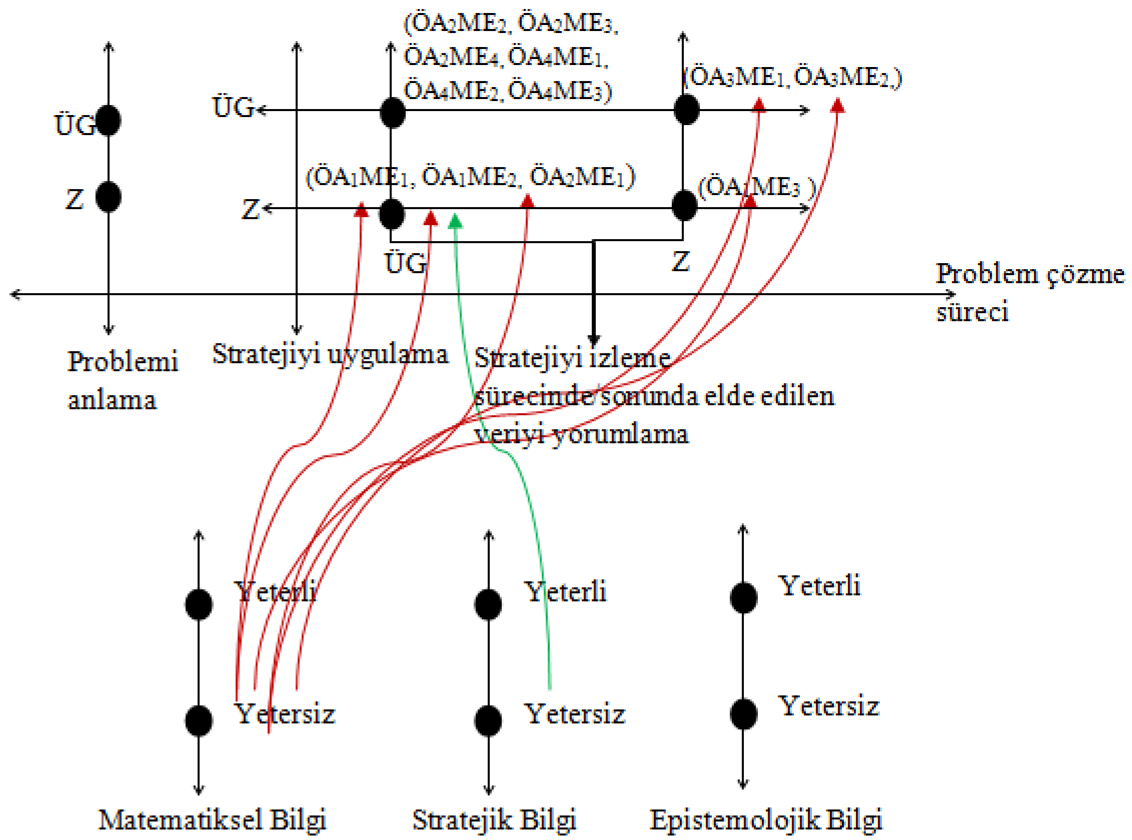
" $S(m,n)=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+...+\frac{1}{m+n}$ şeklinde tanımlanan toplamın sonucu tamsayı olacak şekilde pozitif m ve n tamsayıları var mıdır?" ifadesine sahip P-4 için özel sayı örnekleri ile deneme yanılma yapılarak istenilen şartı sağlayan m ve n değerlerinin bulunamayacağına dair bir genelleme yapılıp daha sonra ortaya konulan iddia ispatlanabilir. Bu probleme dair örnek bir çözüm "Ekler" bölümünde verilmiştir.

Öğretmen adaylarının P-4 çözüm sürecindeki muhakeme eylemleri ve bu muhakeme eylemleri sürecinde yaşadıkları zorluklar Tablo 8 ve Şekil 36'daki gibidir. P-4'e göre $S(m,n)$'yi tamsayı yapan m ve n tamsayı değerlerinin bulunamayacağını sezgisel olarak görmenin öğretmen adayları için zor olmayacağı düşünülsede süreç sonunda ÖA1 öncelikle m ve n değerlerinin bulunup bulunamayacağına dair muhakeme eylemlerinde bulunmuş daha sonra deneme yanılma stratejisi ile elde ettiği genel bir denklemden bulunabileceğini iddia etmiştir. ÖA1'in bu süreçte matematiksel kavramlara ve stratejilere yönelik zorluk yaşaması problemle ilgili doğru bir iddia ortaya koyamamasına neden olmuştur. ÖA2, ÖA3 ve ÖA4 ise $S(m,n)$'yi tamsayı yapan m ve n tamsayı değerlerinin bulunamayacağını deneme yanılma stratejileri ile elde ettikleri sonuçları genelleyerek ifade etmiş ancak ispatlayamamışlardır. Öğretmen adaylarının bu problemde yanıtlarını ispatlama zorlanacakları öngörülmüş olmakla birlikte; muhakeme eylemleri sırasında ÖA2'nin tamsayıların ebob ve ekok'larının çarpımına eşit olması özelliğini ikiden fazla tamsayı için kullanmaya dayalı bir zorluk yaşadığı görülürken; ÖA4 izlediği muhakeme eylemlerinde genel olarak bir zorluk yaşamamıştır. Öte yandan öğretmen adayları genel olarak yanıtlarının doğrulayamadıklarının farkında oldukları görülürken, ÖA1'in elinde daha az veri olmasına rağmen sonsuz elemanlı tamsayılar içerisinde elde ettiği cebirsel ifadeyi tamsayı yapacak tamsayıların bulunma ihtimalini yüksek görmesi dikkat çekmiştir.

Tablo 8

Öğretmen Adaylarının P-4 İçin Muhakeme Eylemleri

Öğretmen Adayı	Muhakeme Eylemi
ÖA1	$ÖA_1ME_1$: Cebirsel strateji
	$ÖA_1ME_2$: Model kullanma stratejisi
	$ÖA_1ME_3$: Deneme yanılma stratejisi
ÖA2	$ÖA_2ME_1$: Cebirsel strateji
	$ÖA_2ME_2$: Deneme yanılma stratejisi
	$ÖA_2ME_3$: Durum inceleme stratejisi: Çift tamsayılar
	$ÖA_2ME_4$: Deneme yanılma stratejisi
ÖA3	$ÖA_3ME_1$: Deneme yanılma stratejisi
	$ÖA_3ME_2$: Deneme yanılma stratejisi
ÖA4	$ÖA_4ME_1$: Deneme yanılma stratejisi
	$ÖA_4ME_2$: Çelişki ile ispat stratejisi
	$ÖA_4ME_3$: Deneme yanılma stratejisi



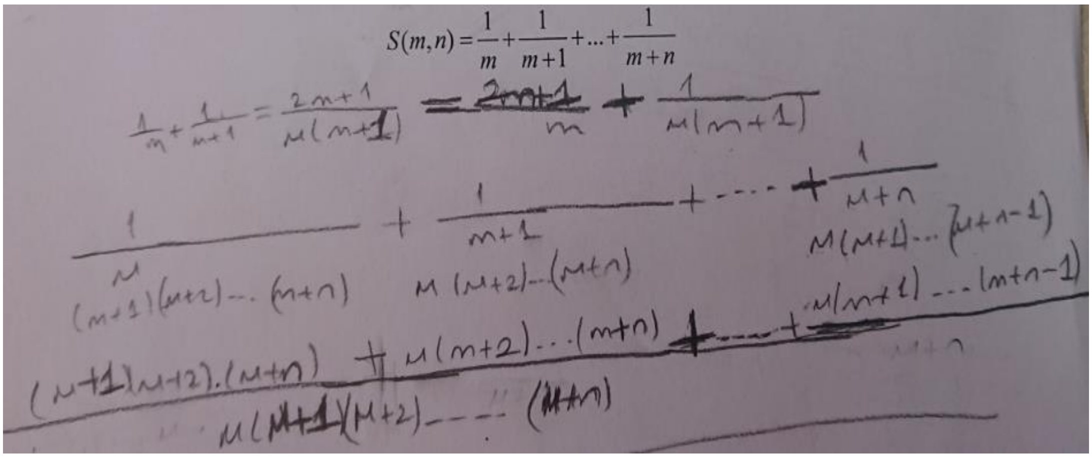
Şekil 36. Öğretmen adaylarının P-4 için muhakeme eylemleri

Öğretmen adaylarının bu probleme dair muhakeme süreçleriyle ilgili ayrıntılı bulgular ise şöyledir:

4.1.4.1. ÖA1'in P-4 için muhakeme süreci

ÖA1 önce iki terimli ve sonra da problem ifadesinde olduğu gibi terim sayısı belirsiz bir toplam dizisi alarak doğrudan cebirsel işlem yaptığı bir strateji izlemiştir (Şekil 37):

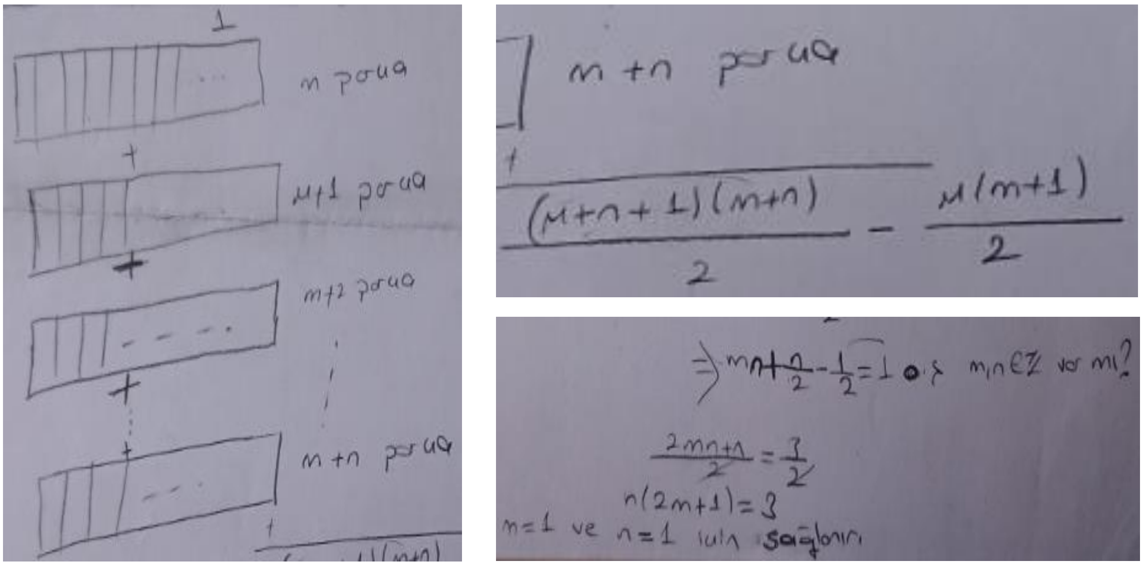
ÖA1: Ben önce paydalarını eşitleyerek toplamaya çalıştım. Sonra buradan bulamayacağım gibi geldi. Bunu burada bıraktım.



Şekil 37. ÖA1'in P-4 için cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

Doğrudan cebirsel işlemler yaparak bir sonuca varamayacağını fark eden ÖA1, bu stratejiyi terk edip problemi kesirlerde parça-bütün ilişkisine dayalı bar modelini kullandığı başka bir stratejiyi izlemeye başlamıştır:

ÖA1: Sonra başka bir şey aklıma geldi. Dedim ki hani 1'i m parçaya böleyim. Sonra $m+1$ parçaya ve $m+n$'ye kadar bölmeye devam edeyim (Şekil 33a). Tamsayı olabilmesi için toplamlarının bana bir bütünü vermesi lazım diye düşündüm. O yüzden de $m+n$'ye kadar olan sayıları formülden topladım. Sonra m'ye kadar olan sayıları çıkardım buradan. Buradan $n(2m+1)=3$ geldi. Burada $m=1$ ve $n=1$ için bu denklem sağlanır. Ama o zaman da şöyle bir sıkıntı oldu. Problemde yerine yazdığım zaman $1+\frac{1}{2}$ geldi o da $\frac{3}{2}$ oldu. Yani tamsayı olmadı. Sanırım bir şeyleri eksik düşünmüşüm (Şekil 38b).

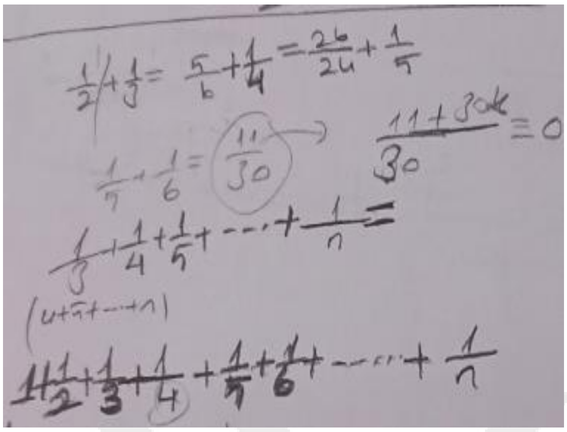


(a) (b)

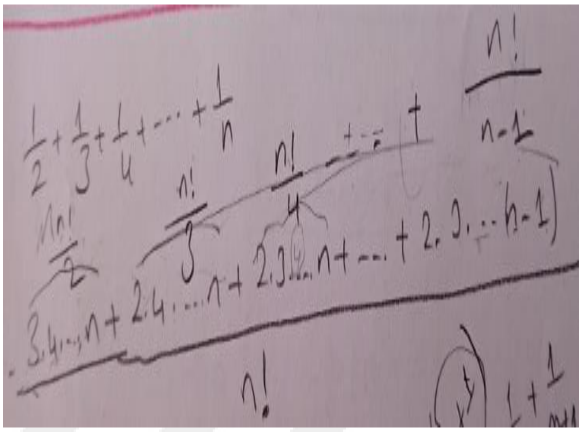
Şekil 38. ÖA1’in P-4 için model kullandığı stratejiyi izlediği muhakeme eylemi

Şekil 38’de görüldüğü gibi ÖA1 bir bütün olarak ele aldığı bar modellerini sırasıyla $m, m+1, ..., m+n$ parçaya ayırmıştır. Daha sonra ardışık sayıların toplamı formülünü kullanarak ayırdığı parça sayılarını toplayıp, bu toplamın 1’e eşit olabilmesi için m ve n ’nin değerlerini belirlemeye çalışmıştır. Bu süreçte ÖA1 bütünden ayırdığı parçaları toplamak yerine parça sayılarını toplama hatasında bulunmuştur. Yani stratejisini doğru bir şekilde izlemede zorluk yaşadığı söylenebilir. Ayrıca bu sırada cebirsel işlemlerinde de hata yapan ÖA1 $n(2m+1)=3$ eşitliğini elde etmiştir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için m ve n ’nin 1 olması gerektiği iddiasında bulunmuş ancak bu iddiasını problemde istenilen koşullar için test ettiğinde çürütmüştür. Özetle stratejik bilgi ve matematiksel bilgi kaynaklı zorlukları nedeniyle yanlış iddiada bulunmuş ancak iddiasını test etmesi sonucunda bu iddiayı çürütmeyi başarmıştır. ÖA1, daha sonra m ve n ’ye özel tamsayı değerleri vererek elde ettiği sonuçları incelemiş yani deneme yanılma stratejisini izlemiştir:

ÖA1: Sonra yine tekrardan şurada yaptığım toplam var ya (ilk strateji) o toplam gibi yapmaya çalıştım. Herhangi bir sayı verdim m ’ye. O fark etmez 5 de olabilir 6 da olabilir. Toplamları nasıl çıkacak diye baktım. Mesela $\frac{1}{3}$ ’ten $\frac{1}{n}$ ’e kadar olan sayıları topladım. Bunların hepsinde şöyle geldi. Burada payda 3 ya o yüzden payda eşitlemek için payını 3 dışındaki bütün sayılarlarla çarpıyoruz. Sonra işte n için n dışındaki bütün sayılarla çarpıyoruz. Gördüm ki $n-1$ tane oluyor bütün sayılardan. Sonra dedim ki ben bunları $n-1$ parantezine alayım. $n-1$ parantezinde o sayıların toplamı payda da zaten işte o sayıdan n'ye kadar olan sayıların çarpımı geldi. Oradan da işte eşit k olacak şekilde bir tane n tamsayı bulunabilir. Bulunur herhalde yani diye düşündüm. Sonuçta bir sürü sayı var. Öyle düşünüyorum.



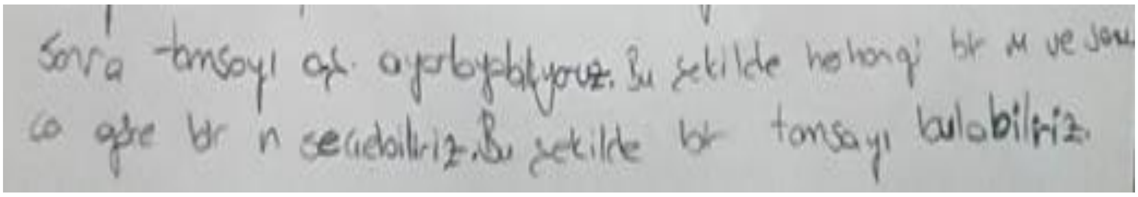
(a)



(b)

Şekil 39. ÖA1'in P-4 için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

ÖA1'in Şekil 39'da da görüldüğü gibi öncelikle hem m hem de n'ye özel değer vererek inceleme yaptığı ($m = 2, n = 1$ ve $m = 5, n = 1$) daha sonra n'yi değişken olarak kabul edip m'ye değerler atayarak incelemede bulunduğu görülmektedir. Bu süreçte faktöriyel çarpımdan da yararlanarak payda eşitlemek için cebirsel işlemler yapmıştır. Bu sırada yukarıdaki açıklamasından da görüldüğü üzere son terimi temsil etmek için kullandığı n ile payda eşitlerken payı çarpması gerekli tamsayıyı birbiri ile karıştırmıştır. Yani matematiksel bilgiye dayalı zorluk yaşamıştır. Yaptığı işlemler sonucunda m'nin özel bir değer aldığı ve n'nin değerinin bilinmediği genel bir ifade elde eden ÖA1, yukarıdaki açıklamasından da görüleceği üzere bu ifadeyi tamsayı yapacak şekilde bir n tamsayısının sonsuz elemanlı tamsayılar kümesi içinde var olacağını düşündüğünü belirtmiştir. Elde ettiği belirsiz ifadeden böyle bir çıkarımda bulunulamayacağı açık olmakla birlikte ÖA1'in "Bulunur herhalde yani diye düşündüm. Sonuçta bir sürü sayı var." şeklindeki ifadesinden sonsuz çokluktaki tamsayılar içerisinde istenen şartları bir değer olmalı gibi bir fikre sahip olduğu düşünülmektedir. Bu durum ÖA1'in sonsuz elemanlı kümelerin özelliklerini anlamlandırma konusunda zorluk yaşadığı şeklinde yorumlanmıştır. ÖA1'in Şekil 40'ta görülen çözümüne dair açıklamaları da bu yorumu destekler niteliktedir. Bu durum, ÖA1'in problem durumunda verilen ifadeyi tamsayı yapacak şekilde m ve n'nin bulunabileceğine dair yanlış bir iddia ile muhakeme sürecini sonlandırmasına neden olmuştur.

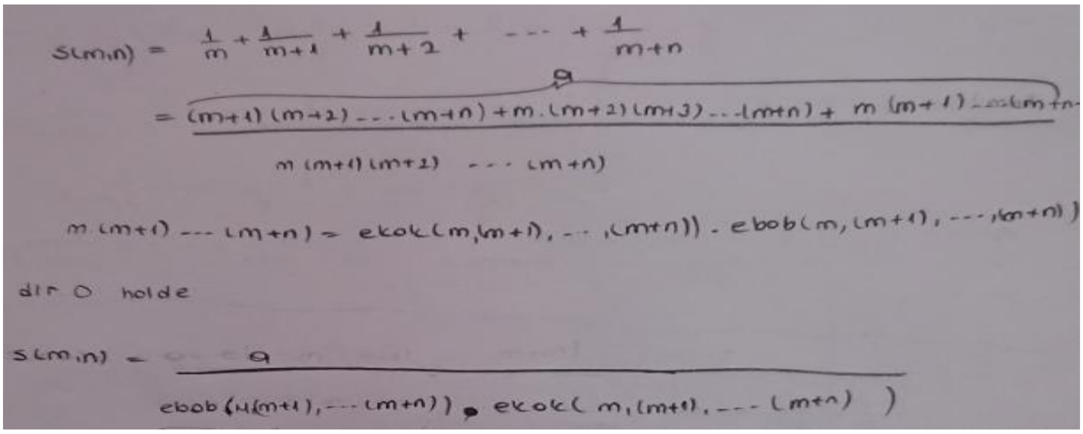


Şekil 40. ÖA1'in P-4 için yaptığı çözüme dair açıklamaları

4.1.4.2. ÖA2'in P-4 için muhakeme süreci

ÖA2 öncelikle problem ifadesinde olduğu gibi başlangıç terimi ve terim sayısı belirsiz bir toplam dizisi alarak cebirsel bir strateji izlemiştir (Şekil 41):

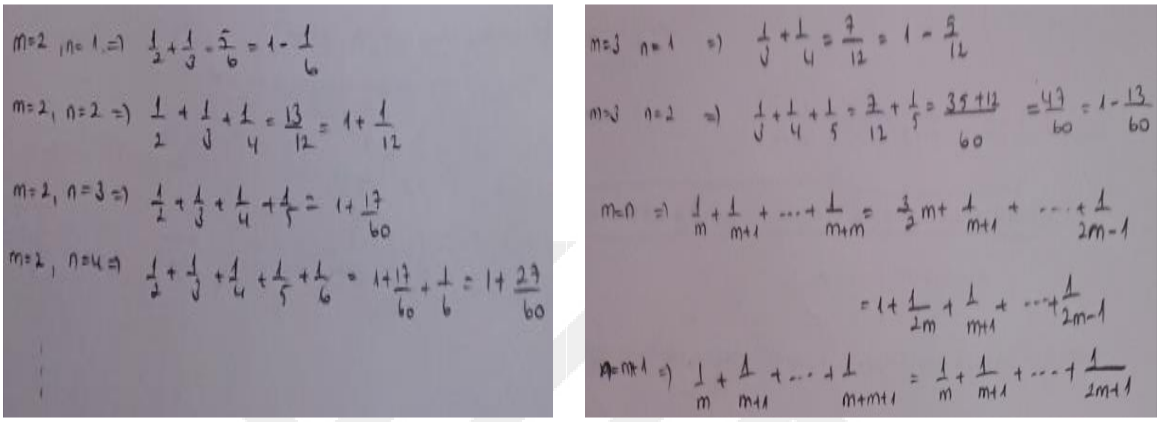
ÖA2: Yani ilk başta denklemlerden bir şey gelir diye düşündüm. Yani buradan m ve n 'yi bulurum. Önce payda eşitlemeye çalıştım. Hepsinin çarpımını ebob ve ekok'larının çarpımı şeklinde yazayım dedim. Sonra düşündüm aralarında asal oldukları için direk zaten ekok geliyor. Aslında $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ alsak orada 2 ile 4'ün ebob'unu da ayrı ayrı incelemem gerekiyordu. Sonra onu nasıl inceleyeceğimi düşünemedim. O işlemlere girsem çıkamazdım. Hepsini ikili ikili alacağım bakacağım falan. O yüzden bunu bıraktım.



Şekil 41. ÖA2'nin P-4 için cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

ÖA2'nın Şekil 41'deki çözümü incelendiğinde iki tamsayının çarpımının bu tamsayıların ebob ve ekok'larının çarpımına eşit olması özelliğini ikiden fazla tamsayı için kullandığı görülmektedir. Dolayısıyla matematiksel bilgiye dayalı bir zorluk yaşadığı söylenebilir. Bununla birlikte elde ettiği genel eşitliklerden bir çıkarımda bulunamayacağını anlayan ÖA2, deneme yanılma stratejisini izlemeye başlamıştır:

ÖA2: Sonra dedim ki $m=1$ olsun, $m=2$ olsun n' ler devam etsin dedim. Buradan sezgisel olarak aslında mantığını çözdüm gibi oldu. Hani 1'e gidecek ama tamsayı olmayacak. Buradan $1-\frac{1}{6}$, $1+\frac{1}{12}$ geldi yani hep 1'i başa alarak yazabildik ve diğer taraf zaten hep rasyonel geliyor. Sonra $n=m$ ve $n=m+1$ şeklinde yazılsın falan dedim. Oradan tam bir şey gelmedi.

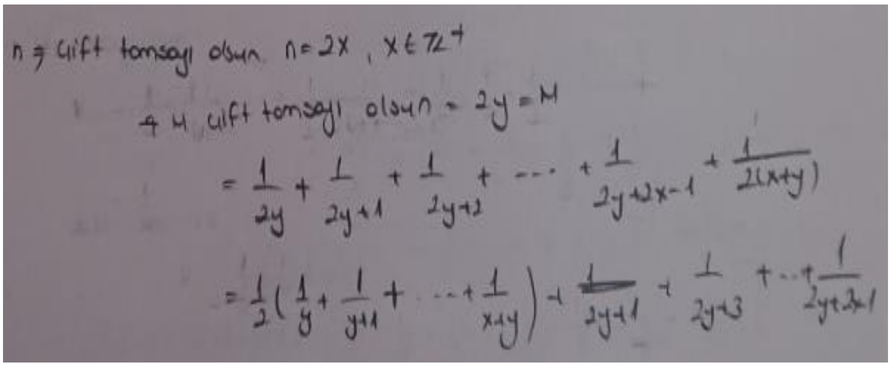


(a) (b)

Şekil 42. ÖA2'nin P-4 için deneme yanılma stratejisini izlediği ilk muhakeme eylemi

Şekil 42'de görüldüğü gibi ÖA2 izlediği deneme yanılma stratejisinde öncelikle m ve n 'ye özel değerler verdiği daha sonra yine özel durumlar olarak $m=n$ ve $n=m+1$ şeklindeki durumları incelediği görülmektedir. Yapmış olduğu incelemeler ile yaptığı gözlemler sonucunda m ve n'nin aldığı farklı değerlere göre verilen ifadenin her zaman 1'e yakınsayacağını ya da ıraksayacağını sezdiği görülen ÖA2, bu iddiasının doğruluğunu gösterebilmek için durum inceleme stratejisini izlemiştir:

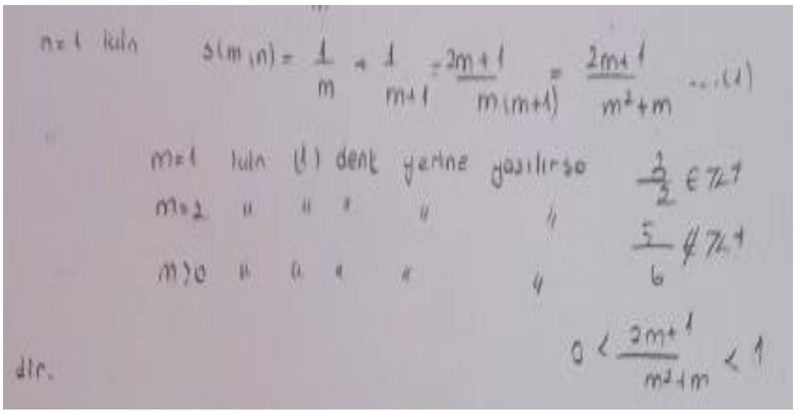
ÖA2: Sonra dedim bunları boş ver. n bir çift tamsayı olsun dedim. n çift olduğu zaman m'nin de tek ve çift olma durumunu incelemem gerekiyordu. m de bir çift tamsayı olsun dedim. Yazdığımda tekrar $\frac{1}{2}$ parantezine aldım. Şurası geldi. Sonra bu denklemi ben yine düzenleyemedim. Sonuca ulaşamadım. Bunu da bıraktım (Şekil 43).



Şekil 43. ÖA2'nin P-4 için durum inceleme stratejisini izlediği muhakeme eylemi

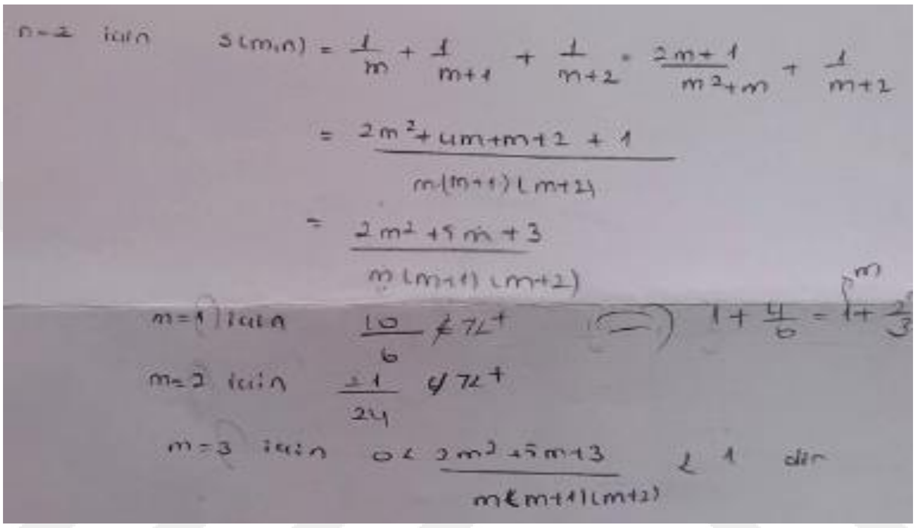
Şekil 43'te görüldüğü üzere durum inceleme stratejisini izleyen ÖA2'nin bu strateji ile problem durumunu farklı temsillerle yeniden ifade etmek dışında bir netice elde edemeyeceği oldukça açıktır. Bu stratejiyi seçerken ÖA2'nın yeterince öngörülü düşünmediği söylenebilir. Elde ettiği cebirsel ifadelerden bir veri elde edemeyeceğini fark eden ÖA2 yeniden m ve n'ye özel değerler verdiği stratejisini izlemiştir:

ÖA2: Sonra dedim ki $n=1$ için tekrar ben bu çözümü inceleyeyim dedim (Şekil 44). Aslında burada bir şeylere ulaştım birazcık. Buradan yazdım hani zaten 1 ve 2 için tamsayı değil. 2'den büyük olduğu zaman da zaten 0 ile 1 arasında geliyor hep. Derecesi alttakinin daha büyük olduğu için. Öyle düşündüm yani. Sonra $n=2$ için yaptım. Bu denklem geldi. 1 ve 2 için olmadığını gösterdim. 3 için de zaten yine derecesi küçük geldiği için $m=3$ için ya aslında derecesi zaten hep küçük ama. Hani 3 verdiğinizde sağlamayacak. $n=2$ için de derecesi büyük olduğundan mutlaka 0 ile 1 arasındaki bir sayı olacak. O yüzden m, 1 den farklı ise her n eleman pozitif tamsayısı için bu toplam 0 ile 1 arasında olur dedim. Sadece $m=1$ olduğu zaman bunun 1 artılısı geldiğini düşündüm.



Şekil 44. ÖA2'nin P-4 için deneme yanılma stratejisini izlediği ikinci muhakeme eylemi

Şekil 44'te görüldüğü gibi ÖA2 $n=1$ için elde ettiği $s(m,1)=\dfrac{2m+1}{m^2+m}$ eşitliğini $m=1,2$ için incelemiş ve $m\neq 1$ olması halinde bu ifadenin 0 ile 1 açık aralığında olduğunu iddia etmiştir. Daha sonra Şekil 40'ta görüldüğü gibi $n=2$ için elde ettiği $s(m,2)=\dfrac{2m^2+5m+3}{m(m+1)(m+2)}$ eşitliğini inceleyerek bu ifadenin de tamsayı olamayacağını iddia etmiştir.



Şekil 45. ÖA2'nin P-4 için deneme yanılma stratejisini izlediği ikinci muhakeme eylemi

ÖA2 izlediği bu stratejiden sonra muhakeme sürecini sonlandırmıştır. Deneme yanılma stratejisine dayalı yaptığı gözlemlere ve sezgilerine dayanarak herhangi bir m ve n değeri için verilen ifadenin tamsayı olamayacağı iddiasında bulunan ÖA2 bu iddiasını ispatlayamamıştır. Kendisi de bu yönde açıklamalar yapmıştır:

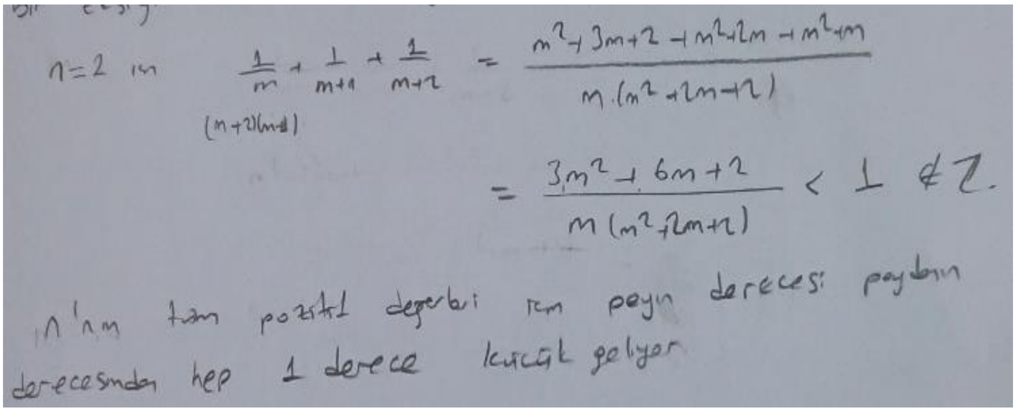
Araştırmacı: Yani bu ifade tamsayı olmaz mı hiç?

ÖA2: Olmuyor. Mutlaka rasyonel bir sayı yani sezgisel olarak yok. Sonra yok olduğunu düşündüğüm için ona uygun çözüm yapmaya çalıştım. Cevabı ispatlayamadım işte pek.

4.1.4.3. ÖA3'in P-4 için muhakeme süreci

ÖA3 öncelikle deneme yanılma stratejisini izleyerek, $n=2$ için verilen toplamı incelemiştir (Şekil 46):

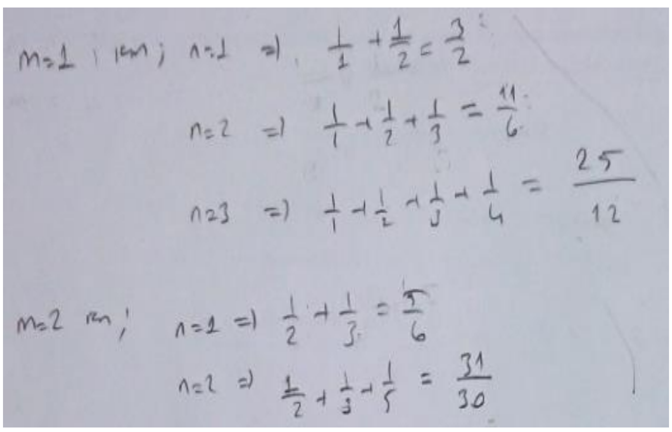
ÖA3: Burada dereceler arasında bir şey yapabilir miyim diye düşündüm. Payda falan eşitlemeye çalıştım. Ama sonra düşündüm ki sayılarla çalışıyoruz yani polinomlarla değil.



Şekil 46. ÖA3'ün P-4 için deneme yanılma stratejisini izlediği ilk muhakeme eylemi

İncelediği özel durumdan sonra polinomların derecelerinden yola çıkarak verilen ifadenin hiçbir zaman tamsayı olamayacağı iddiasında bulunan ÖA3 (Şekil 46) sonra açıklamalarından da görüldüğü gibi "sayılarla çalışıyoruz yani polinomlarla değil" diyerek bu iddiasından vazgeçmiştir. ÖA3'nin elde ettiği ifade kendisinin de belirttiği üzere bir polinom değildir ancak pay ve paydası polinom olan rasyonel bir fonksiyondur ve çıkarımının doğru olduğu söylenebilir. Dolayısıyla matematiksel bilgiye dayalı zorluk yaşaması iddiasını çürütmesine neden olmuştur. ÖA3 sonra hem m hem de n'ye özel değerler vererek incelemelerde bulunduğu deneme yanılma stratejisini izlemeye devam etmiştir:

ÖA3: Daha sonra değer vereyim dedim. $m=1$ ve $n=1,2,3$ için baktım (Şekil 47). Sonra $m=2$ için baktım. Baktım ki bu toplam sürekli büyüyor. En son $\frac{31}{30}$ bulmuşum. İşte sonra yine ben durdum yani. Nerede büyüyüp nerede bir tamsayıya eşit olacak. Hani ispat yöntemiyle yapsaydım görülebilirdi ama burada belki onuncu terimde gelecek belki iki yüzüncü terimde.



Şekil 47. ÖA3'ün P-4 için deneme yanılma stratejisini izlediği ikinci muhakeme eylemi

Şekil 47’de görüldüğü gibi ÖA3 deneme yanılma stratejisi ile $m=1$ ve $n=1,2,3$ için ve sonra $m=2$ ve $n=1,2$ için elde ettiği sonuçları gözlemlemiştir. Ancak bu strateji ile bir sonuca varamayacağını düşündüğünü belirterek muhakeme sürecini sonlandırmıştır. Süreç sonunda ÖA3 yaptığı incelemelerine göre m ve n’nin bulunamayacağını sezdiği ancak bu sezgisinden emin olmadığını bildirmiştir:

Araştırmacı: Cevabın nedir?

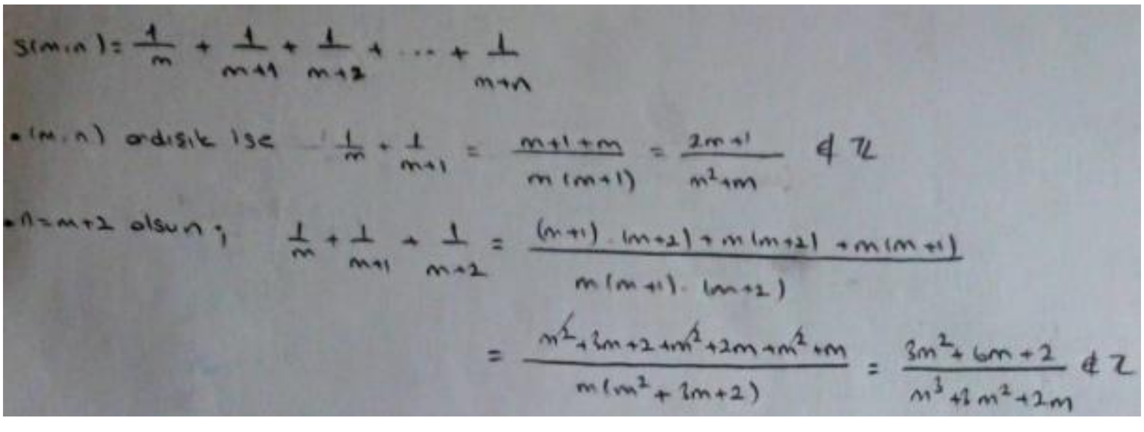
ÖA3: Bir cevabım yok hocam. Uğraşmalarım var. Ama yok gibi geliyor bir yandan. Yani ben bulamadığım için öyle düşünüyorum ama olursa da şaşırmam yani. Ben bulamadım bilmiyorum o yüzden.

ÖA3’nin ifadelerine göre sınırlı sayıda örnek ile çalışarak sezgisel olarak ortaya koyduğu iddiaların matematiksel olarak geçerliliğinin sınırlılıklarının farkında olduğu söylenebilir.

4.1.4.4. ÖA4’ün P-4 için muhakeme süreci

ÖA4, öncelikle deneme yanılma stratejisini izleyerek elde ettiği sonuçlardan verilen toplamın tamsayı olamayacağına dair bir çıkarımda bulunmuştur:

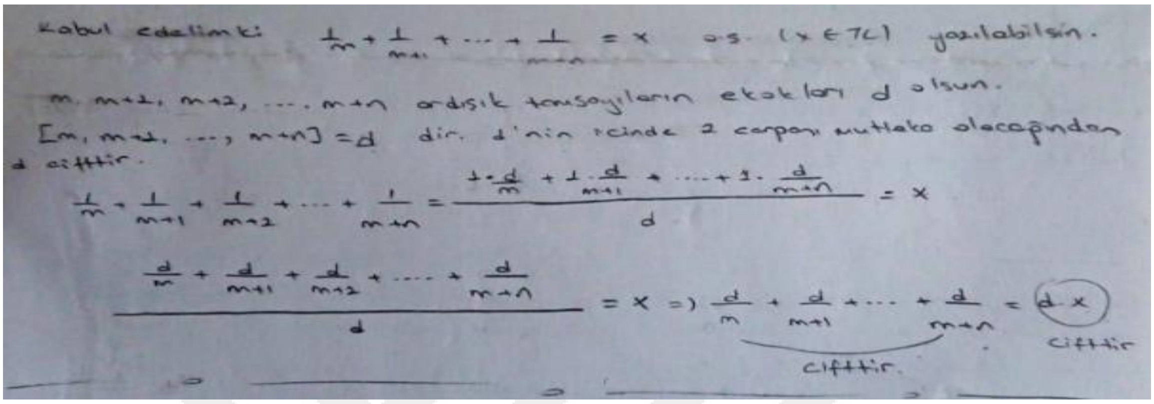
ÖA4: Önce n’yi 1 aldım. Yani m’nin ardışığı oldu. Sonra bir de $n=2$ için baktım. Burada paydanın derecesi hep büyük olacak. Yani bu toplam hiçbir zaman tamsayı olamaz dedim.



Şekil 48. ÖA4'ün P-4 için deneme yanılma stratejisini izlediği ilk muhakeme eylemi

Şekil 48’den görüldüğü üzere deneme yanılma stratejisi ile $n=1,2$ için verilen toplamın sonuçlarını gözlemleyen ÖA4, verilen toplamın tamsayı olamayacağı genellemesinde bulunup bu iddiasını doğrulamak için çelişki ile ispat stratejisini izlemiştir:

ÖA4: Tamsayıya eşitleyip çelişki bulayım dedim. Burada o yüzden $x \in \mathbb{Z}$ olsun dedim. Sonra payda eşitlemek için $m, m+1, m+2$ diye devam eden sayıların ekok'u d olsun dedim. İşlemleri yapınca teklik ve çiftlikten çelişki elde etmeye çalıştım ama olmadı. Yani d ardışık sayıların ekok'u olduğu için $d \cdot x$'e çifttir dedim ama sol tarafın tek olduğunu ifade edemedim.

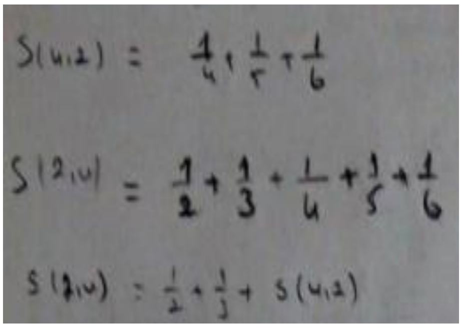


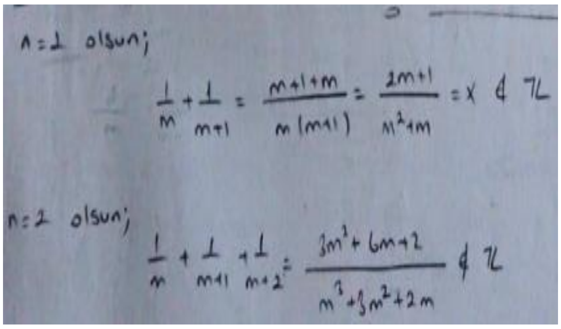
Şekil 49. ÖA4'ün P-4 için çelişki ile ispat stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Şekil 49 ve açıklamalarından görüleceği üzere elde ettiği eşitliğin sağ tarafında $d \cdot x$ çarpımı bulunan ve d ardışık sayıların ekok'u olduğu için bu çarpımın çift olacağını belirleyebilen ÖA4, eşitliğin sol tarafının her zaman tek tamsayı olacağını gösterirse çelişki elde edebileceğini düşünmüş ancak bunun mümkün olmayacağını görerek sonra yeniden deneme yanılma stratejisini izlemiştir:

Araştırmacı: Sonra nasıl devam ettin?

ÖA4:Çelişki ile ispattan vazgeçtim. m ve n'ye değer vererek $S(m,n)$ ile ilgili bir özellik bulmayı düşündüm ama bir sonuca ulaşamadım. Yapamadım ben yani.





a b

Şekil 50. ÖA4'ün P-4 için deneme yanılma stratejisini izlediği ikinci muhakeme eylemi

Açıklamalarından ve Şekil 50'den görüldüğü gibi deneme yanılma stratejisi ile elde ettiği sonuçları gözlemleyerek bir genellemeye varmak isteyen ÖA4, bunun mümkün olmayacağına karar vermiş ve bu noktadan sonra başka bir strateji izlemeyi denemeden problem çözme sürecini sonlandırmıştır.

4.1.5. Problem-5'e Ait Bulgular

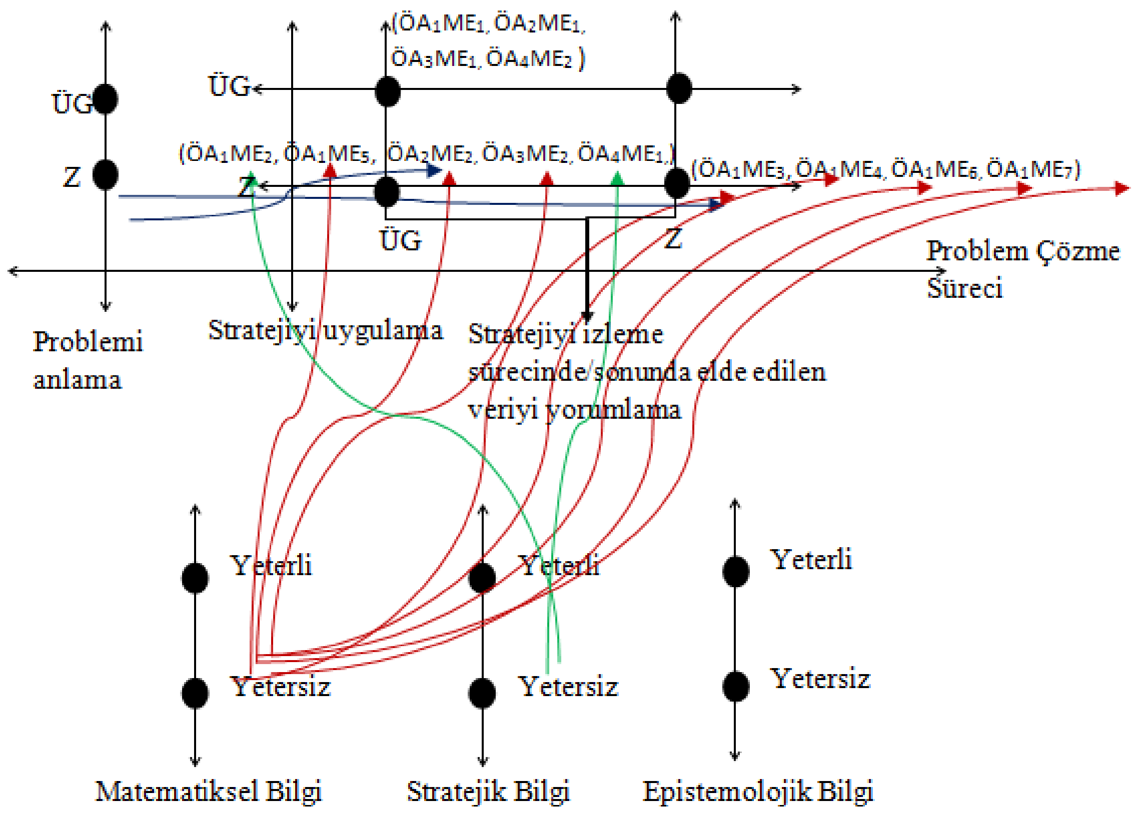
" a, b ve c , $a < b < c$ şartını sağlayan pozitif tamsayılar olsun. Negatif olmayan tüm tamsayılar $a^2 + b^2 - c^2$ şeklinde ifade edilebilir mi?" ifadesine sahip P-5 için özel sayı örnekleri ile deneme yanılma yapıp negatif olmayan tüm tamsayıların istenilen biçimde ifade edilebildiğine dair bir genelleme yapılıp daha sonra ortaya konulan iddia ispatlanabilir veya sayı temsilleri ile çalışılarak bir genellemeye varılabilir. Bu probleme dair örnek bir çözüm "Ekler" bölümünde verilmiştir.

Öğretmen adaylarının P-5 çözüm sürecindeki muhakeme eylemleri ve bu muhakeme eylemleri sürecinde yaşadıkları zorluklar Tablo 9 ve Şekil 51'deki gibidir. Süreç sonunda ÖA3 probleme dair bir yanıtının olmadığını belirtirken ÖA4 cebirsel strateji ile a, b, c arasında bir ilişki belirleyerek doğru kabul edilebilecek bir çözüm ortaya koymuştur. ÖA1 ve ÖA2 ise özellikle cebirsel ifadeleri anlamada sahip oldukları sıkıntılardan dolayı yanlış çıkarımlarda bulunmuştur. ÖA4 dışındaki adayların muhakeme eylemlerinde poblem durumunda verilen a, b, c arasındaki sıralamayı dikkate almadan pek çok değişken bulunduran denklemler üzerinden bir çıkarımda bulunmak istemelerinin zorlanmalarının temel nedeni olduğu söylenebilir. Özellikle ÖA1 birçok strateji ile yanıt aramış ancak genel olarak pek çok değişken barındıran elde ettiği cebirsel denklemleri yorumlayamaması ve aynı zamanda problem durumunu anlamadaki zorlukları muhakeme eylemlerini verimli sonuçlar elde edebilecek şekilde yürütmesine engel olmuştur.

Tablo 9

Öğretmen Adaylarının P-5 İçin Muhakeme Eylemleri

Öğretmen Adayı	Muhakeme Eylemi
ÖA1	$ÖA_1ME_1$: Deneme yanılma stratejisi $ÖA_1ME_2$: Tümevarım stratejisi $ÖA_1ME_3$: Durum inceleme stratejisi: çift tamsayılar $ÖA_1ME_4$: Durum inceleme stratejisi: tek tamsayılar $ÖA_1ME_5$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji $ÖA_1ME_6$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji $ÖA_1ME_7$: Denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji
ÖA2	$ÖA_2ME_1$: Cebirsel strateji $ÖA_2ME_2$: Cebirsel strateji
ÖA3	$ÖA_3ME_1$: Deneme yanılma stratejisi $ÖA_3ME_2$: Tümevarım stratejisi
ÖA4	$ÖA_4ME_1$: Tümevarım stratejisi $ÖA_4ME_2$: Cebirsel strateji



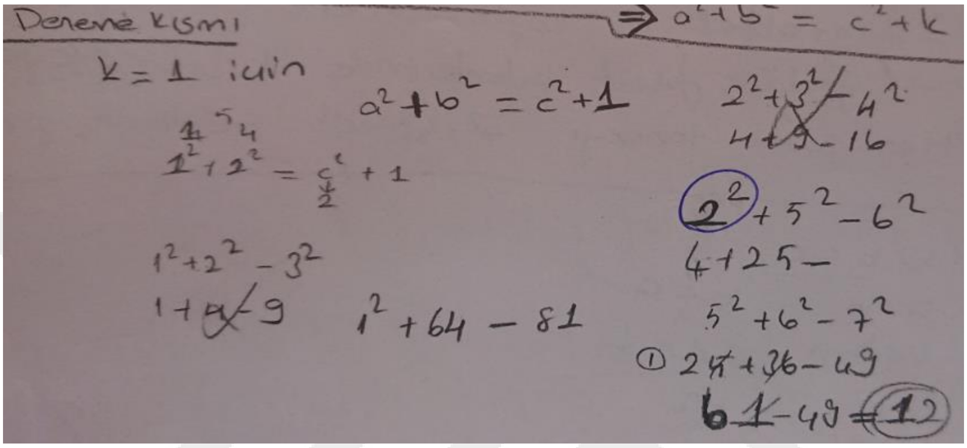
Şekil 51. Öğretmen adaylarının P-5 için muhakeme eylemleri

Öğretmen adaylarının bu probleme dair muhakeme süreçleriyle ilgili ayrıntılı bulgular ise şöyledir:

4.1.5.1.ÖA1'in P-5 için muhakeme süreci

ÖA1, deneme yanılma stratejiyle özel sayı değerleri için problem durumunu incelemiş ve bu inceleme sonucunda sezgisel olarak bir çıkarımda bulunmuştur:

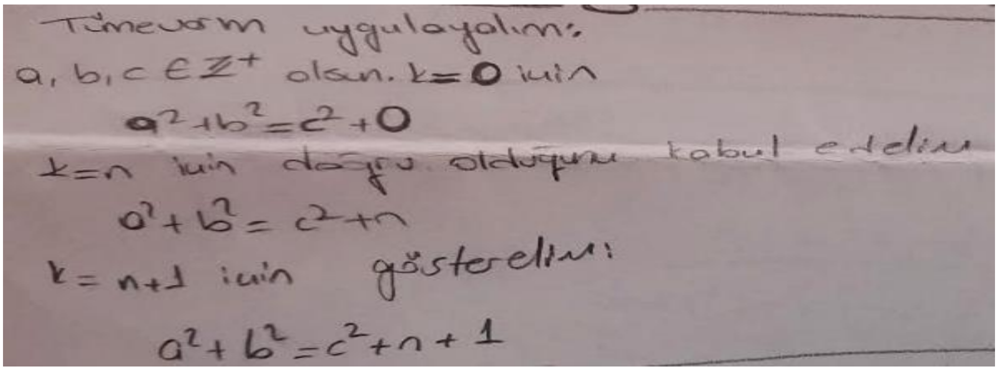
ÖA1: Önce ben aslında anlayabilmek için bir deneme yaptım (Şekil 52). Edebilecek miyim edemeyecek miyim neler olacak falan diye. Ben birkaç denememde yapmaya çalıştığım şeye çok yaklaştım. İfade edebiliriz. Gördüm aslında ama sezgisel olarak gördüm.



Şekil 52. ÖA1'in P-5 için deneme yanılma stratejisini izlediği ilk muhakeme eylemi

ÖA1 izlediği deneme yanılma stratejisi ile sezgisel olarak tüm tamsayıların problemde istenildiği şekilde ifade edilebileceğini düşündüğünü belirtmiştir. ÖA1, daha sonra tamsayılar kümesinin geniş bir küme olduğu gerekçesiyle bu iddiasını tümevarım stratejisi ile ispatlamak istemiştir:

ÖA1: Sonra dedim ki tümevarım uygulayayım sonuçta tamsayılar bayağı geniş bir küme. Tümevarım uygulayayım dedim (Şekil 53). $k=0$ için oldu. n için kabul ettim. $n+1$ için de göstereyim dedim ama bu yol gerçekten bu soru için uygun değil. Çünkü üç tane bilinmeyen var. Bir de n için doğru olduğunu kabul ediyorum ben tamam ama $n+1$ için göstereceğim zaman bu (+1)'i ne yapacağım. Onu uyarlayamadım yani o yüzden ben bundan vazgeçtim.



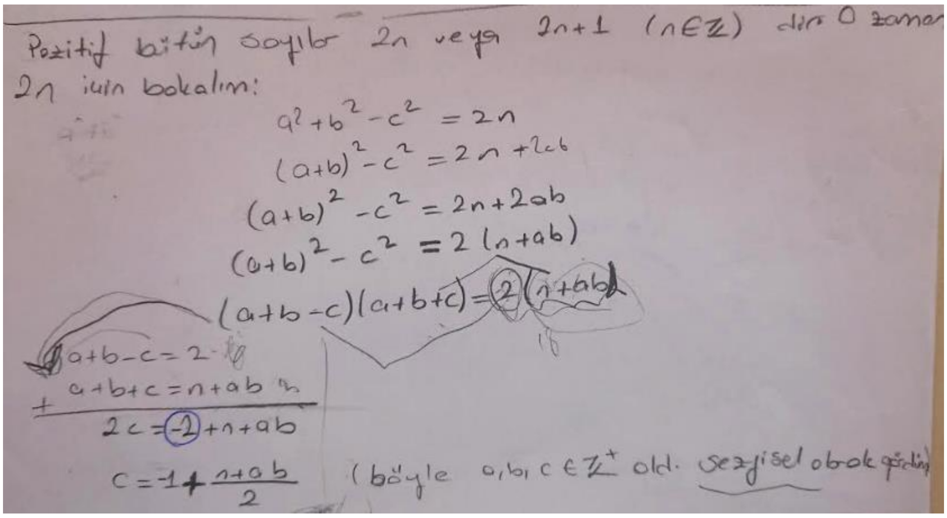
Şekil 53. ÖA1'in P-5 için tümevarım stratejisini izlediği muhakeme eylemi

ÖA1 öncelikle tümevarım stratejisinin uygun olduğunu düşünmüş olsa da, sonra yukarıdaki açıklamalarından da görüldüğü üzere birden fazla değişken bulunması ve n için doğru kabul ettiği ifadeyi, $n+1$ için de doğrulamak için kullanabileceği bir forma dönüştüremediği için bu stratejinin problem için uygun olmadığını görmüştür. Daha sonra negatif olmayan tüm tamsayıların problemde istenilen biçimde yazılabileceğini göstermenin zor olduğunu belirterek, işini kolaylaştıracağı gerekçesiyle durum inceleme stratejisini izlemiştir:

ÖA1: Sonra da dedim ki ben bu tamsayıların hepsini nasıl gösterebilirim ki. Ben bu tamsayıları ikiye böleyim. Bir çift tamsayılar bir de tek tamsayılar var ya. Dedim ki hem çift tamsayıları hem de tek tamsayıları bu şekilde gösterebilirsem demek ki bütün tamsayıları bu şekilde gösterebilirim. $a^2+b^2-c^2=2n$ şeklinde ifade edilsin. Burada $(a+b)^2$ deyip $2ab$'yi karşıya attım. Sonra burada iki kare farkı uygulayınca böyle bir şeyler geldi. Sonra da bunu 2'ye ye bunu da $n+ab$'ye eşitledim. Bakalım böyle sayılar bulabilecek miyim dedim. Burayı 2'ye burayı da $n+ab$'ye eşitledim. Sonra buradan olur gibi geldi ama.

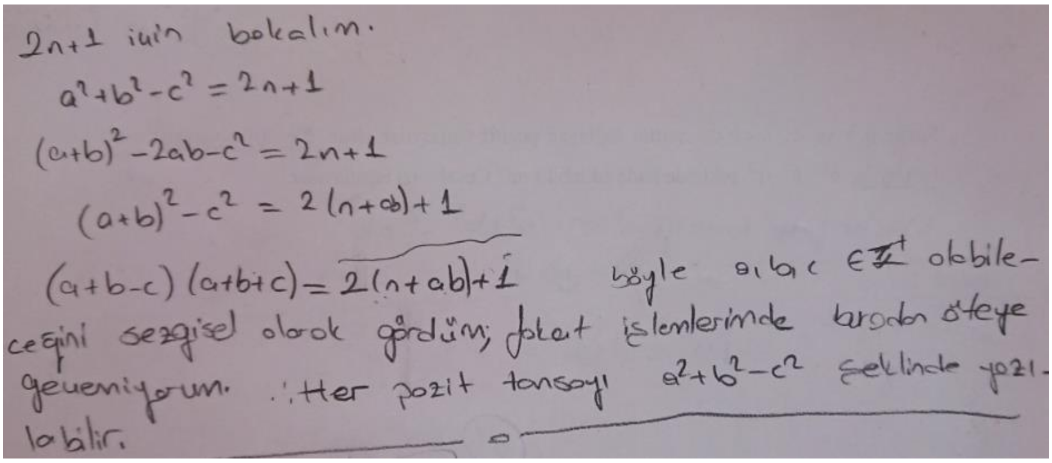
Araştırmacı: Nasıl olur gibi?

ÖA1: Şöyle bu ikisini toplayıp işlem yaptığımda $c=1+\dfrac{n+ab}{2}$ geldi. Buradan ben c'yi falan bulurum dedim. Yani a ve b'yi de.



Şekil 54. ÖA1'in P-5 için durum inceleme stratejisini izlediği muhakeme eylemi: Çift sayılar

Şekil 54'te görüldüğü gibi ÖA1 öncelikle pozitif çift tamsayıları problemde istenen formda gösterip gösteremeyeceğini incelemiştir. Bu incelemeyi $a^2+b^2-c^2$ ifadesini $2n$ 'ye eşitledikten sonra cebirsel işlemleri takip ederek yapmıştır. Bu sırada önce işlemsel hata yapan ÖA1 sonra elde ettiği $(a+b-c)(a+b+c)=2(n+ab)$ şeklindeki eşitlikte $(a+b-c)$ 'yi 2'ye; $(a+b+c)$ 'yi $(n+ab)$ 'ye eşitlemiştir. Burada ÖA1'in tamsayıların iki sayının çarpımı şeklinde tek türlü yazılabileceğini düşündüğü söylenebilir. Yani matematiksel bilgiye dayalı zorluk yaşamıştır. Yaptığı işlemlerle $c=1+\dfrac{n+ab}{2}$ eşitliğini elde eden ÖA1 buradan istenilen şartlardaki a,b,c tamsayılarını belirleyebileceğini sezgisel olarak düşündüğünü belirtmiştir. Bu eşitlikten a,b,c tamsayıları için herhangi bir belirleme yapılamayacağı açıktır. Ayrıca belirlenecek a,b,c tamsayıları ile negatif olmayan tüm tamsayıların istenilen şekilde ifade edilip edilemeyeceğine dair bu eşitlikten bir çıkarımda bulunulması mümkün değildir. Dolayısıyla burada ÖA1'in hem denklem ve değişken kavramlarına dayalı yani matematiksel bilgiye dayalı zorluk yaşadığı hem de problem durumunu anlamlandırmadığı söylenebilir. Ayrıca çift tamsayıları incelediğini belirten ÖA1'in problemdeki ifadeyi $2n$ 'e eşitledikten sonra bu fikirden uzaklaştığı görülmektedir. Nitekim elde ettiği son eşitlikte n, herhangi bir tamsayı değerini temsil ediyor olmasına rağmen bu konuda herhangi bir açıklama yapmamıştır. Yani bu süreçte ÖA1'in izlediği strateji ile ilgili de zorluk yaşadığı söylenebilir. ÖA1 daha sonra tek tamsayıları inceleyerek muhakeme sürecine devam etmiştir (Şekil 55):



Şekil 55. ÖA1'in P-5 için durum inceleme stratejisini izlediği muhakeme eylemi: Tek sayılar

ÖA1'in negatif olmayan tek tamsayıların istenilen şekilde yazılıp yazılamadığını incelediğini belirttiği Şekil 49'dan görülen çözümünde yine a,b,c ve tek tamsayıları temsil etmek için kullandığı n temsilini içeren genel bir eşitlik elde etmiştir. Buradan "sezgisel olarak gördüm" diyerek problemde istenen şartları sağlayacak şekilde a,b,c'nin bulunabileceğini belirtmiştir. ÖA1'in denklemler sonucunda muhakkak bir çözüm kümesi elde edebileceğini düşündüğünü söyleyebiliriz. Bununla birlikte elde ettiği denklem için uygun değerler belirlenebilse de bu denklemden problem durumunda istenildiği gibi her n negatif olmayan tamsayısı için a,b,c tamsayılarının belirlenebileceği kanaatine varmak mümkün görünmemektedir. Bu durumda ÖA1'in hem problem durumunu anlamada hem de denklem kavramına ilişkin zorluk yaşadığı söylenebilir. Araştırmacı ile arasında geçen aşağıdaki diyalogdaki "Evet işte buradan bunları çekerek bir şeyler bulunur her halde diye." şeklindeki söylemi bu yorumu destekler niteliktedir. ÖA1, Şekil 55'ten ve açıklamalarından da görüleceği üzere çözümünü yeterli bulmadığından başka stratejiler aramaya devam etmiştir:

Araştırmacı: Şurada 1 olmasa çift sayıları incelediğin çözümle benzer işlemler mi yazacaktın?

ÖA1: Evet ama zaten orada da kesinlemedim yine sezgisel olduğunu söyledim.

Araştırmacı: Tamam ama böyle bir bağıntı bulunca bulduğunu düşündün sanırım.

ÖA1: Evet işte buradan bunları çekerek bir şeyler bulunur her halde diye. Hocam başka şeyler de denedim.

Araştırmacı: Tamam ne yaptın alternatif yollar yazmışsın.

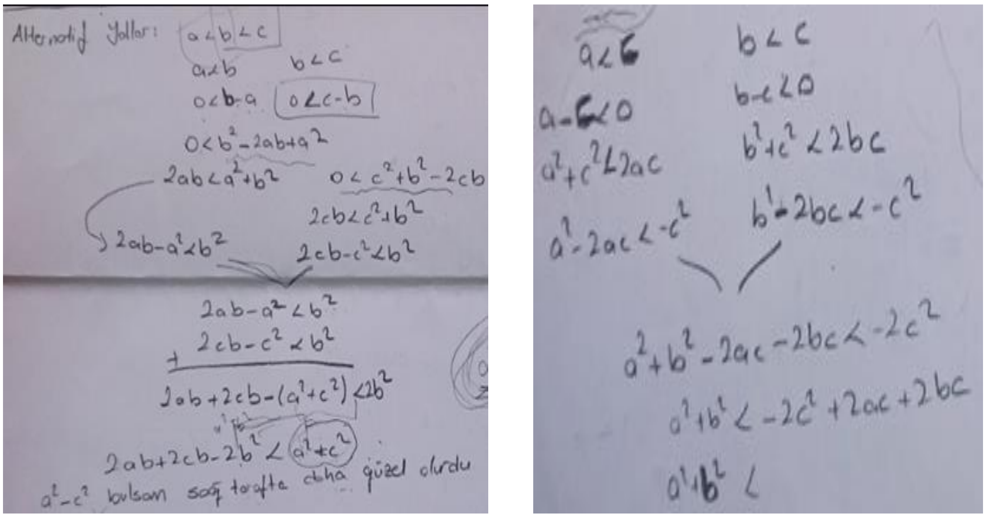
ÖA1: Evet.

Araştırmacı: Alternatif yollar bulma gereksinimi niye duydun?

ÖA1: Çünkü yeterli hissetmedim. Ben bu şekilde a, b, c bulurum diyorum da ya hepsini kendim yazmam gerekiyor. Şimdi a, b, c 'yi küçüklük sırasına göre alacağım. a 'ya 1 diyeyim. $c = 2$ diyeyim o zaman $c = -1 + \frac{n+2}{2}$ buradan tabi n 'e de bir şeyler diyeceğim. İşte sürekli hepsine şey yaptığım için o yüzden bu sonunu beğenmedim. Ben istiyorum ki ben sadece bir şeyler yazayım çıksın.

ÖA1 daha sonra Şekil 50'deki gibi a,b ve c arasındaki sıralamadan yararlanarak izlediği cebirsel strateji ile bir bağıntı bulmaya çalışmıştır:

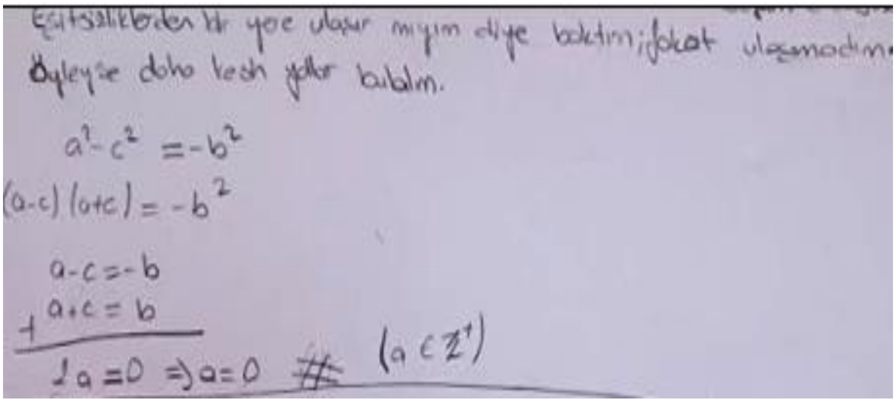
ÖA1: Hocam ben sonra dedim ki küçüklük büyüklük ilişkisiyle belki bir şeyler elde ederim. $a < b$ ve $b < c$ ya işte buradan işlemler yapmaya çalıştım. O zaman $0 < b - a$ ve $0 < c - b$ işte buradan $a^2 + b^2 - c^2$ yi elde etmeye çalışıyorum. En sonunda şöyle bir eşitsizlik elde ettim. Ama sonra düşündüm ki bu eşitsizlikle ben tamsayıları nasıl elde edeceğim ki. Yani bu eşitsizlik benim işime yaramaz diye düşündüm. Sonra bu yoldan vazgeçtim.



(a) (b)

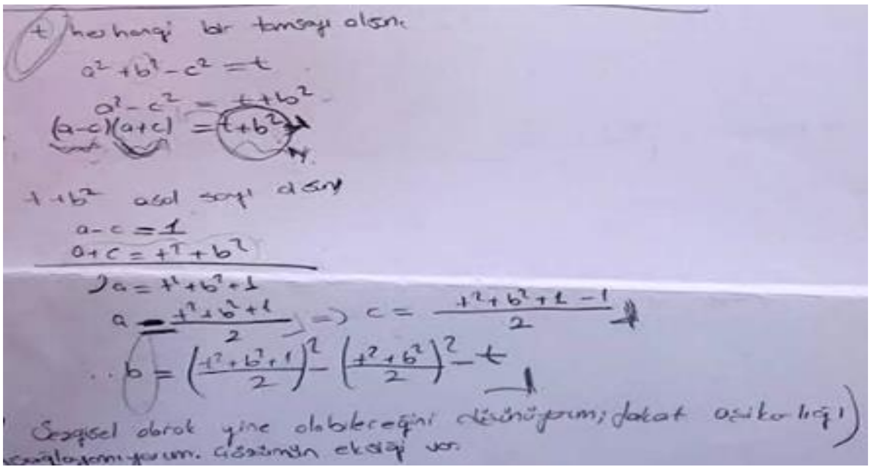
Şekil 56. ÖA1'in P-5 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği ilk muhakeme eylemi

Şekil 56'dan ve açıklamalarından görüldüğü gibi a,b ve c arasındaki sıralamadan yararlanarak bir bağıntı bulmaya çalışan ÖA1 daha sonra buradan bir veri elde edinemediğini belirtmiştir. ÖA1 daha sonra $a^2 - c^2$ 'yi $-b^2$ 'ye eşitlemiştir. Yani aslında farkında olmadan problemdeki $a^2+b^2-c^2$ ifadesini sıfıra eşitleyerek başka bir cebirsel stratejiyi izlemiştir (Şekil 57):



Şekil 57. ÖA1'in P-5 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği ikinci muhakeme eylemi

Şekil 57'de görüldüğü gibi, ÖA1 $(a-c)(a+c)=-b^2$ eşitliğinden $a-c=-b$ ve $a+c=b$ eşitliklerini yazmıştır. Yani daha önce olduğu gibi çarpanlarına ayırma ile ilgili matematiksel bilgiye dayalı zorluk yaşamıştır. Yaptığı cebirsel işlemler sonucunda $a=0$ eşitliğini elde etmiştir. Matematiksel bilgiye dayalı yaşadığı zorluk problemin ifadesi ile çelişen bir eşitlik elde etmesine neden olsa da ÖA1, yaşadığı kavramsal zorluğun farkında olmadığı için, bunun nedenini anlamlandıramamıştır. Daha sonra $a^2+b^2-c^2$ ifadesini bir t tamsayısına eşitlediği başka bir cebirsel stratejiyi izlemiştir (Şekil 58):



Şekil 58. ÖA1'in P-5 için denklem çözmeye dayalı cebirsel strateji izlediği üçüncü muhakeme eylemi

Şekil 58'deki çözüm incelendiğinde ÖA1'in bu sırada daha önce olduğu gibi bileşik tamsayıların çarpanlarının tek türlü gösterebileceği yanılgısına düştüğü ve ayrıca cebirsel işlemlerde hata yaptığı yani matematiksel bilgiye dayalı zorluk yaşadığı görülmektedir.

Sonuç olarak genel bir denklem bulsa da yaptığı cebirsel işlemler sonucunda a, b, c değerlerini bulabileceğini düşündüğünü belirten ÖA1, bu yanıtının sezgisel oluğunu ve çözümünün eksik olduğunu belirtmiştir:

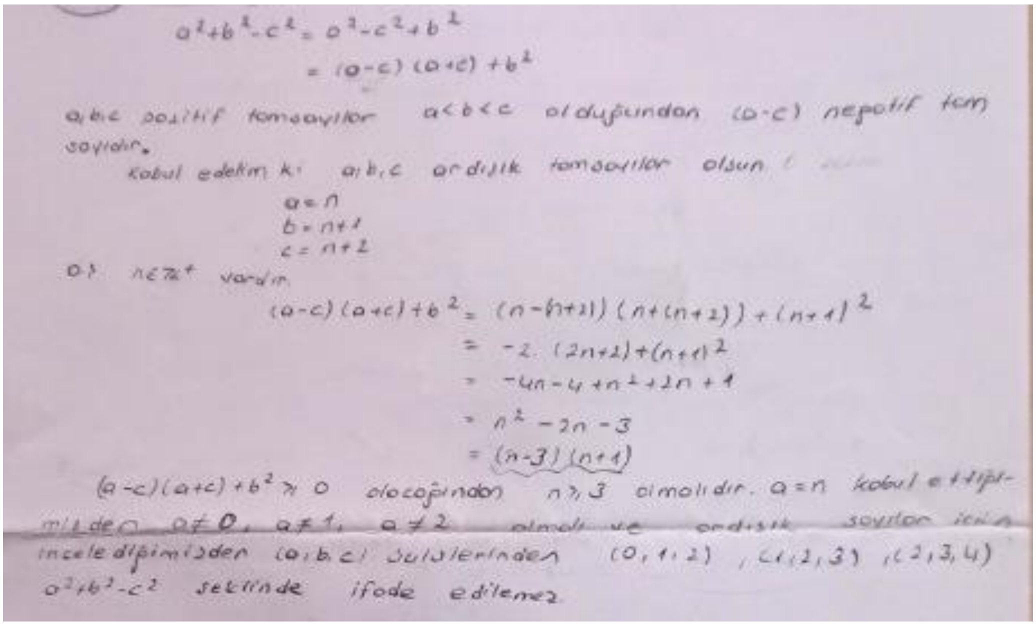
Araştırmacı: Senin cevabın ne oldu?

ÖA1: İfade edebiliriz. Çünkü ben birkaç denememde yapmaya çalıştığım şeye çok yaklaştım. Gördüm aslında ama sezgisel olarak gördüm. Onu tam olarak açık ifade edemedim. Zaten çözümümü değerlendirirken kâğıtta da yazdım. Sonuna geldiğimde sezgisel olarak bunu gördüğümü ama açıkça ifade edemediğimi söyledim. O yüzden ben ifade edilebileceğini düşünüyorum.

4.1.5.2. ÖA2'in P-5 için muhakeme süreci

ÖA2 a, b, c değerlerini sırasıyla $n, n+1, n+2$ şeklinde ardışık tamsayılar olarak temsil ederek elde ettiği eşitlikle cebirsel bir strateji izlemiştir (Şekil 59):

ÖA2: İlk başta a, b, c 'yi ardışık aldım. Yerine koyunca bu eşitliğin sağ tarafının negatif olmaması için n'nin 3'ten küçük olmaması gerekiyor. Buradan bu çıktı.



$a^2+b^2-c^2 = a^2-c^2+b^2$
$= (a-c)(a+c)+b^2$

a,b,c pozitif tamsayılar $a<b<c$ olduğundan $(a-c)$ negatif tam sayıdır.

Kabul edelim ki a,b,c ardışık tamsayılar olsun

$a=n$
$b=n+1$
$c=n+2$

$a>$ $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır.

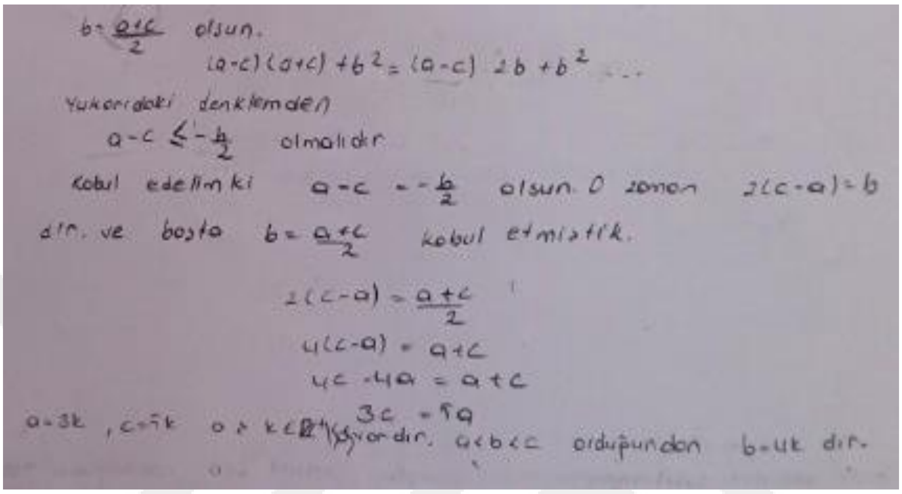
$(a-c)(a+c)+b^2 = (n-(n+2))(n+(n+2))+(n+1)^2$
$= -2.(2n+2)+(n+1)^2$
$= -4n-4+n^2+2n+1$
$= n^2-2n-3$
$= (n-3)(n+1)$

$(a-c)(a+c)+b^2 \geq 0$ olacağından $n\geq 3$ olmalıdır. $a=n$ kabul ettiğimizden $a\neq 0$, $a\neq 1$, $a\neq 2$ olmalı ve ardışık sayılar için incelediğimizden (a,b,c) üçlülerinden (0,1,2), (1,2,3), (2,3,4) $a^2+b^2-c^2$ şeklinde ifade edilemez

Şekil 59. ÖA2'nin P-5 için cebirsel strateji izlediği ilk muhakeme eylemi

Şekil 59'dan görüleceği üzere ÖA2, a, b, c'yi ardışık seçtiğinde izlediği cebirsel strateji ile a'nın en küçük 3 olabileceği sonucuna ulaşmıştır. Daha sonra b'yi özel olarak a ve c'nin aritmetik ortalaması alarak başladığı başka bir cebirsel strateji izlemiştir (Şekil 54):

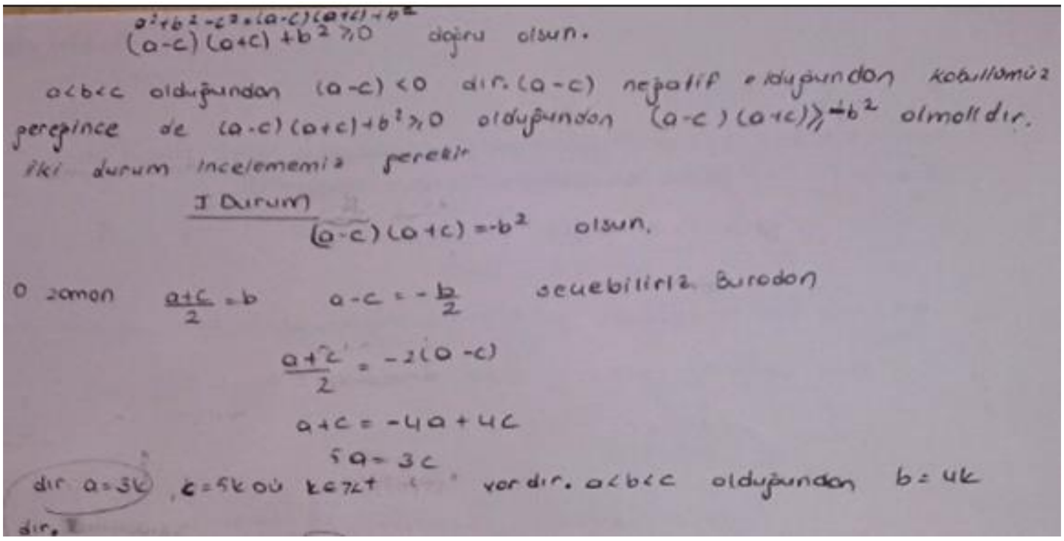
ÖA2: Dedim ki b o zaman $\frac{a+c}{2}$ şeklinde ifade edilsin. Buradan o zaman $(a-c)$'nin $\frac{-b}{2}$'den küçük olması gerekiyor diye düşünüm. Ve ilk olarak $(a-c)$'nin $\frac{-b}{2}$'e eşit olmasını inceleyerek bir sonuca ulaştım. $3c = 5a$ geldi. $a = 3k$ şeklinde seçersek $a = 5k$ ve b de $4k$ olur. Yani bunu diyebildim buradan.



Şekil 60. ÖA2'nin P-5 için cebirsel strateji izlediği ikinci muhakeme eylemi

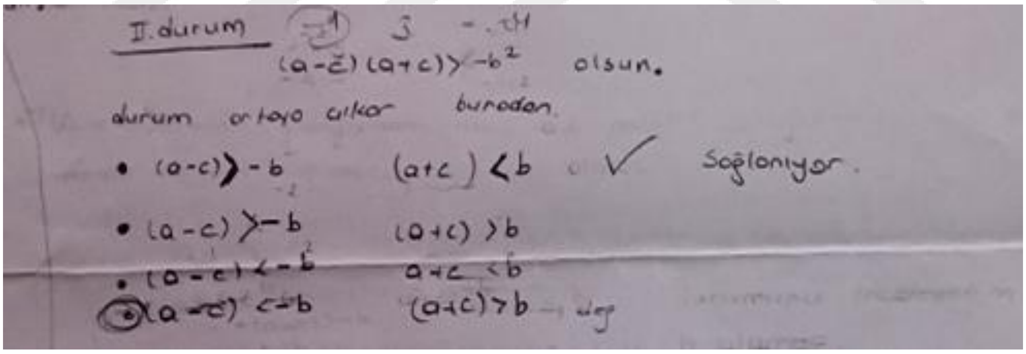
Şekil 60'ta görüldüğü gibi problemde verilen ifadeye göre $a < b < c$ olduğundan b'yi özel olarak a ve c'nin aritmetik ortalaması olarak ele alan ÖA2, daha sonra ikinci bir kabulle $a - c = \frac{-b}{2}$ alarak aslında $a^2 + b^2 - c^2$ ifadesini sıfıra eşitlemiş olduğundan yalnızca sıfırı ifade edecek şekilde a, b ve c'nin alabilecek değerlerini bulmuştur. ÖA2'nın cebirsel ifadeleri kavrama ve yorumlamada zorluk yaşadığı söylenebilir. Nitekim $a < b < c$ sıralamasından ve yine $a^2 + b^2 - c^2$ ifadesini farkında olmadan yine sıfıra eşitleyerek yaptığı çıkarımlarla elde ettiği eşitsizliği incelemiştir (Şekil 61).

ÖA2: Şimdi bu sıfırdan büyük eşit olacaksa eğer buradaki durumları inceledim. $(a-c)(a+c) \geq -b^2$ olmalıdır. Burada iki durum olabilir. Birincisi $-b^2$'ye eşit olması. Bunları yapınca da yine işte $3k, 4k, 5k$ geldi.



Şekil 61. ÖA2’nin P-5 için cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

Şekil 61’de görüldüğü gibi ÖA2’nin incelediği ilk durum $a^2+b^2-c^2$ ifadesinin sıfıra eşit olması durumudur. Yani cebirsel ifadeleri iyi yorumlayamadığı için farkında olmadan aslında bir önceki çözümünün aynısını yapmıştır. ÖA2 daha sonra eşitsizlikte belirlediği ikinci durumu inceleyerek stratejisini izlemeye devam etmiştir:



Şekil 62. ÖA2’nin P-5 için izlediği üçüncü cebirsel strateji ile elde ettiği verilerden çıkarımda bulunma eylemleri

Şekil 61 ve 62’de görülen çözümleriyle ÖA2 özel durumlardan yola çıkarak aslında birbirine denk sayılabilecek ve bir sonuca varılamayacağı açık olan cebirsel stratejiler izlemiş, cebirsel ifadeleri anlamlandırma ve yorumlamada sahip olduğu zorluklar nedeniyle elde ettiği verileri yorumlamada zorlanmış ve herhangi bir anlamlı çıkarımda bulunmadan muhakeme sürecini bitirmiştir.

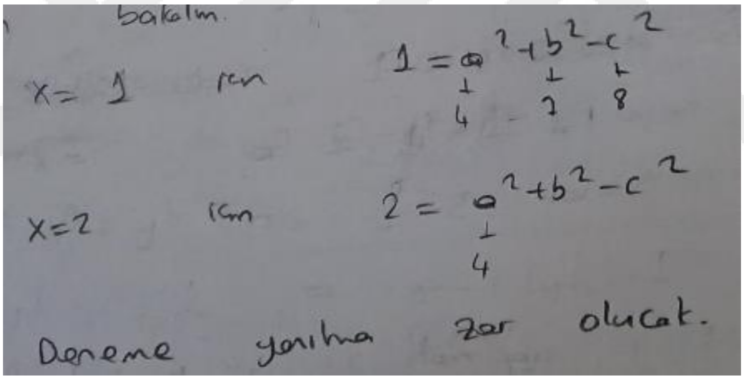
4.1.5.3. ÖA3'in P-5 için muhakeme süreci

ÖA3 öncelikle deneme yanılma stratejisini izlemiştir (Şekil 63). Ayrıca bu sırada Pisagor üçgenine dayanarak 0'ın istenilen biçimde yazılabileceği çıkarımında bulunmuştur:

ÖA3: Ben dedim ki bir tane bir sayı alayım rastgele ve bu şekilde yazılsın. Şimdi negatif olmayan tamsayılar sıfırdan büyük ya da sıfıra eşit olacak. Sıfıra eşit oluyorsa zaten kolayca 3, 4 ve 5'in katları bunu sağlıyor. Bir sürü var. Ama pozitif bir sayıyı göstermekte çok zorlandım. 1'i bulmak için bile bayağı uğraştım. Bayağı zaman kaybettim. 2 için uğraşmadım artık.

Araştırmacı: Zaman kaybettiğin için mi?

ÖA3: Evet zor oldu belirlemesi. Nereye kadar gideceğim yok zaten deneme yanılma ile şey amacı ile başlamıştım bana bir fikir versin belki bir örüntü bulacağım hani o sayılar arasında diye başlamıştım ama deneme yanılma yapamadım bile. Sayılar beni zorladı.

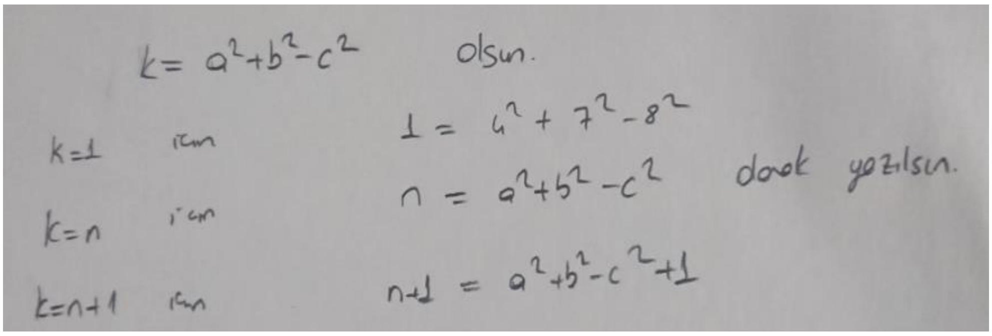


Şekil 63. ÖA3'ün P-5 için deneme yanılma stratejisi izlediği ilk muhakeme eylemi

Şekil 63'te görüldüğü gibi deneme yanılma stratejisini izleyen ÖA3, yukarıdaki açıklamalarında belirttiği gibi 1'i bulmak için dahi çok faza çaba gösterdiğini belirterek bu stratejiyi terk etmiştir. Daha sonra ise negatif olmayan tüm tamsayıların istenilen biçimde ifade edilebileceği fikriyle tümevarım stratejisini izlemiştir (Şekil 64):

Araştırmacı: Sonra ne yaptın?

ÖA3: Sonra dedim ki tümevarım yapayım bari dedim. Tümevarımda da şurada kaldım. $k=1$ için gösterdim. n için kabul ettim, $n+1$ için yine böyle bir ifade geldi. Kabulüm işe yaramadı.



Şekil 64. ÖA3'ün P-5 için tümevarım stratejisini izlediği muhakeme eylemi

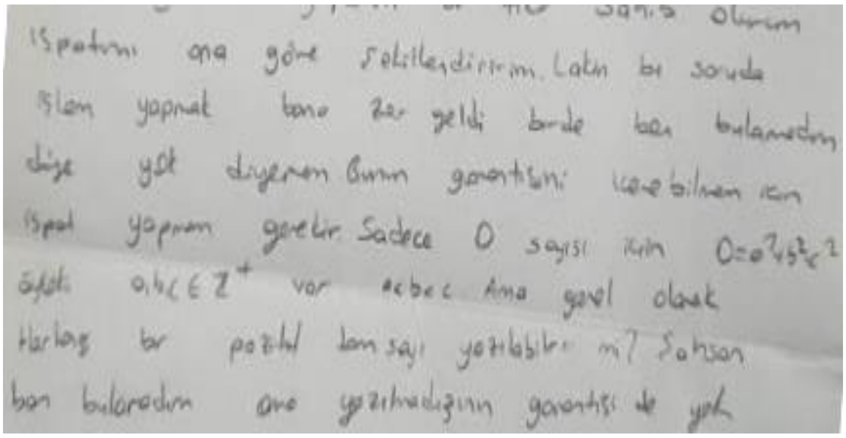
Şekil 64'te görüldüğü gibi tümevarım stratejisi ile negatif olmayan tüm tamsayıların istenilen biçimde yazılabileceğini göstermek isteyen ÖA3, bu stratejiyi işe yarar olmadığını fark ederek bırakmış ve aynı zamanda çözüm sürecini sonlandırmıştır:

Araştırmacı: Peki ne düşündün problemin yanıtıyla ilgili?

ÖA3: Yani ben yorum kısmında (Şekil 65) ifade edilir mi ifade edilemez mi ben kararsız kaldım. Ve dedim ki hani şey hani size de demiştim siz soruyorsunuz ifade edilebilir midir diye benim de baştan beri hep böyle bir düşüncem vardı ama ben bulamadım bir türlü.

Araştırmacı: İfade edilemez sonucuna mı vardın?

ÖA3: Arada kaldım. Yani ifade edilemez diye düşündüm.

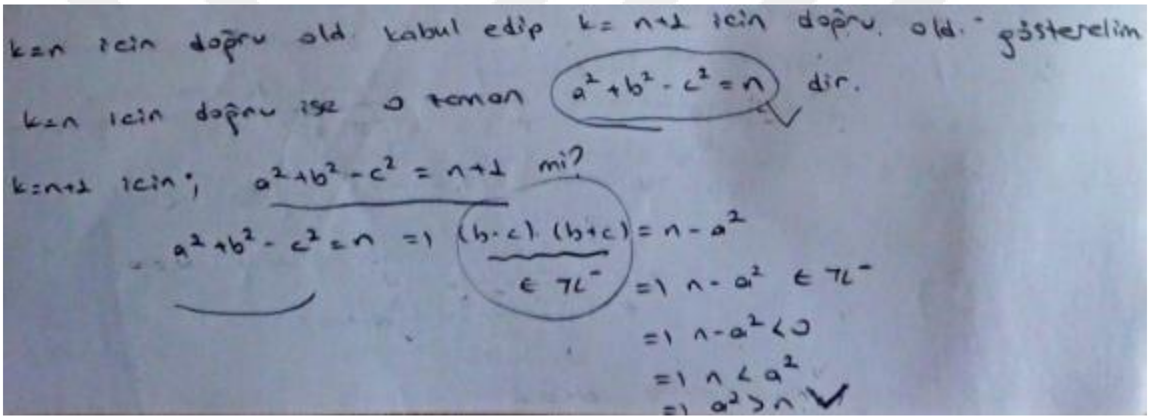


Şekil 65. ÖA3'ün P-5 için yaptığı çözüme dair açıklamaları

4.1.5.4. ÖA4'ün P-5 için muhakeme süreci

ÖA4, sezgisel olarak negatif olmayan tüm tamsayıların problemde istenilen biçimde ifade edilebileceğini düşünmüş ve tümevarım stratejisi ile göstermeye çalışmıştır (Şekil 66):

ÖA4: Burada sezgisel olarak doğal sayıların bu şekilde yazılabileceğini düşündüm. k’ya eşit olsun dedim. Sıfır için inceledim önce. Sıfır için zaten 3,4 ve 5 sağlıyor. Bir tane bulmam yeterli. 1 için de gösterdim. 4,7 ve 8 için de 1 oluyor. Sonra $k=n$ için doğruluğunu kabul ettim ve $k=n+1$ için baktım. a^2 ’yı diğer tarafa attım. İki kare farkından gitmeye çalıştım. $a<b<c$ olduğu için $(b-c)(b+c)$ negatif olmak zorunda. Zaten a^2 ’nin de pozitif olduğunu biliyoruz. Burandan a ile n arasında böyle bir eşitsizlik buldum. Yani a^2 ’nin n ’den büyük olabileceğini düşündüm burada. Birazcık sezgisel kaldı bunlar. Yani pek emin olmadım buradan. Hani sonucu bilerek onu ispatladığım için birazcık havada kaldı gibi geldi. Hani öyle olduğunu biliyorum gösteriyorum yani. Doğruluğunu biliyorsun yani sonuçta. Biraz sezgisel kaldı benim için.

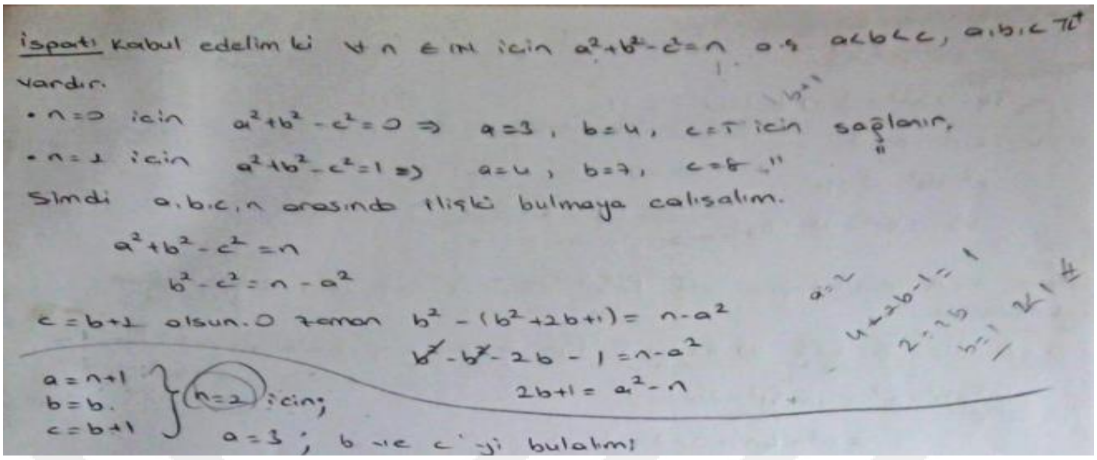


Şekil 66. ÖA4'ün P-5 için tümevarım stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Şekil 66’dan ve ÖA4’ün açıklamalarından görüldüğü gibi tümevarım stratejisi ile negatif olmayan tüm tamsayıların istenilen biçimde yazılabileceğini göstermek isteyen ÖA4, öncelikle çeşitli cebirsel işlemler yapmış daha sonra yaptığı işlemleri kendisi de anlamlı bulmayarak, deneme yanılma stratejisi ile *a*,*b* ve *c* arasında bir ilişki bulmaya çalışmıştır:

Araştırmacı: Daha sonra ne yaptın? Devam etmişsin bu çözüme değil mi?

ÖA4: Evet ama sonra *a*,*b* ve *c* arasında bir ilişki bulmaya çalıştım (Şekil 61). En azından bir ilişki bulayım dedim. Hani sayıların seçimini ona göre yaparım diye. Ve ben ardışıklığa taktım. Orada sürekli bir ardışıklık olacak gibi. Sürekli birbirinin ardışığı olsun diye gitmeye çalıştım. Ve hani şeyleri düşünüyorum sürekli 3,4 ve 5’i düşünüyorum. 5,12 ve 13’ü düşünüyorum. Hep böyle ardışık bir sayı illa ki olmalı diye düşündüm aslında. Böyle birbirini götürsün falan diye. Ardışıklığı kullanayım diye c’ye $b+1$ olsun dedim. Yani c ile b’yi ardışık almışım orada. Sonra denedim a ile n arasında bir ilişki bulmak için denedim. 1 ve 2 alınca olmadı. 3 sağladı. $a = n + 3$ alınca yerine yazıp eşitledim. Zaten her türlü tamsayı geliyor artık.



ispatı Kabul edelim ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a^2+b^2-c^2=n$ o.ş $a<b<c$, $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

• $n=0$ için $a^2+b^2-c^2=0 \Rightarrow a=3,\ b=4,\ c=5$ için sağlanır,

• $n=1$ için $a^2+b^2-c^2=1 \Rightarrow a=4,\ b=7,\ c=8$ "

Şimdi a,b,c,n arasında ilişki bulmaya çalışalım.

$a^2+b^2-c^2=n$

$b^2-c^2=n-a^2$

$c=b+1$ olsun. O zaman $b^2-(b^2+2b+1)=n-a^2$

$b^2-b^2-2b-1=n-a^2$

$2b+1=a^2-n$

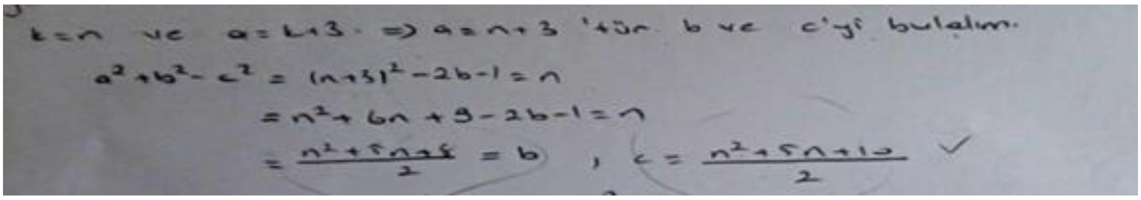
$\left.\begin{array}{l} a=n+1 \\ b=b \\ c=b+1 \end{array}\right\}$ $n=2$ için; $a=3$; b ve c'yi bulalım!

Şekil 67. ÖA4'ün P-5 için için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

İzlediği cebirsel strateji ile *a,b* ve *c* arasında bir ilişki belirleyen ÖA4 Şekil 67 ve 68'den görüldüğü gibi doğru olarak nitelenebilecek bir çözüm ortaya koyarak çözüm sürecini sonlandırmış ve çözümünün doğruluğundan emin olduğunu bildirmiştir.

Araştırmacı: Çözümünün doğruluğu ile ilgili ne düşünüyorsun?

ÖA4: Evet. Hani gerekli işlemleri yaptığımda da sonuç çıkıyor yani. Eminim ben bundan.



$k=n$ ve $a=k+3 \Rightarrow a=n+3$ için b ve c'yi bulalım.

$a^2+b^2-c^2=(n+3)^2-2b-1=n$

$=n^2+6n+9-2b-1=n$

$=\dfrac{n^2+5n+8}{2}=b$, $c=\dfrac{n^2+5n+10}{2}$ ✓

Şekil 68. ÖA4'ün P-5 için çözümü

4.1.6. Problem-6'ya Ait Bulgular

"*d* sayısı, 2, 5 ve 13'ten farklı olan herhangi bir pozitif tamsayı olsun ve $\{2,5,13,d\}$ kümesi verilsin. $a.b-1$, bir tamsayısının karesi olmayacak şekilde $\{2,5,13,d\}$ kümesinden birbirinden farklı *a* ve *b* tamsayıları her zaman seçilebilir mi?" ifadesine sahip P-6 için $\{2,5,13,d\}$ kümesinden *2,5,13* tamsayıları ikişerli olarak ele alındığında $a.b-1$'in tam kare olduğu gözlemlendikten sonra her *d* tamsayısı için 2 ve *d* , 5 ve *d*, 13 ve *d* sayı ikilileri için

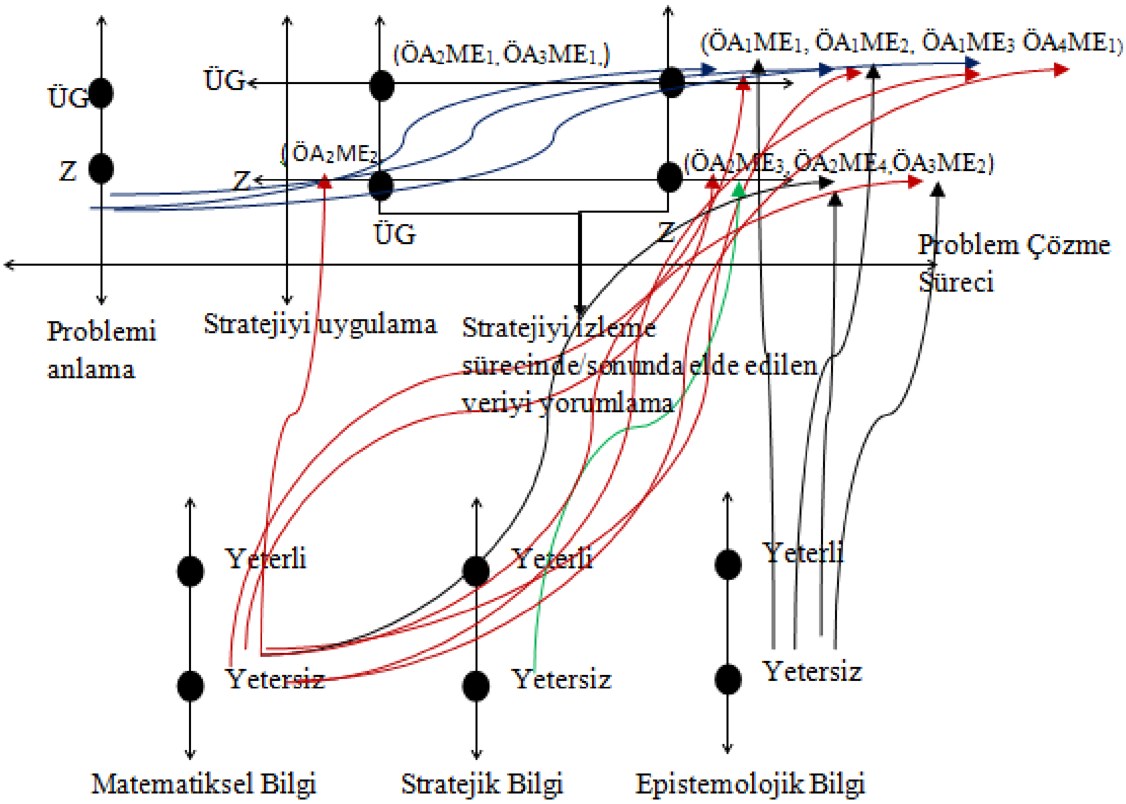
$a.b-1$ ifadesinin örneklerle veya tamsayıların özelliklerine göre incelenerek yanıt ispatlanabilir. Bu probleme dair örnek bir çözüm "Ekler" bölümünde verilmiştir.

Öğretmen adaylarının P-6 çözüm sürecindeki muhakeme eylemleri ve bu muhakeme eylemleri sürecinde yaşadıkları zorluklar Tablo 10 ve Şekil 69'daki gibidir. Öğretmen adaylarının tümü izledikleri stratejiler sonucunda herhangi bir d tamsayısı için problemde istenilen şartların sağlanabileceğini iddia etmiştir. ÖA4 örnekler üzerinde çalışarak genellemeye varmış, yanıtının doğruluğundan emin olmakla birlikte çözümünün sınırlıklıklarının farkında olduğunu bildirmiştir. Ancak başka bir strateji ile yanıtını ispatlamamıştır. ÖA1, ÖA2 ve ÖA3 ise izledikleri stratejilerde tamsayıların özelliklerini belirleme, çarpanlara ayırma, bölünebilme, cebirsel ifadeleri anlamlandırma gibi matematiksel bilgilerine dayalı zorluk yaşamış ancak süreç sonunda cebirsel çözüm yaptıklarını düşünerek ÖA3 kısmen, ÖA1 ve ÖA2 ise yanıtlarndan emin olduklarını bildimişlerdir. Dolayısıyla yanıtlarını ispatlamak için uygun bir strateji arayışı ihtiyacı duymadan muhakeme süreçlerini sonlandırmışlardır. Ayrıca bu süreçte ÖA1 ve ÖA2'nin muhakeme eylemlerinde yaşadıkları zorluklarda problemi tam olarak anlamlandıramamalarının etkisi de görülmüştür.

Tablo 10

Öğretmen Adaylarının P-6 İçin Muhakeme Eylemleri

Öğretmen Adayı	Muhakeme Eylemi
ÖA1	$ÖA_1ME_1$: Durum inceleme stratejisi: tek tamsayılar $ÖA_1ME_2$: Durum inceleme stratejisi: çift tamsayılar $ÖA_1ME_3$: Cebirsel strateji
ÖA2	$ÖA_2ME_1$: Durum inceleme stratejisi: çift tamsayılar $ÖA_2ME_2$: Durum inceleme stratejisi: tek tamsayılar $ÖA_2ME_3$: Çelişki ile ispat stratejisi $ÖA_2ME_4$: Çelişki ile ispat stratejisi
ÖA3	$ÖA_3ME_1$: Deneme yanılma stratejisi $ÖA_3ME_2$: Çelişki ile ispat stratejisi
ÖA4	$ÖA_4ME_1$: Deneme yanılma



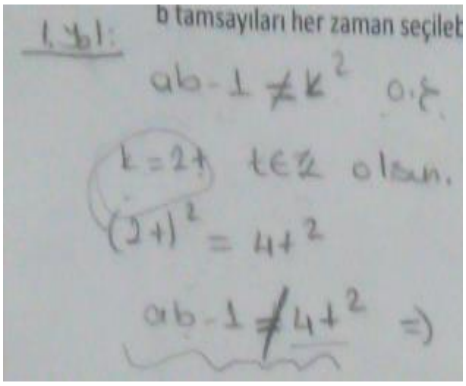
Şekil 69. Öğretmen adaylarının P-6 için muhakeme eylemleri

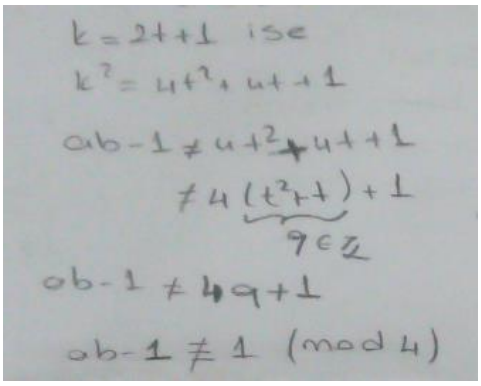
Öğretmen adaylarının bu probleme dair muhakeme süreçleriyle ilgili bulgular ise ayrıntılı olarak şöyledir:

4.1.6.1. ÖA1'in P-6 için muhakeme süreci

ÖA1, P-6 için öncelikle durum inceleme stratejisini izlemiş ve buradan çıkarımlarda bulunmuştur:

ÖA1: $ab-1\neq k^2$ olacak şekilde a ve b bulabilir miyim diye bakıyorum. Burada k tek olabilir k çift olabilir. Önce k'nın çift olduğu duruma baktım. Eğer k çiftse $ab-1\neq 4t^2$ olsun dedim. Buradan ben bir tane d bulabilirim. O yüzden çift olduğu durumda $ab-1\neq k^2$ oluyor gerçekten. Sonra $k=2t+1$ olsun yani tek olsun dedim. t^2+1 'e q dedim ve oradan da $ab-1\neq 4q+1$ geldi. Öyleyse $ab-1$, 4'e bölündüğünde kalan 1 olmayacak şekilde de bir tane d bulabilirim. O zaman da dedim ki her zaman d bulabiliyorum. Çözümde de hani bir çelişkiye falan düşmediğim için doğru olduğunu düşündüm.



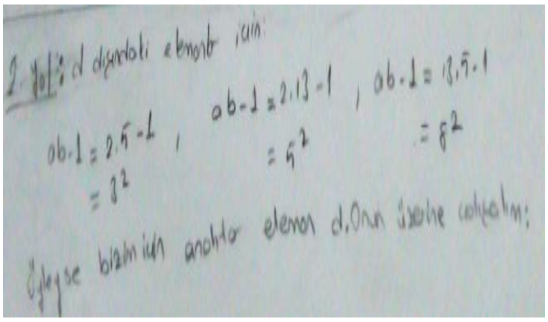


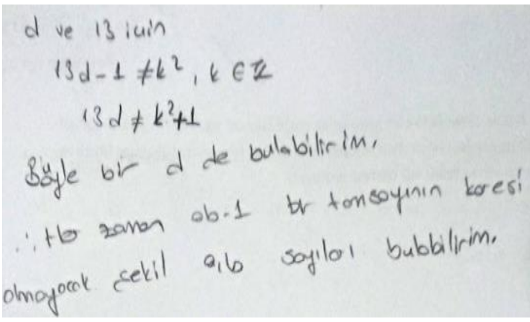
(a) (b)

Şekil 70. ÖA1'in P-6 için durum inceleme stratejisini izlediği muhakeme eylemi

ÖA1'in Şekil 70'te görülen çözümü incelendiğinde, $a.b-1$ bir k tamsayısının karesine eşit olmayacak şekilde oluşturduğu eşitsizliği, durum inceleme stratejisi ile, k 'nın sırasıyla çift ve tek olma durumlarına göre incelediği görülmektedir. Buna göre $ab-1 \neq 4t^2$ ($k=2t$) ve $ab-1 \neq 4q+1$ ($k=2t+1$ ve $t^2+1=q$) eşitsizliklerini elde eden ÖA1, bu eşitsizlikleri sağlayacak şekilde d bulunabileceğini belirtmiştir. Bu eşitsizlikleri sağlayacak tamsayı değerlerini bulmak mümkün olmakla birlikte elde edilen bu genel ifadelerden a ya da b 'den biri 2, 5 ya da 13 diğeri d olacak şekilde ele alındığında seçilen herhangi bir d için problemde istenilen şartların sağlanabileceği çıkarımında bulunmak mümkün değildir. Çünkü bu eşitsizliklerde problem durumuna göre a ve b'den biri 2,5 ya da 13 diğeri ise belirlenen bir d değeridir. Yani d herhangi bir tamsayı değerini alabilen değişken değildir. Dolayısıyla bu durum, ÖA1'in cebirsel ifadeleri anlamada yani matematiksel bilgiye dayalı zorluk yaşadığı ve aynı zamanda problem durumundan uzaklaşması şeklinde yorumlanmıştır.

ÖA1 problem çözme oturumunda ikinci bir yolla daha problemi çözmüştür. Bu çözümünde öncelikle *2,5,13* tamsayılarını ikişerli olarak ele alıp $a.b-1$ 'in tam kare olduğunu gözlemlemiştir (Şekil 71). Gözlemine göre Şekil 64a'dan görüldüğü gibi d'nin anahtar eleman olduğunu belirten ÖA1 daha sonra sırasıyla 2 ve d, 5 ve d, 13 ve d sayı ikilileri için $a.b-1$ ifadesini incelemiş ve tam kare olacak şekilde her zaman bir d tamsayının bulunabileceği çıkarımında bulunmuştur. Ancak 13 ve d ikilisini incelediği Şekil 64b'den görüldüğü gibi $13d \neq k^2+1$ gibi elde ettiği eşitsizliklerden problem durumuna yönelik genel bir çıkarımda bulunulması mümkün değildir. Bu durum ilk stratejisinde olduğu gibi ÖA1'in cebirsel ifadeleri anlamada yani matematiksel bilgiye dayalı güçlük çekmesi ve aynı zamanda problem durumundan uzaklaşması şeklinde yorumlanmıştır.





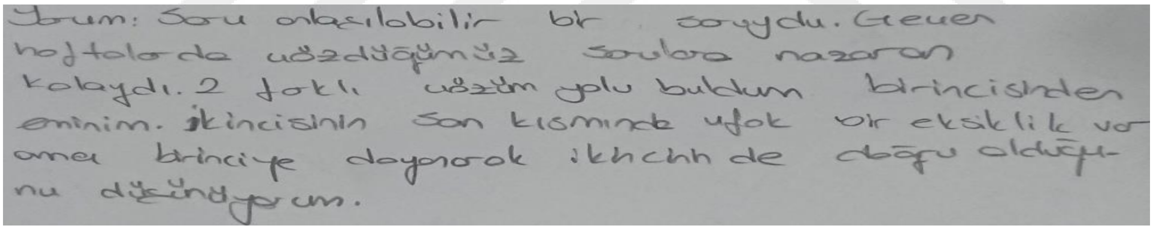
(a) (b)

Şekil 71. ÖA1'in P-6 için cebirsel strateji izlediği muhakeme eylemi

Her ikisi de doğru olmayan iki farklı çözüm yolundan sonra P-6 için muhakeme sürecini sonlandıran ÖA1, çözümlerinin doğruluğundan emin olduğunu belirtmiştir. Yaptığı açıklama dikkate alındığında cebirsel bir çözüm yaptığını düşündüğünden dolayı çözümünden emin olduğu söylenebilir:

Araştırmacı: Çözümünün doğruluğu ile ilgili ne düşünüyorsun?

ÖA1: Ben değerlendirirken de belirttim zaten (Şekil 72). İlk çözümüm doğru. Denklemlerden işlemleri yapınca bir çelişki çıkmadı.

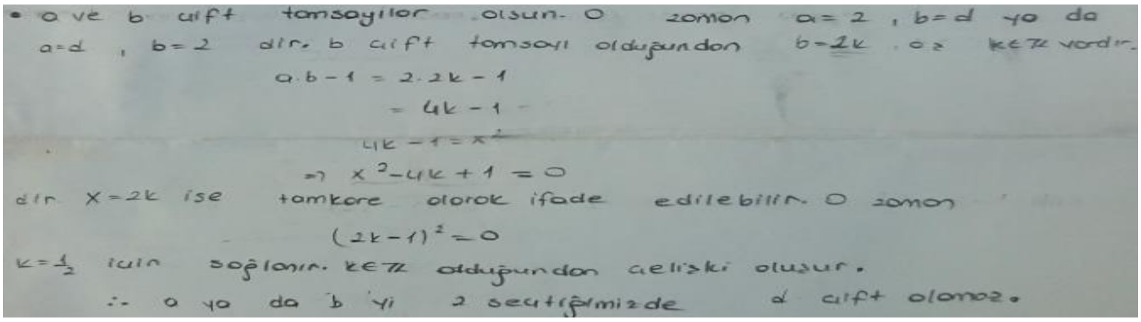


Şekil 72. ÖA1'in P-6 için yaptığı çözüm ile ilgili değerlendirmesi

4.1.6.2. ÖA2'in P-6 için muhakeme süreci

Durum inceleme stratejisini izleyen ÖA2, öncelikle a ile b'nin çift olma durumunu ele almıştır. Problem verilerine göre bu durumda bu bilinmeyenlerden birini 2 diğerini d olarak belirledikten sonra elde ettiği eşitlikten bir çıkarımda bulunmuştur:

ÖA2: Bu kümeden seçtiğimiz iki eleman çift olsun dedim (Şekil 73). Yani $a = 2$ ve $d = 2k$ olacak. b, çift olduğundan $2k$ şeklinde yazılacak dedim. Buradan getirip yerine yazdığımda $x^2 - 4k + 1 = 0$ geldi. Bu ifadenin tam kare olabilmesi için $x = 2k$ olması gerekiyor. Çünkü o zaman $2k-1$'in karesi şeklinde geliyor. Buradan ben k 'yı tek türlü seçebilirim. O da $\frac{1}{2}$ ’dir. Bu da k ’yı aldığım kümeyle çelişiyor. Çünkü k pozitif tamsayıydı. O yüzden de çelişki oluştu dedim. Yani eğer d çift tamsayı olursa her zaman karesi olmayacak şekilde yazılabilir.

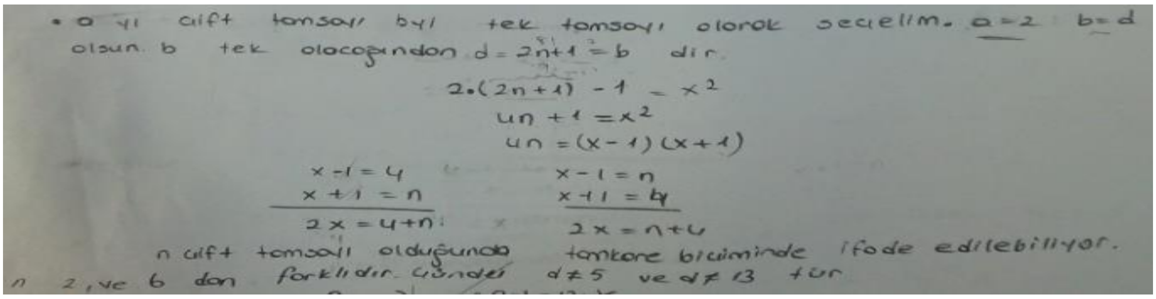


• a ve b çift tamsayılar olsun. O zaman a = 2 , b = d ya da
a = d , b = 2 dir. b çift tamsayı olduğundan b = 2k , o ≥ k ∈ Z vardır.
$a.b - 1 = 2.2k - 1$
$= 4k - 1$
$4k - 1 = x^2$
$\Rightarrow x^2 - 4k + 1 = 0$
dır. x = 2k ise tamkare olarak ifade edilebilir. O zaman
$(2k-1)^2 = 0$
$k = \frac{1}{2}$ için sağlanır. k ∈ Z olduğundan çelişki oluşur.
∴ a ya da b yi 2 seçtiğimizde d çift olamaz.

Şekil 73. ÖA2'nin P-6 için durum inceleme stratejisini izlediği muhakeme eylemi

ÖA2’nın Şekil 73’teki çözümü ve yukarıdaki açıklamalarından görüleceği üzere; d ’nin çift olması durumunda 2 ile çarpımının 1 eksiğinin tam kare olamayacağı şeklinde doğru bir iddiada bulunmuştur. Daha sonra d ’nin tek tamsayı olması durumunu incelemiştir:

ÖA2: Sonra a ’yı çift tamsayı b ’yi de tek tamsayı olarak seçeyim dedim (Şekil 74). Buraya kadar her şey yolundaydı. Burada bir işlem karışıklığına düştüm. Buradan bir sonuç çıkaramadım. O yüzden bu çözümü bıraktım.



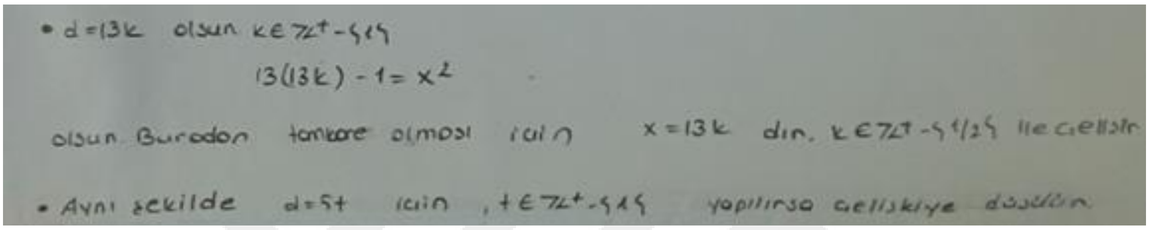
• a yı çift tamsayı b yi tek tamsayı olarak seçelim. a = 2 b = d
olsun. b tek olacağından d = 2n+1 = b dir.
$2.(2n+1) - 1 = x^2$
$4n + 1 = x^2$
$4n = (x-1)(x+1)$
$x - 1 = 4$ | $x - 1 = n$
$x + 1 = n$ | $x + 1 = 4$
$2x = 4 + n$ | $2x = n + 4$
n çift tamsayı olduğunda tamkare biçiminde ifade edilebiliyor.
n 2, ve 6 dan farklıdır. Çünkü d ≠ 5 ve d ≠ 13 tür

Şekil 74. ÖA2'nin P-6 için durum inceleme stratejisini izlediği ikinci muhakeme eylemi

Şekil 74’teki gibi a’nın çift yani verilen kümeye göre 2, $b = d$ ’nin tek olma durumunu incelerken çarpanlara ayırma ile ilgili yaşadığı zorluk nedeniyle $2x = 4 + n$ şeklinde bir eşitlik elde eden ÖA2, buradan n ’nin çift tamsayı olması durumunda tam kare elde edilebileceğini ifade etmiş ancak bir sonuç elde edemediğini bildirmiştir. ÖA2’nin çözümünde hem çarpanlara ayırma hem de cebirsel ifadeleri anlama konusunda zorluk yaşadığı görülmektedir.

ÖA2 daha sonra $a = 2$ ve d ’yi bir çift tamsayı, yani $d = 2k$ olarak alıp $ab - 1$’yi tam kare kabul etmesi durumunda çelişkiye düşmesine dayanarak $d = 13k$ ve $d = 5t$ aldığında da bir çelişki elde edeceğini doğrudan ifade etmiştir (Şekil 75):

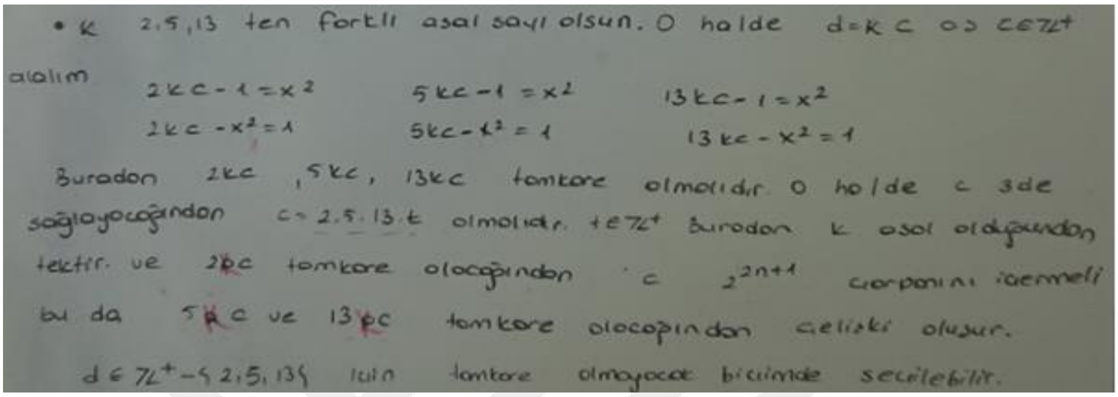
ÖA2: Sonra diğerlerini inceledim. Burada da dedim ki $d = 13k$ olsun. Hani oradan 13’ün de olmayacağını yani 13 ve 13’ün katlarının da sağlamayacağını göstermeye çalıştım. Buradan da yine aynı işlemleri yaptığımda $x = 13k$ geliyor. Buradan da $k = \frac{13}{2}$ ve şurada yerine yazsak yani şu aslında d kabulümle çeliştiği için burada da çelişkiye düştüm. O yüzden bu da olmayacak dedim. Aynı şekilde $d = 5t$ için yaptım. Yine çelişkiye düştüm.



Şekil 75. ÖA2'nin P-6 için çelişki ile ispat stratejisini izlediği muhakeme eylemi

ÖA2’nın Şekil 75’teki çözümü incelendiğinde herhangi bir cebirsel işlem yapmadan çelişkiye düştüğünü belirttiği görülmektedir. a ve b ’den birinin 2 ve $b = d$ ’nin çift tamsayı olması halinde çelişkiye düşmesini 2’nin problemde verilen kümenin bir elemanı olmasına bağladığı ve bu durumu kümenin diğer elemanlarına genelleyerek 13 ve $13k$ veya 5 ve $5k$ sayı ikilileri alınıp $ab - 1$’nin tam kareye eşit olması durumunda çelişkiye düşeceğini düşündüğü görülmektedir. Oysa 2 ve $b = d$ ’nin çift tamsayı olması halinde $ab - 1$’nin tam kareye eşit olmamasının nedeni tam kare olan sayıların 4 ile bölümünden kalanından ya 0 ya da 1 olmasından kaynaklanmakta olup kümenin bir elemanı olarak 2 ve onun katlarının ele alınmasından bağımsızdır. Tam kare olan sayılarla ilgili bu bilgiye sahip olmamakla birlikte ÖA2’nın cebirsel ifadeleri anlamadaki zorluklar d ’nin 5 ve 13’ün katı olması halinde $ab - 1$ ’nin tam kareye eşit olmayacağına dair yanlış bir iddiada bulunmasına neden olmuştur. Ayrıca bu iddiasını kontrol etmediği görülmüştür. Buraya kadar yaptığı çözümlerle d ’nin çift tamsayı ve 5 ve 13’ün katları olması durumunu incelediğini düşünen ÖA2 daha sonra d ’nin diğer tek tamsayılardan biri olması durumlarını inceleyerek çözüm sürecine çelişki ile ispat stratejisi ile devam etmiştir:

ÖA2: Sonra dedim ki d öyle bir sayı olsun ki 2, 5 ve 13’ten farklı asal sayılar ya da bu asal sayıların katı olsun. Onu da $d = k \cdot c$ şeklinde ifade ettim. $c \in \mathbb{Z}^+$ olacak. Üç durumun da sağlandığını kabul ettim. O zaman buradan $2kc, 5kc, 13kc$ tam kare olmalı dedim. O halde üçünü de sağlayacağından c çarpanı yani k asal sayı olduğu için c=2,5,13,t şeklinde bir sayı olacak dedim. k tek olduğundan $2kc$ 'nin tam kare olabilmesi için c 'nin 2^{2n+1} çarpanı içermesi gerekiyor. Eğer c de 2^{2n+1} çarpanı içerirse ve burada tekrar a demişim burası k olacaktı. k de tek olduğu için tam kare olmasıyla çelişiyor. Aşağıda da aynı şekilde devam etti.


• k 2,5,13 ten farklı asal sayı olsun. O halde $d = kc$ ol $c \in \mathbb{Z}^+$ alalım

$2kc - 1 = x^2$ $5kc - 1 = x^2$ $13kc - 1 = x^2$

$2kc - x^2 = 1$ $5kc - x^2 = 1$ $13kc - x^2 = 1$

Buradan $2kc$, $5kc$, $13kc$ tamkare olmalıdır. O halde c 3de sağlayacağından $c = 2.5.13.t$ olmalıdır. $t \in \mathbb{Z}^+$ Buradan k asal olduğundan tektir. ve $2kc$ tamkare olacağından c 2^{2n+1} çarpanını içermeli bu da $5kc$ ve $13kc$ tamkare olacağından çelişki oluşur.

$d \in \mathbb{Z}^+ - \{2,5,13\}$ için tamkare olmayacak biçimde seçilebilir.

Şekil 76. ÖA2'nin P-6 çelişki ile ispat stratejisini izlediği ikinci muhakeme eylemi

Şekil 76'daki çözümü incelendiğine ÖA2'nin bir d tamsayısı için kümenin elemanlarıyla oluşturduğu eşitliklerin tümünü tam kare kabul ederek çelişkiye düşmek istediği görülmektedir. Ancak öncelikle, daha sonra bu durumun çözümün doğruluğunu etkilemediğini iddia etse de, ele aldığı üç durumu da aynı tamsayının karesine eşitlemiştir. Ayrıca tek tamsayıları incelediğini belirten ÖA2 $d = kc$ eşitliğinde $c \in \mathbb{Z}^{+}$ olarak belirlemiştir. Buradan d 'nin yalnızca tek tamsayı olmayacağı açıktır. Ayrıca $2kc - 1$ ifadesi yerine $2kc$ ifadesinin tam kare olma durumunu incelediği görülmektedir. $2kc$ ifadesinin tam kare olması için c 'nin 2^{2n+1} çarpanını içermesi gerektiği iddiası ise doğru olmakla birlikte bu durum c 'nin 5 ve 13'ün katı olmasına engel değildir. Kısaca ÖA2 tamsayılar ve özelliklerine yönelik yaşadığı zorluklar nedeniyle çelişkiye düştüğünü zannederek çözüm sürecini bitirmiştir.

Araştırmacı: Yani dolayısıyla her zaman bu kümeden bir istenilen elemanlar seçilebilir mi?

ÖA2: Evet

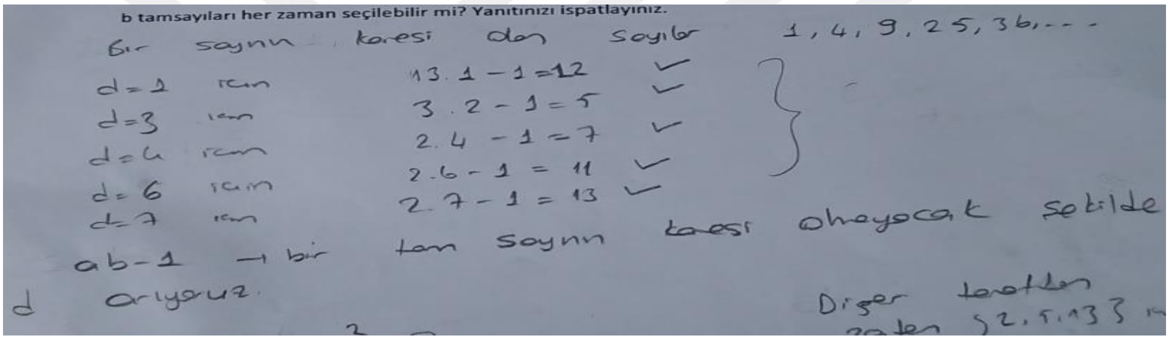
Araştırmacı: Tamam yani bütün tamsayıları bir arada incelemek yerine tek ve çift olarak ayırıp öyle inceledin. Çözümle ilgili düşüncelerin nedir?

ÖA2: Yani çift sayılar bence tamam. Hani onda sıkıntı yok. Tek sayılar da tamam. Hani burada en az bir tanesiyle çelişkiye düşmem yeterli olabileceğini düşünüyorum. Hani sadece alırken hani x^2 ’lerin farklı olabileceğini düşünmemiştim ama farklı da olabilir. Zaten bu çözümüm daha sonrasında ona bağlı gelmedi. O yüzden bence çözümüm doğru oldu yani.

4.1.6.3. ÖA3’in P-6 için muhakeme süreci

ÖA3 öncelikle deneme yanılma stratejisi ile d’nin alabileceği birkaç farklı değer için verilen kümeden istenilen şartlarda iki tamsayı seçebildiğini gözlemlemiştir:

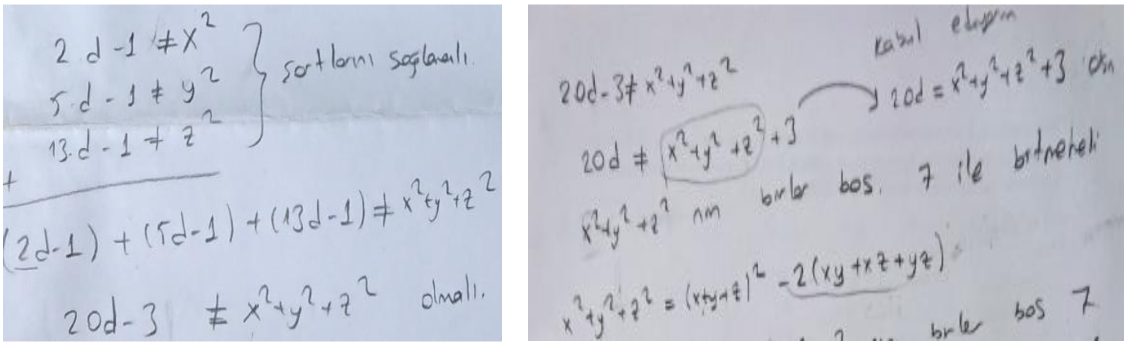
ÖA3: Önce d’ye değer verdim ben (Şekil 77). 1 için baktığımda mesela $13 \cdot 1 - 1 = 12$ yani bir sayının karesi olmadığı için sağlıyordu. Böyle baktığım zaman sayılar sağlıyordu. Bize bunu soruyor.



Şekil 77. ÖA3'ün P-6 için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

ÖA3 öncelikle Şekil 77’de görüldüğü gibi deneme yanılma stratejisi ile problem durumunu analiz etmiştir. Daha sonra ise çelişki ile ispat stratejisini izlemiştir:

ÖA3: Ben 2,5,13’e baktığımda onların tam kare olduğunu gördüm. O zaman bu sayılarla d için bakmalıyız dedim. Yani şu şartlar sağlanmalı (Şekil 78a). Bu eşitsizlikleri taraf tarafa topladığımda $20d - 3 \neq x^2 + y^2 + z^2$ geldi. O zaman $20d \neq x^2 + y^2 + z^2 + 3$ geliyor ya. $x^2 + y^2 + z^2$ ’nin birler basamağı 7 olmamalı dedim. İşte sonra burada da 7 olsun deyip çelişkiye düşmeye çalıştım.

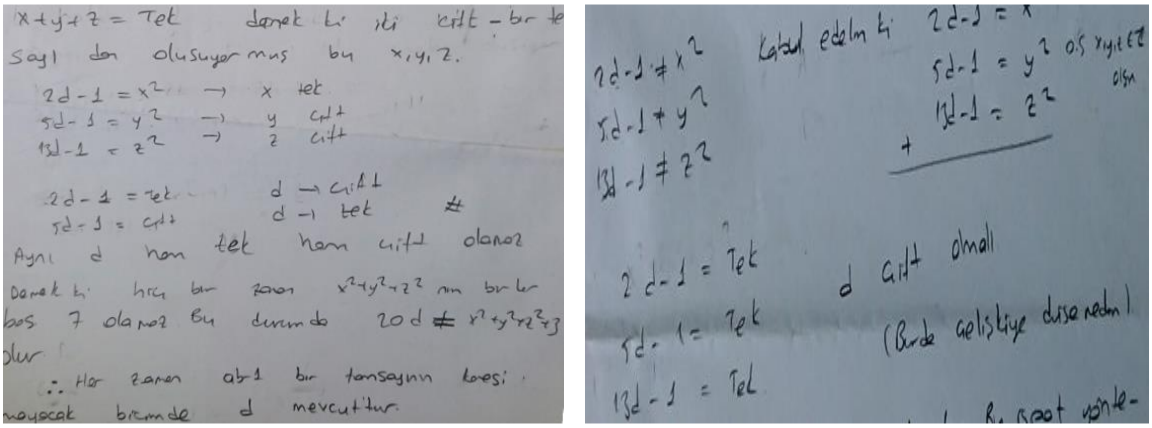


(a) (b)

Şekil 78. ÖA3'ün P-6 için çelişki ile ispat stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Şekil 78'de görüldüğü gibi $20d \neq x^2 + y^2 + z^2 + 3$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde her zaman bir d bulunabileceğini çelişki ile ispat stratejisini izleyerek ispatlamaya çalışmıştır. Bu eşitsizliğin sol tarafı 20'nin bir katı olduğundan sağ tarafında bulunan $x^2 + y^2 + z^2$ ifadesinin son basamağının 7 olmaması gerektiği iddiasında bulunan ÖA3, bu ifadenin tek olmasını kabul ederek çelişki elde etmeye çalışmıştır. Bu sırada ÖA3'ün eşitliğin sol tarafının 20'nin değil 10'nun bir katı olarak ele aldığı veya başka bir deyişle elde ettiği çarpımın sadece son basamağı ile ilgilendiği yani bölme ile ilgili kavramsal bir zorluk yaşadığı görülmektedir. Ayrıca benzer zorluğu $x^2 + y^2 + z^2$ ifadesinin son basamağının 7 olmaması gerektiği iddiasında bulunduktan sonra bu ifadenin tek olmaması gerektiğine dair yaptığı genellemede de yaşadığı görülmektedir. ÖA3 belirttiği gibi çelişkiye varmak için $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ ifadelerinden ikisinin çift birinin tek veya her üçünün de tek olması durumlarını incelemiştir ve buradan çelişki elde ettiğini belirtmiştir:

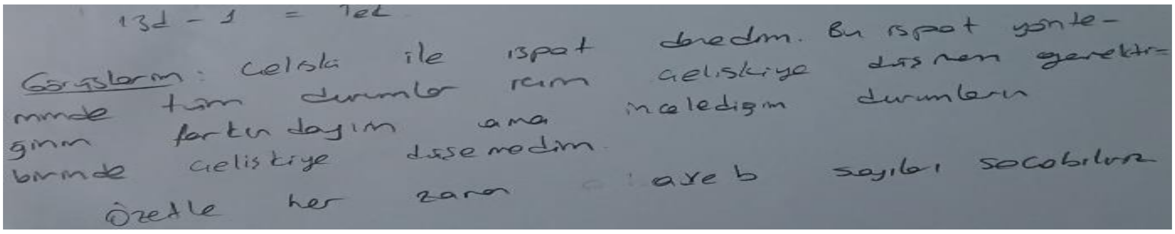
ÖA3: Burada $2d-1$ çift olamaz zaten. O yüzden ben dedim ki bu tek olsun. 1 eksiği çift olduğuna göre o zaman d çift. $5d-1$de çiftse eğer d tektir. Aynı anda d hem tek hem çift olmadığı için çelişkiye düştüm. Yani $x^2 + y^2 + z^2$'nın birler basamağı 7 olamaz. Sonra hepsinin tek olması durumuna baktım ama işte orada çelişki elde edemedim.



(a) (b)

Şekil 79. ÖA3'ün P-6 için çelişki ile ispat stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Şekil 79'dan ve açıklamalarından görüldüğü üzere ÖA3'nin $2d-1$'nin tek olması için d'nin çift olması gerektiği iddiasında bulunmuştur. Oysa bu ifadenin d'den bağımsız olarak $2d$ çarpımındaki 2 çarpanından dolayı her zaman tek olacağı açıktır. Bununla birlikte $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ ifadelerinden tümünün tek olduğu durumu gösteremediğini belirtmiştir (Şekil 79). Yaşadığı matematiksel bilgiye dayalı zorluklardan dolayı izlediği cebirsel stratejileri yorumlamada sıkıntı yaşayan ÖA3 daha sonra çözüm sürecini sonlandırmıştır.

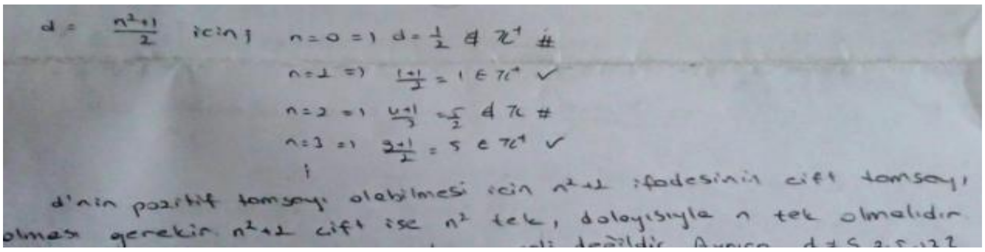


Şekil 80. ÖA3'ün P-6 için yaptığı çözüme dair değerlendirmeleri

4.1.6.4. ÖA4'ün P-6 için muhakeme süreci

ÖA4, öncelikle kümenin 2,5 ve 13 elemanları için $ab-1$ ifadesinin tam kare olduğunu gözlemlemiş ve daha sonra deneme yanılma stratejisi ile $a=2$ ve $b=d$ olma durumunu incelemiştir:

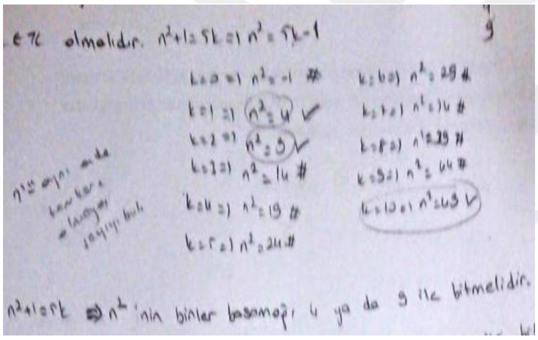
ÖA4: Ben önce baktım 2,5,13'ü alınca tam kare oluyor. O yüzden sonra $a=2$ olsun dedim. Böyle d ile hepsini tek tek denedim. $a=2$ olduğunda tam kare olması için d'nin tek olması gerekiyor.

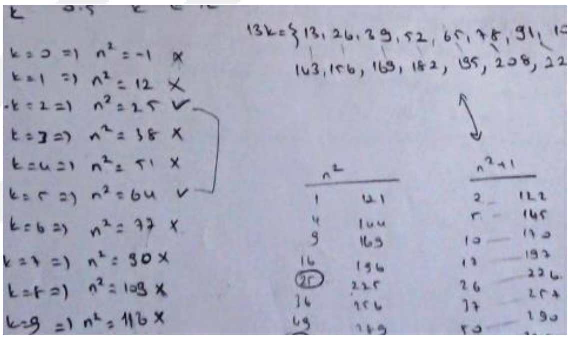


Şekil 81. ÖA4'ün P-6 için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Şekil 81'de görüldüğü gibi ÖA4, $a=2$ ve $b=d$ aldığında $ab-1$ ifadesinin tam kare olması için n'nin tek tamsayı olması gerektiği çıkarımında bulunmuştur. Daha sonra benzer işlemlerle $a=5$ ve $b=d$ ve $a=13$ ve $b=d$ durumlarını incelemiştir:

ÖA4: Sonra $a=5$ için baktığımda n^2'nin sonu 4 ve 9 olduğunda sağlıyor. Ama ilk durumda çift olmaz demiştik. $a=13$ için baktığımda sadece 2 ve 5 için sağlıyor. Yani sonuçta her zaman tam kare gelmiyor.

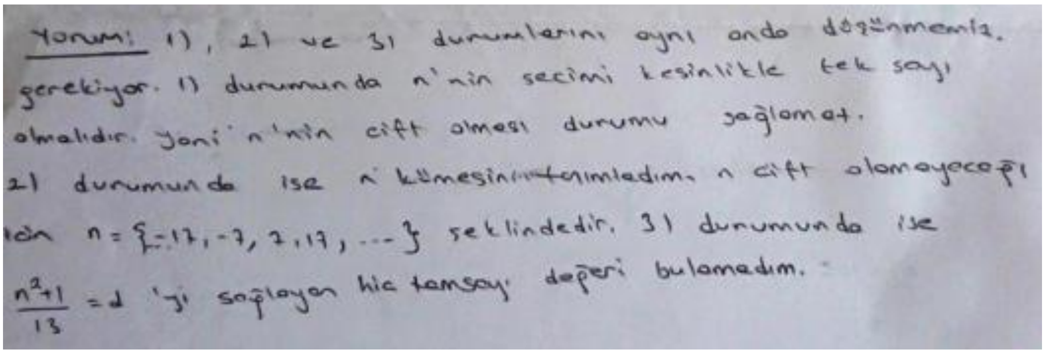




a b

Şekil 82. ÖA4'ün P-6 için deneme yanılma stratejisini izlediği muhakeme eylemi

Şekil 82'de görüldüğü gibi ÖA4, $a=5$ ve $b=d$ ve $a=13$ ve $b=d$ durumlarını incelemiş ve $a=5$ durumunda $ab-1$ ifadesinin birler basamağı 4 ve 9 olduğunda d tamsayılarının bulunabileceğini ifade etmiştir. Ancak incelediği ilk durumdan dolayı çift tamsayıları elediğini belirtmiştir. $a=13$ için ise $ab-1$ ifadesinin d 2 ve 5 tamsayılarından biri olduğunda tam kare olduğunu gözlemlemiş ve bu üç durumdan yola çıkarak Şekil 84'te görüldüğü gibi seçtiği bir d için $ab-1$ ifadesinin her zaman tam kare olmayacağını bildirmiştir.


Yorum: 1), 2) ve 3) durumlarını aynı anda düşünmemiz gerekiyor. 1) durumunda n'nin secimi kesinlikle tek sayı olmalıdır. Yani n'nin cift olması durumu sağlamaz.
2) durumunda ise n kümesini tanımladım. n cift olamayacağı için $n = \{-17, -7, 7, 17, ...\}$ seklindedir. 3) durumunda ise
$\frac{n^2+1}{13} = d$ 'yi sağlayan hic tamsayı değeri bulamadım.

Şekil 83. ÖA4'ün P-6 için yaptığı çözüme dair değerlendirmeleri

Diğer taraftan ÖA4, cevabından emin olduğunu ancak başka bir yolla yapmanın daha uygun olacağını belirtmiştr.

Araştırmacı: Çözümünün doğruluğundan emin misin?

ÖA4:Evet bence doğru ama belki başka bir yöntemle yapılabilirdi. Yani böyle örneklerle gösterdim ama bence yine de doğru.

4.2. İkinci Probleme İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede yaşadıkları zorluklara yönelik atıfları Weiner (1972, 2010)'ın atıfla ilgili tanımladığı konum boyutu altında incelenmiştir. Konum boyutu, kişinin yaşadığı bir duruma dair ortaya koyduğu nedenin bireyin kendisinden mi yoksa kendisi dışındaki etkenlerden mi kaynaklı olduğuyla ilgilidir ve buna dayalı olarak içsel ve dışsal atıflar olarak iki alt boyuta ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının atıfları kodlanmış ve benzer kodlu veriler kategoriler altında toplanmıştır. Daha sonra bu kategorinin içsel mi ve dışsal mı olduğuna karar verilmiştir. Sonuçta öğretmen adaylarının atıfları tablodaki olmuştur:

Tablo 11.

Öğretmen Adaylarının Muhakeme Eylemlerinde Yaşadıkları Zorluklalara Atıfları

Öğretmen Adayı	İçsel Atıfları	Dışsal Atıfları
ÖA1	muhakeme becerisi, deneyim, sebat, sorgulama	problemlerin niteliği, geçmiş öğretim faaliyetleri
ÖA2	kavramsal bilgi, stratejik bilgi, sorgulama	problemlerin niteliği
ÖA3	kavramsal bilgi, stratejik bilgi, deneyim eksikliği	problemlerin niteliği, geçmiş öğretim faaliyetleri
ÖA4	kavramsal bilgi, stratejik bilgi	problemlerin niteliği, geçmiş öğretim faaliyetleri

Tabloda görüldüğü üzere öğretmen adaylarının içsel atıfları; kavramsal bilgi, stratejik bilgi, muhakeme becerisi, sorgulama, deneyim, sebat; dışsal atıfları problemlerin niteliği ve geçmiş öğretim faaliyetleri şeklinde adlandırılan kategorilerden oluşmuştur.

Bu başlık altında her bir öğretmen adayının atıfları içsel ve dışsal atıf başlıkları altında elde edilen kategoriler ve bu kategorileri ortaya çıkaran diyalogları ile birlikte sunulmuştur. Bazı diyaloglarda birden fazla atıf bir arada bulunduğundan, alınan atıf ile ilgili kısmın altı çizilmiştir.

4.2.1. Öğretmen Adaylarının Muhakeme Sürecinde Yaşadığı Zorluklara Dair İçsel Atıfları

Tabloda görüldüğü üzere öğretmen adaylarının içsel atıfları; kavramsal bilgi, stratejik bilgi, muhakeme becerisi, deneyim, sebat, sorgulama olmuştur.

4.2.1.1. Kavramsal bilgi

ÖA1 hariç diğer öğretmen adaylarının muhakeme eylemlerinde yaşadıkları zorluklara atıflarından biri kavramsal bilgi eksiklikleri olmuştur. Örneğin ÖA2, P-3'ü çözüm sürecinden sonra çözüm aşamasında yaptığı kavramsal yanlışları zorlanmasının nedeni olarak göstermiştir:

Araştırmacı: Neden doğru çözüme varamadığını düşünüyorsun?

ÖA2: <u>Niye doğru çözüme varamadım yine anlam yanılgısına düştüm ben.</u> Derste çözdüğümde direk 2 çarpanını bulunca katsayılarından dolayı eledim. Aslında yaptığım benim şu en son işlemdeki çiftleri düşünüp gitmekti. Zaten tekleri elemiştim. Ama 2^t biçimindeki sayıları hiç düşünmedim ben direk 2 çarpanını görünce çift sayılar gitmiştir dedim.

Benzer şekilde P-5'in çözüm sürecinden sonra da ÖA2 yeterli matematiksel bilgiye sahip olmadığını düşündüğünü belirtmiştir:

ÖA2: Nasıl düşüneceğiz ki bir anda ardışık mükemmel kareler arasındaki farkın doğrusal artmasını.

Araştırmacı: Yani matematiksel bilgi olarak onu kullanmış, siz onu gördünüz değil mi?

ÖA2: Mükemmel kareleri gördük sanırım. Hı benim sezgisel olarak ulaştım şeye mükemmel karelerden başta ulaşmamız gerekiyor. Bu zaten tam kare farkından gelir. Kendi çözümümle karşılaştırdığım zaman aynı şekilde ben de şey yaptım $\sqrt{k}$ falan buldum. Zaten verilen iki eşitliği de düzenlediğim zaman bu şekilde bir sayı bulmam gerektiğine ulaşabilirim. Hani benim ki biraz daha şey oldu her şeyi yazdım böyle kendim ulaştım ama burada daha net yani her bilgi tık tık gidiyor.

Araştırmacı: O zaman senin deyiminle tık tık yapamama nedenin nedir sence?

ÖA2: Yapamadım çünkü o kadar yeterli matematik bilgisine sahip değilim.

ÖA3 de muhakeme eylemlerinde zaman zaman matematiksel bilgiye dayalı zorluklar yaşamış ve daha sonra kendisi de matematiksel kavramlarla ilgili kavrayışına atıfta bulunmuştur. Örneğin P-2'in çözüm sürecinden sonra araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir:

Araştırmacı: Neden zorlandığını düşüyorsun bu problemde?

ÖA3: Yani açıkçası tüm lise hayatım boyunca bu şekilde yapıyorduk ve bu sayının bunu böldüğünü söylüyorduk. <u>Belki şu an bende bir kavram yanılgısı da olabilir. Büyük olasılıkla benim kavram yanılgım var. Ben diyorum ki ben sadece düz mantık. Yani ben sadece bir tamsayının çarpımı bir tamsayının karesi olur diye düşünüyorum ama belki orası rasyonel bile olsa iki tamsayının karesi çıkabilir. Orada yanlış yaptım.</u> Ama bu ispatta orada şey yapmıyor. Diyor ki hani bu da bir sayının karesi olsun bu da bir sayının karesi olsun oradan devam ediyor.

Araştırmacı: Nasıl sence sorunun çözümü?

ÖA3: Şimdi özetle ben kendimi çözümümde buranın tamsayı olmasına odakladığım için yanlış yaptım. Ama çözümde çok mantıklı bir şekilde burası bir tamsayının karesi olsun deyip gayet güzel çözmüş. Yani basit anlaşılmayacak bir yanı yok. Akla gelmeyecek bir şeyi yok bence. Ben kendim yanılmışım. Öyle düşünüyorum. Yani ben aslında o kadar emindim ki ilk şurada 86'nın karesini görünce çok şaşırdım başta. Tabi şu kaçırdığım noktayı tabi o zaman kaçırdığımı bilmiyordum emin bir şekilde yoktur dedim kurtuldum ama varmış.

Muhakeme eylemlerinde yaşadığı zorlukları matematiksel kavramlarla ilgili eksikliğine atfeden bir diğer aday ÖA4'ün ise P-1'in çözüm sürecinden sonra açıklamaları şöyle olmuştur:

Araştırmacı: Bu problemde doğru yanıtı neden bulamadığını düşünüyorsun? Yani neden zorlandın?

ÖA4: Bence bilgi eksikliği. Aslında yanıtım çok doğru geliyordu bana. Bir denklik falan kullanmak için moddan gitmeyi düşündüm. Ama ondan da bir şeye ulaşamadım. Yani bilemedim. Bilgi eksikliğim var. Mod kullanabilirdim belki ama o konuda kendime güvenemediğim için pek uğraşmadım. Sadece neler yazabilirim diye orada belirttim yani.

4.2.1.2. Stratejik bilgi

ÖA1 hariç, öğretmen adaylarının muhakeme eylemlerinde yaşadıkları zorluklara atıflarından bir diğeri stratejik bilgi eksikliklerine yönelik olmuştur.

Öğretmen adaylarından ÖA2, hemen hemen her problem çözümünde; yaşadığı zorluğu doğru olduğunu düşündüğü yanıta odaklanarak seçtiği stratejiyi yanlış izlemesi ile açıklamıştır. Örneğin ÖA2'nin P-4'ten sonra araştırmacı ile arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir:

Araştırmacı: Şu an kendi çözümlerin ile ilgili ne düşündün?

ÖA2: Ben kabul ediyorum daha sonra işlemler yaparak gösteriyorum. Kendi çözümlerim tamamen uydurma. Yani şey yapmak istemedim deneyerek bir sonuca ulaşmak istemedim hiçbir soruda. O yüzden de böyle matematiksel bir şeyler yapmaya çalıştım. Genelde de kabul ettiğimi düşünerekten yani ne düşündüğümü neye ulaşmak istediğimi birbirine karıştırdım birazcık genelde. Mesela soruyu okuyorum. Diyorum ki bunu kabul ederek başlayayım diyorum. Sonra onu kabul ettiğimi unutuyorum.

Araştırmacı: Zaman mı az?

ÖA2: Hayır değil fazla bile bence çünkü fazla düşündükçe farklı şeyler geliyor insanın aklına. Ondan değil. Sonucun doğruluğunu biliyorum ya sezgisel olarak onu düşünüyorum o sonuca göre aslında ispatı uydurdum sanırım. Aslında öyle de yapmadım. Hani sezgisel olarak ona ulaştım. Sonucunu biliyorum sezgisel olarak. Ona göre işlemlerimi sıraya koydum. Ben hep ispatladığımı düşünüyorum ama hiçbir zaman yapamıyorum.

ÖA2'nın stratejik bilgi kapsamında yaptığı nedensel atıflardan biri de strateji olarak öncelikli olarak tümevarım stratejisini izlemeyi tercih etmesi olmuştur:

ÖA2: Tümevarım yapmasam aslında belki bulurdum. Sonsuz sayıda ya asal sayılar o yüzden tümevarım yapmayı düşündüm. Bana en rahat o geliyor.

Araştırmacı: Tümevarım uygun mu o problem için?

ÖA2: Yani bilmediğimiz şeyleri tümevarım yaptığımız için. İlk aklıma gelen o oluyor.

ÖA2, P-2 çözüm sürecini anlatırken ise problemin ifadesinde bir bağıntı gördüğü zaman denklem çözmeye odaklandığı için doğru yanıtı bulmadığın bildirmiştir:

Araştırmacı: Peki bu örnek çözümü kendi çözümünle karşılaştırır mısın?

ÖA2: Yani ben burada ortak bölen olabileceğini hiç düşünmedim. Direk oradan kabul edip, kök bulma, denklem çözme derdine düştüm. Ama böyle de olabilirdi daha güzel olurdu.

Araştırmacı: Ne açıdan daha güzel?

ÖA2: Ben ikinci durumu düşünmedim.

Araştırmacı: Sence neden?

ÖA2: Düşündüğün zaman hani bir sayı tam kare şeklinde ifade edilebiliyorsa iki tane çarpanı varsa, ikisi de tam kare ise direk olur zaten. Ama bunu hiç dikkate almadım. Sanırım bir denklem yani bilinmeyen gördüğüm zaman direk denklem çözmeye koşullanmış gibiyim. Denklem çözüyorum gördüğüm zaman. Hani soru üzerinde düşünmekten çok. Denklem mi var tamam hani buna bu diyeyim, buna bu diyeyim, işlemleri yapayım sonuca ulaşayım. Ama ikinci durumu hiç düşünmedim. Aslında başlarda düşündüm gibi oldum sonra hani a^2 şeklinde kabul ettiğim için o durumu her şekilde bu gelecek diye düşündüm. Aslında buraya a^2 deyip kabul ettiğim zaman bütün durumları incelediğimi düşündüm. Ama incelemedim.

Diğer taraftan ÖA3 de yaşadığı zorluklardan bahsederken strateji seçimlerine değinmiştir. Örneğin P-1'in çözüm sürecinden sonra deneme yanılma stratejisi ile sonuca ulaşmanın kendisi için bir zorluk oluşturduğundan bahsetmiştir:

ÖA3: Deneme yanılma ile yaptım çünkü nerede duracağımı bilemedim. Normal ispat yapmayı da denedim aslında. Açıkçası bu soru bana zor geldi.

Araştırmacı: Neden zor?

ÖA3: Gerçekten uğraştım her şeyi denedim. Bir düşüncem vardı mesela ama çift sayılar işin içine girince de hemen çöküyor zaten benim o düşüncem de. Böyle bazen bir lemma olur bizi kolayca bir çözüme götürür ya burada her şeyi uzun uzun düşünmek bana zor geldi. Belki başka bir ispat yöntemi seçerek gitseydim hani deneme yanılma değil de. Aslında şöyle ben bize verdiğiniz soruları ilk başta deneme yanılma ile yapmayı hiç sevmiyorum. Hep istiyorum ki ispat yapayım ama ispatlayamayınca da yapıyorum.

ÖA3, ayrıca P-4 çözüm sürecinden sonra problemleri çözerken farklı bakış açısı benimseme stratejisine sahip olmayışını yaşadığı zorlukların kaynaklarından biri olarak göstermiştir:

ÖA3: Şuradan b'yi çekmiş sonra. Hımm evet anladım. Ben bir şeye odaklanmışım. Ben sürekli kafamda bir örüntü arayıp o sayıları o örüntüye göre ifade edebileceğimi düşündüğüm için hani sürekli bir noktaya odaklanıyorum. Mesela şu benim yaptığım kağıt vardı ya demin orada da böyle güzel bir şeyler gelmedi dedim ya. O güzel bir şeylerden kastım herhalde bir örüntü arıyordum. Burada şey yapmış, o b sayısını a ve k cinsinden çekmiş. Bu sayıların pozitif olduğunu dolayısıyla negatif olmayan tüm sayıların bu şekilde ifade edilebilmesi için bir sıkıntı olmadığını göstermiş aslında. Ben tamamen şu şekilde odaklanmıştım.

ÖA4'ün de problemleri çözerken yaşadığı zorluklara içsel atıflarından biri strateji bilgisi olmuştur. ÖA4 belirlediği yanıta uygun strateji seçtiğini bu stratejiyi yanıta varacak şekilde izlediğini belirtmiştir:

Araştırmacı: Neden bu çözüm veya buna benzer yani doğru bir çözüm yapamadığını düşünüyorsun?

ÖA4: Bilgi eksikliği var bence bayağı.

Araştırmacı: Nedir bilgi eksikliğin mesela?

ÖA4: Yani bilmiyorum öyle olmalı. Mesela burada durumlar tek tek ele alınmış. Ben bu kadar detaylı düşünemezdim. Biliyoruz da yani ne bileyim o an onu düşünmek aslında kullanabileceğin bir sürü bilgi var ama o an onu düşünemiyorsun yani. Çözüme baktığında basit, kolay ama yapamıyoruz.

Araştırmacı: Basit olduğunu düşünüyorsan neden düşünemiyorsun sence?

ÖA4: Aslında ben yazılamayacak diye düşündüğüm için hani işlemlerimi de ona göre seçiyorum biraz. Ona göre hareket ediyorum Böyle olur buradan gidersem bu sonuca ulaşabilir miyim gibi. Çoğu ispatta da böyle yapıyorum ben. Yani sonuca göre yapmaya çalışıyorum ben aslında. Sonuç böyle gelecek böyle olacak deyip kendimi ona ikna etmeye çalışıyorum aslında. Mesela ispatlarda falan da oluyor benim. Başını biliyorum sonucunu da biliyorum. Ne olabilir ne olabilir orta kısma odaklanıyorum ama orada bayağı bir eksikliğim oluyor. Yani düşündüğünde matematikte o kadar çok çözüm yolu var ki. Gideceğimiz yol yöntem o yüzden yani ben hangisini kullanacağımı kestiremiyorum çoğu zaman.

4.2.1.3. Muhakeme becerisi

ÖA1, özellikle örnek çözümleri gördükten sonra, sıklıkla gerekli bilgilere sahip olduğunu ancak bunun muhakemede bulunmak için yeterli olmadığı belirten açıklamalarda bulunmuştur. ÖA1'in, P-4'ün çözümünü inceledikten sonra, araştırmacı ile arasında geçen aşağıdaki diyalogdan yeterli bilgiye sahip olmakla birlikte yeterli muhakeme becerisine sahip olmadığını şiir yazma analojisiyle açıkladığı görülmektedir:

Araştırmacı: Çözümü anladın sanırım. Öyle değil mi?

ÖA1: Evet aslında bilmediğimiz şeyler değil ama yani sanatsal bir çözüm bence. Çok şairane bir çözüm. Öyle her şeyi bir araya getirmiş, karıştırmış falan.

Araştırmacı: Bildiğin şeyler varsa sen neden çözemediğini düşünüyorsun?

ÖA1: Hocam şimdi şöyle mesela işte şiir yazmak gibi... Mesela aslında sanatçıların şiiri de öyle değil mi. Yani aslında olan şeyleri bir araya getiriyorlar. Bilmediğimiz kelime yok içinde ama çok sanatsal o şiir. Mesela diyor ki işte "gözlerin devrildi üzerime" biz orada "devrilmek" kelimesini biliyoruz "göz" kelimesini biliyoruz "üzerine" kelimesini biliyoruz ama onu bir araya getirip şiir biz niye yazmıyoruz? İşte onu dizayn etmek için genelde burada sanatsal bir matematik orada şiirsel bir yetenek gerekli. Buradan ben bunu çıkardım. Bu çözümde de şiir gibi çok iç içe geçmiş her şey. Ona benzettim.

4.2.1.4. Sorgulama

ÖA1'in verilen problemleri çözmede yaşadığı zorluklara içsel nedensel atıflardan biri çözüm sürecinde yaptıklarını sorgulamaması olmuştur. ÖA1, P-2'yi çözememe nedenlerinden bahsederken çözüm sürecinde yaptığı şeyleri sorgulamadığını ve hemen ikna olduğunu aşağıdaki gibi açıklamıştır:

Araştırmacı: Bu problemi neden yapamadığını düşünüyorsun?

ÖA1: Biraz daha neden diye sorgulamak lazım sanki. Buluncaya kadar devam etmedim. Yani bir şey bulunca evet bu budur deyip orada kalmak kötü.

Araştırmacı: Ama çözümünden eminsen orada kalırsın.

ÖA1: İşte emin oluyorum kötü olan şey o. Kalmamam lazım. Ben kendimi burada yokluğuna ikna ettiğim için bırakmışım. Var da olabilir desek belki çıkabilir.

Benzer şekilde ÖA2'nin de verilen problemleri çözmede yaşadığı zorluklara nedensel atıflardan biri çözüm sürecinde yaptıklarını sorgulamaması olmuştur. P-3'ü çözüm sürecinden sonra araştırmacı ile arasında geçen diyalog şöyle olmuştur:

Araştırmacı: Neden çözemediğini düşünüyorsun?

ÖA2: Yani sanırım çözümüm çok aklıma yattı o an. O yüzden biraz basite aldım sanırım. Bu kadar detaylı düşünmek yerine bu budur bu budur hani işlemler de rahat rahat gelince dedim herhalde böyledir. O an bana çok mantıklı gelmişti çözümün de doğru olduğunu düşünüyordum ama daha dikkatli düşünmem gerekiyormuş. Bütün sayıları bir anda çiftse tekse tarıyorum diye düşünmemem lazımmış soruyu çözerken. Direk bu budur deyip elemek yerine biraz daha üzerinde düşünsem.

ÖA2: Anladım. Peki kendi çözümün veya buradaki çözümle ilgili belirtmek istediğin başka bir şey var mı?

ÖA2: Benim çözümüm çok saçma.

Araştırmacı: Doğru ifadeler var ama içinde mesela tek sayıları elemen gibi.

ÖA2: 2^t'yi düşünememek bayağı üzdü beni. Yani biraz daha yaptığım şeyi incelemem lazım.

4.2.1.5. Deneyim

ÖA1 aşağıdaki diyalogdan da görüleceği üzere derslerde ispat yapmaktan ziyade uygulama niteliğindeki problemlerle uğraştığını açıklayarak, verilen problemleri çözmede yaşadığı zorlukları kendi deneyim eksikliğine atfetmiştir. Aşağıda P-3 ile ilgili araştırmacı ile aralarında geçen diyalogdan bir kesit görülmektedir:

Araştırmacı: Kendi çözüm sürecini bu çözümle karşılaştırarak değerlendirir misin?

ÖA1: Hocam şöyle şimdi ben bu çözüme baktım ve anladım ki artık bundan sonra aklımda soru işareti kalmıyor. Şu sayı mı bu sayı mı artık deneme yanılma yöntemine de gitmeme de gerek kalmıyor. Ama benimkinde hımm yani bu değil mi oraya bak dene şuraya bak dene…

Araştırmacı: Peki çözerken bu durumun farkında mıydın?

ÖA1: Hı hı öyle olduğunun farkındaydım. Orijinale gitmeye elimden geldiğince çalıştım ancak o kadar oldu.

Araştırmacı: Peki istediğin çözümü yapmada neden zorlandığını düşünüyorsun?

ÖA1: Aslında şöyle eğer bu formülü ben de bilseydim hımm aslında bu ikisinin farklı olduğunu buluyor ve oradan söylüyor bence düşünülebilirdi yani şu ilk kısım özellikle. Düşünülebilir bir çözüm biraz kendimizi yorduğumuz zaman. Ama şurayı ben kesinlikle yapmazdım. Aklıma gelmezdi yani diğerlerini de denemek. Bunu gösterdim yeterli olurdu diye düşünürdüm. Aslında özellikle cebir dersinde çok fazla ispat yaptık. Ama daha çok hoca aktif olduğu için biz böyle dinleme modunda olduğumuz için her halde biraz da pasif olduğumdan eksik olabilirim. Hani kendim de ispatlardan çok uygulama ile uğraştığım için olabilir.

ÖA2 gibi ÖA3'ün içsel atıflarından biri deneyim eksikliği olmuştur. P-4'ün çözümünü değerlendirme sürecinde araştırmacı ile arasında geçen diyalog şöyledir:

Araştırmacı: Peki bu problem için neden bir çözüm yapamadığını düşünüyorsun?

ÖA3: Bu ispatı yapan kişi belli ki ispatlar konusunda sürekli çalışmış biri. Ne şekilde çelişkiye düşeceğin, biliyor. Hani hangi sayıyı ne şekilde seçeceğini biliyor. Benim o kadar deneyimim yok. Bence deneyim istiyor. Eğer ben de çok uğraşırsam ben de yaparım. Yapmamam için bir sebep yok ama yapmak için belli bir deneyim gerektiğini düşünüyorum.

4.2.1.6. Sebat

ÖA1, problemleri çözerken aceleci davranmasını problemleri çözmede zorluk yaşama nedenlerinden biri olarak göstermiştir. Ayrıca P-2 bu aceleci tavrının problem çözmeye özgü olmadığını eklemiştir. P-2'yi çözüm sürecinden sonra, araştırmacı ile aralarında geçen ilgili diyalog şöyle olmuştur:

ÖA1: Hım evet ortak bölen olabilir ve ona p demek çok mantıklı. Ben ortak bölen bulamadığım için ona hiç bir şey demedim. $173k$ olsun demiş. Böyle düşünmemiştim itiraf edeyim. Ama zaten böyle düşündükten sonra her ikisinin de tam kare olması mantıklı yani kolay. Hımm evet aslında buradan sonra buraya geçiş yapılabilirdi. Aslında biraz daha devam edip düşünseydim keşke. Ben de devam edebilirdim. Çabuk vazgeçmişim. Aslında çözüm gayet basit.

Araştırmacı: Problem de basit gelmiş miydi? Çözümü mü basit?

ÖA1: Soruyu görünce de basit gelmişti. Yaptığımı düşünüyordum. Ama benimkisi eksik kalmış. Ama çözüm de anlayabildiğim şekilde.

Araştırmacı: Derste acele ettin biraz sanki? Yani çözüm sürecini erken sonlandırdığını gördüm.

ÖA1: Çünkü ben bir an önce çözmek istiyorum.

Araştırmacı: Problem çözme konusunda mı öylesin sadece?

ÖA1: Hayır. Önümdeki bir şeyi bir an önce yapmak istiyorum. Kahveyi falan da hemen içme isteği duyuyorum öyle bir şey.

4.2.2. Öğretmen Adaylarının Muhakeme Sürecinde Yaşadığı Zorluklara Dair Dışsal Atıfları

Tabloda görüldüğü üzere öğretmen adaylarının dışsal atıfları; problemlerin niteliği ve geçmiş öğretim faaliyetleri olmuştur.

4.2.2.1. Problemlerin niteliği

Öğretmen adaylarının tümü muhakeme eylemlerinde zorlanmalarının nedeni olarak problemlerin zorlayıcı özellikte olduğuna atıfta bulunmuştur. Örneğin ÖA1, problemlerin çözümü için kullanılacak herhangi bir tanım veya teorem için yönlendirici ifade bulundurmaması, bir yanıta yönlendirmemesi ve ayrıca çözüm için bilgi parçalarının bir araya getirilmesi gerekliliğinden problemleri zorlayıcı olduğunu düşündüğünü belirtmiştir. Örneğin, P-1 probleminin çözümü ile ilgili süreçte araştırmacı ile arasında geçen diyalog şöyledir:

Araştırmacı: Az önce bu tarz şeylerle uğraşmıyoruz demiştin. Neyi kastetmiştin?

ÖA1: Bu tarz ispatlar yapmam lazım.

Araştırmacı: Nasıl bir tarz?

ÖA1: Yani şöyle mesela bu böyle demiş ama sonrasında bunu gösterebildiği şeyler hani sürekli hani sayılar teorisindeki problemler gibi onları gösterirken de biraz zorlanıyorum ama bunlardan daha alt düzey oluyor. Hani en azından oradaki teoremleri ya da tanımları kullandığım zaman çıkıyor. Diyorum ki bu teoremden dolayı böyle çıkmış. Ama burada her şeyi kendisi düşünüyor.

Araştırmacı: Teorem kullansa daha mı kolay olur?

ÖA1: Bazı teoremler falan olsa dese ki bu teoremden dolayı böyle işte deyip ona dayanarak bir şeyler yapsak aslında o da birazcık benzetmek gibi olur ama daha kolay oluyor tabi.

Araştırmacı: Bu çözümde ne yapıyor?

ÖA1: Bu kendisi alıyor. Mesela ekok tanımını falan kullanıyor ama tabi onlar zaten çok bilindik şeyler. Öyle sürekli herkesin bildiği şeyleri bir araya getiriyor ama bir araya getirmek zor. Böyle kek yapmak gibi falan mesela o malzemeleri ben de biliyorum ama annem yapıyor ben yapamıyorum demek ki üzerinde uğraşmak lazım.

Benzer şekilde P-2'nin çözüm sürecinde araştırmacı ile arasında geçen diyalogda da ÖA1 zorluk yaşamasında problemlerin niteliğine atıfta bulunmuştur. Bu kez problemlerin açık uçlu oluşlarına yani problem ifadesinde bir yanıta yönlendirmemesine vurgu yapmıştır:

Araştırmacı: Yani sen şurada bitirdin çözümünü değil mi? Neden sence çözemedin?

ÖA1: Hocam şöyle çünkü aslında burası biraz daha nasıl söyleyeyim zorlayıp düşünülmesi gereken bir şey. İlla var ben bunu bulacağım. Ben kendimi burada yokluğuna ikna ettiğim için bırakmışım. Ama var da olabilir deyip böyle üstüne gidilse çıkabilir.

Araştırmacı: Yani ben sana n var, bul deseydim bulabilir miydin?

ÖA1: İşte ben nasıl olacak nasıl olacak diye düşünüp belki işte iki tane bir şeyin karesi olacak diyebilirdim.

ÖA2 de problemlerin çözümü için kullanılacak herhangi bir tanım veya teorem için yönlendirici ifade bulundurmaması, bir yanıta yönlendirmemesi yani başka bir deyişle açık uçlu oluşlarından dolayı problemleri zorlayıcı olduğunu düşündüğünü belirtmiştir. Örneğin, P-1 probleminin çözümü ile ilgili süreçte araştırmacı ile arasında geçen diyalog şöyledir:

Araştırmacı: Neden çözemediğini düşünüyorsun?

ÖA2: Yani bu tarz soruları pek çözmediğimiz için.

Araştırmacı: Sayılar teorisi dersini alıyorsunuz. Burada da zaten sayıların genel olarak bildiğimiz özellikleri kullanılmış yani liseden beri bildiğimiz. Bu tarz derken neyi kastediyorsun?

ÖA2: Ama ispatlarında yine de teoremleri falan ifade etmek gerekiyor ya. Gerçi burada ispatlarda onlara da gerek yok ama. Bilmiyorum yani ya da şey de oluyor. Hani orada sorularda mesela çelişkiye düşeceğini sezgisel olarak biliyorsun. Yani genelde sorularda çelişkiye düşmek için elinden geleni yapıyorsun yani farklı şeyleri uydurabiliyorsun sonucu bildiğin için. Burada bilmiyoruz ki hiçbir şey.

ÖA3 de örnek çözümleri incelerken problemlerin zorlayıcı olduğunu düşündüğünü belirtmiştir.

Araştırmacı: Sen neden zorlandın çözerken sence?

ÖA3: Yani özünde baktığın zaman yine ekok almış. Yine bilmediğimiz bir şey yok ama gel gelelim işte mesela ben burada çarpmışım orada ekok demek aklıma gelmemiş. İlk incelik burada başlamış benim için. Daha sonra orada hani diyor ki bir tek yani bu kadar terim içerisinde bir tane tek sayı olduğunu göstereyim ki bir sürü çift sayının toplamı artı tek sayının toplamı tek olsun. O yüzden indekslemeye gidiyor. O j'nin tek olduğunu göstermesi bence büyük bir şey istiyor nasıl diyeyim hem ayrıntıları yakalıyor hem de bunu çok güzel bir şekilde sunuyor. Yani bana göre biraz zor böyle çözümler. Hani ben onu yakalasam bile bu şekilde ifade edemem. Yani o yüzden çok güzel. Yani fark burada ortaya çıkıyor. Yani kolay gibi böyle bakınca bir yandan ama bu problemler zor aslında. Yani ne yapacağın hiç açık değil.

Aşağıdaki diyalogdan ÖA4'ün de problemleri çözmede yaşadığı zorluklara atıflarından birinin problemlerin niteliği olduğu görülmektedir. Örneğin P-3'ten sonra gerçekleşen görüşmede problemlerin açık uçlu oluşuna atıfta bulunmuştur:

Araştırmacı: Senin için bu veya buna benzer bir çözüm yapmak zor mu olurdu? Neden bu problem için doğru bir çözüm ortaya koyamadığını düşünüyorsun?

ÖA4: Aslında teorem olarak bilseydim ispatlayabilirdim.

Araştırmacı: Hangi teoremi?

ÖA4: Yani teorem dediğim hani 2'nin kuvvetidir şeklinde. Yani bu 2'nin kuvvetidir ispatlayın deseydi belki yapabilirdim. Yani sonucu bildiğim için daha kolay olurdu düşünmesi.

Araştırmacı: Ama bize zaten problemde onu soruyor. Yani yanıtı senin bulmanı istiyor.

ÖA4: Evet ama mesela şunun şöyle olduğunu göster deseniz ben daha rahat gösterebilirim açıkçası yani mesela cevapları bilsem yani uydurabilirim çözümü böyle gelir falan.

4.2.2.2. Geçmiş öğretim faaliyetleri

ÖA2 dışındaki öğretmen adayları geçmiş öğretim faaliyetlerinin bu tür problemleri çözebilmek için kendilerine yeterli bilgi ve beceriyi katmadığını düşündüklerine dair açıklamalar yapmışlardır. ÖA1, P-2 için doğru yanıtı bulmamasına dair araştırmacı ile görüşmesi sırasında öncelikle kendisinin yeterince sorgulamadığını belirtmiştir. Daha sonra ise bunu lisede yani geçmiş öğrenim hayatında karşılaştığı problemlerin özelliğinden kaynaklandığını belirtmiştir:

Araştırmacı: Yani ben sana n var, bul deseydim bulabilir miydin?

ÖA1: İşte ben nasıl olacak nasıl olacak diye düşünüp belki işte iki tane bir şeyin karesi olacak diyebilirdim.

Araştırmacı: Ama sonuçta böyle bir tamsayı var mı diyor. Sen burada yok diyorsan ve tamamen yokluğuna ikna oluyorsan çözümünü bitirirsin.

ÖA1: Bilmiyorum soyut işlemlerle ilgili olabilir. O dönemi problemli atlatmış da olabilirim. Ben aslında bir şeylerin kökünü oraya da bağlıyorum. Çünkü bir şeyleri biz o zaman araştırmadan yaptığımız için bir şeyler var mı yok mu diye düşünmekten ziyade. Şöyle bir kural var sorular buna göre çözülür deyip yani öyle bir öğretimden geldik. Alt yapı bu şekilde… Şimdi sürekli bir şeyleri araştırmak sonuçta beyin de bir şeyleri çözmeye alıştıkça öyle düşünmeye başlıyor. Öyle bir alışkanlık eskiden de olmadığı için zaten zorlanıyoruz. O bence temel sebep diye düşünüyorum. Liseden beri bu tarz gelsek olmaz böyle.

ÖA1, ayrıca lisans ders içeriklerinin de açık uçlu problemleri çözecek veya ispat yapabilecek bilgi ve becerileri kazandıracak nitelikte olmadığını ayrıca ispatlamaya dayalı ders içeriklerinin programdaki yerini uygun bulmadığını belirtmiştir:

ÖA1: İspat konusunda hepimizin sıkıntısı var. Yani böyle üçüncü sınıfta olması lazım, öyle bir ders açmaları lazım… Sürekli bizim bunlarla uğraşmamız lazım.

Araştırmacı: Ama zaten derslerinizde ispat yapıyorsunuz. Sadece hepsinin konu alanları farklı oluyor. Sen nasıl düşünüyorsun o açılacak dersin nasıl olmasını isterdin?

ÖA1: Ama şöyle, hocam buradaki gibi hani geçmiş bilgilerimizi kullanarak ispat yapabileceğimiz şeyler değil. Biz topoloji falan aldık. Ya da cebirde falan belli bir teorem buluyorduk sonra diyorduk ki buradan buradan... Zaten bizim yapabileceğimiz şekilde. Mesela bir Euler teoremini ispatlamıyorduk ya da bir Wilson teoremini ispatlamıyoruz adam zaten yapmış. Bir tane sayı veriliyor ona bakıyoruz. Yani biraz daha uygulama. Yani şuradaki sorular gibi geçmiş bilgilerimizi harmanlayarak bir şeyler oluşturmamız istenmiyor tam olarak. Biraz daha uygulama tarzı oluyor.

ÖA3 de problemleri çözme sürecinde yaşadığı zorlukları kişisel deneyim eksikliğinin yanı sıra öğretim uygulamaları dolayısıyla yaşadıkları deneyimlere bağlamıştır. P-4'ün çözümünü değerlendirme sürecinde araştırmacı ile arasında geçen diyalog şöyledir:

Araştırmacı: Kendi çözümünle karşılaştırır mısın? Neden yapamadığını düşünüyorsun?

ÖA3: Yani ben bu tarz ispatlara alışkın değilim. Hep yani benim alışkın olduğum ispatlar daha çok uygulaması olan ispatlar. Cebirden dolayı sanırım böyle. Mesela cebirde bir şey ispatlıyoruz sonra hemen uygulamaya yönelik soru çözüp onun üzerinde ispatı soruya aktarabiliyoruz.

ÖA4 ise bu kategoriye dair atfını derslerde ele aldıkları problemler ve bu problemlere dair uygulama biçimleri şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı ile arasında geçen diyalog şöyle olmuştur:

Araştırmacı: Neden zorlandın sence bu problemlerde?

ÖA4: Aslında biz böyle çözmeye alışkın da değiliz. Mesela şu an derste denklem sistemlerinin çözümlerini falan şey yapıyoruz tamamen böyle modüler aritmetik mod hani. Onların üzerinde sürekli işlemler falan. Baştaki konular biraz benziyordu hani ebob ekok falan hani sayılar üzerinde bayağı şey yapıyorduk ama sınav tabi o ağırlıklı olmadığı için hatta hiç yoktu galiba öyle.

Araştırmacı: Oradaki sorular daha mı zor?

ÖA4: Yok hocam oradaki sorular daha kolay bana göre. Hani orada tanımı biliyorum mesela niye öyle olduğunu göster diyor mesela hani ya tanım kullanacaksın ya teorem yani elindeki şeyler belli o yüzden bana onları göstermek daha rahat geliyordu. Bunları göstermek zor. Derslerde hep öyle yani konuyu işleyip soru çözdüğümüz için kullanacağımız bilgi belli. Öyle alışmışız biz de burada zor geliyor.

BÖLÜM V

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmanın bulgu ve yorumlarına dayalı olarak ulaşılan sonuçlar ve bu sonuçlara dayalı önerilere yer verilmiştir.

5.1. Sonuçlar

5.1.1. Birinci Araştırma Problemine İlişkin Sonuçlar

Matematiksel muhakeme, öncelikle söz konusu problem bağlamındaki matematiksel kavramlara yönelik bilgi gerektirdiğinden (Moshman, 1995); veri toplamada kullanılan problemlerin seçiminde problemleri çözebilmek için ihtiyaç duyulacak matematiksel kavramlara ilişkin bilgiler dikkate alınmıştır. Bu kavramlar küme, bağıntı, fonksiyon gibi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği lisans programının ilk iki yarıyılında yer alan Soyut Matematik dersi kapsamında öğrencilere kazandırılması beklenen temel matematiksel kavramlar ile araştırma verilerinin yürütüldüğü yarıyılda yer alan Sayılar Teorisi dersi kapsamında yer alan tamsayılar ve özellikleri, bölünebilme, asal sayılar ve kongrüens ile sınırlı tutulmuştur. Bununla birlikte problemlerin, zorlayıcı bir problem durumu oluşturması amacıyla, bu kavramların farklı özelliklerine odaklanılmasını gerektirecek şekilde seçilmesine özen gösterilmiştir. Söz konusu matematiksel kavramların birçoğu ilk, orta ve lise matematik öğretim programları kazanımları arasında da yer almaktadır (MEB, 2018a; MEB, 2018b). Yani katılımcıların lisans eğitimleri öncesinde bu kavramlara yönelik matematiksel bilgileri edinmiş olmaları beklenir. Ancak araştırma verilerinin analizine göre; öğretmen adaylarının muhakeme sürecinde yaşadıkları zorlukların çoğunluğunun, söz konusu matematiksel kavramlarla ilgili derinlemesine bir anlayışa sahip olmamalarından kaynaklandığını söylemek mümkündür.

Öğretmen adaylarının muhakeme eylemleri analiz edildiğinde tamsayılarla ilgili bir özelliği tek başına ele aldıklarında ilgili kavramın tanımına dayanarak doğru muhakemelerde bulundukları ancak tamsayıların özelliklerini ilişkilendirmeleri gereken durumlarda zorlandıkları görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının P-1 için ortaya koydukları muhakeme eylemlerinde asal sayılar, tek ve çift sayılar, bölünebilme ve ekok kavramları çerçevesinde açıkça gözlemlenebilirdir. Dolayısıyla katılımcıların tamsayılar ve özellikleri ile ilgili muhakeme becerilerinin yeterli olmadığı söylenebilir. Araştırmalara göre matematiksel kavramları tanımlayabilen ve özelliklerinden birini kullanmayı gerektiren problemleri çözmede başarılı olan öğrenciler, bu özellikleri bir arada kullanmaları gerekli matematiksel görevleri yerine getirmede her zaman aynı performansı gösterememektedir (Mamona-Downs & Downs, 2005). Zazkis ve Campbell (1996) sınıf öğretmeni adaylarının Aritmetiğin Temel Teoremini doğru tanımlayabildiklerini, özelliklerini basitçe açıklayabildiklerini ancak çeşitli problem durumlarına uygulamakta zorluk yaşadıklarını bildirmiştir. Elia, Panaoura, Eracleous ve Gagatsis, (2007) on birinci sınıf öğrencileri ile fonksiyon kavramı; Dündar (2015) ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile seri kavramı bağlamında yaptıkları araştırmalarda benzer bulguyu elde etmişlerdir. Diğer taraftan katılımcıların P-1'in çözüm sürecinde matematiksel kavramların özelliklerini ilişkilendirememelerinde, seçtikleri cebirsel stratejilerde kullandıkları temsilleri yorumlamadaki güçlüklerin de etkisinin olduğu söylenebilir. Araştırmacılar öğrencilerin matematiksel kavramlara dair tanımları ve temel özellikleri bilmelerine rağmen problem çözme sürecinde başarısız olmalarının, söz konusu kavramları temsil etme ve farklı temsillerini yorumlamada sahip oldukları zorluklardan kaynaklandığını dile getirmişlerdir (Bills & Tall, 1998; Elia vd., 2007; Gagatsis ve Shiakalli 2004; Zazkis ve Campbell; 1996).

P-2 için muhakeme eylemlerinde öğretmen adaylarının hiçbiri problemde verilen "$n(173+n)$" temsili istenilen matematiksel şartları sağlayacak biçimde yorumlayarak, gerekli dönüşümü yapamamıştır. Diğer taraftan P3'ün çözüm sürecinde ÖA2, oluşturduğu cebirsel temsillerle dört ardışık tamsayıyı toplayıp "$a = 2(2n+3)$" eşitliğini elde edince tüm çift tamsayıların ardışık pozitif tamsayıların toplamı olarak yazılabileceği iddiasında bulunmuştur. Ancak bu eşitliğe göre aynı zamanda a tamsayısının 4 ile bölümünden kalan 2'dir. Zazkis (1998), sayılarla ilgili problem durumlarında tamsayıların tek ve çift olma sınıflamasının, öğrencilerin muhakemelerinde oldukça baskın olduğunu bildirmiştir. Dolayısıyla öncelikle ÖA2'nin bu sırada yalnızca tamsayıların tek ve çift olma özelliklerine odaklandığı, başka bir deyişle tamsayıların özelliklerini tek ve çift olmaya indirgediği söylenebilir. Nitekim bu durum sıklıkla durum inceleme stratejisine başvuran adayların, söz konusu muhakeme eylemleri sırasında durumlar olarak tek ve çift tamsayıları ele almalarında da gözlenmiştir. Diğer taraftan ÖA2'nin "$a = 2(2n+3)$" şeklinde temsil edilen a pozitif tamsayısının özelliklerini belirlemede zorlandığı da söylenebilir. Zazkis ve Campbell (1996) de sınıf öğretmeni adaylarıyla yaptığı çalışmada, bir sayı çarpanlara ayrılmış formda sunulduğunda adayların sayıların diğer özelliklerini belirlemede zorlandıklarını belirlemiştir. Dolayısıyla söz konusu temsilde a pozitif tamsayısının çift olduğu şeffaf, dörde bölümünden kalanın 2 olduğunun opak olmasının ÖA2'nin bu temsili yorumlamakta zorlanmasına neden olduğu söylenebilir. Benzer şekilde diğer öğretmen adaylarının da hem kavramların özelliklerini hem de sayı temsillerinin barındırdığı özellikleri belirlemede sıklıkla zorluk yaşadığı tespit edilmiştir. Bu zorluklar muhakeme eylemlerini başarısız bir şekilde sürdürmelerine neden olmuştur. Örneğin her iki yanında iki çarpan bulunan eşitliklerde, öğretmen adaylarının bu çarpanları karşılıklı olarak birbirlerine eşitledikleri görülmüştür (Ör: Eğer $a.b = c.d$ ise $a = c$ ya da $a = d$ dir.). Öğretmen adaylarının tümünün çarpanlara ayırma ve sayı temsillerini yorumlama ile ilgili yaşadıkları bu zorluk, P-2 problemindeki muhakeme süreçlerini doğru olmayan bir çözümle bitirmelerine ve üstelik cebirsel denklemleri çözerek elde ettikleri verilere olan güveni yani epistemolojik bilgileri çözümlerinden kesin olarak emin olmalarına sebep olmuştur. Başka bir deyişle çözümlerinin yanlış olduğunu fark edemedikleri için yeni kavramsal ilişkiler veya stratejiler arama çabası içerisine girmeden süreci sonlandırmışlardır.

Diğer taraftan Stylianou (2013), problem çözme sürecinde temsil etme ve doğrulama süreçlerinin etkileşimini incelemiş ve öğrencilerin seçtikleri temsillerin genellemelere varma şekillerini ve dolayısıyla yanıtlarını gerekçelendirme biçimlerini etkilediği bulgusuna ulaşmıştır. Stylianou, aynı zamanda öğrencilerin sundukları gerekçelerin temsil biçimlerini etkilediğini dolayısıyla gerekçelendirme ve temsillerin bu süreçte birbirini dinamik olarak etkilediğini belirlemiştir. Öğretmen adaylarının temsil seçimlerinin iddiada bulunma ve bu iddialarını gerekçelendirerek doğrulamadaki rolü P-3 probleminde öne çıkmıştır. Hem ÖA1 hem de ÖA3, P-3 için muhakeme eylemlerinde özel sayı örneklerinden yola çıkarak genellemeye varmaya çalışmıştır. Özel sayı örnekleriyle genellemeye varmak çoğunlukla verimli bir strateji olmakla birlikte, belirli gözlemlerden sonra sürece genel sayı temsillerini ($n, n+1, 2n$ gibi) kullanarak devam etmeleri halinde genelleme yapmalarının hem daha kolay hem de bu süreç sonunda ortaya konulan çözümün doğruluğunun daha kabul edilebilir olacağını söylemek mümkündür. Diğer taraftan P-4 ve P-5 sürecinde ise öğretmen adaylarının sayı temsilleriyle cebirsel işlem yaparak muhakeme eyleminde bulunma istekleri zorluklar yaşamalarına neden olmuştur. Örneğin P-3 için deneme yanılma stratejisini izleyen ÖA1, P-4 sürecinde izlediği diğer stratejilerde zorluk yaşamasına rağmen, deneme yanılma stratejisini izlemeyi tercih etmemiş ve bu durum doğru olmayan iddialar ortaya koymasına neden olmuştur. Aynı öğretmen adaylarının P-3, P-4 ve P-5 için ortaya koydukları muhakeme eylemlerinin; salt strateji bilgisinin yanında, problem çözme sürecinin farklı aşamalarında problemin karakteristiğine uygun stratejinin seçimi ve bu stratejinin etkin bir biçimde uygulanmasının önemini tekrar ortaya koyduğu söylenebilir (Star & Rittle-Johnson, 2008).

Ayrıca Lithner (2008) muhakeme becerisi iyi olmayan öğrencilerin stratejilerini problem metninde bulunan yüzeysel özelliklere göre belirlediklerini tespit etmiştir. Bu durum aynı öğretmen adayının iki farklı problemdeki temsil ve strateji seçiminde, problemlerin ifadesinde bulunan temsillerin etkisinin olabileceğini düşündürtmüştür. Nitekim P-3'ün ifadesinde problem durumu sayı örnekleri ile yapılan bir işlemle açıklanmıştır; P-4'te ise sayılar harflerle temsil edilmiştir. Benzer durum P-5'in çözüm sürecinde ÖA4 hariç tüm adayların muhakeme eylemlerinde gözlenmiştir. ÖA1, ÖA2 ve ÖA3 P-5 için gerçekleştirdiği muhakeme eylemlerinde problemin ifadesinde bulunan *"a,b,c"* temsillerini kullanmışlardır. Oysa problem durumunda bu sayıların arasında bir sıralama bağıntısı da verilmiştir ve bu durumu göz önüne alan ve sayılar arasında olabilecek ilişkiyi örneklerle araştıran ÖA4 doğru olarak nitelenebilecek bir çözüm ortaya koyabilmiştir.

Tamsayıların özellikleriyle ilgili kavramsal zorluklarının yanında; öğretmen adaylarının aritmetik düşünceden cebirsel düşünmeye geçişte de sıkıntılara sahip oldukları görülmüştür. Örneğin aritmetik düşünmede eşit işareti yapılacak olan işlemlerin var olduğunu gösterirken, cebirsel düşünmede bu sembol artık dengeyi ifade etmelidir, yani ilişkisel bir şekilde yorumlanmalıdır (Molina & Ambrose; 2008). ÖA1'in P-2, P-5 ve P-6 için sergilediği muhakeme süreçlerinde yaptığı cebirsel işlemler sonucunda elde ettiği eşitlikleri yorumlamadaki zorluklar; özellikle eşitlik, değişken, bilinmeyen kavramlarına yönelik derinlemesine bir anlayışa sahip olmadığı başka bir deyişle aritmetik düşünmeden cebirsel düşünmeye tam anlamıyla geçemediği şeklinde yorumlanmıştır. Bununla birlikte, bu durumun ortaya çıkmasında ÖA1'in epistemolojik bilgilerinin etkisinin de olduğu söylenebilir. Örneğin ÖA1, P-5'i çözüm sürecinde izlediği cebirsel stratejisi sonucunda

$c = 1 + \frac{n + ab}{2}$ eşitliğini elde etmiş ve bu eşitliğe göre a, b ve c tamsayılarının bulunabileceğini belirtmiştir. Oysa bu eşitlikten problem durumuna dair yani negatif olmayan tüm tamsayıların $a^2 + b^2 - c^2$ şeklinde ifade edilebilecek, $a < b < c$ şartını sağlayan a, b ve c tamsayılarının bulunabileceğine dair bir çıkarımda bulunmanın mümkün olmadığı açıktır. ÖA1'in elde ettiği bu sonucu çözüm olarak görmesinin sahip olduğu ispat şemasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Çünkü öğretmen adaylarının tümü; aralarında herhangi bir mantıksal bağ bulunmasa da sembolik manipülasyonlarla yaptıkları çözümleri doğru ve matematiksel olarak geçerli görme eğiliminde olmuştur. Bu durum literatürde karşımıza alışkanlık edinilmiş ispat şeması ve sembolik ispat şeması olarak karşımıza çıkmaktadır (Martin ve Harel, 1989; Sowder ve Harel, 1998). Dolayısıyla kavramsal bilgi ve stratejik bilgilerinin etkileşimli olarak öğretmen adaylarının muhakeme eylemlerini şekillendirmesinin yanında; bu süreçte epistemolojik bilgilerinin de etkisinin olduğu söylenebilir.

Diğer taraftan Zazkis vd. (2008), deneme yanılma stratejisini izleyerek indüktif bir çıkarımda bulunmada, örnek çeşitliliğinin önemini vurgulamıştır. Öğretmen adaylarının özellikle Sayılar Teorisi bağlamındaki problemler için önemli görülen bu stratejinin muhakeme sürecine katacak avantajlarından yararlanmadığını söylemek mümkündür. Öğretmen adayları ya hiç örnekler üzerinde çalışmamış ya da bu stratejiyi etkin kullanamamışlardır. Öğretmen adaylarının örnekler üzerinde çalışacakları stratejileri tercih etmek istememe nedenlerinden biri olarak, yukarıda belirtildiği gibi, problemlerin ifadesinin kolay anlaşılabilir olması ve öğretmen adaylarının problemi analiz etme ihtiyacı hissetmemesi olarak tespit edilmiştir. Oysa problem metnini okumanın problemi anlamak anlamına gelmediği bilinmektedir. Başka bir deyişle problem durumuna dair metinsel değil mantıksal bir anlayışa sahip olmak; doğru çıkarımlarda bulunmak ve bir çözüm ortaya koyabilmek için gerekli matematiksel bilgi ve stratejileri seçmede önemlidir (Furinghetti & Morselli, 2009). Adayların yalnızca örneklerden yararlanarak değil, gözlemlenebilir olmasa da kavramsal bir içsel düşünme süreci ile de problem durumunu analiz etmeyi göz ardı ederek problemi mantıksal olarak anlamadıkları; süreç içerisinde yalnızca matematiksel kavramlara ilişkin bilgilerinden yola çıkarak aşırı genellemelerle yanlış iddialarda bulunmalarından da görülmektedir.

Öğretmen adaylarının örneklerle çalışmak istememelerin veya bu stratejiyi etkin kullanmamalarının diğer nedenin de öğretmen adaylarının epistemolojik bilgileri olduğunu söylemek mümkündür. Öğretmen adaylarından ÖA2 ve ÖA3'nin görüşmeler sırasındaki söylemleri bu yorumu destekler niteliktedir. Örneğin ÖA2'nin, muhakeme sürecine dair görüşlerini paylaştığı söylemi şöyle olmuştur:

Araştırmacı: Kendi çözümlerin ile ilgili ne düşünüyorsun?

ÖA2: Kendi çözümlerim tamamen uydurma. Yani şey yapmak istemedim deneyerek bir sonuca ulaşmak istemedim hiçbir soruda. O yüzden de böyle matematiksel bir şeyler yapmaya çalıştım.(…)

Yukarıdaki diyalogdan görüldüğü gibi ÖA2, kendi deyimiyle matematiksel şeyler yapmak için muhakeme sürecinde deneme yanılma stratejisini kullanmak istemediğini yani örnekler üzerinde çalışarak bir çıkarımda bulunmak istemediğini belirtmiştir. Bu durumda öğretmen adaylarının örneklere dayalı muhakemede bulunmanın avantajlarından tam anlamıyla yararlanmadıkları ve muhakeme sürecinde yaşadıkları zorluklardan birinin de epistemolojik etkenlerden dolayı örneklerle çalışmaktan kaçınmaları veya muhakeme eylemleri için avantajlarının farkında olmayarak çalışmaları olduğu söylenebilir. Çünkü her ne kadar matematiksel olarak tümdengelimli çıkarımlar ve cebirsel ispatlar kabul edilebilir olsa da muhakeme sürecinde indüktif çıkarımlar önemli role sahiptir. Ancak Ellis ve çalışma arkadaşlarının (2017) da vurguladığı üzere literatürde indüktif muhakemenin önemi ve örneklerin nasıl daha verimli kullanılabileceğini araştıran çalışmalar oldukça azdır. Bu kapsamda yapılan çalışmalarının çoğunluğunun muhakeme sürecinde örneklerin kullanılmasının sınırlılıklarının öğrencilere fark ettirilmesine yönelik öneriler sunmayı amaçladığı görülmektedir (örneğin, Stylianides & Stylianides, 2009). İnduktif çıkarımlara aşırı güvenmenin öğrenciler için problem teşkil ettiği doğru olmakla birlikte iddiada bulunma, iddiaları test etme veya ispatlama gibi matematiksel muhakeme süreci ile ilgili etkinliklerde örnekler önemli role sahiptir. Bu rol ise, çalışılmak üzere hangi örneklerin seçildiği, bu örneklerle nasıl çalışıldığı ve çalışma sonuçlarının nasıl değerlendirildiğine bağlı olarak şekillenmektedir (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019; Ellis vd., 2017). Dolayısıyla öğrencilerin örneklerle çalışmalarının sınırlılıklarının farkında olması kadar, örneklerin muhakeme sürecindeki potansiyelini bilmesi ve etkin kullanım becerisi kazanması da önemlidir (Ellis vd., 2017). Bu anlamda araştırma bulguları ele alındığında, öğretmen adaylarının hiçbiri herhangi bir problem için örneklerden yola çıkarak ortaya koydukları iddialarından tamamıyla emin olduklarına dair bir söylemde bulunmamıştır ve sıklıkla çözümlerinin bir ispat niteliğinde olmadığını belirterek sergiledikleri muhakeme sürecinin sınırlılıklarının farkında olduklarını göstermişlerdir. Dolayısıyla bu kapsamında araştırma bulgularının literatürden ayrıldığını söylemek mümkündür. Bu durum, muhakeme sürecinde ne türden çıkarımların matematiksel olarak kabul edilebilir olduğuna dair yeterli bilgiye sahip oluşları açısından katılımcılar için olumlu bir sonuç olmuştur; ancak yukarıda bahsedilen sebeplerden dolayı öğretmen adaylarının örneklerle çalışmanın avantajlarından yeterince faydalanamayarak muhakeme sürecinde zorluk yaşamalarına neden olmuştur.

Diğer taraftan öğretmen adaylarının muhakeme süreçleri boyunca farklı stratejileri izledikleri görülmüş olsa da matematiksel olarak kabul edilebilir gördükleri; formül kullanma, denklem oluşturma ve bu denklemleri sembolik manipülasyonlarla çözmeye dayanan cebirsel stratejiye (Van Dooren, Verschaffel, & Onghena, 2003) sıklıkla başvurdukları gözlenmiştir. Problemlerin karakteristiği de göz önünde bulundurulduğunda ilk akla gelenin cebirsel strateji olması doğal olmakla birlikte öğretmen adaylarının bu stratejiyi izlerken bazen problem durumundan uzaklaşmaları; daha önce bahsedildiği gibi matematiksel kavramların temsillerini belirlemede, dönüştürmede ve cebirsel ifadeleri yorumlamada yaşadıkları zorluklar, bu stratejileri izlemede, sonuçlarını yorumlamada ve neticede farklı bakış açısı benimsemede zorluk yaşamalarına neden olmuştur. Nitekim öğretmen adaylarının iddialarını veya çözüm süreçlerini yani seçtikleri stratejileri doğru uygulayıp uygulayamadıklarını nadiren kontrol ettikleri görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının yaptıkları çözümleri peşinen doğru kabul etmelerine ve çözüm süreçlerini sonlandırmalarına sebep olmuştur. Örneğin ÖA2 P-3 için matematiksel bilgiye dayalı yaşadığı bir zorluk sonucunda, 10 ve 10'dan büyük tüm çift tamsayıların negatif olmayan tamsayıların toplamı şeklinde yazılabileceği iddiasında bulunmuş ve bu iddiasını test etmeden bu problem için muhakeme sürecini sonlandırmıştır. Oysa eğer böyle bir girişimde bulunmuş olsaydı 10 ve 10'dan büyük ve 2'nin kuvveti olmayan herhangi bir tamsayıyı verilen koşullar altında inceleyerek iddiasını çürütmesinin kolay olacağını söylemek mümkündür. Öğretmen adaylarının alışkanlık olarak ortaya koydukları problem çözme yaklaşımlarındaki yetersizliklerin yanı sıra tıpkı problemi anlamada olduğu gibi kontrol etmede de epistemolojik yaklaşımlarının etkisinde kaldıkları söylenebilir. Çünkü öğretmen adaylarının deneme yanılma stratejisi ile yani özel örneklerle yaptıkları çalışmaların sonuçlarını gözlemleyerek bir iddiada bulunduklarında bu iddialarını test ettiklerine daha sık rastlanılmıştır.

Özetle, öğretmen adaylarının temel kavramlara yönelik derinlemesine bir kavrayışa sahip olmamaları muhakeme sürecinde yanlış çıkarımlarda bulunmalarına neden olmuştur. Bu durum problemler için başka özel bir strateji veya kavramsal bilgi aramalarına ket vurarak muhakeme süreçlerinde zorluklar yaşamalarına yol açmıştır. Ayrıca katılımcıların temel kavramlarla ilgili yaşadıkları zorlukların, Zazkis (2007)'in Sayılar Teorisi alanıyla ilgili eleştirilerindeki haklılık payını güçlendirdiği söylenebilir. Zazkis, matematiği öğretme ve öğrenmedeki kullanışlılığına rağmen matematik eğitiminde hem müfredat hem de araştırma bakımından sayıların hak ettiği yeri almadığını ve müfredatların hesaplamaların hâkimiyetinde olduğunu bildirmiştir.

Diğer taraftan öğretmen adaylarının problemi anlamaya ve iddialarını veya çözüm süreçlerini kontrol etmeye gereken önemi göstermedikleri ya da epistemolojik bilgilerinin etkisinde kalarak ihtiyaç duymadıkları ya da bunlardan kaçındıkları söylenebilir. Öğretmen adaylarının problem durumunu yeterince analiz etmemeleri, problem verileri ile problemi çözmek için gerekli matematiksel bilgileri arasındaki ilişkilendirmeyi yapamamalarına ve bu durumla ilişkili olarak doğru stratejiyi belirleyememelerine neden olmuştur. Süreç sonunda elde ettikleri doğru olmayan sonuçları ve izledikleri süreçleri kontrol etmemeleri de, belki de problemin doğru yanıtına veya yanıtı ispatlamaya götürecek matematiksel bilgi veya strateji arayışı içerisine girip süreci başarılı bir şekilde sonlandırma ihtimalini ortadan kaldırmıştır.

Bu kapsamda, katılımcıların problem çözmede öğretmen yeterliliklerini karşılayacak bilgi ve beceriye sahip olduklarını söylemek güçtür. Öğretmen adaylarının mevcut duruma dair ortaya koydukları olası sebepleri yani yaşadıkları zorluklara dair atıfları ise ikinci araştırma probleminin sonucu kapsamında ele alınmıştır.

5.1.2. İkinci Araştırma Problemine İlişkin Sonuçlar

Öğretmen adaylarının bilişsel istem düzeyi yüksek matematiksel görevleri yerine getirmede yaşadıkları zorluklara yönelik atıfları Weiner (1972, 2010)'ın atıflara yönelik oluşturduğu konum boyutu altında incelenmiştir. Konum boyutu, kişinin yaşadığı bir duruma dair ortaya koyduğu nedenin bireyin kendisinden mi yoksa kendisi dışındaki etkenlerden mi kaynaklı olduğuyla ilgilidir ve buna dayalı olarak içsel ve dışsal atıflar olarak iki alt boyuta ayrılmıştır. Bulgulara göre öğretmen adaylarının muhakeme süreçlerinde yaşadıkları zorluklara atıfları tablodaki gibi olmuştur:

Tablo 12.

Öğretmen Adaylarının Muhakeme Eylemlerinde Yaşadıkları Zorluklalara Atıfları

Öğretmen Adayı	İçsel Atıfları	Dışsal Atıfları
ÖA1	muhakeme becerisi, deneyim, sebat, sorgulama	problemlerin niteliği, geçmiş öğretim faaliyetleri
ÖA2	kavramsal bilgi, stratejik bilgi, sorgulama	problemlerin niteliği
ÖA3	kavramsal bilgi, stratejik bilgi, deneyim eksikliği	problemlerin niteliği, geçmiş öğretim faaliyetleri
ÖA4	kavramsal bilgi, stratejik bilgi	problemlerin niteliği, geçmiş öğretim faaliyetleri

Öğretmen adaylarının atıfları incelendiğinde, bunların literatürde görülen matematik başarısına/başarısızlığına (Cortés-Suárez & Sandiford, 2008; Polaki ve Nenty, 2001; Weiner 2010) ve aynı zamanda ispatlama başarısına/başarısızlığına verilen atıflarla benzer olduğunu söylemek mümkündür (Baştürk; 2013). Birinci araştırma probleminden elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları kavramsal bilgi ve stratejik bilgilerine dayalı sıklıkla zorluk yaşamıştır. Tablodan da görüleceği üzere ÖA1 dışındaki adaylar, yaşadıkları zorluklara dair bu bilgilere atıfta bulunmuşlardır. Bu durum öğretmen adaylarının bu türden problemleri eğer yeterince bilgi ve beceri sahibi olunursa çözebildiklerini düşündüklerini ortaya koyduğundan kendileri ve mesleki yaşamlarındaki öğretim etkinlikleri açısından olumlu görülmüştür (Kloosterman, 1984; Weiner, 2010).

Bulgular ÖA1'in sıklıkla basit kavramsal yanlışlar yaptığını göstermektedir. ÖA1'in ise atıflarında bu kapsamda bilgi eksikliğine bir atıf yapmadığı, bununla birlikte diğer adaylardan farklı olarak muhakeme yeteneğindeki yetersizliğe atıfta bulunduğu görülmektedir. Yetenek literatürdeki araştırmalarda sıklıkla atfedilen bir neden olmakla birlikte, kontrol edilemez ve kalıcı olduğundan kişilerin başarısızlığını bu nedene atfetmelerinin olumsuz sonuçlar doğurduğu bildirilmiştir. Bununla birlikte ÖA1'in deneyim, sebat ve sorgulama gibi içsel atıflarda da bulunması bu türden problemleri çözmek için, kendisi ve öğrencileri adına, gelecekte bir çaba içinde bulunma ihtimalini göstermesi açısından olumlu bulunmuştur. Nitekim araştırmlar, öğretmenlerin atıflarını bu tür uygulamların gerçekleştirilmesi için önemli görmektedir (Middleton & Spanias, 1999).

Öğretmen adaylarının yaşadıkları zorluklara dair yaptıkları dışsal atıflar incelendiğinde ise tümünün görevin zorluğuna atıf yaptığı görülmektedir. Bunun yanında ÖA2 hariç öğretmen adayları geçmiş öğretim faaliyetlerine atıfta bulunmuşlardır. Bu atıflar bireysel açısından dışsal olmasının yanında kalıcı ve değiştirilemezdir. Ancak bununla birlikte adayların içsel ve değiştirilebilir atıfta bulunmaları problemler zor olsa da yeterli bilgi ve beceriye sahip olduklarında çözebileceklerini düşündüklerini göstermektedir. Öğretmen adaylarının öğretim faaliyetlerine yönelik eleştirilerinin ise derslerin yürütülme şekli dikkate alındığında dikkate değer olduğunu söylemek mümkündür.

Her iki araştırma probleminin bulgularından elde edilen sonuçlar bir arada alındığında; zor olarak nitelenen problemlerin çözülebilmesi için çok yönlü ve derinlemesine matematiksel bilgi gerektirdiği bununla birlikte yeterince çaba harcandığında çözebilir olduklarını; bunun için ise öğretim faaliyetlerinin iyileştirilmesi gerektiği söylenebilir. Bir sonraki bölümde araştırmanın sonuçları çerçevesinde yararlı olacağı düşünülen önerilere yer verilecektir.

5.2. Öneriler

Araştırmanın sonuçları çerçevesinde yararlı olacağı düşünülen öneriler şunlardır:

Uygulamaya Yönelik Öneriler

Lisans programları dâhil olmak üzere matematik derslerinin önemli bir süresinde problem çözme uygulamalarının (Araştırmada ele alınan tanıma göre ispatlama etkinlikleri de bu uygulamalara dâhildir.) yapıldığı bilinmekle birlikte; araştırma sonuçları öğretmen adaylarının sistematik bir problem çözme yaklaşımına genel olarak sahip olmadıklarını göstermiştir. Diğer taraftan öğretmen adaylarının süreçte yaşadıkları zorluklara atıflarından ikisi problemlerin niteliği ve öğretim uygulamaları olmuştur. Öğretmen adaylarının bu iki atıfta bulunurken kullandıkları söylemleri doğrultusunda öğretim uygulamalarında; problem ifadesinde doğru yanıtı veren veya yanıta yönlendiren problemlere nazaran açık uçlu problemlere daha çok yer verilmesi ve kısa süre önce ele alınan tanım ve teoremlere dayalı problem çözme uygulamalarının yanında kavramsal olarak daha kapsayıcı problemlere daha çok yer verilmesi önerilmektedir. Bu tür problemlerin öğretmen adaylarının hem muhakeme becerilerini artıracağı hem de kavramsal ve stratejik bilgilerini zenginleştireceği düşünülmektedir.

Lisans programındaki tüm yarıyıllarda yer alan derslerde ispatlama etkinlikleri yapılıyor olmakla birlikte ispat stratejilerinin lisans programlarının ilk yarıyılındaki alan dersleri kapsamında verildiği bilinmektedir. Lisans programına yeni başlayan öğrencilere temel bilgi ve becerileri kazandırmak açısından bunun gerekli olduğu açıktır. Bununla birlikte veri toplama süreci başlamadan önce; katılımcıları tanımaya yönelik yapılan görüşmede öğretmen adaylarının tümü birinci sınıfa başladıklarında derslerin lise matematik dersi öğretim uygulamalarından farklı olarak teorem ve ispatlamaya dayalı işlendiğinden alan derslerine alışmakta zorluk yaşadıklarını ancak daha sonra bu uygulamaları yararlı bulmaya başladıklarını belirtmişlerdir. Bu nedenle öğretmen adaylarının programın ilk yarıyılında bilişsel olarak olmasa da duyuşsal olarak ispatlama stratejilerini öğrenmeye hazır olmadıklarını söylemek mümkündür. Dolayısıyla ilk yarıyılla birlikte ileriki yıllarda ispat stratejilerinin mantıksal olarak öğretilmesine yönelik öğretim uygulamalarının tekrarlanması önerilmektedir. Bu tür uygulamalara programda daha ileriki dönemlerde bulunan Matematikte Problem Çözme veya Mantıksal Akıl Yürütme dersleri kapsamında yer verilmesi düşünülebilir.

Araştırmaya Yönelik Öneriler

Matematik eğitimi literatüründe öğretmen adaylarıyla/öğretmenlerle tamsayıların özelliklerine dair yapılan çalışmaların azlığı dikkat çekmekle birlikte mevcut araştırma matematik öğretmen adaylarının bu bağlamdaki temel kavramlarda dahi zengin bir kavrayışa sahip olmadıklarını göstermiştir. Bu sonucun ortaya çıkmasında problemlerin oluşturduğu bilişsel yükün (Merrienboer & Sweller, 2005) etkisinin olabileceği ihtimali olmakla birlikte öğretmen adaylarının bazı zorlukları yarı yapılandırılmış görüşme sırasında da yaşadığı gözlenmiştir. Dolayısıyla matematiksel muhakeme için önemi araştırmacılarla vurgulanan Sayılar Teorisi bağlamında yapılan araştırmaların nicelik ve nitelik olarak artması; bu konuda öğrencilerin yaşadığı zorlukları ortaya çıkarması ve öneriler sunması açısından önemli görülmektedir. Bu nedenle araştırmacılara bu kapsamda çalışmalar yapması önerilmektedir.

Çalışmada amaç doğrultusunda veri toplamak için özellikle öğretmen adayları tarafından tamamıyla doğru bir çözüm ortaya koyulamayacağı öngörülen problemler seçilmiştir. Beklenildiği üzere katılımcıların genellikle doğru bir çözüm sunamadıkları görülmekle birlikte, çözebilmek için ortaya koydukları muhakeme eylemleri özellikle matematiksel kavramlara yönelik yaşadıkları zorlukları açıkça gözlemlenebilir kılmıştır. Bu nedenle matematiksel muhakeme ile ilgili çalışmalarda araştırmacıların, amaçlarına uygunluğunu analiz ettikten sonra, bu türden problemleri kullanmaları önerilmektedir.

KAYNAKLAR

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2014). Improving students' representational flexibility in linear-function problems: An intervention. *Educational Psychology, 34*(6), 763-786.

Akgün, L., Işık, C., Tatar, E., İşleyen, T., & Soylu, Y. (2012). Transfer of mathematical knowledge: Series. *Australian Journal of Teacher Education*, *37*(3), 7.

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 111-129.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(4), 479-488.

Amit, M. (1988). Career choice, gender and attribution patterns of success and failure in mathematics. In *Proceedings of the twelfth annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 125-130).

Anderson, J.R. (1995). *Cognitive psychology and its implications*. W. H. Freeman and Company.

Andreescu, T., Andrica, D., & Feng, Z. (2007). *104 number theory problems: from the training of the USA IMO team*. Springer Science & Business Media.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramların künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.

Arıkan, A. & Halıcıoğlu, S. (2012). *Soyut matematik.* Ankara: Palme Yayıncılık.

Aricha-Metzer, I., & Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *The Journal of Mathematical Behavior, 53,* 304-322.

Artigue, M., Burrill, G. (2007). *The nature and role of reasoning and proof,* PCMI International Seminar: Bridging Policy and Practice.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. In Olivier, A. & Newstead, K. (Eds.) *Proceedings of the XIX International Conference of PME* (vol.2, 32-39). Stellenbosch (South Africa): PME.

Asar, A.O., Arıkan, A. (2012). *Sayılar teorisi.* Ankara: Gazi Kitabevi.

Aydın, U., & Özgeldi, M. (2019). The PISA tasks: Unveiling prospective elementary mathematics teachers' difficulties with contextual, conceptual, and procedural knowledge. *Scandinavian Journal of Educational Research, 63*(1), 105-123.

Barbeau, E. J., & Taylor, P. J. (Eds.). (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study* (Vol. 12). Springer Science & Business Media.

Baştürk, S. (2013). Fen bilgisi öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapabilmede başarı ve başarısızlık nedenleri. *The Journal of Academic Social Science Studies, 6*(4), 143-158.

Bela. B. (1968). *Inslructional systems.* Fearon Publishers. California.

Benbow, C. P., Lubinski, D., Shea, D. L., & Eftekhari-Sanjani, H. (2000). Sex differences in mathematical reasoning ability at age 13: Their status 20 years later. *Psychological science, 11*(6), 474-480.

Bennett, A. B., & Nelson, L. T. (2004). *Mathematics for elementary teachers: A conceptual approach.* McGraw-Hill Higher Education.

Bills, L., & Tall, D. (1998). Operable definitions in advanced mathematics: The case of the least upper bound. In *Proceedings of the Conference of the International Group for* (p. 111).

Boekaerts, M., Otten, R., & Voeten, R. (2003). Examination performance: Are student's causal attributions school-subject specific?. *Anxiety, Stress & Coping, 16*(3), 331-342.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof, 7*(8).

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. In *Perspectives on school algebra* (pp. 99-119). Springer, Dordrecht.

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185-192).

Boruchovitch, E. (2004). A study of causal attributions for success and failure in mathematics among Brazilian students. *Interamerican Journal of Psychology*, *38*(1), 53-60.

Boston, M. D. (2013). Connecting changes in secondary mathematics teachers' knowledge to their experiences in a professional development workshop. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 7-31.

Boston, M. D., & Smith, M. S. (2011). A 'task-centric approach'to professional development: Enhancing and sustaining mathematics teachers' ability to implement cognitively challenging mathematical tasks. *ZDM*, *43*(6), 965-977.

Brodie, K. (2009). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (Vol. 775). Springer Science & Business Media.

Burton, B. A. (2007). Informatics olympiads: Approaching mathematics through code. *Mathematics Competitions*, *20*(2), 29-51.

Bülbül, A., & Urhan, S. Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçleri Arasındaki İlişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(1).

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT (2013–2015 Issues)*, *3*(1), 19-36.

Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why & how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(3), 181-200.

Cortés-Suárez, G., & Sandiford, J. R. (2008). Causal attributions for success or failure of students in college algebra. *Community College Journal of Research and Practice, 32*(4-6), 325-346.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (2nd ed.). London: Sage.

Çontay, E. G., & Paksu, A. D. (2019). Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Şemaları ve Bu Şemaları Ortaya Koyan İfadelerinin İncelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 10*(1), 59-100.

Dede, Y., Emül, N., Güven, N.D., Akçakın, V., Kaya, G., & Akyıldız, P. (2017.) Matematik öğretmen adaylarının matematikte başarıya yaptıkları atıflar bağlamında matematiksel kimliklerinin incelenmesi. *Uluslararası Eğitim Yönetimi Forumu (EYFOR),* Ankara, Türkiye.

Diezmann, C. M. & Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch & M. Thomas (Eds.). Mathematics education in the South Pacific. *Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1), (pp. 219-225). Auckland, New Zealand: MERGA.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2017). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Analiz Alanında Yaptıkları İspatların Özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 44,* 467-498.

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of educational research, 53*(2), 159-199.

Dündar, S. (2015). Öğretmen Adaylarının Seriler Konusuyla İlgili Alıştırmaları ve Rutin Olmayan Problemleri Çözme Becerilerinin İncelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 23*(3), 1293-1310.

Dündar, S., & Yaman, H. (2015). How do Prospective Teachers Solve Routine and Non-Routine Trigonometry Problems?. *International Online Journal of Educational Sciences, 7*(2).

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*(3), 533-556.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., Carolan, T., Lockwood, E., ... & Zaslavsky, O. (2017). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *The Journal of Mathematical Behavior, 53,* 263-283.

Erbaş, A. K., & Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. *Quality & Quantity*, *46*(1), 89-102.

Erickson, M. J., & Flowers, J. (1999). *Principles of mathematical problem solving*. Prentice Hall.

Freiman, V., & Sriraman, B. (2007). Does mathematics gifted education need a working philosophy of creativity? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *6*(1–2), 23–46

Fullan, M. (Ed.). (2009). *The challenge of change: Start school improvement now!*. Corwin Press.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics, 70*(1), 71-90.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645-657.

Gatewood, E. J., Shaver, K. G., & Gartner, W. B. (1995). A longitudinal study of cognitive factors influencing start-up behaviors and success at venture creation. *Journal of Business Venturing*, *10*(5), 371-391.

Georgiou, S. N. (1999). Achievement attributions of sixth grade children and their parents. *Educational psychology*, *19*(4), 399-412.

Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2003). One Line Proof: What Can Go Wrong?. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 437-444.

Glaser, B., and Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine Publishing Company.

Goizueta, M., Mariotti, M. A., & Planas, N. (2014). Validating in the mathematics classroom. In *Proceedings of the Joint Meeting of PME* (Vol. 38, pp. 169-176).

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning, 397*.

Goldin-Meadow, S., Alibali, M. W., & Church, R. B. (1993). Transitions in concept acquisition: using the hand to read the mind. *Psychological review*, *100*(2), 279.

Graham, S. (1991). A review of attribution theory in achievement contexts. *Educational Psychology Review*, *3*(1), 5-39.

Gürlü, Ö. (2012). *Olimpik matematik sayılar teorisine giriş.* Altın Nokta.

Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R., & Dreyfus, T. (2014). Investigating students' geometrical proofs through the lens of students' definitions. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 3*, 217–224.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education.* OISE Press, Toronto.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society, 7,* 234-283.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Hayes J.R. (1989). *The Complete Problem Solver*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 524-549.

Hesse, F., Care, E., Buder, J., Sassenberg, K., & Griffin, P. (2015). A framework for teachable collaborative problem solving skills. In *Assessment and teaching of 21st century skills* (pp. 37-56). Springer Netherlands.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, 2*, 1-27.

Hintikka, J. (1989). The role of logic in argumentation. *The Monist*, *72*(1), 3-24.

Hintikka, J., & Bachman, J. (1991). *What If...?: Toward Excellence in Reasoning*. McGraw-Hill Humanities, Social Sciences & World Languages.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3-21.

İsrael, E. (2003). *Problem Çözme Stratejileri, Başarı Düzeyi, Sosyo-Ekonomik Düzey Ve Cinsiyet İlişkileri.* Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1-16.

Jones, K. (1997). Student teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review*, *9*, 21-32.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M. G. B., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., ... & Taylor, P. (2009). Challenges beyond the classroom—Sources and organizational issues. In *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom* (pp. 53-96). Springer, Boston, MA.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, *64*(5), 291-314.

Kloosterman, P. (1984). Attribution theory and mathematics education. *American Educational Research Association*, New Orleans, Louisiana.

Knapp, J. (2006, November). A framework to examine definition use in proof. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 15-22).

Kuhn, D., & Udell, W. (2007). Coordinating own and other perspectives in argument. *Thinking & Reasoning*, *13*(2), 90-104.

Kurt, A.A. (Editör). (2011). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Eskişehir: T.C. Anadolu Üniversitesi.

Lerman, S. (Ed.). (2014). *Encyclopedia of mathematics education*. Springer Netherlands.

Lesh, R. ve Zawojewski, J.S. (2007). Problem solving and modeling. *The handbook of research on mathematics teaching and learning (2nd ed., pp. 763–804).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum.

Lewis, A., & Smith, D. (1993). Defining higher order thinking. *Theory into practice*, *32*(3), 131-137.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 165-190.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(1), 29-55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276.

Lloyd, J. E., Walsh, J., & Yailagh, M. S. (2005). Sex differences in performance attributions, self-efficacy, and achievement in mathematics: if I'm so smart, why don't I know it?. *Canadian Journal of Education*, 384-408.

Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(2), 165-196.

Losada, M., & Rejali, A. (2015). The Role of Mathematical Competitions and Other Challenging Contexts in the Teaching and Learning of Mathematics. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 563-568). Springer, Cham.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 385-401.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41-51.

Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 125-149.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.

Mayer, R. E., & Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. *Handbook of educational psychology*, *2*, 287-303.

Milli Eğitim Bakanlığı (2013a). *Özel Yetenekli Bireylerin Eğitimi Strateji ve Uygulama Kılavuzu.* Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı (2013b). *Özel Yetenekli Bireyler Strateji ve Uygulama Planı 2013-2017.* Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı (2015). *Milli Eğitim Bakanlığı 2015-2019 Stratejik Planı.* Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı (2017a). *2017-2018 Bilim ve Sanat Merkezleri Öğrenci Tanılama Kılavuzu.* Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı (2017b). *Öğretmen Yetiştirme ve Eğitimi Genel Müdürlüğü. Öğretmen Yeterlilikleri*. Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018a). *Milli Eğitim Bakanlığı İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı.* Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018b). *Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı.* Ankara: MEB.

Mejía-Ramos, J. P., Weber, K., & Fuller, E. (2015). Factors influencing students' propensity for semantic and syntactic reasoning in proof writing: A case study. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(2), 187-208.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation.* San Francisco, CA: Jossey- Bass.

Middleton, J. A., & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 65-88.

Molina, M. & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61-80.

Morselli, F. (2006). Use of examples in conjecturing and proving: An exploratory study. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 185.

Moshman, D. (1995). Reasoning as self-constrained thinking. *Human Development*, *38*(1), 53-64.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: VA: NCTM

National Research Council. (1991). *Moving beyond myths: Revitalizing undergraduate mathematics*. National Academies Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM

Nenty, H. J. (2010). Analysis of some factors that influence causal attribution of mathematics performance among secondary school students in Lesotho. *Journal of social sciences*, *22*(2), 93-99.

Nolte, M., & Pamperien, K. (2017). Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme. *ZDM, 49*(1), 121-136.

Özdemir, M. (2016). *Matematik olimpiyatlarına hazırlık.* Altın Nokta.

Özden, H. Ö. (2002). Hellenizm Öncesi Yunan Felsefesinde Güzellik Anlayışları. *Atatürk Üniversitesi İlâhiyât Tetkikleri Dergisi, 17*, 61-92.

Pala, O., & Narlı, S. (2018). Examining Proof Schemes of Prospective Mathematics Teachers Towards Countability Concept. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, *12*(2).

Palmer, S. E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization* (pp. 259-303). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A structural model related to the understanding of the concept of function: definition and problem solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 723-740.

Papadopoulos, I., & Iatridou, M. (2010). Modelling problem-solving situations into number theory tasks: The route towards generalisation. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(3), 85-110.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-33).

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational studies in mathematics*, *66*(1), 23-41.

Pedemonte, B. (2018). Strategic vs Definitory Rules: their role in abductive argumentation and their relationship with Deductive Proof. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Educatio*n, *14*, 9.

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM*, *43*(2), 257-267.

Peirce, C., (1955). In J. Buchler (Ed.), *Philosophical writings of Peirce.*, New York: Dover.

Polaki, M. V., & Nenty, H. J. (2001). Gender differences in mathematics performance attributions among first year students at National University of Lesotho: Implications for access to and performance in mathematics. *Journal of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *5*(1), 41-52.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspects of mathematical methods*. Prentice University Press.

Posamentier, A.S., Krulik, S. (1998). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions.* Corwin Press Inc., California.

Punch, K. F. (2005). *Sosyal araştırmalara giriş: Nicel ve nitel yaklaşımlar*. (Çev. Bayrak, D., Arslan, H. B., & Akyüz, Z.). Ankara: Siyasal Kitabevi.

Quinn, P. M. (2002). *Qualitative research and evaluation methods.* California EU: Sage Publications Inc.

Rapanta, C., Garcia-Mila, M., & Gilabert, S. (2013). What is meant by argumentative competence? An integrative review of methods of analysis and assessment in education. *Review of Educational Research, 83*(4), 483-520.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia mathematica, 7*(1), 5-41.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. *Oxford handbook of numerical cognition*, 1118-1134.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relations between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skill* (pp. 75-110). Hove, England: Psychology Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346.

Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory*. Pearson Education.

Ross, L. (1977). The intuitive psychologist and his shortcomings: Distortions in the attribution process. In *Advances in experimental social psychology* (Vol. 10, pp. 173-220). Academic Press.

Saczynski, J. S., Willis, S. L., & Warner-Schaie, K. (2002). Strategy use in reasoning training with older adults. *Aging, Neuropsychology, and Cognition, 9*(1), 48-60.

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Undergraduate Students' Mathematical Proof Processes in a Calculus Course: A Case Study. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, *40*(2), 295–319.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. London: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). Pólya, problem solving, and education. *Mathematics magazine*, *60*(5), 283-291.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *334370*.

Sears, R. (2018). Proof schemes of pre-service middle and secondary mathematics teachers. *Investigations in Mathematics Learning*, 1-17.

Selçuk, S. (2013). Doğru terim" Muhakeme" değil" Yargılama" dır. *Marmara Üniversitesi Hukuk Fakültesi Hukuk Araştırmaları Dergisi*, *19*, 295-317.

Selden, A. (2011). Transitions and proof and proving at tertiary level. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 391-420). Springer, Dordrecht.

Selden, J., Benkhalti, A., & Selden, A. (2014). An analysis of transition-to-proof course students' proof constructions with a view towards course redesign. In *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 246-259).

Selden, A., & Selden, J. (2002). Reflections on mathematics education research questions in elementary number theory. *Learning and teaching number theory:Research in cognition and instruction*, 213-230.

Selden, A., & Selden, J. (2013). Proof and problem solving at university level. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 303-334.

Sinclair, N., Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2003). Number worlds: Visual and experimental access to elementary number theory concepts. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*(3), 235-263.

Skemp,R.R.(1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Smith, J. C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 73-90.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(5), 344-50.

Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (2015). Research on mathematical argumentation: A descriptive review of PME proceedings. In *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193-200).

Sonay, Z. A., & Bulut, S. (2014). Experimental Study on Mathematical Problem Solving Approach with Pre-service Elementary Teachers. *Pamukkale University Journal of Education*, *36*, 45-57.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Building foundations for algebra. Mathematics teaching in the middle school, 2(4), 252-60. Star, J. R. (2000). Re-" conceptualizing" procedural knowledge in mathematics. In *Proceedings of the twenty-second annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 219-223).

Stake, R. E. (2000). Case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (2nd ed., pp. 435-454). Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and instruction*, *18*(6), 565-579.

Star, J. R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B., & Durkin, K. (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology*, *41*, 198-208.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning*, *10*(4), 313-340.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. *Educational leadership*, *61*(5), 12-17.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(4), 268-275.

Stylianides, A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 289-321.

Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 1-20.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 237-253.

Stylianou, D. A. (2013). An Examination of Connections in Mathematical Processes in Students' Problem Solving: Connections between Representing and Justifying. *Journal of Education and Learning*, *2*(2), 23-35.

Sullivan, P., & Mornane, A. (2014). Exploring teachers' use of, and students' reactions to, challenging mathematics tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 193-213.

Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some. In *Conference of the University of Chicago School Mathematics Project*.

TBMM (2012). Üstün Yetenekli Çocukların Keşfi, Eğitimleriyle İlgili Sorunların Tespiti ve Ülkemizin Gelişimine Katkı Sağlayacak Etkin İstihdamlarının Sağlanması Amacıyla Kurulan Meclis Araştırması Komisyonu Araştırma Komisyon Taslak Raporu. Ankara.

Tekkumru-Kisa, M., & Stein, M. K. (2015). Learning to see teaching in new ways: A foundation for maintaining cognitive demand. *American Educational Research Journal*, *52*(1), 105-136.

Toh, P. C., Leong, Y. H., Toh, T. L., & Ho, F. H. (2014). Designing tasks for conjecturing and proving in number theory. *Proceedings of PME 38, 5*, 257-265.

Toulmin, S. E. (1958). *The use of argument*. Cambridge University Press.

Ufer, S., Heinze, A., & Reiss, K. (2008). Individual predictors of geometrical proof competence. In *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32and PME-NA XXX* (Vol. 4, pp. 361-368).

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(24).

Urhan, S. (2018). *Kanıt Yapma Sürecinin Habermas Akılcı Davranış Modeli İle Analizi*. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Usiskin, Z. (2015). What does it mean to understand some Mathematics?. In *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 821-841). Springer, Cham.

Uygan, C., Tanisli, D., & Kose, N. Y. (2014). Research of pre-service elementary mathematics teachers' beliefs in proof, proving processes and proof evaluation processes. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(2), 137-157.

Van De Walle, J. (1994). Elementary School Mathematics: Teaching Developmentally. White Plains, NY: Longtnan.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(1), 27-52.

Walton, D. N. (1990). What is reasoning? What is an argument?. *The Journal of Philosophy*, *87*(8), 399-419.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational studies in mathematics, 48*(1), 101-119.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 351-360.

Weber, K., Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist*, *49*(1), 36-58.

Weiner, B. (1972). Attribution theory, achievement motivation, and the educational process. *Review of Educational Research, 42*(2), 203-215.

Weiner, B. (1979). A theory of motivation for some classroom experiences. *Journal of Educational Psychology*, *71*(1), 3.

Weiner, B. (2010). The development of an attribution-based theory of motivation: A history of ideas. *Educational Psychologist*, *45*(1), 28-36.

Weiner, B., Russell, D., & Lerman, D. (1978). Affective consequences of causal ascriptions. *New directions in attribution research*, *2*, 59-90.

Weiss, I. R., Pasley, J. D., Smith, P. S., Banilower, E. R., & Heck, D. J. (2003). Looking inside the classroom. *Chapel Hill, NC: Horizon Research Inc*.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 227-236.

Yazgan, Y. (2015). Sixth graders and non-routine problems: Which strategies are decisive for success. *Educational Research and Reviews*, *10*(13), 1807-1816.

Yenilmez, K., & Yasa, E. (2007). Ilkögretim ögrencilerinin problem çözme becerileri üzerine bir inceleme. *E-Journal of New World Sciences Academy*, *2*(4), 272-287.

Yin, R. K. (2002).*Case Study Research, Design and Methods*. Newbury Park, Sage Publications.

Zandieh, M., Roh, K. H., & Knapp, J. (2014). Conceptual blending: Student reasoning when proving "conditional implies conditional" statements. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 209-229.

Zazkis, R. (1998). Odds and ends of odds and evens: An inquiry into students' understanding of even and odd numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(1), 73-89.

Zazkis, R. (2007). Number Theory in mathematics education: Queen and servant. In *Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT* (Vol. 7, pp. 46-59).

Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 207-218.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. *NCTM*, 41-52.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM*, *40*(1), 131-141.

Zazkis, D., & Villanueva, M. (2016). Student Conceptions of What it Means to Base a Proof on an Informal Argument. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(3), 318-337.

Zazkis, D., Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2015). Two proving strategies of highly successful mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior, 39*, 11-27.

EKLER

Ek-1. Problem 1 ve Örnek Çözümü

Problem: $\sqrt[3]{n}$ den küçük tüm pozitif tamsayılara bölünebilen en büyük n tamsayısını bulunuz.

Çözüm: $7 < \sqrt[3]{420} < 8$ ve $420 = ekok\{1,2,3,4,5,6,7\}$ olduğundan 420 tamsayısı istenen koşulları sağlar. Şimdi 420'nin bu koşulları sağlayan en büyük tamsayı olduğunu gösterelim:

$n > 420$ olacak şekilde bir n tamsayısının da $\sqrt[3]{n}$ 'den küçük tüm pozitif tamsayılara bölünebildiğini farz edelim. $420 = ekok\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve $\sqrt[3]{n} > 7$ olduğundan $n \geq 840$ ve $\sqrt[3]{n} > 0$ 'dır. Ayrıca $2520 = ekok\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ve buna göre $\sqrt[3]{n} > 13$'tür. Şimdi m 'yi $\sqrt[3]{n}$ 'den küçük en büyük pozitif tamsayı olarak alalım, yani $m < \sqrt[3]{n} \leq m+1$ olsun. $m \geq 13$ ve $ekok\{1,2,...,m\}$ nin n'yi böldüğünü biliyoruz. Fakat ortak bölenleri sadece 2 ve 3 olduğundan;

$$ekok\{m-3, m-2, m-1, m\} \geq \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$$

dir. Böylece

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{6} \leq n \leq (m+1)^3$$

elde edilir ve buradan

$$m \leq 6\left(1+\frac{2}{m-1}\right)\left(1+\frac{3}{m-2}\right)\left(1+\frac{4}{m-3}\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin sol tarafı *m*'ye göre artan bir fonksiyon iken sağ tarafı *m*'ye göre azalan bir fonksiyondur. Fakat *m=13* için,

$$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160 > 16464 = 6 \cdot 14^3$$

olur ve bu eşitsizlik 13 ve 13'ten büyük tüm tamsayılar için yanlıştır.

Dolayısıyla *n>420* için istenilen şartlar sağlanmaz.

Ek-2. Problem 2 ve Örnek Çözümü

Problem: : $n(173+n)$ ifadesini tam kare yapan n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Çözüm: n ve $173+n$ sayılarının ortak böleni p olsun. Bu durumda, p bu iki sayının farkını da bölmelidir. Buradan, $p|173$ olacağından $p=173$ elde edilir. Dolayısıyla n sayısı 173'e bölünebilmelidir. $k \in \mathbb{N}$ için $n=173k$ olsun. Buradan,

$$n(173+n)=173k(173(k+1))=173^2 k(k+1)$$

eşitliği elde edilir. k ve $k+1$ ardışık iki tamsayı olduğundan çarpımları tam kare olamaz. Dolayısıyla $n(\mathrm{n}+173)$ sayısı tam kare olamaz.

O halde istenilen şartın sağlanması için $n(173+n)$ çarpımında her iki çarpım da tam kare olmalıdır. $n=u^2$ ve $173+n=v^2$ diyelim. $v^2-u^2=173$ eşitliğinden $u+v=173$ ve $v-u=1$ olur. Buradan da $v=187$ ve $u=86$ elde edilir. Buna göre $n=86^2$'dır.

Ek-3. Problem 3 ve Örnek Çözümü

Problem: Birçok pozitif tamsayı iki veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak ifade edilebilir. Örneğin, 24=7+8+9 ve 51=25+26.

A bir pozitif tamsayı ve iki veya daha fazla ardışık tamsayının toplamı olarak ifade edilemiyorsa o zaman *ilginç sayıdır*. Tüm ilginç sayıları bulunuz.

Çözüm: Bir n sayısı ilginçtir yalnız ve ancak n 2'nin kuvvetidir. Negatif olmayan bazı k tamsayıları için $n = 2^k$ alalım.

Farz edelim ki n ilginç olmasın. O zaman

$$n = m + (m+1) + ... + (m+k) = \frac{(k+1)(2m+k)}{2} \quad (*)$$

olacak şekilde pozitif m ve k sayıları vardır. $k+1$ ve $2m+k$ farklı pariteden olduğundan bunlardan biri 3' ten büyük olan bir tek tamsayıdır. Buna göre n'nin 3'ten büyük tek tamsayı olan bir böleni vardır. Dolayısıyla her pozitif k tamsayısı için 2^k ilginçtir.

Geriye n dışındaki tüm pozitif tamsayıların ilginç olmadığını göstermek kaldı. h negatif olmayan bir tamsayı ve ℓ 1'den büyük bir tek tamsayı olmak üzere $n = 2^h.\ell$ yazabiliriz. *(* $2^{h+1} \neq \ell$ olduğuna dikkat edelim.)

Eğer $2^{h+1} < \ell$ ise * dan $\quad k = 2^{h+1} - 1$ ve $m = \dfrac{\ell - k}{2} = \dfrac{\ell + 1 - 2^{h+1}}{2}$

olarak belirlenebileceğinden o zaman n ilginç değildir.

Eğer $2^{h+1} > \ell$ ise *dan $\quad k = \ell - 1$ ve $m = \dfrac{2^{h+1} - k}{2} = \dfrac{2^{h+1} + 1 - \ell}{2}$

olarak belirlenebileceğinden o zaman n ilginç değildir.

Dolayısıyla her durumda eğer n, 1'den büyük bir tek tamsayı bölenine sahipse ilginç değildir.

Ek-4. Problem 4 ve Örnek Çözümü

Problem: $S(m,n)=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+...+\frac{1}{m+n}$ şeklinde tanımlanan toplamın sonucu tamsayı olacak şekilde pozitif m ve n tamsayılarını var mıdır?

Çözüm: $S(m,n)$ toplamı tamsayı olacak şekilde m ve n pozitif tamsayılarının olduğunu kabul edelim. Burada $n \geq 1$ olduğu aşikardır. Bu nedenle $m, m+1,...,m+n$ sayıları arasında çift sayılar vardır. $Ekok(m, m+1,...,m+n)=l$ olsun. Dolayısıyla l çifttir. Buradan;

$$lS(m,n)=\frac{l}{m}+\frac{l}{m+1}+...+\frac{l}{m+n} \qquad (*)$$

elde edilir. Kabülümüze göre, yukarıdaki eştliğin sol tarafı çifttir. Sağ tarafın ise tek olduğunu göstererek bir çelişki elde edeceğiz.

$0 \leq i \leq n$ şartını sağlayan her i tamsayısı için, 2^{a_i} nin $m+i$ 'yi tam böldüğünü varsayalım. $m=\max\{a_0, a_1,...,a_n\}$ olsun. Buna göre $2^m \mid l$ dir.

$0 \leq j \leq n$ omak üzere $a_j = m$ olduğunu farz edelim. j bir tane bulunabildiğini iddia ediyoruz. Bunun aksini yani $0 \leq j < j_1 \leq n$ olmak üzere $a_j = a_{j_1}$ olduğunu farz edelim. Buradan k ve k_1 tek tamsayılar olmak üzere $m+j=2^{a_j}k$ ve $m+j_i=2^{a_{j_1}}k_1$ dir. Dolayısıyla $k+1$, k ve k_1 arasında bir çift tamsayıdır ve buradan;

$$m+j<2^{a_j}(k+1)<2^{a_j}k_1=2^{a_{j_1}}k_1=m+j_1$$

elde edilir ve bu 2^{a_j+1}'in 2^{a_j}'yi böldüğünü gösterir. $(k+1)$ $a_j = m$'nin maximalliği ile çelişir. Böylece böyle bir j bir tanedir. Buna göre $i \neq j$ olmak üzere $0 \leq i \leq n$ şartını sağlayan tüm tek tamsayılar için $\frac{l}{m+i}$ çifttir ve $\frac{l}{m+j}$ tektir.

Bu nedenle, (*) eşitliğinin sağ tarafı bir toplam hariç çifttir, ve dolayısıyla sağ taraf tektir ve bu sol tarafın çift olmasıyla çelişir. Buna göre ilk kabulümüz yanlıştır ve $S(m,n)$ bir tamsayı olamaz.

Ek-5. Problem 5 ve Örnek Çözümü

Problem: a, b ve c, $a<b<c$ şartını sağlayan pozitif tamsayılar olmak üzere; negatif olmayan tüm tamsayıların $a^2+b^2-c^2$ şeklinde ifade edilebilir midir?

Çözüm: Anahtar fikir, ardışık mükemmel kareler arasındaki pozitif farkların doğrusal olarak artmasıdır. Negatif olmayan her k tamsayısı için, k'nın paritesinden farklı ve daha büyük bir pozitif a tamsayısı seçeriz. Sonra $c=b+1$eşitliğini kurarız. Daha sonra k 'yı $k=a^2+b^2-c^2=a^2-(2b+1)$ şeklinde yazabiliriz. k ve a farklı pariteden olduğundan a^2-k tektir ve dolayısıyla,

$$b=\frac{a^2-k-1}{2}$$

pozitif bir tamsayıdır. Çünkü bu eşitliğin sol tarafı a için bir kuadratik olduğundan, her a için değeri a 'dan büyüktür ve bu durumda $a<b<c=b+1$ sağlanır. Böylece çözüm tamamlanır.

Ek-6. Problem 6 ve Örnek Çözümü

Problem: d sayısı, 2, 5 ve 13'ten farklı olan herhangi bir pozitif tamsayı olsun ve {2, 5, 13, d} kümesi verilsin. ab-1, bir tamsayısının karesi olmayacak şekilde {2, 5, 13, d} kümesinden birbirinden farklı a ve b tamsayıları her zaman seçilebilir mi?

Çözüm: $2.5-1=3^2$, $2.13-1=5^2$ ve $5.13-1=8^2$ olduğundan, $\{2d-1, 5d-1, 13d-1\}$ kümesinde tamkare olmayan bir sayı ararız.

Bu sayıların hepsinin tamkareler olduğunu farz edelim; yani

$$2d-1=a^2 \ , \ 5d-1=b^2 \text{ ve } 13d-1=c^2$$

olacak şekilde *a, b* ve *c* pozitif tamsayıları vardır.

Buradan $x \in Z^+$ olamk üzere $a=2x+1$ ve $d=2x(x+1)+1$ yazabiliriz.

$x(x+1)$ daima çift olduğundan, $d \equiv 1 (\bmod 4)$ ve dolayısıyla *b* ve *c* çifttir.

b ve *c* çift ise $y, z \in Z^+$ olmak üzere $b=2y$ ve $c=2z$ şeklinde yazılabilir. $5d=b^2+1$ ve $13d=c^2+1$ ve buradan $8d=c^2-b^2$ elde edilir.

Böylece, $d=\dfrac{4y^2+1}{5}=\dfrac{4z^2+1}{13}=\dfrac{4z^2-4y^2}{8}=\dfrac{z^2-y^2}{2}$ yazılabilir.

Buradan *z* ve *y*'nin aynı pariteden (her ikisi de tek ya da her ikisi de çift) olduğu görülür. Bu durumda, $z^2-y^2=0 (\bmod 4)$ dır ve bir çelişki elde edilir. Böylece, çözüm tamamlanmış olur.

Ek-7. Problem Çözme Oturumlarında Çözülen Diğer Problemler ve Çözümlerine Dair Örnekler

Problem: $x_1 \le x_2 \le x_3$ şartını sağlayan asal sayılar için $x_1 + x_2 + x_3 = 68$ ve $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1121$ eşitlikleri de sağlanıyorsa x_2 kaçtır?

Çözüm:

Problem: $n^3 + 5n$ sayısı her n pozitif tamsayısı için 6'ya bölünebilir midir?

Çözüm:

Problem: 1 ile 1000 tamsayılarının kaç tanesi negatif olmayan iki tamsayının kareleri farkı olarak yazılabilir?

Çözüm:

$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ olduğundan tüm tek tamsayıları iki kare farkı olarak yazabiliriz. $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$ olduğundan, 4'e bölünebilen tüm tamsayıları da iki kare farkı olarak yazabiliriz. Böylece $4n$, $4n+1$ ve $4n+3$ formundaki sayıları iki kare farkı olarak yazabileceğimizi göstermiş olduk.

$4n+2$ formundaki tamsayıları da iki kare farkı olarak gösterip gösteremeyeceğimizi görelim. Bu tamsayılardan herhangi bir x tamsayısı seçelim. $x = 4n+2 = 2(2n+1)$ olarak ifade edilebileceğinden x tamsayısı mutlaka bir tek ve bir çift tamsayının çarpımı şeklindedir. Fakat aynı zamanda $x = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ifadesinde $(a-b)$ ve $(a+b)$ ifadelerinin her ikisi de ya tek ya da çift tamsayıdır. Yani birinin tek birinin çift olması mümkün değildir. O halde $x = 4n+2$ formundaki tamsayılar iki kare farkı olarak yazılamazlar.

Buna göre, 1 ile 1000 arasındaki tamsayıların dörtte üçü iki kare farkı olarak yazılabilirler.

Problem: $7^n - 1$ sayısı $6^n - 1$ sayısının bir katı olacak şekilde kaç tane n pozitif tamsayısı vardır?

Ek-7. (devam) Problem Çözme Oturumlarında Çözülen Diğer Problemler ve Çözümlerine Dair Örnekler

Çözüm:

$6^n - 1 \mid 7^n - 1$ olacak şekildeki n pozitif tamsayılarını arıyoruz.

$6^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$ olduğundan $5 \mid 7^n - 1$ olmalıdır.

$7^n \equiv ? (\mathrm{mod}\, 5)$ denkliğini araştıralım. $7^1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5)$, $7^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 5)$, $7^3 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 5)$, $7^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$ olduğundan $7^n - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$ olması için $n = 4k$ olmalıdır. O halde, *n* bir çift tamsayı olmak zorundadır.

Bu sonucu $6^n - 1$ sayısının 7'ye bölünmesinde kullanalım. $6^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ ve $6^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ olacağından $7 \mid 6^n - 1$ olur. Fakat 7, $7^n - 1$ sayısını asla bölmeyeceğinden istenen şekilde *n* sayısı yoktur.

Ek-8. Yarı Yapılandırılmış Görüşüme Formu

- ✓ Çözüm sürecinde neler yaptığınızı açıklayınız.
- ✓ Çözümünüzün doğruluğunu tartışınız.
- ✓ Çözümünüzün sizce tam veya eksik yönleri nelerdir?
- ✓ Çözüm sürecinde yaşadığınız sıkıntılar oldu mu? Nelerdir?
- ✓ Verilen örnek çözümü inceleyip anlatınız.
- ✓ Kendi çözümünüzü ve size verilen örnek çözüm ile karşılaştırınız.

GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR...