GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

GÖRME ENGELLİ ÖĞRENCİLERİN CEBİRSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ: ÖĞRENME YOL HARİTALARI

Fatma Nur Aktaş

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK, 2020

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

YAZARIN

Adı : Fatma Nur

Soyadı : Aktaş

Bölümü : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

İmza :

Teslim tarih :

TEZİN

Türkçe Adı : Görme Engelli Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi: Öğrenme Yol Haritaları

İngilizce Adı : Examination of Visually Impaired Students' Algebraic Thinking Processes: Learning Trajectories

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazarın Adı Soyadı	:	Fatma Nur Aktaş
İmza	:	…………………

JÜRİ ONAY SAYFASI

Fatma Nur Aktaş tarafından hazırlanan "Görme Engelli Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi: Öğrenme Yol Haritaları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı' nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ziya ARGÜN
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ....

Başkan: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ....

Üye: Doç. Dr. İffet Elif YETKİN ÖZDEMİR
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi ....

Üye: Doç. Dr. Pınar ŞAFAK
Görme Engelliler Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mesture KAYHAN ALTAY
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi ....

Tez Savunma Tarihi: 16/01/2020

Bu tezin Matematik Eğitimi Anabilim Dalı' nda Doktora tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Selma YEL
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü ....

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim süresince bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana rehberlik yapan, tez sürecinin her aşamasında sabırla destek olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Ziya ARGÜN' e, fikirlerini ve önerilerini paylaşarak ilham veren hocam Prof. Dr. Ahmet ARIKAN' a, tez izleme komitesinde yer alarak çalışmamın şekillenmesinde belirleyici katkılar sunan Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR' e ve Doç. Dr. Pınar ŞAFAK' a, tez çalışmamın konusuna karar vermemde desteğini ve bilgilerini esirgemeyen Prof. Dr. Mustafa SÖZBİLİR' e, çalışmamın ilerlemesine katkı sunan ODED, Mitat Enç Görme Engelliler Ortaokulu, Göreneller Görme Engelliler Ortakulu, Gören Kalpler Özel Eğitim Merkezi öğretmenlerine, öğrencilerine ve araştırmamım katılımcılarına, sağladığı burs desteği için TÜBİTAK' a, destekleri ve özverileri ile beni yalnız bırakmayan ve varlıkları ile bana her zaman güç veren sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

GÖRME ENGELLİ ÖĞRENCİLERİN CEBİRSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ: ÖĞRENME YOL HARİTALARI

(Doktora Tezi)

Fatma Nur Aktaş

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak, 2020

ÖZ

Eğitimde fırsat eşitliği ilkesi doğrultusunda her bir bireyin ihtiyaçlarını ve farklılıklarını dikkate alan eğitim ortamlarının tasarlanması eğitim sisteminin amaçlarındandır. Soyut kavramlar, görsel ve sembolik temsiller içeren matematik, görme engelli bireyler için özel eğitim fırsatlarının sunulması gereken alanların başında gelmektedir. Diğer taraftan, görme engelli bireylerin cebirsel kavramları öğrenme süreçlerini, kavrayışlarını ve somut materyallerin öğrenci düşünmelerindeki rolünü inceleyen araştırmaların sınırlı olması, görme engelli bireyler için tasarlanacak bireyselleştirilmiş eğitim programlarının ve destek eğitim araçlarının etkililiğini kısıtlamaktadır. Görme engelli öğrenciler için eğitim uygulamaları tasarlanmasında, bir çatı programın olmaması da öğretmenlere rehber olacak bir çalışmaya ihtiyaç olduğunu işaret etmektedir. Bu çalışmada, görme engelli öğrencilerin temel cebir kavramlarından eşleme, ilişkilendirme ve temsil türleri kavramlarına ilişkin cebirsel düşünme süreçlerinin öğrenme yol haritaları bağlamında incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaca ulaşmak için araştırma iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada, görme engelli bireylerin genelde eğitimdeki, özelde matematik eğitimindeki (bilhassa cebir kavramlarına ilişkin) uygulamalara dair ihtiyaçları, sorunları ve öğretim uygulamalarındaki tercihleri incelenmiş ve böylece ikinci aşamada da küme, doğru, doğru parçası, sayı doğrusu, koordinat sistemi, değişken, iki kümenin elemanları arasında eşleme ve ilişki kurma, grafik temsili kavramlarına dair elde edilen tahmini öğrenme yol haritasına göre tasarlanan öğretim oturumları yoluyla, biri 9. sınıf ve diğeri 10. sınıf olan 2 doğuştan görme engelli öğrencinin öğrenme yol haritaları ortaya çıkarılmıştır.

Araştırmanın durum çalışması deseninde tasarlanan ilk aşamasında, katılımcı 7 görme engelli birey amaçlı, ölçüt, kartopu ve maksimum çeşitlilik örnekleme ve öğretim deneyi için 2 katılımcı ise amaçlı ve ölçüt örnekleme ile belirlenmiştir. İhtiyaç analizi için, her bir katılımcı ile iki oturumda gerçekleştirilen ve kamera kaydına alınan görüşmeler yoluyla elde edilen veriler, içerik analizi metoduyla analiz edilmiştir. Araştırmanın ikinci aşaması olan öğretim oturumlarında ise, tasarlanan tahmini öğrenme yol haritasına dair veri sağlaması için kamera kaydına alınan klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretim oturumlarında uygulanmak üzere tasarlanan altı etkinlik için önce pilot görüşmeler yapılmış, bu görüşmelere göre bu etkinlikler tekrar düzenlenmiş ve ardından katılımcılar ile öğretim deneyi yürütülmüştür. Her öğretim oturumundan sonra gerçekleştirilen süregelen analizler ile öğrenme yol haritaları incelenmiş, bu analizler doğrultusunda bir sonraki öğretim oturumu için tasarlanan etkinlik düzenlenmiş ve gerekli hedefler için ek öğretim oturumları tasarlanmıştır. Öğretim oturumları süresince öğretim hedefleri, öğretim etkinlikleri ve destek eğitim araçları, öğrenci düşünmeleri, kavrayışları ve anlamaları üzerine gerçekleştirilen süregelen analizler, görme engelli öğrencilerin öğrenme yol haritalarını ortaya çıkaran geçmişe dönük analizlerde rol almıştır.

Bulgularda görme engelli bireyler için not tutma güçlüğü, yazılı materyal eksikliği, Latin ve Braille alfabede matematiksel dil kullanımının farklılık arz etmesi ve somut materyal eksikliği gibi başlıca ihtiyaçlar ve sorunlar belirlenmiştir. Cebir alt öğrenme alanı özelinde ise fonksiyon kavramı çerçevesinde, görme engelli bireylerin değişken, bilinmeyen, cebirsel ve grafik temsil türleri, eşitlik, koordinat sistemi gibi temel cebir kavramlarına dair bilgi eksiklikleri ve yanılgıları ortaya çıkmıştır. Görme engelli öğrencilerin küme, eşleme ve ilişki kurma, doğru ve doğru parçası, sayı doğrusu, koordinat sitemi ve grafik, değişken ve cebirsel temsil kavramlarına dair öğrenme yol haritaları incelendiğinde ise; (i) katılımcıların önbilgilerine, (ii) kullanılan destek eğitim araçlarına ve (iii) matematiksel sembol ve temsil kullanımına göre hedef sıralamalarında farklılıklar tespit edilmiştir. Nihayetinde ortaya konulan öğrenme yol haritalarının, görme engelli bireyler için destek eğitim araçları ile zenginleştirilmiş bireyselleştirilmiş eğitim programlarının tasarlanmasında rehber niteliği taşıdığı düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Görme engelli öğrenci, cebirsel düşünme, temel cebir kavramları, grafik temsili, tahmini öğrenme yol haritası, öğretim deneyi

Sayfa Adedi : 624

Danışman : Prof. Dr. Ziya Argün

EXAMINATION OF STUDENTS WITH VISUAL IMPAIRMENTS ALGEBRAIC THINKING PROCESSES: LEARNING TRAJECTORIES

(Ph. D Thesis)

Fatma Nur Aktaş

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

January, 2020

ABSTRACT

According to the principle of equal opportunity in education, designing educational environments taking into account the needs and differences of each individual is one of the objectives of the education system. Mathematics, is one of the areas where special education opportunities should be provided for individuals with visual impairments. On the other hand, the limited number of studies examining the learning processes insights and the role of concrete materials in students' thinking on algebraic concepts of individuals with visual impairments restricts the effectiveness of individualized education programs and support training tools to be designed for individuals with visual impairments. The lack of a roofing program in the design of educational activities for students with visual impairments indicates that there is a need for a study to guide teachers. In this study, it is aimed to examine the algebraic thinking processes of students with visual impairments related to the concepts of relation, function and types of representation of basic algebraic concepts in the context of learning trajectories. To achieve this aim, the research was carried out in two stages. In the first stage, it is examined the needs, matters, issues, problems and preferences of the visually impaired individuals in terms of applications generally in education and particularly in mathematics education (especially in the basic algebraic concepts). Thus in the second stage, learning trajectories of two innate students with visual impairments at 9th and 10th grades were revealed through the teaching sessions which designed according to the hypothetical learning trajectories obtained from the concepts such as set, line, line segment, number line, coordinate system, variable, function and correspondence between the elements of the two sets, graph representation of the concepts. The first stage of the study, which was designed as a case study, 7 visually impaired participants were determined through the way snowball and maximum diversity sampling; the two participants for the teaching experiment were determined by purposeful and sampling criterions. For the needs analysis, the data obtained through the interviews with each participant in two sessions and videotaped were analyzed by content analysis method. In the second stage which consists of teaching sessions, the clinical interviews which were recorded with a camera fulfilled in order to provide data for the hypothetical learning trajectory. Pilot interviews were conducted for the six activities designed to be implemented in the teaching sessions, these activities were organized according to these interviews and then, a teaching experiment was carried out with the participants. Learning trajectories were examined through on-going analyses after each teaching session, therefore, the activity was organized for the next teaching session and additional teaching sessions were designed for the required learning outcomes. On-going analyses performed throughout teaching sessions on the teaching objectives, teaching activities and supportive educational tools, student thinkings, comprehendings and understandings played a role in the retrospective analysis disclosing the learning trajectories of the students with visual impairments.

In these analysises, the major needs, matters and problems were identified for individuals with visual impairments such as difficulty in taking notes, lack of written material, differences in the use of mathematical language in Latin and Braille alphabet, and lack of concrete material. Within the framework of the concept of function in the specific area of algebra sub-learning domain, lack of information and misconceptions about basic algebraic concepts such as variable, unknown, algebraic and graph representation types, equality and coordinate system emerged. When the learning trajectories of the visually impaired students about the concepts such as set, mapping and relationship, line and line segment, number line, coordinate system and graph, variable and algebraic representation were examined; (i) the participants' preliminary knowledge, (ii) the supportive educational tools, and (iii) differences in ordering of learning outcomes according to the use of mathematical symbols and representations were determined. As a result, it is thought that these learning trajectories are guiding in designing individualized education programs enriched with support training tools for individuals with visual impairments.

Key Words : Student with visual impairments, algebraic thinking, basic algebra concepts, graph represation, hypothetical learning trajectory, teaching experiment

Page Number : 624

Supervisor : Prof. Dr. Ziya Argün

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

BEP	Bireyselleştirilmiş Eğitim programı
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Birliği)
OME	Ontario Ministry of Education (Ontario Eğitim Bakanlığı)
RAM	Rehberlik Araştırma Merkezi
TDK	Türk Dil Kurumu

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumuna, amacına, önemine ve tanımlara yer verilecektir.

1.1. Problem Durumu

Eğitim, bireylerin sahip olduğu ve ihtiyaçları doğrultusunda sunulması gereken temel haklardan biridir. Bireylerin bedensel yapısı, güçlü ve zayıf yönleri, beceri, ilgi ve yetenekleri, duygusal ve öğrenme özellikleri birbirinden farklılık arz etmektedir. Eğitim ortamları, bireylerin gereksinimleri ve bireysel farklılıkları dikkate alınarak planlanmalıdır. Nitekim İnsan Hakları Evrensel Beyannamesi' nde her bireyin eğitim hakkına sahip olduğu belirtilmektedir. Türk Milli Eğitim Sistemi' nin genel amaçlarının yanı sıra Çocuk Hakları Sözleşmesi'nde de bu hakkın fırsat eşitliği temeli üzerinde gerçekleştirileceği hükmü yer almaktadır.

Eğitim sistemindeki eğilim özel eğitim gerektiren öğrencilerin, kaynaştırma ortamlarında ve akranları ile fırsat eşitliğine sahip olarak eğitim alma şansı sunulması yönündedir. Türkiye'de de özel eğitime ihtiyaç duyan öğrenciler için farklı eğitim kurumlarında veya görme yetersizliği olmayan akranları ile birlikte kaynaştırma sınıflarının yer aldığı okullarda ek imkanlar sunulsa da bu öğrencilerin ihtiyaçlarını karşılayacak uygun öğretim programı, ders materyali ve değerlendirme süreçleri yer almamaktadır (Zorluoğlu & Sözbilir, 2017). Özel eğitime ihtiyaç duyan öğrenci gruplarından biri olarak görme engelli bireylerin, ortaöğretim kurumlarında kaynaştırma sınıflarında ve destek odalarında aldıkları eğitimden başka bir seçeneklerinin ve bu kurumlardaki öğretmenlerin özel eğitim verebilmek için yeterli eğitimlerinin olmaması bu grubu daha özel hale getirmektedir.

Görme engelli bireyler nesne, sembol, şekil ve bunlar arasındaki ilişkiler gibi görsel unsurları gözlemleyemediklerinden öğrenme deneyimleri eksiklikler veya güçlükler barındırabilmektedir (Groenveld, 1993). Bu durumun yansımaları öğrenme alanlarında akademik başarı ve daha temel olarak kavram gelişiminde gözlenmektedir (Carney, Engbretson, Scammell & Sheppard, 2003). Görme yetersizliğinden etkilenmiş öğrencilerin akranlarına göre daha fazla akademik başarısızlık sergileme ihtimalinin olduğu bilinmektedir. Ayrıca görme yetersizlik seviyesi yükseldikçe öğrencilerin başarı seviyelerinin düştüğü ve matematikte elde edilen öğrenme çıktılarının azaldığı belirlenmiştir (Zebehazy, Zigmond & Zimmerman, 2012).

Ortaöğretim programlarında ve dünya standartlarında matematiksel bilginin ve düşünme becerilerinin günlük yaşam fonksiyonlarının edinilmesine katkısı vurgulanmaktadır (MEB, 2013; 2017; 2018; Amerikan Matematik Öğretmenler Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]), 2000). Matematiği anlayan, matematiksel düşünme becerilerine sahip olan ve matematiğin günlük yaşamdaki önemini takdir edebilen bireyler, yaşam becerilerini ve kalitelerini artırmak adına daha fazla fırsat ve seçeneklere sahip olmaktadır. Ayrıca matematiksel dil cebirsel ve diğer gösterimlerin yazımı, grafikler, diyagramlar, vb. gibi görsel ve soyut kavramlar ile var olmaktadır (Edwards, Stevens & Pitt, 1995). Dokunma duyusu gelişmiş olan görme engelli bireyler için soyut kavramları nasıl öğrendikleri, düşünme becerilerinin nasıl geliştiği dikkat çeken bir araştırma alanıdır (Stevens, Edwards & Harling, 1997). Dahası özel eğitime ihtiyaç duyan bu öğrenciler için öğretim ortamları tasarlamaya ilişkin çalışmalara ihtiyaç vardır (Buhagiar & Tanti, 2013).

Kavramlara ait dezavantajlar eğitim başarılarını ve fırsatlarını sınırlandırmakla kalmaz, aynı zamanda kariyer seçimlerini sınırlama etkisine de sahip olduğu bilinmektedir. Özellikle grafiklerin ve diğer öğretim araçlarının kullanılmasıyla elde edilebilecek matematik becerileri olmadan, kör birey, bilimsel ve mühendislik alanlarında kariyer yapma fırsatlarında ciddi olarak sınırlandırılmış olabilir (Van Scoy, McLaughlin & Fullmer, 2005). Öğrenenin anlayışı, kavrayışı ve düşünme süreçleri doğrudan gözlemlenemese de öğrenme yol haritaları, gözlemlenebilecek temel hedefleri, yapıları, becerileri ve davranışları tanımlamayı ve ortaya koymayı amaçlamaktadır. Öğrenme yol haritaları, her seviyede öğretim programı adına öğretmenleri bilgilendirmek (Barret vd., 2012; Clements, Wilson & Sarama, 2004; Simon, 2006a), hedefleri ve öğrenme sürecini değerlendirmek (Battista, 2004; Confrey, Maloney & Corley, 2014) ve öğretmen eğitimi için (Mojica, 2010; Simon, 2006b) etkili bir yol olarak kabul edilmektedir. Böylece öğrenme yol haritaları ile elde edilen öğrenci düşünmeleri hakkında bilinenler de kullanılarak, öğretmenler öğrencilerin gelişimsel seviyelerine dayalı bilgiler elde etmektedir (Wilson, Sztajn, Edgington & Myers, 2015). Confrey, Maloney, Nguyen, Wilson ve Mojica (2008) ise öğrenme yol haritaları ile öğrenci düşüncelerinin zamanla nasıl geliştiğini belirlemenin mümkün olduğunu vurgulamaktadır. Böylece öğrenme yol haritalarının; program geliştirme (Wilson, 2009), materyal tasarlama ve öğrenme ortamlarının etkililiğini artırmak için önemli bir çerçeve sağladığı ileri sürülmektedir.

Simon ve Tzur (2004) pek çok kavramın öğretilmesi, anlaşılması ve algılanması için hala alan yazında boşlukların olduğunu vurgulamıştır. Daro, Mosher ve Corcoran' a (2011, s.56) göre matematikte öğrenme yol haritalarını anlamamızda büyük boşlukların yer aldığı öğrenme alanından biri cebirdir. Cebir, cebirsel düşünme ve muhakeme edebilme becerilerinin bir ön koşulu olduğundan günlük hayatta karşılaştığımız güçlüklere karşı çözüm yolları bulmamıza yarayan bir araç olarak düşünülmektedir (Kieran,1992). Kaput' a (1994) göre cebirsel düşünme, çeşitli temsillerle modellenen problemlerin ve örüntülerin genellendiğinde matematiksel süreçlerin tanımlanmasında kullanılmaktadır (Driscoll, 1999;

Herbert & Brown, 1997; NCTM, 2000). Buna dayanarak cebirsel düşünme stratejileri, problem çözmeyi geliştirmesi ve başarıyı arttırmasının yanı sıra günlük yaşamdaki problemler ile baş etmeyi de kolaylaştırmaktadır. Linn, Pulos ve Gans'a (1981) göre günlük hayatta karşılaşılan problemlerin çözümü sıklıkla cebirsel düşünme stratejilerini gerektirmektedir. Literatüre bakıldığında cebirsel düşünme için gereklilikler arasında ilişkisel düşünme becerisi yer almaktadır (Valanides, 1996). Kısaca günlük yaşamla ilişkilendirme, okul matematiği ve dış dünya arasındaki ilişkilendirme olarak tanımlanabilmektedir (Mosvold, 2008). Bu nedenlere dayanarak öğrencilerin cebirde kullanılan temel kavramları, sembolleri, ifadeleri iyi anlaması ve kullanabilmesi gerekmektedir (Kieran,1992).

Kieran (2004) cebirsel düşünme ve muhakemenin temel odaklarından biri olarak nicelikler arası ilişkiyi ortaya koyma sürecini fonksiyon kavramına odaklı (foksiyonel) düşünme olarak tanımlamaktadır. Beatty ve Bruce (2012) ise fonksiyon kavramını baz alarak düşünme sürecini, başka bir ifade ile fonksiyon kavramının uygulamaya yansımasını, sayılardan oluşan iki veri kümesi arasındaki ilişkinin farkına varma ve değişimleri belirleme süreci olarak ele almaktadır. Fonksiyon kavramı da bu değişimi açıklamanın bir yolu olarak karşımıza çıkmaktadır. Öğrenenlerde cebirsel düşünme, örüntüleri genelleme veya ters işlemleri kullanma becerileri cebirsel süreçleri ile geliştirilebilmektedir (Ontario Eğitim Bakanlığı [Ontario Ministry of Education, OME], 2013). Ayrıca cebirsel düşünme becerisinin kazanımı için fonksiyon kavramının kazanılmasına ilişkin öğretim etkinlikleri önem arz etmektedir.

Öğrencilerin cebir öğrenmede yaşadıkları engeller veya zorluklardan biri de değişken kavramının yapısını anlamlandırma olarak karşımıza çıkmaktadır (Dede & Argün, 2003; Kieran, 1989; Akgün, 2006). Öğretim programlarında değişken kavramı, cebir öğrenme alanında sıklıkla cebirsel ifadeler, denklem çözme ve eşitlik gibi alt öğrenme alanları ile birlikte ele alınmaktadır (Kieran, 1989; MEB, 2013). Değişken kavramı, karmaşık ve öğrencilerin cebirdeki başarısını engelleyen bir kavram olarak ileri sürülmektedir. Bu nedenle öğrencilerin temel işlemlerin ötesine geçmesi isteniyorsa diğer cebirsel kavramlardan önce değişken kavramını anlamaları gerekmektedir. Bu fikre dayanarak fonksiyon kavramı için ön bilgi olarak değişken, eşitlik ve bir uygulama alanı olarak grafik kavramlarının cebir öğrenmede önem arz ettiği söylenebilir. Fonksiyon kavramı ve dolayısı ile alt kavramlar olarak kümeler arasında eşleme ve ilişkilendirme eylemleri grafik ile temsilin yer aldığı diğer önemli eylemler arasında yer almaktadır. Bu tür eylemlere dayanan değişkenleri belirleme, değişkenler arasında ilişki kurma ve bu ilişkiyi temsil etme öğrenme çıktıları olarak karşımıza çıkmaktadır. Grafikle temsil etme becerisinin edinilmesi ise yalnızca bahsi geçen kavramların öğrenilmesine değil, ayrıca sayı doğrusu ve koordinat sistemi kavramlarını da ön bilgi olarak gerektirmektedir.

Yapılan araştırmalarda görme engelli öğrencilerin en çok fen, matematik ve yeni bir dil öğrenmede güçlük yaşadıkları ve bu alanlarda özellikle şekil, resim, grafik gibi görsel temsilleri içeren kavramları algılamada zorlandıkları gözlenmiştir (Okcu, Yazıcı & Sözbilir, 2016). Bu sonuca dayanarak matematiğin doğasından kaynaklanan soyut kavramları ve bir dil olarak işlevselliği düşünüldüğünde görme engelli bireyler için önemli derecede sınırlıklar ve güçlükler barındırıdığını söyelebiliriz. Cowan (2011:17) hazırladığı tez çalışmasında görme engelli öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl yapılandırdığına ilişkin çok fazla çalışmanın yer almadığını belirtmiştir. Dahası literatür incelendiğinde cebir öğrenme süreçlerinde görme engelli bireyler ile yapılan araştırmaların öğrencilerin anlamalarının nasıl olduğuna değil, cebirsel işlemlerdeki başarıya ya da engelli bireylerin kullanımına sunulan materyallerin işlevselliğine odaklandığı belirlenmiştir (Bülbül, Garip, Cansu & Demirtaş, 2012; Cansu Kurt, 2015; Cowan, 2011; Horzum, 2013). Ayrıca Türkiye' de yapılan matematik eğitimindeki araştırmalar eğitim ortamları için ihtiyaç belirleme, materyal tasarlama, temel matematiksel kavramlar için strateji değerlendirme veya bazı geometrik kavramlar için algı ve kavram imajlarını belirleme hedefleri ile karşımıza çıkmaktadır (Altunay-Arslantekin & Şener-Akın, 2017; Arslan, 2018; Bülbül, Cansu, Demirtaş & Garip, 2012; Horzum, 2013; 2016; Horzum & Arıkan, 2019; Horzum & Bülbül, 2017; Küçüközyiğit & Özdemir, 2017; Özdemir & Küpcü, 2010; Sözbilir vd., 2015; Şafak, 2005; Şafak, 2007; Tuncer, 2009; Zorluoğlu & Sözbilir, 2017).

Öğrencilerin edinmesini beklediğimiz cebirsel düşünme becerisi ve görme engelli bireyler ile bu amacı gerçekleştirme sürecine ilişkin literatürdeki belirsizlikler göz önüne alındığında, ihtiyaçların belirlenmesi gerekliliği doğmaktadır. İhtiyaç analizi mevcut durum ile olması istenen uygun durum arasındaki giderilebilecek eksikliklerin belirlenmesi (Demirel, 2009) olarak düşünüldüğünde, öğrenmenin etkili olması ve zengin çıktılar elde edilebilmesi için öncelikle öğrencilerin öğrenmesini etkileyecek değişkenlerin ve ihtiyaçların belirlenmesi gerekmektedir (Kılıç, Aydın, Ökmen & Şahin, 2019). Eğitim ve öğretim uygulamalarında istenilen hedeflere ulaşılması ve uygulamalarda sürekliliğin sağlanması için öncelikle uygulamadaki sorunların ve ihtiyaçların tespitine gereksinim vardır. Görme engelli öğrencilerin eğitim öğretim uygulamalarına ilişkin mevcut durumun ve istenilen durumla arasındaki farkın tespit edilmesi etkili öğretim uygulamaları tasarlanmasında oldukça önemli olduğu gözükmektedir. Çünkü görme yetersizliği olan bireylerin görme yetersizlik dereceleri ve görme yetersizliklerine göre öğretim teknikleri farklılık göstermektedir (Dick & Kubiak, 1997).

Yukarıda yer alan gerekçelere dayanarak görme engelli öğrencilerin öğrenme yol haritaları ile küme, eşleme, ilişkilendirme ve koordinat sisteminde grafik temsili kavramları aracılığıyla cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi ve cebir öğrenme alanında yer alan temel kavramları (değişken, bilinmeyen, eşitlik ve fonksiyon) nasıl yapılandırdıklarının belirlenmesi önemli bir araştırma problemi olarak görülmektedir.

Bu araştırmada; *(i)* cebir kavramlarının anlaşılmasının neden görme engelli öğrenciler için zor veya daha karmaşık olduğunu, *(ii)* onların cebirsel düşünme süreçlerini, *(iii)* cebirsel kavramları algılama, kavrama ve anlama becerilerini incelemek amacıyla temel cebir kavramlarına odaklanılmıştır. Bunun için mevcut durumu temel bir çerçeve içinde sunacağı düşünülen cebirin temel yapı taşları olan değişken, bilinmeyen, eşitlik ve fonksiyon kavramları (Li, 2006) ele alınmıştır. Bu kavramlar ve alt kavramlar için görme engelli bireylerin ihtiyaçlarını ve sorunlarını oluşturan cebir kavramlarına dair öğrenme yol haritalarını ortaya çıkaracak öğretim deneyi tasarlanması uygun görülmüştür. Böylece matematiğin hiyerarşik yapısı dikkate alındığında cebir kavramları için görme engelli öğrencilerin öğrenme yol haritalarının ortaya çıkarılmasının ve böylece ihtiyaçlarına uygun bireyselleştirilmiş eğitim programlarının ve destek eğitim araçlarının tasarlanmasının mümkün olacağı düşünülmektedir.

1.2. Araştırma Problemi

Bu araştırmada iki ana probleme cevap aranacaktır:

i. Görme engelli bireylerin genelde eğitimde, özelde matematik eğitiminde ve kavramsal olarak cebir alt öğrenme alanında (değişken, bilinmeyen, eşitlik ve fonksiyon kavramları için) ihtiyaçları, sorunları ve mevcut eğitim uygulamaları nelerdir?

ii. Görme engelli 9-10. sınıf öğrencilerinin temel cebir kavramlarından eşleme, ilişkilendirme ve temsil türleri kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritaları ve cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?

    Bu problemde yer alan kavramların hiyerarşik yapısından kaynaklanan aşağıdaki alt problemlere cevap aramak gerekmektedir:

    - Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin küme tanımına ve temsil türlerine, altküme ve evrensel küme kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritaları ve cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?
    - Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin doğru, doğru parçası ve sayı doğrusu kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritaları ve cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?
    - Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin koordinat sistemi ve grafik kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritaları ve cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?

- Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin değişken kavramına ilişkin öğrenme yol haritaları ve cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada görme engelli ortaöğretim öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinde öğrenme yol haritalarının incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu genel amaç doğrultusunda aşağıdaki alt amaçlar yer almaktadır:

- Görme engelli bireylerin genelde eğitim ve özelde matematik eğitimi uygulamalarındaki sorunlarını, ihtiyaçlarını ve öğrenme ortamlarındaki mevcut uygulamaları belirlemek.
- Görme engelli bireylerin cebir alt öğrenme alanında yer alan çeşitli kavramların (eşitlik, değişken, bilinmeyen ve fonksiyon) öğretim uygulamalarına ilişkin sorunlarını, ihtiyaçlarını ve bu ihtiyaçlara göre tahmini öğrenme yol haritasını belirlemek.
- Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin küme tanımına ve temsil türlerine, altküme ve evrensel küme kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritalarını belirlemek.
- Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin eşleme, ilişkilendirme ve temsil türleri kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritalarını belirlemek.
- Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin doğru, doğru parçası ve sayı doğrusu kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritalarını belirlemek.
- Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin koordinat sistemi ve grafik kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritalarını belirlemek.
- Görme engelli ortaöğretim 9-10. sınıf öğrencilerin değişken kavramına ilişkin öğrenme yol haritalarını belirlemek.

1.4. Araştırmanın Önemi

Eğitimde demokratik olma esasına dayanan fırsat eşitliği ilkesi özel eğitime ihtiyaç duyan öğrencilerin akranları ile eğitim almalarına dikkat çekmektedir. Bireysel farklılıklara odaklanan eğitim sisteminde özel eğitime ihtiyaç duyan bireylerin, bedensel, zihinsel, duygusal ve sosyal özellikleri yönünden akranlarından farklı gereksinimleri vardır. Bu gereksinimlerin karşılandığı ve akranları ile fırsat eşitliğine sahip oldukları ortamlar kaynaştırma eğitimi ile mümkün olmaktadır. Ülkemizde görme engelli öğrencilerin düzeyine göre görme engelliler okulunda eğitim almaları veya kaynaştırma okullarında eğitim hayatlarına devam etmeleri mümkün olmaktadır. Görme engelliler okullarında fen ve matematik gibi alan bilgisi derslerine branş öğretmenlerinin girmesi gerekmektedir. Ancak hem bu öğretmenlerin hem de kaynaştırma okularındaki branş öğretmenlerinin özel eğitim gerektiren öğrencinin ihtiyaçlarına veya güçlü yönlerine göre ders tasarlama bilgisi eksik kalmaktadır. Özel eğitim öğretmenleri ise matematik alan bilgisi ve alan eğitim bilgisinden yoksundur (Öğretmen Yetiştirme Lisans Programları, 2018). Ayrıca kabartma yazı kullanan görme engelli öğrenciler için matematik kodlarını bilen alan öğretmenleri ile çalışma imkanı olması kaynaştırma uygulamalarının en önemli parçasını oluşturmaktadır (Karshmer, Gupta & Pontelli, 2007; McCarthy, 2005).

Türkiye İstatistik Kurumu (2010) verilerine göre Türkiye' de görme engelli öğrenci sayısının toplam engelli öğrenci sayısına oranı %8,4 olarak tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin ise yalnızca %14,6' sı ortaöğretim ve daha üstü eğitimlerine devam edebilmektedir. Milli Eğitim Bakanlığı (2017c) istatistiklerinde ise görme engelli öğrencilerin Özel Eğitim Merkezi III. Kademede Türkiye geneli var olan 2 okulda eğitim görme yetersizliğine sahip olmayan öğrenci sayısı 39 iken, ortaöğretim okullarında yaklaşık bin görme engelli öğrenci kaynaştırma eğitimi almaktadır. Bu durum görme engelli öğrencilerin yeterli eğitim düzeyine sahip olmayan kişi ve kurumların hazırladığı Bireyselleştirilmiş Eğitim Programları [BEP] ile kaynaştırma eğitimi aldıkları gerçeğini ortaya çıkarmaktadır. Halbuki ihtiyaç duyulan yöntem ve materyallerin farklı olması, uygun eğitim ortamları sunulduğunda görme engeli öğrencilerin de görme yetersizliğine sahip olmayan akranları gibi, matematik öğrenmesine engel teşkil etmemelidir. Fakat kullanılan materyallerin sadece konuşan hesap makineleri, abaküs, küptaş ve daha kullanışlı olan iğneli sayfa materyallerinden ibaret olmaması gerekir. Uygulanılan yöntemler için avuç içine çizmek, denklemleri tek satırlı hale getirip (Brazier, Parry & Fischbach, 2000) onları kabartmalı kâğıtlara basmak (Thompson, 2005) veya her eğitim kurumunda kullanılma imkanı olmayan bilgisayar destekli programlardan yararlanma gibi yöntemlerden daha fazlasına ihtiyaç vardır. Söz konusu ihtiyaçlar dikkate alındığında görme engelli öğrenciler için tasarlanacak öğretim ortamlarında öğretim amaçlarını ortaya koyma, bu amaçlara ulaşmak için seçilecek bir dizi etkinlik ve materyal tasarlamak gerekmektedir. Bunun için görme engelli öğrencilerin öğrenme yol haritalarını yordamaya ihtiyaç duyulmaktadır. Tahmini öğrenme yol haritaları öğrenenlerin düşünme ve öğrenmelerine dayalı olarak öğretmek için matematik bilgisinin ve öğrenme amaçlarının belirlemesine imkan sağlamaktadır (Bardsley, 2006). Görme engelli öğrencilerin temel matematik kavramları ve işlemleri hakkında yeterli bilgiye sahip olmadan öğrencilerin anlamlandırabildiği kavramları, hatalarını ya da yanılgılarını tahmin etmek mümkün olmamaktadır. Ayrıca öğretmenin uygun öğretim stratejileri belirlemesi veya destek eğitim araçları tasarlaması ve/veya uygulaması da söz konusu sürecin keşfine bağlıdır. Öğrencinin bireysel ihtiyaçlarına cevap vermeyen veya tümüyle kavrayışın olmadığı kavram öğrenme süreçlerin sonucunda öğrencinin hata ve yanılgılara sahip olması ve dolayısı ile başarısızlığın ortaya çıkması kaçınılmazdır. Nihayetinde tahmini öğrenme yol haritalarını elde etmek için tasarlanacak uygulamaları belirlemede yordayıcı fikirlere sahip olmak için ihtiyaçlar, sorunlar ve mevcut durum hakkında bilgi sahibi olmakta yarar vardır.

İhtiyaç belirleme, mevcut durumu görmenin yanında beklentileri ve bu beklentileri oluşturmada yapılması gerekenleri ortaya çıkarmayı mümkün kılmaktadır. Eğitim uygulamalarında ya da programlarında ihtiyaçların ortaya konulması değişime yön vermeyi ve bu süreçte daha iyi kararlar almayı sağlamaktadır (Kılıç, Aydın, Ökmen & Şahin, 2019:14). Öğrenme yol haritalarının tespiti daha uygulanabilir ve gelişmiş bir öğretim programı tasarlamaya zemin oluşturduğu göz önüne alındığında, ihtiyaç belirleme çalışmaları ile başlamak bir gerekliliktir. Nitekim bireyleri tanımanın ve onların istek, eksiklik veya gereksinim duyduğu değişkenleri belirlemenin ilk adımı ihtiyaçların analiz edilmesidir. Alan yazında da özel eğitime ihtiyacı olan bireyler için tasarlanacak eğitim programları ve özelde eğitim uygulamaları için ihtiyaç belirleme çalışmalarının gerekliliği vurgulanmaktadır (Hunt, Hiscox, Morimitsu & Paulsoni, 1982, akt. Kılıç, Aydın, Ökmen & Şahin, 2019:20). Dahası görme engelli birey ile gerçekleştirilen çalışmalarda öğrencinin engel düzeyi ve yapabildiği veya tersine güçlük yaşadığı uygulamaları belirlemenin, öğrencinin tercih edeceği stratejilerin farkında olmak için yararlı olacağı vurgulanmaktadır (Spindler, 2006). Böylece görme engelli bireyler bağlamında onların önceliklerini, taleplerini, gereksinimlerini ve bu süreçte mevcut durumu belirlemek öğrenme yol haritalarında hedefleri, hedeflere ulaşmayı engelleyecek durumları ve bu engeller için olası önemleri belirlemede bir araçtır. Diğer önemli bir nokta ise tahmini öğrenme yol haritası oluşturmak için öğretmenin/araştırmacının bir tahmini olmalı ve bunun için öğretim oturumlarının gerçekleştirileceği grubu iyi tanımalıdır (Simon & Tzur, 2004). Öğretim deneyinin gerçekleştirildiği oturumlar için hedeflerin, bu hedeflere ulaşmayı sağlayacak etkinliklerin ve destek eğitim araçlarının tespiti öğretmenin/araştırmacının yordama gücüne bağlıdır. Bu güç ise çalışılacak grubun özellikleri, nitelikleri, ön bilgileri, ihtiyaçları, talepleri ve sorunları hakkında farkındalığa dayanmaktadır. Bu araştırma görme engelli bireylerin eğitim uygulamaları, matematik öğrenme ve cebirsel düşünme süreçleri hakkında detaylı incelemeler üzerine bilgi sunmaktadır. Böylece tasarlanacak öğretim deneyi öncesinde ön bilgi sahibi olmanın yanı sıra tahmini öğrenme yol haritalarının belirlenmesinde yarar sağlamaktadır. Ayrıca ileriki araştırmalara görme engelli bireyler ile eğitim uygulamalarına ilişkin detaylı bilgi sunarak tasarlanacak öğretim ortamları, somut veya teknolojik materyaller, her türlü destek eğitim araçları, bireyselleştirilmiş eğitim programları için kılavuz niteliğinde bir rehber olacağı düşünülmektedir.

Öğretimde ihtiyaç duyulan değişkenler ele alındığında her seviyede öğretim programı için öğretmenleri bilgilendirme (Clement vd., 2004) ve öğrenme sürecini ve çıktılarını değerlendirme (Battista, 2004; Confrey & Maloney, 2010) süreçlerine ilişkin öğrenme yol haritalarının öneminden bahsedilmektedir. Ayrıca, öğrenme yol haritaları ile elde edilen öğrenci düşünmeleri, öğrencilerin gelişimsel seviyelerine uygun öğrenci aktivitelerini betimleme (Wilson, 2009) ve kavram yanılgıları ile öğrenci stratejilerini tahmin edebilme imkanı sunmaktadır (Myers, 2014). Böylece bu araştırmanın, matematik öğrenme sürecinde ilerlemeci bir yol izleyen öğrenci düşünmesini anlamamıza ve öğrenci düşünmesine dayalı gelişmelere uygun etkinlikler tasarlamamıza ve etkili matematik öğrenme ortamları hazırlamamıza katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Buna dayanarak görme engelli öğrencilerin öğrenme yol haritaları ile onların matematiksel ilişkilendirme ve akıl yürütme gelişimini açıklayıcı ve destekleyici materyaller ve etkinlikler tasarlamamız mümkün olacaktır (Sarama & Clements, 2009).

Öğrenme yol haritalarını kullanmak akıl yürütmenin dikey ve yatay entegrasyonunu mümkün kılmaktadır. Başka bir ifade ile öğrenme yol haritaları ilişkilendirme, akıl yürütme ve kavramlar için sınıf seviyeleri arasında ve içinde bütünleştirmeye olanak sağlamaktadır. Bununla birlikte öğrenme yol haritalarını kullanmanın bir diğer avantajı, öğretmenlerin matematiğin farklı içerik zincirlerini bütünleştirmesine yardımcı olmak için bir araç olarak kullanılabilmesidir (Confrey vd., 2008). Literatürde öğrenme yol haritaları, öğretmenlerin kararlarını etkilemek için öğrenci düşünmelerini kullanma (Bardsley, 2006; Mojica, 2010), öğrenci aktivitelerini ve kavramalarını detaylı inceleme (Wilson, 2009; Confrey, 1990), öğrencilerin gelişimsel süreçlerini dikkate alarak aktiviteler seçme (Brown, Sarama & Clements, 2007), öğretmenler için ortak matematiksel dil belirleme (Wilson, 2009) ve öğrencilerin kavram yanılgılarını ortaya çıkarma (Edgington, 2012) amaçlarıyla incelenmiştir (Myers, 2014). Ayrıca öğretim programı, değerlendirme ve standart geliştirme seviyelerinde kullanılarak, öğetmenlerin uygulamalarında yer verebileceği ve öğrenci düşünmelerini anlamak için bir araç olarak ele alınmaktadır (Corcoran vd., 2009). Bu durum öğretmenlerin öğrencilere sınıf düzeyleri gibi değişkenleri göze alarak ne öğretilmesi beklenildiğini anlamalarına yardımcı olmaktadır. Bu araştırmada ise soyut kavramları anlamakta güçlük çeken fakat günlük yaşam becerilerinde matematiksel düşünmeye ihtiyaç duyan görme engelli bireylerin düşünmeleri üzerine öğrenme yol haritaları kullanılarak elde edilecek bilginin öneminden bahsedilmektedir. Böylece elde edilen bulgular ile görme engelli bireylerin matematiksel düşünme becerileri ve süreçlerine ilişkin bilgi edinilmiş, ayrıca bu yolla özelde cebirsel düşünme süreçleri ile cebir kavramlarına ilişkin genel bir çerçeve elde edilmiş olunacaktır. Buna dayanarak görme engelli bireylerin cebir öğrenme ve düşünme süreçlerine uygun etkinlikler ve materyaller tasarlamak mümkün olacak ve literatüre görme engelli bireylerin eğitimine ilişkin önemli bir katkı sunulacağı düşünülmektedir.

Cebirsel düşünme sürecinde matematiksel ilişkilendirme becerisi ile anlama, anlam oluşturma, ön öğrenmelerle yeni öğrenmeler arasında bağ kurma ve öğrenmenin etkililiği gibi olumlu sonuçlarının olduğu belirtilmektedir (Ball, Hill & Boss, 2005; Businskas, 2008; Noss & Hoyles, 1996). Bossé (2003) ise matematiksel ilişkilendirme becerisinin öğrencilere matematiksel fikirleri hatırda tutma ve uygulama sürecinde yardımcı olduğunu vurgulamaktadır. Görme engelli öğrencilerin öğrenme sürecinde zihinsel aktiviteler ve hatırda tutma becerilerinin ve ayrıca günlük hayat becerilerinde ilişkisel düşünme becerisinin önemi dikkat çekmektedir (Cahill & McCarthy, 1994, s.31). Böylece kümelerde eşleme ve ilişkileri belirleme becerisinin görme engelli bireylerde gelişimi ve bu sürecin nasıl ilerlediğinin anlaşılması araştırılmaya değer bulunmaktadır. Daha genel perspektifte ele alınacak olursa cebir öğrenme ve cebirsel düşünme süreçleri bireylerin, özelde görme engelli bireylerin matematiksel düşünme süreç becerilerini incelemek literatüre önemli katkı sunacaktır. Böylece görme engelli bireylerin cebir öğrenme süreçleri anlaşılacak ve cebirsel düşünme becerilerinin incelenmesi mümkün olacaktır. Elde edilen bulgular görme engelli bireyler için tasarlanacak olan bireyselleştirilmiş eğitim programları ve destek eğitim materyalleri için ışık tutacağı düşünülmektedir. Ayrıca literatürde yer alan normal gelişim gösteren öğrenciler ile görme engelli bireylerin cebir öğrenme ve cebirsel düşünme süreçleri karşılaştırılmasına imkan sağlanacaktır. Bu karşılaştırma ile kaynaştırma eğitim ortamlarında kullanılabilen eğitim materyalleri, etkinlikler ve dolayısı ile ders planları tasarlanması mümkün olacaktır. Geliştirilen destek eğitim araçları ile verimli kaynaştırma uygulamaları tasarlamanın yanı sıra bütünleştirilmiş eğitim ortamları için önemli adımlar atılmış olacaktır.

Bu araştırmanın önemi sıralanırken matematiğin doğası ve yapısı göz önüne alınmalıdır. Matematiği görme engelliler için erişilebilir kılma sürecinde iki boyutlu kavramlar, uzamsal düşünme, matematiksel dil ve kabartma yazının doğası (tek satırda doğrusal yazım olması, alfabesi, karakterler vb) önemli sınırlılıklar arasındadır (Karshmer, Gupta & Pontelli, 2007). Özellikle karmaşık bir hesaplama sırasında elde edilen işlemlerin adım adım yazılması gerekmektedir. Bu durum görme engelli bireylerin gerçekten matematik için iş ve eğitim kariyerlerinde engellenmesine neden olmaktadır. Pek çok görme engelli birey günlük hayatında nadiren matematiksel işlemlere ihtiyaç duyduğu için bu engeli problem olarak görmemektedir. Ancak matematiğin bilim ve teknolojinin temelini oluşturması, diğer disiplinlerin bileşeni durumunda olması ve eğitim sisteminde zorunlu alanlar arasında yer almasından dolayı eğitim ve kariyer alanında matematikten yoksun olmak önemli bir problem teşkil etmektedir. Bu nedenle görme engelli bireyler erişilebilirlik sorunundan kaynaklı olarak matematik biliminden yoksun kalmaktadır (Edwards, Stevens & Pitt, 1995). Görme engelli öğrencilerle matematik eğitimindeki güçlüklere çözüm önerisi arayan çalışmalarda anlamlı bir ilerleme için öğrencilerin ihtiyaçlarının dikkate alınmasında yarar vardır. Böylece görme engelli öğrencilerin matematiği görselleştirebilmesi, onlar için materyallerin tasarlanması ve uygulanması mümkün olacaktır. Bu sorunları ele alan projelerde genel bir çözüm henüz yer almasa da ilerleme katedilmektedir (Karshmer, Gupta & Pontelli, 2007). Nitekim uygulamada görme engelli bireylerin eğitimi için iki ayrı görüş ile karşılaşmak mümkündür. Bu görüşlerden ilki görme engelli bireylerin soyut ve görsel matematiksel içeriklerden muaf olması iken, diğeri görme engelli bireylerin matematiksel kavramları öğrenme de bilişsel düzeyde eksikliklerinin olmadığını ve yalnızca öğretimde diğer duyulara hitap eden tasarımlara ihtiyaç olduğunu savunmaktadır.

Bu çalışmanın arkasındaki temel varsayım, görme engelli öğrencilerin, görsel olarak sunulan grafikleri kullanamadıkları için geniş bir dizi matematik becerilerini öğrenmede önemli ölçüde dezavantajlı olmalarıdır. Sezgisel olarak, bu makul bir varsayım gibi görünmektedir, çünkü grafikler tipik olarak matematik öğretiminin ayrılmaz bir parçasıdır ve genellikle bir sayfada veya son yıllarda bir bilgisayarda veya hesap makinesi ekranında gösterilmektedir. Ancak, özellikle doğuştan görme engelli olan öğrenciler için bu uygulama doğru olmayabilir. Örneğin, doğuştan görme engelli olan kişilerin, hatta uzun süredir görme engelli olan kişilerin bile, çizgileri, eğrileri, yüzeyleri, açıları ve benzerlerini anlamada oldukça yetkin olmalarını sağlayan başka bilişsel süreçler geliştirmesi söz konusu olabilir. Nitekim Batı Virginia'da bir matematik içeriği standardı olarak ‘kökler, üst ve alt sınırlar, *y*-eksenini kesme, simetri, asimptotlar ve grafiğin davranış özellikleri, maksimum ve minimum noktalar, alan ve aralığın özelliklerini kullanarak polinomların ve rasyonel fonksiyonların grafiklerini araştırmak’ hedefleri karşımıza çıkmaktadır (Van Scoy, McLaughlin & Fullmer, 2005). Türkiye’ de ise daha öncesinde görme engelli öğrenciler matematik öğretim programında yer alan görsel içeriklerden muaf olurken, MEB Özel Eğitim Yönetmeliği’ ndeki (2018) değişiklik ile bu öğrencilerin uygun destek eğitim araçları ile görsel içeriğin bireyselleştirilmiş eğitim programında yer alması uygun bulunmuştur. Yapılan değişikliğe rağmen Yükseköğretime Giriş Sınavı ve benzeri sınavlarda görme engelli bireyler şekil içeren sorulardan muaf tutulmaktadır. Fakat kabul gören görme engelli bireyler görsel içerikleri algılayamaz fikrinin aksine, psikolojik çalışmalar bu bireylerin görsel imgeleri algılamada şaşırtıcı bir beceriye sahip olduklarını ortaya koymuştur (Millar 1985; Haber, Haber, Levin & Hollyfield, 1993). Bu uygulamanın devam etmesi görme engelli bireylerin soyut ya da görsel matematiksel içerikleri nasıl öğrendiğine ve dolayısı ile bilginin nasıl ölçüleceğine ilişkin detaylı bilgiye sahip olunmamasından kaynaklabilir. Dolayısı ile bu çalışmanın özel eğitim yönetmeliğinin gerekliliği doğrultusunda öğreticilere ve ulusal ya da benzeri sınavları hazırlayanlara önemli bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

Agrawal (2004) tarafından programlanmış öğrenme teknikleri üzerine yapılan çalışmada, görme engelli öğrencilerin rastlantısal öğrenme yoluyla geliştirdikleri basit kavramları öğrenmelerine yardımcı olmak için onlara farklılaştırılmış bir programa göre öğretilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Programlanmış talimatların ve öğretim materyali dizilerinin öğrenme hızını en üst düzeye çıkardığını, öğrencinin motivasyonunu arttırdığını ve anlamayı güçlendirdiğini belirtmiştir. Bu sonuç görme engelli öğrencilere öğrenilmesi zaten zor olan matematik kavramların öğretilmesinin çok zor olduğu düşüncesine (Stevens, 1996) karşın, görme engelli öğrencilerin uygun bir şekilde öğretildiğinde matematik öğrenebileceğini göstermiştir. Görme engelli bireyler yetersizlik derecesi, zekâ düzeyi, karakter ve yaşantısı, başka bir yetersizliğin olması gibi değişkenlere göre farklı özelliklere sahip olabilir. Görme yetersizliği olan bireyler az gören ise görme keskinliği aynı kalmasına rağmen tecrübeye dayalı görme işlevi artmış olabilir. Başka bir ihtimal ise bireyler diğer duyularını farklı derecelerde ve sıklıkta kullanmayı öğrenmiş olabilir (Edwards & Stevens, 1994). Bu durum görme yetersizliği olan bireylerde bilişsel yeteneklerinin görme yetersizliğine sahip olmayan akranlarından farklı geliştiğini sergilemektedir. Başka bir ifade ile görme yetersizliğinin bireyin deneyim çeşitliliğini ve aralığını, bilgiye erişme yeteneğini ve çevreyi kontrol etme becerilerini etkilediği belirlenmiştir. Normal gelişim gösteren bireylerde kavram öğreniminde daha ziyade görme duyusuna bağlı deneyimler rol oynarken, görme engelli bireylerde diğer duyulara dayalı deneyimler rol almaktadır. Dolayısı ile bireyin kavram bilgisi görme yetersizliğinin yanında gelişimsel farklılıklara, bireyin deneyimine, kavramın doğasına, yaşantıların çeşitliliğine bağlı farklılıklar içerir. Bu gerekçeye dayanarak araştırmacılar hiç görmeyen bireylerin kavram öğrenme ve hatırlama hafızalarının az gören ve dolayısı ile görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerden daha sınırlı olduğunu ileri sürmektedir (Kızılaslan & Sözbilir, 2018; Zorluoğlu, Sözbilir & Kızılaslan, 2016; Warren, 1984). Piaget (1954) ise erken dönemlerde görme yetersizliği yaşayan çocukların bilişsel ve bedensel gelişimini etkileyebilen duyusal motor gelişimlerinin olumsuz etkilediğini vurgulamaktadır. Warren (1994) bireyi çok boyutlu yaklaşımla bütüncül duyularla incelemenin gerekliliğine odaklanmaktadır. Bu nedenle görme yetersizliğine sahip olmayan, az gören ya da kör bireylerin birbiriyle karşılaştırılması yerine bu gruplardan birinde ayrıntılı açıklamaların araştırılması gerektiğini ileri sürmüştür. Daha erken dönemde görme kaybı yaşayan bireylerin zihinleri 'kara tahta' gibi düşünülebilir (Enç, 2005). Bu araştırmada daha fazla dezavantajlı grup olan doğuştan ve yüksek oranda görme yetersizliğine sahip görme engelli bireyler için öğrenme yol haritaları elde edilmesi amaçlanmaktadır. Böylece görsel algıdan tamamen mahrum kalmış bireylerin soyut ve görsel cebirsel kavramlarına ilişkin düşünmeleri diğer grupların cebirsel düşünme süreçlerine de ışık tutacağı düşünülmektedir. Ayrıca elde edilen tahmini öğrenme yol haritaları görsel algının ötesinde düşünme süreçlerine odaklı elde edilmiş olacağından tasarlanacak bireysel ve genel öğretim proramlarına kaynak teşkil edeceği düşünülmektedir.

Öğretim programlarında ve dünya standartlarında (MEB, 2013; 2017a; 2017b; 2018a; 2018b NCTM, 2000, s.296) 9-12. sınıf düzeyindeki öğrencilerin cebir öğrenme alanı içerisinde ilişkileri ve fonksiyonları anlama, çeşitli temsilleri seçebilme, kullanabilme ve temsiller arası esnek bir şekilde geçiş yapabilme, koordinat sisteminde grafiklerin kritik noktalarını belirleyebilme ve matematiksel ilişkileri açıklayabilmek için sembolik cebiri kullanabilme hedeflerine yer vermektedir. Görme engelli bireyler için bu hedeflerin öğrencinin bireysel özelliklerine uygun olarak tasarlanması gerekliği söz konudur (MEB, 2018c). Bununla birlikte görme engelli bireyin bilgiyi yapılandırma süreçlerinin incelendiği araştırmalar ile onlara eğitim ve öğretim süreci için hazırlanacak destek eğitim araçlarının verimliliği de artacaktır. Görme engelli bireyler için en önemli bilişsel beceri kavramlara dayalı bilişsel süreç gelişimi devam edeceğinden kavram öğrenme olarak kabul edilebilir. Bu nedenle görme engelli bireylerin bilişsel yapıları araştırılırken aynı zamanda bilişsel gelişimleri için gerekli olan etkinlikler ve materyaller tasarlanmalıdır (Kızılaslan & Sözbilir, 2018). Bu araştırmada yukarıdaki gerekliliklere dayanarak 9-10.sınıf doğuştan görme engelli ve en az

%90 görme yetersizliği olan bireylerin cebir kavramlarına (değişken, bilinmeyen, eşitlik, eşleme, ilişkilendirme, koordinat sistemi, grafik gibi) ilişkin cebirsel düşünme süreçleri incelenmiştir. Ayrıca bu bireylerin tahmini öğrenme yol haritaları elde edilerek öğrenme ortamları ve öğretim uygulamaları için öğreticilere ve program tasarlayanlara önemli katkılar sunacağı düşünülmektedir.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırmanın problem durumunun ortaya konulmasında görme engelli bireylerin cebirsel düşünme süreçlerini incelemek hedeflenmiştir. Bu hedefe hizmet eden teorilerden öğrenme yol haritaları (Simon, 1995) kavramların öğrenilmesini, yani bireyin anlama, algılama ve düşünme süreçlerini incelemeyi mümkün kılmaktadır. Bu fikre dayanarak bu araştırmada görme engelli öğrencilerin ileri cebir kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritalarını tespit etmek amaçlanmıştır. Tahmini öğrenme yol haritasını belirlemek için cebir öğrenme alanında yer alan kavramların tanımlanmasında temel kavram olan fonksiyon kavramı (Argün, Arıkan, Bulut & Halıcıoğlu, 2014) ile başlamak esas alınmıştır. Öğrenme yol haritasında yer alan hedefler belirlenirken fonksiyon kavramı için önbilgi diyebileceğimiz alt kavramlar ele alınmıştır. Bu bağlamda fonksiyon kavramının yanı sıra değişken, bilinmeyen, eşitlik, eşitsizlik ve temsil türleri kavramları için mevcut durumu betimlemeyi amaçlayan görüşmeler gerçekleştirilmiştir (bkz Ek 1, Bölüm C). Elde edilen bulgular ortaöğretim düzeyinde görme engelli bireylerin öğrenme yol haritalarında fonksiyon ve temsil türleri kavramlarının alt kavramları diyebileceğimiz küme, eşleme, ilişkilendirme, sayı doğrusu, koordinat sistemi, tablo ve grafik kavramlarına ilişkin hedeflere ihtiyaç olduğunu göstermiştir (bkz Bölüm 4.3). Bu kavramlardan bazılarının tüm özellikleri veya nitelikleri eşleme ve ilişkilendirme kavramlarının inşasında önbilgi olarak kabul edilmediğinden öğretim oturumlarının hedefleri arasında yer verilmemiştir. Bu nedenle küme işlemleri olan kümelerin birleşimi, kesişimi veya tümleyeni gibi kavramlar hedefler arasında yer almamıştır. Tez sürecinin kısıtlı zaman dilimi göz önüne alındığında belirlenen hedefler ışığında öğrenme yol haritaları elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla araştırmanın ilk aşaması olan ihtiyaç ve sorunların belirlenmesi sürecinde elde edilen bulgular ve tahmini öğrenme yol haritası hedefleri ele alınmıştır (bkz. Bölüm 4.3). Bu nedenle kavramlara ilişkin her kazanıma yer verilmemesi araştırmanın bir sınırlılığını oluşturmaktadır. Ancak burada öğrenme yol haritalarının belirlenen kavramların bir örüntü içerisinde ve matematiğin hiyerarşik yapısına dayanan hedefler silsilesinden oluştuğu göz ardı edilmemelidir (Simon & Tzur, 2004). Bu gerekçeye dayanarak bu araştırmada fonksiyon kavramının inşasını sağlayacak eşleme ve ilişkilendirme kavramları üzerine kurulan bir tahmini öğrenme yol haritası elde edildiğini söyleyebiliriz.

1.6. Tanımlar

a. Görme Engelli Birey: Görme engellilik terim anlamı ülkelere veya kuruluşlara göre farklılık arz ettiği gibi eğitsel, tıbbi, yasal olarak da sınıflandırılmaktadır (Enç, 2005; Gürgür & Şafak, 2017). Bunun yanı sıra az gören, kör, total görme engelli ve görme yetersizliğinden etkilenmiş birey gibi sınıflandırmalar yer almaktadır (Cox & Dykes, 2001; Gürgür & Şafak, 2017). Bu çalışmada görme engelli kavramı, yasal tanım olan, bütün düzeltmelere rağmen iki gözle görmesi tıbben 1/10'dan aşağı olduğu tespit edilen, eğitim-öğretim çalışmalarında görmesinden yararlanması mümkün olmayan bireyler olarak ele alınmaktadır.

b. Tahmini Öğrenme Yol Haritası: Belirlenen bir matematik öğrenme alanında yer alan kavram(lar) için öğreticinin/araştırmacının kavramın doğasına, öğrenci bilgisine ve literatüre dayalı tahminlerine göre hedefler belirlemesi, bu hedefleri öğretmek için olası ihtimalleri göz önününde bulunduran etkinlikler (adımlar, görevler vb.) tasarlanması ve öğretim oturumları sürecinde öğrenenin düşünme süreçlerinin ilerlemesinde hedeflere ulaşma silsilesi (haritalandırılması) şeklinde betimlenmesidir (Simon, 1995).

c. Bireyselleştirilmiş Eğitim Programı [BEP]: Özel eğitime ihtiyacı olan bireylerin bireysel gelişim özellikleri, yeterlikleri, nitelikleri, eğitim performansları ve ihtiyaçları doğrultusunda hedeflenen amaçlara yönelik hazırlanan, bu bireylere verilecek destek eğitim hizmetlerini içeren özel eğitim programıdır (Avcıoğlu, 2015, ss.16-22).

d. Öğretim Etkinlikleri: Öğrenme yol haritasının elde edilmesinde kavram(lar)ın doğasının, öğrenme ortamının, olası öğrenci yanılgılarının ve güçlüklerinin ve hazır bulunuşluk düzeylerinin göz önünde bulundurularak, belirlenen hedeflere ulaşmak için öğrenciden gelebilecek olası cevapları dikkate alarak bir sonraki adımın tasarlandığı görevlerden veya adımlardan oluşan etkinliklerdir (Simon & Tzur, 2004).

e. Öğretim Deneyi: Bireyin öğrenmesinde bir süreç boyunca gelişimin incelenmesine ve yorumlanmasına bir model oluşturmaya fırsat sağlayan, bireyin düşünme süreçlerini ortaya çıkaran (Steffe & Thompson, 2000), öğretici olan araştırmacı ve birey arasındaki etkileşim ile aynı zamanda bireyin matematiksel bilgilerini açığa çıkarmayı amaçlayan (Cobb & Steffe, 1983) ve öğrenci bilgisini ortaya koyarak bireyin bilgiyi nasıl yapılandırdığını belirleyen (Steffe, 1991) öğretim sürecidir.

f. Cebirsel Düşünme: Zihinsel aktiviteler sonucunda sembollere anlamlar yükleyerek cebirsel ilişkileri ve çoklu temsiller yardımıyla düşünceleri ortaya koyma, cebirsel ilişkilendirme ile somut ve soyut kavramları muhakeme etme sürecidir (Kieran, 1992; Lawrence & Hennessy, 2002). Bu çalışmada ele alınan tanımlamada daha ayrıntılı olarak fonksiyonel düşünme, genelleme, eşitlik kavramı, değişken kavramı, eşleme ve ilişkilendirme becerisi içeren üst düzey tüm öğrenci düşünme süreçleri olarak açıklanmaktadır.

g. Küme: Matematiğin aksiyomatik yapısı içerisinde tanımı yapılamayan ve böylece tanımsız terim olan küme kavramı, sezgisel ve aksiyomatik olmak üzere iki kuramda ele alınmıştır. Bu çalışmada sezgisel olarak açıklama kabul edilmiştir. Böylece nesnelerin oluşturduğu topluluk olarak ele alınacaktır. Ancak bu açıklama nesnelerin bir araya gelmesinde belirli bir özelliğin ya da niteliğin var olmasını akla getirmektedir. Arıkan ve

Halıcıoğlu (2013, s.72) bu özellikler veya niteliklere '*iyi tanımlı olma*' sıfatı ile adlandırmaktadır. Bu nedenle daha açıklayıcı olarak bu çalışmada küme kavramı, "*Sezgilerimizle veya düşüncelerimizle iyi ayırt edilmiş ve belirlenmiş nesnelerin bir araya gelmesiyle oluşan bir bütün*" şeklinde ele alınmıştır (Argün vd., 2014, s.297; Cantor, 1895, s.481, akt. Kleene, 2002, s.183).

h. Eşleme: Bu çalışmada iki küme ile sınırlandırılarak, iki kümenin elemanlarını birbiri ile gelişigüzel ya da bir ilişkiye göre eşlemek olarak ele alınmıştır. Eşlenen elemanların temsili sıralı ikililer ile gerçekleştirilmektedir.

ı. İlişkilendirme: Matematikte ilişkilendirme, ilişkisel düşünme becerisinin yanı sıra kavramlar arasında ilişki kurma, değişkenlerin birbirine göre değişmesi, günlük hayatla ilişkilendirme gibi farklı anlamaları karşılamaktadır (Carlson, 1998; Coxford, 1995; Keene, 2007; Thompson & Carlson, 2017). Bu çalışmada ise özel olarak iki kümenin elemanları arasında eşleme yoluyla ilişki kurma ve farklı temsiller yolu ile ifade etme süreci olarak ele alınmıştır (Thompson & Carlson, 2017).

i. Doğru: Geometrilerin aksiyomatik yapısı içerisinde tanımı yapılamayan ve böylece tanımsız terim olan kavramlardan biridir. Afin uzayında, vektörel uzayda vb. farklı tanımlara sahip olan bir kavramdır. Bu tanımlarda vurgulanan doğrultusu olan, kalınlığı ve derinliği olmayan, her iki yönden kesintiye uğramadan uzanan, bükülmemiş eğri veya düz çizgi gibi ortak açıklamalar elde edilmektedir (Argün vd., 2014). Bu çalışmada da sezgisel olan bu tanımlama ele alınmıştır.

j. Doğru Parçası: Doğrunun gerçek anlamda iki noktası ile belirlenen doğrunun bir parçasıdır. Başka bir ifade ile bir doğru üzerinde seçilen iki farklı nokta arasında kalan noktaların kümesidir (Argün vd., 2014).

k. Sayı Doğrusu: Bir doğru üzerindeki noktaların belirlenen bir referans noktası ve bir birime göre reel sayılar ile eşleme yoluyla koordinatlandırılmasına reel sayı doğru denir (Argün vd., 2014). Bu eşlemenin nasıl olduğu Bölüm 2.11' de ele alınmıştır.

l. Koordinat Sistemi: Düzlemde iki reel sayı doğrusunun 0 referans noktalarından dik kesişmesi ile elde edilen eksenler yardımı ile düzlemin noktalarının sıralı reel sayı ikilileri ile eşlenmesi sonucunda elde edilen çatıya koordinat sistemi denir (Kaya, 2002). Düzlemin noktaları ile reel sayılar arasındaki bu eşleme ve koordinatlandırma süreci hakkıda ayrıntılı bilgi Bölüm 2.12' de ele alınmıştır.

m. Grafik: Farklı bilim alanlarında çeşitli grafik türlerinden bahsetmek mümkündür. Bu çalışmada çizgi grafiği ele alınmıştır. Özel olarak iki küme arasındaki eşlemelerin değişkenler aracılığı ile belirlendiği cebirsel ilişkinin görsel temsilidir. Kavramsal olarak A ve B iki küme ve R, A' dan B' ye bir bağıntı olmak üzere $\{(x, y) \in R: x \in A, y \in B\}$ kümesine R bağıntısının grafiği denir (Argün vd., 2014).

n. Değişken: Değişken kavramının literatürde farklı tanımları yer alsada bu tanımlar genel olarak harfli ifade ya da bilinmeyen kavramları ile ele alınarak yanılgılara neden olmaktadır. Bu çalışmada değişken ve bilinmeyen kavramları incelenmiştir. Bir kümenin elemanlarının tamamını ya da bir kısmını, yani nesneleri temsil eden sembole değişken denir. Değişkenin temsil ettiği kümenin elemanlarına ise değişkenin değerleri denir. Genel kabul olarak değişken x, y ve z gibi harfler ile sembolleştirilir (Argün vd., 2014).

o. Bilinmeyen: Verilen bir açık önermeyi doğru yapan evrensel kümenin elemanlarıdır (Argün vd., 2014).

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Özel Eğitim ve Türkiye' deki Mevcut Durum

Toplumda sağlıklı bireylerin yanında, bireysel ve gelişim özellikleri ile yaşıtlarından farklılık gösteren ve özel eğitime ihtiyaç duyan bireyler de bulunmaktadır. Bu nedenle Türk Millî Eğitiminin temel ilkeleri arasında eğitim hakkı ve eğitimde fırsat ve imkân eşitliği ilkeleri yer almaktadır. Özel eğitime gereksinim duyan öğrenciler yaşıtlarıyla birlikte eğitim alma şansını kaynaştırma sınıflarında yakalamakta ve fırsat eşitliğine sahip olmaktadır. Ayrıca kaynaştırma eğitimi uygulamaları toplumsal yaşamda karşılaşma ihtimali olan yetersizliği olmayan öğrencilerin, özel eğitime ihtiyacı olan bireyleri anlamalarına ve bireysel farklılıkları kavramalarına imkan sunmaktadır.

Ataman (2012, s. 14) özel eğitimi; farklı ve özel gereksinimi olan çocuklara sunulan, onların yetenekleri doğrultusunda kapasitelerinin en üst düzeye çıkarılmasını sağlayan, yetersizliğin engel oluşturmasını önleyen, engelli bireyi toplumla bütünleşmiş, kendine yeterli ve bağımsız, üretici bireyler olmasını sağlayan becerilerin yer aldığı eğitim olarak tanımlamaktadır. MEB (2007) ise özel eğitimi, 'bazı özellikleri nedeniyle farklı bireysel ihtiyaçlara ve yetersizlikleri nedeniyle çeşitli engellere sahip olan bireylerin eğitimi için donanımlı personeller ve öğrencilerin bireysel özelliklerine uygun olarak tasarlanmış eğitim programları ile sürdürülen eğitim' olarak kabul etmektedir. Türkiye' de özel eğitim hizmetleri *birlikte* ve *ayrı eğitim* olmak üzere iki şekilde sunulmaktadır. Aynı yetersizlik çeşidine sahip bireylere farklı kurumlarda verilen eğitime *ayrı eğitim*; genel eğitim okullarında farklı yetersizliklere sahip bireylere verilen eğitime ise *birlikte eğitim* adı verilmektedir (Cavkaytar, 2012). Birlikte ve ayrı eğitim hizmetinin sunulması için öncelikle özel eğitime ihtiyacı olan bireylerin engel türleri ve düzeylerinin belirlenmesi gerekmektedir. Özel eğitim hizmetlerinde tercih edilen sınıflandırma öncelikli olarak en az kısıtlayıcı eğitim ortamlarını destekler niteliktedir. Bu eğitim ortamlarının özelliği ise engelli bireyin ailesi ve akranları ile en fazla vakit geçirebileceği ve aynı zamanda eğitime yönelik gereksinimlerinin en iyi şekilde karşılanabileceği uygulamaların yer almasıdır (Batu & Kırcaali-İftar, 2005). Görme engelli öğrencilerin yetersizlik düzeyi yalnızca akranlarından ayrı bir eğitim ortamı gerektiren ileri düzeyde değilse, bu öğrenciler genel eğitim ortamlarında kaynaştırma eğitimi alırlar (Çitil, 2017; Kırcaali-İftar, 1992). Kaynaştırma eğitimi, özel eğitim gerektiren bireylerin hazırlanan bireyselleştirilmiş eğitim planları doğrultusunda eğitimlerini akranları ile birlikte uygun yöntem ve teknikler kullanılarak sürdürmesidir (Batu, 2012; Çitil, 2017).

Dünyada Amerika, İngiltere, Japonya ve İtalya gibi pek çok ülkede kaynaştırma eğitimi 1970' li yıllarda uygulanmaya başlanmıştır. Türkiye' de ise 1983'te yürürlüğe giren 2916 sayılı Özel Eğitime Muhtaç Çocuklar Kanunu' nda yer alan "Durumları ve özellikleri uygun olan özel eğitime ihtiyacı olan öğrencilerin normal kurumlarda normal akranları arasında eğitilmeleri için gerekli tedbirler alınır." ifadesi ile kaynaştırma uygulamaları zorunlu hâle getirilmiştir. 1988' de yayımlanan "Özel Gereksinimli Çocukların Normal Sınıflara Kaynaştırılması Yoluyla Eğitimi Genelgesi" ile kaynaştırma eğitiminin esasları belirtilmektedir. 1997' de yayınlanan 573 sayılı Kanun Hükmünde Kararname' de erken eğitim, bireyselleştirilmiş eğitim, kaynaştırma ve özel eğitim desteğine detaylı yer verilmektedir. Kararnamede kaynaştırma "Özel eğitim gerektiren bireylerin eğitimleri, hazırlanan bireyselleştirilmiş eğitim planları doğrultusunda akranlarıyla birlikte her tür ve kademedeki okul ve kurumlarda uygun yöntem ve teknikler kullanılarak sürdürülür." şeklinde tanımlanmaktadır.

Özel eğitime ihtiyacı olan bireyler, kaynaştırma yoluyla eğitimlerini normal gelişim gösteren akranları ile birlikte aynı sınıfta tam zamanlı veya özel eğitim sınıflarında yarı zamanlı olarak sürdürebilmektedir. Özel eğitim gerektiren bireylere; özel eğitim destek hizmetleri, özel araç-gereç ve eğitim materyalleri sağlanmakta, gerekli fiziksel düzenlemeler yapılmakta ve eğitim programı bireyselleştirilerek uygulanması beklenmektedir. Kaynaştırma yoluyla eğitimlerine devam eden öğrenciler, yetersizliği olmayan akranlarıyla eğitim görmeleri hâlinde okullarında uygulanan eğitim programını; özel eğitim sınıflarında ise öğrencilerin takip ettikleri programlar temel alınarak eğitim performansı ve ihtiyaçlarına göre Bireyselleştirilmiş Eğitim Programı [BEP] hazırlanmaktadır. Bu okullarda öğrenciye verilen eğitim hizmetlerinin etkin olarak yürütülebilmesi için eğitim materyalleri, özel araç-gereçler yanı sıra, ayrıca destek eğitim odası açılmaktadır. Burada öğrencinin performansı dikkate alınarak birebire eğitim sürdürülmektedir. Gerekli görüldüğü takdirde eğitim performansı aynı seviyede olan öğrenci grubu ile de eğitim gerçekleştirilmektedir.

TÜİK verilerine göre 2010 yılında Türkiye genelinde görme engelli öğrenci sayısının toplam özel eğitime ihtiyaç duyan öğrenci sayısına oranı %8,4 olarak tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin ise yalnızca %14,6’ sı ortaöğretim ve daha üstü eğitim durumuna sahiptir. MEB 2016-2017 istatistiklerine göre görme engelli öğrencilerin Özel Eğitim Merkezi III. Kademede Türkiye geneli var olan 2 okulda eğitim görme yetersizliğine sahip olmayan öğrenci sayısı 39 iken, ortaöğretim okullarında yaklaşık bin görme engelli öğrenci kaynaştırma eğitimi görmektedir. Kaynaştırma eğitimi uygulamasında bireysel özellikler ve gereklilikler kaynaştırma öğrencisi için destek eğitim odalarında uygulanan bireyselleşitirlmiş eğitim programlarını meydana getirmiştir. BEP, özel eğitime ihtiyacı olan bireylerin yetersizlikleri dikkate alınarak hazırlanan uzun ve kısa dönemli, ölçülebilir amaçları, hedefleri ve destek hizmetleri içeren yazılı bir programdır (Özyürek, 2004). Bu programda ayrıca öğrencinin mevcut eğitsel performansı ile ilgili bilgiler, hedefler, öğretim yöntem ve materyalleri, değerlendirme yöntem ve ölçütleri yer almaktadır (Kargın, 2010). Görme engelli öğrencilerin yer aldığı kaynaştırma sınıflarında sınıf düzeni bir diğer önemli noktadır. Öğrencinin görme yetersizlik düzeyine göre oturacağı sıra, büyük punto ile yazılmış metinler, tahtayı veya yazılı ders araçlarını okuyacak bir yardımcı ve ses kaydı kullanma sınıf uyarlamaları arasında yer almaktadır (Dick & Kubiak, 1997, s.345; Huebner, Merk-Adam, Stryker & Wolffe, 2004).

2.2. Görme Engellilik

Görme engelli kavramının literatürde çeşitli tanımları ile karşılaşmaktayız. Farklı ülkelerde veya kaynaklarda farklı tanımlar benimsenmektedir. Amerika'da en iyi gören gözün, normal görme gücünün en fazla onda birine sahip olma durumu görme engellilik olarak tanımlanırken, İngiltere'de iyi gören gözde normal görüşün en fazla yirmide birine sahip olma durumu olarak tanımlanmaktadır (Enç, 2005, ss.45-46).

Görme engelli olma sınıflandırılarak *körlük (total görme engelli)* ve *az görme* olarak tanımlanmaktadır (Gürgür & Şafak, 2017, s.139). Total görme engelli, bütün düzeltmelere rağmen iki gözle görmesi 1/10'dan aşağı olan, eğitim-öğretim çalışmalarında görmesinden yararlanması mümkün olmayan bireyler olarak tanımlanmaktadır. Az gören, bütün düzeltmelere rağmen iki gözle görmesi 1/10 ile 3/10 arasında olan ve özel bir takım araç ve yöntemler kullanmadan eğitim-öğretim çalışmalarında görme gücünden yararlanması mümkün olmayan bireyler olarak tanımlanmaktadır.

Bunlara ek olarak görme engellilik *yasal*, *tıbbi* ve *eğitsel* olarak da sınıflandırılmaktadır. Yasal görme engellilik, belli işleri yapamayacak kadar az görme iken, tıbbi görme engellilik ise tek gözde veya iki gözde ışığı dahi görememe durumu olarak ele alınmaktadır. Eğitsel açıdan görme engellilik, eğitsel açıdan kör ve eğitsel açıdan az gören olarak sınıflandırılmaktadır. Eğitsel açıdan görme engelli bireyler, görme duyularını öğrenme amacıyla kullanmazken dokunmaya ve işitmeye ait materyallere ihtiyaç duymaktadır. Eğitsel açıdan az gören bireyler, görme duyusunu en üst düzeyde öğrenme amacıyla kullanabilen bireylerdir. Bu bireyler büyüteç, gözlük, büyük puntolu yazı gibi materyallere veya çevre düzenlemelerine ihtiyaç duymaktadır (Gürgür & Şafak, 2017, s.139).

Bilişsel gelişim duyularımızın koordineli işleyişi yoluyla elde edilen bilgilerin içselleştirilmesi ve çevre hakkında kavramlar oluşturması ile gelişmektedir. Bu nedenle, görme engelli olan veya olmayan her birey için duyular aracılığı ile alınan uyaranlar önem arz etmektedir. Doğuştan görme engelli bireylerin bilişsel gelişimleri üzerinde etkisinin kesinliğine ilişkin kuramcılar ve araştırmacılar arasında bir fikir birliği mevcuttur. Bireyin sahip olduğu deneyimler, fiziksel çevreye uyum becerisi ve çevre ile etkileşimi görme engelinden etkilenmektedir. Görme engelli birey dünyaya uyum sağlamak için diğer duyuları ile incelemeye ve sözel betimlemelere dayanmaktadır. Ancak görme engelli bireyin kendi kendine incelemeleri sonucunda erişeceği bilgi sınırlıdır. Somut kavramlar için dokunma duyusu yeterli olabilir, ancak her nesne ya da kavram hakkında dokunarak bilgi edinmek mümkün değildir. Diğer duyuları ile ulaşabileceği bilgiler işitme ya da dokunma duyuları için yeterli büyüklükte olmayabilir ya da soyut kalabilmektedir. Görme yetersizliği olan bir birey yalnızca kollarının uzanabildiği mesafede çevre hakkında bilgi sahibi olabilmektedir. Bu nedenle görme engelli bireyler diğer bireylerin sözel anlatımlarına ve betimlemelerine ihtiyaç duymaktadır. Sözel betimlemeler yoluyla ulaşılan bilgiler ise aktaranın algı ya da düşüncelerini yansıtmaktadır. Bu nedenle görme engelli bireyler diğer duyuları ile işlevsel olarak bilgiye ulaşmak için sorumlu kişiler ve uzmanlar tarafından desteklenmelidir (Gürgür & Şafak, 2017, s.155).

Görme engelli birey ameliyat, ilaç veya lens ile görme yetisini kazanamayacak durumda olan ve görmeye erişimini kısıtlayan görme kaybı yaşamış bireydir (Rule, Stefanich, Boody & Peiffer, 2011). Bu durum doğuştan olabileceği gibi ilerleyen dönemlerde çeşitli rahatsızlıklardan kaynaklanabilir. Sınırlı görme alanı, zayıf görüş (az gören), zıt renklere zayıf görüş duyarlılığı, ışık algısının zayıf olması veya bunların çeşitli kombinasyonları şeklinde ortaya çıkmaktadır. Dünya Sağlık Örgütü (2009) görme fonksiyonlarını; normal görme, orta derecede görme bozukluğu (kısmi görme), ciddi görme bozukluğu (düşük görme) ve körlük (kısmi veya total) olmak üzere dört seviyede tanımlamaktadır. Görme bozukluğu olan öğrenciler, düzeltici gözlük veya lens kullanılsa bile, tipik metinleri okuyamamaktadır. Neredeyse tamamen kör olan öğrenciler göremez ve diğer duyularına güvenmek durumundadır. Bu öğrencilerin çoğu okumak ve yazmak için Braille kullanmakta (Cox & Dykes, 2001) veya elektronik metin okuma cihazlarına ihtiyaç duymaktadır.

Körlük bilinen insanlık tarihinden beri görmesi (görüşü) olmayan bireyleri nitelendirmek için kullanılan bir terimdir. Önceki yüzyıllarda körlük az gören bireyleri de kapsayacak şekilde kullanımı mevcuttu. Total körlük daha yakın dönemlerde kullanılan ve her iki gözde de görme kalıntısı olmayan bireyleri temsil eden terimdir. Bazı araştırmacılar görme engelli terimini görme kalıntısı (ışık algısı olma ya da yakından ve büyük puntoda görebilme vb) olan bireyleri nitelendirmek için tercih etmektedir. Az gören ve görme engelli kavramları ise görme bozukluğunun günümüzde terminolojideki ilerleme örneklerindendir. Hala görme engelli ve az gören kavramlarını tanımlamada kabul gören evrensel tek bir yol yoktur (Corn & Koenig, 2007; Kelly & Clark-Bischke, 2011). Görme engelli (visually impaired) ve az gören (low vision) kavramlarını tercih eden kaynakların yanında görme bozukluğu (visual impairment) ve körlük (blindness) kavramlarının da yer aldığı gözlenmektedir. Bu bakış açılarının her ikisi de kabul görmektedir. Yasal tanımlamalarda az gören ve görme bozukluğu terimleri birbirinin yerine kullanılabilen eş anlamlı kelimeler olarak karşımıza çıkmaktadır (Kelly & Clark-Bischke, 2011). Bu sınıflandırmaların önemi, sınıflandırmalara bağlı tanımlamaların ve dolayısı ile öğrencileri tanılamanın gerçekleştirilmesinde rol almaktadır. Böylece tanılanan öğrencilerin özelliklerine uygun eğitim uygulamaları tasarlama gerekliliği doğmaktadır (Özyürek, 2004). Genel olarak ifadece edersek, görme engelli terim anlamı olarak az gören ve kör bireyleri kapsamaktadır. Bu iki grubun ihtiyaçları birbirinden çok farklıdır. Az gören bireyler kalan görme duyularından en iyi şekilde yararlanmayı hedeflerken kör (total görme engelli) bireyler için tamamen görsel olmayan kanallardan iletişim gerekmektedir (Edwards, Stevens & Pitt, 1995). Bu araştırmada Edwards, Stevens ve Pitt' e (1995) göre görme engelli birey terimi ile az gören ve kör bireyler kapsanmaktadır. Ayrıca görme engelli bireyin görme oranı, görme alanı ya da nitelikleri ayrıca belirtilmektedir.

2.3. Görme Engelli Bireylerin Bazı Özellikleri

İçinde bulunduğumuz dünyayı ve çevremizdeki nesneleri duyu kanallarımız aracılığı ile algılamaktayız. Duyumlar, duyu organları ile toplanıp merkezi sinir sistemine iletilir ve beyin tarafından elde edilen algı işlenir ve yorumlanarak bir cevaba dönüşür. Nesnelerin yeri ve konumu sadece görme duyusu ile değil dokunma, işitme, hatta koklama aracılığıyla da algılanabilir (Millar, 1994). Bilgi taşıyıcı duyu kanallarından birinin işlevini yitirmesi, diğer duyu kanallarının işlevini yürütmesinde engel değildir. Dolayısıyla görme duyusundan yoksun olan görme engelli bireylerin diğer duyuları ile bilgiyi yapılandırma süreçleri öğreticiler için dikkat çekmektedir. Araştırmalar görme engelli bireylerin işitme ve dokunma duyularının, normal gelişim gösteren akranlarına göre daha üst düzey performans gösterdiği durumları tespit etmişlerdir (Goldreich & Kanics, 2003). Bu sonuç Vygotsky' nin (1993) bireyinin temel duyularından birinin gerçekleştiremediği işlevi, diğer duyuların mümkün olan ölçüde bu görevi üstlenmesi fikrini akla getirmektedir. Bu sonucu destekleyen bir diğer araştırmada, işitme duyusunun görme yetersizliğine sahip olmayan bireylere kıyasla görme engelli bireylerin uyarıcının nasıl, nerede ve hangi koşullar altında meydana geldiğini ayırt etmede daha başarılı olduğu belirlenmiştir (Hertrich, Dietrich, Moos, Trouvain & Ackermann, 2009). Benzer şekilde dokunma duyusu için görme engelli bireylerin basınç farkını algılamada görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler ile aynı eşik değerine sahip olmalarına rağmen, yüzey tanımlama becerilerinin çok daha gelişmiş olduğu belirlenmiştir (Alary vd., 2009). Ancak bu durumun belirli özel şartlar altında farklılık arz ettiği tespit edilmiştir. Julesz (1981) araştırmasında yüzey üzerinde birbirine çok yakın dokunsal iki noktanın ayrımı, eşik değeri görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için 1.2 ile 1.7 mm arasında ve hiç görmeyen bireylerde ise bunun 1.0 ile 1.5 mm arasında olması gerektiğini belirlemiştir. Bu sonuç görme engelli bireyler için tasarlanacak materyallerde küçük ayrıntıların dahi bireyler tarafından hissedilebileceğini ve bu formda tasarlanmasının uygun olduğunu göstermektedir. Nolan ve Kederis (2009) bu sonucu destekler nitelikte ideal

Braille noktalama düzeninde, Braille alfabe noktalarının yarı çapının 1.5 mm, sayfa düzleminden yüksekliğinin 0.43 mm, yatay ve dikey iki nokta arasındaki mesafenin en az 2.28 mm, karakterler arasındaki mesafenin ise 4.06 mm olması gerektiğini tespit etmiştir.

Görme engelli bireyler görme yetersizliğinden kaynaklı zihinsel işlevlerde görme yetersizliğine sahip olmayan akranlarıyla aynı özellikler sergilerken, psikomotor beceriler, dil ve gelişim alanlarının yanı sıra kavram öğrenmede sınırlılıklar yaşayabilir (Şafak, 2010). Doğuştan görme engelli bireylerin bilişsel fonksiyonları üzerinde görme kaybının etkisi olduğuna dair kabul edilen bir gerçeklik yer almaktadır. Elbette bu etki bilgiye erişime engel değildir. Nitekim doğumdan hemen sonra birincil veri kaynağı görme değil, dokunma duyusu aracılığı ile elde edilmektedir. Ancak görsel uyaranlar içgüdüsel olarak keşfetme duygusunu tetiklediği için görme engelli bireyler öğrenmede daha az istekli olabilir (Gürel Selimoğlu, 2017, ss.155-156).

Görme engelli bireylerin bilişsel gelişimin bir parçası olan kavram gelişiminde de bireyler görme duyusunun dışında diğer duyularını ve başkalarının sözel betimlemelerini kaynak olarak kullanmaktadır. Başkalarının betimlemesine dayanan kavram gelişimi doğru ve zengin öğrenmeyi sınırlandırmaktadır. Dolayısıyla dokunsal-işitsel süreçten önce görme engelli birey parçaları algılayarak bütün hakkında bilgi sahibi olmaktadır. Daha sonra sözel betimleme ile eş zamanlı dokunma duyusu aracılığı ile bütün hakkında yargıya varmaktadır. Kavram öğrenme bağlamında alt ya da ilişkili kavramlar yardımıyla önce dokunsal, ardından dokunsal-işitsel yaklaşımlar ile gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Ancak dikkat edilmelidir ki bazı kavramlar dokunsal algılanamayacak kadar soyut, büyük ya da küçük olabilir (Gürel Selimoğlu, 2017, s.159). Bu durum işitsel öğrenmeye zorunlu bıraksa da, destek eğitim araçlarının gerekliliğini ortaya koymaktadır.

2.4. Görme Engelli Bireyler ve Matematik Eğitimi

Görme çok güçlü bir duyudur. Görme duyusu, bireyin kontrol derecesine göre verimli ve güçlü bir bilgi işlem aracı haline gelir. Görme duyusunun gücü, alınan bilgiyi seçme ve odağı kontrol etme yeteneğinden kaynaklanmaktadır. Görme yetersizliğine sahip bireyler için birçok görev zor veya imkansız olabilir, çünkü diğer duyular bu güçten yoksundur. Matematik de neredeyse her durumda yazılı olarak iletilen ve görme duyusunun bu gücünden yararlanan bir etkinliktir. Görme engelli bireyler için matematiğe ilişkin gereksinimler kontrol edilebilir ve görsel olmayan temsiller aracılığıyla erişilebilir hale gelmektedir. Ancak zengin ve karmaşık yapıdaki notasyonları, görmeyen bireylerin erişebileceği görsel olmayan formlara dönüştürmek oldukça zordur. Buradaki güçlük görsel olmayan temsillerin karakteristik özelliklerinden kaynaklanmaktadır (Edwards & Stevens, 1994).

Matematikçiler her iletişim kurduklarında matematiğin özellikleri ve niteliğinden dolayı sözlü iletişimden ziyade yazılı gösterimler kullanmaktadır. Matematiğin bu bir dizi karakteristik özelliği ve bu özelliklerin gösterimlerinin görsel olmayan biçimlerde sunulması oldukça güçtür. Matematik kesin bir bilim olduğundan sahip olduğu notasyonlar da nettir. Ayrıca görsel temsilde fazla kullanılmış neredeyse hiç notasyon yoktur. Başka bir ifade ile görsel bir temsilde kullanılan her notasyon bir anlama sahiptir. Bu kesinlikten dolayı küçük bir değişiklik, anlamda büyük farklılıklara yol açmaktadır. Bu durum ise kullanılan materyallerin etkili ve iyi tasarlanmış olması gerektiğini göstermektedir (Edwards & Stevens, 1994; Şafak & Uyar, 2019, s.301).

Görme engelli bireylerin matematiği nasıl yaptığı görme yetersizliğine sahip olmayan akranları ile kıyaslanan araştırmalar ile incelenmiştir (Edwards & Stevens, 1994). Görme engelli birey görme yetersizliğine sahip olmayan akranı ile benzer üst düzey bilişsel süreçleri kullanmaktadır. Agrawal (2004), görme engelli bireylerin bilişsel yapılarının görme kaybı ile doğrudan ilgili olmadığını *"[...] eksikleştikleri şey öncelikle algıları, ikincisi ise görsel algı ile kazanılan sembolik soyutlamalarıdır [...]"* ifadesi ile vurgulamaktadır (s.34). Nitekim Spindler (2006) araştırmasında, görme engelli öğrencinin doğru materyal kullanımı ve sözlü betimleme yardımıyla analiz dersinde çok katlı integral eğrilerini hayal edebildiğini ve hayal ettiği bu eğriyi betimleyebildiğini tespit etmiştir. Ancak matematiksel notasyonları okumak için farklı alt seviyede algısal süreçler uygulanmaktadır. Görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler bir cebirsel temsili ilk okumada yukarıdan aşağıya genel izlenim şeklinde gerçekleştirirken, görme engelli bireyler aşağıdan yukarıya özelliklerine ayırarak incelemektedir. Ayrıca görme engelli öğrenciler kağıt ve kalem kullanmak yerine hafızalarına güvenmektedir (Cahill & McCarthy, 1994, s.31).

Görme engelli öğrencilerin öğrenme sürecini etkileyen sınırlılıklar arasında görme alanının ne kadar olduğu ve görme yetisini ne zamana kadar etkin bir şekilde kullanabildiği yer almaktadır. Özellikle öğrencinin doğuştan, erken yaşta ya da yakın zamanda görme kaybı yaşamış olduğunu bilmek önem arz etmektedir. İlerleyen yaşlarda görme kaybı yaşayan bireylerin hafızalarında hala görsel imgeler yer alabilir. Bu durum matematik öğretiminde öğretmenin kullandığı dili etkileyebilir (Dick & Kubiak, 1997; Şafak & Uyar, 2019, ss. 300-303). Doğuştan görme engelli bir öğrenci ile sonradan görme yetersizliğine sahip olan öğrenci, görme yetersizliğine sahip olmayan akranlarına göre önemli ölçüde farklı ve çeşitlilik arz eden öğrenme yollarına sahiptir. Bu farklılıklar kazanımların doğasında yer alan dokunsal veya görsel ifadelerin, görmeyen birey için daha anlaşılabilir ve somut hale getirilmesi ile çözülmelidir. Matematiksel içeriklerde de yön, miktar ve şekil merkezde yer almaktadır. Ayrıca matematiksel dil görsel referanslara dayanmaktadır. Matematiksel kavramlardaki görselliği görme yetersizliğine sahip olmayan akranları eğlenceli bulmakta ve hemen kavramakta iken görme yetersizliği olan birey daha fazla bilişsel çaba sarf etmesi gerekmektedir. Örneğin koordinat sisteminde doğrusal artışa sahip bir ilişkiyi gösteren doğrunun eğimini görsel olarak algılamak kolaydır. Ancak koordinat eksenlerinin ve doğrunun sözel olarak betimlemesini dinlemek veya kabartma çizgilere dokunarak takip etmek, bireyin diğer duyulara güvenerek sentez yapmasını gerektirmektedir. Bu durumda önemli ölçüde bilişsel çabaya ihtiyaç vardır (Dick & Kubiak, 1997).

2.4.1. Kabartma Yazı

Kabartma yazı kalıcı olmasına rağmen dokunarak okuma görmeden çok daha yavaş olduğundan metni tekrar okuma imkanı sınırlıdır. Ayrıca kabartma yazıda matematiksel temsiller için daha fazla sembole ihtiyaç vardır ve bu durum bireyin tekrar okumak için daha fazla karakteri taraması gerektiği anlamına gelir (Edwards & Stevens, 1994). Bu duruma matematik eğitiminde verilecek basit ve en çarpıcı örnek, kabartma yazıda harflerin önüne konulan rakam işareti(⠼) ile artık rakamları temsil etmesidir. Örneğin *a*(⠁) harfi önüne konulan rakam işareti ile 1(⠼⠁) rakamını temsil etmektedir. İşlem yapılmayı gerektiren bir matematiksel denklemde ya da eşitlikte ortalama 30 ile 40 karakter arasında sembol kullanımını yer almaktadır. Genellikle bir kabartma yazı kağıdında veya yazı tabletinde ise maksimum 36 ile 40 karakter arasında yazı yazılabilecek hücreler yer almaktadır. Dolayısıyla bir satıra bir küçük formül ya da işlem yazılabileceği anlamına gelmektedir. Aksi bir durumda tek satırlık bir eşitliği iki satıra yazmak gerekmektedir ki bu durum anlamayı güçleştirmektedir (Edwards & Stevens, 1994). Ayrıca kabartma yazı ülkelere ve bazen kuruluşlara göre değişiklik arz etmektedir. Oregon State Üniversitesi' nde basit ve temel matematiksel sembolleri (toplam, fark gibi) yalnızca kabartılmış olarak kullanılırken, alfabe ve sayısal karakterler için kabartma yazı kullanılmaktadır (Barry, Gardner & Raman, 1994, akt. Dick & Kubiak, 1997). Kansas Üniversitesi' nde ise farklı bir kabartma yazı kodu üzerine çalışmalar yer almaktadır (Dick & Kubiak, 1997, s.346). Ayrıca kabartma yazıda her ne kadar kısaltmalar kullanılsa da karakter sayısı fazla olduğu için kabartma yazı ile yazılmış kitaplar oldukça fazla sayfa sayısına sahip büyük kitaplar oluşturmaktadır (Dick & Kubiak, 1997, s.346; Şafak & Uyar, 2019).

Görme engelli bireyler genel olarak kabartma yazı kodu olarak Braille alfabesini kullanmaktadır. Geleneksel Braille kod 6 nokta karakterlerden oluşan ve 64 olası karakter ile sınırlı olan bir kabartma yazı alfabesidir. Basit metinlere dahi yeterli olmayan bu karakter sayısı matematiksel semboller için de önemli bir güçlüktür. Pek çok güçlüğün üstesinden gelmek için Braille gösterimler çoklu karakterler ile temsil edilmektedir. Örneğin '*A* (⠠⠁)'

(büyük a harfi) Amerikan standart Braille yazıda ‘,a (. ve ˙)’ yani virgül ve harf olmak üzere iki karakterli dizi ile temsil edilmektedir. 256 farklı karakteri barındıran 8 nokta kabartma alfabesi ise klavyelerde yazım sorunundan dolayı tercih edilmemektedir. Braille yazı tek satırda karakterlerin art arda sıralanmasında oluştuğu için kuvvet, taban, indis gibi alt karakterlerin yazımı Latin alfabedeki temsillerden farklılık arz etmektedir. Braille yazı karakterlerinin bu gösterimi *lineer (doğrusal) olma* olarak nitelendirilmektedir (Edwards, Stevens & Pitt, 1995; Karshmer & Farsi, 2007; Karshmer, Gupta & Pontelli, 2007; Stevens, Edwards & Harling, 1997). Karshmer vd. (2007) lineerleştirilmiş matematik olarak tanımladığı kabartma yazı kodlarını parantezler ile lineer (doğrusal) hale getirildiğini belirtmiştir. Kesir ifadelerden verdiği örnekte $\frac{x+1}{x-1}$ kesrinin kabartma yazıda $(x + 1/x - 1)$ şeklinde kodlandığını açıklamıştır. Matematikte bu operatörler ve özel semboller Braille karakterlerin çeşitli dizileri ile temsil edilmektedir. Karekök sembolü gibi görsel farklı semboller de Braille yazıda temsil edilebilecek şekilde doğrusallaştırılarak 6 nokta karakter dizisi ile gösterilmektedir. Bu gösterimler kabartma yazıda matematiği karmaşık hale getirmektedir.

Her ülkede ulusal bir Braille kod sistemi olduğu gibi kendine özgü matematiksel kodları mevcuttur. Bu kodlar görme engelli bireylerin karmaşık matematiksel ifadeleri takibini sağlamak için bir yoldur. Farklı ülkelerde kullanılan matematiksel kodlara göre kabartma yazı değişiklik arz etmektedir. Nemeth kod sistemi Amerika, Kanada, Yeni Zelanda ve Hindistan’ da kullanılırken, Marburg kod sistemi ise Almanya ve Avusturya’ da, Fransa ve İngiltere ise kendine özgü kod sistemini kullanmaktadır. Uygulamadaki bu farklılık uluslararası matematiksel dil sorununun yanında kendi içinde bazı problemler barındırmaktadır. Özellikle ortaöğretim seviyesinde ve sonrasında Braille alfabede matematik kodlarını bilen DotPlus kabartma yazı stilinde ise görme engelli bireylerin karmaşık ve latin sembollerinden farklı karakterler kullanmasının önüne geçilmektedir. Bu stilde görme yetersizliğine sahip olmayan birey ile aynı matematiksel dil söylemlerini kullanmaları mümkün olmaktadır (bkz. Şekil 1). Böylece matematiksel içeriğin temsilini öğrenmek ve hatırlamak daha kolay olmaktadır. Görme engelli bireyler karmaşık kod dizilerini ezberlemek zorunda kalmamaktadır (Gardner, 2003).

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Şekil 1. DotsPlus formatında yazılmış basit bir denklem örneği

Görme engelli bireylerin matematiksel içeriklerle yaşadıkları güçlükler görme kaybından kaynaklanmamaktadır. Ayrıca kabartma yazı görme engelli bireyler için gerekli anlamsal bilgiyi sağlamaktadır. Matematik uygulamalarında yaşanan güçlüğün temel sebebi matematiksel içeriği sözlü olarak görmeyen bireye aktarma sürecinden kaynaklanmaktadır. Matematiksel kavramlara neredeyse her durumda görsel bir içerik eşlik etmektedir. Görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler matematiksel tartışmaları görsel içerikler üzerinden yürütebilirler. Bazı durumlarda görsel içerikler bu tartışmaların en önemli ve ayrılmaz bir parçası olabilmektedir. Ancak görme engelli bireylerin matematiksel tartışmaları yürütebildikleri tek kaynakları Braille yazıdır. Bu nedenle görme yetersizliğine sahip bireylerin tartışmalara katılabilmesi için köprü görevi sağlayacak uygulamalara ihtiyaç duyulmaktadır. Araştırmalar incelendiğinde matematiksel denklemlerin ve formüllerin yazılabilmesi için Xhtml, MathML, LaTeX ve ASCII Braille gibi programlar aracılığı ile teknoloji destekli çözüm önerileri dikkat çekmektedir (Cooper, Lowe, Taylor, 2008; Karshmer, Gupta, Pontelli, 2007). Ancak matematikte yer alan diğer görsel içeriklerin kabartmaya dönüştürülmesinde tasarlanan çalışmalar sınırlı sayıda kalmıştır (Karshmer, Gupta & Pontelli, 2007; Stanley, 2008, s. 888; Stoeger, Batusic, Miesenberger, Haindl, 2006).

2.4.2. Dokunmanın Rolü

Yapılan araştırmalar görme yetersizliğine sahip olan ve olmayan öğrencilerin matematiksel düşünme, algı, anlayışları gibi bilişsel süreçleri kıyaslamaya odaklanmıştır (Warren, 1984; Lowenfeld, 1948). Bu araştırmalara temel oluşturan Warren (1984), görme engelli ve görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin bilişsel yeteneklerinin gelişimi kıyaslandığında görme engelli öğrencilerin daha yavaş ve farklı yollarla öğrendiklerini belirtmiştir. Warren, dokunmanın çevremizdeki aynı veya benzer olaylarda görmenin sağladığı bilgiyi sağlayabileceğini belirtmiştir. Ancak dokunma, görme yetisinden önemli ölçüde farklılık arz etmektedir. Bu farklılık art arda bilgiye erişme ve mekânsal alanın çok daha az ayrıntılarının fark edilmesinde ortaya çıkmaktadır (s. 144). Görme engelli ve gözleri bağlanmış iki birey arasında dokunsal performansları farklılık arz etmektedir. Çünkü görme engelli birey için dokunma, tanıma ve yorumlamada önemli anlamlar ifade ederken, gözleri bağlanan birey görsel fikirler ileri sürerek çözüm önerileri aramaktadır. Bu nedenle görme tecrübeleri olan bireylerin dokunma duyusunun kör birey ile aynı rolü üstlenmesi beklenemez (Lowenfeld, 1948).

Görme engelliler, nesnelerin geometrik şekillerini, yönlerini ve aralarındaki mekansal ilişkileri öğrenmek için öncelikle dokunma duyusuna güvenmektedir (Argyropoulos, 2002). Bir insanın bir ortamda hareket etme kabiliyeti, eşzamanlı duyusal bilginin başarılı bir şekilde entegrasyonuna ve çevrenin içsel bir mekansal temsiline bağlıdır. Görme engelli bireylerin günlük hayat içerisinde mekânsal algıları incelendiğinde referans noktası belirlemede başarılı oldukları, belirledikleri bu noktaların uzun süreli hafızalarında yer ettiği, ancak bu noktalar arasındaki rotayı bir doğru ya da eğri olarak algılamakta güçlük çektikleri belirlenmiştir (Haber, Haber, Levin & Hollyfield, 1993). Basit iki boyutlu şekiller kolayca algılanabilse de, özellikle karmaşık formlardaki üç boyutlu nesnelerin anlaşılmasını sağlamak, bir eğitmenden fiziksel ve sözlü ipuçları şeklinde sürekli geri bildirim ile birlikte uzun süreli dokunsal keşif gerektirir (Argyropoulos, 2002). Bu işlem, nesnenin yeterli bir zihinsel temsili oluşturulup güçlendirilmesi için birkaç kez tekrarlanması gerekebilir.

Konumsal ve mekansal kavramları, küçük ölçekli uzayda öğretmek için benzer bir rehberlik gerekmektedir. Örneğin, soldan sağa, yukarıdan aşağıya, aşağıdan yukarıya gibi nesneleri birbirine doğru ve/veya uzağa doğru hareket ettirmek bir rehber olarak düşünülebilir (Potter, 1995).

2.4.3. Sözlü Anlatım/Betimleme

Önceki çalışmalar tek başına sözlü açıklamaların görme engelli bireylere görsel kavramları ve özellikle de matematiği iletmek için yeterli olmadığını göstermiştir (Koenig & Holbrook, 2000). Sınıf uygulamalarında aynı sözlü ifadeleri dinleyen öğrencilerden görsel anlatımdan yoksun kalan görme engelli öğrenciler daha az bilgiye erişmekte ve dolayısı ile anlamada güçlük yaşamaktadır. Sözlü anlatım muhtemelen görme kaybı olan bireyler için dünyaya erişim sağlamadaki en eski ve en yaygın yoldur. Bu durum görme engelli öğrencilerin öğretmenlerini sınıftaki ve uygulamadaki nesneleri tanımlamaya, ders öğretiminde yaptıklarını açıklamaya ve sesli okudukları bir kitaptaki çizimleri tarif etmeye teşvik eder. Görme engelli alan öğretmenlerinin çok azı, biçimsel yöntemlerin veya standart tekniklerin eksikliğinden dolayı alan eğitimi öğreticilerine ve okul çalışanlarına bu tür açıklamaları nasıl gerçekleştireceklerini açıklayabilmektedir. Örneğin, bir nesneyi tanımlarken, kişi büyüklüğüne, rengine, şekline, hareketlerine, seslerine veya bir çeşit vurgu ve nüansla amacına odaklanabilir. Kişinin bu nesneyi tanımlama stratejisi öğrenenin yaşı, deneyimi, kelime bilgisi seviyesi ve kavrama dair bilgisinden de etkilenmektedir. Bu tür informal açıklamalar gündelik bilgi için yeterli olsa da, öğretim materyali için formal açıklama dizisi gerekmektedir (Ely, Emerson, Maggiore, Rothberg, O'connell & Hudson, 2006).

Kabartma yazı edebi metinler ve matematiksel metinlerin her ikisi için de çeşitlilik arz etmektedir (Stanley & Karshmer, 2006; Stoeger, Miesenberger & Batusic, 2004). Bu nedenle öğretim uygulamalarında kabartma yazıda standart ve ortak bir dil anlaşması yapmak önemlidir. Matematiksel ifadeler karmaşık bir yapıya sahip olabileceği için görme engelli bireylere bu metinler okunurken '*bölümleme (chunking)*' stratejisi kullanılmaktadır. Bu stratejiye göre matematiksel ifadeler küçük bölümlere ayrılır, ilk olarak bu bölümler okunur ve daha sonra bu parçalar birleştirilerek bütün okunur (Cooper vd., 2008, s. 931). Daha genel olarak görme engelli bireyler için sesli betimlemede matematiksel ifadeler arasında boşluk, yani sessizlik bırakma, istenilen anlamı sağlamak için kullanılır. Ayrıca terimlerin gruplandırılmasında gruplar arasında boşluk bırakmak iyi bir yöntemdir (Edwards & Stevens, 1994).

Görme yetersizliği olan somut işlem dönemindeki öğrenciler, görme yetersizliğine sahip olmayan akranlarının etrafındaki dünyayı tesadüfen gözlemleyerek geliştirdiği kavramlar için öğretime ihtiyaç duyması nedeniyle iyi hazırlanmış görsel anlatım tanımlarından yararlanmaktadır. Bir çocuğun somut işlemlerden soyut fikirlere geçmesi algılama ve kavrayış sürecine bağlıdır. Görme engelli, özellikle de 7-11 yaş aralığında, çocuklar deneyimlerini ve nesnelerini sıralamak ve ilişkilendirmek için yeterli bir bilgi tabanı oluşturmada ve sınıflandırma sistemlerini kurmada daha yavaştır (Scholl, 1986). Ebeveynler ve öğretmenler görme engelli çocuklara dokunarak keşfedilemeyen birçok nesne ve kavramın modellerini ve/veya açıklamalarını sunmaları için teşvik edilmektedir. Bazı araştırmalar, dil gelişimini teşvik etmede kelime anlamlarını genişletmek ve incelemek, sembolik dili kullanmak (Andersen, Dunlea & Kekelis, 1984) ve kişisel davranış becerilerinde özel bir eğitim sağlamak için görme engelli çocuklarla betimleyici dili kullanmanın ne kadar önemli olduğunu vurgulamaktadır (Warren, 1994). Ely, Emerson, Maggiore, Rothberg, O'connell ve Hudson (2006) geliştirdikleri video okuyucu materyal projesinde, öğretim programında yer alan kavramların ayrıntılı betimlenmesine, tanımlanmasına, açıklanmasına ve ilişkilendirilmesine "*genişletilmiş betimleyici bilgi (extended descriptive information)*" olarak adlandırmaktadır. Bu tanımlamalar yapılırken kavramın terim olarak ifade edilmesi daha sonra açıklamaların yapılmasının görme engelli öğrencilerin yanı sıra öğretmenleri tarafından da tercih edildiği belirlenmiştir.

Görme engelli öğrencilerin dahil olduğu sınıflarda öğretmen, cebirsel ifadeleri ve bu ifadelerin anlamlarını doğru bir şekilde ifade etmeye daha fazla özen göstermelidir. Örneğin, $(x + 3)^2$ cebirsel ifadesini öğretmen, 'x artı 3' ün karesi' şeklinde ifade etmek yerine 'x artı 3 (durakla) karesi' olarak seslendirmelidir. Çünkü ilk durumda öğrenci '$x + 3^2$' olarak algılayabilir. Bu belirsizlik görme yetersizliğine sahip olmayan öğrenci için kolay algılanabilir olsa da görme engelli öğrenci için karışıklığa sebep olmaktadır. Söylemlerde cebirsel ifadelerin ayrıntılı betimlenmesinin önemi pek çok kavramın öğretiminde ortaya çıkmaktadır. Betimlemede köklü ifadeler veya rasyonel ifadeler gibi kök içindeki ya da paydaki terimlerin doğru şekilde açıklanması gerekmektedir. Daha açıklayıcı olmak için örnek durumlar üzerinden inceleyebiliriz. $\frac{2+\sqrt{x^2-3}}{y}$ cebirsel ifadesinde okuyucu öncelikle köklü ifadenin içindeki terimleri, daha sonra ikinin eklendiğini ve son olarak tüm bu ifadenin paydasında y-nin olduğunu belirtebilir. Başka bir yöntem olarak '*sağ ve sol parantez*' söylemi ile parantez açma ve parantez kapatma fikri kullanılabilir. Parantezler pay ve paydayı ayırma, köklü ifadenin kök içindeki terimini ya da üslü ifadenin kuvvetini betimlemeye yardımcı olmaktadır (Dick & Kubiak, 1997, ss. 344-345; Spindler, 2006; Stevens, Edwards & Harling, 1997). Ayrıca grafik gibi görsellik içeren kavramlarda kullanılan terminoloji önem arz etmektedir. 'Burada, orada, bu ve şu' gibi belirsiz yönlü ipuçları veya söylemlerden kaçınılmalıdır. Grafik incelenirken görme engelli bireye titizlikle açıklamalar yapılmalı ve bireyden teyitler alınarak anlatıma devam edilmelidir. Bireyden teyit almak için 'Bu çizgiyi fark ettin mi? Bu noktadan başlayarak şu noktaya kadar devam ediyor.' gibi sorulardan ve/veya dokunsal hislerden yararlanılabilir. Sınıf uygulamalarında benzer betimlemelerin yalnızca göremeyen öğrenciler için değil, görme yetersizliğine sahip olmayan akranları için de anlamanın pekişmesinde faydalı olduğu belirtilmektedir. Benzer şekilde sınavların uyarlanması, ek sürenin verilmesi, okuyucunun soruları tekrar tekrar okuması önemlidir. Bu durum görme yetersizliğine sahip olmayan öğrencinin cevapladığı veya cevapsız bıraktığı soruyu tekrar incelemesine benzemektedir (Dick & Kubiak, 1997, ss. 344-345; Stevens, Edwards & Harling, 1997).

Spindler (2006) bir üniversite öğrencisinin analiz derslerindeki tecrübelerini inceleyen araştırmasında matematik ve mühendislik gibi teknik bölümlerde eğitim gören görme engelli bireylerin deneyimlerini paylaşmayı amaçlamıştır. Araştırmaya konu olan öğrenciye yardımcı olması için destek eğitim ofisinden bir okuyucu ders notlarını okumuş, problem çözümlerinde işlem takibini ve tekrar yapmasını sağlamıştır. Görme yetersizliğine sahip olmayan öğrencilerde olduğu gibi görme engelli bireylere kavramlar açıklanırken, kavramların tanımlarının sunulmasının ötesinde açıklamalara ihtiyaç vardır. Bu açıklamalarda kullanılan dil bir süre matematiksel iletişimin kurulması ile gelişmektedir. Başka bir ifade ile birkaç problem çözümünden sonra okuyucu/destek eğitim uzmanı ile görme engelli birey arasında ortak bir iletişim dili kurulmaktadır. Ayrıca aynı sınava tabi olan görme engelli öğrencinin görme yetersizliğine sahip olmayan akranlarına göre daha fazla sınav süresine ihtiyaç duyduğu belirtilmektedir. Okuyucu ve görme engelli birey arasındaki iletişim güçlendikçe daha soyut kavramları algılamak kolaylaşmaktadır. Spindler (2006) araştırmasında destek eğitim sürecinde okuyucu bireyin değiştiğini ve bu nedenle görme engelli öğrencinin daha görsel unsurlar içeren çok katlı integraller gibi kavramları anlamakta zorlandığını belirtmiştir. Bu nedenle daha önceki eğitim veren okuyucu ile tekrar çalışmaya devam ettiklerini ifade etmiştir. Söz konusu iletişimde ne hakkında konuşulduğunun açıkça tanımlanması gerektiği vurgulanmıştır. Anlatımda 'bu, şu' gibi ifadelerden kaçınmak gerektiği belirtilmiştir.

2.4.4. Teknoloji Desteği

Karshmer, Gupta ve Pontelli (2007) görme engelliler için matematiğin erişilebilir olmasını, engelli bireyin matematiksel bir dokümanın tamamına erişebilmesi şeklinde açıklamıştır. Bu sadece bireysel matematiksel ifadelerin erişilebilir olduğu anlamına gelmemektedir, örneğin bir ispatta ortaya çıkabilecek ifadelerin dizisine de erişilebileceği anlamına gelmektedir. Matematiği erişilebilir kılma yaklaşımları *statik* ve *dinamik* olarak iki türde ele alınmıştır.

Statik yaklaşım teknolojik materyaller yardımıyla belge üretmek, Braille ekranın kolay değiştirilebilir ve ileri geri okuma yapılabilir olmasıdır. Dinamik yaklaşımda farklı olan matematiksel içeriğin etkileşimli bir şekilde değiştirilme, düzeltilme ya da kolay erişimi olan programla desteklenme biçimidir. Birey aradığı matematiksel içeriği metin içinde rahatlıkla erişebilmektedir. Ayrıca belge dönüşümü ile semantik yapıya dönüşümü mümkün olmaktadır.

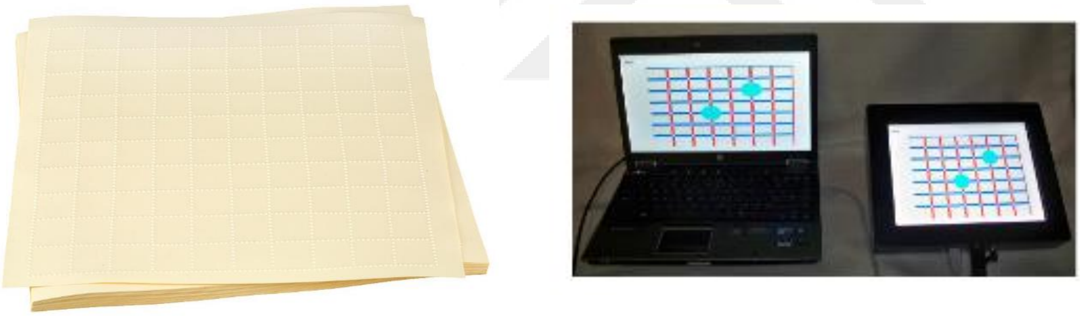
Teknoloji destekli materyallerin sunduğu en önemli katkı ekran okuyucu programlarda karşımıza çıkmaktadır. Erişilebilir medya destekli programlar ile sadece ekran okumanın ötesinde özel olarak düşünülmüş analojiler ve açıklamalar ile tanımlamalar sunmaktadır. Matematiksel kavramlar ve özellikleri hakkında materyaller ve tanımlamalar içeren medya destekli programlar sözlü betimleme veya yalnızca materyal destekli uygulamalara göre görme engelli bireylerin kavramları anlamlandırmasında daha başarılı olduğu belirlenmiştir (Ely, Emerson, Maggiore, Rothberg, O'connell & Hudson, 2006). Matematiksel semboller ve şekiller ekran okuyucu programlar için büyük bir güçlük (Başkurt, 2015) oluşturduğundan farklı yazılımların oluşturulmasına zemin hazırlamaktadır. Mathtalk, York Üniversitesi tarafından 1991 yılında tasarlanan programlardan biridir. Teknoloji ve fen için erişilebilir matematik fikri ile matematiksel iletişime odaklanan Maths Projesi (Maths Project, 1994-1997) ile görme yetersizliğine sahip bireyler hedef kitlesi arasında yer almıştır. Bu projede Kathtalks programına yer verilmiştir. Böylece görme engelli bireylerin cebirsel temsillere görsel olarak ulaşması ve denklem çözme gibi manipulatiflerin uygulanması amaçlanmıştır. Ayrıca ileri matematiksel kavramlara ve grafik gibi görsel şekillere görme engelli bireylerin erişimini sağlamak amaçlanmıştır. Projeye başlamadan önce ihtiyaç analizinde görme engelli bireylerin matematikte yaşadıkları güçlükler için kendilerine ait çözüm önerilerinin olduğunu, ileri düzeyde matematikle uğraşan görme engelli birey sayının daha az olduğunu ve bu bireylerin mekanik erişim sorunları yaşadığını ortaya koymuştur (Edwards & Stevens, 1994).

Elektronik materyallerden yararlanan Jafri, Aljuhani ve Ali (2015) dokunsal şekillerin algılanmasını sağlayan bir arayüz tasarlamışlardır. Bu bilgisayar destekli tasarım yardımıyla temel şekillerin üç boyutlu gösterimleri mümkün olmuştur. Üç boyutlu bu nesnelerin yüzeyleri kabartma yazılar ile etiketlenerek öğrencinin dokunma duyusuna hitap etmektedir. Ayrıca sesli yönlendirme komutu ile şekilleri düzlem üzerinde hareket ettirmeleri ve tasarlamaları mümkün olmaktadır. Tasarlanan bu program öğretmenlerin görme yetersizliğine sahip olan öğrencilerine geometri kavramlarını öğretmede kullanmaları için uygundur. Programın tasarlanmasındaki amaç, görme engelli öğrenciler için bireysel materyal ihtiyacının olması, materyal edinmenin maddi masrafları ve destek eğitim veren öğretmenlerin özel eğitime ilişkin bilgi eksikliği olarak sıralanmaktadır.

2.4.5. Matematiksel Kavramlar ve Materyaller

Grafikler bilgileri aktarma ve verileri anlamada temel araçlardan biridir. Matematik öğretiminde grafiklerin işlevi en açık şekilde görülmektedir. Gerçekten ortaokul seviyesinde sayı doğrularından karmaşık fonksiyon grafiklerine, eğrilerden yüzeylere kadar grafiklerin matematik öğretiminde temel kavramlardan olduğu açıktır. Bu durum görme yetersizliğine sahip olmayan öğrenciler için kesinlik arz ederken, kör öğrenciler matematiksel kavramların ve fikirlerin aktarıldığı grafiklere sınırlı erişimleri nedeniyle önemli bir dezavantaja sahip gibi görünmektedir (Van Scoy, McLaughlin & Fullmer, 2005).

Grafik çiziminde kullanılan basit somut materyallerden biri kabartma gridleri olan kabartma Braille graf kâğıdıdır (bkz. Şekil 2, (a)). Bu kâğıt bir pano üzerine yerleştirilerek, noktalar raptiyeler ile temsil edilerek ve ip yardımıyla grafikler oluşturularak kullanılabilmektedir. Bir başka yol ise yapışkan kâğıtlar ya da çubuklar kullanılmasıdır. Az gören öğrenciler için keçeli kalemler ile koyu renkli çizgiler kullanılabilir. Braille yazı kullanan öğrenciler için koordinatlar kabartma yazı olarak etiketlenebilir. Grafik çiziminde kullanılan bir diğer kâğıt türü kâğıdın arka yüzünü çevirmeye gerek duymadan basınçla kabaran Mylar kâğıttır. Bu özelliğe sahip kâğıt görme engelli bireylerin kendilerine ait grafik veya şekilleri çizmelerine olanak sağlamaktadır. Bu kâğıt üzerine rulet ile çizim yapmak da mümkün olmaktadır (Dick & Kubiak, 1997, s.347). Spindler (2006) kör ve zeki bir öğrencinin matematikte başarısız olması için bir nedenin olmadığını vurgulamıştır. Bu nedele görme engelli bir öğrenciye grafik oluşturmak için bir materyal (teknolojik vb) tasarlayıp temin etmek yerine şeklinin ve denkleminin nasıl olacağına ilişkin hayal kurması için fırsatlar sunulmasının daha yararlı olağınu vurgulamaktadır. Bu uygulama matematikte ve ilişkili yan alanlarda yaratıcı düşünme için sadece önemli değil, aynı zamanda gerekli görülmektedir. Bu süreçte Nemeth (1996), yalnızca sözlü anlatımın (okuma, betimleme vb) matematiksel ifadeleri manipüle etmede yeterli olmadığını belirtmektedir. Bu nedenle dokunsal materyaller teknoloji desteği ile eş zamanlı olarak işitsel özellikler ile desteklenmektedir (Edwards & Stevens, 1994; Van Scoy, McLaughlin & Fullmer, 2005, bkz. Şekil 2, (b)).



(a) (b)

Şekil 2. Kabartma graf kâğıdı (a) ve teknoloji destekli grid (b)

Sadece işitsel veya dokunsal, ardışık olarak farklı sıralamalarda işitsel ve dokunsal, eş zamanlı olarak işitsel ve dokunsal materyaller ile görme engelli bireyler için grafik incelemede en uygun stratejileri belirlemeye ilişkin araştırmalar yapılmıştır (Dick & Kubiak, 1997; Edwards & Stevens, 1994; Van Scoy, McLaughlin & Fullmer, 2005). Doğrusal bir fonksiyonun grafiğini incelemek ve anlamak görme engelli birey için sezgisel olarak nispeten daha kolay olacaktır (Van Scoy, McLaughlin & Fullmer, 2005). Başka bir ifade ile soldan sağa doğru eşlemeleri gösteren noktalar için ellerini hareket ettirerek grafiği yorumlaması ve iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki doğrusal ilişkiyi anlamlandırması daha olası görünmektedir. Ancak matematik öğretiminde sıklıkla karşılaştığımız daha karmaşık ilişkileri gösteren grafiklerde görme engelli öğrencinin algılaması nispeten güçtür. Nitekim görme engelli birey dokunsal bir grafikte, aynı anda grafik üzerinde iki veya üç noktayı algılayamadığında grafiğin düz veya kavisli olduğunu belirleyememektedir (Van Scoy, McLaughlin & Fullmer, 2005). Grafik çizimi için geliştirilen Erişilebilir Grafik Hesap Makinası (Accessible Graphing Calculator) ses ve dokunsal gösterimlerin eklendiği bir grafik çizim programı destekli hesap makinasıdır (Gardner, Ungier & Boyer, 2006). Şekillerin kenarlarını belirlemeyi amaçlayan Ölçeklendirilebilir Vektör Grafiği (Scalable Vector Graphics) ile matematikte yer alan kavramların temsillerini göstermek mümkün olmaktadır (Krufka & Barner, 2005). MathGenie ve MathTalk Nemeth kod ve Latex ile yazılmış karmaşık denklemleri seslendirme programlarıdır (Karshmer & Farsi, 2007; McClellan, 2007; Stanley & Karshmer, 2006; Stevens & Edwards, 1993). Soundgraph ise basit doğrusal denklemleri seslendiren okuyucu programlardan biridir. Ancak bu programların ortak problemi karmaşık ifadeleri, tablo ve grafikleri algılamakta sorunlarla karşılaşmalarıdır (Edwards, Stevens & Pitt, 1995). Bu nedenle dokunsal ve işitsel desteklenmiş, eş zamanlı olarak düzenlemeleri mümkün kılan teknolojik materyal geliştirilmiş ve kullanılmıştır (Yu & Brewster, 2003).

Teknoloji destekli materyaller arasında grafik okumayı kolaylaştıran grid, nokta, doğru ve şekil gösterebilen dokunsal dokunmatik ekranlar yer almaktadır. Bu dokunsal materyalde görme engelli birey grafikte yer alan artış ve azalışı hissedebilmektedir ve grafik üzerindeki değişiklikler eş zamanlı olarak güncellenmektedir (Toennies, Burgner, Withrow & Webster, 2011, s. 373, bkz. Şekil 2, (b)). Öğrencilerin bu materyal yardımıyla gridlendirilmiş düzlem üzerinde verilen bir noktayı işaretlemeleri için öncelikle sadece yatay ve sonra sadece dikey gridleri incelemeleri sağlanmıştır. Ardından yatay ve dikey gridler ile incelemeleri için istedikleri kadar zaman verilmiştir. İncelemelerini tamamlayan öğrencilere koordinatları verilen noktaları işaretlemeleri beklenmiştir. Daha sonra işaretlenmiş noktaların koordinatlarını belirlemeleri istenmiştir. Dokunsal materyal daha sonra ses programı ile desteklenerek öğrencinin dönüt alması sağlanmıştır. Dokunsal materyal yardımıyla öğrencilere doğrultuları farklı üç doğru, üçgen, kare ve daire şekilleri farklı sıralarda iki kez sorulmuştur. Materyalin ses desteği ile doğru veya yanlış cevap verdiği bildirilmiştir. Görme engelli bireylerin koordinat sisteminde işitsel desteklenmiş dokunsal materyal ile çalışmalarının, sadece dokunsal materyal ile çalışma performanslarından daha iyi olduğu belirlenmiştir. Yalnızca dokunsal veya işitsel geri dönütlerden çok dokunsal ve işitsel geri dönütlerin görme engelli bireyler için daha verimli olduğu kaydedilmiştir. Bireysel değişkenlik göstermekle birlikte dokunsal ya da işitsel geri dönütün verilme sırası önemli farklılıklar arz etmemektedir (Toennies, Burgner, Withrow & Webster, 2011, ss. 375-377). Geliştirilen dokunsal materyallerin teknoloji ile entegrasyonu sınıf uygulamalarında aynı anda tüm öğrencilere bilginin ulaşmasını sağlamaktadır. Bütünleştirilmiş sınıflarda benzer materyallerin uygulanması görme yetersizliğine sahip öğrencilerin akranları ile eş zamanlı dersi takip etmesine fırsat sunmaktadır.

İleri düzey matematik kavramları üzerine görme engelli bireyler ile yapılan araştırmalar incelendiğinde ortaöğretim ve üniversite düzeyinde istatistik kavramlarına odaklandıkları dikkat çekmektedir (Carvalho Vita & Kataoka, 2014; Gibson & Darron, 1999; McCallister & Kennedy, 2001; Mechan, D. Hoffert & Hoffert, 1993). Gibson ve Darron (1999) istatistik kavramları odaklı görme engelli bireyler ile yürüttükleri çalışmalarında strafor, kil, plastik kaplı tel gibi manipülatiflere yer vermiştir.

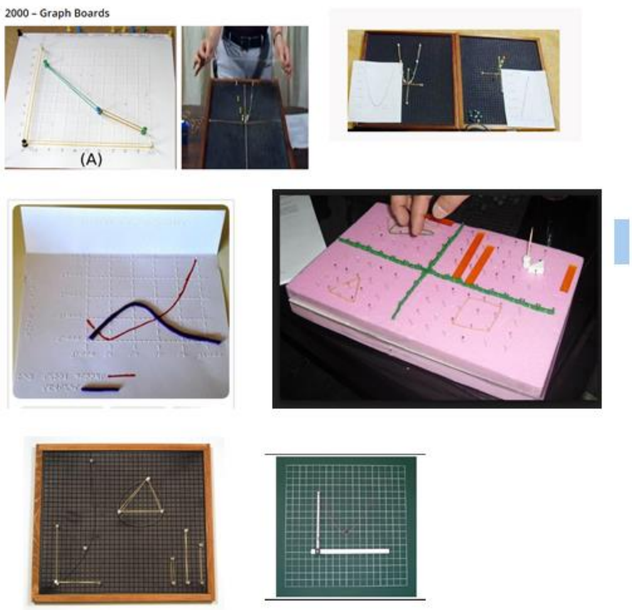
Spindler (2006) araştırmanın sonuçlarını incelerken katılımcı öğrencinin ortaöğretim eğitimi sürecinde görme kaybının olmamasının öğretim sürecindeki uygulamalara yansıdığını belirtmiştir. Bu durumun en önemli yansıması görme engelli öğrencinin parmağını tutarak masanın üzerinde çizgiler çizerek grafikleri oluşturmasının mümkün olmasıdır. Ayrıca katılımcının yüzeyler için çeşitli şekillerde kağıt parçaları kullanılabileceği ve kabartma kağıtlar üzerinde çizim yapılabileceği gibi kalem ve cetvel benzeri cisimlerden yararlanarak eğrileri hayal etmesinin mümkün olduğu ifade edilmiştir.

Görme engelli öğrenciler ile öğretim uygulamalarına başlamadan önce öğretmenin iyi tasarlanmış bir öğretim programına sahip olması ve uygulanacak strateji ve destek eğitim araçlarına hakim olması önemlidir. Görme engelli bireylere problem çözmede ya da kavram öğretimde bir strateji ile başlayıp daha sonra farklı bir strateji uygulanması, görme engelli birey için kafa karıştırıcı olabilmektedir. Görme yetersizliğine sahip olmayan öğrencilerde olduğu gibi problem çözerken ya da kavram öğretilirken tek ve basit bir yolla anlatmak önemlidir. Elbette seçilen yöntemlere hakim olduktan sonra çeşitli problemleri çözmek için ihtiyaç duyulan daha etkili yolların öğretilmesi de faydalı olacaktır. Çünkü öğretmenin tayin ettiği basit ya da etkili olarak nitelendirilen yöntemler problem çözmede her zaman etkili stratejiler olmayabilir (Spindler, 2006).

Görme engelli öğrenciler görme yetersizliğine sahip olmayan akranları gibi öğrendiklerini tekrar etme gereksinimi duymaktadır. Ancak kabartma yazı kitaplarda odak noktaları arama lüksüne kolayca sahip olunamamaktadır. Bu nedenle Spindler (2006) araştırmanın durumu olan kör bireyin, her bir kavram için kendisine rehber niteliğinde bir örnek problemi hatırlama eğiliminde olduğunu belirtmiştir. Bu sonuca dayanarak Spindler (2006) destek eğitim oturumlarında bir önceki uygulamada yer alan kavramları ve kullanılan materyalleri gözden geçirmenin ve bazen örnek problemlere yer vermenin gerektiğini belirtmiştir. Her yeni kavram öğretiminden sonra öğrencinin üzerinde çalışacağı temsili bir problem durumun seçilmesinin tekrar etme, hatırlatma veya yeni kavram ile ilişkilendirme için önemli olduğu vurgulanmıştır.

Cowan (2011) Ohio Üniversitesi’ nde gerçekleştirdiği tez çalışmasında görme engelli öğrencilerin üniversite düzeyinde cebir derslerinde lineer (doğrusal) fonksiyonlar üzerine anlayışlarına, tecrübelerine, sınırlılıklarına ilişkin birebir dersler yürütmüştür. Görüşmelerde somut materyal olarak delikli tahta materyaline yer vermiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin cebirsel temsil türlerinden sıklıkla tablo kullanmayı tercih ettikleri belirlenmiştir. Grafik okumada ise kullanılan materyalin etkili olduğunu, ancak bireysel stratejiler geliştirdiklerini belirlemiştir. Grafikleri incelerken öğencilerin sol ve sağ gibi yön ifadeleri ile artma ve azalmayı betimlemeye çalıştıklarını tespit etmiştir. Bu ifadeler öğrencilerin sözel anlatıma bağlılığının göstergesi olarak yorumlanabilir. Dinamik yazılımlar ile grafik temsilinin kullanılmasında öğrencilerin isteksiz olması ve somut mayeryal kullanmayı tercih etmesi önemli sonuçlardandır.

Matematik dersleri için temel somut materyaller görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı cetvel, iletki ve gönye araçlarının kabartma yazı ile desteklenmiş biçimidir. Ayrıca pergel için rulet denilen bir aparat kullanılarak kağıt üzerinde kabartma çizgi çizilebilmektedir. Küptaş kasa materyali ise zar büyüklüğünde, yüzleri üzerinde kabartma yazı rakamların ve dört işlem sembollerinin olduğu taşlar ve bu taşlar için yuva olabilecek büyüklükte birim küplere ayrılmış tabladan oluşmaktadır (Şafak, 2005, s.20). Bu materyal ile işlem yapma ya da hatırlatıcı notlar alma mümkündür.



Görme engelli öğrencilerin uygulamalarında geometrik şekillerin tasarlanması veya

Şekil 3. Görme engelli öğrencilerin kullandığı/kullanabileceği somut materyaller

grafiklerin incelenmesi için çeşitli somut materyaller tasarlanmıştır (bkz. Şekil 3). Somut materyal olarak destek eğitim araçları arasında yer alan iğneli sayfa ise Türkiye' de gerçekleştirilmiş ender tasarımlar arasında yer almaktadır. İğneli sayfa birim karelerin yer aldığı kağıdın üç boyutlu hale getirilerek görme engelli öğrencilerin de kullanımına uygun tasarlanmıştır. Materyal ekonomik, taşınabilir, anlaşılır, kullanışlı, esnek kullanımlı olarak tasarlanmaya çalışılmıştır. İğneli sayfa görme engelli öğrencilerin sadece basit matematiksel işlemleri yapmaları için değil, birçok matematik konusunu için uygulama yapabilmesine imkan sağlamaktadır. Ayrıca materyal kaynaştırma sınıflarında görme engelli öğrencilerin ve görme yetersizliğine sahip olmayan akranlarının birlikte çalışması için uygundur. Materyalde kabartma yazı ile Latin matematiksel semboller, sayı boncukları ve doğru parçası temsili için çubuklar yer almaktadır (Bülbül, Garip, Cansu & Demirtaş, 2012; Cansu Kurt, 2015). Böylece görme engelli bireyler ile diyagram, tablo, grafik gibi temsillerin yanında cebirsel işlmelerin de çalışılması için elverişlidir.

Horzum (2013) doktora tez çalışmasını görme engelli öğrencilerin geometrik temel kavramlara ilişkin algı, kavram imajı ve tanımı üzerine yapılandırmıştır. Görme engelli öğrencilerin açı ve üçgen gibi geometri kavramlarını açıklamaları ve üzerine düşünmeleri için metal çubuklar ve magnetik toplar kullanmıştır. Böylece doğu parçası ve nokta kavramlarını temsil eden somut materyyaller elde edilmiştir. Geometri alanında gerçekliştirilen bir diğer somut materyal olan geometri kafesi ile görme engelli öğrencilerin katı cisimleri yapılandırması mümkün olmaktadır (Horzum & Bülbül, 2017). Silindir bir yapı içine yerleştirilmiş 6 üçgen prizma yardımı ile çeşitli prizmalar elde edilebilmektedir. Ayrıca görme engelli bireyler prizmaların özelliklerini ve açınımını dokunarak inceleyebilmektedir.

2.5. Öğrenme Yol Haritası

Pek çok araştırmacı matematik ve fen eğitiminde öğrenme yol haritaları üzerine tartışmıştır (Barret vd., 2012; Battista, 2004; Brown, Clements & Sarama, 2007; Clements & Sarama, 2008; Clements, Wilson & Sarama, 2004; Confrey, Maloney, Nguyen, Wilson & Mojica, 2008; Duncan, Rogat & Yarden, 2009; Simon, 1995). Simon (1995) *tahmini öğrenme yol haritası* (*hypotetical learning trajectory)*, Brown ve Campione (1996) *gelişimsel koridorlar* (*developmental corridors)* ve *büyük fikirler* (*big ideas)* terimlerini kullanmıştır. Clements ve Sarama (2004), Confrey vd. (2008) *öğrenme yol haritaları* (*learning trajectories)* ve Catley, Lehrer ve Reiser (2005) *öğrenme performansları (learning performances)* olarak ifade etmektedir. Terminoloji farklı olsa da (learning progressions & learning trajectories vb.) öğrenme yol haritaları, temelde öğrenenlerin düşünmelerini ve öğrenmelerini organize etmektedir. Bu teoriler genel olarak öğrenme yol haritalarının sınıf uygulamalarını dönüştürme potansiyeline sahip olduğu konusunda hem fikirdir. Karakteristik farklılıklar ise bir öğrenme yol haritasının oluşturulmasını, boyutunu, öğretim rollerini, hedeflenen yaş gruplarının değişimini ve kullanıldığı kapsamı içermektedir (Daro, Mosher & Corcoran, 2011).

Literatürde yer alan öğrenme yol haritası tanımlamalarında benzerlikler ve farklılıklar yer almaktadır. Öğrenmenin gelişimi bağlamında incelendiğinde öğrenme yol haritasının araştırma sentezlerine ve kavramsal analizlere dayandığı belirtilmektedir (Smith vd., 2006). Öğrenme yol haritaları bir yandan öğrencilerin akıl yürütmelerine ve kavram üzerine odaklanırken diğer taraftan toplumsal beklentileri karşılamak amaçlanmıştır. Öğrenme yol haritaları sadece kavramsal bilgiye değil, kavramsal bilgi temelinde işlemsel bilgiye de odaklanmaktadır. Öğrenme yol haritalarına dayalı sınıf uygulamalarında öğrencilerin tümü tek bir öğretim dizisini değil, kendine ait öğretim dizisini takip etmektedir. Öğrenme yol haritalarının yapısı bağlamında teorilerin farklılıkları incelendiğinde öğrenmenin gelişimi ile belli zaman dilimlerinde öğrenci düşünmesinin gelişimini tanımlarken (Clements & Sarama, 2004), diğerleri belirli bir kavram ve öğretim ile öğrenci düşünmesindeki gelişimi tanımlamaktadır. Bu gelişim öğrencinin dakika dakika düşünmesindeki gelişimi tanımlayabileceği gibi bazı teorilerde öğretim programlarındaki küresel ilerlemeden bahsetmektedir (Battista, 2004; Confrey vd.,2008; Simon, 2006a). Diğer bir önemli farklılık ise öğrenci düşünmelerini nasıl tanımladıklarıdır. Öğrenci düşünmesi, öğrenci ilerlemesinde sayısal olarak ölçmeye odaklanabileceği gibi öğrencilerin bilişsel yapılarını, akıl yürütme türlerini veya kategorilerini tanımlamaya odaklanabilir. Bu araştırmalarının bazıları öğretmenler ve bazıları değerlendirmeciler için yazılmıştır (Battista, 2011; Simon, 2006b).

Battista (2011) öğrenme yol haritalarının tahmini (hypothetical) ve gerçek (actual) olarak iki tipte karşımıza çıktığını belirtmiştir. Simon (1995, s.136) her öğrencinin etkinlikler yolu ile öğrenme yolu elde edilmeden, gerçek öğrenme yol haritasının elde edilemeceğini belirtmektedir. Bu nedenle tahmini öğrenme yol haritası olarak ele almaktadır. Steffe (2004, s.131) başlangıçta kavramlar ve işlemler için bir modelin var olduğunu ve öğrencinin sınıf uygulamalarındaki etkinlikler ile etkileşim sonucunda gerçek öğrenme yol haritalarının elde edileceğini belirtmiştir. Clements ve Sarama (2004) karamsallaştırılmış öğrenme yol haritasında belli bir kavrama dayalı öğretim dizisi yardımıyla öğrencilerin yol haritalarını elde etmektedir. Böylece tahmini öğrenme yol haritalarında, düşünce seviyelerindeki ilerlemeyi tepit etmeye yarayan öğretim görevlerini belirlemektedir. Battista (2011) ise ilerlemeye değil öğretim sürecine odaklı öğrenme yol haritasından bahsetmektedir. Böylece öğretim programlarının ortalama bir öğrenme yol haritası şablonuna göre tasarlanabileceğini belirtmiştir.

Simon'ın (1995) tahmini öğrenme yol haritaları tanımının özel bir durumu olarak, Clements ve Sarama (2004) öğrenme yol haritalarını, program geliştirme perspektifinden belirli sıralı öğretimsel aktiviteleri dikkate alarak tanımlamaktadır (Bardsley, 2006). Clements ve Sarama (2004) öğrenme yol haritalarını, matematiksel amaç doğrultusunda öğrenenin belli bir matematik konusuna özgü gelişimsel ilerlemeleri ve bu ilerleme sürecinin matematiksel içeriğin daha derin anlaşılmasını sağlayan öğretimsel aktivitelerinin toplamı olarak ifade etmektedir. Bu ifadelerden yola çıkarak öğrenme yol haritaları, matematiksel kavramların ve becerilerin gelişimlerinin haritalanması ve belirli bir matematiksel konu alanında öğrenenin düşünmelerinin ve öğrenmelerinin betimlenmesi olarak tanımlanmaktadır. Matematiksel hedefler ve gelişimsel süreçler arasındaki ilişki, matematiksel hedeflerdeki çeşitli karmaşıklık, soyutluk ve genellik yapısının içerdiği süreçler olarak ortaya konmaktadır. Clements ve Sarama (2004) ilerlemenin çeşitli süreçlerinde öğrenci düşünmelerini gösteren akıl yürütme modellerini ve belirli zihinsel süreçlerini belirlemektedir.

Catley vd. (2005) öğrenme yol haritalarını, temel kavramsal yapıların (Case & Griffin, 1990) veya kavramsal yapıların bir araya gelmesi olarak tanımlanan büyük fikirlerin (Schifter, 1998) gelişimsel bir süreci olarak iddia etmektedir. Bu nedenle Catley vd. (2005) öğrenmeyi temel kavramlar etrafında öğretim ve değerlendirme yapan temel fikirler olarak ele almaktadır. Ayrıca öğrenme için yaş ve sınıf değişkenlerinin yanında öğretimin olası gelişimsel bir koridor (prospective developmental corridor) (Brown & Campione, 1996) veya kavramsal bir koridor (conceptual corridor) (Confrey, 2006) izlemesini önermektedir. Gelişimsel bir koridor, temel kavramların ilk okul yıllarındaki öğrenenin tecrübelerini belirlediğini ve kademeli olarak geliştirilip genişletildiğini ortaya koymaktadır.

Öğrenme yol haritaları her seviyede müfredat geliştirmek (Clement vd., 2004), hedeflere ulaşılıp ulaşılmadığını, uygulamayı ve öğrenme sürecini değerlendirmek (Battista, 2004; Confrey & Maloney, 2010) ve öğretmen eğitimi için (Mojica, 2010) faydalı bir alan yazına sahiptir. Öğrenme yol haritaları ile öğrenci düşünmelerine erişen öğretmenler, öğrencilerin gelişimsel seviyelerine dayalı hedefler belirleyebilmektedir. Böylece öğrenci çalışmalarını inceleyip (Wilson, 2009), öğrenci düşünmelerindeki gelişimi takip edebilir (Confrey vd., 2008) ve etkili bir değerlendirme (McCool, 2009) yapabilir. Öğrenme yol haritalarını incelemek kavram yanılgılarının yanı sıra öğrencinin stratejilerini de tahmin edebilmeyi sağlamaktadır (Myers, 2014). Tüm bu yararlarının toplamında öğrenme yol haritası öğretim programlarının tasarlanması veya geliştirilmesi için çerçeve sunmaktadır. Ayrıca etkili öğretim uygulamalarını ve öğrenci öğrenmelerini sağlayan, gelişmiş standartları olan ve daha iyi tasarlanmış müfredatlar elde edilecektir (Corcoran vd., 2009; Wilson, 2009).

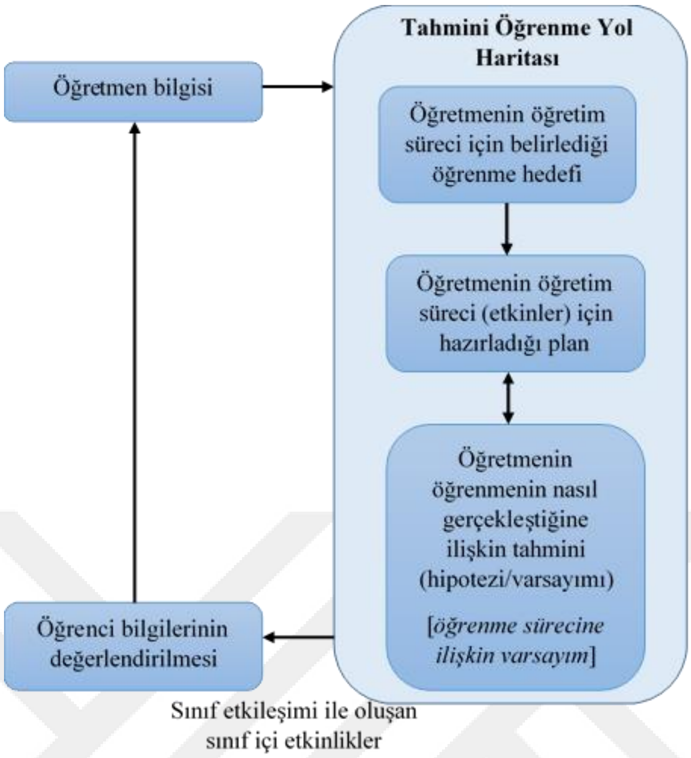
Araştırmacılar yukarıda bahsi geçen katkılarının yanı sıra, öğrenme yol haritaları kullanmanın bireysel yararlarının olduğunu belirtmişlerdir. Çocuklarda özellikle erken yıllarda matematik gelişimi önemli olduğu için çocukların bu yıllarda matematik bilgilerinin daha sonraki yıllardaki matematik başarılarını ve onların okul hayatı boyunca devam eden kariyerlerini etkilediği bilinmektedir (Sarama & Clements, 2009). Çocukların düşünceleri, matematik öğrenmede doğal gelişimsel bir yol izlediğinden öğretmenlerin bu yolu anladıklarında ve çocukların ilerlemelerine dayalı olarak aktiviteler sunduğunda, gelişimsel olarak uygun ve özellikle etkili matematik öğrenme çevreleri inşa edilebileceği düşünülmektedir. Ayrıca öğrenme yol haritalarında çocukların matematiksel akıl yürütmelerinin gelişimini açıklayıcı ve destekleyici kullanışlı araçlar da yer almaktadır (Sarama & Clements, 2009).

2.5.1. Tahmini Öğrenme Yol Haritası

Öğrenme yol haritası kavramını literatüre kazandıran Simon (1995), öğrenme yol haritalarının temelinin yapılandırmacı yaklaşıma dayandığını belirtmektedir. Simon (1995) öğretmenin ders planının önemli bir değişken olduğunu vurgulamak için *tahmini öğrenme yol haritaları* olarak belirli süreçlerden bahsetmektedir. Bu süreç öğretmen bilgisi, öğrencinin matematiksel görevlerle ilgili seçimi, etkinlik sırası bileşenlerinden oluşmaktadır. Simon için tahmini öğrenme yol haritası üç bölüm içermektedir: öğrenmenin yönünü belirleyen *öğrenme amacı*, *öğrenme aktiviteleri* ve öğrenme aktiviteleri bağlamında öğrencilerin *düşünce ve anlayışlarının nasıl geliştireceğidir* (Simon, 1995, sf. 133). Simon' a (1995) göre bir öğretmenin öğrenmenin ilerlemesine ilişkin tahminini/hipotezini içeren bir tahmini öğrenme yol haritası; öğrenme hedeflerini dikkate alan öğretim tasarımını, öğrenme etkinliklerini ve öğretmenin olası öğrenci öğrenme ve akıl yürütme tahminlerini ortaya koymasını sağlamaktadır.

Confrey vd.' ne (2008) göre öğrenme yol haritası temsillerin ve ifadelerin ardışık olarak geliştirilmesi ile ilerleyen süreçte öğrencilerin informal fikirlerden daha karmaşık kavramlara doğru düşünmelerinin gelişmesi amacıyla araştırmacı tahminine dayanan sıralı yapılar ağı (etkinlikler, destek eğitim araçları, değerlendirme yöntemleri vb) olarak tanımlamaktadırlar. Öğrenci düşünmelerinin gelişimi, öğretmenin/araştırmacının tahminleri ve tasarlanan etkinlikler arasındaki ilişkiyi Simon (1995), tahminlerden yola çıkarak tasarlanan etkinler aracılığı ile öğrencinin düşüncelerine yön verebilme süreci olarak açıklamaktadır. Bu nedenle öğretmenin/araştırmacının öğrencilerin öğrenme sürecindeki olası yolların hepsini göz önüne alması öğrencilerin düşünmelerinin farkında olmaları açısından önem arz etmektedir. Dolayısı ile öğrenme yol haritasının elde edilmesi sürecinde tasarlanan etkinlikler tahminlere dayalıdır ve tahminler ise tasarlanan etkinlere dayanmaktadır. Bu döngüyü Simon ve Tzur (2004), tahmini öğrenme yolunun oluşum süreci ile açıklamaktadır. Bu süreci açıklamak gerekirse, tahmini öğrenme yol haritası öğrenci önbilgisine ilişkin anlayışa dayanmaktadır. Seçilen bir tahmini öğrenme yolu, amaçlanan kavrama ilişkin öğrenme sürecinin planlanmasında bir araç görevi üstlenmektedir. Tasarlanan matematiksel etkinlikler öğrenmeyi oluşturmada araç sağladığından öğretim sürecinin temelini oluşturmaktadır. Söz konusu süreçte kritik nokta öğretmenin/araştırmacının öğrenmenin gerçekleşmesi için her yönü ile tahmini öğrenme yolunu değerlendirmeli ve düzenlemelidir. Nitekim Smith, Wiser, Anderson ve Krajcik (2006, s.1) öğrenme yol haritalarını birey öğrenirken birbirini takip eden etkinlikler silsilesi içinde birbirini takip eden akıl yürütme süreçleri olarak açıklamaktadır.

Confrey (2006) öğrenme yol haritalarının lineer bir süreç olmadığını ve her öğrenci için birbirinden farklı olabileceğini vurgulamaktadır. Bu nedenle etkili bir matematik eğitimi için Simon (1995) matematiksel kavram ve bu kavramı anlama, bu kavramın nasıl öğretildiği ve öğrenildiği bileşenlerinin etkileşimini anlamaya odaklanmıştır. Genel olarak ilişkinin temsil edildiği Şekil 4’ te tahmini öğrenme yol haritasının bu süreçteki etkisi gözlenmektedir.



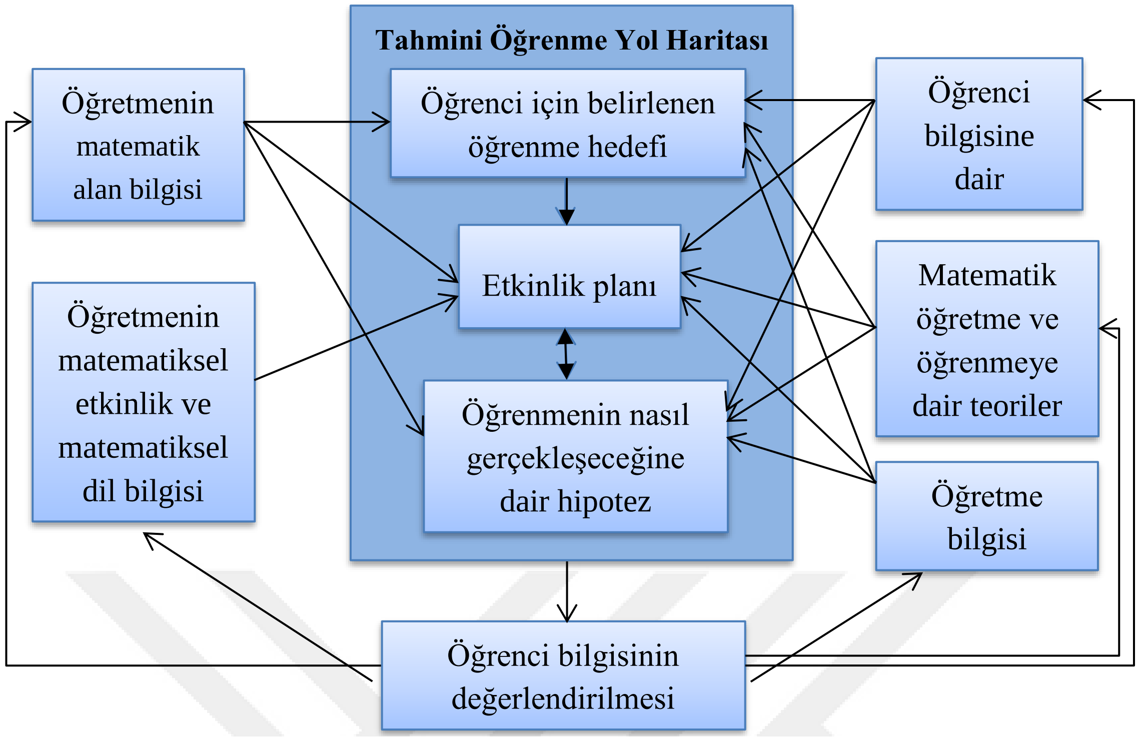
Şekil 4. Simon Matematik Öğretim Döngüsü (1995; 2014, s.136)

Simon (1995, s.135) öğretmenlerin teorikte öğrencilerin kavramı nasıl yapılandıracağına ilişkin tahminlerinin olduğunu ve bunu pratikte test etmenin mümkün olduğunu belirtmiştir (süreç için bkz. Şekil 5). Üstelik uygulama sonucunda edinilen deneyime dayanarak değişiklik yapamak mümkündür. Nitekim bireyin gerçek öğrenme yol haritası önceden bilenemez, yalnızca karakterize edilebilirdir. Bu nedenle öğretmenler/araştırmacılar, öğrencilerin öğrenmelerini ve akıl yürütmelerini, sınıftaki eylemlerini, değerlendirmeleri dikkatle inceleyerek tahminler yapmalıdır. Ancak bu şekilde tahmini öğrenme yol haritası, öğretmenlerin öğrencilerinin öğrenme ve düşünme süreçlerini anlamalarına yardımcı olacaktır. Bu gerekçeye dayanarak Battista (2004) öğrenme yol haritalarının eğitim uygulamalarını değerlendirme için yararlı bir giriş olarak ele almaktadır.

Simon (2017) etkinlikler ile öğrenme sürecinde öğrenme yol haritaları belirlenirken, belirli bir soyutlamayı teşvik edebilecek bir dizi görev (hedef) belirlemenin gerektiğini vurgular.

Bu hedef dizilimi, eğitmenin kritik sorular sormadan, çözümler göstermeden, ipuçları veya önerilerde bulunmadan çalışmasını gerektirmektedir. Ayrıca hedeflerin dizilimi, öğrencilerin desteğe ihtiyaç duymadan soyutlama yapmalarını sağlamalıdır. Bu durum öğretmenlerin süreçte bir rol almadığı anlamına gelmemektedir. Öğretmen matematiksel çalışma için normlar geliştirmek, uygun zamanlarda gerekçeleri sunmak, semboller ve kavramları tanıtmak ve öğrenilen soyutlamayı kavramsallaştırmak için tartışmalarda rol almaktadır. Ayrıca, öğretmenler öğrenci ilerlemesini izleyebilmeli ve öğrenci ilerlemesinde gerektiğinde görev (adım) dizilimlerini değiştirebilmelidir.

Simon (1995) bir dersin tasarlanmasına atıfta bulunmak için tahmini öğrenme yol haritasından bahsederken öğretmen bilgisi, öğrencinin matematiksel etkinliklerde seçimi ve etkinlik sırasından bahsetmektedir. Bu nedenle Simon (2014) ders planlanmasına, materyal geliştirilmesine ve öğretim etkinlikleri tasaralanmasına bir araç olarak bu teoriyi şekillendirmektedir. Bu süreçte öğretmen/araştırmacı, öğrenme hedef veya amacını belirleme, öğrenmeyi destekleyecek veya geliştirecek etkinlikler tasarlama ve öğrencinin anlaması veya düşünme sürecinin nasıl gelişeceğine dair hipotezlere karar verme görevlerini gerçekleştirmelidir. Tahmini öğrenme yol haritası tespit edilirken öğretmen kendi bilgisi dahilinde öğretim programının belirlediği şekilde hareket etmelidir. Simon (1995) tahmini öğrenme yol haritaları tasarlarken kavramın doğasının, öğrenme ortamının, olası öğrenci yanılgılarının ve güçlüklerinin ve hazır bulunuşluk düzeylerinin göz önüne alındığını vurgulamaktadır. Bu yol haritası her uygulamadan sonra gerekli düzenlemeler ile yenilenmektedir. Yol haritalarını oluştururken öğrenenin öğrenme veya düşünme süreçlerine ilişkin hipotezlerin ortaya konulmasında, kavrama dair matematiksel bilgi ve öğretmen bilgisi önem arz etmektedir. Bu süreçte Simon (1995, s.137) değişkenler ve etkileşimlerine ilişkin Şekil 5’ teki modeli ortaya koymuştur.



Şekil 5. Simon' ın (1995, s. 137) matematik öğretim döngüsü

Simon (2017) etkinlikler yardımıyla öğrenme (learning through activity) fikrini ileri sürmesinde hedefinin, matematik pedagojisine temel teşkil edebilecek bir matematik kavram öğrenme teorisi oluşturmak olduğunu ifade etmiştir. Bu doğrultuda öğretim dizileri tasarımlarındaki ilk iki adımın çeşitli tasarım yaklaşımlarının bir parçası olduğunu belirtmektedir. İlk adımda, öğretim dizisini başlatabilmek için gerekli önbilgileri belirlemek gerekmektedir. Bu adım, tasarım yaklaşımında özellikle önemlidir, çünkü öğrencilerin etkinliklerinin bir parçası olarak başvurabilecekleri kavramları belirlemektedir. İkinci adımda ise öğrenciler için özel öğrenme hedeflerini belirlenmektedir, teoriye göre başka bir ifade ile öğretilmesi düşünülen soyutlamalar açıkça ifade edilmektedir. Sonraki adımda, yansıtıcı soyutlama fikrinden doğrudan yararlanılmaktadır. Bu adımda hedeflenen soyutlama için ham materyaller (gerçek veya tahmini) olabilecek öğrencilerin erişebileceği bir etkinlik (kavramlar veya eylemler dizisi) belirlenir. Burada araştırmacıların öğrencilerin soyutlamaya nasıl ulaşacağına dair önceden bilgisinin olması gerekmektedir. Son adım ise etkinlikler dizisinin tamamlanmasıdır. Bu etkinler dizisi öğrenciye bağlı olarak değişebilmektedir. Bazen beklenilen sırada ve yalnızca tasarlanan etkinlikler ile soyutlama gerçekleşirken, bazı durumlarda öğrenci için etkinlik sırasını değiştirmek gerekebilir veya ek etkinlikler tasarlamak gerekebilmektedir. Bu dört adımı sembolleştirme, tanımın sunulması veya kuramsallaştırma adımları izleyebilmektedir.

Simon' ın kavram öğrenme yaklaşımda temel aldığı yansıtıcı soyutlama fikri Piaget' in çerçevesine dayanmaktadır. Piaget (1980) yeni ve daha kapsamlı kavramların var olan kavram bilgisinden elde edilmesi süreci olarak tanımladığı yansıtıcı soyutlamanın kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinde önemini vurgulamaktadır (Simon, Tzur, Heinz & Kinzel, 2004). Bireyler yaşadıkları çevreye uyum sağlarken zihinlerinde var olanları işe koşarken, aynı zamanda sosyal çevreleriyle etkileşim içerisindedir. Bu süreçte birey bilgilerini düzenler ve matematiksel kavramlara ilişkin anlayışlar oluşturur. Bir iletişim aracı olan dil yardımıyla oluşturdukları zihinsel şemalarında değişiklikler ortaya çıkmaktadır. Böylece bireyin zihinsel ve sosyal süreçlerinin etkileşimi ile öğrenme gerçekleşmektedir (Vygotsky, 1978). Bireylerin mevcut bilgilerinden daha üst düzeyde matematiksel anlamaları geliştirmek için öğrenme sürecinin ve belkide matematiksel etkinliklerin iyi tasarlanmış olması önem arz etmektedir. Tasarlanan bu öğrenme süreçlerinde bireyde var olan bilgi ve deneyimlerden yararlanarak, yeni kavramlara ilişkin matematiksel anlamalar meydana gelmesi muhtemeldir.

Simon (2003) matematiksel anlamanın, belirli bir örüntünün ya da ilişkinin/ilişkilerin mantıksal gerekliliğinin öğrenilmiş bir öngörüsü olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle matematiksel kavram öğretimi sırasında öğrencilerin düşüncelerinden ve eylemlerinden yola çıkarak, var olan bilgilerinin üzerine yansıtıcı soyutlamalar yaparak yeni kavramları inşa etmeyi sağlayan etkinliklerin tasarlanması gerekmektedir. Simon'un (2006a) mantıksal-matematiksel olarak belirttiği bu etkinlik ya da etkinlikler dizisi belirlenen amaç(lar) ve o amacı yerine getirmek için tasarlanmış öğrencilerin zihinsel eylemlerini içeren adımlardan oluşmalıdır.

Simon ve Tzur (2004) tahmini öğrenme yol haritasının niteliklerini dört maddede özetlemektedir:

i) Tahmini öğrenme yol haritası öğrencilerin önbilgilerini anlamaya dayanır.

ii) Tahmini öğrenme yol haritası belirli matematiksel kavramların öğrenilme sürecini planlamada bir araçtır.

iii) Matematiksel görevler (etkinlikler/adımlar), belirli matematiksel kavramların öğrenilmesini teşvik etmek için birer araç olarak öğretim sürecinin bir parçasıdır.

iv) Bu süreç hipotetik (varsayımsal/tahmini) ve belirsiz doğasından dolayı öğretmen/araştırmacı tahmini öğrenme yol haritasını her yönü ile değiştirme yetkisine sahiptir.

Etkinliklerin sıralanışında etkinlik tasarlama ve tahmini öğrenme yol haritası arasındaki çift taraflı ilişki göz önüne alındığında ilk etkinliğin belirlenmesi önemli bir güçlük gibi görünmektedir. Ancak burada önemli olan sıralanan hedeflere ulaşmada nereden başlamanın daha uygun olacağını belirlemektir. Başka bir ifade ile amaçlanan hedef başlangıç noktasını oluşturmaktadır. Burada uygun olma ile kastedilen kavramın doğasına ve öğrencinin önbilgisine göre sıralamanın yapılmasıdır. Etkinliğin her bir adımında öğrenciden gelecek cevap bir sonraki adımı belirlemektedir. Dolayısı ile her öğrencinin öğrenme yol haritası kendisine özgüdür (Simon & Tzur, 2004).

Simon ve Tzur (2004), etkinliklerin öğrenci düşünmesine etkisinden bahsetmektedir. Elbette öğrenme belirli bir bağlamda gerçekleştiği için yöneltilen tek bir soru bile öğrencinin düşünmesine ve sonuçta soyutlamasına etki edecektir. Simon ve Tzur (2004) etkilik-etki ilişkisinde öğrencinin daha ziyade bireysel soyutlamasını sağlamak için etkinlik adımlarında seçenekler oluşturmuştur. Bu seçenekler öğrencinin kendisine yöneltilen bir soruda ne yapmak istediğini seçmesi ile devreye girmektedir. Örneğin, problemi çözebilmesi grafik, tablo ya da cebirsel işlemler seçeneği olabilir. Öğrenci bu seçenekler içinden grafiği seçtiği zaman cevap vermek için seçenekleri olan yeni bir soru ile karşı karşıya kalmaktadır.

Böylece öğrenci kendi soyutlama sürecini tamamlama imkanı elde edecektir. Öğrencilerin öğrenme yol haritalarını fazla müdahale etmeden elde edebilmek için seçimlerin öğrenciye bırakıldığı, olasılıkları tahmin edebilen etkinlikler tasarlanmalıdır. Simon ve Tzur (2004) öğrencinin ilgisini çeken, dikkatini yoğunlaştırabileceği ve amaçanan öğrenmeye katkı sunabilecek bir etkiye sahip olan etkinliklerin tasarlanmasını vurgulamaktadır.

Daro vd. (2011) öğrenci anlamalarını elde edebilmek için öğretme ve değerlendirme süreçlerinin gerçekleşmesi gerektiğini belirtmektedir. Bu değerlendirme sürecinin amaçlı ve sistematik olarak biçimlendirici değerlendirme olması önem arz etmektedir. Bu nedenle öğrencilerin önbilgilerinden haberdar olmak gerekmektedir. Süreç değerlendirmesinde ise öğrencilerin kavramları nasıl öğrendiğine ilişkin değerlendirme yapılmalıdır. Bu unsurlar geliştirilmekte olan araçlara ve kaynaklara dahil edilmesi ile öğretmenlere, program tasarlayıcılara ve materyal geliştiricilere yol gösterici bir yapı sağlamış olacaktır. Öğrencinin nasıl öğrendiği ilkesi zaman içinde kavramların nasıl öğrenildiğine dair değerlendirmeler geliştirmektedir. Ayrıca ortak hataların, sorunların çözülmesine veya öğrenmeye engel olabilecek alternatif kavramları veya kavram yanılgılarını tespiti için önem arz eden problemlerin veya uygulamaların gelişmesine yardımcı olmaktadır.

2.5.2. Tahmini Öğrenme Yol Haritası ve Görme Engelli Bireyler

Görme yetisini tamamen kaybetmiş bireylerin duyu kanalları ile topladığı verilerden nesnelere ilişkin zihinlerinde bir resim oluşturdukları, yani zihinsel imgelemeye sahip oldukları ileri sürülmektedir (Cornoldi, Cortesi & Preti, 1991). Zihinsel imgeleme özellikle öğrenmede olduğu gibi yanı sıra hafızayı geliştirmede, mantıksal çıkarım yapmada, problem çözme becerisinde, yaratıcı düşünmede önem arz etmektedir (Cattaneo & Vecchi, 2011, ss. 49-75). Zihinsel imgenin (resim, şema, vb) oluşmasında algı devreye girmektedir. Görme yetersizliğinden etkilenen bireylerde algısal çeşitlilik, görme duyusunun yoksunluğundan kaynaklanarak diğer duyulardan (işitme, tatma, koklama, dokunma) gelen verilerle sağlanmaktadır (Heller, Melissa & Clark, 2005). Bu nedenle görme engelli bireylerin kavramları algıları, şemaları, düşünme süreçleri, kavrayışları, onlar tarafından algılanması kolay ve bilgiyi doğrudan aktaran materyallerin (Thinus-Blanc & Gaunet, 1997) desteği ile incelenerek öğrenme yol haritaları elde edilmelidir.

Görme yetisini tamamen kaybetmiş bireylerde dahi nesnelere ve kavramlara ilişkin sorular sorulduğunda beynin görmeden sorumlu bölgesi olan oksipital bölgenin aktifleştiği tespit edilmiştir. Bu tespit oksipital bölgenin işlevini görsel duyu ile gelen bilgiye doğrudan ihtiyaç duymadan yürütebildiğini göstermektedir. Bilişsel süreçleri biyolojik faktörler ile açıklayan bu çarpıcı sonuç öğretim uygulamalarında görme engelli öğrencilerin daha fazla kavram öğrenme ve geliştirme süreçlerine yer verilmesinin onların görsel imgelemenin gelişmesi için önemli olduğunu göstermektedir. Bir diğer ipucu ise görme duyusunu tamamen kullanmayan bireylerin defter ve kalem gibi nesneleri onlara dokunmadan bile zihinlerinde imgeleyebilmesidir. Bu ipucu kavram öğrenme sürecinde duyusal çeşitliliğin önemini vurgulamaktadır (Kızılaslan & Sözbilir, 2018).

Görme engelli bireylerin kavram öğrenme süreçlerinin içerdiği yukarıda bahsi geçen farklılıklar dikkate alındığında tahmini öğrenme yol haritalarının aydınlatıcı bir alan yazın sağlayacağı düşünülebilir. Nitekim görme engelli bireylerin cebir kavramları öğrenme ve cebirsel düşünme süreçlerine ilişkin ulaşılabilir sınırlı alan yazın yer almaktadır (Cowan, 2011; Cansu, 2014). Dolayısıyla matematik eğitiminin karşılaştığı önemli sorunlardan biri, görme engelli öğrencilerin yeni matematiksel kavramlar edinmesinin nasıl gerçekleşeceğidir. Bu güçlüğün üstesinden gelmek için matematik eğitimcilerinin öğrenme süreçlerini anlamaya ve matematiksel görevlerin öğrenme sürecindeki rollerini bilmeye ihtiyaçları vardır (Simon & Tzur, 2004). Sezgisel veya deneme yanılma ile öğrenmeye fırsat bırakmayan tahmini öğrenme yol haritası, aksine detaylandırılmış bir öğrenme süreci çerçevesi sunmaktadır. Bu detaylandırılmış çerçeve müfredat geliştirmede ve yeni bir kavram öğretiminde uygulamayı planlamada anahtar rol üstlenecektir. Tasarlanan öğretim programları da kavram öğretimi için bir çerçeve sunmaktadır, ancak öğrenme yol haritası etkili kavram öğretimi için sınıf uygulamları hazırlamaya da katkı sunmaktadır (Simon &Tzur, 2004). Görme engelli öğrencilerin düşünme süreçlerini incelemek, onlar için uygun öğretim uygulamaları tasarlamak, destek eğtim araçları önermek ve nihayetinde bireyselleştirilmiş eğitim programları ve/veya materyaller tasarlamak için tahmini öğrenme yol haritaları alan yazını elverişli olduğu söylenebilir. Nitekim Simon'ın (1995) tahmini öğrenme yol haritası modeli matematik sınıflarında pedagojinin işleyişini ele alıp öğrenme süreçlerini takip eden bir teorik çerçevedir.

Matematik öğretim döngüsünden (bkz. Şekil 5) de anlaşılacağı üzere öğrenciyi anlamada, öğrencinin önbilgi ve daha genel olarak hazır bulunuşluk düzeyine uygun ve öğrenme hedeflerini dikkate alarak ders etkinlikleri tasarlamada, bu doğrultuda materyal geliştirme ve en nihayetinde öğretim programı tasralamada ve geliştirmede öğrenme yol haritalarının etkililiği açıktır. Görme engelli öğrencilerin matematiksel bilgiyi zihinlerinde nasıl inşaa ettiği ve matematiksel düşünme süreçlerini nasıl geliştirdiğini belirlenmek isteyen bu çalışmada da öğrenme yol haritaları detaylı betimleme için ışık tutacağı düşünülmektedir. Böylece görme engelli bireylerin matematik bilgisini geliştirmeye dair etkinlikler ve en nihayetinde muhtemel materyaller tasarlamak ve önermek mümkün olacaktır. Bir diğer dikkat edilmesi gereken nokta cebirsel bilgi ve cebirsel düşünmenin soyutluğundan kaynaklı belirlenmesi ve ortaya çıkarılmasının güçlüğüdür. Tahmini öğrenme yol haritaları, söz konusu süreçleri ve düşünmeleri ortaya çıkarmak ve döngüsel bir süreçle teyit etmek için kolaylık sunacaktır.

2.6. Cebir ve Cebirsel Düşünme Becerisi

Cebir, işlevine bağlı bir dil, problem veya düşünce aracı ya da bir müfredat dersi olarak ele alınabilir (Dede & Argün, 2003). Genel olarak cebir, sayı ve semboller kullanarak incelenen ilişki veya ilişkileri genelleştirilmiş denklemlere dönüştüren bir matematik dalıdır. Sfard (1995) cebiri hesaplama bilimi olarak incelerken, Kieran (1992) ise cebirin harflerle nicelikleri temsil ederek, bu sembollerle hesaplamalar yapmayı mümkün kıldığını belirtmiştir. Cebir, aritmetik işlemlerde sayılar yerine semboller kullanarak değişik ve basit çözüm yolları ortaya koyan bilim olarak ifade edilmektedir (Akkan, Baki & Çakıroğlu, 2011; Akkaya & Durmuş, 2006; Gürbüz & Akkan, 2008). Bu görüş doğrultusunda Tabach ve Friedlander' e (2003) göre 'genelleşmiş aritmetik' olarak tanımlanan cebir, çoğunlukla aritmetiğin sembolik tarafı üzerine yoğunlaşmıştır (akt. Akkan vd., 2011).

Literatür incelendiğinde cebir için söz konusu tanımlamalar arasında, matematiğin bir alanı olan soyut cebir için kullanılan sayı sistemleri ve bunlar üzerindeki işlemleri inceleyen çalışmalar dikkat çekmektedir. Bir diğer kullanım ise okul cebiridir. Okul cebiri, cebir öncesi, erken cebir ve lise cebiri gibi öğrenme alanlarına ayrılsa da temel olarak denklem çözümleri, fonksiyonlar ve onların grafik özelliklerini içermektedir (Argün vd., 2014, s.69). Cevabı bulmayı amaçlayan aritmetiğe kıyasla cebir, genel bir form bulma ve bu formu cebirsel semboller ile temsil etmeye odaklanmaktadır (Booth, 1984). Aritmetikten cebire geçişte öğrencilerin zorlanmasında bilişsel gelişim bakış açısı (Hart, 1981), cebirsel gösterimlerin kullanılması (Booth, 1984) ve değişken, fonksiyon gibi temel kavramların anlaşılmasındaki güçlükler (Usiskin, 1988) etkili olmaktadır. Nihayetinde *cebir,* yapı, bağıntı ve miktar ile ilişkili olan bilinmeyen değerlerin işaret ve harfler ile sembolize edilerek, kurulan denklemlerle bulunmasına ya da bilinmeyenler arasındaki bağıntıların tespitine dayanmaktadır (Argün vd., 2014:67).

Bu tanımlamalar dikkate alındığında aritmetikten cebire geçişteki zorluklar üzerine yapılan araştırmalarda da belirtildiği gibi cebir öncesi dönem, aritmetik ve cebir arasındaki ilişki ve cebirsel düşünme becerilerinin gelişimi önem arz etmektedir (Akkan vd., 2011; Akkaya & Durmuş, 2006; Dede & Argün, 2003; Gürbüz & Akkan, 2008; Kızıltoprak & Yavuzsoy Köse, 2007). Dede ve Argün (2003) cebirin anlaşılmasındaki engelleri kategorize ederken cebirin yapısı, öğrencilerin zihinsel gelişimleri ve hazır bulunuşluk düzeyleri, cebirin öğretimindeki eksiklikler olarak ele almaktadır. Bu kategoriler altında sembollerin kullanımı, cebirin dili, cebirsel kavramlar ve kulanılan yöntem ve tekniklerin önemi vurgulanmaktadır. Dede ve Argün (2003) hayatın içinde cebirin varlığına dayanarak, cebir öğrenmenin bireylerin bir ihtiyacı olduğunu belirtmektedir.

Cebirsel düşünme ve muhakeme becerisi öğrencilerin matematik derslerinde olduğu kadar günlük yaşamlarında karşılaştıkları güçlüklerin üzerinde düşünmeye, yorum yapmaya ve çözüm yolu aramaya yönelik zihinsel aktiviteleri de kapsamaktadır. Bireyin günlük yaşamında öğrendiklerine yer vermesi ve yaşadığı çevreyi anlamlandırması eğitimin bir parçası olarak yer almaktadır. Cebir öğrenme alanı için bu yargı kaçınılmaz bir süreci işaret etmektedir. Bu süreç cebirsel düşünme ve muhakeme edebilme becerilerinin bir ön koşulu olarak ele alınırsa, günlük hayatta karşılaştığımız güçlüklere karşı çözüm yolları bulmamıza yarayan bir araç olarak cebirsel bilgi karşımıza çıkmaktadır.

Kieran ve Chalouh (1993) cebirsel düşünmeyi, zihinde sembollerin ve işlemlerin anlamlarını inşa ederek matematiksel akıl yürütmenin gelişmesi olarak tanımlamaktadır. Bu tanımlamaya göre cebirsel sembolleri anlamak ve kullanmak cebirsel düşünmenin merkezini oluşturmaktadır. Herbert ve Brown (1997) ise cebirsel temsil türlerini odak alarak cebirsel düşünmeyi, sözel olarak ifade edilmiş matematiksel bilgiden elde edilen verileri şekil, tablo, grafik ve denklemlerle temsil etme olarak tanımlamıştır. Böylece matematiksel bulguları yorumlama (bilinmeyeni bulmak, ilişkileri tanımlamak vb), süreçte ve sonucu ifade etmede matematiksel sembolleri kullanma cebirsel düşünmenin tanımını tamamlamaktadır. NCTM'ye (2000) göre ise cebirsel düşünme kavram odaklı ele alınmıştır. NCTM raporunda yer alan açıklamada cebirsel düşünme, fonksiyonları anlamayı, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel temsil türlerini ve modeller kullanmayı, gerçek yaşamda karşılaşılan farklı durumlarda problemi çözebilmeyi kapsamaktadır. Daha kapsamlı olarak Kriegler (2004) cebirsel düşünmeyi (i) problem çözme, akıl yürütme ve farklı gösterim şekillerinden yararlanma becerileri gibi alanlarda matematiksel düşünme araçlarının gelişimi ve (ii) aritmetik, matematiksel dil, matematiksel modeller gibi temel cebirsel fikirler olarak ele almaktadır. Kriegler'in (2004) cebirsel düşünme açıklaması pek çok tanımı kapsayacak niteliktedir. Cebirsel düşünme tanımları incelendiğinde ister sembolleri merkeze alsın, ister temsil türlerine odaklansın veya işlem yapabilme veya ilişki kurma sürecini içersin her durumda elde edilen sonuçların muhakeme edilmesi esastır. Başka bir ifade ile cebirsel düşünmenin gerçekleşmesinde muhakeme etme süreci tetikleyici ve yürütücü görevini üstlenmektedir.

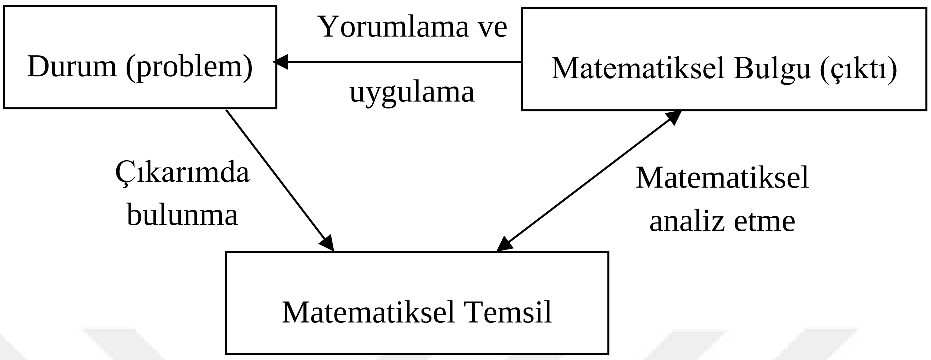
Literatürde *cebirsel düşünme*; zihinsel aktivitelerin bir yansıması olarak sembollere anlamlar yükleyerek cebirsel ilişkileri, farklı ve çoklu temsiller yardımıyla düşünceleri ortaya koymayı, cebirsel ilişkilendirme ile somut ve soyut kavramları muhakeme etmeyi kapsamaktadır (Kieran, 1992; Lawrence & Hennessy, 2002). Genel anlamada Lawrence ve Hennessy (2002) cebirsel düşünmeyi, olayları açıklamak ve tahmin etmek için bilgi veya olayları matematiksel bakış açısı ile daha iyi yorumlama anlayışı olarak ele almaktadır. *Muhakeme* ise, bir başka deyişle usavurma ya da akıl yürütme, bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma sürecidir. Bir konuda muhakeme yapabilenler, o konuda yeterli düzeyde bilgi sahibi ve yeni karşılaştığı durumu tüm boyutlarıyla inceleyen, keşfeden, mantık doğrultusunda tahminlerde ve varsayımlarda bulunan, düşüncelerini ortaya koyabilen, bazı sonuçlara ulaşıp ulaştığı sonucu açıklayabilen ve savunabilen birey olarak kabul edilmektedir (Umay, 2003, s. 235). Muhakeme, çeşitli düşünme tarzlarından oluşan bir bilişsel süreç olarak kabul edilebilir. Yackel ve Hanna (2003) muhakemeyi tümevarım, tümdengelim, ilişkilendirme ve çıkarsama gibi bilişsel süreçler olarak ve ayrıca öğrenenlerin problemleri çözmek için birbirleriyle etkileşime geçtikleri ortak bir faaliyet alanı olarak tanımlamaktadır. Lithner (2008) ise muhakemeyi, iddialar üretme ve sonuçlara ulaşmak için kullanılan bir düşünce aracı olarak nitelendirmektedir. *Cebirsel muhakeme* ise genellikle matematiksel muhakemenin önemli bir formu olarak ele alınmaktadır (Nilklad, 2004). Başka bir ifade ile cebirsel muhakeme nicel durumları göstererek, değişkenler arasındaki ilişkiyi ortaya koyma kapasitesi olarak tanımlanmaktadır (Driscoll, 1999).

Cebirsel düşünmenin bir diğer alt boyutu olan mantıksal düşünme stratejileri, akademik hayatta problem çözmeyi geliştirmesi ve başarıyı arttırmasının yanı sıra günlük yaşamdaki problemlerin çözümünü de kolaylaştırmaktadır. Günlük hayatta karşılaşan problemlerin çözümü sıklıkla mantıksal düşünme stratejilerini gerektirmektedir (Linn, Pulos & Gans, 1981). Mantıksal düşünme işlemleri olan değişkenleri kontrol etme, orantısal düşünme, olasılıklı düşünme ve ilişkisel düşünme matematik derslerinde başarılı olabilmek için gerekli yetenekler olarak belirlenmektedir (Valanides, 1996).

Cebirsel düşünmenin en önemli yansımalarının ortaya çıktığı ve alanyazında incelenmesi gereken bir diğer kavram ise matematiksel ilişlendirmedir. Hiebert ve Carpenter (1992), matematiksel ilişkilendirmeyi örümcek ağı ile temsil edilen zihinsel ağın bir parçası olarak tanımlamaktadırlar. Benzer şekilde Eli (2009), matematiksel ilişkilendirmeyi zihinsel ağ içinde ilişkili şema grupları ya da bir şemanın bileşenleri olarak tasarlamaktadır. Coxford (1995) ise ilişkilendirme matematikteki farklı konular arasında bağ kurmaya imkan tanıyan geniş fikirler ve süreçler olarak belirtmektedir. Bu tanımlamalar ışığında literatürde, matematiksel ilişkilendirmeyi beceri, süreç, ürün olarak gören yaklaşımlardan bahsedilmektedir. Bu tanımların ve sınıflamaların ortak noktası, matematiksel ilişkilendirmenin matematiksel fikirlerde bir köprü ya da bağlantı olarak kabul edilmesidir (Eli, 2009). Matematiksel ilişkilendirmenin sınıflandırılmasına ve türlerine ilişkin farklı fikirlerin olduğu görülmektedir. Monroe ve Mikovch (1994) programda matematiğin günlük yaşam bağlamı ile ilişkilendirmenin faydalı olduğunu belirtmektedir. Eli, Mohr-Schroeder ve Lee (2011) ise ilişkilendirme yapma becerilerini; işlemsel, kategorik, türevsel (derivational) ve öğretimsel (curricular) tür olarak ele almaktadır. Lockwood (2011) ise yaptığı araştırmada problem çözme süreci boyunca öğrencilerin yaptıkları ilişkilendirmeleri ayrıntılı ve ayrıntılı olmayan ilişkilendirme, geleneksel ve geleneksel olmayan ilişkilendirme, problem türleri ve teknikleri olarak ortaya koymaktadır. Leikin ve Levav-Waynberg (2007) problemlere dair tasarladıkları ilişkilendirme etkinlilerini aynı kavramın çeşitli temsilleri arasında benzerliklere ve farklılıklara dayalı ilişkilendirme, farklı matematiksel kavramlar ve işlemler arasında ilişkilendirme ve matematik içerisinde yer alan farklı alanlar arasında ilişkilendirme olarak ele almaktadır. Söz konusu sınıflamalarda ve matematik eğitiminde birçok ulusal ve uluslararası standart ya da öğretim programlarının içerik, amaç ve hedeflerinde matematiği günlük yaşamla ilişkilendirme, ortak perspektif olarak karşımıza çıkmaktadır. Günlük yaşamla ilişkilendirme, başka bir ifade ile okul matematiği ve dış dünya arasındaki ilişkilendirme olarak tanımlanabilir (Mosvold, 2008).

Söz konusu alt kavramların açıklanmasından sonra şimdi kapsamlı olarak cebirsel düşünmeyi ele alabiliriz. Matematiksel düşünmenin özel bir formu olan cebirsel düşünme, aritmetikten cebire geçiş süreci ile başlayan soyut düşünme biçimidir. Radford (2006) aritmetik düşünme bilinen niceliklere sayısal belirsizlik içermeyen işlemleri kapsarken, cebirsel düşünme bilinmeyen bir nicelik üzerine sayısal belirsizliği içermektedir. Herbert ve Brown (1997) cebirsel düşünmeyi, matematiksel bilgiyi sözel, diyagram, tablo, grafik veya denklemler aracılığıyla sunma, bilinmeyenleri veya fonksiyonel ilişkiyi belirleme amacıyla matematiksel sembolleri kullanma olarak açıklamaktadır. Kaput (1999) matematiksel işlemler veya ilişkiler yoluyla formel bir dille genellemeler yapmayı cebirsel düşünme süreci olarak ele almaktadır. Kieran (2004) daha basit bir açıklama ile cebirsel düşünmenin niceliksel durumlarını ilişkisel olarak tartışmak ve semboller ile ifade etmek olduğunu savunmuştur. Kriegler (2004) problem çözme, akıl yürütme, temsil biçimleri gibi matematiksel araçlardan ve cebirsel genellemeler, söylemler, modelleme gibi cebirsel fikirlerden oluşan yapıyı cebirsel düşünme olarak tanımlamaktadır. Alan yazındaki bu tanımlamalar incelendiğinde cebirsel düşünmenin cebir yapısının üzerinde matematiksel düşünme becerilerini ve matematiğin doğasını kapsayan daha geniş bir anlama sahip olduğu söylenebilir. Daha genel anlamda cebirsel düşünmenin nicelikler arasındaki ilişkiler, farklı temsiller, harfli semboller, eşitlik, genelleme ve işlemler gibi kavramlarla ilişkili olduğu söylenebilir.

Herbert ve Brown (1997) cebirsel düşünmenin kavramsal yapısını açıklarken verilen bir durumun analiz edilerek matematiksel temsil türlerine dönüştürülmesi, bunun sonucunda elde edilen matematiksel çıktıların yeni durumlara uygulanması olarak açıklamaktadır. Durum bir problem ya da inceleme olabilirken, matematiksel bulgu çözüm adımları, elde edilen sonuç ya da ilişkili önermeler olabilir. Cebirsel düşünme sürecinin işleyişi Şekil 6' da olduğu gibi temsil edilebilir.



Şekil 6. Herbert ve Brown (1997) cebirsel düşünme süreci

Cebirsel düşünmenin gelişiminde kabul edilen iki yaklaşım genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünmedir. *Genelleştirilmiş aritmetik* sayılarla işlemler yapma, sayılar arasında ilişki kurma veya bu ilişki üzerine akıl yürütme olarak ifade edilmektedir (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Daha kapsamlı incelendiğinde genelleştirilmiş aritmetik, cebirsel düşünmenin yer aldığı genelleme süreçlerini kapsamaktadır. Sayılar arasındaki ilişkiyi keşfetmeyi, sembollerle ifade etmeyi, aritmetik işlemleri genellemeyi ve bilinmeyen niceliklerle işlem yapmayı mümkün kılmaktadır. Tek sayı ile tek sayının toplamını incelemek veya bir işlemin değişme özelliğini incelemek genelleştirilmiş aritmetik yoluyla cebirsel düşünme süreçleridir. Carpenter vd. (2003) nicelikler arasındaki ilişkiyi keşfetmenin bir eşitlik elde etme ile sonlandığını ifade etmiştir. Başka bir ifade ile bir problemi çözmek ya da denklemi analiz etmek artimetik işlemler yapmayı ve eşitliğin temel öelliklerini kullanmayı içermektedir. Dolayısıyla nicelikler arasında bir ilişki kurup eşitlik ifadesinin yazılması cebirsel düşünme süreçleri ile mümkün olmaktadır. Bu ilişkisel düşünme matematiksel ifadeler kullanmak için sayıların temel özelliklerini ve işlemleri kullanmak ile oluşmaktadır.

İlişkileri ortaya koyduktan sonra cebirsel genellemede değişkenlerin kullanılması, cebirsel düşünmenin bir diğer önemli konusudur. *Fonksiyonel düşünme*, nicelikler arasındaki ilişkiyi tespit etme ve elemanlar arasındaki değişimleri belirleme sürecidir. Blanon ve Kaput (2004) genelleştirmenin başka bir formu olarak ele aldığı fonksiyonel düşünmeyi, sembolik gösterimler ile nicelikler arasındaki ilişkileri veya değişimleri ifade etme olarak açıklamaktadır. Örüntülerin genellenmesi fonksiyonel düşünme için en açıklayıcı örnektir.

Cebir ve cebirsel düşünme çalışmaları NCTM (2000) standartlarında büyük öneme sahiptir. Örüntülerin tanımlanması ve genelleştirilmesi, ilişkilerin anlamlandırılması ve değişimin tanımlanması gibi cebir müfredatında yer alan başlıklar standartlar içinde vurgulanmaktadır. Cebirin önemini vurgulamak için NCTM (2000, s.37) 'Cebir, geometri ve veri analizi ile de yakından ilişkilidir. Cebir Standardı'nda yer alan kavramlar okul matematik müfredatının temel bir bileşenini oluşturur ve onun bütünleşmesine yardımcıdır' ifadesine yer vermektedir. Ayrıca NCTM'in (2000) okul matematiği için belirlediği süreç standartları problem çözme, muhakeme ve ispat, iletişim, ilişkilendirme ve temsil etmedir. Buna paralel olarak, Türkiye'de matematik eğitim öğretim programında yer alan amaçlar arasında matematiksel kavramları ve sistemleri anlayabilme, bunlar arasında ilişkiler kurabilme, günlük hayatta ve diğer öğrenme alanlarında kullanabilme yer almaktadır. Bu amaçlar doğrultusunda ilişkilendirme becerisinin kazanılabilmesi için öğrencilerde kavramsal ve işlemsel bilgiyi ilişkilendirebilme, matematiksel kavram ve kuralları çoklu temsil biçimleri ile gösterebilme ve bu temsil biçimleri arasında ilişki kurabilme, öğrenme alanları arasında ilişki kurabilme ve matematiği günlük hayatında kullanabilme becerilerin geliştirilmesi hedeflenmektedir (MEB, 2017).

2.6.1. Cebirsel Düşünme ve Görme Engelli Bireyler

Cebirsel düşünmenin ve ilişkili becerilerin öğrenci düşünmesindeki önemi (Bölüm 2.6 da yer alan) göz önüne alınırsa bu becerileri geliştirmeye ve güçlendirmeye katkı sağlayan matematiksel kavramlar önem arz etmektedir. Görme engelli bireylerin günlük hayat becerilerini geliştirmek için kapsamlı matematiksel temel kavramın/ların ve bu/bunların geliştirdiği bilinen becerilerin incelenmesi önemli görülmektedir. Bu nedenle günlük hayat becerileri ile ilişkilendirebileceğimiz fonksiyonel düşünme ve bu doğrultuda fonksiyon ve ilişkilendirme kavramları öne çıkmaktadır. Genel perspektiften inceleyecek olursak, içerisinde birçok matematiksel süreç becerileri barındırdığı dikkate alındığında cebirsel düşünme genel olarak nicelikler arasındaki ilişkiler, farklı gösterimler, harfli sembollerin anlamı ve kullanımı, eşitlik işaretinin kullanımı, genelleme yapma, işlemlerin tersi gibi kavramlarla ele alınmaktadır. Kinzel (2000) çalışmasında kolej öğrencilerinin cebirsel sembolleri kullanmada başarısız olduğunu ve cebirsel ilişkileri göstermede ve açıklamada sınırlı becerilere sahip olduklarını ve cebirsel işlemler üzerine gereğinden fazla odaklanarak kavramsal anlamayı kaçırdıklarını ortaya koymuştur. Bu bağlamda cebirsel düşünme genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel (fonksiyon kavaramına dayalı ilişki kurma) düşünme yaklaşımları ile yakından ilişkilidir (Akkan, 2016, sf. 44-46). Bu gerekçelere dayanarak fonksiyonel düşünme becerisi, öğrenen için günlük hayat becerilerini geliştirmek ve idame ettirmek adına önem arz etmektedir.

Knauff ve May (2006) ilişkilendirme kavramı üzerinden akıl yürütmenin görme duyusu ile ilişkisini kanıtlamak için gerçekleştirdiği araştırmada görme yetersizliğine sahip olmayan, gözleri bağlı ve doğuştan görme engelli olmak üzere üç kategoride katılımcı ile çalışmıştır. Uzamsal ve görsel algıları arasında akıl yürütme becerilerinin incelendiği araştırmada doğuştan görme engelli katılımcıların beklediği gibi hatalı veya daha yavaş performans sergiledikleri tespit edilmiştir. Elde edilmesi beklenen çıkarımla ilgisi olmayan görsel detayların dahi muhakeme sürecini etkilediği belirlenmiştir. Görsel zihinsel imgeler oluşturma eğiliminde olmayan doğuştan görme engelli bireylerin görsel etkilere karşı dirençli olduğu söylenebilir. Görsel içeriklere ilişkin görsellik içermeyen önermelerin yazılabilmeside, bu ikisi arasındaki ilişkinin birey tarafından algılanması '*zihnin gözü (mind's eye)*' olarak adlandırılmaktadır (Knauff, Strube, Jola, Rauh & Schlieder, 2004). Bu fikirle araştırmaya başlayan Knauff ve May (2006), görsel içeriklere dayalı akıl yürütme problemlerinde görme yetersizliğine sahip olmayan ve gözü bağlanmış katılımcıların verilen önermeleri doğrulamada görsel yanılgılardan dolayı oldukça zorlandıklarını ve zaman kaybı yaşadıklarını ifade etmiştir. Doğuştan görme engelli bireyler ise sözel ifadeleri görselleştirme eğiliminde olmadıkları için verilen her örnekte aynı stratejiyi kullanarak rahatlıkla cevap verdiği gözlenmiştir. Doğuştan kör olan bireyler görsel zihinsel imgeleri kullanma eğiliminde değillerdir, fakat mekansal temsiller inşa edebilir ve kullanabilmektedir. Bu nedenle ilgisiz görsellerden etkilenmez ve görsel içeriklerde akıl yürütme için ipuçları bulabilmektedir.

Öğrencilerin cebir öğrenmede yaşadıkları çeşitli engeller veya zorluklardan biri cebirin yapısıdır. Cebirin yapısı incelendiğinde ise cebir öğrenmedeki önemli bir engel değişken kavramının yapısını anlamlandırma olarak karşımıza çıkmaktadır (Akgün, 2006; Dede & Argün, 2003; Kieran, 1989; Küchemann, 1978; Stacey & MacGregor, 1997). Değişken kavramı, tasarlanan öğretim programlarında cebir öğrenme alanında genellikle cebirsel ifadeler, denklem çözme ve eşitlik gibi alt öğrenme alanları ile birlikte sunulmaktadır (Dede & Argün, 2003; Kieran, 1989; MEB, 2013; Vinner, 1983). Bu durum göz önüne alındığında Skemp (1971)' in değişken kavramını, cebirde anahtar kavram (akt. Kieran, 1981) olarak ele alması gerekliliktir. Nitekim cebir öğrenme alanının temelinde yer alan iki kavram değişken ve eşitlik kavramlarıdır (Dede & Argün, 2003). Aritmetiğin temelleri sayılar iken, cebirin temelleri değişkenler ve değişkenler ile işlem yapmadır (Akkaya & Durmuş, 2006; Dede & Argün, 2003; Vinner, 1983). Wheatley' e (1995) göre cümlede kullanılan zamir ne ise, cebirde değişken kavramı aynı işlevi görmektedir. Başka bir ifade ile bir cümlede kişilerin yerine zamirleri kullandığımız gibi, cebirde de sayıların yerine değişkenleri kullanmaktayız (akt. Akkaya & Durmuş, 2006).

Cebirsel düşünme süreçlerini incelemek veya cebirsel düşünmeyi geliştirmek için Akkan (2016) çeşitli stratejiler sunmaktadır: Varsayımlar sunma ve test etme, kanıtlama ve doğrulama, tahminde bulunma ve farklı gösterimleri kullanma. Genelleştirme fikri üzerine inşaa edilen cebirsel düşünme kavramı göz önüne alındığında kaçınılmaz stratejiler olarak varsayımlar veya tahminler sunma ve kanıtlama karşımıza çıkmaktadır. Farklı gösterimler kullanma sürecinde resimler, grafikler, tablolar, sözel ifadeler veya sembolik gösterimler ele alınmaktadır. Benzer şekilde Kieran (2004, ss.140-141) cebirsel düşünmenin gelişimi için sayısal işlemlerden ziyade ilişkilere odaklanmayı, farklı temsillere yer vermeyi, sembol ve harfli ifadelerle çalışmayı ve eşittir işaretinin yapılandırılmasını önermektedir.

Kieran (1990) cebirde öğrenci düşünmelerinin matematiğin tarihsel gelişimi sırasındaki evrelere benzer olduğunu ifade etmiştir. Birinci evrede semboller kullanılmadan, matematiksel olamayan bir dil ile tanımlama yapılmaktadır. İkinci evrede ise bilinmeyenleri belirlemek amacı ile bilinmeyen nicelikler için kısaltmalar kullanılmaktadır. Son evrede ise bilinen ve bilinmeyen nicelikler için kullanılan harfler ve sembollerle yapılan işlemler ile problemler çözüme ulaşmaktadır. Bu evreleri dikkate alarak Kieran (1990), cebir anlamayı geliştirmek için öncelikle öğrencilerin sayılar arasındaki ilişkileri incelemesi, daha sonra öğrencilerin bu ilişkileri kendi ifadeleriyle tanımlamaları ve son olarak bu tanımlamaları semboller ile göstermeleri gerektiğini belirtmiştir.

Görme engelli bireylerin kavram öğrenme süreci ile cebirsel düşünmenin önemi ve cebirsel düşünmenin gelişim süreci göz önüne alındığında görme engelli bireylerde cebirsel düşünmenin incenlenmesinde bazı kavramlar ön plana çıkmaktadır. İlişkilendirme becerisinin kavram odaklı gelişimi için değişken, bilinmeyen, eşitlik, fonksiyon ve eşleme kavramları dikkat çekmektedir (Maulana, 2019; Stacey & MacGregor, 1997; Vinner, 1983). Bu kavramlar ve temsil türleri için önbilgi niteliğinde yer alan küme, doğru, doğru parçası, koordinat sistemi ve grafik kavramları da ele alınması gerekmektedir.

2.7. Cebirde Bazı Temel Kavramlar (Değişken, Bilinmeyen, Eşitlik, Fonksiyon)

Cebir öncesi, aritmetikten cebire geçiş ve cebir öğrenme alanlarında öğretim programlarında ele alınan ve diğer kavramların yapılanmasında yer alan değişken, bilinmeyen, eşitlik ve fonksiyon kavramları cebirde temel kavramlar olarak ele alınabilmektedir (MEB, 2013; 2017; 2018). Bu nedenle bu çalışmada cebirsel düşünmenin ortaya çıkarılması, öğrencilerin mevcut algılarının, kavrayışlarının ve yanılgılarının elde edilmesi için temel kavramların incelenmesi düşünülmüştür. Böylece ileri cebir kavramları için temel teşkil edecek cebirsel düşünme süreçleri ve öğrenme yol haritaları elde etmek mümkün olacaktır.

Eşitlik ve değişken kavramlarının üzerine yapılandırılan fonksiyon kavramını ele alarak bu temel kavramları incelemek bu bölümü daha anlaşılır kılacaktır. Fonksiyon kavramı elemanlar arasında eşleme fikrinden yola çıkıldığında iki veya daha fazla değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişki olarak da ifade edilebilir. Bu ilişki günlük hayatta karşımıza çıktığı gibi diğer bilimlerde matematiğin yer aldığı kavramlardan biridir. Seyahat sırasında yol, zaman ve hız değişkenlerinin ilişkisi hayatımızda matematik ve fen bilimlerinin birlikte yer aldığı bir örnektir. Nitekim fonksiyon kavramının tarihçesi incelendiğinde ilişki kavramından yola çıkıldığı gözlenebilecektir. Cantor kümeler teorisi fikrini ileri sürmesiyle birlikte fonksiyon kavramı, iki kümenin elemanları arasında yapılan eşlemeler olarak ele alınmaya başlanmıştır (Ponte, 1992). Bourbaki (1939) bağıntı kavramı ile fonksiyon kavramını tanımlayana kadar, fonksiyon kavramı küme, eşleme ve ilişki kavramları ile yapılandırmıştır. Dolayısı ile bir öğrencinin fonksiyon kavramının yapılandırıldığı öğrenme yol haritasında söz konusu kavramların yer alması kaçınılmazdır.

2.7.1. Fonksiyon Kavramı

Fonksiyon kavramının tanımlanmasında esas itibariyle iki kümenin varlığından söz etmek mümkündür. Tanım ve değer kümelerinin elemanları arasında eşlemeler yapan bir bağıntı olarak ele alınan fonksiyon kavramı için sağlanması gereken iki temel özellik yer almaktadır. Bu özelliklerden ilki tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir elemana eşlenmesidir. Diğeri ise tanım kümesinin her elemanın değer kümesinde yalnız bir eleman ile eşlenmesidir. Ancak bu tanımda vurgulanması esas olan kümelerin elemanları arasındaki eşleme fikridir. Tanım ve değer kümelerinin elemanları arasındaki eşleme her zaman belli bir ilişki ile gerçekleşmemektedir. Bir fonksiyonun eşlemeleri cebirsel veya aritmetiksel bir kural aracılığıyla da yapılmak zorunda değildir. Bu eşlemeler tamamen gelişigüzel bir şekilde yapılabilmektedir. Ayrıca gelişigüzel eşleme yapabilme özelliğinin cebirsel ifadeler ve düzgün artan veya azalan grafiklerin dışında farklı tanımlamaları da mümkün kılmaktadır. Küme kavramı üzerine yapılandırılan fonksiyonda eşlemenin yapısı yeni kavramları ortaya çıkarmaktadır. Fonksiyonalarda eşlemenin nasıl yapıldığına bakarak birebir, örten ya da örten olmayan fonksiyon gibi özelliklerden söz edebiliriz. Dolayısı ile söz konusu özellikler incelenirken tanım ve değer kümesinin anlamı ile eşlemenin nasıl yapıldığı dikkat arz eden alt kavramlardır (Kabael, 2017, ss.7-9).

Argün vd. (2014, s.179) fonksiyon kavramını bağıntı kavramı ile ele almıştır. Elbette bu durum ileri seviyede fonksiyon kavramının kabul gören tanımına hakim olma fikrinden kaynaklanmaktadır:

> *"A, B iki küme ve f, A' dan B' ye bir bağıntı olsun. Eğer her a ∈ A için (a, b) ∈ f olacak şekilde bir tek b ∈ B varsa o zaman f' ye A' dan B' ye bir fonksiyon, A kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, B kümesine de f fonksiyonunun değer kümesi denir."*

Tanım incelendiğinde tanım kümesindeki her elemanın değer kümesindeki görüntüsü farklı olmak zorunda değildir. Ayrıca değer kümesindeki her elemanın tanım kümesindeki bir elemanın görüntüsü olma zorunluğu yoktur. Bu durumlar bir fonksiyon için birer özellik belirtmektedir. Bu özellikleri tanımlamak gerekirse; f, A' dan B' ye bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ eşitliğini sağlayan her $a, b \in A$ için $a = b$ oluyorsa f ye birebir fonksiyon; eğer her $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde $a \in A$ varsa f ye örten fonksiyon denir.

Fonksiyonun yapılandırılması, kümelerin elemanları arasında zengin eşleme eylemlerinin tekrarlanması yolu ile mümkün olabilir. Bu yaklaşımı örüntülerin oluşturulması izleyebilir. Fonksiyon kavramının doğası ve tarihçesi hiyerarşik yapılanmasına göre öğretim uygulamaları için söz konusu yaklaşımı ortaya koymaktadır. Başka bir ifade ile bağıntı kavramı üzerine yapılandırılan fonksiyon kavramı öğrencilerin güçlükler yaşamasına sebep olabilmektedir. Bu durum fonksiyonun günlük yaşantımızda eşlemeler yolu ile karşımıza çıkmasından kaynaklanıyor olabilir. Bu nedenle gerçek hayat örneklerinde eşleme fikrinin üzerine inşa edilen fonksiyon kavramının, belirli bir noktada bağıntı kavramı ile ilişkisinin kurulması öğretim uygulamaları için düşünülebilir (Argün vd., 2014, s.183).

Fonksiyon kavramı eşleme fikri üzerinden yapılandırıldığında kavram tanımlarının anlaşılması önem arz etmektedir. Nitekim öğrenciler fonksiyonu iki kümenin elemanları arasında birebir eşleme olarak algılamaktadır (Bayazıt, 2015, s.95; Vinner, 1983). Bayazıt (2015) bir diğer öğrenci yanılgısının tanım ve değer kümesindeki eşleme ile yapılandırılan tanımda, 'tanım kümesindeki her elemanın eşlenmesi gerekir' fikrinin olması gerektiği gibi yapılandırılmamasına bağlamaktadır. Bu durumda öğrencilerin yalnızca tanım kümesindeki elemanların her birinin eşlenmiş olmasına odaklandığı gözlenmektedir. Bu yanılgının esasında eşleme fikri ile yapılandırılan fonksiyon tanımının öğrenilmemesinden kaynaklandığını söyleyebiliriz.

Öğrenciler fonksiyon kavramı üzerine düşündüklerinde zihinsel eylemleri, eşleştirme veya eş zamanlı değişim fikrine odaklanmaktadır. Bu nedenle fonksiyon kavramı matematikteki karmaşık ve soyut yapılardan biridir. Fonksiyonel düşünme iki veya daha fazla değişen çokluklar arasındaki ilişkiyi temsil etme biçimidir. Fonksiyonel düşünme, var olan ilişkileri ifade etmenin güçlü bir yolu olarak, gösterimsel düşünmenin bir türüdür (Wilkie, 2016). Bir diğer katkısı ise ilişkisel düşünme üzerine kurulan fonksiyonların anlaşılması, üst düzey matematiksel akıl yürütmeyi mümkün kılmaktadır. Ayrıca üst düzey matematiksel kavramların öğrenilmesi sürecini desteklemektedir. Elbetteki yalnızca matematik değil, diğer alanlarda kavramların anlaşılmasına zemin hazırlayan fonksiyon önbilgisi (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990), kavram bilgisi yanında sembolik dil bilgisine de katkı sunmaktadır.

Fonksiyon kavramı öğretim programlarının temel kavramları arasında yer almaktadır (MEB, 2017; NCTM, 2000). Tarihsel gelişimine bakıldığında farklı tanımlar yer alsa da bunlar arasında öğretim programlarında sıklıkla yer alan Bourbaki (1939) tarafından yapılan kümeler arasındaki eşlemeye dayalı olan (akt. Hatısaru & Erbaş, 2013) tanımıdır. Ancak araştırmalar öğrencilerin fonksiyon kavramını yapılandırmakta güçlükler yaşadığını göstermektedir (Clement, 2001; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Özaltun-Çelik, 2018; Tall & Bakar, 1991). Öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin algıları veya tanımlamaları incelendiğinde, cebirsel ifade, formül, denklem, eşitlik veya bir model olarak sayıları başka sayılara dönüştüren makine olarak kısıtlı açıklamaların elde edildiği belirlenmiştir (Clement, 2001; Tall & Bakar, 1991). Fonksiyon kavramı için yanılgılar incelendiğinde bağımlı ve bağımsız değişken, tanım ve değer kümesi ile sıralı ikililer bağlamında yoğunlaştığını söyleyebiliriz (Hatısaru & Erbaş, 2013; Tall & Bakar, 1991; Yıldırım, 2003).

Öğrencilerin, niceliklerin birbiri ile nasıl ilişkili olduğu ve bir nicelikteki değişimin diğerini nasıl etkilediğine ilişkin bilgileri öğrenmeleri ve organize etmeleri için yöntemlerden biri fonksiyon kavramı ile çalışmaktır. Öğrencilerin fonksiyon algıları (Sfard, 1991; Dubinsky & Harel, 1992) ve fonksiyon temsilleri (Friedlander & Tabach, 2001) cebir kavramları içinde iki önemli çalışma alanını oluşturmaktadır. Fonksiyonun bir temsilinden diğerine geçebilen öğrencinin, fonksiyon kavramını tümüyle anlamlandırması mümkün olmaktadır (Slavit, 1997). Başka bir ifade ile temsiller arası geçişin fonksiyonu tümüyle anlamak için bir ön koşul kabul etmek mümkündür (Schwarz & Dreyfus, 1995). Ancak yapılan araştırmalar öğrencilerin fonksiyon kavramı için cebirsel temsili oluşturmada ve diğer temsiller ile ilişkilendirmede temsil türlerinden yararlanmadıklarını ortaya koymuştur (Herman, 2007; Huntley & Davis, 2008; Keller & Hirsch, 1998; Senk & Thompson, 2006). Problem çözme stratejisi olarak ilköğretim öğrencilerinin sayısal veya çizgiler yardımıyla temsil türlerini tercih ederken (Friedlander & Tabach, 2001), ortaöğretim öğrencilerinin yalnızca cebirsel işlemleri tercih ettiği (Herman, 2007, s.35) bilinmektedir. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin farklı temsil türlerini tercih etmeleri 9.sınıfta sıklıkla cebirsel kavramlar ile karşılaşmalarından kaynaklabilir (Cowan, 2011). Ayrıca öğrencilerin uygulama basamağında sunulan problemlerin çözümlerinde ilk olarak sembolik temsiller kullanmayı düşünürken, bir bağlam içinde sorulan problemlerin çözümünde tablo veya grafik kullanmayı tercih ettikleri bilinmektedir (Friedlander & Tabach, 2001; Keller & Hirsch, 1998).

Fonksiyon kavramı matematiğin temel bir parçasıdır (Dubinsky & Harel, 1992). Hatta Izsak (2000, s.31) bağlama bağlı olarak cebirin değerlendirilmesinde fonksiyon kavramının çalışmaları olduğunu belirtmiştir. Fonksiyon kavramını anlaması kişinin cebirsel düşünmesini harekete geçirmesi olarak yorumlanabilir (Sfard, 1991). Ancak fonksiyon kavramı görme engelli bireylerin öğrenmesi için pek çok sınırlılığı barındırmaktadır. Görsel temsiller, grafikler, şemalar ve işlem takibi gerektiren ardışık işlemler dizisi görme engeller için birer sınırlılıktır. Bu sınırılıklar sınıf uygulamalarında sözel açıklamaların yetersizliği ve dokunsal destek eğitim araçlarının olmaması ile görme engelli bireyler için büyük güçlükleri meydana getirmektedir.

Arieli-Attali, Wylie ve Bauer (2012) eşitlik, değişken, orantısal akıl yürütme, doğrusal fonksiyonlar ve fonksiyonlar kavramları için öğrenme süreçlerini tanılanmayı ve bu süreçlerde öğretmenlerin değerlendirme düzeylerini belirlemeyi amaçlamıştır. Çalışmada eşitlik ve değişken kavramlarının öncelikle ayrı ayrı ve daha sonra bir arada ele alınarak kavramların öğrenme süreçlerindeki gelişimleri incelenmiştir. Eşitlik kavramının işlemsel ve ilişkisel (denge) anlamının yanı sıra ilişkisel denklik (relational equivalence) aşamasını ele almışlardır. İlişkisel denklik ile eşitliğin iki tarafının denge durumuna ek olarak eşitliğin korunumu anlatılmak istenmiştir. Öğrenme ilerlemesi (learning progression) adımları olarak ele aldıkları öğrenme yol haritası incelendiğinde, hedefleri değişken kavramı ile cebir öncesi döneme ait düşünme süreçleri üzerine inşaa ettikleri söylenebilir. 'Bir işlem (operation) olarak eşitlik ve bilinmeyen olarak değişken' hedefi ile öğrenme ilerlemesi adımları eşittir işaretinin 'bir şeyler yap' anlamına ve bilinmeyen kavramına odaklanmaktadır. İkinci adımda ise öğrencilerin harflerin sayıları temsil ettiğini anladıklarını, ancak değişken ve bilinmeyen kavramlarını ayırt edemediklerini ortaya koymaktadır. Sonraki seviyede öğrencilerin değişkeni bilinmeyen olarak düşünmeye devam ettiğini, ancak eşitliğin ilişkisel anlamına odaklandığını belirlenmiştir. Başka bir ifade ile ‘denge’ anlamı ile eşitliğin her iki tarafındaki niceliğin denk olduğunun anlaşılmasıdır. Dördüncü hedefte öğrencilerin değişkeni ‘spesifik bilinmeyen’ olarak düşünmeye devam ettiği belirtilmiştir. Eşitlik kavramı için öğrencilerin ilişkisel denklik aşamasına geçtiği, yani bilinmeyeni belirlemek için denklem çözme sürecinde dengenin korunumunun farkında olduğu ifade edilmiştir. Son seviyede ise öğrencilerin eşitlik kavramına dair düşünmeleri korunurken, değişken kavramı için genelleştirilmiş sayı ve parametre anlamlarının edinildiği belirtilmiştir. Ayrıca harfli ifadeler, genellemeler ve lineer denklemlerin öğrenildiği eklenmiştir. Fonksiyon kavramını ele alırken ise sayı örüntüleri, koordinat sistemi ve grafik kavramlarına dair önbilgilerin yer aldığı kabulü ile yola çıkılmıştır. Ayrıca değişken ve eşitlik kavramlarına dair hedeflerde cebirsel temsillere dair önbilgilerin edinildiği belirtmiştir. Bu nedenle bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarına dair hedeflere yer verileceği belirtilmiştir. Fonksiyon ve doğrusal fonksiyon kavramları için öğrenme ilerlemesi sürecindeki adımlar değişim (change) kavramının sayısal (numeric), uzamsal (spatial) ve sembolik temsillerdeki anlamaların ayırt edilmesi ile başlamaktadır. Öğrencilerin sayısal verileri tablo ve grafik gibi temsil türleri ile birbirine bağımlı değişimini belirleyebilmeleri ile öğrenmenin devam ettiğini belirtmişlerdir. Böylece öğrencilerin doğrusallık ve sürekli değişken kavramlarını öğrenebildiği ileri sürülmüştür. Bunun sonucunda ise nümerik ve uzamsal temsillere ilişkin ilerleme ile sembolik temsilin bir araya geldiğini hedef silsilesine eklemişlerdir. Sonraki adımda ise öğrencilerin temsil türlerine hakim olduğunu ve temsiller arasında geçişleri yürütebildiği belirtilmiştir. Söz konusu temsiller için sözel olarak ifade etme açıklaması da eklenmiştir. Bu seviyede de öğrencilerin genellemelere erişmesinin güç olduğu vurgulanmıştır. Bu adımda bağımlı ve bağımsız değişkenlerin temsil ettiği nicelikler arasındaki sürekli değişim vurgulanmıştır. Böylece doğrusal fonksiyonların ele alındığı eklenmiştir. Son adımda ise doğrusal fonksiyonlarda eğim kavramının açıklanabildiği yer almaktadır.

Cowan (2011) görme engelliler ile fonksiyon kavramı üzerine gerçekleştirdiği tez çalışmasında temsil türleri üzerine incelemeler yapmıştır. Ayrıca görme engelli öğrenciler foksiyon kavramına ilişkin anlayışlarını ve algılarını belirlemeyi amaçlamıştır. Bunun için doğrusal fonksiyonları ele almıştır. Ortaöğretim ve üniversite düzeyinde görme engelli öğrenci grupları ile çalışılan araştırmada tanım, denklem, tablo ve grafik temsil türleri göz önüne alınmıştır. Görme engelli katılımcıların fonksyion kavramını somut düşünme veya temsil türleri arasında dönüşümleri gerçekleştirme becerilerinin gelişmiş olduğu vurgulanmaktadır. Ayrıca görme engelli öğrenciler doğrusal fonksiyonları algılama, yapılandırma ve temsil etme düzeylerinin güçlü olduğu ifade edilmektedir. Ancak grafik inceleme, yorumlama ya da grafik ile temsil etme becerilerinin daha zayıf olduğu vurgulanmıştır. Görme engelli katılımcıların, fonksiyon kavramının tablo ile temsil edilmesi durumunda daha rahatlıkla algıladıkları ve kavradıkları belirlenmiştir. Ancak burada araştırmanın yapılandırılması ve kullanılan materyallerin eksikliği etkili olmuş olabilir. Bu nedenle bu çalışmada daha temel kavramlar ele alınarak eşleme, ilişkilendirme ve grafik kavramları öncelikle önem arz etmektedir.

2.7.2. Eşitlik Kavramı

Eşitlik kavramı aritmetikte yer alan eşit sembolünün ötesinde, cebirsel olarak iki küme arasındaki ilişkiyi gösteren bir bağıntıdır. Eşitlik bağıntısı aslında bir denklik bağıntısıdır. Bu tanıma verilebilecek en iyi örnek 3/4 ve 6/8 kesirlerinin eşit olmasıdır. Matematikte farklı yapılarda farklı anlamları barındıran eşitlik, iki niceliğin miktarlarının eşit olduğunu veya birbirinin alt kümesi olan iki kümenin eşit olduğunu ifade etmektedir (Argün vd., 2014).

Eşittir sembolü ilişkisel düşünmenin anahtarı olduğu kabul edilmektedir. Öğrencilerin, eşittir işaretinin anlamı hakkında sınırlı bilgiye sahip olduğunu gösteren pek çok araştırma mevcuttur (Behr vd., 1980; Falkner vd., 1999; Kızıltoprak & Yavuzsoy Köse, 2017; Kieran, 1981). Öğrencilerin eşittir işaretini ilişkiyi gösteren bir sembol olarak değil, 'bir sonuç bulmak ya da bir şey yapmak' olarak gördükleri ve 'notasyonun bir sembol veya cevaptan önce kullanılan bir sözdizimsel gösterge' (Warren, 2006) olarak ele algıladığı bilinmektedir.

Bu durumun nedenlerinden biri öğrencilerin sonuç odaklı olarak aritmetik öğrenmeleri, sayılar ve işlemler arasındaki ilişkilerden ziyade hesaplamalara odaklandıkları olarak yorumlanabilir. Bu sonuç, öğrencilerin matematiksel yapıları ve ilişkileri anlamada güçlük çektiğini ortaya koymaktadır. Kızıltoprak ve Yavuzsoy Köse'ye (2017) göre öğrencilerin kavramlar arasındaki ilişkinin kurulmasında bir araç olarak eşitlik kavramını anlamlandırmaları ve sonuç değil denge anlamını yapılandırmaları beklenmektedir.

Eşitlik fikrini temsil eden sembol, diğer semboller gibi mantıksal bir sebebi olmadan matematikçiler tarafından seçilmiştir (Yaman, Toluk & Olkun, 2003). Eşittir işaretinin anlamına dair kavram veya kavram yanılgılarından söz etmek, '$a + b =?$' tipik sorularının yöneltildiği ilkokul düzeyinde sorun teşkil etmeyebilir. Ancak bu durum öğrencilerin düşünmenin cebir veya cebirsel yollarına hizmet etmez. Öğrencilerin eşitliğin her iki tarafında işlemler olan, '$2x - 1 = 3x + 5$' gibi cebirsel denklemler ile karşılaşmaları ve bu denklemleri öğrenmeleri özellikle önem kazanmaktadır (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005). Eşittir işaretinin denklemlerdeki bu kullanımını ilişkisel görünüm olarak tanımlayan araştırmacılar, denklik ilişkisini korumak için bir denklem çözme sürecinde dönüşümleri gerçekleştirmeyi anlamayı esas kabul etmektedir. Başka bir ifade ile dönüştürülmüş denklemlerin denk olduğu yargısının öğrenilmesi önem arz etmektedir. Ayrıca tipik öğretim ortamlarında açıkça ifade edilmeyen bu fikre pek çok öğrenci sahip değildir (Knuth vd., 2005).

'Eşittir işaretinin' kullanımı, ilköğretim düzeyinde temel bir konu olsa da, araştırmacılar üniversite öğrencilerinin bile eşit işaretini anlama ve kullanmada güçlük çektiğini ortaya koymuştur (Barcellos, 2005). McNeil ve Alibali (2005) eşitlik kavramı için öğrencilerin sahip olduğu üç anlamdan bahsetmektedir. Öğrenciler eşit sembolünü gördüğünde verilen ifadede yer alan '*tüm işlemleri gerçekleştir*' komutunu algılamaktadır. İşlem yapma süreci ile ilişkilendiren bir grup öğrenci ise '*işlem=cevap*' algısına sahiptir ve bunun sonucu olarak, 'eşit' sembolünü gördüğü an mekanik olarak 'cevabı bulma' eylemine başvurmaktadır. Son olarak öğrencilerin olması gerektiği gibi eşit sembolünün işlevini ve eşitlik kavramını anlamlandırma sürecini içermektedir. Bu araştırmanın sonuçlarına ek olarak araştırmacılar, öğrencilerin zihninde eşit sembolünün '*bir şeyler yap*' fikrini tetiklediğini keşfetmiştir (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Kieran, 1981; Herscovics & Kieran, 1980). Falkner, Levi ve Carpenter (1999) ilköğretimin çeşitli düzeylerinde öğrencilerden '8+4=□+5' ifadesinde uygun sayıyı koymalarını istemiştir. İlginç olan 145 altıncı sınıf öğrencisinin tamamının 12 veya 17 olarak hatalı cevap vermesidir. Dahası öğrencilerin hesaplamada ve dört işlemde başarılı oldukları daha önce belirlenmiştir. Bu nedenle bu yanılgı, öğrencilerin '=' sembolünü 'bir şeyler yapmak' algısından kaynaklanan yaygın düşüncenin bir sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Eşit sembolünün algılanmasındaki bu yanılgıyı vurgulayan bir diğer çalışmada Behr, Erlwanger ve Nichols (1990) '+' sembolünün '=' işareti olmasa da işlem yapmayı gerektirmesinin yanılgıya sebep olabileceğini ileri sürmüştür. Falkner, Levi ve Carpenter (1999) ilköğretim öğrencileri ile gerçekleştirdiği araştırmada öğrencilerin '8+4=□+5' ifadesindeki kutuya 12 veya 17 koyduklarını gözlemlemişlerdir. Bu durum öğrencilerin eşitliği ve eşittir sembolünü kısmi anladığının göstergesidir. Bu yanılgıyı destekleyen bir başka ihtimal, yanlış işlem seçimi olarak yorumlanmıştır. İşlemden kaynaklanan bu yanılgı ise eşitlik sembolüne dair bir diğer yanılgı olan '=' sembolünün '*bir şeyler yap*' (Herscovics & Kieran, 1980) olarak algılanmasından kaynaklanmış olabilir. Benzer yanılgılara sahip olan öğrenciler ilerleyen dönemlerde edinilecek olan kavramlar için öğrenme süreçlerine bu yanılgılarını taşımaktadır. Kısacası bireyin önbilgileri yeni öğrenmeleri şekillendirmektedir (Shulman, 1999).

Falkner vd. (1999, s.234) eşit sembolü için öğrenci yanılgılarının giderilmesinde, senaryo bağlamında problemlerin sunulmasının veya doğru yanlış sorularının sorulmasının daha etkili olabileceğini belirtmiştir. Araştırmada öğrencilerin '3+4=7' ile '7=3+4' ve '8=8' ifadelerini doğru veya yanlış olarak sınıflandırmada güçlük çektiği tespit edilmiştir. Falkner vd. (1999) uygun öğretim stratejileri ile öğrencilerin doğru cevaplara ulaşabildiğini tespit etmiştir. Ancak önemli olan farklı bağlamlarda öğrencilerin benzer yanılgıları sürdürmemesidir. Nitekim Kieran (1981) '=' işaretini vurgulayan uygun öğretim uygulamalarından sonra bile öğrencilerin ortaöğretim ve üniversite düzeyinde yanılgılarının devam ettiğini belirlemiştir. Bu yanılgılar elbette ki işlemsel hatalardan kaynaklanmamaktadır. Bu durum bir ortaöğretim öğrencisini '$2x + 3 = 5 + x$' denklem çözümünde '$2x = 5 + x - x - 3$' ifadesi ile örneklendirilmektedir (Kieran, 1981, s.323). Bu nedenle denklem, eşit sembolünün kullanımı ve eşitlik kavramına dair kavrayışın ortaya çıkarılması için uygun bir yardımcı kavramdır (McNeil & Alibali, 2005; Falkner, Levi & Carpenter, 1999).

Problem çözme becerisinin ön koşullarından olan eşitlik bilgisi üzerine görme engelli öğrencilerle çalışan Cansu (2014), öğrenci yanılgılarının sebeplerini ele almıştır. Görme engelli öğrencilerin denklem kurma ve işlem yapma becerilerinin yetersizliğini ortaya koyan araştırmada, bu durumun onların eşitlik kavramını somut olarak zihinlerinde algılayamamalarından kaynaklandığı belirtilmiştir. Görme engelli ğrencilerin eşitlik kavramını sezgisel düzeyde anladığını, ancak eşit sembolünü '*boşluk*' olarak düşündüklerini ifade etmiştir. Söz konusu araştırmada '$8 + 7 = ? + 3$' ifadesine görme engelli öğrencilerin 15, '15 ve 3', 18 gibi yanıtlar verdiği belirlenmiştir. Bu bulgu öğrencilerin boşluktan sonra sağ tarafa bir sayının yazılması gerektiği düşüncesi ile var olan sayıların toplamı şeklinde düşünmelerine dayandırılmıştır. Böylece görme engelli öğrencilerin bazılarının eşit işaretini yalnızca sembol olarak düşündüğü sonucu elde edilmiştir. Burada öğrencilerin ilişki ve eşitlik anlamlarının ve görevlerinin farkında olmadıkları söylenebilir. Ayrıca araştırmada görme engelli öğrencilerde eşitlik sembolü için değişme özelliğine dair yanılgıların da yer aldığı belirlenmiştir.

Değişken kavramı için bağımlı ve bağımsız değişkenler göz önüne alındığında, bu değişkenlerin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiden bahsetmek ve dolayısı ile fonksiyon kavramından söz etmek mümkün olmaktadır (Philipp, 1999, s.157). Bu nedenle cebirde temel kavramlar arasında ele alınan değişken ve bilinmeyen kavramları Bölüm 2.13' te ayrıntılı ele alınmıştır.

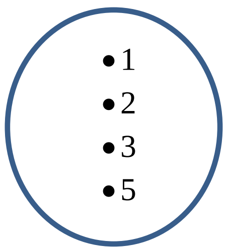
2.8. Küme Kavramı

Matematikte pek çok kavramı veya yapıları incelediğimizde ya da inşa etmek istediğimizde küme kavramı ile karşılaşırız (Arıkan & Halıcıoğlu, 2013, s.71). Fakat genelde tanımsız terim olarak karşımıza çıkan küme kavramı, sezgisel ve aksiyomatik olmak üzere iki kuramda ele alınmıştır. Sezgisel tanımlamanın meydana getirdiği paradokslar aksiyomatik yapıda küme kavramını tanımlamayı gerektirmiştir. Bu araştırmada öğretim programının ve kavramların ilgililiğinin gerektirdiği şekilde sezgisel küme tanımı ele alınmış olsa da, bu bölüm altında aksiyomatik tanıma da yer verilecektir.

Matematikte küme sezgisel olarak bilinen tanımsız bir temel kavram kabul edilse de Cantor kümenin iyi tanımlılığından bahsetmektedir. Bu tanımlama topluluğa ait olan nesnelerin açık olarak ifade edilmesidir (Lucas, 1990, s.109). Nitekim Arıkan ve Halıcıoğlu (2013, s.72), '*iyi tanımlı olma*' terimini her bir elemanın kümede olup olmadığına karar verebilmeyi sağlayan sıfat olarak ele almıştır. Ancak karşılaşılan her küme örneğinde nesneleri net olarak tanımlamak mümkün olmayabilir. Bu durum farklı küme teorilerinin ortaya atılmasına zemin oluşturmuştur. Ortak olan yapı ise kümeyi oluşturan elemanların bu kümenin üyeleri olarak açıklanmasıdır.

Küme kavramının matematiksel bir tanımı yoktur. Tanım yapılmak istenirse genellikle 'topluluk' kavramından yararlanılmaktadır. Ardından sezgisel olarak eleman ve ait olma gibi kavramlar işe koşulmaktadır. Böylece sıklıkla karşılaşılan "nesnelerin iyi tanımlı topluluğu" tanımlamasına ulaşılmaktadır. Neredeyse yakın tarihe dayanan küme kavramının doğuşu Cantor tarafından "*Sezgilerimizle veya düşüncelerimizle iyi ayırt edilmiş ve belirlenmiş m nesnelerinin bir araya gelerek M bütününü oluşturmasıdır.*" şeklinde ele alınmıştır (Argün vd., 2014, s.297; Cantor, 1895, s.481, akt. Kleene, 2002, s.183). Buradan 'M kümesi m elemanınlarının iyi tanımlı topluluğudur' fikri doğmuştur. Ancak sezgisel ya da aksiyomatik bazı küme tanımlamalarında paradoks denilen çelişkiler ortaya çıkmaktadır. Tarihte yer alan bu paradokslara 'bütün kümelerin kümesi (Cantor paradoksu)' ve '$X = \{A|\ A$ bir kümedir ve $A \notin A\}$ örnek olarak sunulabilir. Burada $X \in X$ ya da $X \notin X$ olacaktır. $X \in X$ olsaydı o zaman X' in tanımından $X \notin X$ olur ki bir çelişki elde edilir. Bu nedenle küme kavramının tanımının yapılandırılması gerekmektedir. Bu noktada aksiyomatik yapıda önermelerden yararlanarak bazı kümeleri tanımlamak mümkün olmaktadır. Bu kümeler sıklıkla karşılaştığımız bazı şartları sağlayan ya da bazı ortak özellikleri olan elemanların bir araya geldiği topluluklardır. Bu nedenle böyle kümeleri $A = \{x \mid p(x)\}$ şeklinde $p(x)$ şartını sağlayan x elemanlarının topluluğu olarak ele alabiliriz (Argün vd., 2014).

Bir diğer kabul ise kümelerin genellikle büyük Latin haflerle, elemanlarının ise küçük harflerle gösterilmesidir. A kümesinin bir elemanı a ise $a \in A$, eğer elemanı değilse $a \notin A$ ile sembolize edilmektedir. Elemanı olma '∈' sembolü ise ilk kez Peano tarafından kullanılmıştır. Peano Yunan alfabesinde bir karakteri kullanmışken, Russell modern matematiksel sembollerden yararlanarak sembolün bugünkü halini tanıtmıştır. Ayrıca liste yöntemi ile küme temsilinde küme ayracı denilen '{' ve '}' parantezleri kullanılmaktadır. Liste yöntemi ile temsilde elemanların yazılış sırası önemli değildir. Liste yönteminde elemanlar listelenirken belirli bir kurala göre devam eden elemanları ifade etmek için '…' üç nokta kullanılabilir. Ayrıca tartışmalı olan bir diğer konu, bir kümede aynı elemanın tekrar edilmesi durumudur. Liste yöntemi ile verilen A = {1, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 5} kümesi yazılması mümkün olduğu gibi esasında dört elemanlı A = {1, 2, 3, 5} kümesi ile eşittir. Kümenin bir diğer temsil türü olarak Venn diyagramı (şeması) Şekil 7' de olduğu gibi gösterilmektedir (Argün vd., 2014, ss.299-300).



Şekil 7. Kümenin Venn diyagramı temsili

Evrensel küme, bağlama göre göz önünde bulundurulan tüm elemanların oluşturduğu en geniş küme olarak düşünülebilir. Bingölbali ve Bingölbali (2013, s.41) evrensel kümeyi sezgisel olarak 'her şeyi kuşatan/kapsayan bir küme' olarak açıklamanın 'tek elemanlı küme evrensel küme olamaz' yanılgısına sebep olacağını belirtmiştir. Bu nedenle evrensel kümeyi '*o an için üzerinde çalışılan en geniş küme*' olarak tanımlamışlardır. Arıkan ve Halıcıoğlu (2013, s.75) üzerinde çalışılan kümelerin seçildiği ve bu kümelerde olamayan fakat çalışma alanında olan elemanların tümünü içeren kümeyi evrensel küme olarak tanımlamıştır. Dolayısı ile tanımlanan bir kümenin elemanların seçimi, üzerinde çalışılan evrensel kümeye göre farklılık gösterebilir. Örneğin $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 2 \leq x \leq 8\}$ kümesinin elemanları pozitif tamsayılar iken $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$ kümesinin elemanlarına 2 ile 8 arasındaki bütün reel sayılar da dahildir. Evrensel küme, $\mathcal{E}$ sembolü ile gösterilmektedir. Ancak genel olarak E sembolü tercih edilmektedir.

A bir küme olsun. Eğer A = $\emptyset$ ya da bir n pozitif tamsayısı için $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ den A' ya bir örten fonksiyon varsa o zaman A' ya sonlu küme denir. Eğer A' dan A' ya birebir olan fakat örten olmayan bir fonksiyon varsa o zaman A' ya sonsuz küme denir (Argün vd., 2014, s.489). Sonlu küme tanımı ile sonsuz küme ve sonsuz küme tanımı ile de sonlu küme kavramı tanımlanabilir. Her iki tanımda sonlu ve sonsuz küme kavramlarını açıklamak mümkündür. 'Sonlu olmayan kümeye sonsuz küme denir' ya da 'sonsuz olmayan kümeye sonlu küme denir' açıklamaları tanımlama için uygundur. Bu nedenle öğretim düzeylerinde somut örnekler üzerinden sonlu küme kavramı tartışılabilir. Sonsuz küme örnekleri ise sayı kümeleri üzerinden ele alınabilir.

Küme kavramına hayatımızdan örnek olarak canlıların sınıflandırılmasını sunan Argün vd. (2014, s.28), matematiksel olarak altkümeyi şöyle tanımlamaktadır:

> *"A ve B iki küme olsun. Eğer $\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$ önermesi doğru ise o zaman A' ya B' nin bir altkümesi denir ve $A \subseteq B$ ya da $B \supseteq A$ şeklinde gösterilir. Eğer A kümesinin en az*

bir elemanı B kümesine ait değilse o zaman A kümesi B' nin altkümesi değildir denir ve A ⊄ B ya da B ⊅ A şeklinde gösterilir."

Başka bir ifade ile A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı ise o zaman A kümesi, B kümesinin bir altkümesidir. Bu sözel tanımda 'elemanı olma' ifadesinde A kümesinin boş küme olma durumuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle öğretim düzeyi ve öğrencinin önbilgileri göz önüne alınarak tanıma yer verilmesinde yarar vardır. Argün vd., (2014, s.29) öğrencilerin düzeyine göre, önerme kavramına ilişkin önbilgilerinin dikkate alınmasını vurgulamaktadır. Ayrıca altküme kavramının öğretilmesinde öncelikle sonlu kümelerle çalışmanın, ardından sonsuz kümelerde altküme kavramının ele alınması öğrencilerin kavraması için faydalı görülmektedir.

Cohen ve Ehrlich (1963) küme ve bir kümenin elemanı olma kavramlarını tanımsız terim olarak zikretmektedir. Ancak matematiksel yapıların inşası için '*Varlık aksiyomu*: Küme vardır.' aksiyomunu kabul etmiştir. Matematiksel nesnelerin tümü küme oluştursa da, kümeyi 'kümelerin kümesi' olarak ele almaktadır. Kümelerin büyük harfle ve elemanlarının küçük harfle gösterimi genellemesine karşı Cohen ve Ehrlich, bir kümenin elemanı olan kümeyi küçük harfle göstermeyi tercih etmiştir. *Özdeşlik aksiyomu* olan 'A ve B iki küme olsun. Eğer A' nın her elemanı B' nin de elemanı ve B' nin her elemanı A' nın da elemanı ise o zaman A ve B kümeleri eş (aynı) kümelerdir.' ifadesine dayanarak altkümeyi tanımlamıştır. Altküme kavramını ise 'Eğer B' nin her b elemanı A' nın da bir elemanı ise, B kümesi A kümesinin altkümesidir.' şeklinde tanımlamıştır. Cohen ve Ehrlich (1963) kümelerin kümesi kabulü üzerine yapılandırdığı sistemde 'İkililer Aksiyomu'ndan bahsetmektedir. İkililer aksiyomuna göre A ve B iki küme olmak üzere $A \in C$ ve $B \in C$ olacak şekilde bir C kümesinin var olduğunu ortaya koymaktadır. Bu kabul $C = \{A, B\}$ kümesinin varlığını garantilemektedir. A ve B eşit kümeler ise $\{A, B\} = \{A, A\} = \{A\}$ teklisi elde edilir. Bu tekliye tek elemanlı küme denir.

Linchevski ve Vinner (1988) ilköğretim matematik öğretmenlerinin küme kavramına ilişkin yanılgılarını incelediği araştırmada sonuçları şöyle sıralamıştır: (i) Bir kümenin elemanları belirli ortak bir özelliğe sahip olmalıdır. (ii) Bir kümenin birden fazla elemanı vardır, boş küme ve tek elemanlı küme yoktur. (iii) Bir kümenin elemanı başka bir kümenin elemanı olamaz. (iv) Aynı sayıda elemana sahip olan iki küme eşittir. Fischbein ve Baltsan (1998) ise kümeyi 'nesnelerin bir topluluğu' olarak algılamanın öğrencide söz konusu yanılgıların gözleneceğini iddia etmektedir. Ayrıca Fischbein ve Baltsan (1998) kolej öğrencilerinin ve matematik öğretmeni adaylarının benzer yanılgılara sahip olduğunu ortaya koymuştur. Katılımcıların özellikle ortak özelliklere sahip nesneler topluluğu olarak algılandığını belirtmiştir.

Bagni (2006) küme temsilleri üzerine gerçekleştirdiği çalışmada semiotik temsillerini ele almıştır. Semiotik temsil, matematiksel etkinliklerde kullanılan 'sözel (verbal)', 'sembolik (symbolic)' ve 'görsel (visual)' bileşenlerin tümü olarak tanımlanmıştır. Sözel ifadeler arasında küme, eleman, ait olma gibi kavramsal tanıma ait söylemler yer almaktadır. Sembollik bileşenler arasında ise büyük küçük harfler, çeşitli parantezler ve semboller yer almaktadır. Görsel temsilde ise Venn şeması odaklanmasına rağmen farklı görsel temsillerin de olabileceği belirtilmiştir.

Bu bölümde öğrencilerin anlaması, algılaması ve kavrayışı üzerine tartışılarak tanımlamalarına yer verilen küme kavramının öğretilmesinde günlük hayatın içinden örnekler önemlidir. Küme kavramının öğretilmesinde günlük yaşamdan spor takımları, tencere seti gibi örnekler verilerek sezdirilmesinde yarar vardır. Ayrıca temsil türlerine yer verilmesi, ilerleyen matematiksel kavramların yapılandırılmasında önem arz etmektedir. Ancak küme temsilleri görme engelli öğrencilerin en çok zorlandıkları kavramlardan biri olarak karşımıza çıkmaktadır (Cahill, Linehan, McCarthy, Bormans & Engelen, 1996). Bu nedenle bu araştırmada öğretim oturumlarında küme kavramı ve temsilleri, somut nesneler ve daha iyi bilinen örnek durumlar üzerinden ele alınacaktır.

2.9. Eşleme ve İlişkilendirme Kavramları

NCTM (2000) ve eğitim programlarında öğrenme-öğretme süreçlerinde vurgulanan becerilerden biri ilişkilendirmedir. İlişkilendirmenin farklı tanımlamaları olsa da ilk ve önem arz eden yorum Piaget tarafından yapılmıştır. Piaget öğrenmeyi açıklarken dış dünyadan elde edilen veriler ile var olan şemalar arasında ilişki kurma sürecinden bahsetmektedir. Bu süreç matematik öğrenmede matematiksel ilişkilendirme sürecini açıklayan temel yapıdır (Narlı, 2016b). İlişkilendirme kavram odaklı incelendiğinde matematikte yer alan kavramların birbirleri ile ilişkili olması olarak ele alınabilir (Coxford, 1995). Bu iki yaklaşım kavram öğrenme olarak ele alındığında zihinsel süreçler bağlamında, öğrenenin zihinsel şemaları arasında ilişki kurma becerisi karşımıza çıkmaktadır. Ancak bu araştırmada kavramlar arasında, disiplinler arasında ya da temsiller arasında bir ilişkiden bahsedilmemektedir.

Thompson (1994) ileri cebir kavramlarını öğrenmede, nicelikler arasında eş zamanlı değişimin, sayısal ilişkilerin, ilişkiler üzerinde akıl yürüterek soyutlamalar yapmanın temel oluşturduğunu belirtmiştir. Thompson ve Carlson (2017) kümeler arasında eşleme fikrinin pek çok problem durumunun çözümü olduğunu ve fonksiyon kavramı için gerekliliğini vurgulamaktadır. Ancak her fonksiyonu cebirsel temsil ile göstermek mümkün olmayabilir. Özellikle günlük hayatımızdaki nesneler ile sayıların eşlenmesi şeklinde tanımlanan fonksiyon örneklerinde, eşleme ile küme gösterimi kullanarak temsil etme daha kullanışlı olmaktadır. Benzer şekilde günlük hayatımızdaki her eşleme örneği bir fonksiyon belirtmemektedir (Kabael, 2017, s.3).

İki nicelik arasındaki ilişkinin nasıl olduğu ve bu niceliklerin birbirlerine göre değişimin nasıl olduğunu anlamak, öğrencinin kavramsal anlaması ile mümkün olmaktadır. Keene (2007) ilişkisel düşünmenin Piaget' e göre sıralama ve karşılaştırma fikri ile geliştiğini ifade etmiştir. Örneğin, hangi trenin daha hızlı olduğunu anlamak zaman ve sıralama fikri ile ilişkilidir. Dolayısı ile değişkenlerin temsil ettiği niceliklerin arasındaki ilişki, bu niceliklerin birbirlerine göre nasıl değiştiği fikrine odaklanmaktadır (Carlson, 1998). Oehrtman, Carlson ve Thompson (2008) ilişki içeren günlük hayat örneklerinde değişkenleri belirleme, değişenlerin temsil ettiği kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi belirleme, farklı temsil biçimleri ile temsil etme ve bu temsillerden biri verildiğinde diğerleri ile temsil edebilme becerilerinin önemini vurgulamaktadır. Williams ve Molina (1998) öğrencilerin tamamının sembolik temsilleri kapsamlı şekilde öğrenemeyeceğini işaret ederken, NCTM (2000, s.41) her öğrencinin niceliklerin başka bir niceliğe nasıl bağlı olduğunu, bir nicelikteki değişimin diğer bir niceliği nasıl etkilediğini ve bu ilişkilere dayanarak nasıl karar verildiğini anlayabileceğini işaret etmiştir. Nitekim öğrencilerin sonuç odaklı aritmetik işlemlerinden süreç odaklı cebirsel ilişkileri ifade etme becerisine geçişleri çeşitli güçlükler barındırmaktadır (Kızıltoprak & Yavuzsoy Köse, 2017). Bu güçlükler arasında öğrencinin iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi, bu kümeleri temsil eden iki değişken ve eşitlik yardımıyla ifade etmesi belki de en dikkat çekenidir.

Stephens (2004) öğrencilerin cebirde kavram yanılgılarının olmasında önemli noktalardan birinin ilişkisel düşünme eksikliği olduğunu ileri sürmektedir. Halbuki NCTM (2000, s.37) standartları kapsamında cebir öğrenme alanı içerisinde çokluklar arasındaki matematiksel ilişkilere, bu ilişkilerin temsil türlerine ve çokluklar arasındaki değişimin analizine yer verilmektedir. Thompson (1990) herhangi bir nesnenin, bir takım ölçme süreçlerinden geçirilerek birey tarafından algılanabilme niteliğini 'çokluk' olarak tanımlamaktadır. Thompson (1994) çokluğun, bir nesne, nesnenin niteliği, niteliğin uygun birim ile ölçülebilirliği ve ölçümü belirten sayısallaştırma süreci olarak açıklamaktadır. Thompson' ın (1990, ss.11-12) çokluklar ve çokluklar arası ilişkilerin muhakemesinin önemini vurguladığı yollar arasında, iki çokluk arasında toplamsal veya çarpımsal kıyaslama yer almaktadır. Bu kıyaslamanın ise iki çokluk arasındaki eşleme ile mümkün olacağını belirtmiştir (Thompson, 1994, ss.185-186).

İki küme arasındaki ilişkinin kurulması ve elemanlarının eşlenmesi bu iki küme arasında bir bağıntıdan ve sıralı ikililerden bahsetmemizi zorunlu kılmaktadır. Bağıntı kavramını Argün vd. (2014, ss.41-42) şöyle tanımlamaktadır:

“$n \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verilmiş olsun. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ kartezyen çarpımının her R altkümesine $A_1, A_2, \ldots, A_n$ üzerinde bir n-li bağıntı denir. [...] Özel olarak A ve B iki küme olmak üzere $R \subseteq A \times B$ ise o zaman R' ye A' dan B' ye bir bağıntı; eğer $R \subseteq A \times A$ ise o zaman R' ye A üzerinde bir bağıntı adı verilir.”

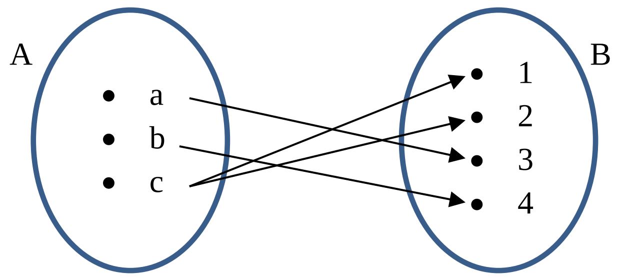
Bu tanıma göre A ve B kümeleri arasındaki R bağıntısının tanım ve görüntü kümelerini tanımlayabiliriz. R' nin tanım kümesi $\{a \in A \mid (a, b) \in R$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır$\}$ iken, R' nin görüntü kümesi ise $\{b \in B \mid (a, b) \in R$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır$\}$ şeklindedir.

Matematikte temel kavramlardan biri olan sıralı ikili düzlemde bir noktanın konumunu belirlemek için o noktanın koordinatları olarak hizmet etmektedir. Sıralı ikili, kartezyen çarpım kavramından doğmaktadır. Daha temelde ise iki kümenin elemanlarının eşlenmesi fikri yer alır. Bu eşlemede eşlenen elemanların ait olduğu kümeye göre sırası önemli olduğu için sıralı ikili denilmektedir. Örneğin, bir ilin sıcaklık değişimini gösteren tablodaki eşlemeden elde edilen (Ankara, 24) ve (24, Ankara) ikililerinin anlamı aynı değildir. Sıralı ikili, sıralı n-li kavramının özel bir durumudur. A nesnelerin boştan farklı bir kümesi ve $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ doğal sayıların sonlu bir altkümesi olmak üzere $x : I_n \rightarrow A$ her fonksiyona bir sıralı n-li denir ve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ile gösterilir (Argün vd., 2014, s.271, ss.472-473; Schumacher, 2000). Bu tanım sıralı n-linin bir fonksiyon olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda kartezyen çarpımı meydana getiren sıralı ikili ise şöyle ele alınmaktadır; “A ve B boştan farklı iki küme ise $a \in A, b \in B$ olmak üzere $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ gösterimi bu elemanların bir sıralı ikilisidir”. (a, b) sıralı ikilisi $f(1) = a, f(2) = b$ şeklinde tanımlı bir $f: \{a, b\} \longrightarrow A \cup B$ fonksiyonunu belirler. Karşıt olarak her $f(a) \in A, f(b) \in B$ şartını sağlan her $f: \{a, b\} \longrightarrow A \cup B$ fonksiyonu $A \times B$' nin $(a, b) = (f(a), f(b))$ elemanını belirler (Argün vd., 2014, ss.271-272, s.473).

Kavramın öğretim düzeylerine göre ele alınmasında, sıralı n-linin tanımında olduğu gibi iki kümenin elemanlarının eşlenmesi sonucunda eşlenen elemanların belli bir sıraya göre yazılması olarak incelenebilir. Bu açıklamada önemli olan sıralı ikilinin $(a, b) =$

$(c, d) \Leftrightarrow a = c \; ve \; b = d$ önermesinin doğruluğunun her zaman gösterilmesidir. Bu nedenle sıralı ikiliyi, bu çift gerektirmeyi doğru kılan nesne ikilileri olarak ifade edebiliriz (Argün vd., 2014, ss.475-476). İki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi liste yöntemi ile temsil ederken, öğrencilerin hangi kümeden diğerine eşlemenin yapıldığının farkında olmaları önemlidir. Öğrencilerin genellikle eşlemeyi sıralı ikililer yardımı ile gösterirken, bileşenlerin hangi kümenin elemanı olduğunu belirlemede güçlük yaşadığı bilinmektedir (Bayazıt, 2015, s.95). Bu güçlük sıralı ikili kavramı ve daha genel olarak koordinat sistemi ve bileşenleri kavramlarına ilişkin önbilgilerindeki eksikliklerden ya da yanılgılardan kaynaklanıyor olabilir.

Bağıntı kavramının gösterim biçimlerini incelediğimizde küme gösterimi, Venn diyagramı gösterimi, tablo gösterimi, sembolik gösterim ve grafik gösterimi karşımıza çıkmaktadır (Argün vd., 2014, ss.43-44). A' dan B' ye bir R bağıntısının bu gösterimler ile temsillerini yazalım. Kabul edelim ki $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1,2,3,4\}$ kümeleri verilmiş olsun. A' dan B' ye bir R bağıntısının küme gösterimi $R_1 = \{(a, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2)\}$ şeklindedir. Bu bağıntının Venn diyagramı gösterimi ise Şekil 8' de yer almaktadır.



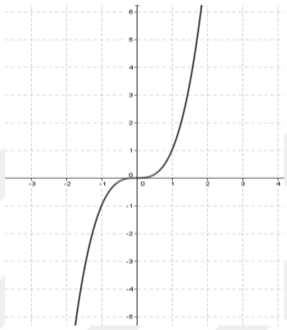
Şekil 8. R_1 bağıntısının Venn diyagramı ile gösterimi

R_1 bağıntısının tablo gösteriminde satır veya sütun şeklinde olabileceği gibi Şekil 9' da görüleceği gibi eşlenen elemanların alt alta ya da yanyana yazılması ile oluşmaktadır.

a	b	c
3	4	1
-	-	2

Şekil 9. R_1 bağıntısının tablo gösterimi

$R_2 = \{ (x, y) \in IR \times IR : y = x^3 \}$ IR kümesinden IR kümesine bir R_2 bağıntısının sembolik gösterimidir. Bu bağıntının grafik gösterimi Şekil 10' da yer almaktadır.



Şekil 10. R_2 bağıntısının grafik gösterimi

Tablo, verilerin açık ve öz bir şekilde aralarındaki ilişkiyi veya özelliklerini ortaya koymak için etkili gösterim yöntemlerinden biridir. Veriler veya bulgular, bazen kelimeler ile ifade edilebileceği gibi sayılar ile matematiksel ilişkileri de ortaya koyabilmektedir. Havaalanında uçak kalkış saat ve kapılarını gösteren tabelada, elektronik veri girişlerinin ya da işlemlerin yapıldığı ekranlarda ve daha pek çok günlük yaşam uygulamalarında verileri göstermede tablolar ile karşılaşmaktayız. Temel matematiksel kavramlardan olan eşleme ve ilişkilendirme için bir gösterim türü olarak tablo, bağıntı gibi matematiksel kavramları da temsil etmede kullanılabilir. Argün vd. (2014, s.505) tabloyu "*Kelimelerin, sayıların, işaretlerin veya bağıntıların bir kümesini ve kümenin elemanları arasındaki ilişkileri kapsamlı ve sıkıştırılmış bir şekilde paralel sütunlar veya parelel satırlar kullanılarak sergilenmesine veya gösterimine denir.*" şekilde tanımlamaktadır.

Öğretim programlarımızda yer alan özel bir bağıntı olan fonksiyon kavramı bağıntı kavramı üzerine yapılandırmak yerine, kümelerin elemanları arasındaki ilişkiye göre eşleme fikrini esas almaktadır (MEB, 2017). Bu nedenle bu çalışmada, bağıntının nesneler ya da nesne toplulukları arasındaki ilişki fikrine dayanarak ilişkilendirme ve eşleme kavramlarına odaklanılmaktadır. Bu bağlamda çalışma, matematiğin temel kavramı olan kümeler ve bu kümeler arasındaki ilişkiler ve eşlemeler üzerine sürdürülecektir. Belirli bir ilişkiye göre veya gelişigüzel yapılan eşlemelerin küme gösterimi, Venn diyagramı, tablo gösterimi, sembolik ve grafik gösterimleriden bahsedilecektir.

Argün vd. (2014, s.45) bağıntı, yani eşleme ve ilişkilendirme kavramlarının öğretiminde günlük hayatla ilgisi olmayan tamamen soyut kümeler yerine, sayıların tek yada çift olması, herhangi bir tamsayının tam karesi olması, belirli bir sayının katı olması gibi ilişkilerin yer aldığı örneklere yer verilmesini önermektedir. Öğrencilerin daha çok aşina olduğu ve somut örneklerin sunulması veya günlük yaşamdan örneklere yer verilmesi eşleme ve ilişkilendirme kavramlarının yapılandırılmasında daha etkili olacaktır. Hayatın içinde yer alan soyut ya da somut nesneler arasındaki ilişkiler incelendiğinde, bir nicelik ya da niteliğin diğerine bağlı olarak değiştiğini fark ederiz. Hız ve zaman, işçinin çalıştığı saat ve alacağı ücret, kahve makinasına atılan para ve alınabilecek kahve arasında bir ilişki mevcuttur (Kabael, 2016, ss.179-180). Bu ilişki örneklerine dikkat edilirse bağımlı ve bağımsız değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanları arasında eşlemeye dayalı bir ilişkiden söz etmek mümkündür.

2.10. Doğru ve Doğru Parçası Kavramları

Euclid geometrisinde kalınlığı ve derinliği olmayan, her iki yönden kesintiye uğramadan uzanan, bükülmemiş eğriyi doğru olarak adlandırmaktayız. Daha informal bir dil ile doğru düz çizgiyi karşılayan soyut bir kavramdır. Doğrunun farklı tanımlamaları ile karşılaşmak mümkündür. ‘Herhangi iki nokta arasındaki mesafeyi en kısa yapan eğri’ olarak tanımlamak uzaklık kavramı ile ilişkilendirilmiş ve diklik ya da koordinatlar cinsinden ifade edebileceğimiz sezgisel tanımlamadır. Afin uzayında vektör kavramıyla da tanımlanabilirken doğru, aksiyomatik sistemde tanımlanmamış (ilkel) temel bir kavramdır (Argün vd., 2014, s.137).

Doğan (2013, s.203) doğruyu tanımlarken Euclid geometrisine göre doğrusallık, genişliği ve kalınlığı olmama, her iki uç yönünde sonsuza gitme (başka bir ifade ile başlangıç ve bitiş noktası olmama) özelliklerini ele almıştır. Bu özelliklere göre doğru '*her iki yönde de sonsuza giden noktalar kümesidir*' şeklinde tanımlamıştır. Doğru parçasını ise 'bir başlangıç ve bitiş noktası olan' sınırlandırılmış ve eni olmayan doğrunun parçası şeklinde ele almıştır. Ancak bu tanımlarda yer alan 'uç' ve 'yön' gibi kavramlar daha fazla açıklama yapılmasını gerektirmektedir.

Bir diğer tartışmalı tanım ise "*a ile b aynı anda ikisi sıfır olmayan iki reel sayı ve c herhangi başka bir reel sayı olmak üzere ax + by = c lineer denklemini sağlayan (x, y) sıralı ikililerin kümesi düzlemde bir doğru temsil eder*." şeklindedir. Burada aksiyomatik sisteme göre tanımsız kabul edilen doğru ve nokta kavramları ile bir tanım ortaya konulmuştur. Bu nedenle daha kabul gören ve doğru kavramının doğrultusunu da dikkate alan vektör uzayındaki tanım ele alınabilir. Bu tanım Argün vd. (2014, s.142) tarafından şöyle yapılmıştır:

> *"V, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı ve $\vec{v} \in V$ olsun. V vektör uzayının $D = \{\, u + t\vec{v} : t \in \mathbb{R} \,\}$ şeklindeki alt kümelerine doğru denir."*

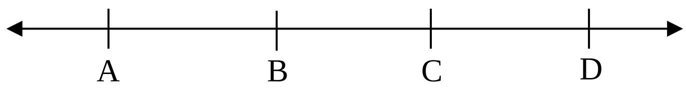
Bu tanımda $\vec{v}$ vektörü doğrunun doğrultman vektörüdür ve doğrultusu hakkında bilgi vermektedir. Dolayısı ile doğru kavramını yapılandırmada doğrultudan bahsetmek önem arz etmektedir.

Tanımlar incelendiğinde doğrunun herhangi bir parçası (özellikle doğru parçası) hiçbir zaman bir doğru belirtmeyeceği fikri oluşmaktadır. Doğru parçası iki nokta ile belirlenen doğrunun gerçek anlamda bir parçasıdır. Daha yalın bir anlatımla bir doğru üzerinde seçilen iki farklı nokta, bu doğruyu üç farklı parçaya ayırmaktadır. Bu parçalardan doğru parçası, iki nokta arasında kalan noktaların kümesidir. Doğru parçasının belirli olduğu bu noktalara doğru parçasının uç noktaları denir. Argün vd. (2014, s.143) vektörel tanımlamaları üzerinden doğru parçasını şöyle sunmaktadır:

"V, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı, u bir nokta ve $\vec{v}$ bu vektör uzayında bir vektör olsun. V vektör uzayının I = {$u + t\vec{v}$: t $\in$ [0, 1]} altkümesine doğru parçası denir."

Bu tanımda u noktası başlangıç noktasıdır ve $\vec{v}$ vektörü de doğrultman vektörüdür. Doğrunun gösterimlerini incelediğimizde denklemle gösterim, küme gösterimi, grafik gösterimi ve Euclid geometrisinde yer alan pek çok temsil ile karşılaşmaktayız (Argün vd., 2014, ss.143-144). Yukarıdaki tanımda küme gösteriminden farklı olarak bu temsillerden sıklıkla karşılaştığımız birkaç tanesi şöyledir:

- Grafik gösterimi iki ucunda yön belirten okların bulunduğu düz bir çizgidir. Bu çizgi doğrultusuna göre farklı olabileceği gibi genel prototip yatay bir çizginin kullanılması yönündedir (bkz Şekil 11). Bu grafikte uç noktaları verilen noktalardan herhangi ikisi olan doğru parçası temsillerinden ([BC], [AC] veya [AD] gibi) de bahsetmek mümkündür.



Şekil 11. Doğrunun grafik gösterimi

Euclid düzlemindeki doğru temsilleri ise:

- $y = mx + c; m, c \in \mathbb{R}$
- $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}; a, b, c \in \mathbb{R}$ kümesi
- (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) düzlemde iki nokta olmak üzere $y = (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$

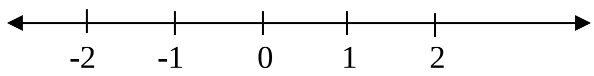
şeklindedir.

Doğrunun öğretim seviyelerine göre farklı tanımlamalarına ve temsillerine yer vermek gerekebilir. Daha temel düzeyde öğretim için nesnelerin genişlemesi (sünmesi veya uzatılması) fikrinden yararlanılabilir. Doğru kavramı için ip, lastik, kablo, demiryolu ve yol düz bir çizgi hattında ele alınarak somut örnek sunulabilir. Bu kavramların hayali olarak uzayıp devam ettiği veya iki nokta arasındaki bir parçasının düşünülmesi ile doğru ve doğru parçası kavramları incelenmeye başlanabilir (Argün vd., 2014, s.145).

Horzum (2016) görme engelli öğrencilerin üçgen kavramına ilişkin kavram imajlarını incelediği araştırmasında doğru parçasını temsil etmek üzere metal çubuklar ve noktayı temsil etmesi için mıknatıslı toplar kullanmıştır. Öğrencilerin inceledikleri üçgen temsilinde kenarları doğru veya doğru parçası olarak ifade ettikleri belirlenmiştir. Ayrıca görme engellilerin doğru ve nokta gibi daha soyut olan geometri kavramları ile çalışmalarında sıklıkla teknoloji destekli materyallerin kullanılması dikkat çekmektedir (Chew, Tomlinson & Walker, 2014; Toennies vd., 2011). Ancak bu programlarda görme engelli öğrencilerin doğruyu zihinlerinde algılamaları, kavramsal olarak kavramaları ya da somut olarak temsil etmeleri mümkün olmamaktadır. Bu programlar yalnızca görme engelli bireylerin geometrik kavramlar ile daha rahat çalışmalarını ve problem çözmelerini mümkün kılamaktadır.

2.11. Sayı Doğrusu (Cetvelleme) Kavramı

Sayı kümelerinin temsil edildiği diyagram olarak sayı doğrusu, sayısal hesaplamalarda, günlük hayatta ve grafiklerde kullanılan önemli bir araçtır. Sayı doğrusunda sayılar, noktalar ve orijine (referans noktasına) olan uzaklıklar ile temsil edilir ve belirttikleri miktar olarak büyüklüklerine göre sıralanmaktadır. Bir l doğrusu üzerindeki noktalar ile reel sayılar kümesi arasında birebir ve örten bir eşleme vardır. Bu eşleme l doğrusu üzerinde bir referans noktası seçmekle başlar. Seçilen bu O referans noktası 0 orijindir. Başka bir ifade ile O noktası 0 ile eşlenmiştir. Daha sonra doğru üzerinde seçilen noktalar ile O noktasını birleştiren doğru parçaları, O noktasına göre konumları dikkate alınarak reel sayılar ile eşlenir. Eğer seçilen nokta O noktasının sağında ise doğru parçasının uzunluğu pozitif reel sayı ile, solunda ise negatif reel sayı ile eşlenmektedir. Bu kabul doğru üzerindeki her nokta için uygulanabilmektedir. Burada sağ ve sol yön belirten kavramlar yatay eksene paralel konumlandırılmış doğrular ile çalışırken söz konusudur. Pozitif ve negatif sayıların yerleştirilmesinde esas olan birbirinden farklı iki nokta ile eşlenen sayıların farkı (orijinden uzak olan noktanın eşlendiği sayıdan, orijine yakın olan noktanın eşlendiği sayı çıkarılır) pozitif ise pozitif eksen, farkı negatif ise negatif eksen kabul edilmektedir. Nihayetinde l üzerinde her P noktası için x_P, $[OP]$ doğru parçasının uzunluğunu göstermek üzere (P, x_P) ikilisi elde edilir. L, l doğrusu üzerindeki noktaların kümesi ise elde edilen ikililer $L \times \mathbb{R}$ kümesinin bir altkümesidir. Başka bir ifade ile L' den $\mathbb{R}'$ ye bir bağıntıdır. O referans noktası ile elde edilebilecek her doğru parçasının uzunluğunu belirten bir tek reel sayı olduğundan bu bağıntı bir fonksiyon belirtir. Her bir farklı uzunluğa bir tek reel sayı karşılık geldiği için bu fonksiyon birebirdir. Her bir noktanın eşlendiği reel sayı, bu noktanın koordinatı olarak adlandırılabilir. Böylece sayı doğrusunu "*üzerindeki noktaların yukarıda anlatılan şekilde koordinatlandığı bir doğruya reel sayı doğrusu veya sayı doğrusu denir*" şeklinde tanımlayabiliriz. Tarihte sayı doğrusunun tamsayılar ile elde edildiği ve ölçeklendirilmiş cetvel şeklinde adlandırıldığı görülmektedir (Argün vd., 2014, ss.447-448). Burada dikkat edilmesi gereken nokta orijin noktası tayin edildikten sonra 1 birimlik uzunluğun belirlenmesi ve bu uzunluğun birim uzunluk kabul edilmesidir. Bu nedenle 1 ve -1 noktalarının sayı doğrusu üzerinde belirlenmesi birim uzunluğun elde edilmesinde önem arz etmektedir. Sayı doğrusunun temsili Şekil 12' de yer almaktadır.



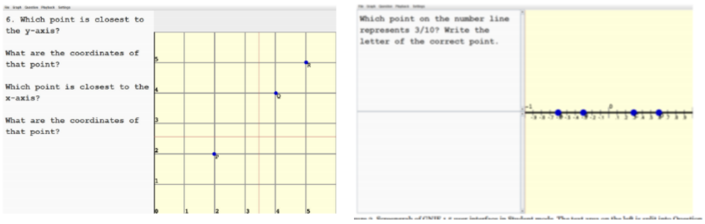
Şekil 12. Sayı doğrusu modeli

Sayı doğrusunu cetvellerken bahsi geçen uzunluk kavramını incelemek gerekirse, günlük hayatta karşılaşılan örnek durumlar üzerinden ele alınabilir. Nesnelerin ölçülebilen niteliklikleri̇nden biri olan uzunluk, belirlenen iki nokta arasındaki mesafedir. Bu mesafenin belirlenmesinde nesnenin doğrusal olması esas alınmaktadır. Bir eğrinin uzunluğunu belirlemek için öncelikle doğrusal bir hale getirmek gerekir. Reel sayıların ölçülebilen altkümeleri olarak doğru parçaları ile eğriler doğrusallaştırılarak uzunlukları belirlenir (Argün vd., 2014, s.543). Böylece uzunluğun nesnelerin karşılaştırılabilen ve ölçülebilen bir özelliği olduğunu söyleyebiliriz. Uzunluk kavramının ele alındığı ölçme kavramının birim kavramı, birimin uygunluğu, eş birimlerin kullanımı ve birimlerin yinelenmesi nitelikleri cetvellemede önem arz etmektedir. Birimlerin belirlenmesi, bu birimle nesneyi parçalara ayırma ve nesne boyunca birimleri uç uca yerleştirme, uzunluğu belirlemede önemli adımlardır (Clements & Stephan, 2004, ss.301-304). Birim kavramı nesnenin kesin uzunluğunun belirlemesinin yanı sıra, herkes tarafından kabul gören bir sonucun elde edilmesini mümkün kılar. Bu geçerliliğin sağlanması için ölçülecek nesnenin niteliğine uygun bir birimin belirlenmesi gerekir. Nitekim nesnelerin yalnızca aynı niteliklerini karşılaştırarak ölçüm yapabiliriz. Bu karşılaştırma belirlenen birimin tekrarı ile mümkündür. Tekrar eden birimler eş olduklarında uzunluk doğru ölçülmüş olacaktır. Elde edilen uzunluk birimi belirtilerek ifade edilmelidir. Bu bağlamda bir nesnenin uzadığı boyut yönünde birbirlerine en uzak iki noktası arasındaki belirlenen birim cinsinden uzaklığı, o nesnenin söz konusu boyutta uzunluğudur. En uzun olduğu boyuta ait uzunluğu ise nesnenin uzunluğudur (Argün vd., 2014, s.543).

Günlük hayat bağlamlarında sıcaklık ve asansör gibi çeşitli sayı doğrusu modelleri öğrencilerin kavramı temsil etmesi, bu temsiller arasında ilişkisel bir anlayış geliştirmesi için zengin bir bilgi birikimi sağladığı düşünülmektedir (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010). Bu modellerin kullanılması öğrencilerin sayı doğrusunda birbirlerine göre sayıların konumlarını fark etmelerine imkan sağlamaktadır (Beswick, 2011; Heeffer, 2011). Bahsi geçen modeller ve benzeri günlük hayat temsilleri alan yazında tamsayılar kavramı ile birlikte uygulamalarda yer aldığı belirlenmiştir (Akyuz, Stephan & Dixon, 2012; Gravemeijer, 1994). Bazı çalışmalarda ise tamsayılara, rasyonel sayılara ve reel sayıların sıralanmasına ilişkin kazanımlar için bir model olarak ele alınmıştır (Musser, Burger & Peterson; 2003; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010). Bramald (2000) sayı doğrusu ile tamsayılarda ileri ve geri sayma becerilerinin gelişmesine katkısını tartışmıştır. Bu çalışmada sayma ile eşleme arasındaki ilişki düşünülecek olursa, doğru üzerindeki noktalar ile sayma sayılarının eşlendiği fikrinin yer aldığını söyleyebiliriz. Van den Heuvel-Panhuizen (2008) sayı doğrusununa ilişkin bir başka önemli noktayı vurgulamıştır. Çalışmasında boş bir sayı doğrusunun (ölçeklendirilmemiş) tamsayılar ile ölçü (uzunluk gibi) ve birim kavramlarının ilişkisini tartışmıştır. Böyle bir sınıf uygulamasında öğrenciler verilen ölçeksiz sayı doğrusunu dilediği gibi birimlere ayırıp, işaretlediği noktaları dilediği bir referans noktasına göre cetvelleyebilecektir. Shanty (2016, s.70) de çalışmasında, öğrencilerin sayı doğrusu modelinde okları çizmenin ve başlangıç (referans) noktasının oluşturulmasının önemli olduğunu vurgulamaktadır.

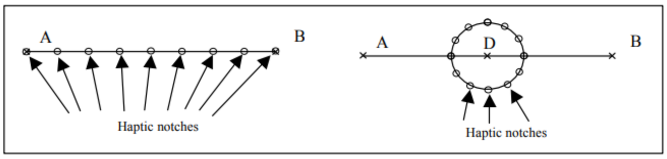
Cetvelleme yaparken doğru üzerindeki noktalarla sayıların nasıl eşleneceği önemli bir husustur. Referans noktası ve bu nokta ile eşlenen sayı belirlendikten sonra diğer sayıların sayı doğrusuna eşlenmesi belirlenen birimle mümkün olmaktadır. Erişti (2011) birimin özelliklerini eşitlik, genellik ve kullanışlılık olarak sıralamaktadır. Eşitlik değerler arasındaki birimin değişmemesi iken, genellik özelliği birimin herkes için aynı şeyi ifade etmesidir. Kullanışlık ise ölçülecek nitelik için en uygun birimin seçilmesidir. Bu nedenle sayı doğrusu cetvellenirken, eşlenecek noktalar arasındaki mesafenin belirlenmesinde kabul edilecek birim bu özelliklere sahip olmalıdır.

Görme engelli öğrenciler için sayı doğrusuna ilişkin doğrudan materyaller tasarlanmasa da grafikler için kullanılan somut veya teknolojik materyallerin uygulanabilir olduğunu söyleyebiliriz. Chew vd.' in (2014) tasarladıkları sesli teknoloji destekli uygulama nokta, doğru, sayı doğrusu, eksen ve grafik gibi kavramları anlamaya ve üzerinde uygulamalar yapmaya elverişlidir. Program, öncelikle *x* daha sonra *y*-ekseni için koordinatları seslendirmektedir. Ayrıca iki nokta arasındaki uzaklık da program yardımı ile elde edilebilir (bkz. Şekil 13). Görme engelli bireyin sadece imleci noktaların üzerine denk getirmesi gerekmektedir. Ancak bu durum görme yetersizliği olan öğrenciler için önemli ölçüde güçlük oluşturmaktadır. Bu nedenle program öğrenci ve öğretmen olmak üzere iki ayrı uygulama ile desteklenerek güncellenmiştir.



Şekil 13. Chew vd.’ in (2014) grafik çizimi destekli tasarladıkları program

Somut materyal olarak Rouzier, Hennion, Segovia ve Chêne (2004), doğru, doğru parçası ve nokta kavramları ile sayı doğrusu kavramı için kullanılabilecek mıknatıslı çubukları ele almıştır (Şekil 14).

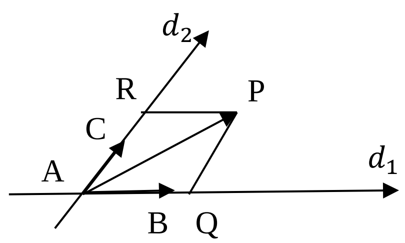


Şekil 14. Rouzier vd.’ in (2004) dokunsal materyalleri

Rouzier vd. (2004) bu materyaller ile geometrik kavramları, nesneleri ve özelliklerini görme engelli öğrenciler ile incelemenin mümkün olduğunu ifade etmiştir. Ancak çalışmada materyallin kullanımının öğrenci düşünmelerine yansımasına ilişkin ayrıntılı bilgi sunulmamıştır.

2.12. Koordinat Sistemi ve Grafik Kavramları

Düzlemin afin aksiyomları ile nokta ve vektör eşlemesi mümkün olmaktadır. Bu aksiyomlar düzlemde A ve B noktaları ile $\overrightarrow{AB}$ vektörünün belirli olduğunu ve düzlemde bir A noktası ile $\mathbb{R}^2$ vektör uzayında bir $\vec{u}$ vektörü ile $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek B noktasının varlığını garantilemektedir. Böylece düzlemde bir A noktası ve lineer bağımsız $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ vektör kümesi verildiğinde afin aksiyomlardan $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ve $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ olacak şekilde B ve C noktalarının varlığından söz edebiliriz. A noktasından geçen ve $\vec{u}$ vektörüne paralel olan doğru d_1 ve $\vec{v}$ vektörüne paralel olan doğru d_2 olarak adlandırılabilir. Düzlemin keyfi bir noktası P noktasından d_1 ve d_2 doğrularına çizilen paralellerin bu doğruları kestiği noktalar Q ve R olsun. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AR}$ olduğundan $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}$ ve $\overrightarrow{AQ} = x(P)\vec{u}$, $\overrightarrow{AR} = y(P)\vec{v}$ yazılabileceğinden $\overrightarrow{AP} = x(P)\vec{u} + y(P)\vec{v}$ elde edilir. Böylece düzlemin her P noktası için $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ kümesine $(x(P), y(P))$ reel sayı ikilisi karşılık getirilebilir. Ayrıca afin aksiyomlardan $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ kümesi için bir (a, b) reel sayı ikilisi verildiğinde $\overrightarrow{AP} = a\vec{u} + b\vec{v}$ olacak şekilde bir tek P noktası elde edilebilir. Sonuç olarak düzlemin noktaları ile reel sayı ikililerinin kümesi $\mathbb{R}^2$ arasında $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ kümesi sabit tutularak birebir eşleme kurulmuş olacaktır. $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ üçlüsüne düzlemin bir *eğik (afin, pararlel) koordinat sistemi*, A noktasına bu koordinat sisteminin *orijini* ve $(x(P), y(P))$ ikilisine bu koordinat sistemine göre P noktasının *eğik koordinatları*, d_1 ve d_2 doğrularına bu koordinat sisteminin *koordinat eksenleri* denir. Q noktasının bu koordinat sistemine göre koordinatları (b_1, b_2) ise $\overrightarrow{AQ} = b_1\vec{u} + b_2\vec{v}$ veya $\overrightarrow{AQ} = (b_1, b_2)$ vektörüne Q noktasının *yer vektörü* denilmektedir (Karlığa, 2002, ss.1-4; bkz. Şekil 15).



Şekil 15. Koordinat sistemi

$\overrightarrow{AB} = 1.\vec{u} + 0.\vec{v}$ ve $\overrightarrow{AC} = 0.\vec{u} + 1.\vec{v}$ olduğundan $B = (1, 0)$ ve $C = (0, 1)$ noktalarına koordinat sisteminin *birim noktaları* denilmektedir. P noktasından her bir eksen üzerine diğer eksen doğrultusunda paralel izdüşüm alınarak elde edilen reel sayı ikilisi, eğik koordinat sisteminde P noktasının koordinatlarını göstermektedir. $\overrightarrow{\{u, \vec{v}\}}$ vektör kümesinin ortonormal, yani birim vektörlerin ortogonal (dik), olduğunda $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ kümesine düzlemin *kartezyen (dik) koordinat sistemi* denir (Karlığa, 2002, s.3).

Q noktası için elde edilen yer vektöründe olduğu gibi Euclidyen düzlem reel sayılar ile koordinatlanabilmektedir. Başka bir ifade ile düzlemdeki her nokta etiketlenebilmektedir. Bu etiketleme, her bir noktanın bir reel sayı sıralı ikilisi ile eşlenmesi ile gerçekleşir. Bu durum analitik düzlemde cebir çalışmayı mümkün kılmaktadır (Argün vd., 2014, s.273). Cebirsel süreçleri görselleştirme yollarından biri olarak grafikle temsil için koordinat sisteminin düzlemde yapılandırılması gerekmektedir. Nitekim bir doğru üzerindeki noktalar reel sayılar ile eşlenerek koordinatlanabilmektedir. Doğru üzerindeki her bir nokta sadece bir tek reel sayı ile eşlenmektedir (Kay, 2001, s.83, bkz. Bölüm 2.11). İki farklı noktanın bir doğru belirttiği aksiyomuna dayanarak, düzlem üzerinde belirlenen noktalar yardımı ile doğruların varlığını garantileyebiliriz. Böylece düzlem üzerinde yer alan ve belirli bir açı ile kesişen iki farklı doğrunun konumlandırılabileceği açıktır (Kay, 2001, s.212). Bu doğruların biririni dik açı ile kesmesi özel bir durum oluşturmaktadır (Kaya, 2002, s.46). Ayrıca bu doğruların birer sayı doğrusu olabileceği daha önceki bölümde tartışılmıştır (bkz. Bölüm 2.11). Söz konusu cetvelleme işlemi yapılırken her iki doğru için de referans noktası olarak doğruların kesiştiği nokta seçilerek, 0 reel sayısı ile eşlenebilir. Söz konusu doğrular eksen olarak adlandırılmaktadır. Alışıla geldiği üzere doğruların düzlem üzerindeki konumları yatay ve düşey eksen olarak düşünülecek olursa yatay konumlu doğruya *x*-ekseni, düşey konumlu doğruya ise y-ekseni denilmektedir (Kaya, 2002, s.46). Reel sayılar ile eksenler eşlenmesinde, *x*-ekseni sağa doğru pozitif sayılarla ve *y*-ekseni yukarı doğru pozitif sayılarla eşlenirken, eksenlerin diğer yönleri ise negatif sayılar ile eşlenmektedir. Sağ-sol ve yukarı-aşağı kısım terimleri ile kastedilen anlam Bölüm 2.11' de açıklanmıştır. Ayrıca $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesinin herhangi bir elemanı (x, y) için *x*-ekseninde *x* noktasından ve *y*-ekseninde *y* noktasından çizilen dikmelerin kesiştiği nokta bir tektir. Böylece düzlemin her noktası ile $\mathbb{R}^2$ kümesinin elemanları arasında birebir ve örten bir eşlemenin olduğunu söyleyebiliriz. (a, b) sıralı ikilisine P noktasının dik koordinatları, özel olarak a sayısına P' nin apsisi ve b sayısına P' nin ordinatı denir (Kaya, 2002, ss.46-47). Bu çalışmada ortaöğretim matematik öğretim programlarında (MEB, 2013; 2017; 2018) yer alan kazanımlar esas alındığından sadece dik koordinat sistemi ele alınmıştır.

Koordinat sisteminin uygulama alanlarından olan grafik genelde bağıntı veya fonksiyonun düzlemde veya uzayda temsili için kullanılmaktadır. Bu nedenle matematikte grafiğin tanımını "A ve B iki küme ve R, A' dan B' ye bir bağıntı olmak üzere $\{(x, y) \in R: x \in A, y \in B\}$ kümesine R bağıntısının grafiği denir." şeklinde yapabiliriz (Argün vd., 2014, s.205). Çizgi veya serpme grafiği gibi grafik türlerinden söz etmek mümkündür. Verilerin sunulmasında uygun grafiklerin tercih edilmesi eksik veya hatalı sonuçların önüne geçmektedir. Kullanım amacına göre grafik tercih etmek daha doğrudur. Zamanın bağımsız değişken olduğu verilerin gösteriminde çizgi grafiğinin tercih edilmesinin daha uygun olacağı örnek gösterilebilir (Argün vd., 2014, s.81). Her ne kadar bu grafikler istatistik verileri için kullanılsa da bağıntıların temsil edildiği grafikler de bu bağlamda düşünülebilir. Nitekim bir değişkenle ilgili değişmeleri gösterirken, yani bir konuda değişen şartlara bağlı değişim ve seyiri gösterirken çizgi grafiği kullanılabilir. İki değişkenin değerlerinin ikililer halinde kartezyen koordinat düzleminde gösterilmesiyle elde edilen grafik ise serpme grafiğidir (Argün vd., 2014, s.82). Başka bir ifade ile değişkenlerin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkinin koordinat düzleminde noktalar halinde gösterilmesidir. Serpme grafiği değişkenler arasındaki sebep-sonuç ilişkisi bağlamında bilgi sunmamaktadır. Ancak grafik incelendiğinde değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanlarının birbirini nasıl etkilediği fark edilebilir. Burada kabul edilen görüş, sebep olan (bağımsız) değişkenin yatay eksende ve sonuç olan (bağımlı) değişkenin dikey eksende yer almasıdır (Argün vd., 2014, ss.82-83). Bu çalışmada değişkenler arasındaki ilişkinin görsel temsiline odaklanıldığı için yalnızca çizgi grafiği ele alınacaktır.

Grafikler kelimeler ile anlatmakta zorlandığımız ilişkileri okuyucuya görsel olarak özetlenmiş şekilde sunmaya yarayan görsel temsillerdir. Öğretim programlarımızda (MEB, 2018) grafik temsilinin kullanımına ilişkin matematiksel kavramlar hakkında etkin bir şekilde matematiksel düşünceleri ifade edebilme yolu olarak ele alınmaktadır. Grafikler, çoğu zaman öğrencilerin bir fonksiyonun veya bir veri setinin davranışını net bir şekilde anlamasını sağlamak için tasarlanmasına rağmen, öğrencilerin grafikleri yorumlamalarının zor olabileceğini gösteren araştırmalar yer almaktadır (Chiu, Kessel, Moschkovich & Munoz-Nunez, 2001; Roth & Lee, 2004). Nitekim araştırmalarda öğrencilerin verilen bir cebirsel denklemi çözmede en 'doğru' yolun sembolik temsiller yardımıyla olduğuna inandığı sonucu elde edilmiştir (Friedlander & Tabach, 2001; Huntley & Davis, 2008; Senk & Thompson, 2006). Bu yanılgı öğrencilerin, cebirsel kavramlarda sıklıkla sembolik temsiller ile karşılaşmış olmasından kaynaklanabilir. NCTM (2000), okul müfredatında kavramların farklı temsillerine yer verilmesinin gerekliliğini vurgulamıştır. Dolayısıyla sınıf uygulamalarında farklı temsil türlerine yer vermek öğrencilerin bireysel ihtiyaçlarına cevap vermenin bir yoludur (Friedlander & Tabach, 2001, s.174). Friedlander ve Tabach (2001) görsel temsillerin avantaj ve dezavantajlarını ortaya koyarken grafik ve diyagramın görsel doğasının en önemli avantaj olduğunu vurgulamıştır. Bu temsillerin, verilen bir grafiğin davranışının resmini hızlı ve verimli bir şekilde sunduğu ifade edilmiştir. Ancak söz konusu temsillerde kesinlik ve ölçeklendirme gibi dış koşullara bağlı dezavantajların olduğu vurgulanmıştır. Bu dezavantajları önlemek için birim kavramının etkili olduğu açıktır (bkz. Bölüm 2.11). Ayrıca grafiklerin anlaşılabilir ve kullanışlı olması için belirli özelliklere sahip olması gerekmektedir. Grafiğin başlığı, eksenlerin ölçeklendirilmesi, eksenlerin neyi temsil ettiğinin gösterilmesi, anlamayı güçleştirecek işaretlemelere yer verilmemesi gibi dikkat edilmesi gereken nitelikler yer almaktadır (Argün vd., 2014, s.206).

Grafikler matematiksel bir kavram olarak fen, istatistik ve sosyal bilimler gibi pek çok alanda kullanılan bir temsildir. Shah ve Hoeffner (2002) çeşitli yaş grublarında katılımcıları ile farklı bilim alanlarından kavramlar için grafik okunmasında ve yorumlanmasında rol alan değişkenleri belirlemişlerdir. Bu çalışmada elde edilen bulgular grafik okuma ve yorumlamada etkili olan faktörleri grafiğin sunum biçimi, okuyucunun grafik kavramına ilişkin ön bilgisi ve grafikte sunulan verinin bağlamına ilişkin bilgi sahibi olması şeklinde ortaya koymuştur. Matematiksel kavramların temsilleri için görsel bir temsil olarak grafik incelemede şüphesiz matematiksel kavramlara ilişkin bilgi düzeyi önem arz etmektedir. Matematiksel kavram bilgisi ve grafik inceleme ve tasarlama arasındaki ilişkiyi araştıran çalışmalarda (Capraro, Kulm & Capraro, 2005; Kieran, 1992) anlama ve temsil türleri arasındaki ilişki vurgulanmaktadır.

Öğrencilerin grafik kavramına ilişkin yaşadığı güçlükler grafik okuma ve yorumlama, grafik oluşturma ve grafikle diğer temsil türleri arasında ilişki kurma olarak sınıflandırabiliriz. Grafik okumaya ilişkin öğrenci yanılgıları incelendiğinde sürekli grafikleri noktasal veya kesikli grafiği sürekli olarak düşündükleri (Dunham & Osborne, 1991; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990) ve grafiklerin ölçeklendirilmesinde, farklı birimlere ayrılmış eksenleri fark edemedikleri (Dunham vd., 1991) tespit edilmiştir. Grafik incelemede dikkat çeken bir diğer öğrenci güçlüğü orijin kavramına dair önbilgi eksikliğinden kaynaklanmaktadır (Capraro, Kulm & Capraro, 2005). Buradan hareketle öğrencilerin koordinat sistemine ilişkin önbilgilerinin yapılandırılması ve yanılgılarının giderilmesi grafik incelemede önem arz etmektedir.

Grafik oluşturma, grafikten veri elde etme veya yorumlama ile koordinat sistemi, sıralı ikililer ve fonksiyon kavramları arasında önemli ilişkiler yer almaktadır. Bu bağlamda öğrenci düşünmeleri incelendiğinde öğrencilerin iki noktası bilinen doğrusal bir grafiği oluşturmada, grafikten verileri okumada, verilen bağımsız değişkene göre fonksiyon grafiği oluşturmada başarılı olmalarına rağmen grafik yorumlamada güçlükler yaşadıkları bilinmektedir (Kieran, 1992). Dunham ve Osborne (1991) bu durumun gerekçesi olarak grafik üzerinde yalnızca birkaç noktanın okunması ve birkaç noktasını belirleyerek bu noktaları birleştiren eğrinin çizilmesi ile grafiğin oluşturması gibi sınırlı bilgiye dayalı öğretim uygulamalarını işaret etmektedir. Kavramlar arası ilişkiye odaklanıldığında bağımlı ve bağımsız değişken, değişkenlerin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişki, değişkenlerin temsil ettiği kümelerin belirlenmesi ve tüm bu bilgilerin grafik üzerinde temsil edilmesi grafik yorumlamada ve oluşturmada önem arz etmektedir.

Leinhardt, Zaslavsky ve Stein (1990) öğrencilerin grafik okuma ve yorumlamada grafik oluşturmaya göre daha başarılı olduğunu belirtmiştir. Bu durum grafik çizerken yeni bir temsil oluşturulması ile ilişkilendirmektedir. Öğrenci yanılgılarını incelediklerinde öğrencilerin doğrusal grafik çizme eğilimi olduğunu, sürekli ve kesikli verilerin grafiklerini birbiri ile karıştırma ve grafik oluştururken ölçeklendirme yapamadıkları tespit etmiştir. Ayrıca çalışmada öğrencilerin temsiller arası geçiş becerileri vurgulanmıştır. Özgün-Koca (2015) alan yazın incelemesinde öğrencilerin grafik ve tablo ile temsil türleri arasındaki geçişlerde daha başarılı olduklarını ifade etmiştir. Eisenberg ve Dreyfus (1991) ise cebirsel temsillerin grafikle temsille oranla öğrenciler tarafından daha fazla tercih edildiğini belirtmiştir.

Grafik kavramı üzerine yapılan matematik eğitimindeki araştırmalar incelendiğinde fonksiyon grafikleri üzerinde yoğunlaştıkları görülmektedir (Dubinsky & Harel, 1992; Leinhardt vd., 1990; Tall & Bakar, 1992). Öğrencilerin grafik incelemede yanılgıları ise iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi grafik üzerinde temsil etmekte ortaya çıktığı belirlenmiştir. Ayrıca eşlemeye ait kümelerin koordinat eksenleri ile temsilinde *x*- ve *y*-eksenine elemanların yerleştirilmesi, elemanlar arasında eşlemenin yapılması ve bu eşlemenin grafik olarak gösterilmesinde öğrenci yanılgıları ve güçlükleri ortaya çıkmaktadır. Öğrencilerin eşlemenin belirli bir kural ya da ilişkiye göre olabileceği gibi gelişigüzel de olabileceği fikrine sahip olmamaları da önemli noktalardan biridir (Bayazıt, 2015, ss.96-98).

Knuth, (2000) ortaöğretim öğrencilerinin fonksiyon kavramının cebirsel ve grafik temsilleri arasındaki geçişlerle ilgili düşünmelerini, yanılgılarını ve bu yanılgıların sebeplerini incelemiştir. Araştırmada öğrencilerin önemli bir kısmı öncelikli olarak cebirsel stratejileri tercih ettiği ve çok azının ilk olarak grafiksel bir strateji uyguladığı tespit edilmiştir. Cebirsel stratejileri uygulayan öğencilerin, grafiksel yaklaşımın daha kolay ve kullanışlı olacağı birçok soruda dahi cebirsel yaklaşımları tercih ettiği belirlenmiştir. Katılımcı öğrencilerin grafik çizimini gereksiz bulduğu ya da sadece cebirsel sonuçları destekleyen bir araç olarak düşündüğü tespit edilmiştir. Bu nedenle, öğrencilere sembolik, cebirsel ve grafik temsileri arasındaki ilişkileri inşa etme ve etkileşimli bir şekilde ilişkilendirme fırsatı veren uygulamalar tasarlanmalıdır.

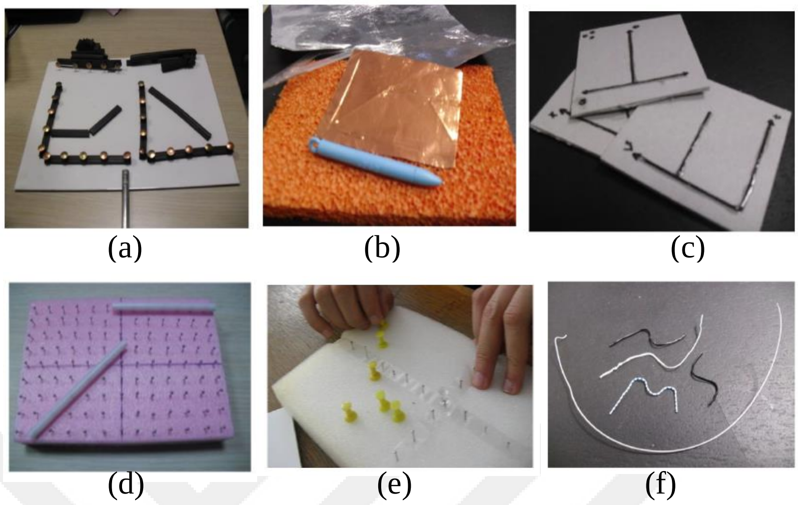
Tekay ve Doğan (2015) doğrusal denklemlerin grafik ile temsil edilmesinde 7. sınıf öğrencilerinin x ve y-ekseni üzerindeki noktaların koordinatlarını tespit etmede başarısız olduklarını tespit etmiştir. Öğrencilerin, doğrunun y-eksenini kestiği noktanın koordinatını belirlemede, x-eksenini kestiği noktanın koordinatını belirlemeye göre daha başarılı olduğu belirlenmiştir. Araştırmacılar bu durumu, derste öğretmenlerin genelde $x = 0$ değeri için değerlendirmelerde bulunmalarına bağlamaktadır.

Weber ve Thompson (2014) fonksiyon grafikleri için tahmini öğrenme yol haritası oluşturmuştur. Bu yol haritasını oluşturan adımları şöyle sıralamışlardır: (i) bir durum içinde iki nicelik ve bu nicelikleri temsil eden x ve y değişkenlerini kabul etme, (ii) x-ekseninin belirlenen bir birimde ölçülmüş bir niteliğin olası tüm değerlerini temsil ettiğini kabul etme, (iii) y-ekseninin belirlenen bir birimde ölçülmüş diğer bir niteliğin olası tüm değerlerini temsil ettiğini kabul etme, (iv) x değerinin üzerine dik olarak y değerinin olduğu noktanın koordinatlarını belirleme (bu noktanın koordinatları iki niceliğin değerlerinin eş zamanlı değişimini temsil etmektedir), (v) x ve y değerlerini eş zamanlı temsil eden noktadan çıkan iz olarak iki boyutlu bir grafiği oluşturma.

Görme engelli öğrenciler, grafikle incelemede yukarıda bahsi geçen fonksiyonun veya veri setinin davranışını hızlı bir şekilde belirleme avantajına sahip olmayacaktır. Ayrıca bu temsil türünün dezavantajlarına eğilimli olmaları da muhtemeldir. Bu nedenle görme engelli öğrencilere anlatılması en güç temsil yollarından biri grafik temsilidir (Cowan, 2011, ss.7-8). Ayrıca öğrencilerden koordinat sistemi üzerinde istenen bir noktayı belirlemesi veya noktaları bir araya getiren grafiği çizmesi istenmektedir. Görsel unsurlara dayanan bu beceri görme engelli bireyler için bir sınırlılıktır (Şafak, 2005). Bu sınırlıkları ortadan kaldırmak için görme engelli bireyin daha önce dokunsal materyaller ve özellikle dokunsal grafikler ile gerçekleştirdiği tecrübeleri ve dokunma duyusu, yani parmak ucu hassasiyetini dikkate alan destek eğitim araçları kullanılarak öğretimler gerçekleştirilmelidir (Cowan, 2011, s.67).

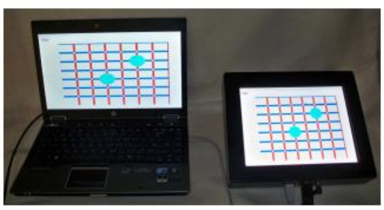
Görme engelli bireylerin grafik incelemeleri için kabartma baskı metinler, küptaş kasa materyali, delikli tahta materyali ele alınmaktadır. Ancak bu materyallerde görme engelli öğrencilerin grafik oluşturması güçlük arz ettiğinden teknoloji destekli materyallerden yararlanılmıştır. Günümüzde teknolojik materyallerin etkileşimli hale getirilmesi için projeler yürütülmektedir (Chew, Tomlinson & Walker, 2014; Toennies vd., 2011). Bu projeler sonucunda grafik çizimi ile eş zamanlı kabartma baskı veren pogramlar tasarlanmıştır. Fakat öğretmenlerin daha pratik, ekonomik ve her ortamda kullanılabilen somut materyallere ihtiyaç duyduğu düşünülmektedir. Ancak delikli tahtada olduğu gibi öğrencilerin grafikleri tasarlanmada birim oluşturma, çizim için malzeme seçme gibi dikkat edilmesi gereken noktalar yer almaktadır (Bülbül, 2013; Cowan, 2011).

Cowan (2011) görme engelli üniversite öğrencilerinin lineer (doğrusal) fonksiyon kavramı ve temsilleri üzerine yürüttüğü tez çalışmasında, öğrencilerin koordinat sisteminde noktaları belirlemekte güçlükler yaşadığını, grafiği oluşturmak için öncelikle bazı noktaları belirlemeye çalıştıklarını ve somut materyaller ile çalışmayı tercih ettiklerini belirlemiştir. Kabartma kağıtlar ile çalımaktan ziyade, plastik materyaller ve kablo gibi sert maddeler ile fonksiyon grafiği oluşturmayı tercih ettiklerini ortaya koymuştur. Bülbül (2013) çalışmasında kaynaştırma sınıflarında kullanılmak üzere grafik içerikli kazanımların öğretimi için tasarladığı basit somut materyallerin etkililiğini incelemiştir. Bu materyaller Şekil 16’ da yer alan mıknatıslı eksenler (a), metal grafikler (b), kabartmalı mukavalar (c), iğneli köpük (d), sünger ve iğneler (e), telefon kablosu parçaları (f) somut materyalleridir. Ancak Bülbül (2013), grafik incelemek ve çizmek için tasarlanan bu materyalleri incelediğinde birim, dayanıklılık, ekonomiklik, tasarlama ve kullanım çeşitliliği gibi sorunların ortaya çıktığını belirtmiştir.



Şekil 16. Bülbül' ün (2013) kaynaştırma sınıflarında grafik inceleme üzerine yararlandığı materyaller

Toennies vd. (2011) ise alternatif olarak görme engelli K12 düzeyindeki öğrenciler için tasarladığı teknoloji destekli materyali üzerine yürüttükleri çalışmada, dokunsal malzeme ve ses ile desteklenmiş programlama sürecinde öğrenci algılarını incelemiştir. 7×7 gridli yapıda katılımcılar ilk önce sadece yatay, daha sonra sadece dikey grid incelemiştir (bkz. Şekil 17). Daha sonra tüm gridli yapıyı imcelemeleri için fırsat verilmiştir. Katılımcılardan koordinatları verilen noktaları işaretlemeleri istenmiş ve ardından sesli geri bildirim verilmiştir. Ayrıca grid üzerinde işaretlenmiş noktaların koordinatlarını belirlemeleri de istenmiştir. Bu süreçte görme engelli öğrenciler başarılı olmuş olsa da geometrik nesneler ile çalışmanın devam edildiği süreçte sık sık tekrara ihtiyaç duydukları belirlenmiştir.



Şekil 17. Toennies vd.' nin (2011) teknoloji destekli grid materyali

2.13. Değişken Kavramı

Cebirsel düşünmenin değişken ve eşitlik kavramlarının anlaşılması üzerine kurulduğunu söyleyebiliriz (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005). Genel anlamda ele alındığında değişkenler birer sembollerdir. Ancak değişkenleri diğer sembollerden ayıran önemli bir özellik, değişkenlerin göz önüne alınan kümenin bütün elemanlarını (bir topluluğa ait bireylerin hepsinin giyebildiği bir elbise gibi) temsil etmesidir. Değişkenler de kümeler arasındaki ilişkilerin gösteriminde önemli bir araçtır. Değişkenin temsil ettiği elemanlar, değişkenin değerleri olarak adlandırılmaktadır. Bilinmeyen ve değişken arasındaki önemli fark, *bilinmeyen* açık önermeleri doğru yapan evrensel kümenin elemanlarını iken, *değişken* evrensel kümenin her elemanını temsil etmede aracılık eden semboldür. İstatistikte değişken kavramı her gözleme göre farklı değerler alabilen nesnelere, özelliklere ya da durumlara verilen ad olarak ele alınmaktadır. Bu nedenle değişken kavramını çalıştığımız konuya bağlı olarak değişen semboller olarak incelemek uygun görülmektedir (Argün vd., 2014, ss.101-103).

Değişen nicelikleri temsil eden sembol olarak değişken kavramı ilk olarak sonsuz küçük sayıları göstermek için Gottfried Wilheim Leibnitz (1646–1716) ve Sir Isaac Newton (1643–1727) tarafından kullanılmıştır. Değişken kavramı bu bakış açısı ile fonksiyon kavramının gelişiminde önemli bir katkı sağlamış ve dolayısıyla bu kavramın gelişimi, fonksiyon kavramının gelişimiyle paralellik göstermiştir (Argün vd., 2014). Ancak matematik müfredatında kavramlar birleştirilmesine karşın, değişken kavramı başlangıçtan itibaren genel şekli ile ele alınmış ve tüm harfli sembollere değişken denilmiştir (Kieran, 1989). Bu nedenle değişken kavramı fonksiyon kavramı ile ilişkilendirmekten daha ziyade, küme kavramı ile ilişkilendirilmiştir. Başka bir ifade ile değişkenler kümeler arasındaki ilişkileri tanımlada önemli bir araçtır (Argün vd., 2014).

Değişken kavramı için farklı bakış açılardan kaynaklanan farklı tanımlar karşımıza çıkmaktadır. Dede (2005) çalışmasında değişken kavramının '*değerlerin belirlenmiş bir* *kümesi olarak kabul edilebilen bir nicelik*'; '*tanım kümesi olarak adlandırılan ve incelenmesi için göz önüne alınan bazı sayı kümelerinin herhangi bir elemanı ile yer değiştirebilen bir sembol*' ve '*bir sayının rolünü üstlenen bir harf veya harflerin bir dizisi*' şeklinde farklı tanımlarından söz etmektedir. Söz konusu tanımlara ek olarak farklı tanımlar ortaya konulabilir. Öğrenme sürecinde kavram, uygun bir şemayla ilişkilendirilirse söz konusu kavramla ilgili bir anlam oluşur. Ne zaman yeni bilgi eski bilgi ile uygun bir şekilde adapte edilir ise o zaman söz konusu kavramla ilgili anlama meydana gelir (Skemp, 1976). Bu doğrultuda öğrencilere değişken kavramı anlatılmak istenildiğinde, mevcut kavram veya işlem ile uygun olan ve öğrenciler için en anlaşılır olan tanımı seçmek doğru olacaktır.

Değişken kavramının Harper (1979) "bilinmeyen" veya "değişebilen ancak tek sembol ile temsil edilen" şeklinde iki farklı şekilde tanımlandığını ileri sürmektedir. Sierpinska (1992) ise günlük hayat problemleri bağlamında ele aldığı değişken kavramı için bağımlı ve bağımsız değişken kavramına odaklanarak sürekli değişkenlerden bahsetmiştir. İlerleyen dönemde (Philipp, 1999, s.157) bağımlı ve bağısız değişken kavramlarına dayanarak değişken ve fonksiyon arasındaki ilişkiye dikkat çekmiştir. Osborne (1909) değişken ve sabit kavramlarının farkına odaklanırken, değişkenin pek çok niceliği sabitin ise tek bir niceliği temsil ettiğini vurgulamıştır. Bu kavramları vurgulayan en güzel örneğin $x^2 + y^2 = a^2$ çember denkleminin olduğunu belirtmiştir. Burada x ve y çemberi üzerindeki bütün noktaları temsil ederken, a sabiti tek bir değeri yani, yarıçap uzunluğunu temsil eden negatif olmayan bir reel sayıyı göstermektedir. Böylece yirminci yüzyılda ders kitaplarında fonksiyon ve değişken kavramları ayrı ayrı ele alınmıştır (akt. Lin, 2006).

Usiskin (1988) değişken kavramı için farklı tanmlardan bahsetmektedir. Örüntü genellemesi gibi genelleştirmenin yer aldığı aritmetiktiksel işlemlerde yer alan harfli ifadeleri ve hatta denklemde yer alan bilinmeyen ifadeyi değişken olarak adlandırmıştır. Bağımlı ve bağımsız değişken olarak fonksiyon kavramında parametreleri ve cebirsel yapı çalışmalarındaki her sembolü değişken olarak açıklamıştır. Usiskin' in (1988) okul cebirinde harfli ifade, değişken ve bilinmeyen kavramlarını birbirinden ayırt etmediğini söyleyebiliriz. Philipp

(1999, s.160) etiketler (3 feet 1 yard birimleri arasında $3f = 1y$ eşitliği) , sabitler (π, e, vb), bilinmeyenler, genelleştirilmiş sayılar, değişen nicelikler ($y = 9x - 2$ ifadesinde x ve y), parametreler, soyut semboller ($e * x = x$) olarak gruplandırmaktadır. Ancak bu durumun ilerleyen dönemlerde yanılgılara sebep olaması kaçınılmazdır. Nitekim Clement (1982) mekanik bölümlerdeki üniversite öğrencileri ile gerçekleştirdiği çalışmasında öğrencilerin verilen problem durumunda $S = 6P$ yerine $P = 6S$ eşitliğini yazarak kavram yanılgılarına sahip olduğunu belirlemiştir. Bu yanılgının etiketleme olarak sınıflandırılan açıklamasından kaynaklanan 'farklı harfler farklı değerleri belirler' anlayışından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu nedenle tüm cebir müfredatını öğrenmeyi etkileyen (Dede, 2004; Küchemann, 1978) değişken kavramının öğretiminde yanılgılara sabep olacak tartışmalardan kaçınılmalıdır.

Değişken kavramının matematiksel tanımını bilinmeyen kavramı ile birlikte Argün vd. (2014, s.101) *"Bir $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ açık önermesindeki x_i –lere bilinmeyen, bilinmeyenleri temsil eden sembollere de değişken adı verilir."* olarak yapmıştır. Burada açık önermeler denklem ya da eşitsizlik olarak yorumlanabilir. Değişken ve bilinmeyen kavramları karşılaştırıldığında *bilinmeyenler* açık önermeleri doğru yapan evrensel kümenin elemanlarının her biri iken, *değişkenler* evrensel kümenin her elemanını temsil eden sembollerdir. Başka bir ifade ile bir kümenin elemanlarının tamamını ya da bir kısmını, yani nesneleri temsil eden sembolü *değişken* olarak adlandırmaktayız. Değişkenin temsil ettiği kümenin elemanlarına ise *değişkenin değerleri* denir. Genel kabul olarak değişken *x, y* ve *z* gibi Latin harfleri ile sembolleştirilmektedir. Kümenin seçilen bir elemanı, yani *sabit terim* ise a, b, c gibi Latin alfabenin ilk harfleri ile sembolleştirilmektedir (Argün vd., 2014, s.102). Değişkenler için bağımlı ve bağımsız değişkenden bahsedebilirken, bilinmeyen için bağımlı ve bağımsız bilinmeyen kavramları tanımlı değildir. Ayrıca istatistikte değişkenler sürekli ve kesikli değişken olarak ele alınmaktadır. Sıcaklık sürekli bir değişken iken, cinsiyet süreksiz değişkene örnek verilebilir.

Değişken kavramına sınıf tartışmalarında yer verilme sıklığının yetersiz olması, öğretim programında yeterli önemin verilmemesi ve kavramın doğasına dair güçlüklerden kaynaklı olarak değişken kavramı önem arz emektedir. Cebirde yer alan ‘harfler’ veya ‘sözel semboller’ değişken kavramının çoklu gösterimleri olarak, öğrencilerin cebirde zorlanmasına sebep olmaktadır. Değişken kavramını tanımlamaktaki bir sıkıntı da bilinmeyen, parametre ve sabit kavramlarının değişken kavramı ile olan ilişkisinden kaynaklanmaktadır. Denklem çözümlerinde x değişkeni bir veya birden fazla çözümü temsil ettiği gibi denklemin hiçbir çözüme sahip olmaması durumunda boş kümeyi ifade etmekte de kullanılabilir.

Matematikte genel bir durumu ifade etmek için de değişkenlerden yararlanırız. Örneğin tek tamsayılar kümesinin elemanlarını temsil etmek için $2n+1$ ifadesini kullanırız. Benzer şekilde özdeşlikler, sayı veya geometrik şekil örüntüleri ifadelerinde de değişken kavramı söz konusudur (Akgün, 2006; Aktaş & Argün, baskıda; Argün vd., 2014; Boz, 2013; Lannin, Barker, Townsend, 2006). NCTM (2000) değişken kavramının denklemler için *yer tutucu (placeholder)* olarak, $1 = t(1/t)$ gibi bir ifade için ‘0’ hariç herhangi bir değer aldığında bir kimliği temsil etme, dikdörtgenin alan formülü için kullanılan harfli ifadeler olarak temsil etme ve $y = 2x$ için bağımlı ve bağımsız değişken olarak farklı kullanımlarından söz etmektedir.

Çelik ve Güneş (2013), harfli sembollerde öğrencilerin yaşadıkları zorlukların başında harfli sembollerin farklı anlamlar taşıyacak şekilde ele alınmasından kaynaklandığını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin harfli semboller ve onların rollerinin farkında olması amacı ile gerçekleştirdikleri çalışmada, 1970’lerin sonlarına doğru İngiltere’de yürütülen The Concepts in Secondary Mathematics and Science [CSMS] isimli bir araştırma projesinin sonucunda rotaya konulan öğrencilerin harfli sembolleri kullanma şekilleri ele alınmıştır. Bu doğrultuda harfli sembollere değer verme, harfli sembolü ihmal etme, harfli sembolü nesne olarak kullanma, bilinmeyen olarak harfli sembol, genelleştirilmiş sayı olarak harfli sembol ve değişken olarak harfli sembollerin kullanımına odaklanmışlardır. Çalışmada ilköğretim 6 ve 7. sınıf ve ortaöğretim 9. sınıf öğrencilerinin harfli ifadeleri kullanma seviyelerini tanımlamak ve karşılaştırmak, ayrıca bu süreçte sıklıkla yaptıkları hataları ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Katılımcıların seçimi cebir öğrenme alanını öğretim programında formal olarak yer verilmesi göz önüne alınarak yapılmıştır. CSMS projesine göre ortalama düzey öğrencilerin, öğrencilerin başarılarına göre genel dağılımda çoğunluğu oluşturan bölüm, harfli ifadeleri kullanma ve yorumlama ile ilgili durumları ve yaşadıkları zorluklar önem arz etmektedir. Bu nedenle çalışmaya ulusal sınavlarda orta derecede yer alan okullardan seçim yapılmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak CSMS projesinde geliştirilen Chesea Cebir Tanı Testi kullanılmıştır. Bulgularda $2a + 5b + a$ ve $2a + 5b$ ifadelerini en sade şekilde yazmalarını istedikleri seviyelerde 9. sınıf öğrencileri en fazla doğru cevabı veren katılımcılar olup, diğer gruplarda harfli ifadeleri ihmal ederek katsayıları toplama kavram yanılgısı gözlenmiştir. Bu durum öğrencilerin harfli ifadeleri nesne olarak kullanmalarından kaynaklanabilir. Harfli ifadelerin genelleştirilmiş sayı olarak kullanılmasını gerektiren madde için bulgular öğrencilerin bu kullanımı kavrayamadıklarını ortaya koymuştur. '$2n$ ve $n + 2$ hangisi daha büyüktür?' maddesi tüm gruplarda en zor madde olarak tespit edilmiştir. Katılımcılar harfli ifadeyi değişken olarak algılamayıp, tek bir değer olarak düşünmektedir. İlköğretim matematik öğretim programında 6. sınıftan itibaren örüntüleri harfli sembollerle modelleme etkinlikleri, 7. sınıftan itibaren $y = ax + b$ şeklindeki doğrusal denklemler ve grafikleriyle ilgili uygulamalar yer almaktadır. Ancak araştırmanın sonuçlarında 9. sınıf öğrencilerinin değişken kavramı ile ilişkili yeterliliğe henüz sahip olmadıkları ifade edilmiştir. Araştırmada öğrencilerin harfli sembolleri kullanma ve yorumlamadaki başarısının, öğretim programı ve öğretim materyallerine bağlanabileceği belirtilmiştir. Sonuçlar öğrencilerin harfli sembolleri kullanma ve yorumlamayla ilgili başarılarının yalnızca yaş ve bilişsel gelişimle açıklanamayacağının bir göstergesi olarak ortaya konulmuştur.

Knuth vd. (2005) eşitlik ve değişken kavramları için öğrenci anlamaları üzerine yaptıkları çalışmada ortaokul öğrencilerinin eşitlik işareti ve değişken kavramını anlamaları ve bu kavramların kullanımını gerektiren problemleri çözme performanslarını incelemiştir. Bu süreçte öğrencilerden $3 + 4 = 7$ ifadesindeki eşitlik işaretini tanımlamaları istenmiştir. Ayrıca denklemlerin eşitliği için n bilinmeyenine bağlı eşitliğin her iki tarafına işlemler gerçekleştirilerek elde edilmiş ifadeler sunularak, öğrencilerin eşitlikte dönüşüm anlamlarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Değişken kavramına ilişkin anlamalarını ortaya çıkarmak için öğrencilerden $2n + 3$ ifadesindeki n sembolünün yorumu ve $3n$ ile $n + 6$ ifadelerinin büyüklük kıyası yapmaları istenmiştir. Böylece öğrencilerin değişken kavramını kullanarak iki değişken nicelik hakkında yargıda bulunma becerisini değerlendirmek amaçlanmıştır. Verilerin analizinde eşitlik sembolünü 'aynı olma' ifadesi ile açıklayan öğrencilerin ilişkisel anlama, 'sayı eklemek' veya 'cevap' ifadelerini ise işlemsel anlama olarak değerlendirmişlerdir. Eşdeğer denklemler probleminde cevapların doğruluklarının yanı sıra stratejileri de kodlanmıştır. Analiz sonucunda 'eşittir işaretinden sonra cevap', 'eşdeğer olarak tanımlama' ve 'çözüp karşılaştırma' şeklinde temalar oluşturulmuştur. Burada sadece denklemlerin eşdeğer olduğu sonucunu ortaya koyan öğrencilerin ilişkisel anlamaya sahip olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerin harfli ifadeye ilişkin cevapları ise 'çoklu değerler', 'özel bir sayı' ve 'nesne' kategorilerini oluşturmuştur. Değişken nicelikler hakkındaki veriler ise '*değişkenliği açıklama*', '*tek değeri açıklama*' ve '*işlemi açıklama*' kategorilerini ortaya çıkarmıştır. Sonuçlar incelendiğinde, öğrencilerin eşitlik kavramı için işlemsel anlama seviyesinde olduğu ortaya konulmuştur. Ayrıca harfli ifadelerin çoklu-değişken olarak algılanmasına yönelik öğrencilerin zorlandıkları belirtilmiştir. Bu doğrultuda değişken kavramının öğretimine ilişkin çalışmaların gerekliliğine vurgu yapılmıştır.

Değişken kavramını anlamak yalnızca bir kümenin elemanlarının temsilini anlamak ile sınırlı kalmamaktadır. İki küme arasında eşlemenin yapılması ve dolayısı ile ilişkinin oluşturulmasında değişken kavramı yeniden gündeme gelmektedir. Ural (2006) bu durumda öğrenci zihninde olası iki problemden bahsetmektedir. İlki bağımlı ve bağımsız değişkeni belirlemek ve ikincisi bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi belirlemektir. Ural (2006) bu soruların yalnızca öğrencinin matematiksel etkinliği sürecinde değil, diğer bilim dallarında ve yaşam içindeki problemlerde de karşımıza çıktığını belirtmektedir. Örneğin, bir otomobilin hareketini etkileyen hava direncini incelediğimizde, direncin hıza bağlı olduğunu belirleme süreci fonksiyonel düşünme sürecidir (Hedrick,1938, akt. Ural, 2006).

Moss, Boyce ve Lamberg (2019) öğrencilerin değişken kavramı ve temsilleri ile fonksiyon kavramını yapılandırma sürecinde öğrenci düşünmelerini incelemiştir. Bu çalışmada alan yazın incelemesi adı altında kısmi olarak tahmini öğrenme yol haritasının oluşturulduğu söylenebilir. Bu tahmini öğrenme yol haritasına göre düzenlenen uygulamalar ile öğrenci düşünmelerine erişilmiştir. Ancak değişken kavramını harf temsili üzerinden ele almaları dikkat çekmektedir. Düşünme türleri olarak adlandırdıkları seviyelerden ilki nicelik gruplarını etiketlemek için harflerin kullanılmasını içermektedir. Örneğin 3 kırmızı niceliğin 3*k* ile temsil edilmesidir. Aynı seviye bilinenleri etiketleme olarak harf temsili ile ele alınmıştır. İkinci seviye harflerin sürekli değişkenleri temsil etmesi iken, sonraki düzeyde bilinmeyeni temsil ettiğini belirtmişlerdir. Son olarak ise bağımlı ve bağımsız değişken temsilleri ele alınmıştır.

Panorkou, Maloney ve Confrey (2013) örüntü ve ilişkilendirme, eşitlik ve denklem, değişken kavramlarını üç farklı öğretim oturumunda ele alarak öğrenme yol haritaları elde etmeyi amaçlamıştır. İlk aşama iki örüntünün eş zamanlı değişiminin değişkenler yardımı ile gösterimine odaklanmıştır (Blanton & Kaput, 2011; Confrey & Smith, 1991; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Zazkis & Liljedahl, 2001). Burada öğrenme yol haritasında eşleme ve ilişkilendirme üzerine farklı temsil türlerine yer verilmiştir. Bu temsil türleri arasında sayı doğruları üzerindeki noktaların eşlenmesi, tablo ve grafik ile temsil etme yer almaktadır. Eşitlik kavramının anlaşılmasının denklem çözme ile mümkün olacağını iddia edilen araştırmada, değişken kavramı bilinmeyen kavramının temsilcisi olarak düşünülmüştür. Eşiklik kavramının denge anlamı için görsel modelleri (terazi ve bar/çubuk) kullanılması da hedefler arasında yer almaktadır. Bir bilinmeyenli denklemler ile devam eden hedef sıralaması, sözel problem çözümleri ile sonlanmaktadır. Üçüncü aşama olan değişken kavramının yapılandırılması ‘bağlama göre bir bilinmeyenli değeri temsil eden değişken ile çeşitli nicelikleri temsil eden değişkenin ayırt edilmesi' hedefi ile başlamaktadır. Öğrenme yol haritasında, 'farklı bağlamlarda nicelikleri temsil etmesi için değişkenlerin kullanılması' ve 'ileri düzeyde denklik ifadelerinin belirlenmesi ve elde edilmesi' takip eden hedefler olarak belirlenmiştir.

Czarnocha (2016) doğrusal denklemler için oluşturdukları öğrenme yol haritasına değişken kavramına dair hedefler ile başlamışlardır. Böylece basit bir bilinmeyenli denklemlerin çözümünden iki değişkenin temsil ettiği elemanlar arasındaki ilişkiye dayalı fonksiyon kavramına dair farkındalık sağlanacağı belirtilmiştir. Değişken kavramının belirli bir bilinmeyen algısına ilişkin yanılgının giderilmesi vurgulanmıştır. Ayrıca eşitlik sembolünün sadece bir tarafına -3x ifadesi ekleyerek '=' sembolünün cebirsel anlamının algılanamaması da bir diğer vurgudur. Böylece değişken kavramının ardından cebirsel işlemlere dayalı bir ve iki bilinmeyenli denklemlerin çözümleri ve daha sonra grafik temsilleri ele alınmıştır. Değişken kavramı için yol haritasının üç şemadan oluştuğu ifade edilmiştir: belirli bir bilinmeyen olarak değişken, genelleştirilmiş sayı olarak bilinmeyen, fonksiyon kavramına geçişte iki nicelik arasındaki ilişkiyi belirleyen değişkenler.

Cebirsel ifadeleri oluşturan işlem ve değişkenleri temsil eden sembollerin her biri için Braille karakterler kullanarak görme engelliler için uyarlama yapılmaktadır. Bunun yanında terimleri birbirinden ayırma, işlem sırasını ya da kapsadığı ifadeyi belirtmek ve ayrıca parantezler için karakterlere yer verilmektedir. Şafak (2005) bu kadar çok karakteri görme engelli bireyin zihninde tutmasının mümkün olmadığını ifade etmektedir. Ayrıca engelli bireylerin işitsel olarak takip ettiği işlemleri zihinden yapıyor olmasının da bir diğer sınırlılık olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle değişken kavramını görme engelli bireyin kabartma yazı karakterler ile temsil etmesinin ve bu temsiller ile işlem yapabilir olmasının güçlüğü (Maulana, 2019) dikkat çekmektedir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölüm araştırmanın desenine, katılımcılara, veri toplama süreci ve araçlarına, veri analizine, geçerlilik ve güvenirliğe ayrılmıştır.

3.1. Araştırmanın Deseni

Araştırmanın deseni, veriler araştırmacı tarafından yönetilen bireysel öğretim ortamlarında toplanıp analiz edileceğinden ve katılımcıların bir matematiksel kavrama ilişkin bilişsel yapıları araştırıldığından bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyi (teaching experiment) (Cobb & Steffe, 1983) olarak belirlenmiştir. Ancak, araştırma sürecinde görme engelli bireylerin genelde eğitimde, özelde matematik eğitiminde ve özellikle cebir kavramları öğrenme-öğretme süreçlerinde yer alan ihtiyaçlarının, sorunlarının ve mevcut durumun belirlenmesi zorunluluğu hasıl olmuştur. Bu amacı gerçekleştirmek için araştırma probleminin söz konusu basamağı için durum çalışması deseninde çalışmalar yürütülmüştür.

Öğretim deneyi bir bireyin ya da bir kavramın bir süreç boyunca gelişiminin incelenmesine ve yorumlama ile bir model oluşturulmasına fırsat sağlayan etkili bir tekniktir (Steffe & Thompson (Glasersfeld katkısı ile), 2000; Cobb, Wood & Yackel, 1990). Öğretim deneyi, aynı zamanda öğretici rolünü üstlenen araştırmacı ve katılımcı arasındaki etkileşim ile aynı zamanda katılımcıların matematiksel bilgilerini açığa çıkarmayı amaçlayan öğretim sürecini içermektedir (Cobb & Steffe, 1983). Ögretim deneyinin temel amacı araştırmacının öğrencilerin matematik öğrenme süreçlerini ve muhakeme ve düşünme becerilerini anlaması veya keşfetmesidir (Steffe & Thompson, 2000). Buna ek olarak öğretim deneyi tasarıları öğrenci bilgisini ve bu bilgiyi nasıl yapılandırdığını ortaya koymayı amaçlamaktadır (Steffe, 1991). Bu araştırmada görme engelli öğrencilerin cebir kavramlarını bilişsel bir yapı olarak oluşturma süreçlerinin ayrıntılı incelenmesi amacıyla bir öğretim deneyi tasarlanmıştır.

Öğretim deneyinde seçilen cebirsel kavramların doğası ve tarihi gelişimi dikkate alınarak oluşturulan kavram-alt kavram çerçevesine uygun olarak tasarlanan görüşme protokolleri ile öğretim oturumlarında klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Protokoller tasarlanmadan önce, görme engelli bireylerin genelde eğitim süreçleri özelde matematik eğitimi süreçleri hakkında bilgi edinmek ve öğretim uygulamalarında kullanılacak araç gereçlerin belirlenmesi için ön görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerden elde edilen bulgular ışığında, klinik görüşmelerdeki sorular öğretim programları, kavramların tarihsel gelişimi ve doğası, alan yazında yer alan kavram yanılgıları veya öğrenci anlamaları, stratejileri, algıları ve kavrayışları üzerine çalışmalar dikkate alınarak tasarlanmıştır. Klinik görüşmeler gerçekleştirilirken öğretim deneyinden önce katılımcıların var olan bilgileri, süreç içindeki akıl yürütmeleri, matematiksel düşünmeleri, düşünme ve kavrayışlarındaki farklılıkları, sezgisel düşünmeleri, alternatif kavramları, kavramlar üzerindeki algıları, stratejileri ve kavrayışları göz önüne alınmıştır (Steffe & Thompson, 2000, s. 271). Görüşme protokolleri gerçekleştirilirken somut materyaller ile desteklenmiştir (Braille çıktılar, iğneli sayfa materyali, 3D kalem vb).

Bireylerin hayatın içindeki davranışlarını şekillendiren ihtiyaçları baş göstermektedir. Bu ihtiyaçların ortaya çıkmasında uygun ortamların oluşması gerekliliktir. İhtiyaç tanımları incelendiğinde uygun ortamın yanı sıra mevcut duruma da bağlı olduğu ortaya çıkmaktadır. İhtiyaç, mevcut durumla olması istenilen durum arasındaki fark, mevcut durumdan duyulan memnuniyetsizlik, gerçekleşmesi istenilen başarılar ve bunun için gerekli olan değişim olarak ele alınmaktadır. Genel olarak istek, eksiklik ve gereklilik olarak düşünebileceğimiz ihtiyaçların belirlenmesi bir durumun detaylı olarak incelenmesini içermektedir (Kılıç, Aydın, Ökmen & Şahin, 2019, s.2). Durum çalışması ise durumları kendi gerçek bağlamında inceleyen, mevcut durumu ortaya koyan ve bütüncül bir yorumla çalışmayı sunabilen bir araştırma yöntemidir (Merriam, 1998, s. 19). Bu bağlamda araştırmanın 'görme engelli bireylerin genelde eğitim ve özelde matematik eğitimi uygulamalarındaki sorunları ve ihtiyaçlarını' ve 'görme engelli bireylerin cebir alt öğrenme alanında yer alan çeşitli kavramların (eşitlik, değişken, bilinmeyen ve fonksiyon) öğretilmesine dair ihtiyaçlarını belirlemek' şeklinde ifade edilen alt amaçlarını ortaya çıkarmak için durum çalışması deseni çerçeve olarak almanın daha yerinde olacağı düşünülmüştür. İhtiyaç belirleme çalışmalarının amacı bireyi merkeze almak ve bireyin ihtiyaçlarından yola çıkarak onun potansiyelini üst seviyeye taşımaktır. Dolayısıyla ihtiyaç belirleme yalnız bireyin eksiklerini değil, aynı zamanda onların var olan durumunu da ortaya koymaktadır (Kılıç vd., 2019, s.19). Bu çalışmada da görme engelli bireylerin ihtiyaçlarını ve mevcut durum belirlemek amaçlandığından, her bir katılımcı çalışmanın bir durumunu oluşturmaktadır. Bu nedenle, bir çoklu durum çalışması olan bu araştırmanın ihtiyaç belirleme sürecinde yer alan her bir durumun (katılımcı) kendi içinde farklılıkları barındırdığından, araştırmanın bu aşaması iç içe geçmiş çoklu durum deseninde (Yin, 2003) tasarlanmıştır.

3.2. Araştırmacının Rolü

Öğretim deneyi daha iyi bir öğretim yapmak için uygun koşullar oluşturma ve öğreticinin etkisini de göz önüne alarak, öğrencilerde meydana gelebilecek olası değiliklikleri incelemeyi esas alan bir araştırma metodudur (Cobb & Steffe, 1983). Bu nedenle araştırmacı, öğrencilerin daha iyi öğrenmelerini sağlamak için süreç içinde bazı önlemler alma ve öğretim ortamında değişiklikler yapma imkanına sahiptir. Bu değişikliklerin öğrencilerin gelişimine etkisini incelerken, araştırmacının rolünü dikkate alması gerekmektedir (Steffe, 1991). Araştırmada görme engelli bireylerin cebirsel düşünme süreçleri ve bu bağlamda cebir kavramlarını nasıl yapılandırdıkları incelenecektir. Bunun için tasarlanan görevlerin uygulanması ve geliştirilmesi sürecinde bireysel klinik görüşmelerde araştırmacı, hem öğretici hem de araştırmacı olarak yer almaktadır. Görüşmelerde katılımcıları daha yakından tanımak, onların fikirlerini sürekli ifade etmelerini sağlamak ve öğrenmenin demokratik bir ortamda gerçekleşmesi gibi nedenlerden dolayı katılımcılar ile uzun süreli etkileşim sağlanmıştır. Bunun için uygulanacak etlinliklerden önce katılımcılar ile sınıfta veya destek odalarında gözlemler yapılmıştır. Araştırmacı Braille yazı kodları için MEB kılavuzunu kullanmıştır. Araştırmanın veri toplama araçlarını tasarlamadan önce, araştırmacı ODED kursunda iki ay süre ile haftada bir gün bireysel oturumlarda görme engelli bireylere matematik konularında destek eğitim sunmuştur. Aynı dönmede iki ay süreyle haftada 3 saat Mitat Enç Görme Engelliler Ortaokulu' nda matematik öğretmenleri ile görme engelli öğrenciler için matematik uygulamalarına ilişkin görüşmeler gerçekleştirmiştir. Bu görüşmelerde öğretmenlerin yaşadığı güçlükler ve sorunlar ele alınmış ve çözüm önerileri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Ayrıca araştırmanın ilk aşamasında 18 ve ikinci aşamasında 6 görme engelli birey ile gerçekleştirilen bireysel görüşmeler, araştırmacının görme engelli bireyler ile eğitim uygulamaları süreçlerine ilişkin öğretmen bilgisine katkı sunmuştur.

Sosyo-kültürel teoriye dayanarak öğrenme yol haritaları tasarlanırken öğrenen ile etkileşim kurmak önem arz etmektedir. Öğretmen/araştırmacı, öğrenciyle etkileşimde kalarak öğrencilerin öğrenmelerine ilişkin öğretmen bilgisini şekillendirerek öğretimsel aktiviteler hazırlayabilmektedir. Ayrıca konuşmanın öğrenen için önemi göz önüne alınacak olursa, görme engelli bireylerin öğrenmedeki önemli araçlardan biri olan dil kullanımının etkililiği daha da artmaktadır. Araştırmada tasarlanan öğrenci görevlerinin (öğretim oturumları için tasarlanan etkinlikler, bkz. EK3) dokunsal materyaller ile desteklenmesinin yanı sıra sözel ifadeler ve onlar için okuyan okuyucunun önemli olduğu göz önüne alınmıştır. Gravemeijer (2004) matematiksel fikirlerin ve öğrenme varsayımlarının öğrenme veya öğretme sürecine uyarlanmasına odaklanan öğretim deneyini, öğretim süresince günlük öğretim etkinliklerinin uygulanması, gözden geçirilmesi ve tasarlanması olarak tanımlamaktadır. Öğretmen ve araştırmacı, öğretim deneyleri gerçekleştirilmeden önce sınıfta uygulanacak etkinliklerin tasarlanması ve sonrasında da etkinliklerin geliştirilmesi için uygulamanın zayıf ve güçlü yanlarını değerlendirmek amacıyla iş birliği yapmaktadır. Öğretmen veya araştırmacı bu süreci bireysel olarak da yürütebilmektedir (Steffe, 1991). Bu araştırmada yazar, öğretim oturumlarındaki öğretmen rolünün yanında, görüşmeler sürecinde hedeflere ulaşılıp ulaşılmadığını kontrol etmeyi göz önüne alarak araştırmacı rolünü üstlenmiştir. Ayrıca araştırmacı her oturumda katılımcıların araştırmanın yapıldığı ofise ulaşmaları için imkan sağlamış ve öğrenciler ile daha fazla zaman geçirerek onları tanımak ve iletişimi artırmak için fırsat oluşturmuştur.

3.3. Çalışma Grubu

Araştırma görme engelli bireylerin ihtiyaçlarını belirlemek, öğretim uygulamaları için daha fazla tecrübeye sahip olmak, hazır bulunuşluk düzeylerine dair daha ayrıntılı bilgi edinmek ve böylece görme engelli bireylerin matematiği nasıl öğrendiklerine daha geniş bir pencereden bakma fırsatı yakalamak için iki farklı katılımcı grubu ile yürütülmüştür. İlk aşamada yapılacak olan görüşmelerde görme engelli bireylerin genel öğrenim uygulamalarında, matematik ve özelde cebir öğretimi uygulamalarında yaşadıkları sorunlar ve ihtiyaçlar belirlenmiştir. İkinci aşamada 2 görme engelli birey ile belirlenen cebir kavramlarına dair tahmini öğrenme yol haritalarını belirlemek amacı ile ön görüşmeler ve klinik görüşmeler (öğretim oturumları) gerçekleştirilmiştir.

3.3.1. Katılımcıların Belirlenmesi

Araştırmada ilk aşama görüşmeleri ile öğretim deneyine ait klinik görüşmeler için katılımcılar amaçlı örnekleme ile belirlenmiştir. Görme engelli öğrenciler görme yetersizlik düzeyleri ve türlerine göre farklı gruplandırılmaktadır (Gürgür & Şafak, 2017). Ayrıca görme kaybının ne zaman meydana geldiği de matematik öğrenme sürecinde sembollerin ve işaretlerin öğrenilmesi ve matematiksel dil kullanımı becerisi için önem arz etmektedir (Ferrell, Buettel, Sebald & Pearson, 2006). Bu nedenle ihtiyaç analizi için görüşmelerde yer alan katılımcılar maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi ile farklı demografik özelliklere sahip ve farklı hazır bulunuşluk düzeyindeki bireylerden seçilmiştir. Maksimum çeşitlilik örnekleme ile söz konusu farklılıklardan kaynaklanan ortak örüntüyü yakalamak, temel deneyimlerini belirlemek (Patton, 2014) ve bu farklılıklar ile görme engelli bireylere dair önemli ayrıntıların tecrübe edilmesi mümkün olmuştur. İhtiyaç analizi görüşmelerinde yer alan katılımcılar, görüşme sorularına daha zengin bilgi verebileceğini düşündükleri görme engelli bireyler ile irtibat kurulmasını sağlamıştır. İhtiyaç ve sorunlara dair benzer öneriler tekrar etmeye başlayınca veri toplama süreci sona erdirilerek kartopu örnekleme metodundan yararlanılmıştır.

Öncelikle demografik özellikleri farklılık gösteren görme engelli bireyler (üniversite mezunu, üniversite öğrencisi, ortaöğretim 9-12. sınıfta eğitim gören görme engelli öğrenciler) ile yarı-yapılandırılmış görüşme yapılarak öğretim deneyi için tasarlanılacak görevler ve kullanılacak materyaller ile ilgili bilgi toplanmıştır. Böylece görme engelli bireylerin matematik öğrenme düzeyleri, hazır bulunuşluk düzeyleri, görme engellilik düzeyleri ve bunun öğrenmeye yansımaları, matematik öğrenme geçmişleri, daktilo veya Braille kullanma düzeyleri ile ilgili bilgi edinilmiştir. Doğuştan görme engelli olan, kabartma yazı kullanan, ilk ve orta okulu görme engelliler okularında okumuş, ortaöğretimi kaynaştırma okulunda okumakta olan bir 12.sınıf öğrencisi ile pilot görüşme gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmaya dayanan gerekli uyarlamalar yapıldıktan sonra demografik özellikleri çeşitlilik arz eden (görme yetersizlik düzeyi %80-100 arasında değişen, görme kaybını doğuştan ve 18 yaş aralığında yaşamış olan, eğitim düzeyi farklılık gösteren, kabartma alfabe ve/veya Latin alfabe kullanan veya bilen) 18 görme engelli birey ile görüşme gerçekleştirilmiştir. Burada amaç araştırmacının farklı bireysel özellikleri olan görme engelli bireyler ile matematiksel düşünme süreçlerini tecrübe etmesi, farklı durumlarda ihtiyaç ve sorunların tespit edilmesi, araştırmanın amacının ve öneminin ortaya konulması ve dikkat çeken katılımcı grubun belirlenmesi için veri toplamaktır. Böylece öğretim oturumlarında etkinliklerin tasarlamasından, ikinci aşama katılımcı grubunu tayin etmeye kadar araştırma sürecinin her aşamasını şekillendirmeye yardımcı olan kılavuz niteliğinde bulgular elde edilmiştir. İlk aşama için araştırmaya katılımcı olarak 18 birey arasından, ihtiyaç tespiti için gerçekleştirilen görüşmede yer alan her soruya yeterli düzeyde cevap veren ve araştırmanın amacına uygun ölçütlere sahip olan 7 görme engelli birey seçilmiştir. Bu katılımcılar için kabartma yazı bilme, doğuştan görme engelli olma, sonradan görme yetersizliği yaşama, az gören olma ve eğitim durumu ölçütlerine göre farklı tabakalardan seçilerek ölçüt ve tabakalı örnekleme metoduna yer verilmiştir.

Bireyin doğuştan ya da erken yaşta görme kaybı yaşaması ya da daha yakın zamanda görme yetersizliğinin zuhur etmesi farklılık yaratmaktadır. Bireyin kavramları kavrayış becerileri çevrelerindeki dünya hakkında doğrudan görsel tecrübelere sahip olup olmamasından büyük ölçüde etkilenmektedir (Dick & Kubiak, 1997). İlerleyen yaşlarda görme yetisini kaybeden bireyler son dönemlerde bazı nesnelere ait deneyime sahip olduklarından görsel imgeler zihninde yer almaktadır (Tanti, 2006, s. 27). Bu nedenle ikinci safhada araştırmaya %90 üzeri görme yetersizliği olan ve matematiksel anlama yeterliliği kazanmadan önce (doğuştan veya erken çocukluk döneminde) görme yetisini kaybetmiş görme engelli öğrenciler dahil edileceği için, katılımcı seçiminde ölçüt örnekleme metodu kullanılmıştır. Katılımcılar, ölçüt örneklemeye dahil edilenler arasından amaçlı rastgele örnekleme metoduna göre belirlenmiştir. Katılımcıların belirlenmesinde;

i. Rehberlik ve Araştırma Merkezi tarafından ve doktor raporu ile görme kaybı %90 ve üzeri olduğu onaylanmış olma (Milli Eğitim Bakanlığı tarafından özel eğitime ihtiyaç duyduğu belirtilen ve Bireyselleştirilmiş Eğitim Programına sahip olan),

ii. büyük puntolarla dahi latin harf ve işaretlerini kullanamıyor olma (ışık ve renk algısı olabilir),
iii. eşlik eden başka herhangi bir yetersizliğe sahip olmama,
iv. ortaöğretim düzeyinde kaynaştırma okulu öğrencisi olma,
v. Braille yazı kullanıyor olma

ölçütleri dikkate alınmıştır.

Ölçütlerin belirlenmesinde araştırmanın amacı bağlamında katılımcı olarak matematiksel sembolleri, Latin rakamları ve harfleri daha önce öğrenmemiş olan görme engelli bireylerin seçilmesi dikkate alınımıştır. Bu nedenle hem kurumlardan rapor ve hem de mevcut durumunu somut olarak ortaya koyan kriterler (ölçüt i ve ii) benimsenmiştir. Öğrencinin anlamasını, algılamasını veya düşünme yetisini etkileyecek ikinci bir engel durumunun olmaması (ölçüt iii) görme engelli bireylerin matematiksel düşünme süreçlerini mevcut durumda belirlemeyi mümkün kılacaktır. Görme engelli öğrenciler ortaöğretim düzeyinde eğitim almak istediklerinde iş okullarını veya bütünleştirme eğitiminin uygulandığı okulları tercih edebilmektedir. Araştırmanın amacı dikkate alındığında yol haritasının belirlenmesi beklenilen cebirsel kavramların öğretim programında yer aldığı kaynaştırma okularında (MEB, 2018b) öğrenim gören öğrencilerin seçilmesi gerekmektedir. Ayrıca öğretim programında yer alan kazanımlara göre bireyselleştirilmiş eğitim programlarının tasarlandığı düşünülecek olursa kaynaştırma eğitimi verilen okullarda görme engelli öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine ve ayrıca cebirsel kavramlara daha aşina olduğu söylenebilir (ölçüt iv). Görme engelli bireylere yönelik öğretim etkinliklerini tasarlama ve uygulama adımlarından, bireyin anlama ve algılama becerisine kadar öğrenme sürecinin aşamalarını etkileyen önemli kriterlerden biri kabartma yazı kullanımıdır (Bitter, 2013). Bireyler görme yetisini kaybetme dönemleri ve düzeylerine göre sadece kabartma yazı kullanarak, kabartma ve Latin yazı birlikte kullanarak veya yalnızca söylem ve ses kaydı ile eğitim uygulamalarını sürdürmektedir. Araştırmada kör bireylerin cebirsel kavramlar için düşünme süreçleri inceleneceğinden, bireyin görme yetersizlik düzeyi ve görme kaybı yaşadığı dönem önem arz etmektedir. Cebirsel düşünme, matematiksel dil kullanımı, semboller ve rakamların kullanımı gibi görsel içeriklere dayanan becerileri içermektedir (Kieran, 1992). Bu nedenle araştırmada öğrenme yol haritası elde edilmek üzere doğuştan görme engelli bireyler seçilmiştir. Bu bireylerin yazılı öğretim materyallerine ulaşabilmesi ve matematiksel problemleri çözebilmesi veya işlem yapabilmesi, kabartma yazı kullanması ile mümkün olacaktır. Ayrıca öğretim etkinliklerinde dokunma duyusunu işe koşması ile gereken araçların kullanımı için kabartma yazı ve işaretlere hakim olması bireyin düşünme süreçlerini incelemede somut örnekler sunacaktır (ölçüt v).

Araştırmanın ilk aşamasında cebir kavramları için görme engelli bireylerin mevcut durumlarından bireylerin kavram bilgileri, yanılgıları, kavrayışları ve bazı düşünme becerileri tespit edilmiştir. Bu süreçte kavramın doğası, öğrencilerin düzeyleri ve cevapları dikkate alınmıştır. Elde edilen bulgular ışığında ve literatür (Argün vd., 2014; Bülbül, 2013; Cansu, 2014; Cowan, 2011) destekli olarak cebirsel düşünme ve çeşitli cebirsel kavramların topografyası incelenmiş, tahmini öğrenme yol haritaları oluşturularak görevler tasarlanmıştır. Daha sonra pilot çalışma için ölçüt gerekliliklerini sağlayan bir görme engelli öğrenciye protokoller uygulanmıştır.

Confrey (2006) öğrenme yol haritalarının lineer bir süreç olmadığını ve her öğrenci için birbirinden farklı olabileceğini vurgulamaktadır. Bu nedenle ihtiyaç ve mevcut durum belirleme görüşmelerinde farklı görme yetersizlik ve eğitim düzeyi olan bireylerden elde edilen bulgular, görme engelli bireyler için ortak noktaları belirlemeyi mümkün kılmaktadır. 2 görme engelli ögrenci ile bu ortak noktalardan hareketle tasarlanan protokoller kullanılarak, seçilen kavramları oluşturma sürecinde bilişsel gelişimlerine ilişkin derinlemesine veri toplamak amacıyla klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Elbette bu görüşmelerde elde edilen bulgulara öğrencilerin hazır bulunuşluk düzeylerinin yansıması olmuştur. Bu durum her ne kadar sonuçların genellenebilirliğini etkiliyor gibi görünse de önbilgilerinde yer alan algı ve kavrayışlar öğrenme yol haritasının bir parçasını oluşturmaktadır (Simon & Tzur, 2004). Nitekim ön görüşmelerde öğretim deneyinde yer alan katılımcılarının, seçilen kavramlara ilişkin beklenen düzeyde önbilgiye sahip olmadığı belirlenmiştir. Katılımcılar sınıf düzeyinden ziyade sahip oldukları hazır bulunuşluk seviyeleri dikkate alınarak seçilmiştir. Bu süreçte kriter olarak ortaöğretim düzeyindeki (okulda ve özel eğitim merkezinde) bireyselleştirilmiş eğitim programlarında yer alan kazanımlar ve öğrencilerin ilk görüşmedeki düşünmeleri ele alınmıştır.

Araştırmanın ihtiyaç tespiti ve mevcut durum belirlenmesi ve öğretim deneyi oturumları için katılımcıların belirlenmesinde yer alan örnekleme metodları Tablo 1' de özetlenmiştir.

Tablo 1
Katılımcıların Belirlenmesinde Örnekleme Metodu

İlk Aşama (İhtiyaç Tespiti ve Mevcut Durum Belirleme)	İkinci Aşama (Öğretim Deneyi)
Amaçlı Örnekleme (Patton, 2014)	Amaçlı Örnekleme (Patton, 2014)
Maksimum çeşitlilik *(Görme engeli düzeyi, görme kaybını yaşadığı dönem, kabartma yazı bilmesi vb.)*	Ölçüt örnekleme *(Görme kaybı oranı, görme kaybını yaşadığı dönem, eğitim düzeyi, vb.)*
Kartopu örnekleme	
Ölçüt örnekleme *(Görme kaybı düzeyi, eğitim durumu, kabartma yazı kullanması vb.)*	
Tabakalı örnekleme *(Görme kaybını yaşadığı dönem, eğitim durumu ve görme oranı)*	

3.3.2. İhtiyaç Tespiti ve Mevcut Durum Belirleme Görüşmelerinde Yer Alan Katılımcılar

Görme engelli bireylerin hastane veya Rehberlik Araştırma Merkezi' nden [RAM] alınan raporlarında farklı görme oranları belirtildiği tespit edilmiştir. Bu durum görme yetersizliğinin tıbbi ve eğitsel tanımlarının farklı olmasından kaynaklanmış olabilir. Görüşmelerde katılımcılar görme alanlarını '*aslında hiç görmüyorum ama %90 diyor raporumda*', renk algısı olanlar '*koyu ve açık renkleri seçebiliyorum, ama yüzünüzü* *seçemiyorum mesela*' ve ışık algısı olanlar '*sadece gece ya da gündüz olduğunu seçebiliyorum*' şeklinde ifade etmiştir. Bu nedenle az gören katılımcılarda Latin alfabe kullanımı sorgulanıp, çeşitli puntolarda rakamlar ve harfler gösterilmiştir. Görme yetersizlik düzeyi ve görme kaybının sonuçlandığı yaş dönemi bireyin kullandığı alfabe türünden matematiksel dile kadar anlamasına, algılamasına ve düşünme süreçlerine yansımaktadır (Ferrell vd., 2006). Bu nedenle görüşmeye katılan 18 bireyden araştırmanın amacına uygun olan 7 katılımcı şöyle seçilmiştir: (i) tabakalı örnekleme metoduna göre görme kaybı %85 ve üzeri olan bireyler; (ii) bu bireylerden maksimum çeşitlilik örnekleme metoduna göre eğitim düzeyleri, görme kaybının yaşandığı dönemi, renk-ışık algısı farklılık gösterenler; (iii) ölçüt örnekleme metoduna göre kabartma yazı bilen ve/veya kullananlar ve görüşmelerde amaca hizmet eden verilerin daha sık gözlendiği bireyler seçilmiştir. Tablo 2' de katılımcılara ait bilgilere yer verilmiştir.

Tablo 2
İhtiyaç Tespiti ve Mevcut Durum Belirleme Görüşmeleri İçin Katılımcılara Ait Bilgiler

Adı (Kod)	Görme Kaybı (RAM / Doktor Raporunda Oran)	Görme Kaybının Yaşandığı Zaman Dilimi	Işık Algısı	Renk Algısı	Okul/Bölüm
Aydın	%100	9. sınıf	Yok	Yok	İktisat Fakültesi
Çağatay	%90	Doğuştan	Var	Yok	Anadolu İmam Hatip Lisesi
Cahit	%90	6. sınıf	Yok	Yok	Türk Dili ve Edebiyatı
İlker	%95	2-3 yaş	Var	Var	Psikolojik Danışmanlık ve Rehberlik
Onur	%99	6. sınıf	Var	Yok	Psikolojik Danışmanlık ve Rehberlik (Yüksek Lisans)
Özgür	%85	Doğuştan	Var	Yok	Türk Halk Bilimi ve Sosyoloji
Seda	%98	Doğuştan	Yok	Yok	Görme Engelliler Öğretmenliği

Aydın bulunduğu kamu kurumunda ülkemizdeki trafik hizmetlerine ilişkin istatistiklerin yapıldığı birimde birim şefi olarak çalışmaktadır. İktisat Fakültesi' nde grafik ile ilişkilendirilmiş istatistik kavramları dahil pek çok ileri matematiksel kavramlar için eğitim tecrübesi bulunmaktadır. Aydın yaklaşık 30 yıldır görme engelli öğrencilere özel ders vererek kabartma yazının yını sıra Latin yazıda matematiksel kavramları ve sembolleri anlatmaktadır. Görüşmelere başlandığında biri Onur olmak üzere iki görme engelli birey, Aydın ile ihtiyaç ve sorun analizi görüşmesinin gerçekleştirilmesini önermiştir. Aydın ve abisi genetik bir rahatsızlıktan dolayı orta okul dönemlerinde görme kaybı yaşamıştır. Aynı ortaöğretim kurumunda eğitim alan kardeşlerden Aydın küçük olandır ve bu nedenle abisi kardeşine görme yetersizliğine sahip olmayan öğretmenler ve akranları ile nasıl matematiksel iletişim kuracağını açıklamıştır. Ayrıca Aydın ile daha önce çalışmış olan katılımcılar, özel derslerinde matematiksel dil kullanımının önemli olduğu ve görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler ile etkileşim kurmanın gerekliliği fikirlerine odaklandıklarını ifade etmiştir. Aydın' ın okul ve üniversite yıllarındaki tecrübeleri, özel derslerdeki tecrbeleri ve kullandığı destek eğitim araçları bağlamında araştırma problemine olan katkısı göz önüne alınarak katılımcı olarak seçilmiştir.

Çağatay lise mezunudur ve ikinci kez üniversite yerleştirme sınavına hazırlanmaktadır. Çağatay ile görüşme eğitim aldığı görme engelliler için kurulmuş olan dernekte gönüllü eğitim veren matematik öğretmenlerinin önerileri üzerine yapılmıştır. Çağatay doğuştan görme engellidir ve dernekten ileri matematiksel kavramlar için öğretim uygulamaları talep etmektedir. Ayrıca sosyal paylaşım sitelerinde sesli videolardan yararlanmaktadır. Matematiksel işlemlerde kendine ait materyaller kullanması da katılımcı olarak seçilmesinde önem arz etmiştir.

Cahit ortaokulda görme kaybı yaşamıştır. Kabartma yazı bilmesine rağmen mümkün olduğu sürece kullanmamayı tercih etmektedir. Yazılı metinler yerine ses kaydı ve hafıza teknikleri tercih ettiği için görme engelli bireylerin sorunlarına ve ihtiyaçlarına farklı bir perspektiften bakmayı sağlamıştır.

İlker çok küçük yaşlarda görme yetisini kaybetmiştir. Kardeşi ve kuzenleri ile aynı ortaöğretim kurumunda kaynaştırma eğitimi almıştır. Bu nedenle kabartma alfabeyi ve Latin alfabeyi bilmektedir, ayrıca sınıftaki söylemleri anlamak için çaba sarf ettiğini belirtmiştir. İlker' in üniversite yerleştirme sınavında başarı derecesi olması, matematik ve geometri derslerinde kullanılmak üzere görme engelli öğrenciler için materyal üretmiş olması, onu dikkat çekici bir katılımcı haline getirmektedir. Yapılan görüşmelerde katılımcılar tarafından önerilen İlker, aynı zamanda görme engelliler için hizmet vermekte olan bir derneğin kurucularındandır. Bu durum görme engelli bireylerin sorunları ve ihtiyaçları için eğitim ortamları ve de matematik dersi için geniş perspektifte katkı sunmasına zemin hazırlamıştır.

Onur, matematik bölümü okumak isteyen ve matematiksel kavramları öğrenmek için çaba sarf eden katılımcılardandır. Doğuştan görme engelli olmadığı için kabartma yazı öğrenme, matematiksel dil kullanımına aşina olma ve betimlemede okuyucuları yönlendirme gibi matematik derslerindeki ihtiyaçları için Aydın' dan özel ders almıştır. Onur rehberlik araştırma merkezinde çalışması ve hala matematik kavramlarını öğrenmek için görme engelli bireyler ile birlikte çeşitli eğitsel oturumlar gerçekleştirmesi nedeniyle araştırmanın katılımcılarındandır.

Özgür, daha önce Çağatay ile aynı dernekte eğitim almıştır. Özgür' ün kardeşi az görendir ve birlikte kabartma yazıda ve ayrıca Latin yazıda matematiksel kavramları çalışmışlardır. Daha önce eğitim aldığı dernekte başarısı ve kendisini ifade etme becerisi dikkate alınarak öğretmenleri tarafından görüşmeye katkı sunacağı belirtilmiştir. Özgür' ün matematik dersi tecrübeleri göz önüne alınarak araştırmaya katlımcı olarak seçilmiştir.

Seda doğuştan görme engelli ve görme engelliler öğretmeni olduğu için bireysel ve yanı sıra eğitici olarak araştırma problemlerine farklı bakış açılarından bulgular sunmuştur. Ayrıca görüşmelerin yapıldığı dönemde matematik dersi kavramlarına ilişkin ders takibi yapması ve ileri matematik kavramlarını öğrenmeye çabalaması, Seda' nın matematik eğitimine ilişkin etkili bulgular sunmasını sağlamıştır.

3.3.3. Öğretim Deneyi Katılımcıları

Görme engelli bireylerin matematik eğitimi ve bazı cebirsel kavramlar için mevcut durumunu ortaya koyan ilk aşama görüşmelerden sonra, bir tahmini öğrenme yol haritası elde edilmiştir. Elde edilen yol haritasına göre küme, eşleme, ilişki kurma, sayı doğrusu ve koordinat sistemine ilişkin hedefler belirlenmiştir. Bu hedefler ile tasarlanan öğretim deneyleri için katılımcıların ortaokul matematiği temel becerilerine sahip olmaları gerekmektedir. Öğretim deneylerinin amacına hizmet etmesi ve belirlenen kavramlar için yol haritalarının elde edilebilmesi için belirlenen hedefler ile öğretim programlarında (MEB, 2013; 2014; 2017a; 2017b; 2018a; 2018b) yer alan kazanımlar incelenmiştir.

Görme engelli öğrencilerin RAM tarafından belirlenen bir çerçeve öğretim programı olmadığından, kaynaştırma okullarında öğrencinin engel düzeyine göre bireyselleştirilmiş öğretim programları tasarlanmaktadır. Özel eğitim merkezlerinin matematik dersi hedefleri için bir program (MEB, 2014 mevcut olsa da bu kurumlarda öğrencinin talepleri ve okullarındaki bireyselleştirilmiş eğitim programları dikkate alınarak öğretim verilmektedir. Bu gerekçelere dayanarak katılımcılar 9 ve 10. sınıf düzeyinden seçilmiştir. Ayrıca katılımcıların eğitim aldıkları okullarda ve özel eğitim merkezlerinde onlar için tasarlanan bireyselleştirilmiş eğitim programları incelenmiştir. Katılımcılar bu programlarda öğretim deneylerinin başlayacağı zaman dilimine göre edinilen kazanımlar dikkate alınarak katılımcılar belirlenmiştir.

Katılımcı belirlenme sürecinde ölçüt örneklemeye göre (i-v) ölçütleri dikkate alınarak 9 ve 10. sınıf düzeyinde 10 görme engelli birey belirlenmiştir. Belirlenen bireylerin okullarında ve özel eğitim merkezlerinde bireyselleştirilmiş eğitim programları incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda 3 öğrenci ile pilot öğretim deneyleri yapılmak üzere toplamda 6 görme engelli öğrenci seçilmiştir. Araştırmaya dahil edilmeyen öğrencinin öğretim oturumları sürecinde fonksiyon ve parabol gibi kavramlara dair bireysel destek eğitim almaya başladığı tespit edilmiştir. Bu durum öğrencinin önbilgilerini belirlemek için ek protokoller hazırlanmasını gerektirmekteydi. Ayrıca her ne kadar önbilgiler öğrenme yol haritasının bir parçası olsa da sonuçta ortaya çıkan yol haritası yalnızca öğretim oturumlarındaki etkinliklerden elde edilmeyecekti. Ayrıca araştırmaya dahil edilen katılımcılar aynı özel eğitim merkezine gitmektedir ve kullandıkları destek eğitim araçları benzerlik göstermektedir. Renk ve ışık algısı gibi fiziksel kısıtlamalar bireyin öğrenme ortamlarını tasarlamada önemli bir etken olduğundan (Dick & Kubiak, 1997) dikkate alınan kriterlerden biri olmuştur.

Her hafta düzenli klinik görüşmelerin yapıldığı öğretim oturumlarında, düşüncelerini ifade etme becerisi gelişmiş, biri pilot uygulamalar için olmak üzere 3 öğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir. Diğer öğrenciler ile her hafta görüşmeler pilot uygulama ile asıl uygulamalar arasında gerçekleştirilmiştir. Böylece pilot uygulamadan sonra yapılan değişiklikler için tekrar pilot çalışmalar yapma imkanı elde edilmiştir. Öğretim deneylerinde yer alan katılımcılar hakkında bilgiler Tablo 3' te yer almaktadır. Katılımcıların önbilgileri hakkında ayrıntılı betimleme bulgular bölümünde ele alınmaktadır (bkz. Bölüm 4.4).

Tablo 3
Öğretim Deneyi Katılımcılarına Dair Bilgiler

Adı (Kod)	Görme Kaybı (RAM ve Doktor Raporunda Oran)	Görme Kaybının Yaşandığı Zaman Dilimi	Işık Algısı	Renk Algısı	Okul	Sınıf
Faruk (Pilot)	%96	Doğuştan	Yok	Yok	Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	9. sınıf
Sema	%90	Doğuştan	Yok	Yok	Anadolu İmam Hatip Lisesi	9. sınıf
Mete	%98	Doğuştan	Yok	Yok	Anadolu İmam Hatip Lisesi	10. sınıf

Faruk, ilkokulu ve ortaokulu görme engelliler okulunda tamamlamıştır. 9 yıldır özel eğitim merkezinde destek eğitim uygulamalarına devam etmektedir. Ancak, ortaöğretime başladıktan sonra özel eğitim merkezinde destek eğitimler sadece okulda verilen yazılı materyallerin okunması ve ses kaydına alınması şeklinde sürdürüldüğünden, eğitim gördüğü kaynaştırma okulunda destek eğitim odasında bireysel dersler verilmemektedir. Bu nedenle tasarlanan bireyselleştirilmiş eğitim programı uygulanmamaktadır. Faruk kabartma yazı tablet ve kalemini kullanmaktadır. Ses kaydı, ekran okuyucu program veya küptaş kasa materyallerini kullanmamaktadır.

Sema ilkokulu ve ortaokulu görme engelliler okulunda tamamlamıştır. 9 yıldır özel eğitim merkezinde eğitim ve öğretim uygulamalarına devam etmektedir. Eğitim gördüğü kaynaştırma okulunda destek eğitim odasında bireysel dersler verilmemektedir. Bu nedenle tasarlanan bireyselleştirilmiş eğitim programı uygulanmamaktadır. Sema kabartma yazı tablet ve kalemini kullanmaktadır. Ses kaydı, ekran okuyucu program veya küptaş kasa materyallerini kullanmamaktadır. Yalnızca Arapça dersini sanal uygulamalardan ses kaydı olarak dinlemektedir.

Mete ilkokul ve ortaokulu görme engelliler okulunda tamamlamıştır ve yaklaşık 8 yıldır aynı özel eğitim merkezine devam etmektedir. Ortaöğretim kurumunda destek eğitim odasında bireyselleştirilmiş eğitim programına göre bireysel dersler sunulmaktadır. Destek eğitim derslerini, sınıf matematik derslerine devam eden öğretmenden farklı bir matematik öğretmeni sürdürmektedir. Bu derslerde destek eğitim araçları kullanılmamaktadır ve genellikle bireyselleştirilmiş eğitim programında yer alan kazanımlara ilişkin uygulamalar yapılmaktadır. Ancak bu derslerde sesli betimleme uygulamalarından öteye farklı çalışmalara yer verilmemektedir. Mete kabartma yazı tablet ve kalemini kullanmaktadır. Ses kaydı, ekran okuyucu program veya küptaş kasa materyallerini kullanmamaktadır.

3.4. Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada veri toplama araçları;

a) görme engelli bireyler ile ilgili matematiksel düşünme süreçlerine dair genel bilgi edinmeyi amaçlayan *ihtiyaç tespiti ve mevcut durum belirleme görüşmeleri,*
b) öğrencilerin önbilgilerini ortaya koymayı amaçlayan *ön görüşme,*
c) haftalık *klinik görüşmeler (öğretim oturumları),*
d) öğrencilere klinik görüşmelerde sunulan *görüşme protokolleri (öğretim etkinlikleri/adımlar)* ve son olarak,
e) bu protokollerin uygulanmasına (öğretim oturumlarına) dair *video kayıtları* olarak belirlenmiştir.

Araştırmanın başında demografik özellikleri farklılık gösteren görme engelli bireylerin matematiksel düşünme süreçlerine, matematiksel dil kullanımlarına, kullandıkları materyallere, matematik öğrenme süreçlerine, cebirsel düşünme becerilerine, cebirsel kavramları öğrenme süreçlerine dair genel bir kanı edinmek için durum tespiti görüşmeleri yapılmıştır. Yapılan görüşmelerden sonra görme engelli bireylerin ihtiyaçları belirlenmiş ve önbilgilerini ve öğrenme yol haritalarını belirlemek için görüşme soruları ve protokoller oluşturulmuştur. EK 2' de yer alan görüşme soruları görme engelli öğrencilerin belirlenen kavramlar için hedeflere dair önbilgilerini ve bireysel demografik bazı özelliklerini belirlemek amacı ile uygulanmıştır.

Araştırmada derinlemesine bilgi toplamak ve öğretim süresince öğrencilerin bilişsel gelişimlerini izleyebilmek amacıyla klinik görüşmeler yapılmıştır (Ginsburg, 1981). Bu klinik görüşmelerde uygulanacak olan görevler (adımlar), kavram öğretimine dair literatür, kavramların tarihsel gelişimi, cebirsel düşünme becerisi, ihtiyaç tespiti görüşmeleri ve ön görüşmelerden elde edilen veriler ışığında tahmini yol haritaları tespit edilerek tasarlanmıştır (bkz. EK 3).

3.4.1. İhtiyaç Tespiti ve Mevcut Durum Belirleme Görüşme Formu

Araştırmanın bu aşamasında yarı-yapılandırılmış görüşmeler ile eğitim tecrübeleri ve görme engellilik düzeyleri çeşitlilik arz eden lise son sınıf ve üstü eğitim düzeyine sahip bireylerden bilgi edinmek amaçlanmıştır. Böylece tasarlanacak görüşme protokollerine zemin hazırlamanın yanı sıra, görme engelli bireylere dair daha fazla tecrübe kazanılmış ve araştırma probleminin şekillenmesine katkı sunulmuştur. Bu doğrultuda tasarlanan görüşme formunda yer alan sorular görme engellilik düzeylerine, genel matematik öğrenme süreçlerine, günlük hayatta matematiksel becerilerin yansımalarına, cebirsel düşünme ve söz konusu kavramları anlama süreçlerine odaklanmaktadır. Ayrıca görüşmeler görme engelli öğrencilerin matematik derslerinde ihtiyaç duydukları destek eğitim araçları, etkinlik ve uygulamalara dair bilgi edinmek için tasarlanmıştır. EK 1' de yer alan görüşme formu 'kişisel bilgiler', 'matematik eğitimine dair bilgiler' ve 'cebirsel kavramlara dair bilgiler' başlıklarından oluşan kategorilere ayrılmaktadır.

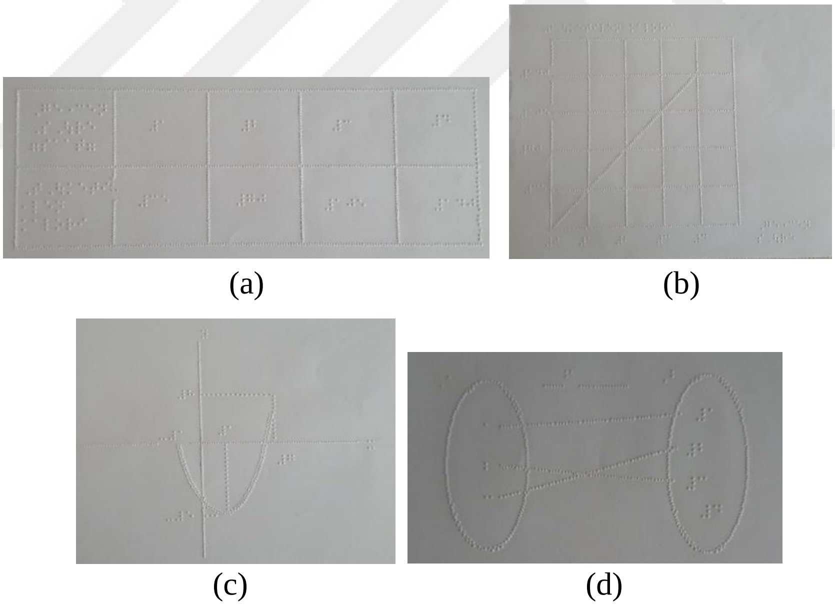
Kişisel bilgiler kategorisinde görme engelli bireylerin görme engellilik düzeyi ve eğitim durumu gibi kişisel bilgilerini belirlemenin yanı sıra, genel eğitimsel sorunlarını ve tecrübelerini öğrenmek, kullandıkları materyalleri ve etkililiğine dair görüşlerini almak, kaynaştırma sınıfı ve özel eğitime dair deneyimlerini tespit etmek amaçlanmaktadır.

Matematik eğitimine dair bilgiler kategorisinde, görme engelli bireylerin matematik öğretimi uygulamalarındaki tecrübelerini, sorunlarını ve ihtiyaçlarını belirlemek, söz konusu uygulamaların etkililiğine dair fikir edinmek, matematiksel kavramlara dair görüşlerini almak ve günlük hayat ile ilişkilendirmelerini belirlemek amaçlanmaktadır.

Cebirsel kavramlara dair bilgiler kategorisinde ise genel bağlamda cebirsel kavramlar için görme engelli bireylerin güçlükleri, kullandıkları materyalleri, stratejileri ve uygulamaları tespit etmenin yanında, belirlenen cebirsel kavramlara dair tanım, imaj, algı, yanılgı ve hata gibi anlamalarına dair bilgilere ulaşmak amaçlanmaktadır. Görüşme formunun bu kategorisini, belirlenen cebirsel kavramlar için alt öğrenme alanları olarak ele alacak olursak sınıflandırma şu şekildedir:

- değişken ve bilinmeyen kavram tanımları
- eşitlik kavram tanımı
- değişkenleri belirleme ve işlem yapabilme
- iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi belirleme ve işlem yapabilme
- bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki ve grafik yorumlama
- fonksiyon ve ilişki kurma
- fonksiyon temsil türlerini değerlendirme (liste, grafik, cebirsel, venn şeması)
- ilişki kurma yardımı ile fonksiyonu cebirsel ifade etme
- genelleme ile fonksiyonu cebirsel ifade etme.

Görüşemede görme engelli bireyler için aşina oldukları kabartma metinler haline getirilen şekillere, diyagramlara ve grafiklere aşağıda örnek olarak sunulmuştur (bkz. Şekil 18).



Şekil 18. EK 1, soru 16' da yer alan tablo ve grafik örnekleri (a) ve (b); soru 19 ve 21' de yer alan grafik ve diyagram örnekleri (c) ve (d).

3.4.2. Ön Görüşme Formu

Görme engelli bireylerin tahmini öğrenme yol haritalarını ortaya çıkarmak için belirlenen 3 katılımcının söz konusu cebir kavramlarına (küme, eşleme-ilişkilendirme ve temsil türleri, doğru ve doğru parçası, sayı doğrusu ve koordinat sistemi) ilişkin ön bilgilerini belirlemek ve katılımcıların demografik özelliklerini (görme kaybı, eğitim ortamlarındaki ihtiyaçları, geçmiş eğitim tecrübeleri vb) tespit etmek için EK 2' de yer alan görüşme formu tasarlanmıştır. Bu görüşme ile tahmini öğrenme yol haritasında yer alan cebirsel kavramlara dair katılımcılardan matematiksel tanımlara, kavram yanılgılarına, kavram imajlarına dair genel bilgilerin yanı sıra matematiksel dil kullanımı, kullandığı veya ihtiyaç duyduğu materyaller, Braille kullanma becerisi gibi eğitim uygulamalarına dair bilgi edinilmesi mümkün olmaktadır. Nitekim tahmini öğrenme yol haritasının elde edilmesinde bileşenlerden biri öğrenenin önbilgilerdir (Li, 2006; Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004).

3.4.3. Görüşme Protokolleri (Öğretim Etkinlikleri/Adımları)

Görüşme protokolleri öğrencilerin eğitim geçmişi ve görme engellilik düzeyleri, sahip olduğu bilgiler (hazır bulunuşluk düzeyi, sınıf düzeyi, vb), öğretim programlarındaki kazanımlar (MEB, 2017a; 2017b; 2018a;2018b), kavramın doğası yani kavramın tarihsel ve matematiksel gelişimi göz önüne alınarak tasarlanmıştır. Ayrıca ön görüşmeden elde edilen bulgular, ele alınan kavramlar için bilinen kavram yanılgıları ve alternatif kavramlar, kavramlara dair algı ve kavrayışlar, öğrenci düşünmeleri ve stratejileri dikkate alınarak bir çerçeve hazırlanmış ve bu çerçevenin belirlediği şekilde görüşme protokolleri tasarlanmıştır. Ayrıca protokoller tasarlanırken ön görüşmeler sonucunda elde edilen tahmini öğrenme yol haritalarına sunulan katkılar dikkate alınmıştır. Görüşme protokolleri tasarlandıktan sonra alan bilgisi, alan eğitimi ve özel eğitim bağlamında uzman görüşü alınmıştır (bkz. Bölüm 3.5.3).

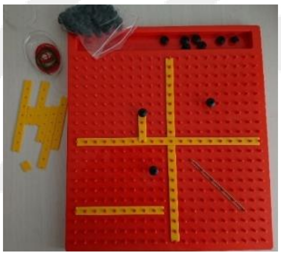
Görme engelli öğrenciler ile öğretim uygulamalarında çeşitli sofistike yardımcılar, öğretmen yardımları ve çevredeki gerçek nesneler/materyaller somut manipülatifler olarak uygulanabilir (Mani, Plerchaivanich, Ramesh & Campbell, 2005). Gerçek nesneler sıralamak, eşleştirmek, karşılaştırmak, gruplamak, ayırmak, bir araya getirmek, örüntü haline getirmek ve saymak için kullanılabilir. Çeşitli matematiksel kavramları öğretirken, görme engelli öğrencilere uygulamada yardımcı olacak destek eğitim araçları farklı boyutlarda, dokularda ve renklerde çeşitli geometrik şekiller, keçe panolar, sembol etiketleri vb materyaller olabilir. Somut nesneler kullanılarak, öğrenciler yaptıklarını daha kolay hatırlayabilir ve problemi çözmek için kavramları açıklayabilir (Stein & Bovalino, 2001). Somut materyaller kullanarak kavramsal anlayışı geliştirmek için, görme engelli öğrenciler matematiksel bir problemi okumalı, yazmalı, okunmasını dinlemeli, problemi materyaller aracılığıyla dokunsal olarak keşfetmeli ve mümkünse bedenlerini ve/veya nesneleri hareket ettirmelidir (Osterhaus, 1996). Akademik amaçlara ulaşmak için matematiğin abaküs, braille kodları, dokunsal materyaller ile somut materyallerin bir harmanlanmasını kullanarak görme engelli öğrencilere sunulması faydalı olacaktır (Brawand & Johnson, 2016).

Öğretim oturumlarında protokollerde yer alan materyaller incelendiğinde, kavramları somutlaştırmaları veya görsel içeriklere hakim olmaları için kullanıldıklarını söyeleyebiliriz. Şekil 19, (a) kabartma yazı tableti ve kalemi ile görme engelli bireylerin not tutması için kullanılmıştır. Bu araçlar nesne olarak kullanıldığı için mini tablet tercih edilmiştir. Görüşmelerde katılımcılar kendilerine ait yazı tabletini kullanmıştır. Şekil 19, (b) küptaş kasa materyalidir. Mavi taşlar üzerinde kabartma olarak Braille alfabede rakamlar ve dört işlem sembolleri yer almaktadır. Böylece görme engelli bireyler matematiksel işlemler için bu materyali kullanabilmektedir. Bu araştırmada zaman zaman katılımcılar tablo oluşturmak için de bu materyali kullanmıştır.

(a) (b)

Şekil 19. Kabartma yazı tableti ve küptaş kasa materyali

Görme engelli bireylerin grafik oluşturma, işle yapma, diyagram oluşturma amacıyla ders aletleri merkezinden edinebileceği iğneli sayfa materyali Şekil 20' de yer almaktadır. Bu araştırmada düzlemi temsil etmesi amacıyla kulanılmıştır. En uzun çubuklar doğruyu temsil ettiği ve sayı boncukları da noktaları temsil ettiği kabul edilmiştir. Böylece grafik oluşturmak için somut bir materyal elde edilmiştir.

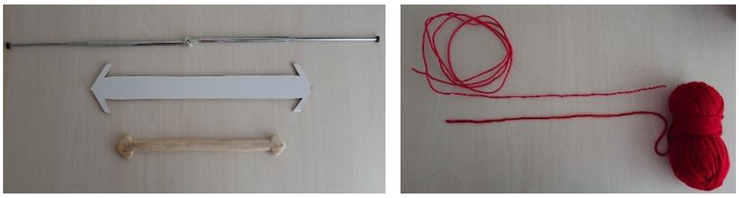


Şekil 20. İğneli tahta materyali

Küme kavramı için tasarlanan Protokol I' de ve ek protokolde kullanılan destek eğitim araçlar Şekil 21' de yer almaktadır. Şekil 21, (a) bir küme ve bu kümenin bir alt kümesini temsil etmesi için iki farklı boyuttta tabla kullanılmıştır. Şekil 21, (b)' de yer alan nesneler ile kümeler oluşturulması istenmiş ve poşet yardımı ile altküme kavramı tartışılmıştır.

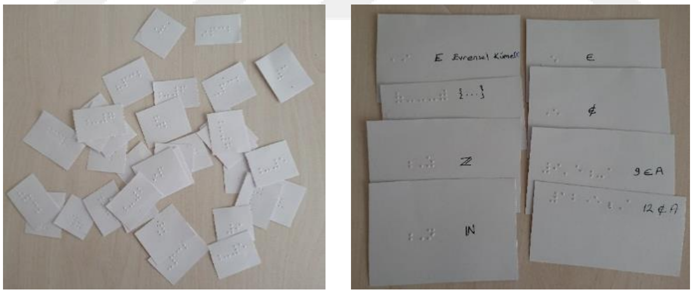
Şekil 21. Küme temsili için tablalar, nesneler ve poşet

Doğru kavramını temsil etmesi için EK 3, Protokol III' te kullanılan araçlar Şekil 22' de yer almaktadır. Anten, kablo ve ip istenildiği kadar sündürme eylemini gerçekleştirirken, tahtadan yapılmış materyaller görme engelli katılımcıların görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin temsillerini hayal etmelerini sağlamaktadır.



Şekil 22. Anten, doğru temsili tahta çubuklar, elektrik kablosu ve ip

Kabartma yazıda sembollerin yazımı ve sayı kümelerinin elemanları temsil etmesi için sayı etiketleri oluşturmak için Şekil 23' te yer alan kartonlar kullanılmıştır. Sembol kartları ile kabartma yazıda Braille kodları öğrenmeleri mümkün olurken, sayı etiketleri işaretledikleri pozitif veya negatif tamsayıları etiketlemede faydalı olmuştur.



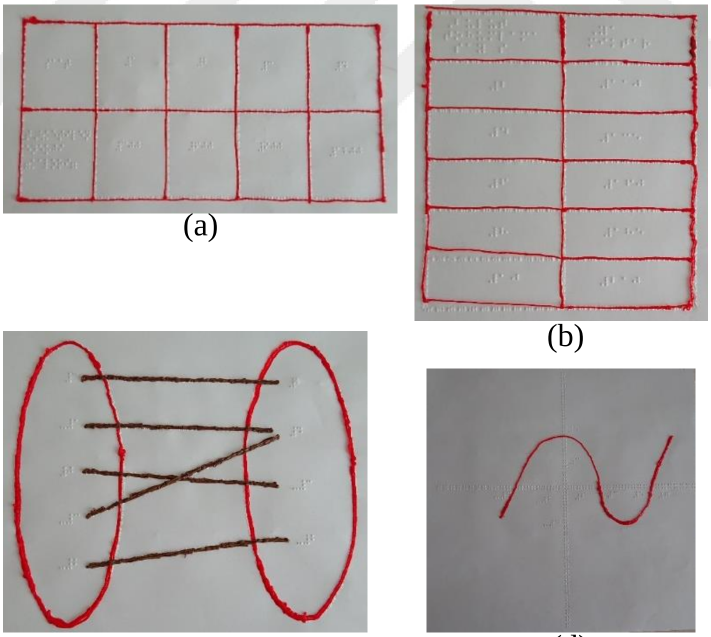
Şekil 23. Sayı etiketleri ve semboller için kabartma yazı kodlarının olduğu etiketler

Doğru ve doğru parçası temsilleri için kullanılan tahta çubuklar, kablo parçaları, ip parçaları ve iğneli sayfa çubuklarını Şekil 24 (a)' da yer almaktadır. Ayrıca bu çeşitli uzunluklardaki çubuklar birim kavramı ve uzunluk belirleme için kullanılmıştır. Şekil 24, (b)' de sayı doğrusu oluşturmak için kullanılan köpük levha, çubuklar ve raptiyeler yer almaktadır.

(a) (b)

Şekil 24. Sayı doğrusu ve uzunluk kavramları için kullanılan materyaller

Grafik, tablo ve diyagram oluştururken yalnızca kabartma yazı ve noktalar kullanmak yeterli olmamıştır (bkz. Bulgular 4.2). Bu nedenle şekilleri oluşturan bazı çizgilerin ayırt edilebilmesi için 3D kalem ile Şekil 25’ teki örneklerde olduğu gibi çizgiler çizilmiştir. Şekil 25, (a) yatay konumlandırılmış tablo örneği iken Şekil 25, (b) dikey konumlandırılmış tabloya örnektir.



(a) (b) (c) (d)

Şekil 25. 3D kalem yardımı ile elde edilen materyaller

Venn şeması ile temsil edilmiş iki küme arasındaki eşlemeyi göstermek için Şekil 25, (c)’ de olduğu gibi kümeler için düz bir doku oluşturulmaya çalışılırken, eşlemeyi temsil eden doğru parçaları tırtıklı bir dokuda oluşturulmuştur. Bir grafik oluşturulmak istendiğinde

Şekil 25, (d)' de olduğu gibi koordinat sistemi ve noktalar Braille kabartma ile oluşturulurken grafik 3D kalem ile çizilmiştir.

3.4.4. Klinik Görüşme

Piaget tarafindan ortaya konulan klinik görüşme metodu matematik eğitimindeki araştırmalarda ögrencilerin zihinlerindeki yapıyı keşfetmek, temel aktiviteleri belirlemek ve bilişsel süreçleri değerlendirmek amacıyla yer almaktadır (Clement, 2000, s.547). Bununla birlikte klinik görüşme, öğrencilerin düşünce doğası ile ilgili önemli ipuçları veren ve böylece öğrencilerin nasıl düşündüklerini, izledikleri bilişsel süreçleri anlamaya fırsat tanıyan veri toplama tekniğidir (Ginsburg, 1981). Bu araştırmada görme engelli öğrencilerin kavram öğrenme sürecinde ilişkilendirme, ifade etme, açıklama, temsil etme, kavram imajları ve soyutlama gibi bilişsel süreçleri hakkında derinlemesine bilgi verebilmesi amacıyla birebir klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmelerde tasarlanan protokoller için farklı hazır bulunuşluk düzeylerine sahip görme engelli öğrenciler ile pilot uygulamalar yapılmıştır. Klinik görüşmelerde öğrencinin görüşmelerdeki cevaplarının doğru ya da yanlış olmasından daha önemli olan matematiksel öğrenme süreçleridir. Bu nedenle klinik görüşmelerde öğrencilerin bilişsel süreçlerini ortaya çıkarmayı amaçlayan etkinliklere veya problemlere yer verilmiştir. Sesli düşünme temeline dayanan klinik görüşme, hedeflenen amaçlar dogrultusunda görüşme sürecinin etkililiğini arttırmaktadır (Clement, 2000). Böylece görüşme sürecinde yöneltilen keşfedici sorular, ipuçları, birbirini izleyen ilişkili problemler, geriye dönük sorular ya da beklenmedik müdahaleler ile daha belirleyici ve net veriler elde edilmesi mümkün olmuştur (Goldin, 2000).

Klinik görüşme soruları özel ölçütler, literatürde yer alan araştırma sonuçları, içerik, ortam, düzen ve yapıya bağlı olarak hazırlanmıştır (Goldin, 2000). Ayrıca görüşme süresi, öğrencinin önbilgisi, içeriğin farklı yeteneklere sahip öğrencilere hitap etmesi, kullanılacak materyallerin seçimi ve öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ortaya çıkaracak şekilde düzenlenmesi amaçlanmıştır (Hunting, 1997). Bununla beraber klinik görüşme sürecinde *“Soruyu çözerken yüksek sesle düşüncelerini paylaşır mısın?”, “Bunu nasıl düşündüğünü söyler misin?”, “Nasıl çözdüğünü açıklar mısın?”, “Nasıl karar verdin?”* gibi sorulara yer verilmiştir (Clement, 2000, s.572).

Bu araştırmada klinik görüşmelerde tasarlanan protokoller ile ilişkilendirmeye, akıl yürütmeye ve yorumlamaya dair süreçlere yer verilmiştir. Görüşmelerde görme engelli bireylerin ihtiyaçları dikkate alınmış, gerekli görüldüğü takdirde Braille yazı tahtası, ses kayıt cihazı, dokunsal materyaller gibi önlemler alınmıştır. Veri kaybının önüne geçmek için klinik görüşme süreçleri kamera kaydına alınmıştır. Bu çalışmada araştırmacı, hem öğretmen hem de araştırmacı rolündedir. Araştırmacı öğretim deneyinde öğretmen rolüyle hareket etmenin ötesinde, öğretim ve öğrenme sürecini analiz etmektedir (Steffe, 1991). Bu süreçte araştırmacı teori ile uygulamayı görüşmeler sürecinde birleştirerek, daha sonra uygulamada çözülmesi gereken problemlere yanıt verebilmek amacıyla protokoller geliştirmiştir.

3.5. Araştırma Süreci

Araştırma süreci ihtiyaç tespiti görüşmeleri, ön görüşmeler ve öğretim oturumları ile şekillenerek görüşme formları, protokollerin tasarlanması ve uygulanmasını içermektedir. İhtiyaç tespiti ve görme engelli bireylerin mevcut durum belirleme görüşmeleri Ankara, İstanbul, Eskişehir ve Aksaray illerinde yaşayan görme engelli bireyler ile sessizliği sağlanmış mekanlarda görüşmeler yapılmıştır (ofis, sınıf veya araştırmacının odası). Bu görüşmeler bazı katılımcılar ile tek oturumda ve bazıları ile iki oturumda gerçekleştirilmiştir. Görüşme süreleri 90-120 dakika arasında farklılık göstermektedir. Görüşmeler katılımcının el hareketlerine de odaklanacak şekilde video kaydına alınmıştır.

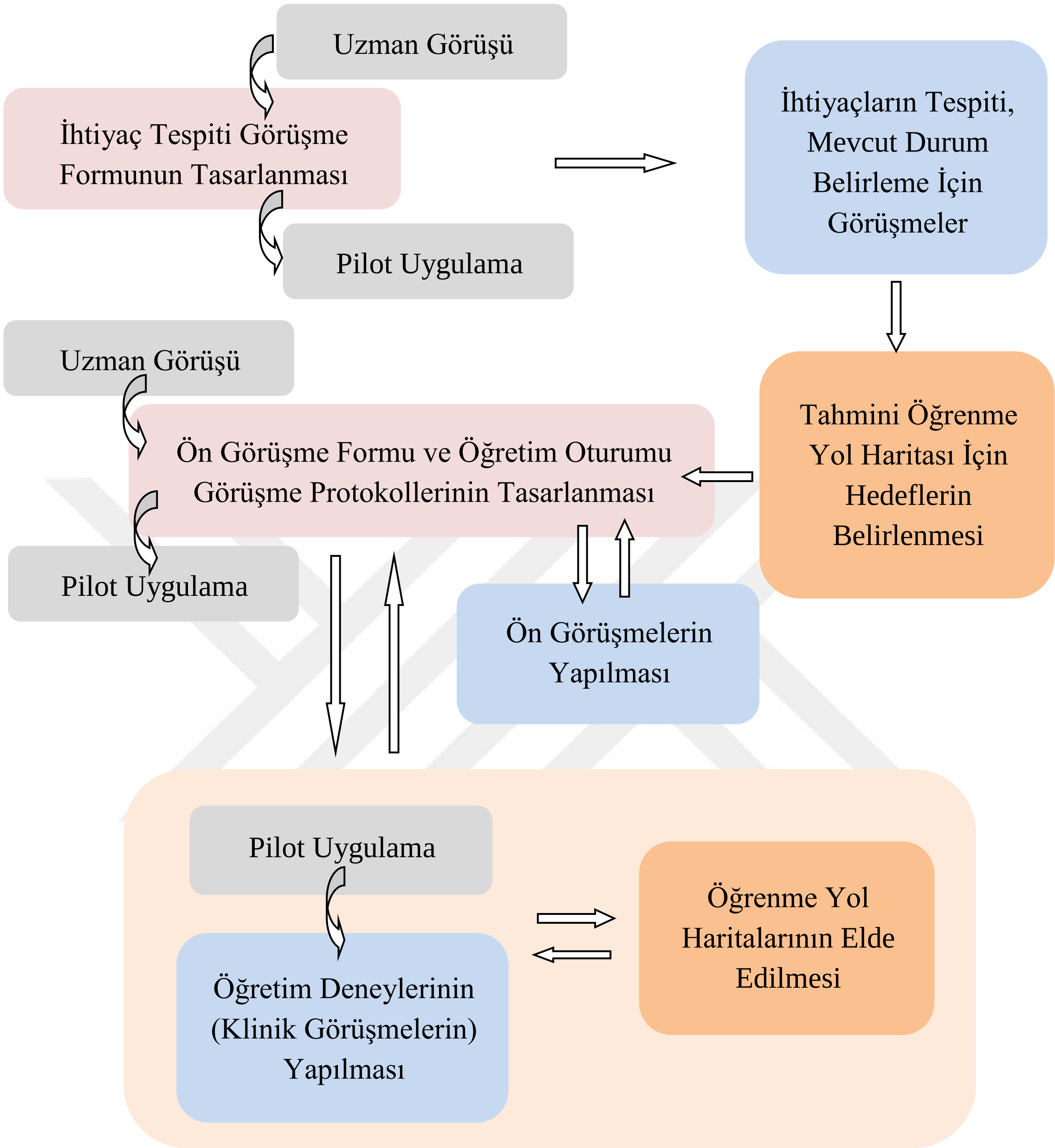
Öğretim deneyinde yer alan katılımcılar aynı Özel Eğitim Merkezi’ nde destek eğitim almaktadır. Bu merkezde müdür yardımcısından, öğrencilerin eğitimi ile ilgilenen matematik dersi öğretmenlerinden ve diğer öğretmenlerinden görüş alınmıştır. Öğretmenlere araştırmanın amacı, kapsamı ve görüşmelerin içeriği hakkında bilgi verilmiştir. Merkezdeki derslerini düzenli takip eden ve kendini ifade etmede problemleri olmayan, araştırmanın ölçütlerine uygun öğrencilerin seçilmesinde fikir alınmıştır. Belirlenen öğrenciler hakkında öğretmenlerden akademik becerileri ve demografik özelliklerine ilişkin bilgi alınmış ve öğrencilerin bireyselleştirlmiş eğitim programları incelenmiştir. Bu öğrencilerden araştırmaya katılım onayı alınmış, ardından öğrencilerin eğitim aldıkları ortaöğretim kurumlarında öğretmenleri ile birlikte destek eğitimde uygulanan bireyselleştirilmiş eğitim programları incelenmiştir. Pilot çalışmada yer alan katılımcı ile görüşmeler, öğrencinin okulundaki destek eğitim odasında, diğer iki katılımcı ile görüşmeler araştırmacının ofisinde gerçekleştirilmiştir. Katılımcıların kendilerini daha rahat ifade etmesi, araştırmacı ile iletişimin güçlenmesi ve katılımcıyı daha yakından tanımak için katılımcıların aileleri ile birlikte yaklaşık 15 dakikalık tanışma ve katılım onayı görüşmeleri yapılmıştır. Ardından öğrenciler ile bireysel olarak yaklaşık 40 dakika süren ön görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğrenciye öğretim oturumlarının amacı ve içeriği hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Görüşmelerde öğrencinin mevcut durumunu değerlendirmenin amaçlanmadığı, yöneltilen sorular karşısında tüm düşünce, fikir ve görüşlerini ifade etmesinin istendiği belirtilmiştir. Öğretim deneyi oturumlarında klinik görüşmeler araştırmacının el hareketleri, jest ve mimikleri dikkate alınarak video kaydına alınmıştır. Araştırma sürecine dair zaman dilimleri Tablo 4' te belirtilmiştir.

Tablo 4

Araştırma Süreci Takvimi

Araştırma Süreci Basamakları	Tarih
İhtiyaç tespiti görüşme formunun tasarlanması	Şubat 2018
İhtiyaç tespiti görüşme formu uzman görüşü İhtiyaç tespiti görüşme pilot uygulaması	1-14 Mayıs 2018
İhtiyaç tespiti görüşme formunun uyarlanması	14-20 Mayıs 2018
İhtiyaç tespiti görüşmeleri için katılımcıların belirlenmesi ve görüşmelerin gerçekleştirilmesi	20 Mayıs – 20 Temmuz 2018
İhtiyaç tespiti görüşme verilerinin analiz edilmesi	20 Temmuz – 15 Kasım 2018
Ön görüşme formunun tasarlanması	15-20 Kasım 2018
Öğretim deneyi oturumları için görüşme protokollerinin tasarlanması	Aralık, 2018-Ocak, 2019
Ön görüşme formu ve görüşme protokolleri için uzman görüşü, pilot uygulama ve düzenlemelerin yapılması	Şubat 2019
Ön görüşmelerin yapılması	1-15 Mart 2019
Öğretim deneyleri (klinik görüşmeler)	15 Mart-19 Mayıs 2019

Araştırma sürecinde görüşmelerin tasarlanması, pilot çalışmaların yapılması, görüşmelerin gerçekleştirlmesi gibi tüm adımlar Şekil 26' da araştırma süreci akış diyagramında sunulmuştur. Şekil 26' da takip edilebileceği gibi ihtiyaç tespiti, sorunlar ve mevcut durum değerlendirmesi yapıldıktan sonra cebirsel kavramlar ve hedefler belirlenmiştir. Hedeflerin belirlenmesinde kavramların doğası, tarihsel gelişimi ve hiyerarşik yapıları dikkate alınmıştır. İhtiyaç analizi sonuçları ve belirlenen hedeflere göre ön görüşme soruları ve öğretim deneyi görüşme protokolleri tasarlanmıştır. Tasarlanan formlarda uzman görüşü ve pilot çalışmalardan sonra gerekli düzenlemeler yapılmış ve katılımcılar ile görüşmeler ve öğretim deneyleri gerçekleştirilmiştir.



Şekil 26. Araştırma Süreci Akış Diyagramı

Görüşme formalarının tasarlanması, uzman görüşü ve pilot çalışmaların sonuçları bu bölüm altında detaylı ele alınmıştır (bkz. Bölüm 3.5.1, 3.5.2 ve 3.5.3). Geliştirilen tahmini öğrenme yol haritası öğretim deneyleri ile test edilmiştir. Bu süreçte her öğretim oturumundan sonra analizler yapılmış, uzman görüşü alınmış, bir sonraki oturum için gerekli uyarlamalar yapılmış ve pilot çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmanın sonucunda tekrar gerekli uyarlanmaların yapıldığı ve tekrar iki katılımcı ile pilot çalışmalar yapıldıktan sonra bir sonraki öğretim deneyi uygulanmıştır. Her bir öğretim oturumunun süregelen analizi yapılmış ve öğrenme yol haritası tekrar incelenmiş ve bir sonraki öğretim oturumu protokolü uyarlanmıştır. Pilot çalışmaların yapılması, öğrenme yol haritasının gözden geçirilmesi ve sonraki öğretim oturumu protokolünün uyarlanması döngüsel olarak süregelen analizlere dayalı devam etmiştir. Bu süreç katılımcıların belirlenen hedefler için öğrenme yol haritaları tespit edilene kadar tekrarlanmıştır. Böylece katılımcılar belirlenen hedeflere ulaşıncaya kadar birbirini takip eden öğretim oturumları sürdürülmüştür. Öğretim deneyi tamamlandıktan sonra geçmişe dönük analizler ile her bir katılımcının öğrenme yol haritası elde edilmiştir. Analiz sürecine ilişkin detaylı bilgiler veri analizi bölümünde ele alınmıştır (bkz. Bölüm 3.7).

Araştırma sürecine cebir öğrenme alanı için temel kavramlar olan değişken, bilinmeyen, eşitlik ve fonksiyon kavramları dikkate alınarak başlanmıştır. Bu doğrultuda söz konusu kavramlara dair ihtiyaç tespiti için görüşme soruları tasarlanmıştır (bkz EK 1). Bu görüşmelerden elde edilen veriler analiz edilmiş ve bulgular incelenmiştir (bkz. Bölüm 4.3). Fonksiyon kavramı küme, kümelerin elemanları arasındaki eşleme, çokluklar arasında ilişki kurma ve grafik ile temsil türü gibi alt kavramlar ile var olmaktadır. Bu bağlamda elde edilen bulgular sonucunda ortaöğretim kurumlarında eğitim görmekte olan görme engelli öğrencilerin öncelikle başlangıçta belirlenen kavramlar için ön bilgi olan küme, eşleme ve ilişkilendirme, doğru ve doğru parçası, sayı doğrusu, koordinat sistemi ve ilişkiyi ifade etmede temsil türleri kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritalarının belirlenmesi gerektiği tespit edilmiştir. Bu doğrultuda öğretim deneyi için hedefler belirlenmiş ve tahmini öğrenme yol haritası oluşturulmuştur (bkz. Bölüm 4.3.6). Elde edilen yol haritasına göre öğretim oturumları için protokoller tasarlanmış, uygulanmış ve katılımcıların öğrenme yol haritalarına ulaşılmıştır.

Araştırma sürecinde protokollerin ve destek eğitim materyallerinin tasarlanmasında yansımalarının olduğu düşüncesi ile araştırmacının yaşadığı güçlüklerden bahsetmenin gerektiği düşünülmektedir. Öncelikle kabartma yazı matematik sembollerinin, tablo ve grafiklerin elde edilmesinde teknolojik destekli araçlardan yararlanılamamıştır. Çünkü kabartma yazı yazıcılar ve/veya matematik destekli programlar çeşitli kurumlarda (kütüphaneler, dernekler, göre engelli okulları vb.) temin edilememiştir. Bunun için yazılım mühendisinden yardım alınmış ve mini bir program tasarlanmıştır. Ancak bu program ile elde edilen grafiklerde eksenlerde sayıların konumu gibi çeşitli sorunlar ile karşılaşılmıştır. Bu nedenle tabloların ve bazı basit diyagramların çizimi için TactileView programından yararlanılmıştır. Grafikler için de tablet kalem ya da 3D kalem kullanılmıştır.

3.5.1. İhtiyaç Tespiti ve Mevcut Durum Belirlenmesi İçin Görüşme Formunun Tasarlanması

İhtiyaç tespiti görüşme formu görme engelli bireylerin eğitim ortamlarındaki, özelde matematik eğitimi uygulamalarındaki sorunlarını, ihtiyaçlarını ve tercih ettikleri uygulamaları belirleme ve cebirsel düşünmelerine dair genel bir bakış açısı elde etmek amacıyla tasarlanmıştır. Öncelikle literatürde yer alan görme engelli bireylerin sorun ve ihtiyaçlarını belirlemeye odaklanan çalışmalar incelenmiştir (Bayram, 2014; Bitter, 2013; Bülbül vd., 2012; Edwards vd., 1995; Horzum, 2013; Karshmer & Farsi, 2007; Kızılarslan & Sözbilir, 2017; Spindler, 2006). Cebirsel düşünme süreçlerini incelemek için belirlenen cebir kavramlarının doğası, tarihsel gelişimi, sezgisel ve formal tanımı, bu kavramlar için alternatif kavramlar, güçlükler ve yanılgılar ve son olarak öğretim programları incelenmiştir (Arıkan & Halıcıoğlu, 2013; Argün vd., 2014; Bayazıt, 2015; Bayazıt & Aksoy, 2013; Bingölbali & Bingölbali, 2013; Clement, 2001; Cohen & Ehrlich, 1963; Dede & Argün, 2003; Falkner vd., 1999; Kabael, 2017; Kay, 2001; Kieran, 1992; Knuth vd., 2005; McNeil & Alibali, 2005; MEB, 2013; 2014; 2017a; 2017b; 2018a; 2018b; Narlı, 2016a; 2016b; Özgen, 2017; Tall & Baker, 1991; Zembat, 2016). Görme engelli bireylere matematik öğretimi üzerine literatür (Bülbül, 2013; Cansu, 2014; Chew vd., 2014; Cowan, 2011; Horzum, 2013; 2016; Şafak, 2005; Toerries vd., 2011) incelemesinden sonra görüşme sorularının onlar için anlaşılabilir forma dönüştürülmesi sağlanmıştır. Bunun için katılımcıların mevcut düşünme süreçlerini mümkün olduğu ölçüde tarafsız belirleyebilmek adına, onların aşina olduğu Braille kabartmadan yararlanılması uygun görülmüştür. Görüşme sorularında yer alan matematiksel ifadeler ve grafiklerin yazıcıdan çıktı alınabilmesi için TactileView programından yararlanılmıştır. Kabartma yazı çıktıları Gören Eller Görme Engelliler Okulu ve ODTÜ kütüphanelerinden alınmıştır. Tasarlanan görüşme formu bir alan, bir alan eğitimi ve bir görme engelliler eğitimi uzmanından görüş alınarak düzenlenmiştir. Bu uzmanların her üçü de alanlarında akademisyendir ve araştırma çalışmaları mevcuttur. Doğuştan görme engelli bir ortaöğretim son sınıf öğrencisi ile pilot görüşme gerçekleştirilmiştir. Pilot görüşmede yer alan katılımcı için bilgiler katılımcıların belirlenmesi bölümünde betimlenmiştir (bkz Bölüm 3.3.2).

3.5.1.1. İhtiyaç Tespiti ve Mevcut Durum Belirleme Görüşme Formuna İlişkin Uzman Görüşleri ve Pilot Çalışma

İhtiyaç tespiti ve mevcut durumun belirlenmesi için hazırlanan görüşme formunda uzman görüşlerine göre düzenlemeler yapılmıştır. Alan, alan eğitimi ve görme engelliler eğitimi uzmanı olmak üzere üç ayrı uzmandan form için görüş alınmıştır. Görüşme formunda yer alan kişisel bilgiler bölümünde görme engelli bireylerin görme düzeyleri hakkında detaylı bilgiye sahip olmak için kurumlardan alınan raporlara ek olarak, görüşme sorularının eklenmesi uygun görülmüştür (bkz. EK 1, Bölüm A). Ayrıca katılımcılardan genel eğitim uygulamalarında kullandığı araç gereçler ve somut materyaller hakkında bilgi almak amacıyla soru eklenmiştir. Matematik eğitimine dair görüşleri için sevdiği matematiksel kavramlar, sevdiği dersler ve matematik derslerindeki uygulamalar hakkında sorular eklenmiştir (bkz. EK 1, Bölüm B). Cebirsel kavramlara dair sorular için soruların açık bir şekilde ifade edildiği, kavram tanımına uygunluğu ve sıralamaları açısından düzenlemeler yapılmıştır (bkz. EK 1, Bölüm C). Örneğin, bu bölümde 16. ve 17. soruların yerleri değiştirilmiştir.

Uzman görüşlerine dayanarak değişiklikler yapılmış ve bir görme engelli ortaöğretim son sınıf öğrencisi ile pilot çalışma yapılmıştır. Doğuştan ve %95 oranında görme kaybına sahip olan öğrencinin renk ve ışık algısı da mevcut değildir. İlkokul ve ortaokul eğitimini görme engelliler okullarında tamamlamıştır, ortaöğretim eğitimini ise bir Anadolu lisesi olan kaynaştırma okulunda devam etmektedir. Araştırmanın yapıldığı dönemde 12. sınıf bahar döneminde eğitim görmekteydi. Braille yazı, küptaş kasa ve yazı tableti araçlarını kullanmaktadır. Görüşme, yaklaşık 90 dakika süren tek oturumda gerçekleştirilmiştir. Görüşmenin sonunda Braille yazı düzenlemelerinin yanında, grafiklerde şekil düzeltmeleri ve grafiklerin katılımcıya sorulma sırasına dair düzeltmeler yapılmıştır. Örneğin EK 1, Bölüm C, soru 16' da yer alan grafiklerde *y*-ekseninde yer alan kabartma sayılar eksenden uzak kaldığı için parmakları ile hissetmesi güçlük oluşturmuştur. Aynı bölümde soru 21' de A kümesinde yer alan c elemanı Braille yazıda yan yana iki nokta ile temsil edilirken (1-4 noktaları), eşlemeyi belirten doğru parçası da noktalardan oluşmaktadır. Katılımcı doğru parçası c noktasına yakın olduğunda noktayı doğru parçasına ait düşünmüştür. Bu nedenle şekilde düzenleme yapılmıştır.

3.5.2. Ön Görüşme Formunun Tasarlanması

İhtiyaçların, sorunların ve eğitim uygulamalarının belirlendiği görüşmelerden elde edilen bulgular çerçevesinde geliştirilen tahmini öğrenme yol haritasını dikkate alarak tasarlanacak olan protokollerin uygulanacağı katılımcıların ön bilgilerini belirlemek ve öğrenci hakkında bilgi edinmek amacı ile ön görüşme formu tasarlanmıştır. Bu görüşmelerden elde edilen bulgular görme engelli ortaöğretim öğrencilerinin tahmini öğrenme yol haritasının belirlenmesine temel oluşturmuştur (Simon & Tzur, 2004). Katılımcının mevcut durumu (önbilgileri vb.) hedeflerin uyarlanmasında ve protokol adımlarında yer alan soruların ve örneklerin uyarlanmasında dikkate alınmıştır. Ayrıca katılımcıların kullandığı destek eğitim araçları bilgisi de öğretim oturumlarının tasarlanmasında göz önüne alınmıştır. Örneğin, teknolojik materyallere ilgisi olan katılımcı için küme örnekleri telefon markaları üzerinden uyarlanırken, futbol ile ilgilenen katılımcı için takım oyunları ele alınmıştır. Katılımcıların görüşlerine göre kabartma yazı tableti ve kalemi üzerine tasarlanan bazı not tutma veya uygulama örnekleri küptaş kasa üzerinden tasarlamıştır.

3.5.2.1. Ön Görüşme Formuna İlişkin Uzman Görüşleri ve Pilot Çalışma

Katılımcıların okullarında ve özel eğitim kurumlarında bireyselleştirilmiş eğitim programları incelendiğinde, belirlenen kavramlara ilişkin destek eğitim almadıkları tespit edilmiştir. Bu nedenle ön görüşmelerde yalnızca tahmini öğrenme yol haritasında belirlenen küme, eşleme, ilişkilendirme, koordinat sistemi ve alt kavramlar ve iki topluluk arasındaki ilişki temsil türleri üzerine ön bilgilerini belirlemek amaçlanmıştır. Kavramlara dair zihin imajları, düşünmeleri ve tanımları için fikirleri sorgulanmak üzere sorulara yer verilmiştir. Hazırlanan form alan, alan eğitimi ve özel eğitim alanı uzmanından olmak üzere üç ayrı uzman görüşü alınmıştır. Uzman görüşünden sonra örnek durumlar üzerinden kavramların sorgulanması için sonda sorular eklenmiştir. Öğretim deneyi pilot uygulama çalışmaları için belirlenen katılımcı Faruk ile ön görüşme yapılmıştır. Pilot görüşmeden sonra eğitim uygulamalarında kullanılan ekran okuyucu programlar gibi teknolojik materyallerin kullanımına dair sorunun örneklendirerek sorulmasına karar verilmiştir (bkz. EK 2, soru 6).

3.5.3. Öğretim Deneyi Görüşme Protokollerinin Tasarlanması (Tahmini Öğrenme Yol Haritaları)

Alan yazın incelendiğinde belirlenen cebirsel kavramlar için ulaşılabilir literatürde öğrenme yol haritalarına rastlanmamıştır. Ancak görme engelli bireylerin matematik öğrenme süreçlerini, ayrıca eğitim uygulamalarını ve yanı sıra cebir kavramlarına ilişkin mevcut durumu görmek tahmini öğrenme yol haritası oluşturmak için önem arz etmekteydi. Bu nedenle öncelikle görme engelli bireylerin ihtiyaç ve sorunların belirlendiği, mevcut cebirsel kavramlara ilişkin düşünme süreçleri, algıları ve yanılgıları belirlendiği ilk tur görüşmelerin analizleri yapılmıştır (bkz. Bölüm 4.1, 4.2 ve 4.3). Daha sonra bu bulgular ışığında elde edilen tahmini öğrenme yol haritası hedefleri, ön görüşmelerden elde edilen bulgular ile şekillenerek öğretim deneyi görüşme protokollerinin hazırlanmasında iskelet yapıyı oluşturmuştur. Görüşme protokolleri için hedeflerin sıralanmasında kavramın doğası, alt kavramlar ve hiyerarşik yapı dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir. Görme engelli bireyler için ve kaynaştırma okullarındaki akranları için uygulanan öğretim programları kazanım odaklı incelenmiştir (MEB, 2013; 2014; 2017b; 2018b). Kavram tanımı, kavramın tarihsel gelişimi ve doğası, öğrenci algıları, kavrayışları, düşünmeleri, kavram imajları, kavram yanılgıları, güçlük ve hataları, etkinlik tasarlama, öğrenme yol haritası odaklı çalışmalar alan yazında incelenmiştir (Arıkan & Halıcıoğlu, 2013; Argün vd., 2014; Bayazıt, 2015; Bayazıt & Aksoy, 2013; Bingölbali & Bingölbali, 2013; Clement, 2001; Cohen & Ehrlich, 1963; Dede & Argün, 2003; Falkner vd., 1999; Kabael, 2017; Kaput, 1998; Kay, 2001; Kieran, 1992; Klingenberg, 2007; Knuth vd., 2005; McNeil & Alibali, 2005; Narlı, 2016a; 2016b; Özgen, 2017; Tall, 1980; Tall & Baker, 1991; Yu, Barret & Presmeg, 2009; Zembat, 2016). Nihayetinde kavramlar için birer çerçeve (topografya) oluşturulmuştur. Elde edilen kavram çerçeveleri ilkokul, ortaokul ve ortaöğretim düzeyinde kavramlara ilişkin her alt kavramı, kazanımı ve nitelikleri içermektedir. Her bir kavram ve kavramlar arası ilişki ve temsil türleri için hedefler ilk aşama bulguları ışığında sıralanmıştır (bkz. Bölüm 4.3.5). Bu sıralamada hedefler bağlama göre gruplandırılarak öğretim deneyi oturumları oluşturulmuştur. Görme engelli bireylerin cebir öğrenme süreçlerinde tercihlerine ilişkin bulgular ve alan yazında görme engelli bireyler ile matematik eğitimi uygulamaları için öneriler (Bayram, 2014; Bülbül, 2013; Bülbül & Eryılmaz, 2012; Cansu, 2014; Chew vd., 2014; Cowan, 2011; Horzum, 2013; 2016; Şafak, 2005; Toerries vd., 2011) dikkate alınarak protokollerde adımlar oluşturulmuştur. Adımlarda yer alan günlük hayat ile ilişkilendirilmiş örneklerin bazıları çeşitli ders kitaplarından (Holliday, 2004; Holliday vd., 2001; Larson, 2009; High School, t.y.) yararlanılarak ve görme engelli bireylerin zihninde hayal edebilme becerisi dikkate alınarak seçilmiştir. Ayrıca ihtiyaç tespiti ve tercih edilen matematik öğrenme uygulamalarına ilişkin elde edilen bulgulardan yararlanılarak çeşitli araçların kullanımını ile adımlar tasarlanmıştır.

3.5.3.1. Öğretim Deneyi Görüşme Protokollerine İlişkin Uzman Görüşleri ve Pilot Çalışmalar

Tasarlanan görüşme protokolleri alan uzmanı, alan eğitimi uzmanı ve görme engelliler eğitimi uzmanı olmak üzere üç ayrı uzman görüşü ile düzenlenmiştir. Uzmanlara tasarlanan öğretim deneyi ile birlikte ilk tur görüşmelerden elde edilen tahmini öğrenme yol haritası ve kavramlar için oluşturulan çerçeveler (topografyalar) sunulmuştur. Uzmanlardan öncelikle belirlenen hedeflerin yeterli olup olmadığı, kavramların anlaşılması için adımların yeterli olup olmadığı, seçilen örneklerin uygunluğu, soruların yeteri kadar anlaşılır olup olmadığı, görme engelli öğrenciler için örneklerin ve araçların uygunluğu gibi bağlamlara ilişkin, sonrasında kendilerinin tespit ettiği durumlar için görüş istenmiştir. Bu düzenlemeler kavram tanımı için örnek seçimi, adımların sıralaması, kullanılan dil, adım sayısının artırılması, hedeflerin ifade edilmesi, kullanılması planlanan araçların seçimi gibi sıralanabilir. Uzman görüşleri sonucunda yapılan değişikliklerden birkaç tanesi aşağıda listelenmiştir:

Evrensel küme ve altküme kavramları için tasarlanan adımda küme temsili için fon kartonlar kullanılması planlanıyordu. Ancak öğrencinin dokunsal olarak hissetmesi için tablaların kullanımı tercih edilmiştir (bkz. Ek 3, Protokol I, Adım 2). Liste yöntemi ve Venn şeması ile küme temsili örnek sayısının artırılması, öğrencinin deneyimlerinin artması için uygun görülmüş ve yalnızca bir adımda değil her adımda temsil türlerine vurgu yapılmıştır (bkz. Ek 3, Protokol I, Adım 3 ve Adım 5). Sonlu ve sonsuz küme kavramlarının sezgisel olarak hissedilmesi için ‘gökyüzündeki yıldızların kümesi’ ve ‘dünyadaki şapkaların kümesi’ ifadelerine yer verilmişti. Ancak doğuştan görme engelli öğrencilerin bu nesneleri ve bu nesnelerin oluşturulduğu kümeleri algılamasının güç olabileceğinden, sadece sayı kümeleri ele alınmıştır (bkz. Ek 3, Protokol I, Adım 8). İki kümenin elemanları arasında eşleme yapılırken, elemanlar arasındaki ilişkinin belli bir oranda artma ve azalmanın yanında bazı eşlemelerin kümenin aynı elemanı ile (sabit) ve bazı eşlemelerde düzensiz artma ve azalmaların olması önerisi getirilmiştir. Böylece katılımcıların eşlemenin düzenli artma ve azalma durumlarının dışında da olabileceğini fark etmeleri mümkün olmaktadır (bkz. Ek 3, Protokol II, Adım 3 ve Adım 5). Doğru kavramını zihninde canlandırması için ip ve kablo gibi araçların yanında 'sündürme' fikrini pekiştirmesi için radyo anteni kullanılabileceği öneri getirilmiş ve adımlara bu araç ile uygulamalar eklenmiştir (bkz. Ek 3, Protokol III). Sayı doğrusunu oluştururken (cetvelleme) tamsayıları doğru üzerindeki noktalarla eşlenmesinde noktaların seçiminde birim belirlenmesi gerekmektedir. Bu nedenle birim uzunluk belirleyebilme hedeflerinden önce 'Uzunluğun nesnelerin niteliği olduğunu sezdirme' hedefinin eklenmesi, öğrencinin önbilgilerini pekiştirmek için gerekli görülmüştür (bkz. Ek 3, Protokol IV). Düzlem okyanusla temsil edilerek bir geminin rotasını belirlemede sıralı ikililerin kullanımının sorgulandığı bir soruda, görme engelli öğrencilerin zihinlerinde canlandırılabilmesi için iğneli sayfa materyalini kullanmak tercih edilmiştir (bkz. Ek 3, Protokol V). Öğrencilerin bireyselleştirilmiş eğitim programları göz önüne alınarak grafik ile ilişkinin temsilinde basit grafiklerin (sonsuz işareti, sık kullanılan paraboller vb.) yer alması önerilmiştir (bkz. Ek 3, Protokol VI, Adım 7). Değişken kavramı için alan uzmanı tarafından sembol kullanımında bir kabul olarak x, y, z ve sabit için a, b, c sembollerinin kullanıldığı eklenmiştir (bkz. Ek 3, Protokol VII, Adım 1).

Öğretim deneyleri için tasarlanan protokollere ait pilot çalışmalar, her bir oturumdan bir hafta önce gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmaların gerçekleştirildiği Faruk ile görüşmeler ana uygulamada olduğu gibi sessizliği sağlanmış bir ortamda (kaynaştırma okulunda destek eğitim odasında) ve bireysel klinik görüşmeler şeklinde yürütülmüştür. Bu pilot çalışmaların amacı, tasarlanan öğretim uygulamaları protokollerinin öğrenciler için anlaşılır olup olmadığını, adımların hedefleri gerçekleştirmeye hizmet edip etmediğini ve kullanılan araçların görme engelli bir birey için ne kadar algılanabilir olduğunu tespit etmektir. Böylece yapılması gerekli düzeltmeleri veya uyarlamaları belirlemek mümkün olmuştur. Ayrıca protokollerde yer alan adımlarda yöneltilen örneklerin, sorulacak soruların ve öğretim deneyinin yürütülmesinin öğrencilerin düşünmelerini ortaya çıkarabilecek ve öğretimin etkililiğini sağlayacak nitelikte olup olmadığını belirlemek amaçlanmıştır. Pilot çalışmalar araştırmacının öğretmen olarak öğretim deneyini yürütme ve destek uygulama (örnek çeşitlendirme, sonda soru sorma, farklı bir araç kullanma gibi) ihtiyacını belirleme ve gerekeni işe koşma süreçlerine ilişkin deneyim kazanma fırsatı sunmuştur. Pilot çalışmadan sonra katılımcılar ile gerçekleştirilen her bir öğretim oturumundan sonra da ihtiyaç duyulan düzenlemeler yapılmıştır. Her ne kadar çalışmada bir pilot ve iki asıl katılımcıya dair verilere yer verilmiş olsa da öğretim deneylerinin yapıldığı diğer üç birey ile gerçekleştirilen görüşmeler de araştırmacıya deneyim sağlamış ve protokollerin gelişmesine pilot çalışmalar olarak katkıda bulunmuştur.

Pilot çalışmaların sonucunda protokollerde gerçekleştirilen düzenlemelere birkaç örnek aşağıda yer almaktadır:

Protokol I (bkz. Ek 3) öğretim uygulamasında Faruk ve diğer iki görme engelli birey ile gerçekleştirilen pilot oturumlar sonucunda Adım 2’ de yer alan araçların kullanışlı olduğu ancak bazı yanılgılara neden olabileceği belirlenmiştir. Altküme ve evrensel küme için kullanılan tablaları da nesne olarak düşünen öğrenciler kümeyi temsil eden küçük tablayı, büyük tablanın elemanı olarak kabul etmiştir. Bu nedenle katılımcılar ile gerçekleştirilen oturumlarda bu durum açıklanmıştır. Ayrıca altküme ve evrensel küme kavramları için farklı ayrı bir protokol daha tasarlanmıştır (bkz. Ek 3, Protokol I-Ek).

Braille yazıcılar, karakterler arasındaki mesafeyi ayarlayarak verilen metni bir A3 sayfaya sığdırabilmektedir. Braille yazıcıdan alınan tablolarda da hücreler ve hücrelerde yer alan metinler bir sayfaya sığdırılmaya çalışılmıştır. Ancak ikinci oturumda Faruk, Adım 5’ te yer alan tabloyu incelemekte güçlük yaşamıştır (bkz. Ek 3, Protokol II). Bu nedenle tablo, tekrar kabartma yazı tableti ve kalemi ile elde yazılmış ve 3D kalem ile tablonun çizgileri oluşturulmuştur. Katılımcılar ile gerçekleştirilen oturumlarda hazırlanan tablo kullanılmıştır. Faruk, verilen bir grafiğin üzerinde yer alan işaretlenmiş noktaların koordinatlarını belirlemekte ve bazı noktaları verilen ilişkinin grafiğini oluşturmada güçlükler yaşamıştır. Diğer klinik görüşmelerde adımlarda yer alan örneklerin sayısı artırılmıştır (bkz. Ek 3, Protokol VI). Ancak yapılan öğretim oturumlarından sonra ek adımların yer aldığı protokol tasarlanmıştır (bkz. Ek 3, Protokol VI-Ek).

3.5.4. Görüşme Sorularının ve Öğretim Deneyinin Tasarlanmasında Öğretim Programlarının İncelenmesi

Bu çalışmada cebirsel kavramlar arasından seçilen değişken, bilinmeyen, eşitlik ve fonksiyon için öğretim programları incelenmiştir. Ardından elde edilen tahmini öğrenme yol haritası çerçevesine göre küme, doğru, sayı doğrusu, koordinat sistemi, eşleme, ilişkilendirme kavramları için tekrar öğretim programlarında yer alan kazanımlar ele alınmıştır. Söz konusu kavramlar ve bu kavramlar için ön hazırlık niteliği taşıyan kavramlara dair kazanımlar 1-8. sınıf düzeyi (MEB, 2017a; 2018a) ve 9-12. sınıf düzeyi (MEB, 2017b; 2018b) için öğretim programlarında belirlenmiştir.

Eşit işaretine yer verilen ilk kazanım ilkokul 1.sınıf düzeyinde '*Toplama işleminin sembolü (+) ve eşit işareti (=) tanıtılır ve anlamları üzerinde durulur*' kazanımında toplama işlemi ile bir arada ele alınmıştır. 2.sınıf düzeyinde ise '*Eşit işaretinin matematiksel ifadeler arasındaki "eşitlik" anlamını fark eder.*' kazanımı ile eşit işaretinin her zaman işlem sonucu anlamı taşımadığı, eşitliğin iki tarafındaki matematiksel ifadelerin denge durumunu da (eşitliğini) ifade ettiği belirtilmektedir. Birim kavramı için '*Standart olmayan farklı uzunluk ölçme birimlerini birlikte kullanarak bir uzunluğu ölçer ve standart olmayan birimin iki ve dörde bölünmüş parçalarıyla tekrarlı ölçümler yapar'* kazanımı yer almaktadır.

Doğru ve doğru parçası için 3.sınıf düzeyinde geometrik şekiller ve katı cisimler kavramlarından sonra '*Doğruyu, ışını ve açıyı tanır*' ve '*Doğru parçasını çizgi modelleri ile oluşturur; yatay, dikey ve eğik konumlu doğru parçası modellerine örnekler vererek çizimlerini yapar' kazanımları bulunmaktadır. 5.sınıf düzeyinde ise sembol kullanımı ile beraber 'Doğru, doğru parçası, ışını açıklar ve sembolle gösterir*' kazanımı yer almaktadır. Dolayısı ile kavram tanımından sonra cebirsel sembollere yer verilmiştir.

Grafik ve tablo için yer alan kazanımlar ise veri işleme öğrenme alanında karşımıza çıkmaktadır. 3.sınıf kazanımları arasında '*Grafiklerde verilen bilgileri kullanarak veya grafikler oluşturarak toplama ve çıkarma işlemleri gerektiren problemleri çözer*' ve '*En çok üç veri grubuna ait basit tabloları okur, yorumlar ve tablodan elde ettiği veriyi düzenler*' kazanımlarına yer verilmiştir. 5.sınıf düzeyinde yine aynı öğrenme alanı için grafik türleri ve tablo ile temsil türleri arasında geçiş işlemlerinin yapılandırılması beklenmektedir. Çizgi grafiğine dair kazanımlar 7.sınıf düzeyinde öğretim programında ele alınmıştır. '*Verilere ilişkin çizgi grafiği oluşturur ve yorumlar*' kazanımı ile iki veri grubu arasındaki ilişkiyi göstermeye odaklanılmaktadır. Ayrıca grafik türleri arasında temsil geçişlerine ilişkin kazanıma da yer verilmektedir.

Değişken kavramı ile öğretim programında ilk olarak çeşitli geometrik şekiller kullanılarak sembolleştirilmesi ile toplama işlemi bağlamında yer verilmiştir. 4.sınıf kazanımlarında '*Aralarında eşitlik durumu olan iki matematiksel ifadeden birinde verilmeyen değeri belirler ve eşitliğin sağlandığını açıklar*' kazanımı ile eşitliğin denge anlamından yararlanarak '3+□=5+4' gibi işlemlerin gerçekleştirilmesi beklenmektedir.

Küme kavramı ile ilk olarak 6.sınıfta karşılaşılmaktadır. '*Kümeler ile ilgili temel kavramları anlar*' kazanımı ile kümelerin farklı gösterimlerine (liste, ortak özellik ve venn şeması yöntemi) yer verilmenin yanı sıra küme, eleman, eleman sayısı, boş küme kavramları için öğretim uygulamaları yapılması beklenir. 6.sınıf düzeyinde cebir öğrenme alanında cebirsel ifadeler kavramında değişken kavramının terim anlamına yer verilmiştir. Ancak burada harfli ifadeler değişken olarak ele alınmıştır. Bu doğrultuda '*Sözel olarak verilen bir duruma* *uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar*' kazanımı ile cebirsel ifadelerde kullanılan harflerin sayıları temsil ettiği ve değişken olarak adlandırıldığı fikrinin açıklanması beklenir. En az bir değişken ve işlem içeren ifadeler cebirsel ifadeler olarak adlandırılır. Ayrıca değişkenler ile işlem yapabilme becerisi için '*Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar*' kazanımına yer verilmiştir. 7.sınıf kazanımlarında ise değişken kavramı cebirsel genelleme süreçleri bağlamında ele alınmıştır. '*Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur*' kazanımı ile değişken kullanımının gerekliliği ve sayı örüntüsünün kuralını bir değişken ile yazılacağı fikirlerine odaklanılmaktadır. 7.sınıf düzeyinde dikkat çeken diğer kazanımlar eşitlik, denklem ve bilinmeyen kavramlarının bir arada ele alınmasıdır. Bu kavramlar için eşitliğin korunumu ve birinci derecen bir bilinmeyenli denklemler ile işlem yapabilme kazanımlarına yer verilmiştir.

Sayı doğrusu kavramı tamsayılara ilişkin kazanımlar ile beraber 6.sınıf düzeyinde '*Tam sayıları tanır ve sayı doğrusunda gösterir*' şeklinde ele alınmaktadır. Böylece sayı doğrusu yardımı ile sayıların sıralandırılması ve mutlak değer kavramlarını da yer verilmektedir. Koordinat sistemi ve iki küme arasındaki ilişkinin grafik temsili kazanımları 8.sınıf düzeyinde cebir öğrenme alanında doğrusal denklemler kavramı ile ele alınmaktadır. Doğrusal denklemlerin ele alınmasında yalnızca iki topluluk arasındaki doğrusal iişkilerin inceleneceği fikri yer almaktadır. '*Koordinat sistemini özellikleriyle tanır ve sıralı ikilileri gösterir*' kazanımı ile koordinat sistemi üzerinde yer belirlemeyle gerçek hayat durumlarını ilişkilendirmeye ilişkin uygulamalara yer verilmesi beklenmektedir. Tablo ile temsil ve sıralı ikililer ile temsiller arasında geçişlerin edinilmesi için iki değişkenin birbirine göre değişimlerinin ele alındığı '*Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder*' kazanımına yer verilmiştir. Böylece bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarının incelenmesi mümkün olmaktadır.

MEB (2017a; 2018a) öğretim programlarında yer alan kazanımlar incelendiğinde Tablo 5' te yer aldığı gibi kümeler, değişken, bağımlı ve bağısız değişken, değişkenler arasındaki ilişkinin çeşitli temsilleri ve grafik kavramlarına dair kazanımların yer aldığı belirlenmiştir. Genel olarak kavramların öğretim uygulamalarında sıralaması için bu tablo ışık tutabileceği düşünülmüştür. Böylece öğretim deneyinde uygulanacak adımlar için tahmini öğrenme yol haritasının hazırlanmasında bu tablodan yararlanılmıştır.

Tablo 5

1-8. Sınıf Düzeyi Matematik Dersi Öğretim Programında Belirlenen Kavramlara Ait Kazanımlar

Sınıf Düzeyi	Konu	Kazanım
6. Sınıf	Kümeler	• Kümeler ile ilgili temel kavramları anlar. a) Kümelerin farklı gösterimlerine (liste, ortak özellik ve venn şeması yöntemi) yer verilir. b) Küme, eleman, eleman sayısı, boş küme, birleşim, kesişim kavramları verilir. Çalışmalarda kavramsal düzeyde kalınır.
	Cebirsel İfadeler	• Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. a) Cebirsel ifadelerde kullanılan harflerin sayıları temsil ettiği ve "değişken" olarak adlandırıldığı belirtilir. b) En az bir değişken ve işlem içeren ifadelerin "cebirsel ifadeler" olduğu vurgulanır. c) Terim, sabit terim, benzer terim ve katsayı kavramları ele alınır. • Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar.
7. Sınıf	Cebirsel İfadeler	• Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur. • Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. • Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin *n* cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır.
	Eşitlik ve denklem	• Eşitliğin korunumu ilkesini anlar. • Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.
8. Sınıf	Doğrusal Denklemler	• Koordinat sistemini özellikleriyle tanır ve sıralı ikilileri gösterir. • Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder. • Doğrusal denklemlerin grafiğini çizer. • Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.

Tablo 5' te bu çalışma için seçilen kavramlara ait kazanımlara yer verilmiştir. Bu kazanımlar söz konusu kavramlar için alt kavram niteliği taşıdığı gibi öğrenme yol haritalarını oluşturmak için destek sunmaktadır. Bu kazanımlar önbilgi olarak ele alınacak olsa dahi kavramların öğrenilmesi sürecinde birer basamak özelliği taşımaktadır. Nitekim görme engelli bireylerin cebir kavramlarına ilişkin mevcut durum belirleme görüşmelerinden elde edilen bulgular, bu kavramlara ilişkin eksiklerin, yanılgıların ve güçlüklerin olduğunu ortaya koymuştur (bkz. Bölüm 4.3).

Ortaöğretim programlarında (MEB, 2017b; 2018b) değişken, bilinmeyen, eşitlik ve fonksiyon kavramı için önbilgi olan kavramlara ilişkin incelendiğinde aşağıdaki Tablo 6' da yer alan kazanımlara rastlanmıştır. Öğretim programlarındaki fonksiyon kavramına dair konularda yer alan farklılık-benzerlikler ve ayrıca öğretim programlarının 2017-2018 ve 2018-2019 eğitim-öğretim yılları için uygulanma esasları göz önüne alındığında ortak ve temel konu başlıklarının ele alınması uygun görülmektedir. Buna ek olarak görme engelli öğrenciler için okullarında tasarlanacak olan BEP programları ve günlük hayatta fonksiyonel düşünme süreçlerinin yansımaları dikkate alınarak kazanımlar belirlenmiştir. Ayrıca fonksiyon kavramına ilişkin ileri düzey kazanımların da yer almasına rağmen mevcur durumun belirlenmesinde temel kazanımlara yer verilmiştir. Elde edilen bulgulardan da (bkz. Bölüm 4.3) anlaşılacağı üzere görme engelli bireylerin ilköğretim düzeyindeki kazanımlara ilişkin önbilgi eksikleri mevcuttu. Bu nedenle tahmini öğrenme yol haritasının elde edilmesi için temel kavramlara ve kazanımlara yer verilmiştir. 11.sınıf kazanımları arasında Analitik Geometri alt öğrenme alanında doğrunun analitik incelenmesine ilişkin kazanımlar yer almaktadır. Bu kazanımlar ilköğretim öğretim programınında yer alan kazanımları önbilgi kabul ederek inşa edilmiştir. Ancak ihtiyaç analizi sonucunda ortaöğretim düzeyinde görme engelli bireyler için doğru ve doğru parçası kavramlarının tartışılması gerekmektedir. Bu nedenle Tablo 6' da bu kazanımlara yer verilmemiştir.

Tablo 6

9-12. Sınıf Düzeyi Matematik Dersi Öğretim Programında Belirlenen Kavramlara Ait Kazanımlar

Sınıf Düzeyi	Konu	Kazanımlar
9. Sınıf	Kümeler	• Kümeler ile ilgili temel kavramlar hatırlatılır. a) Kümelerle ilgili gerçek hayattan örneklere yer verilir. b) Kümelerin farklı gösterimlerine yer verilir. c) Cantor'un çalışmalarına yer verilir. • Alt kümeyi kullanarak işlemler yapar. a) Alt küme kavramı ve özellikleri ele alınır. b) Alt küme kavramıyla ilgili gerçek hayattan örneklere yer verilir. • İki kümenin eşitliğini kullanarak işlemler yapar. a) İki kümenin eşitliği kavramı alt küme ile ilişkilendirilir. b) Denk küme kavramı verilmez. • İki kümenin kartezyen çarpımıyla ilgili işlemler yapar. a) Sıralı ikili ve sıralı ikililerin eşitliği örneklerle açıklanır. b) Sadece sonlu sayıda elemanı olan kümelerin kartezyen çarpımlarının grafik çizimi yapılır.
10. Sınıf	Fonksiyonlar	• Fonksiyonlarla ilgili problemler çözer. a) Fonksiyon kavramı açıklanır. b) Sadece gerçek sayılar üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar ele alınır. c) İçine fonksiyon, örten fonksiyon, bire bir fonksiyon, sabit fonksiyon, doğrusal fonksiyon açıklanır. d) Gerçek hayat problemlerine ve tablo-grafik kullanımına yer verilir. • Fonksiyonların grafiklerini çizer. • Fonksiyonların grafiklerini yorumlar. a) Grafiği verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümeleri gösterilir. b) Bir fonksiyon grafiğinde, fonksiyonun *x*-ekseni üzerinde tanımlı olduğu her bir noktadan *y*-eksenine paralel çizilen doğruların, grafiği yalnızca bir noktada kestiğine (düşey/dikey doğru testi) işaret edilir. • Gerçek hayat durumlarından doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilenlerin grafik gösterimlerini yapar. • Birebir ve örten fonksiyonlar ile ilgili uygulamalar yapar.
	İkinci Dereceden Denklemler	• İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kavramını açıklar. • İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.
11. Sınıf	Fonksiyonlarda Uygulamalar	• Fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanarak problem çözer.

3.6. Verilerin Analizi

Araştırmada birincil veri toplama aracı olan görüşme protokolleri tasarlanmadan önce ve tasarlanıp uygulandıktan sonrasına kadar elde edilen verilerin analizi *süregelen* ve *geriye dönük* analiz yöntemleri ile yapılmıştır. Ayrıca içerik analizi tekniklerinden yararlanılmıştır. Görme engelli bireylerin eğitim, matematik eğitimi ve cebir eğitimi uygulamalarında var olan ihtiyaçlarını ve mevcut durumu ortaya çıkarmak içi tasarlanan durum çalışmasında, görüşmeler yoluyla elde ediken verilerin derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Bu nedenle analiz birimi (Patton, 2014) olan katılımcıların söylemleri ve el hareketleri içerik analizi ile analiz edilmiştir.

Öğretim deneyi, analiz birimleri bireyler veya gruplar olsa da katılımcıların zihinsel ve fiziksel aktivitelerini ve etkileşimlerini anlamlandırmayı amaçlayan açıklayıcı yapılardır (Simon, 2000; Steffe & Thompson, 2000). Öğretim deneyinde veri analizi süregelen analiz (*on-going*) ve geriye dönük (*retrospective*) analiz olmak üzere iki seviyede karakterize edilmektedir. Süregelen analiz, öğretim oturumları arasında, önceki müdahalenin sonuçlarını değerlendirmeye ve sonraki müdahaleyi tasarlamaya odaklanan analiz yöntemidir. Geriye dönük analiz ise genellikle veri toplama aşamasını takiben yapılır ve öğrenci düşünmelerini geliştirmeye, öğretimsel müdahalenin yansımalarını analiz etmeye odaklanmaktadır (Simon, 2000; Simon & Tzur, 2004; Steffe & Thompson, 2000).

Süregelen analiz, her bir protokolün uygulamasından sonra video kayıtlarının analiz edilmesi ile hedeflenen öğrenme amaçlarına ulaşılma düzeyini belirlemek için gerçekleştirilmiştir. Bu analiz sonucunda elde edilen bulgular bir sonraki etkinliğin tasarlanmasına ışık tutmaktadır. Veri toplama sürecinde, görüşmelerde ve videolar izlenirken belirlenen kritik durumlarda notlar alınmıştır. Böylece analiz sürecinde amaçlanan önemli noktalar kolaylıkla tespit edilebilmiştir. Geriye dönük analiz ise her bir katılımcı için öğretim deneyi oturumları tamamlandıktan sonra, videoların tamamının hedeflere ulaşma sürecindeki öğrenci düşünmeleri ve öğrenme yol haritaları bağlamında analiz edilmesini mümkün kılmıştır.

Başka bir ifade ile analiz sürecinde elde edilen verilenin tamamının bir bütün olarak analiz edilmesi ve yorumanması sürecini içermektedir.

3.6.1. İçerik Analizi Aşaması

Verilerin analizinde Merriam (1998) içerik analizi adımları takip edilmiştir. Bireysel görüşmelerden elde edilen veriler video kayıtları izlenerek, söylemler ve el hareketleri dikkate alınarak, araştırmanın alt amaçları doğrultusunda transkript edilmiş ve bir kez sadece okunmuştur. Ardından her bir katılımcı için önemli cümleler ve ekran görüntüleri işaretlenmiş, yansıtıcı notlar alınmış ve kategoriler oluşturulmuştur. Yapılan literatür incelemesi (Bitter, 2013; Bülbül vd., 2012; Edwards vd., 1995; Horzum, 2013; Karshmer & Farsi, 2007; Kızılarslan & Sözbilir, 2017; Spindler, 2006; Şafak, 2005) ışığında kategoriler incelenmiştir. Aynı içeriği vurgulayan cümleler ve/veya ekran görüntüleri birkaç katılımcıda ya da tek bir katılımcıdan birkaç kez belirlendi ise ayrı bir kategori olarak belirlenmiştir. Tek bir anafikir altında toplanabilen kategoriler temalar altında ele alınmıştır.

3.6.2. İçerik Analizi Sürecinden Veri Analizi Örneği

Genelde eğitim, özelde matematik eğitimi ve daha spefik olarak cebir kavramlarına ilişkin görm engelli bireylerin ihtiyçaları, sorunları ve mevcut durumun betimlenmesi üzerine yapılan görüşmelerden elde edilen veriler içerik analizi ile analiz edilmiştir. Bu bölümde yalnızca eğitim uygulamaları için analiz örneğine yer verilmektedir (Tablo 7). Ancak Bölüm 4.1, 4.2 ve 4.3’ te elde edilen her kategori için örneklere ve açıklamalara yer verilmektedir.

Tablo 7

Genel Eğitime İlişkin Sorunlar ve İhtiyaçlar Veri Analizi Örneği

Tema	Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
Eğitim Materyalleri	Not tutma güçlüğü	Yazı tableti ile yaşanan sorunlar (tak çıkar yapmanın sıklığı ve güç olması, yazı yazmanın yavaş olması, hataya sebep olması), materyallerin taşınabilir olmama sorunu (daktilo gibi)	Çağatay: sürekli tak çıkar yapıyorsunuz tablette, bir daktilo edinme imkanı da olmadığından bu daha yavaş olmanıza ve soruları biraz hatalı çözmenize neden oluyordu.
Öğretmen	Tecrübe sorunu	Öğretmenlerin görme engelli bireyler ile eğitim ortamı tasarlama, Braille yazı ve kaynaştırma eğitimi hakkında bilgi sahibi olmaması (tahtayı kullanma ve sesli betimlemeye hakim olmaması, vb).	İlker: hayatında görme engelli birisiyle karşılaşmamış bir öğretmen, bana nasıl anlatacağını dair hiçbir fikri yok ve ben direkt bodoslama dersindeyim. Kendi tarzıyla anlatıyor, ben onun tarzına kendimi adapte etmeye çalışıyorum. […] Arada sırada “hocam işaret ederek anlatmasanız da adını mı söyleseniz” falan sevimlilikler şirinlikler yapıyorum. Hani ben de anlasam diye.
Duyuşsal Davranışlar	Bireylerin/ öğretmenlerin tutumu	Görme engelli bireylerin başaramayacaklarına dair tutumlar ve önyargılar.	Cahit: birincisi, öğretmenler sizin başarınıza inanmıyor ya da zor ikna oluyor (gülüyor). Bir de ikna olanların sorunları başlıyor karşınıza. Onlar da her şeyi yapabileceğinizi sanıyorlar.
Eğitim-Öğretim Uygulamaları	Görsellik	Harita, şekil ve tablo gibi görsel unsurlar içeren kavramları anlamakta zorlanma veya söz konusu unsurların yeterli betimlenmemesi ve uygun materyallerin kullanılmaması	Onur: Bir de şey çok kötü oluyor ulusal sınavlarda şekilli soruları çıkarıyorlar ki şekilli soru tarif edildiği zaman yapması çok daha kolay oluyor. Onun yerine şeyi soruyorlar, ALES te falan bunu soruyorlar, tablo soruları soruyorlar. Tabloyu akılda tutmak şekil gibi durmuyor, ama akılda tutmak daha zor.
Eğitim-Öğretim Uygulamaları	Sınavlarda yaşanan sorunlar	Okuyuculardan kaynaklanan sorunlar (motivasyonu etkileme, diksiyon sorunu, işaretleri okuyamama), sınav süresinin yetersiz olması, öğretmenden kaynaklanan sorunlar	Özgür: şeyde lisede çok zorlanıyordum çünkü hoca benim tablete çözmeme izin vermiyordu sınavda hoca soruları yazıyordu aklımdan (altına) çözmek zorunda kalıyordum. Mesela şey diyordu sen belki başka bir şey yazarsın belki kopya çekersin […] ya da mesela sen bi tane kağıt getirirsin oraya cevaplarını yazarsın falan çok saçma şeyden sorunlar oluyordu izin vermiyorlardı benim tablet kullanmama matematik çözerken […] ben sadece yani nasıl yapılacağını hocaya anlatıyordum ‘hocam şunu şöyle yazın böyle yazın’ hoca kendi yazıyordu.

3.6.3. Süregelen Analiz Aşaması

Süregelen analiz, öğretim oturumlarında pilot ve asıl çalışmaların tamamı süresince gerçekleştirilen, katılımcının düşünme, öğrenmesi ve kavrayışı, öğretim uygulamaları, etkinlik adımları ve destek eğitim araçlarının öğretim hedefleri ile eş zamanlı, detaylı ve sürekli analizini içermektedir. Bu analizler sonucunda elde edilen bulgular, öğretim oturumlarındaki etkinliklerin uyarlanmasında veya bir sonraki etkinliğin tasarlamasında rehberlik ettiği gibi öğrenme yol haritasının elde edilmesine katkı sunmuştur.

Görme duyusundan kısmi ya da tamamen yoksun olan görme engelli bireylerin düşüncelerini anlamak için dokunsal stratejileri tercih ederiz. Bununla beraber konuşma/sözlü anlatım, kabartma yazı, grafik ve en önemlisi tüm bunlar için jestler ve davranışlar önem arz eden yollardır. Dokunma duyusu da görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerde görme duyusunun kullanıldığı gibi, görmeyen bireylerde yavaş ve art arda bilinçli hareketler ile kullanılmaktadır. Sentetik ve küresel olan görme duyusunun aksine, dokunma duyusu parçalardan bütüne aşamalı bir analize müsaade etmektedir (Healy, Fernandes & do Rosário, 2008). Başka bir ifade ile dokunma duyusu ile elde edilen bilgiler belirli bir zamanda algılanıp işlenebilecek bilgi miktarı olarak görme duyusundan çok daha yavaş bir iletişim kanalıdır (Yu & Brewster, 2003). Bu nedenle süregelen analiz ile süreç boyunca analizlerin yapılması, görme engelli bireylerin düşünme süreçleri hakkında daha etkili ve geniş bir veri ağı sunmuştur.

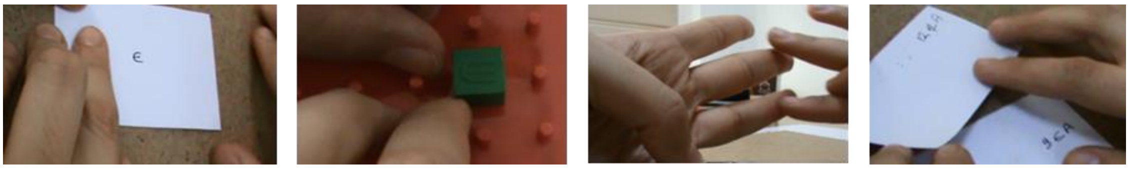
3.6.4. Süregelen Analiz Sürecinden Bir Veri Analizi Örneği

Her öğretim oturumundan sonra süregelen analiz sürecinde aşağıdaki adımlar dikkate alınmıştır. Ayrıca adımları betimleyen bir örnek durum ayrıntılı açıklanarak analiz örneği sunulmuştur:

- Katılımcının ön bilgilerine dair sözlü ifadeleri yardımıyla düşünmelerinin analizi; ön bilgi ve bir önceki haftanın tekrarı:

Sema' nın '*[...] Evde tabakları yan yana çizdim, küme yaptım [...]*' ifadesi ile günlük hayatın içinde küme örnekleri aradığını ve kavramsal anlamanın oluştuğunu söyleyebiliriz.

- Katılımcının el hareketleri, jest-mimik ve ses tonlamalarının analizi:

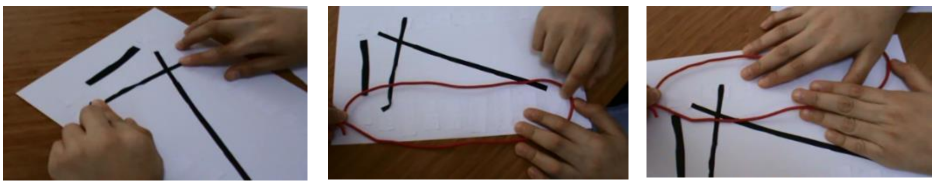


(a) (b) (c) (d)

Şekil 27. Sema elemanı olma ve elemanı değildir sembollerini ve gösterimlerini inceliyor

Sema' ya 'elemanı olma' ve 'elemanı değildir' sembol gösterimleri kabartma yazıda, ayrıca Latin semboller için iğneli sayfa yardımı ile kabartma şekillere dokunur (bkz. Şekil 27, (a), (b)). Elemanı olma sembolünün Latin sembol gösterimini algılaması için sol elin parmaklarının konumu ile benzetim ile dokundurularak açıklanmıştır (bkz. Şekil 27, (c)). 9 $\in A$ ve 12 $\in A$ sembol gösterimleri incelemesi daha sonra tablet kalem ile kabartma yazıda yazması istenmiştir (bkz Şekil 27, (d)). Böylece sembollerin kabartma yazı ile sunulmasının yanı sıra görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı sebollerin betimlemesinin önemli olduğu söylenebilir. Ayrıca dokunsal materyali yeterli olmadığı ve el yardımı ile ayrıntılı betimlemeye ihtiyaç duyulduğu belirlenmiştir.

- Destek eğitim araçlarının ve uygulamaya yansımalarının analizi:



Şekil 28. Sema televizyon kanalları ile kumanda üzerinde yer alan sayılar kümelerinin elemanlarını eşliyor

Sema kanallar kümesi K ve rakamlar kümesi R kümelerinin Venn şeması ile temsilini açıklamış ve gösterimi oluşturabilmiştir (bkz. Şekil 28). Doğru parçasını temsil eden bantlar yardımı ile iki kümenin elemanlarını eşlemiş ve bu eşlemenin birebir eşleme olduğunu ifade etmiştir. Bu süreçte bant kullanımın yanı sıra kablo gibi farklı bir malzeme dokusuna ihtiyaç duyulmuştur. Ayrıca bantları yapıştırmakta güçlük yaşandığından araştırmacıdan yardım istemesi farklı bir materyalin kullanılmasını gerektirdiğini söyleyebiliriz.

- Katılımcıların kavramlara ilişkin düşünmelerin analizi:

Araştırmacı: Bu eşlemeleri tablet kalemle ya da küptaş materyalinde nasıl gösterirsin?
Sema: 1=1 gibi mi? Yoksa bölü ya da kesme işareti mi kullanacağız?
Araştırmacı: Nasıl kullanacaksın örnek verir misin? Eşleme için sembol mü kullanmak istiyorsun?
Sema: Evet. Tamsayıları eşlerken bir işaret var mı? […] Virgül olmaz mı?
Araştırmacı: O zaman da sayıları listeliyor gibi olur. Ya da ondalık gösterim gibi olur.
Sema: O zaman tek bir şey kaldı. Büyük küçük işaretlerini mi kullanacağız?
Araştırmacı: 1 büyüktür 1 olur.
Sema: (Güler) Olmadı.

Yukarıdaki diyalogta Sema' nın eşleme yapabilmek için sembol kullanma gereksinimi duyması kavram öğrenme sürecine dair önemli bir ipucu sunmaktadır.

- Hedeflere ulaşılma düzeyinin belirlenmesi:

Öğretim oturumu devam ederken ve oturumun ardından yapılan durum değerlendirmeleri ile katılımcının o oturumda edinmesi beklenilen hedefler bağlamında inceleme yapılmıştır. Oturum sürecinde sonda soruların sorulması ve oturum sonunda görüşmenin tamamında katılımcının hedeflere ulaşma düzeyi belirlenmiştir.

- Öğrenme yol haritasında gelişime ait durumun belirlenmesi:

Bir önceki adımda belirlenen hedeflerin sıralanması ile öğrenme yol haritasındaki gelişimin incelenmesi mümkün olmuştur. Böylece katılımcının hedeflere ulaşmada ek adım ya da etkinliklerin gerekliliği incelenmiştir.

3.6.5. Geçmişe Dönük Analizler Aşaması (Retrospective Analysis Phase)

Bu aşamada öğretim deneyleri sırasında toplanan tüm veriler (her görüşmedeki öğrenci çalışmaları, gözlem notları, video kayıtları) analiz edilmiştir. Geçmişe dönük analizler aracılığıyla elde edilen bulguları, tasarlanan görevler ve görevlerin uygulanmasından elde edilen sonuçların yansıması olarak ifade edebiliriz. Bu aşamada başlangıçta belirlenen tahmini öğrenme yol haritaları detaylı olarak incelenmiş, düzenlenip, geliştirilmiş ve tümüyle değerlendirilmiştir (Edelson, 2002). Tahmini öğrenme yol haritası ile görme engelli öğrencilerin belirlenen cebirsel kavramlar ve bu kavramları ilişkilendirme sürecine dair anlamaları ve gelişimleri karşılaştırılmıştır.

Geçmişe dönük analiz üç aşamadan oluşmaktadır (Simon, 2000). İlk aşamada katılımcının düşünmeleri ve hareketleri için ‘Ne yapıyordu ve neden oturumda bu noktada yapıyordu?, Bu noktada söyledikleriyle ne demek istedi?, Bu noktada ne düşünüyordu?, Bu noktada anlayışı, kavrayışı nasıldı? vb.’ soruları düşünülerek analize başlanmıştır. Bu aşama süregelen analizlerden elde edilen öngörülerden yararlanılmıştır. Özetlemek gerekirse:

- Ham veri üzerinde gerçekleştirilebilen ve daha ileri düzeyde bir analiz için temel oluşturabilecek verilerin ilk analizi yapıldı.
- Bu aşamada elde edilen bulgular ile araştırma sorularını cevaplamak yeterli değildir.
- Bu analiz seviyesinde verilere bağlı kalmak ve yorumdan kaçınmak esastır.
- Bu seviyede daha ileri düzeyde bir analiz için malzeme sağladığı söylenebilir.

İkinci aşamada ilk seviyenin sonuçlarını ‘veri’ olarak kullanıldı. Bunu yaparken, genellikle ham verilere geri dönmemiz gerekmektedir. Başka bir ifade ile bu ikinci seviyede, ilk analiz seviyesinden gelen sonuç kümelerini organize eder ve anlamlandırırız. Genel olarak, kategori geliştirmeye odaklı analiz yöntemlerini göz önünde bulundurarak analizi kronolojik olarak organize ederiz. Böylece tahmini öğrenme yol haritasının şekillenmesi mümkün olmaktadır. Karmaşık bir öğretim oturumu sürecinde elde edilen veri bölümlerini ilgili kavramsal alan açısından sıralanır ve sonra bu alt küme içindeki verilere kronolojik sıra ile bir bütün olarak ele alınır. İkinci analiz düzeyinde 'Konu/kavram öğrenme/düşünme süreci vb. hangi anlayışlar sergilendi?, Bir anlayıştan/algıdan/kavrayıştan vb. diğerine ilerledikçe düşünmeyi nasıl karakterize edebiliriz?' gibi soruları cevaplamak esastır (Simon, 2000).

Son analiz düzeyinde ise teorik yapılar ve açıklamalar belirlenmektedir. Bu noktada araştırmacı doğrudan açıklayıcı modellerin geliştirilmesi üzerine odaklanmaktadır. Bu aşama verilerin açıklamasından, verilerin elde edildiği durumun ötesinde yararlı olabilecek açıklayıcı bir modele götüren bir adımdır (Simon, 2000). Böylece elde edilen tahmini öğrenme yol haritalarının daha sonraki çalışmalara ışık tutacak şekilde genel bir çerçeve sunması mümkün olmkatadır.

3.6.6. Geçmişe Dönük Analiz Sürecinden Bir Veri Analizi Örneği

Katılımcıların tahmini öğrenme yol haritaların elde edilmesi, öğretim oturumları sürecinde ek protokellerin tasarlanmasının gerekliliği ve ihtiyaç duyulan hedeflerin tespit edilmesi geçmişe dönük analiz sürecinin ürünleridir. Örneğin; altküme kavramı için tablalar ve nesneler yardımıyla oluşturulan kümelerin katılımcılar tarafından yanılgılara veya güçlüklere neden olduğu belirlenmiştir. Katılımcılardan bazıları altkümeyi temsil eden tablayı evrensel kümenin bir elemanı olarak düşünmüştür. Bu nedenle poşet yardımı ile altküme kavramı için ek protokol tasarlanmıştır (bkz. Protokol Ek-I). Ayrıca günlük hayat örnekleri ile alküme ve evrensel küme kavramları birlikte ele alınmıştır. Bu adımlara, katılımcı beklenilen hedefe ulaşıncaya kadar benzer uygulama soruları ile devam edilmiştir.

3.7. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Araştırmanın inandırıcılığı/inanılırlığı (Patton, 2014) artırmak için uzun süreli etkileşim, sürekli gözlem, uzman incelemesi ve katılımcı teyidi stratejileri kullanılmıştır. Uygulanan bu stratejiler aşağıda açıklanmıştır:

İhtiyaç analizi görüşmelerinden önce katılımcılar ile 15-30 dakika arasında sohbet etme ve araştırma hakkında bilgi verme fırsatı oluşturulmuştur. Dahası katılımcıların bir kısmı özel eğitim kurumlarından ve bir kısmı da kar topu örnekleme ile ulaşıldığı için görüşme oturumundan önce tanışma ve güven ortamı sağlama imkanı oluşmuştur. Böylece katılımcıları daha yakından tanımak ve fikirlerini rahatlıkla ifade etmelerini sağlamak mümkün olmuştur. Öğretim deneyi katılımcıları için benzer şekilde oturumlara başlamadan önce özel eğitim kurumlarında tanışma ve araştırma içeriğine ilişkin kısaca bilgilendirme görüşmeleri yapılmıştır. Ayrıca özel eğitim kurumlarında veya kaynaştırma okullarında sınıf ortamlarında gözlemler yapılmş ve öğrencinin kendini ifade etme becerisi, matematik derslerinde ve sınıf ortamında gözlenmiştir. Bununla birlikte, katılımcıların araştırmacı ile iletişimin güçlenmesi ve katılımcıyı daha yakından tanımak için katılımcıların aileleri ile birlikte yaklaşık 15 dakikalık tanışma ve katılım onayı görüşmeleri yapılmıştır. Ardından öğrenciler ile bireysel olarak yaklaşık 40 dakika süren ön görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğrenciye öğretim oturumlarının amacı ve içeriği hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Görüşmelerde öğrencinin mevcut durumunu değerlendirmenin amaçlanmadığı, yöneltilen sorular karşısında tüm düşünce, fikir ve görüşlerini ifade etmesinin istendiği belirtilmiştir. Böylece demokratik ortamlarda, katılımcının kendini daha iyi ifade ettiği ve tüm zihinsel süreçlerini açıkladığı oturumlar için zemin oluşturulmuştur. Ayrıca ilgili kazanımlara ait tasarlanan derslerden önce katılımcıların video kaydının yapılmasına alışmaları ve doğal ortamın oluşturulması için ön görüşmelerde de video kaydı yapılmıştır. Katılımcılara görüşmelerin yapıldığı ofisi incelemeleri ve ortama alışmaları için zaman verilmiş, ayrıca kameranın konumu ve açısı hakkında bilgilendirme yapılmıştır. Bazı oturumlarda kayıt durdurulmuş ve katılımcının dinlenmesi için zaman verilmiştir. Bu aralıklarda oturumlara ilişkin veya matematiksel içerikler hakkında sohbetler devam etmiştir. Böylece katılımcıyı daha yakından tanıma ve oturumların süregelen analizini için detaylı analiz yapma fırsatı oluşmuştur. Ayrıca görüşmelerde görme engelli bireylerin ihtiyaçları dikkate alınmış, gerekli görüldüğü takdirde Braille yazı tahtası, ses kayıt cihazı, dokunsal materyaller gibi önlemler alınmıştır.

İnandırıcılığı artırmak için uygulanan bir diğer strateji, veri kaynaklarında çeşitlemeye başvurulmasıdır. Araştırma görme engelli bireylerin ihtiyaçlarını belirlemek, öğretim uygulamaları için daha fazla tecrübeye sahip olmak, hazır bulunuşluk düzeylerine dair daha ayrıntılı bilgi edinmek ve böylece görme engelli bireylerle matematik eğitimi sürecine daha geniş bir pencerden bakma fırsatı yakalamak için iki farklı katılımcı grubu ile yürütülmüştür. İlk aşamada durum çalışması ile ayrıntılı betimlemeler yoluyla bilgi edinilen kavramlar ve uygulama süreçleri için ikinci aşamada derinlemesine analizlerin olduğu klinik görüşmeler yoluyla öğretim deneyi sürdürülmüştür. İhtiyaç analizine her ne kadar 7 katılımcı seçilmiş olsa da, 18 görme engelli birey ile görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğretim oturumları için biri pilot olmak üzere 3 katılımcı için bulgular sunulmuş olsa da 10 görme engelli ortaöğretim öğrencisi ile oturumlar tamamlanmıştır. Böylece araştırmacının farklı bireysel özellikleri olan görme engelli bireyler ile matematiksel düşünme süreçlerini tecrübe etmesi, öğretim uygulamalarının şekillenmesi ve daha fazla bireye hitap etmesi mümkün olmuştur. Ayrıca ihtiyaç tespiti görüşmeleri, ön görüşmeler ve her aşama için pilot çalışmanın yapılması araştırmanın geçerliğini ve güvenirliliğini artırdığı düşünülmektedir.

Araştırma sonuçlarının başka ortamlara aktarabilirliği ayrıntılı betimleme ve amaçlı örneklem ile sağlanmaya çalışılmıştır. Bunun için ölçüt, maksimum çeşitlilik ve tabakalı örnekleme metodlarının uygulanması ve arıntılı betimlenmesi (bkz. Bölüm 3.3), katılımcılar hakkında detaylı bilgi (bkz. Bölüm 3.3 ve Bölüm 4.4), araştırmanın yapıldığı ortamların betimlenmesi ve araştırmacının rolünün açıklanması (bkz. Bölüm 3.2) ve araştırma sonuçlarının elde edildiği verilerden yapılan doğrudan alıntılar (bkz. Bölüm 4) ile sonuçlar ayrıntılı bir şekilde betimlenmiştir. Ayrıca öğretim oturumunda kullanılan etkinliklerin ve somut materyallerin betimlenmesi ve açıklaması (bkz. Bölüm 3.4) da uygulayıcılar için önemli bir ayrıntıdır.

Veri toplama araçları için 3 uzmandan görüş alınması ve pilot çalışmaların yapılması (bkz. Bölüm 3.5), öğretim oturumları devam ederken süregelen analizler için 1 uzmandan eş zamanlı analizler için teyitlerin alınması araştırmanın güvenirliği için önemli bulunmaktadır. Nitekim bu çalışmalar yolu ile öğretim oturumlarında düzenlemeler yapılmıştır (bkz. Bölüm 3.5).

Araştırmacı ihtiyaç analizi görüşmelerinde ve öğretim oturumlarında (klinik görüşmeler) benzer ortamları sağlayarak, ham verileri iki kez kodlayarak, kategorileştirme ile verilerin sonuçlar ile ilişkisinin kurulmasını dikkate alarak tutarlılık çalışması yapmıştır. Ham veriler süregelen analiz ve geriye dönük analiz yöntemleri ile iki kez kodlanmıştır. Analiz örnekleri, yapılan değişiklikler ve katogeriler veri analizi ve bulgular başlıkları altında tartışılmış ve sunulmuştur (bkz. Bölüm 3.7 ve Bölüm 4). Ayrıca toplanan verilerin analiz edilmesi ve ulaşılan tema ve kategorilerin teyidi için birinci aşama görüşmelerden ve öğretim deneyinden elde edilen verilerin analizi bir alan eğitimi uzmanından teyit alınması sağlanmıştır. İlk aşama görüşmeler için transkript edilerek analizleri yapılmış 7 katılımcıya ait veri havuzundan, uzmanın rastgele belirlediği bir katılımcının verilerinin yaklaşık %20' si analiz edilmiştir. Kodlamalarda ve kategorilerde yaklaşık %91 oranında çakışma tespit edilmiştir. Yalnızca kategorilerin adlandırılmasında ve bazı verilerin birden fazla kategoride yer almasında farklılıklar bulunmuştur. Bu farklılıklar araştırmacı ile ikinci kodlayıcı arasında tekrar görüşülmüş ve bu kodlamalar ile ilgili fikir birliğine ulaşılmıştır. Örneğin; görme engelli bireylerin Latin yazıda harfler, işaretler, semboller veya rakamları nasıl yazıldığını bilmesine/öğrenmesine ilişkin oluşturulan kategorinin adlandırılmasında ikinci kodlayıcı 'görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı harf ve semboller' şeklinde adlandırırken, araştırmacı 'Latin sembolleri bilme' olarak adlandırmıştır. İkinci kodlayıcı ile yapılan görüşmelerde, görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin Lain alfabe kullanımı dikkate alınarak ‘Latin harfleri, rakamları ve işaretleri bilme’ şeklinde kategorinin adlandırılmasına karar verilmiştir.

Öğretim deneyi oturumlarından elde edilen verilerin süregelen ve geçmişe dönük analiz süreçlerinde katılımcılardan elde edilen verilerin yaklaşık %10’ u ikinci kodlayıcılar tarafından incelenmiştir. Kodlayıcılar araştırmanın amacını ve bağlamını bildikleri için öğrenci düşünmeleri, kavrama dair kavrayışları vb. unsurları hedefler doğrultusunda dikkate alarak kodlama yapmışlardır. Kodlamalar sonucunda yaklaşık %87 oranında fikir birliği elde edilmiştir. İkinci kodlayıcı ile veri analizinden sonra gerçekleştirilen görüşmede farklılıklar tartışılmış ve fikir birliğine varılmıştır. Örneğin; aşağıda yer alan diyalogta Sema’ dan kendisine verilen nesnelerden istediklerini seçerek tablanın üzerine yerleştirmesi ve bir küme oluşturması istenir:

> *Araştırmacı: O zaman sen kümeyi oluştururken bir şarta bağlı olarak nesneleri seçtin, öyle mi?*
> *Sema: Evet.*
> *Araştırmacı: Nedir şartın?*
> *Sema: Bilmem şekil yaptım. Daha iyi şekil çıkarıldığı için seçtim. Üzerlerinde sayılar var bir de.*

Burada birinci kodlayıcı (araştırmacı) Sema’ nın küme oluşturmak için nesnelere ait bir ortak özellik aradığı şeklinde analiz ederken, ikinci kodlayıcı Sema’ nın tahterevalli şeklini oluşturmaya odaklandığını ve belirli bir nitelik aramadığı şeklinde yorumlamıştır. Kodlayıcılar bir araya geldiğinde videonun devamında Sema’ nın düşüncelerini dikkate alarak analize ilişkin hüküm vermeye karar vermişlerdir.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bulgular araştırma problemleri ve verilerin elde edilip analiz edilmesi süreci göz önüne alınarak bulgular sunulmuştur. Bu fikir doğrultusunda öncelikle görme engelli bireylerin genelde eğitim, özelde de matematik eğitimi uygulamları ve daha özel olarak cebir kavramları ve öğretim ortamlarına ilişkin ihtiyaçları, sorunları ve mevcut durum belirlenmesine dair elde edilen bulgular alt başlıklar altında kaleme alınmıştır. Ardından tahmini öğrenme yol haritalarının elde edildiği ve böylece cebirsel düşünme süreçlerinin incelendiği, öğretim oturumlarına katılan iki katılımcı Sema ve Mete' nin öğretim deneyi sonucu elde edilen bulgularına yer verilmiştir. Bu bulgular sunulurken araştırma problemleri göz önüne alınarak cebir kavramlarına göre başlıklar altında ele alınmıştır. Son olarak Sema ve Mete' nin tahmini öğrenme yol haritaları sunulmuş, ardından bu yol haritalarına göre benzerlikler ve farklılıklar bağlamında karşılaştırma sonucunda elde edilen bulgular sıralanmıştır.

4.1. Genel Eğitime İlişkin Sorunlar, İhtiyaçlar ve Öğrenme Ortamlarındaki Uygulamaları

Görme engelli bireylerin eğitim uygulamalarında karşılaştıkları sorunlara, ihtiyaçlara ve güçlüklere ilişkin elde edilen bulgular kategoriler bağlamında Tablo 8' de toparlanmıştır.

Böylece elde edilen bulguların özetlenmesi ve geniş perspektiften incelenmesi mümkün olacaktır. Kategoriler birbirinden bağımsız temalar oluşturmamaktadır. Çünkü bir kategoriyi meydana getiren sorun veya ihtiyaç başka bir kategorinin meydana gelmesinde de rol almaktadır. Bu durum temaların oluşturulmasında açıklanacaktır. Görme engelli bireylerin eğitim ortamları, süreçleri ve uygulamaları ile ilgili genel sorunlarına ve ihtiyaçlarına dair elde edilen kategoriler ve örnek katılımcı ifadelerine Tablo 8' de yer verilmiştir.

Tablo 8

Görme Engelli Bireylerin Genel Eğitim Sorunları ve İhtiyaçları

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
Yazılı materyal ihtiyacı	Türkçe ve İngilizce olarak Braille yazılmış kaynaklar ve materyallerin azlığı veya var olan materyallerde eksikliklerin olması	İlker: Aynı soruları en az 15-20 kez çözmüşümdür. Aynı sorulardan bahsediyorum. Bu sefer saçmaladığınızı düşünüyorsunuz. Belki bir ay sonra çözüyorsunuz ama tekrar çözüyorsunuz, biliyorsunuz o soruyu. O zaman herkes soru çözmekten şikayet ederken, biz soru çözememekten şikayet ediyorduk.
Ekran okuyucu sıkıntısı	Teknolojik materyallarden ekran okuyucu programların şekilleri, matematiksel işaretleri ve sembolleri, tabloları betimleyememesi	Cahit: Dürüst konuşmak gerekirse coğrafya ve matematikte pek işe yaramıyor, çünkü sadece mesela şekil yazıyor orada, saçma sapan şeyler söylüyor, grafiklere falan.
Not tutma güçlüğü	Kabartma yazı tableti ile yaşanan sorunlar (tak çıkar yapmanın sıklığı ve güç olması, yazı yazmanın yavaş olması, hataya sebep olması), materyallerin taşınabilir olmaması (daktilo gibi)	İlker: Yazıyoruz, sonra çevir bir daha oku, tekrar tak, kaldığın yeri bul. Doğru mu yazdı bilmiyoruz, yanlış noktaya bastığınız zaman bittiniz zaten. Tekrar aç oku, haa, tekrar tak, haa dediğin yeri bul, devam et.
Zihinden işlem yapma güçlüğü/işlem sıklığı	Soruların çözümlerinde matematiksel işlemlerin uzun olması, işlem adımlarını akılda tutmanın güçlüğü	Çağatay: Sayısal olan derslerde daha çok zorlanıyorum işlem gerektirdiği için…
Destek eğitim ihtiyacı	BEP uygulanmaması, destek odası hizmetinin olmaması, bireysel öğretimin yapılmaması	Çağatay: Yeri geliyordu ders çalıştıracak insan bulamıyordum.Yani çoğu arkadaşlar da yardım etmiyorlardı, edenler de zaten işi olan insanlardı.
Tekrar etme ihtiyacı	Yazılı ve sesli materyallerin eksik olması ve okuyucu sorunlarından dolayı bilgilerin tekrar etme fırsatının olmaması	Çağatay: Evde bazen tekrar etme şansım yoktu […] ben öğrendiğim şeyleri çok çabuk unuturum, bu yüzden bir konuyu öğrenmem belki haftalarımı alır.
Tecrübe sorunu	Öğretmenlerin görme engelli bireyler ile eğitim ortamı tasarlama, Braille yazı ve kaynaştırma eğitimi hakkında bilgi sahibi olmaması (tahtayı kullanma ve sesli betimlemeye hakim olmaması, vb).	Cahit: İlkokulda veya ortaokulda benim gibi öğrenci görmemişti hocalarım. Benimle ilgili nasıl eğitim verecekleri konusunda pek bir bilgileri yoktu açıkcası. Hatta ilkokul öğretmenim ilk başta beni okula bile kabul etmemişti. Türkçe öğretmenimin yardımlarıyla insanlar benim hakkımda bilgi sahibi oldular.
Bireylerin / öğretmenle-rin tutumu	Görme engelli bireylerin akademik uygulamaları başaramayacaklarına dair tutumlar ve önyargılar.	Onur: Şunu söyleyeyim hocam bize üniversite okumanıza gerek yok okuyamazsınız diye yetiştiriyorlar. Ben eşit ağırlık seçtiğimde görme engelliler kitap basım merkezindeki bireyler benim hata yaptığımı söylediler. Ben neden hata yapayım eşit

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
		ağırlık seçtim diye. Atla deve değil, bir tane matematik var. Zaten bir tane matematik olduğu için seçtim (güler).
Kaygı	Görme engelli bireylerin kaynaştırma eğitimi uygulamalarına hazırlıksız olması, bu uygulamaların farklı veya güç olduğunu düşünmesi ve stres duygusu yaşaması.	Özgür: Liseye başlamadan önce bende çok fazla aşırı bir korku vardı. Çünkü sekiz yıl aynı benim gibi insanlarla aynı anda okuyup şimdi liseyi görenlerle aynı anda okumak, biraz bilmiyorum değişik geliyordu bana. Hatta ben okulun ilk haftası ilk günü eve geldim ve şey stresten havale geçirmiştim, bir hafta hastanede kaldım stresten dolayı sonra alıştım.
Görsellik	Harita, şekil ve tablo gibi görsel unsurlar içeren kavramları anlamakta güçlük yaşama veya söz konusu unsurların yeterli betimlenmemesi ve/veya uygun materyallerin kullanılmaması	Cahit: Tablolardan grafiklerden bir de şu 9. sınıfta bizim paralel meridyen mevzumuz vardı, onlar matematiği çok anımsatır ve matematiksel işlem gerektirir. Mesela onlar bana çok zor geliyordu, matematik de 9.sınıfta çok zor geliyordu.
Ses kaydı sorunu	Ses kayıtlarını dinlemenin güçlüğü / metinleri, soruları veya ders notlarını ses kaydına alması için okuyucu bulma güçlüğü	İlker: Sadece dershanede, üniversitede ses kaydı alıyordum. Ders kaydı da çok şey bir iş, hamallık diyebilirim. Çünkü neden biliyor musunuz, 40 dakikalık kayıtta belki 10 dakikalık bilgi var. Siz o 10 dakikalık bilgiyi alabilmek için 40 dakikalık kaydı dinlemek zorunda kalıyorsunuz. O yüzden çok kullanışlı olduğunu düşünmüyorum. Çok çabuk vazgeçtim ondan, onu söyleyebilirim.
Sınavlarda yaşanan sorunlar	Okuyuculardan kaynaklanan sorunlar (motivasyonu etkileme, diksiyon sorunu, işaretleri okuyamama), sınav süresinin yetersiz olması, öğretmenden kaynaklanan sorunlar	İlker: Ama bana bir okutman gelseydi, orada bana soruları okumakta sıkıntı yaşasaydı veya okurken öf püf deseydi ben bunlardan bahsedemezdim size […] asla küçümsemiyorum bakın, şive denen bir şey var. Artikülasyon bozukluğu denen bir şey var. Anlayamamak neyi gerektirir […] şöyle söyleyeyim ben size, okutuyorum 'Tekrar okur musunuz?' dediğimde (derin bir nefes alarak kafasını sağ tarafına çevirir) yaptığınızda ne hissettiğini anlıyorum.

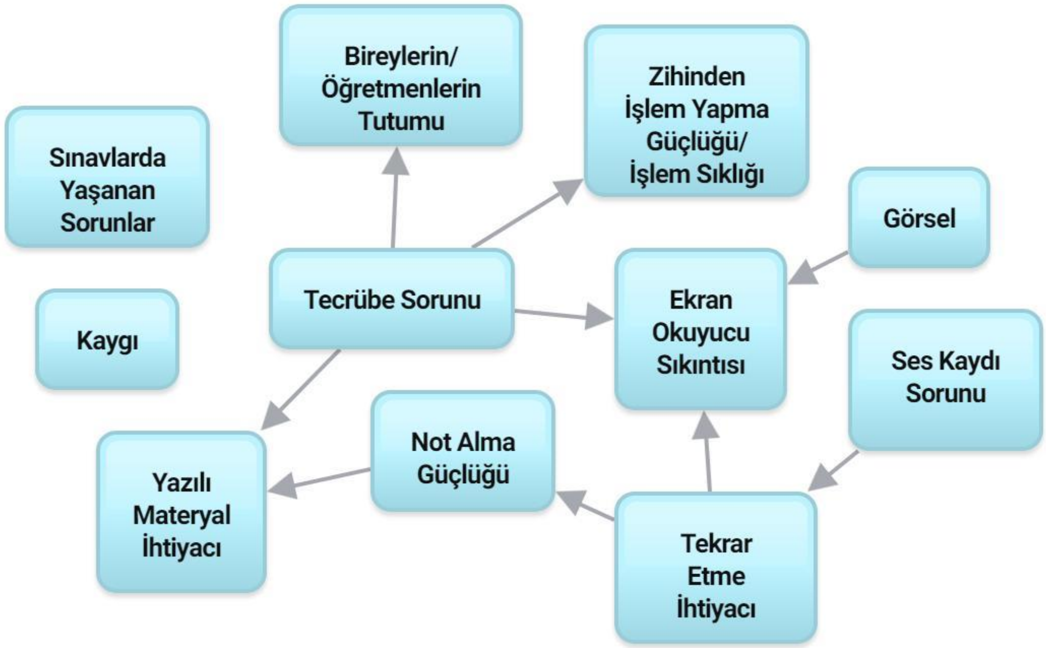
Görme engelli bireylerin eğitim ortamlarında genellikle yaşadıkları sorunlar ve uygulamalara dair ihtiyaçlar kategorileri (bkz. Tablo 8) incelendiğinde *eğitim materyalleri*, *öğretmen*, *eğitim-öğretim uygulamaları* ve *duyuşsal davranışlar* başlıkları altında ele alınabileceği gözlenmektedir. Bu başlıklar görme kaybı oranına göre değişmediği gibi sınıf düzeyi vb. gibi bir değişkene göre lineer (doğrusal) bir ilişki içerisinde de değildir. Katılımcılardan elde edilen veriler incelendiğinde başlıklar arasında ilişkiler olduğu, bazı ihtiyaçların veya sorunların birbirine bağlı meydana geldiği söylenebilir. Bu nedenle kategorilerin tamamamen bağımsız üst temalar altında toplanması mümkün olmamaktadır.
Örneğin aşağıda Seda' nın ifadeleri yer almaktadır:

Seda: Okuyucu desteğine gerçekten ihtiyaç duyduğum zamanlar oldu özellikle test çözme sürecinde çünkü bizim bence en büyük eksiğimiz bu okuyucu. Çünkü test kitaplarını kabartmaya dönüştürmediler veya kabartmayı boş verin gerçekten okunabilir simgelerle bir bilgisayar formatına da dönüştürmediler.

Burada yazılı materyallerin eksikliği vurgulanırken, beraberinde okuyucu ihtiyacına değinilmektedir. Ayrıca ekran okuyucularının yetersiz kaldığı noktalar vurgulanmaktadır. Yazılı materyal ihtiyacı ve öğretmenlerin Braille yazı ve görme engelli bireyler ile eğitim uygulamalarındaki tecrübe eksikliğinin birbiri ile olan ilişkisi Seda' nın aşağıdaki ifadesinde yer almaktadır:

Seda: Zaten hoca hiç bilmiyor bizim Braille kitapları, normallerle aynı aslında. Ama bir şekil alıyor mesela Braille kitapta, şekli betimlemiyor. Aşağıdaki şekle bakınız diyor, o şekil yok. O zaman ben tek başıma faydalanamıyorum kitaptan öyle olunca.

Bu bağlamda kategoriler ve bu kategorilerin birbirleri ile uygulanmasındaki ilişkileri incelendiğinde Şekil 29' de yer alan ilişki ağı gözlenmektedir.



Şekil 29. Görme engelli bireylerin genel eğitim sorunları ve ihtiyaçları kategorileri ilişki ağı

Tablo 8 yer alan ve Şekil 29' de aralarındaki ilişkinin belirtildiği söz konusu kategoriler başlıklar altında ele alındığında *eğitim materyalleri*, *öğretmen*, *eğitim-öğretim uygulamaları* ve *duyuşsal davranışlar* ortaya çıkmaktadır. Eğitim materyallerinden kaynaklanan sorunlar ve ihtiyaçlar zihinden işlem yapmanın güçlüğü, not tutma güçlüğü, yazılı materyal ihtiyacı, ekran okuyucu sıkıntısı ve ses kaydı sıkıntı olarak ele alınmıştır. Öğretmenlerden kaynaklanan sorunlar tutum, tecrübe sorunu, sınavlarda yaşanan sorunlar olarak dikkat çekmektedir. Eğitim-öğretim uygulamalarında yaşanan sorunlar ise sınavlarda yaşanan sorunlar, tekrar etme ihtiyacı, görsel, not tutma güçlüğü olarak sıralanabilir. Son olarak duyuşsal davranışlardan kaynaklanan sorunlar ise kaygı ve bireylerin tutumu kategorilerinden oluşmaktadır. Ancak bu kategorilerin birbiri ile ilişkili olduğunu tekrar vurgulamakta yarar vardır. Şekil 29' de okların belirttiği yön bir kategorinin diğerinin meyadana gelmesinde rol aldığını göstermektedir. Örneğin; görsel metinlerin ekran okuyucular tarafından betimlenememesi ya da not tutma güçlüğünün yazılı materyal ihtiyacını doğurması bu ilişkilerin anlaşılmasından önemli kategorilerdir.

Görme engelli bireylerin eğitim ortamlarındaki uygulamalara ve öğrenme süreçlerine dair elde edilen bulgulara Tablo 9’ de yer verilmiştir. Burada elde edilen kategoriler eğitim-öğretim uygulamalarındaki ihtiyaçlarından ya da sorunlarından ziyade görme engelli öğrenciler için kazanımı edindirmenin yanı sıra etkili uygulamalar tasarlama süreçlerine ışık tutacak bulguları içermektedir. Görme engelli bireyler için tasarlanacak olan sınıf uygulamalarında dikkate alınması gereken noktalar Tablo 9’ da yer alan kategorilerde betimlenmektedir. Bu kategoriler incelendiğinde öğrenme ve öğretme stratejilerinden ders tasarlama süreçlerine, eğitim materyallerinden uygulama süreçlerine ve sınıf düzeninden öğretmen rollerine pek çok önemli başlığın yer aldığı görülmektedir. Buradan elde edilen bulgular tahmini öğrenme yol haritalarını ortaya çıkarma ve protokolleri tasarlama süreçlerine ışık tutmaktadır.

Tablo 9

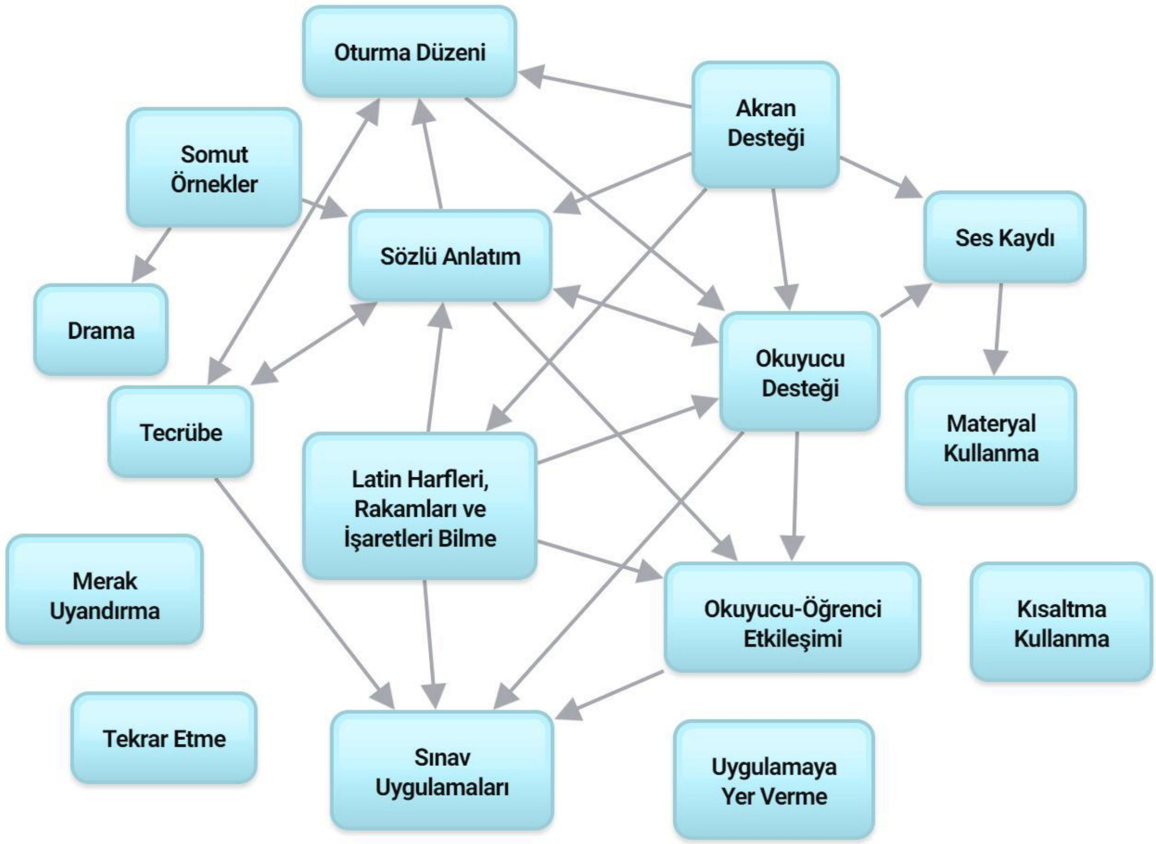
Görme Engelli Bireylerin Eğitim-Öğretim Uygulamalarına İlişkin Bulgular

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
Sözlü anlatım	Tahtada yazan notları, matematiksel işlemleri, sembolleri veya işaretleri betimleme, tasvir etme veya ifade etme	Aydın: Tahtaya bir şey çiziyor ise bir üçgen çiziyor ise A yukarda B aşağıda C sağda gibi (eli ile masaya üçgen çizerek), sağ sol yukarı aşağı gibi tarif ediyor . İlker: Arada sırada "hocam işaret ederek anlatmasanızda adını mı söyleseniz" falan sevimlilikler şirinlikler yapıyorum. Hani ben de anlasam diye.
Tecrübe (sınıf öğretmeni ya da destek eğitim uygulamaları öğretmeni için)	Öğretmenlerin görme engelli birey(ler) için sınıf uygulamaları tasarlama, ders anlatma ve görme engelli birey(ler) ile iletişimde bulunma becerilerinin gelişmiş olması	Aydın: Lise ne yapacağız nasıl yapacağız bahsettiğiniz gibi, ama benim en büyük avantajım abim de yine aynı şekilde görmüyor. Benim önümden gitti, ben onu hep peşinden takip ettim. Söylemem şu ki aynı liseye gittim, dolayısıyla gittiğimde hocalar beni tanıyor gibiydiler. Abimi biliyor oldukları için. Orada çok fazla bir zorluk çekmedim.
Oturma düzeni	Görme engelli bireyin sınıfta oturduğu sıranın konumunun ve sıra arkadaşının önemli olması	Aydın: Hatta böyle sınıfta en ön sırada otururdum ki yani sürekli arka sıralarda olup da dikkat dağılımı olmasın diye en ön sırada otururdum. Sürekli hocayı takip ederdik. Çağatay: Benim yanımda gören bir arkadaş olurdu ve ben ön sıralarda olurdum, bu sayede yanımda oturan arkadaş daha rahat görebilirdi. Tahtayı bana da gördüğü kadarıyla aktarırdı ve bir süre o yazılar silinmezdi benim okumam için. Ben de o arkadaş sayesinde notlarımı alırdım.
Okuyucu desteği	Aile, öğretmen, akran, ekran okuyucu programlar (jaws, nvda, office lens, akıllı tahta için bluetooth kulaklık vb), sesli kitap okutma, ders materyallerini okutma, sınav sorularını okutma, yazılı kaynakları okutma vb.	Aydın: Genelde anne veya babamız İngilizce de harf harf okumak sureti ile takip ediyorduk. İngilizce bildiklerinden değil. Onur: 9 sınıfta değil de 10 ve 11. sınıfta ben matematik kitaplarını okuttum, birilerine okuttum kasetlere kaydettim onları dinledim.
Akran desteği	Grup çalışması, sözlü anlatım, ses kaydı alma vb. uygulamalarda görme engelli bireylere akranlarının yardımcı veya destek olması	Aydın: Matematiksel şeyleri genelde arkadaşlarla birlikte çalışarak. Haa şu şöyle ise o zaman bu böyledir falan grup çalışması yapıyorduk. Okuyucudan ziyade bir araya gelip, ev ortamında grup çalışması yapıyorduk yazılıdan bir kaç gün önce. İlker: Benim bütün başarılarımın altında başkalarının katkıları vardır ve bütün başarısızlıklarımın altında da benim katkım vardır. Gerçekten öyle düşünüyorum, çünkü bakın şöyle söyleyeyim, 7. sınıftan itibaren ben kuzenim ile aynı sınıfta okumaya başladım. Kardeşim benden bir üst sınıfta idi. Ben kardeşimden her şeyi bir sene sonra gördüm ve ben ondan, tecrübesinden faydalanarak öğrendim veya sınıftaki tahtayı takip etmemde veya notları almamda kuzenlerim yanımdaydı, o şekilde destek olundu.

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
Kısaltma kullanma	Braille yazı kısaltmaları, kelimeleri kısaltma, küptaş kasa da Braille karşılığı olmayan karakterleri kullanma, nokta ve çizgi kullanma vb.	Aydın: Bir normal kısaltmalar var bir de kendimiz uydurduğumuz, yani bilgisayar yazacaksam bgs yazdığım zaman o benim için bilgisayar olmuş oluyor. Matematikte de üçgen yazacaksam ü-nün yanına bir nokta. Seda: Mesela ben de şey vardır kısa bilgi notlarına bayılırım. Şey olur ya hani böyle küçük küçük kartlara yazılır falan. Bizim hocalarımız bazen öyle şeyler getirirdi bize. Küçük mesela bir cümle yazıyor sadece üstünde. Okuyorsun mesela onu anlıyorsun. Sadece aklında tutmaya yarıyor mesela.
Sınav uygulamaları	Okuyucu verme (öğretmen, akran veya alt sınıftan bir öğrenci), yazdırıp okutma, sözlü yapma, şekillerden muaf tutma, kolaydan zora veya akademik başarıya göre soruları seçerek çözme vb.	Çağatay: Sınavda çıkabilecek soruları sorarlardı. Matematik sorusunu benim için şekilsiz bir hale sokup bana o şekilde. Özgür: En iyi olduğum konuları çözmeye başlarım, genelde iyi başlamayı severim.
Ses kaydı	Okuyucu desteği veya destek eğitim odasındaki derslerde ses kaydı alma ve dinleme.	Çağatay: Teknolojik araçların bana şu anlamda faydası var, siz tek başına olsanız bile elinizde bir sesli kaynak olduğu zaman kendiniz çalışabiliyorsunuz ve sınava girdiğiniz zaman size bir okuyucu veriyorlar, onlar soruları okurken biz cevaplıyoruz ve bu bizim dinleme yetimizi arttırıyor. Çünkü biz dinleyerek sınavlara cevap veriyoruz. Bu anlamda yararı var. Onur: 9 sınıfta değil de 10 ve 11. sınıfta ben matematik kitaplarını okuttum, birilerine okuttum kasetlere kaydettim onları dinledim.
Materyal kullanma	Braille yazı-tablet, ses kaydı, küptaş kasa, daktilo, office programları, ekran okuyucu programlar, rulet, pergel, abaküs vb. somut veya teknolojik materyaller kullanma	İlker: Hazır materyaller yoktu da kartonlardan şekiller yapıyorduk, kesiyorduk, hamurları yapıştırıyorduk. Onur: Ben ön sırada oturduğum için şunu yapardı, tahtaya çizdiği şeyi aynı anda hemen tellerle ya da kalemlerle oluşturup bir eli bende bir eli böyle tahtada, böyle sınıfa tahtada gösterirken bir eli benim elimi tutar, bu bu gösterir öyle devam ederdik.
Not tutma	Telefon, bilgisayar (word, not defteri uygulamaları), tablet vb. teknolojik veya somut materyaller yardımı ile not tutma	İlker: Braille çok aktif kullandığımı diyebilirim, hem eğitim-öğretim hayatımda hem üniversite hayatımda, tablet kullanıyordum.
Okuyucu-öğrenci etkileşimi	Okuyucu desteğinin yer aldığı uygulamalarda görme engelli bireyin not aldırma, işaret kullanımı ve okutma becerisi gibi yeterliklerinin olması ve okuyucunun bireyin yönlendirmelerini dikkate alması	Çağatay: İşe zihin devreye giriyor ve sürekli hatırlamak için ben hangi sayının yanına hangi işareti koyduğumu, hangi sayıların olduğunu, problemin hikaye kısmı neydi sorularını sürekli sorarım ve sürekli yazdırırım. Onur: Biraz bu dili bana oturttu, ben de okuyacak kişiden zaten bunu vurgulamasını ya da ayırmasını, mesela payı okuyorum ya da paydayı okuyorum diye ayırmasını, bölü işaretini bölü olarak söylemesini ya da mesela pay payda için olan bölüyü farklı tonlamayla ya da işte işlem bölüsünü farklı bir tonlamayla söylemesi

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
		gerektiğini zaten okuyucuya ben kendim ifade ettiğim için okuyan kişi de ona dikkat edince, ben artık rahatlıkla onu anlar oldum.
Somut örnekler	Kavramların anlaşılması veya tanımlanması için somut nesneler yardımı ile açıklama	Çağatay: Bir kavram üzerine bir tanım yapılıyor ve siz onun ne olduğunu anlayamıyorsunuz, bunu da örnekler sayesinde somut bir şeyler olması lazım yani somutlaştırarak anlardım soyut şeyleri, çünkü bilmiyoruz görmüyoruz, mesela renkler konusunda söyleyeyim insan renkleri açıklayamaz. İşte yani örnek veriyorum yeşil rengini nasıl tanıtacaksın kapalı bir renk desen siyah da kapalı, yani o yüzden daha böyle somut bir şeyler vermesi lazım. Mesela işte yeşil bir meyvenin rengidir, atıyorum bir tane meyve söyler onun rengi yeşildir der. Erik.
Tekrar etme	Kavramların veya konuların öğrenilmesi için dersin, yazılı ve sesli materyallerin vb. tekrar edilmesi.	Çağatay: Sözel derslerim için düşünecek olursak aslında çok tekrar edilerek anlayabilirim.
Uygulamaya yer verme	Örnek ve alıştırmalara yer verme, sunum yaptırma vb. uygulamalar ile dersin desteklenmesi.	Çağatay: Sayısal dersleri de örneklerle, pratiklerle kendime göre bulduğum yöntemlerle çözebilirim. Cahit: Slayt hazırladım anlattım sınıfta gayet güzel bir anlatım oldu ve bunun sayesinde 56 Edebiyat sorusundan LYS de 50 yaptım.
Merak uyandırma	Sınıf uygulamalarında ilgi çekici, merak uyandırıcı bilgilere, problemlere, matematik tarihine, bilmecelere vb. yer verme.	Cahit: Matematiğin tarihini anlatmazlar hiç bir zaman, işte Pisagor teoremi ya bu Pisagor kim azıcık söz edin mesela ben kitaplardan duymadım. Fermat teoremi diye bir şey var kitaplardan okumadım, ama Fermat teoremini bir tane yine İsviçreli bir yazar var Stieg Larsson, milenyum serisi var. Onun kitaplarını da okurken yine Fermat teoremiyle karşılaştım. Çok ilginç bir teori Fermat teorisi, bu da 1990' lı yıllarda çözülebilmiş o da bilgisayar yardımıyla da ne kadar doğru o da şüpheli tabi *a* küp eşittir *b* küp öyle bir şeydi.
Drama	Görme engelli bireyin elini tutarak çizme veya avuç içine çizme, bireye hayal ettirme, canlandırma vb. uygulamalar ile zihin şemaları oluşturma	Cahit: Ankara savaşını yapmıştık arkadaşımla ikimiz, benim yürüme engelli arkadaşım vardı o topal Timur olmuştu afedersiniz, ben de kör Yıldırım olmuştum. Sınıfın yarısı benim ordum olmuştu, yarısı onun ordusu olmuştu. Mesela ben bu savaşı tarihine kadar hatırlarım 1402 Ankara Savaşı ve Fetret Devri'ni de çok iyi hatırlarım ama bunu mesela buna borçluyum. Özgür: [...] Sonra matematikte eskiden şey yaparlardı bazı konuları oyuna dönüştürürlerdi öyle anlatırlardı.
Latin harfleri, rakamları ve işaretleri bilme	Görme engelli bireylerin latin harflerin, rakamların, işaretlerin ve sembollerin vb. nasıl yazıldığını, okunduğunu, kullanıldığını vs. bilmesi.	İlker: Sınava girince işime yarıyordu. bilmiyorum doğru hatırlıyor muyum, kök böyle miydi? (kapsama işaretini gösterir) U muydu? Yok o kesişim. Şimdi kardeşim bana bunları anlattığında, ben onları sınavda kullanıyordum. Çünkü sınava girdiğimizde sınavımıza giren her öğretmen matematik bilmeyebiliyordu, bu çok tehlikeli. Mesela işte ters U var diyorlardı. ben de anlıyordum ki kesişim bu. Bu noktada işime yarıyordu ama matematiği anlamak konusunda bir işe yaramıyordu. Onu net söyleyebilirim. Onur: Benim savunduğum şey şu bizim görenlerin dilini yazı dilini oturtmamız lazım. Çünkü şöyle oluyor, sınıfta hoca diyor ki bu buradan gitti bu buradan geldi, aşağıdaki onu götürdü, yukarıdaki... benim yazımda aşağı yukarı yok, her şey yan yana, Türkiye'deki o kodlama sisteminde.

Tablo 9 ile görme engelli bireyler için eğitim ortamlarının ve uygulamaların tasarlanmasında dikkate alınması gereken noktalar belirlenmiştir. Elde edilen bulgular akran, aile ve öğretmen desteği ile görme engelli bireylerin yakınsak gelişim alanı ilkelerini yansıtmaktadır. Öğretim stratejileri seçimlerinde sözlü anlatımın görme engelli bireylerin eğitiminde önem arz etmesi beklenen bir bulgu olarak karşımıza çıkmaktadır. Elde edilen kategoriler, temalara ayrılmak istendiğinde kategorilerin aralarındaki ilişkilerden kaynaklı olarak birbirinden bağımsız temalar elde etmek mümkün olmamıştır. Şekil 30' da kategoriler arasındaki ilişkiler oklar yardımı ile gösterilmiştir. Çift yönlü oklar karşılıklı bir etkileşimi temsil ederken, tek yönlü oklar kategorinin işaret edilen kategoriye katkısı veya bu kategori ile ilişkisi olduğu anlamını taşımaktadır.



Şekil 30. Görme engelli bireylerin eğitim-öğretim uygulamaları bulgularına dair kategoriler

Şekil 30’ da temalar arasındaki ilişkiler göz önüne alındığında bazı kategorilerin doğrudan veya dolaylı olarak diğer kategoriler ile ilişkili olduğu görülmektedir. Onur’ un aşağıdaki ifadesi kategoriler arasındaki ilişki için açıklayıcı bir örnek sunmaktadır:

Onur: tahtada bana sesli, yani yazdıkları her şeyi güzelce sesli okumaya çalışıyorlardı öğretmenlerim, yazarken eksik kalabilecek durumlarda yanımdaki arkadaşımı her zaman tembihliyorlardı. Ben de zaten bir şekilde iletişime geçiyorsunuz, artık arkadaşınız oluyor. Dolayısıyla siz de artık hani isteyebiliyorsunuz ama onlar yine de gözetiyorlardı. Ön sırada oturuyordum zaten bir şey olduğunda yine beni gözetiyorlardı.

Onur’ un da ifade ettiği gibi görme engelli bireyler için sözel anlatımın önemi aşikar bir bulgudur. Ancak burada öğretmenlerin kaynaştırma öğrencilerine dair tecrübeleri ile sözel anlatım stratejisi arasındaki ilişki söz konusudur. Ayrıca sadece öğretmenlerin değil akranlarının da desteği vurgulanmaktadır. Bu temalara ek olarak okuyucu desteğinin sözel anlatımdaki yerinden ve akran desteğinin bu husustaki yerinden bahsedilmektedir.

Sözel anlatım ile ilişkiler incelendiğinde oturma düzeninin de öneminden bahsedilmektedir. Aşağıda Onur’ un ifadesi bu durumu örneklendirmektedir. Ayrıca görme engelliler ile bireysel öğretim uygulamasında materyal kullanımın önemi de dikkat çekmektedir.

Onur: Ben ön sırada oturduğum için şunu yapardı, tahtaya çizdiği şeyi aynı anda hemen tellerle ya da kalemlerle oluşturup bir eli bende bir eli böyle tahtada böyle sınıfa, hani tahtada gösterirken bir eli benim elimi tutar bu bu gösterir öyle devam ederdik.

Öğretim uygulamalarında ve özel olarak sınavlarda görme engelli bireylere sözel anlatım ve okuyucu desteğinin yanında okuyucu ile birey arasındaki iletişimin sağlanması da önem arz etmektedir. Burada sadece okuyucunun matematiksel dile hakim olması değil, görme engelli birey ile iletişimleri de öneme sahiptir.

Onur: [...] biraz bu dili bana oturttu ben de okuyacak kişiden zaten bunu vurgulamasını ya da ayırmasını mesela payı okuyorum ya da paydayı okuyorum diye ayırmasını, bölü işaretini bölü olarak söylemesini ya da mesela pay payda için olan bölüyü farklı tonlamayla ya da işte işlem bölüsünü farklı bir tonlamayla söylemesi gerektiğini, zaten okuyucuya ben kendim ifade ettiğim için okuyan kişi de ona dikkat edince, ben artık rahatlıkla onu dinler, anlar oldum.

Onur’ un yukarıdaki ifadesinde sözel anlatımda okuyucu desteğinin nasıl şekillenmesi gerektiği ve birey ile etkileşiminin nasıl oluşturulması gerektiğine dair bulgular yer almaktadır. Burada görme engelli bireyin okuyucuyu yönlendirmesinin önemli bir beceri olduğu dikkat çekmektedir. Okuyucu ve birey iletişiminde bir diğer vurgulanması gereken nokta görme engelli bireyin latin harfleri, rakamları ve işaretleri bilmesi ve anlamasıdır.

Onur: [...] okuyucuya ben bunu tarif ettiğim için, başta ben görme engelli arkadaştan eğitim aldığımda normal yazıda matematik nasıl ifade ediliyor, mesela o köklü ifade dediğimiz gibi nasıl oluyor, iç içe kökler var, kuvvetler farklı, bunlar nasıl oluyor? Basamaklandırılmış rasyonel sayılar işlemi, merdiven işlemler, bana şekli kafamda nasıl canlandırabileceğimi öğretti, bana konu öğretmedi. Onu demeye çalışıyorum, matematiğin dilini öğretti. Ondan sonra kitaplarda zaten okunduğu zaman bütün teoremler, çıkarımlar hepsini kitap anlatıyor zaten, basamak basamak zaten hepsini tek tek yazıyor. O yüzden anlamak zor olmadı.

Yukarıdaki ifadede matematiksel dil kullanımın görme engelli birey ile okuyucu arasındaki etkileşimde yeri vurgulanmaktadır. Bireyin latin harfler ve rakamlar ile matematiksel dil ifadelerine hakim olması matematik öğrenmesi için sahip olması gereken bir beceri olarak söz edilebilir.

4.1.1. Genel Eğitime İlişkin Sorunlar, İhtiyaçlar ve Öğrenme Ortamları Uygulamalarının Görme Engelli Bireylerin Tahmini Öğrenme Yol Haritasının Belirlenmesine ve Öğretim Deneyi Sürecine Katkıları

Görme engelli bireylerin eğitim uygulamalarındaki sorunları, ihtiyaçları ve etkili bulunan öğretim uygulamalarına dair bulgular incelendiğinde öğretim deneylerinin tasarlanmasına ilişkin aşağıdaki kritik durumlar elde edilmiştir:

- Bireysel öğretim ortamları tasarlanması,
- öğretim uygulamalarında kullanılan yazılı kaynaklar veya somut materyaller Braille yazı ile desteklenmesi,
- öğretim uygulamaları sürecinde hızlı not tutmalarını sağlayacak bir materyal kullanılması,
- görme engelli birey ile iletişim üst düzeyde sağlanması, özellikle öğrenci Latin yazıda matematiksel dile hakim olması ve öğretmen/araştırmacı Braille yazıda matematiksel dil kullanımı bilmesi,
- öğretim uygulamalarında görsel unsurlar detaylı açıklanması,
- matematiksel işlemler adım adım bireye uygulattırılması,
- akranları/Okuyucu ile uygulamalar yapabilecekleri ortamlar tasarlanması ve
- somut örnekler ve günlük hayat örnekleri içeren uygulamalara yer verilmesi önem arz etmektedir.

Bahsi geçen kritik durumlar görme engelli bireylerin tahmini öğrenme yol haritalarını belirlemek için görüşme protokolünde mümkün olan en uygun soruları tasarlamamıza zemin oluşturmaktadır. Böylece protokolde yer alan sorular için seçilmesi gereken stratejiler, klinik görüşmelerde araştırmacının kullanacağı dil ve tutum, problemlerin yapısı ve kullanılacak materyallere dair ön bilgi edinilmiştir.

4.2. Matematik Dersine İlişkin Sorunlar, İhtiyaçlar ve Öğrenme Ortamlarındaki Uygulamalar

Görme engelli bireylerin matematik derslerinde kavram öğrenme ve öğretme uygulamalarında, ulusal veya yazılı sınavlarda yaşadıkları ve günlük hayatta ihtiyaç duydukları matematiksel işlemlere dair güçlükler, sorunlar ve ihtiyaçlar aşağıda Tablo 10' da kategoriler altında yer almaktadır. Tablonun incelenmesi elde edilen bulgulara bütüncül bir bakış açısı sunacağı düşünülmektedir.

Tablo 10

Görme Engelli Bireylerin Matematik Dersine İlişkin Sorunları ve İhtiyaçları İçin Kategoriler

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
Tutum (öğretmen, okuyucu, akran vb.)	Bireylerin ve öğretmenlerin görme engelli bireylerin matematik öğrenemeceğine dair tutumları veya matematik dersine ait her kazanımı algılayabileceklerine dair tutumları	Aydın: Geometride görmeyenlerin en zor öğreneceği, hatta liselerde görmeyenler goemetriyi veya trigonometriyi öğrenemez şeklinde üniversitede de rastladım ben en problemli konu o. Cahit: Çünkü anlatan hocadan demiştim daha önce anlatan hocayla içler dışlar çarpımında dersime giren hoca beni bitkiymiş gibi görüyordu dürüst konuşmak gerekirse muamele buydu yani yemini ver suyunu ver güneşte beklesin. Bu muamele açıkcası üzüyor ve o insandan soğumana neden oluyor.
Materyal ihtiyacı	Yazılı materyallerin olmaması ve somut materyallerin (tablet, daktilo, küptaş kasa vb) kullanışsız olması, derste ve matematiksel problem çözerken not alamama problemi	Çağatay: Sürekli tak çıkar yapıyorsunuz tablette, bi daktilo edinme imkanı da olmadığından siz tak çıkar yapıyorsunuz ve bu daha yavaş olmanıza ve soruları biraz hatalı çözmenize neden oluyordu. Ben de bunun yerine küptaş kasa yani daha değişken materyaller kullanmaya başladım. Sonuçta Braille alfabesi sabit duruyor. Biz küptaş kasa kullandığımız zaman daha değişken hale geliyor ve biz denklemleri problemleri daha rahat çözüyoruz. […] Aslında en büyük hatam tabletle yapmak oldu. Çünkü küptaş kasayı o zaman çok keşfedememiştim, bilmediğim işaretleri kullanabileceğimi hesaba katmamıştım. O bakımdan bana bir fayda sağlamadı tablet, hatta biraz yavaşlattı beni sanki. İlker: Tablette yapıyordum denklemimi, ama o denklemin matematiksel işlemlerini siz yazıyorsunuz ya, sizin yansıttığınızın yarısını yansıtıyordum ben tablete. Üçte birini yansıtıyordum. Ama soruyu çözüyorum. Orada tablet benim için sadece not tuma yöntemiydi. Ben orada denklemi çözüyorum ya, birisi açıp o çözümü incelesin, hangi denklemi çözdüğümü bilir, ama nasıl çözdüğümü anlayamayabilirdi. Eğer bu bir yöntem ise, çünkü gidiş yollarını yazmıyordum oraya ben, içler dışlar çarpımı yapayım da bilmem ne olsun, yoktu yani orada görünmüyordu.
Matematiksel İşlemler	İşlemlerin uzun olması, işlemleri not tutma probleminin olması, işlemleri veya işlem sıralamasını hatırlama veya hafızada tutmanın güçlüğü	Çağatay: Ona rağmen sevmiyorum çünkü zihinden yapılamıyor, yazarak yapılabiliyor. Bu çarpma işlemi kendi kafanızdan yapmak zorundasınız. Çünkü sayı çok büyüyecek […] İki bilinmeyenli, zaten tek bilinmeyenliği ben zihinden çözemiyordum. İki bilinmeyenliği yazmam gerekecek ve hata yapma oranım yükselecek, o anlamda sevmiyorum. İlker: İş yükü. Görme engelli açısından çok zor şeyler bunlar. Şimdi dönüp bakıyorum da polinomların çözülmesi baya kafanızı yoruyor. Sınava girdiğimi hatırlıyorum en son KPSS' ye girdiğimde hatırlıyorum. Sınavda kalan en son yüzde problemleri falan, onları çözememiştim, o kadar yorulmuştu kafam. 98 ile 186 toplamakta o kadar zorlanmıştım ki bunu hatırlıyorum. Özgür: Çok karışık ya çok zor. Nasıl desem? Bi kaç tane denklem peşpeşe. Bakıyorum çok uzun ya, diyorum kesin bu zor ben bunu çözemem diyorum. Öyle kafamda bitiriyorum.

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
Görsellik	Grafik, şekil, tablo vb görsel unsurları anlamlandırmakta zorlanma veya bunların görme engelli bireye betimlenmesinde sorunların veya eksikliklerin olması	Cahit: Grafikler, şekiller ve mesela zihinden yapamadığım, artık zihnin ötesine geçen uygulamalarda zorlanıyordum. Onur: Bir de şey çok kötü oluyor ulusal sınavlarda şekilli soruları çıkarıyorlar ki şekilli soru tarif edildiği zaman bazen özellikle yapması çok daha kolay oluyor. Getiriyorlar onun yerine şeyi soruyorlar, ALES te falan bunu soruyorlar tablo soruları soruyorlar. Tabloyu akılda tutmak, şekilli gibi durmuyor, ama akılda tutmak daha zor. Ya da çok karmaşık bir harfli ifade soruyor, çarpanlara ayırma soruyor. Benim için müthiş bir zaman kaybı oluyor.
Ekran okuyucu sorunu	Matematiksel işlemler, grafik, tablo vb. görsel unsurları ekran okuyucu programların seslendirememesi	Cahit: Ben akıllı tahta için yeni bir sistem geliştirmiştim. Benim uyguladığım yöntemdi. Akıllı tahtanın fonksiyonlarını kaybetmeden, yani kendi fonksiyonlarını kaybetmeden akıllı tahtamız sadece ekrandaki yazıların seslendirmesini sağlayan bir araç kullanıyordum. Mesela Javs gibi onun ekran okuyucusunu kullanıyordum. Yine tahtanın Türkçeleştirip Türkçe ses dosyası yüklüyordum. Hocanın hiçbir faaliyetini etkilemiyordu. Bluetooth kulaklığıyla kendime bağlıyordum tahtayı böyle dinliyordum. Bazı faaliyetleri ki bu çoğu derste işlevsel oluyordu, ama dürüst konuşmak gerekirse coğrafya ve matematikte pek işe yaramıyor. Çünkü sadece mesela şekil yazıyor orada saçma sapan şeyler söylüyor, grafiklere falan geldiğinde zaten maket program.
Okuyucu sorunu	Sınavlarda veya yazılı kaynakların seslendirilmesinde okuyucuların matematiksel dil kullanmaması, matematiksel işaret veya sembolleri bilmemesi, eksik veya hatalı okuması	Cahit: Kesinlikle matematiği bilen, matematiği bilmesinden geçtim matematiği bilmiyorsun hadi onu anladım da, matematiği bilmiyorsan dediğimizi dediğimiz yere yazabilecek kadar anlayabilen. […] Mesela -2, +2 var. Ben 2 yi artının yerine yaz dediğimde, artının yerine yaz demiyorum 2' yi yaz diyorum, adam gidiyor hangi tarafa yazayım diye sormuyor, kafasına göre yazıyor. Bunu yapmaması gerekiyor. En azından sorması gerek, çünkü zaten ben o arada hem işlemi düşünüyorum hem de sana yazdırmaya çalışıyorum. İkisini aynı anda yapmanın zaten yeterince sıkıntısını yaşıyorum. Bir de öyle olduğunda işlem yanlış çıkıyor, böyle bir hata yapıldığında. Seda: Yeni testleri okutamıyordum ya da okunmuşların bazıları sağlıklı oluyordu bazıları yanlış ya da eksik okunmuş oluyordu. Bir parantez bile atlamak aslında matematikte ciddi problem yaratıyor.
Braille Yazıda Matematik	Braille yazının matematiksel işlemlerde kullanışsız olması, matematiksel dil kullanımın ileri düzeyler için yetersiz olması vb.	Onur: 8. sınıfta 8'de de yine trigonometri konuları var. Mesela bana birim çemberi gösterip, ben anlamıyorum hocam, bu sinüs cosinüs bana çok soyut geliyor zaten kabartma yazı da hepsini yan yana yazıyorsunuz, bölüler çarpılar her şey birbirine karışıyor. Çünkü daha oturtamamışım hiçbir şeyi ve sorduğumda bana birim çemberi gösterdi ve sen bunu görüyor musun dedi az görmeme de dayanarak, dedim o kadar iyi göremiyorum falan o zaman ben sana anlatamam dedi. Yani bu dereceydi. Onur: Bizde mesela kök karakteri koyuyorsun, mesela normalde görenlerde şey var, ufak bir v-imsi bir çentik var. İşte onun içine kök şey kuvvet yazıyor. Ondan sonra uzun bir çizgi üste devam ediyor. Onun gittiği yere kadar kök devam ediyor, kökün kapsamı devam ediyor. Bizde öyle değil. Normal yazıda ş harfi olan 1-4-6 dan oluşan kabartma sembolünü oraya koyuyoruz kök işareti oluyor. Kökün kapsamı nerede başlıyor, nerede bitiyor sembolik olarak onu göstermek biraz ya zor ya da bize göstermediler.

Tablo 10 incelendiğinde, matematik dersi özelinde, genel eğitim ortamlarında görme engelli bireylerin sorunları ve ihtiyaçlarına paralellik gösteren bulgular elde edilmiştir. Burada farklılık arz eden kategori Braille yazı ile matematik öğrenme ve öğretmeye dair sorun ve ihtiyacı içermektedir.

Elde edilen bulgularda dikkat çeken bir diğer kategori öğretmenlerin görme engeli bireylerin matematik öğrenmelerine dair tutumlarıdır. Burada genel ön yargıların aksine öğretmenlerin görme engelli öğrencilerin her kazanımı başarabileceğine dair tutumları söz konusudur.

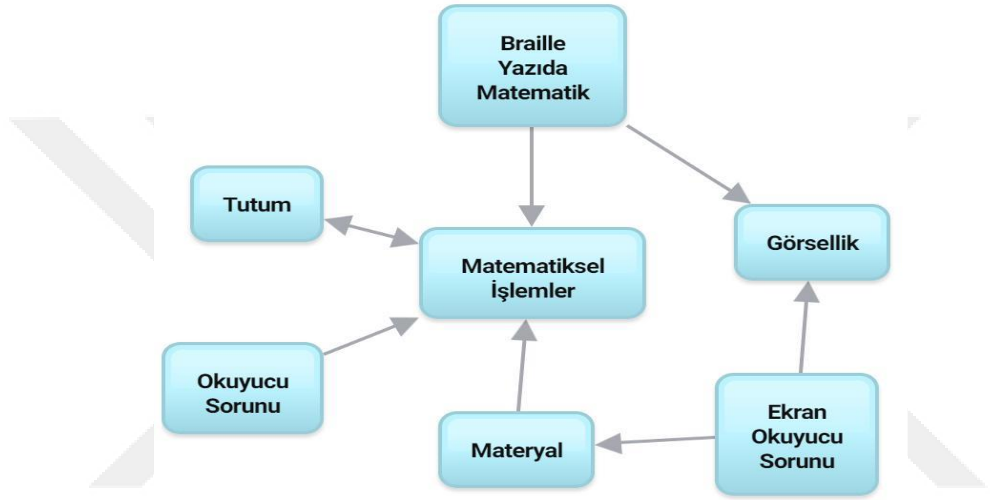
İlker: Ben kardeşimle geometri çalışıyordum. Çok saçma. Hiçbir şeyim yok benim elimde. Küptaş küp kasayı bilirsiniz, onunla biz üçgen çizerdik, açıortay çizerdik. İşte bak şurası a, şuranın iki katı bilmem ne yapıyorduk. Mesela grafik anlatmaya çalışıyor, bu sefer de mesela koordinat düzleminde analitik geometri anlatıyor bana. Ben koordinat düzlem üzerinde analitik geometri çözmek durumunda kalıyorum. Şu noktanın şu noktaya uzaklığının bilmem nesi. Bakın matematiksel terimlerde sıkıntı yok ama siz matematiği yaptığınız andan itibaren karşınızdaki bu sefer, matematiğin o doyumuna ulaştığı için mesleki doyuma ulaşıyor. Aslında baktığınızda, sizde bir başarıya ulaşmış oluyor ve diyor ki neden olmasın daha fazlası, bunu da yapabiliriz. Buna maruz kalıyoruz.

İlker' in ifadeleri yalnızca öğretmeninin tutumuna değil aynı zamanda materyal ihtiyacına da odaklanmaktadır. Aşağıda Çağatay matematik eğitimde kullanılan tablet ve küptaş kasa materyallerinin problem çözme sürecindeki sorunlarını ifade etmektedir.

Çağatay: Yapılabilir oluyor çünkü daha basit daha anlayabileceğim bir şekilde daha kısa. Uzun problemleri ben çok çözemiyorum ve onları teker teker yazmanız gerekiyor ve küptaş kasanın çok zorluğu olan bir kısmı var, sorunun sözel kısmını not edemiyorsunuz. Ama Braill de bunu elde edebiliyorsunuz, bu bazen iyi bazen kötü bir şey.

Matematik eğitimi uygulamalarına ilişkin sorun ve ihtiyaçlar da genel eğitim uygulamalarında olduğu gibi birbiri ile ilişkili olarak kategorilere ayrılmaktadır. Şekil 31' de oklar yardımı ile bir kategorinin diğeri ile ilişkisi temsil edilmektedir. Çift yönlü oklar ise her iki kategorinin de birbirini etkilediğini ifade etmektedir. Örneğin; yukarıda Çağatay' ın ifadesinde matematiksel işlemlerden kaynaklanan güçlüklerin materyal eksikliğinden doğduğu belirlenmektedir. Bir diğer örnek öğretmenlerin görme engelli bireyin matematiksel pek çok problemi çözebileceğine inansa bile işlemlerin uzun olmasıdan ve materyal eksikliğinden kaynaklanan bir güçlüğün olduğu belirtilmektedir.

Söz konusu sorunları ve ihtiyaçları gidermeye dair çözüm önerisi üretebilmek için uygulamalarda memnun oldukları hususları belirlemekte yarar vardır. Ayrıca görme engelli bireylerin matematik öğrenme ortamlarını, uygulamaları ve ders materyallerini tasarlamak için matematiksel kavramları nasıl daha iyi öğrendiklerini belirlemek gerekmektedir. Tablo 11' de görme engelli bireylerin matematik öğrenme ortamları için bulgulardan elde edilen öneriler yer almaktadır.



Şekil 31. Görme engelli bireylerin matematik dersine ilişkin sorunları ve ihtiyaçlarına dair kategorilerin ilişki ağı

Tablo 11

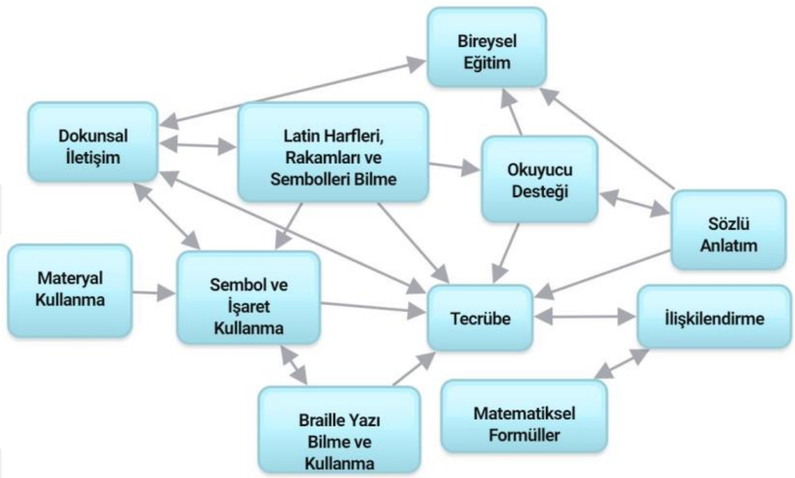
Görme Engelli Bireylerin Matematik Dersine İlişkin Öğrenme Ortamlarında Yer Alan Uygulamalar

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
Sembol ve işaret kullanma	Kıslatmalar, matematiksel işaretler veya semboller kullanarak betimleme. Bu işaret ve semboller bireylerin kendilerine özgü olabileceği gibi kelimelerde harf/karakter sayısı azaltma gibi kısaltmalar da olabilir	Aydın: Kabartma yazıda da kendime göre sembol bilmiyor idim. Yani 3' ün yanına bir işaret koyuyordum. Yanına 2 yazıyordum, haa o benim için 3' ün karesi anlamına geliyor idi veya zihnimde o şekilde değerlendiriyor idim. Çağatay: Ben kağıtla Braille çok matematik yapamazdım o yüzden küptaş kasayla *x* işaretini daha değişik bir nokta düzeniyle kendim karar verdim, işte bilinmeyene bilinmeyen bir noktayla tanımladım. O şekilde kendi kafamda belirlediğim semboller vardı.
Braille yazı bilme ve kullanma	Matematiksel semboleri ve işaretleri Braille yazıda kullanma	Aydın: Genel sembolleri öğrendikçe iş çok daha kolay oldu. Kabartma yazıda bütün hepsinin işareti vardı üs işareti, kök işareti, logaritma işareti veya ne bileyim integral işareti gibi. Onları öğrendikçe daha da kolaylaştı.
Materyal kullanma	Somut materyaller (küptaş kasa, yazı tableti vb), kabartma yazı veya üç boyutlu yazıcı çıktıları vb araç gereçlerin kullanılması	Çağatay: Sürekli tak çıkar yapıyorsunuz tablette, bir daktilo edinme imkanı da olmadığından, siz tak çıkar yapıyorsunuz ve bu daha yavaş olmanıza ve soruları biraz hatalı çözmenize neden oluyordu. Ben de bunun yerine küptaş kasa yani daha değişken materyaller kullanmaya başladım. Sonuçta Braille alfabesi sabit duruyor. Biz küptaş kasa kullandığımız zaman daha değişken hale geliyor ve biz denklemleri problemleri dahat rahat çözüyoruz. […] Koordinatı ilkokulda çizdik, kağıdın üstüne kabartma apsisi ordinatı olmak üzere çizdik trigonometride.
İlişkilendirme	Günlük hayatla matematiksel kavramları ilişkilendirme, görme engelli bireylerin yaşanmışlıklarını veya tecrübelerini dikkate alma, kavramın tarihçesine yer verme	Aydın: […] ya da hoca girişini mi düzgün yapamadı, ne işe yarar bu logaritma denen şey, onu bir türlü kavrayamadık. Ha ileriki zamanda ekonomi de biraz daha kavradık. Çağatay: Öğrenmek zorunda olduğumuz bilgiler var ki işte o sınav bilgileridir, işte havuz problemleri sanki ben günlük hayatta havuz mu dolduracağım, yani havuzla ilgili pek bi anım olmamıştı. O yüzden de çok gereksiz olduğunu düşünüyorum. Cahit: Böceklerim dışında nelerim vardı, mesela π sayısı onu da şeyler piramitler bizim için π sayısının eşliğiydi. Bunu hocamızın verdiği örnekten hatırlıyorum, piramitlerin π sayısına eşliğini, çünkü biliyorsunuz π sayısı 3 tür ve π sayısını Mısırlılar bulmuştur ve efendime söyleyeyim piramidin belli yerlerine denk geliyordu, belli ölçümler falan yapılıyordu.
Bireyselleş-tirilmiş eğitim	Birey ile birebir eğitim ortamı tasarlamanın yanı sıra akran desteği, uzman veya öğretmen desteği ya da aile bireylerinin	Cahit: Polinom neden zevkliydi onu ben de henüz kavrayamadım. Ama onu genelde yanımda beraber yaptığım arkadaştan kaynaklanıyordu, çünkü hem hocayla çalışıyordum polinomları ekstra bir de arkadaşla çalışıyordum. O yüzden zevk alabiliyordum.

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
	desteği ile matematik öğretiminin sağlanması	İlker: […] Ben bilgiyi nasıl alacağımı bilmem lazım ki matematikte öğretmeni yönlendireyim. Matematiğe dair hiçbir bilgim yoksa öğretmeni yönlendiremiyorum. Oradaki şey var dilemma var, yumurta mı tavuktan tavuk mu yumurtadan. Şimdi ben onu bildiğim için mi öğretmeni doğru yönlendiriyorum, öğretmen doğru anlattığı için mi ben doğru anlatabilme şeklini biliyorum. Ben mesela ikincisini düşünüyorum. Ama öğretmenden değil, kardeşimden kaynaklı olarak. Biz kardeşimle veya kuzenlerimle bana anlatma yöntemleri geliştirdik ve İlker matematiği nasıl anlar bunu beraber bulabildik. Sonrasında bana nasıl matematik anlatacağını öğretmene ben anlatıyordum. O yüzden bu da tesadüf değil. Onur: Liseye başladığımda biraz özel ders aldım 2-2,5 ay kadar görme engelli birisinden İktisat mezunu birisinden ve yeniden bir kör olarak bir görme engelli olarak matematiği nasıl yazıya dökerim nasıl anlarım bunu yeniden öğrenmiş oldum.
Latin harfleri, rakamları ve sembolleri bilme	Matematik eğitiminde Latin harfleri, rakamları ve sembolleri bilme veya kullanma	Aydın: Onu biraz da diğer öğrenciler ile anlaşabilmeleri için. Onur çok az görüyordu, hatta harfleri falan da az çok biliyor idi. (kağıt kalem alır) Ben mesela diyelim el yazısı kullanmam da buraya Aydın yazayım. Onur' a benim öğretme sebebim icabında alsın eline kalemi 2 karekök 5 artı 7 eksi 3 eşittir ne gibi yazabilsin. Arkadaşlarına gösterirken iletişim kurabilsin. Burada şöye bir durum çıkıyor bunu ben yapabildiğim sürece benim beynimde bir şey olduğunu arkadaş algılıyor daha bir alıcı gözle ilgileniyor. Öbür türlü lafla anlatırsan kendimi ifade etmekte zorluk çekerim, ama bu somut bir şey. Onun için ben izah ettim. Tabi biraz da kendi bildiklerini yanstımak da var. İlker: Ama sadece şey oluyordu sınava girince işime yarıyordu. bilmiyorum doğru hatırlıyor muyum, kök böyle miydi? (kapsama işaretini gösterir) U muydu? yok O kesişim. Şimdi kardeşim bana bunları anlattığın da, ben onları sınavda kullanıyordum. Çünkü sınava girdiğimizde sınavımıza giren her öğretmen matematik bilmeye biliyordu, bu çok tehlikeli. Mesela işte ters U var diyorlardı. Ben de anlıyordum ki kesişim bu.
Okuyucu desteği	Sınavlarda, derste veya evde matematiksel problemler, kavramlar, ders notları veya bireyin çözümleri için okuyucu desteği alması	Çağatay: O zaman yazan kişilerden yardım alıyorum. İşe zihin devreye giriyor ve sürekli hatırlamak için ben hangi sayının yanına hangi işareti koyduğumu, hangi sayıların olduğunu, problemin hikaye kısmı neydi sorularını sürekli sorarım ve sürekli yazdırırım. Özgür: Lisede nasıl yapıyordum, bazı hocaların sesli söylemesini istiyordum. Matematikte de arkadaşların defterlerini alıp, evde ben evdekiler okuyordu öyle çalışıyordum.
Matematiksel formüller	Formülleri hatırlamakta güçlük yaşama veya formüller yardımı ile problemlerin çözümünü kolay bulma	Çağatay: Kavramlara olan ilgim aslında mantıksal anlamda mantığıma uygun çözebilirim ben matematiği, hani bilinen formülleri kullanmaktansa daha yavaş daha sağlam daha kesin sonuçlar veren yöntemlerle çözerim matematiğe yaklaşımım budur.
Sözlü anlatım	Matematiksel işlemleri, denklemleri, grafikleri, şekilleri	Çağatay: Evet ve şöyle söyleyeyim matematik yaparken hani neyin nerden geldiği en ince ayrıntısına kadar öğretilmeli bana, en ufak bi toplama işleminde bile kendisi toplamak yerine yaparken bana da anlatmalı, bunu topluyorum bunu çıkartıyorum derken bile.

Kategori	Açıklama	Katılımcılardan Alıntı
	vb. betimleme, matematiksel dil kullanımına dikkat etme	
Tecrübe (öğretmen, destek eğitim uzmanı vb.)	Matematik öğretmeninin Braille bilmesi, görme engelli bireyin öğretmenden dönüt alması, okuyucu ile iletişiminin olması, öğretmenin ve öğrencinin matematiksel dil kullanımında ortak bir dil kullanması vb.	Çağatay: […] Çoğu öğretmen de maalesef çoğu görenlere yönelik anlatıyorlar, onda da mesela göstererek anlattıkları için daha rahatız, mesela işlem yaparken şunu şunu alacaksın diyor, neyi neyi alacaksın diyorum o arada takılıyorum. Ama halbuki ortada bir somut bir şeyler olsa, bir yazı yazılacak bir ortam olsa ya da hani belki gören öğretmen de bilse hafiften en azından sayıları bilecek kadar o zaman çok şey katacağını düşünüyorum. […] Yani şöyle sizin anlayıp anlamadığınızı sürekli sormak zorunda ve bu görmeyeni daha çok yoruyor. Mesela bir sürü işlem yapılacaktır bir sürü dediğim de hani o kadar çok değil de yine de bazı insanların yapamayacağı türde de olabiliyor onu demek istedim. Onu sürekli sormak zorunda, burayı anladın mı anlamadığın bir yer varsa sorabilirsin diye çok kişi de soramıyor. Onur: Mesela birine not aldırmak da bir beceri bence, bazen sınava giriyoruz bir okuyucu desteği oluyor ben not aldırıyorum mesela bir işlemi bir yere çok uzun oluyor. Diyorum ki şuraya kadar oku diyorum.
Dokunsal iletişim	Görme engelli bireyin elini tutup materyali, şekli, kabartmaları vs. hissetmesine yardımcı olma, bireyin eline sembolleri veya şekilleri çizme, bireyden şekilleri veya sembolleri avuç içine, masanın üzerine ya da deftere vb. çizmesini isteme	Çağatay: Mesela sıraya böyle yuvarlak bir şey, bu daire dedi, mesela atıyorum trigonometride de öyle mesela dörde ayırdı, bir yeri işte onunla alakalı şurda şu var, şurda şu var mesela konumlarını gösterdi mesela şekil çizdirdi. Ben onu zihinme çizdim yani […] o olayın üstünden bayağı bir zaman geçti ama aslında ben şöyle söyleyeyim, normal yazı öğrenirken de ben bu tekniği çok kullanırım. Mesela biri benim elimi tutar, kardeşim olsun, işte bir sembol çizdirir, o harfin anlamını söyler, ben de onu aklıma kazırım. Cahit: Elime şeklini çizerdi, mesela üçgen çizerdi böyle elime bir buradan bir burdan bir buradan üçgeni şöyle ikiye bölersen şöyle olur falan diye açıklamaya çalışırdı. Ben de zihnimde yapabildiğim kadarıyla yapmaya çalışırdım tabi […] Önce öğretmenimin eline çizmeden önce şekli bir kere kendi elimde çiziyordum zaten, sonra öğretmenin eline çiziyordum. Öğretmenim yanlışlarsa tekrar kendi elime çizip tekrar doğrulamaya çalışıyordum. Özgür: Mesela bir şekil çizdi hocam, bana bunu anlatın mesela bu kare nasıl oluşuyor, bu yuvarlak nasıl oluşuyor gibisinden sorular soruyordum. Mesela orijin falan var ya, bu mesela teğet falan hocam diyordum, bu nasıl oluşuyor diyordum. Bana geliyordu parmaklarıyla şöyle şöyle daire şeklini çizerek anlatmaya çalışıyordu. Mesela üst kısmı teğet, alt orijin gibi öyle anlatmaya çalışıyordu bazıları.

Tablo 11 incelendiğinde genelde eğitim uygulamaları için söz konusu olan kritik durumlar, benzer şekilde özelde matematik eğitimi için karşımıza çıkmaktadır. Farklı olarak genel eğitim uygulamaları için bireylerin genel olarak vurguladıkları okuyucu desteği ve sözlü anlatım iken, matematik uygulamalarında dokunsal iletişim ve bireyler ile öğretmenlerin tecrübeleri önem arz etmektedir. Matematik öğretimi için görme engelli bireylerin uygulamalardaki beklentileri ve bunlar arasındaki ilişki Şekil 32' de yer almaktadır.



Şekil 32. Görme engelli bireyler ile matematik öğretimi için öğrenme ortamlarında yer alan uygulamalara dair kategoriler

Kategoriler arasında birbiri ile ilişkisini göstermek için tek ya da çift yönlendirilmiş oklar kullanılmıştır. Bir kategorinin diğeri ile ilişkisi varsa bu yönde ok yardımı ile temsil edilmiştir. Aşağıda bu durumlar için örnek bulgular sunulmuştur.

Matematik dersi özelinde kategoriler arasında *sembol ve işaret kullanımına* dikkat çekmektedir. Söz konusu kategori materyal kullanımından etkilendiği gibi Braille yazı bilme veya Braille yazının matematiksel işlemlerde kullanışlı olmaması ile ilişkilendirilmektedir.

Çağatay: Şimdi x ve y nin küptaş kasada belli bir karşılığı yok. O yüzden ben de kendi kafamdan belirlediğim sembollerle kendi tanımladığım sembollerle çalışırdım. Hiç bilinmeyen, hiç kullanılmayan işaretleri kullanırdım yoksa karışabilirdi. [...] Siz rahatlıkla yani bir kağıt çıkarma derdi olmadan ya da işte silme derdi olmadan parmağınızla bastırarak rahatlıkla silebiliyorsunuz ya da yazabiliyorsunuz, ekleme yapabiliyorsunuz ya da bir satır falan kaydırabiliyorsunuz. [...]

Bulgularda dikkat çeken bir diğer nokta görme engelli bireylerin Latin harfleri, rakamları ve sembolleri bilmesidir. Öğrencinin bu bilgisi okuyucu ile iletişimi kolaylaştırdığı gibi öğrencinin zihninde matematiksel sembolleri, kavramları veya işlemleri algılamasında kolaylık sağlamaktadır. Cahit aşağıda bu duruma örnek sunmaktadır:

Cahit: [...] Zihnimde oluşması konusunda bana çok büyük faydaları olduğunu söyleyebilirim.

Matematiksel dil kullanımına hakim olmanın öneminden bahseden Onur, okuyucu ile iletişime vurgu yapmaktadır. Okuyucunun matematiksel dil kullanma ve sözlü ifade becerisinin de dikkat çeken bir diğer durum olduğu belirtilmektedir.

Onur: 2^2 de tamam bir sorun yok, 2 orada duruyor ama 2 üzeri 2x+1 diyor mesela tamam mı? Mesela artı nerede, yanında mı, sağında mı, solunda mı? Bunu nasıl ifade edeceğiz falan, onu mesela algılamakta ya da işte rasyonel ifadelerde hepsi bölü mesela şimdi yan yana pay payda ayıran çizgiye de biz bölü diyoruz. İşte işlem olarak da biz bölü diyoruz, işte işlem olarak da ifade ederken mesela ona da bölü diyoruz. Hangisi hangisini ifade ediyor falan tekrar buraya gitmiyorum, biraz bu dili bana oturttu. Ben de okuyacak kişiden zaten bunu vurgulamasını ya da ayırmasını mesela payı okuyorum ya da paydayı okuyorum, diye ayırmasını, bölü işaretini bölü olarak söylemesini ya da mesela pay payda için olan bölüyü farklı tonlamayla ya da işte işlem bölüsünü farklı bir tonlamayla söylemesi gerektiğini zaten okuyucuya ben kendim ifade ettiğim için okuyan kişi de ona dikkat edince, ben artık rahatlıkla onu dinler anlar oldum.

Sözel anlatım için kullanılan dilin ve açıklamaların detaylı yapılmasının önemli olduğu Seda' nın ifadelerinden açıkça görülmektedir.

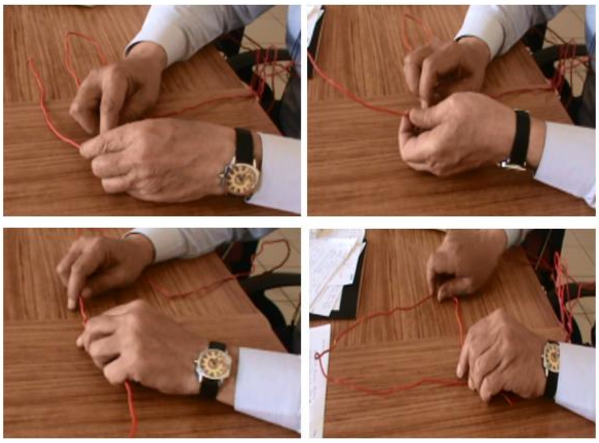
Seda: [...] Nasıl dağıtıyoruz 2 yi, 2x ile 2 yi çarpıyoruz 4x, orada 1ile 2' yi çarpıyoruz 2, 4x+2 oluyor değil mi Seda, dediği zaman o yazacağı her şeyi sözel olarak seslendirdiği zaman, aslında ben orda haa bu parantezin içine böyle dağıtılıyormuş gibi böyle hani anlayabiliyorum yani. O şekilde karşılık verebiliyorum, çözebiliyorum soruları.

Görme engelli bireyler için matematik problemlerinden çözüm stratejilerinden en sık başvurdukları tahmin ve kontrol etme (deneme yanılma) olduğu belirlenmiştir. Söz konusu stratejiyi tercih etiğini belirten Özgür, matematik formüllerine ihtiyaç duymadığını ve anlamasına yarar sağlamadığını aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Özgür: Mesela bir sayının 2 katının 4 fazlasının 3 eksiği, ben direk mesela sayıyı tutuyorum, direk topluyorum çarpıyorum. Mesela şey formüller var mesela bazı problemler 2n+1 gibi ben onları uygulamak yerine 2 ile çarpıyorum 3 e bölüyorum. Ben bunlarla hızlı hızlı *yapabiliyorum. Bayağı sayısal şeyleri aklımda tutup çıkartıp çarpabiliyorum. Formülü sevmediğim için, ben hiç formülle uğraşmıyorum kendi yolumla çözerim.*

Matematik öğretiminde her öğrenci için olduğu gibi görme engelli öğrenciler için de somut materyaller önem arz etmektedir. Aydın görüşmede kendisinin ve görme engelli olan abisinin kullandığı ve matematiği anlamasına yardımcı olduğu görme engelli öğrencilere uygulama yaparken de kullandığı materyalinin etkililiği anlatmıştır.

Aydın: Diyelim ki üçgen mi anlatacaksınız alın size üçgen (elektrik tellini katlayarak gösterir). Çocuğun eline bunu tutuşturmak sureti ile bak arkadaş bu üçgendir. Eğer ikizkenar üçgense tabi bunu biraz pense ile düzeltilir her ne ise. Bunu bir kere yaptınız mı bunu ders materyali olarak kullanabilirsiniz. Şöyle olduğu zaman bu dik üçgen. Dik açı anlatacaksan. Daha doğrusu üçgene geçmeden önce çocuğa açılar anlatılmalı yani şöyle iki tane, hah işte şu aradaki şeye açı denir (iki ışın oluşturur ve kollar arasında kalan açıklığı işaret eder). İşte bu açı böyle küçük ise böyle parmağın kadarsa dar açı, şöyle olduğu zaman (kollardan birini 90 derece yapar) tam dik açı, karşı tarafı gösteriyorsa. Böyle olunca geniş açı, işte şuna tam açı denir (bkz. Şekil 33).



Şekil 33. Aydın’ ın matematiksel kavramlar için kullandığı somut materyal ve örnek uygulamalar

Aydın, kabloların görme engelliler için bir somut materyal olabildiğini ve farklı alt öğrenme alanları için kullanılabilir olduğunu ifade etmektedir.

Aydın: Şimdi şu nedir? (çember oluşturur) Bu çember matematikte en çok nerede kullanılıyor? Evet birim çember. Alın size birim çember (koordinatları oluşturur) Onur ile biz böyle mesela buna birim çember deniyor. Dört tane bölmesi var. Şurası birinci bölge burası ikinci bölge eli ile tutuşturup, şurası üçüncü bölge. Bu şekilde eğitim verilmeli trigonometri anlatacaksanız. Daha da yetmedi şimdi tamam birinci bölge, ikinci bölge ama tekrar açılara döneceğim ben. Şunu şöyle kıvıralım (tel ile birim çember üzerinde açı *oluşturur). Bak diyordum böyle oldu mu dar açı, ama şuraya geldiğinde dik açı oluyor. Bu yana geçtiğinde geniş açı. Şimdi buradan nereye geldik? Cosinüslere sinüslere. İşte burada şu açının sinüsü dediğimiz zaman karşı kenarın şu kenara oranı. Şimdi karşı kenar, bu kenar falan. Mesela burası 45 derece ise tanjantını hesaplayacağız* (bkz, Şekil 34). *Eli ile tutuşturup sinüs ve cosinüs-ünü hesaplıyor. Yani böyle bir materyal kullanılması lazım yoksa söz ile kafanda bir çember hayal et işte onu dörde böl. Mümkün değil. Somut bir şeyle anlatılması lazım ki benim matematikte öğrencilerim ile en başarılı olduğum olay bu […].*

Şekil 34. Aydın' ın trigonometrik fonksiyonlar için kullandığı somut materyal ile örnekleri

Aydın ayrıca koordinat düzlemi, fonksiyonların grafikleri ve grafiklerin eğimi gibi kavramların algılanması için somut materyallerin önemini vurgulamaktadır. Somut materyallerin kullanılmasında bireysel eğitimin önemli olduğu da buradan elde edilen bir diğer bulgudur.

Aydın: biraz da ekonomide mesela şimdi arz eğrisi falan diye anlatıyor bize, ama lafla anlamıyorsunuz işte. Şuradan şuraya bir tane, işte bu arz eğrisi (birinci bölgede bir koordinat düzlemi oluşturur tel ile ve parmağı ile azalan eğimli bir doğru parçası çizer), şöyle yaparsa bu talep (parmağı ile artan bir doğru parçası çizer) eğrisi, ikisinin kesim noktası denge noktası, elimizle tutturarak gösterirdi. Ama kendi odasında gösterirdi. Yoksa bunu icabında tahtaya çiziyor, anlatıyor ama o an için çok da fazla bir şey anlamıyoruz. Ama elinle somut olarak tutturup da anlattığı zaman işte bu arz eğrisi paralel olursa bilmem üretim artmıyor demektir (tel ile x-eksenine paralel doğru parçası oluşturur). Böyle olursa üretim artıyor demektir. Böyle şeyler zaten ekonomi genelde şeye dayanır ne derler ona arz talep eğrisi falan o tür şeyler.

Aydın' nın görüşmede bahsettiği ve birlikte matematik çalıştıkları Onur, kablolar yardımı ile kavramları daha iyi anladığını belirtmiştir. Onur da farklı alt öğrenme alanları için materyalin kullanışlı olduğundan bahsetmiştir ve bu fikirlerini dokunarak öğrenmenin görme engelli bireyler için önemli olduğu bulgusuna götüren ifadeler ile desteklemiştir.

Onur: Özel olarak trigonemetride materyal geliştirmiştik biz. O da zaten abimizin fikri idi aslında. Böylece bütün trigonometri konuları aklımızda kaldı. Sadece trigonometri değil, *bütün analitik geometri konuları bütün o eğimler falan hepsini onun üzerinde çalıştık. Bir tahta parçası babamın işyerinden üzerinde hücreler küçük karelerden bunun üzerine elektrik kabloları ile koordinat ekseni ve birim çember oluşturduk. 1' e 1 şöyle bir tahta. 1 metreye 1 metre. Orijin merkez olacak şekilde çemberi elektrik kablosu ile oluşturduk. Başka elektirik kabloları ile eşkenar üçgenler falan yapıp üzerine yarleştirdik ya da gerektiğinde doğru parçası şeklinde oluşturup çevirerek bütün o dereceler, radyanlar, sinüsler, cosinüsler, tanjant ekseni, kotanjant ekseni hepsini üzerinde çalışıyorduk yine.*

Somut materyallerin kullanılmasında bireysel eğitim uygulamaları ile desteklenmesinin yanı sıra sözlü anlatımın da önemli olduğu İlker' in ifadelerinde yer almaktadır.

İlker: [...] mesela kesişen doğrular ne demektir? bundan sonraki röportajlarınızda sorun lütfen nasıl öğrenmişler. bize öğretmenimiz kesişen doğruları tahta kalemleri ile gösterirdi. (elleriyle tarif ederek) Bunlar böyle gelirse kesişir, böyle giderlerse parelel, üst üste gelirlerse çakışır. Bana mesela bu şekilde anlatıyordu. O kadar somut hale getiriyordu yani. Işın ne demek ondan öğrenmiştim, doğru ne demektir ondan öğrenmiştim. Çünkü bunların ismini, sonsuza giden bilmem neye doğru denir, kabul de sonsuza ne gidiyor? Yani doğru dediğin şey ne? Bu kaleme benim dokunmam lazım ki sonsuza doğru gittiğini görmem lazım. Sonsuza dek o kalem devam ediyor. Bunu yapmıştı ben de somut hale getirmişti matematiği.

Katılımcıların matematik öğrenirken kullanmayı tercih ettiği bir diğer önemli materyal de küptaş kasa somut materyalidir. Aydın ve Çağatay bu materyalleri kullanırken matematiksel sembol ve işaretlerin yerine kendileri ait sembol ve işaretleri kullandıklarını, böylece denklemleri akılda tutma ve işlem yapmada kolaylıklar sağladığını belirtmiştir.

Çağatay: üslü sayılarda üssü ifadesi yok. Onun da nedenini buldum. İşte 2 nin tersini yapıyorsunuz size üssü ifadesi oluyor. Yani ben bu şekilde anlıyorum, ama maalesef bazen x verdiğim bir işareti başka konularda da kullanabiliyorum, mesela kök ifadesi, bazen faktöriyel. Çünkü o kadar fonksiyonlu bir şey değil küptaş kasa. [...] kök ifadesini ayrı bir sayı buldum, yüzde ve kök mesela aynıdır, kökün yüzde ile bir arada olmadığı için ikisinden birini kullanıyorum mesela ve onu kafama kazıyorum.

Matematik eğitiminde kavramlar arasında ilişki kurma, kavramın tarihçesine yer verme gibi ilişkilendirmelerin yanı sıra günlük hayat ile kavramların ilişkilendirilmesi de önem arz etmektedir. Cahit görme engelli birey için günlük hayat ile ilişkilendirmenin mümkün olması için onun zihninde kavram imajı olan olgulara yer vermenin gerektiğini vurgulamaktadır.

Cahit: [...] Bir görme engelli için hayatında olmayan bir şeyi anlatamazsınız bana göre, çünkü o insan onu hayal edemez onu yaşayamaz.

Cahit ile gerçekleştirilen görüşmede günlük hayat ile ilişkilendirdiği kavram için kendine ait semboller oluşturduğu ve dokunsal iletişimin etkisinin olduğu gözlenmiştir.

Cahit: […] şöyle üzerine çizdiğimiz antenli antenli şekiller olan bir konumuz daha vardı (eline çizerek gösterir).
Araştırmacı: Antenli şekil derken?
Cahit: Şöyle bir şekil vardı (paranteze benzer bir şekil çizer avucunun içine). Dışarıdan ayırıyorduk falan […] ok çiziyorduk, okun uçları bir tarafa gidince bir şey oluyordu falan (avucunun içine çizerek anlatmaya devam eder) […] Sayıyı hatta çizdiğimiz şeklin üzerine yazınca farklı bir anlama geliyor, iç tarafına yazınca farklı bir manaya geliyor.
Araştırmacı: Üslü ifadeler?
Cahit: Hah! Üslü ifadeler. […] Şimdi mesela nasıl söyleyeyim şekli kafamda ben öyle canlandırdım […] Ben bunu mesela nasıl söyleyeyim? Parantez dediğiniz şöyle bir şekil olur (avucunun içine çizer) Ama ben onu öyle canlandırmakta sıkıntı yaşıyordum.
Araştırmacı: Ne yapıyordun peki?
Cahit: İki tane almış gibi hayal ediyordum. Aşağı tarafında da sanki böyle bir tane böcek var, böceğin iki anteninin arasına yazıyoruz. Böcek olarak düşünüyordum yani.
Araştırmacı: O zaman taban sayı böcek?
Cahit: Aynen (gülüyor).
Araştırmacı: Peki üs kuvvet?
Cahit: Onlar da antenlere gidiyor (avucuna sol elinin iki parmağı ile açma ve kapama parantezlerini temsil edecek şekilde dokunur). Bir de şey oluyordu içeriden dışarıya atınca farklı sayılar oluyordu burada? Mesela eksi ise artı, artı ise eksi oluyordu? Zaten o böcek şekli de şeyden aklıma gelmişti küçükken izlediğim bir çizgi filmden kaynaklanıyordu. Öcükle böcük vardı. Çünkü görmediğim için böcekleri öyle hayal ediyordum küçükken. Yani böcekleri görüyordum da belli bir süre sonra kaybettikten, gördüklerini unutmaya başlıyorsun eğer üzerinde durmazsan. Unutmaya başladığım için hayal ediyordum ve matematikle bunu karşılaştırmak bana zevkli gelmişti o zaman.

İlker' in belirttiği en çarpıcı bulgulardan biri görme engelli bireye görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin matematik öğretmesini eleştirmesi olmuştur. İlker, görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin matematiği nasıl algıladığını anlamadan görme engelli bireyin matematik öğrenmesinin mümkün olmadığı belirtmiştir. Böylece latin harf, rakam ve sembolleri öğrenmenin yeterli olmadığını, ayrıca matematiksel algıların da farkında olunmasının önemli olduğunu tespit edilmiştir.

İlker: […] ilk başta matematiği anlamadan o kadar kullanışsız bir şeydir ki küptaş küp kasa, dünyanın en aptalca icadı diyebilirim. İlk başta öyle geliyor. Matematiğin mantığını görenler açısından anlayabilmek için çünkü size görenler anlatıyor. Çok önemli bir şey ben *orada yaklaşık 3 ay kadar aktif bir şekilde kardeşim ile çalışırken küptaş küp kasa üzerinden çalışmıştım. Alt alta işlemler ne demektir, içler dışlar çarpımı ne demektir […] 1. basamakta doğru kesinlikle, ama o kadar hamallık ki. Mantığını anlamak açısından yapıyorsunuz, güzel, hiçbir sıkıntı yok. Ama orada görenlerin mantığını anlıyorsunuz. görenlerin nasıl matematik yaptığını. Bu da size şöyle bir kolaylık sağlıyor görenler nasıl matematik yaptığını öğrenince onlar size anlattığında tamam diyorsunuz.*

İker' in yukarıdaki söylemlerinden matematiksel işlemlerin Braille yazıda farklı olması, okuyucu ile iletişimin sağlanması gibi faktörlerin de uygulamalarda önem arz ettiği belirlenmiştir. Bu faktörlerin bertaraf edilmesi için somut materyal kullanmanın gerekliliği vurgulanmıştır.

Görme engelli bireyler ile eğitim için sözel anlatımın önemli olması elbette olağan dışı bir bulgu değildir. Ancak burada dikkat çeken bulgu, sözel anlatımda öğretmen veya okuyucu ile iletişim kurulması için Latin harflerin, rakamların ve sembollerin bilinmesinin ve bireyler arasında ortak bir matematiksel dil geliştirilmesinin gerekli olmasıdır. Onur bu bulguyu destekleyen ifadelere yer vermiştir. Böylece matematiği anlamanın daha kolay hale geldiğini belirtmiştir.

Onur: […] okuyucuya ben bunu tarif ettiğim için başta ben görme engelli arkadaştan eğitim aldığımda normal yazıda matematik nasıl ifade ediliyor, mesela o köklü ifade dediğimiz gibi nasıl oluyor, iç içe kökler var, kuvvetler farklı bunlar nasıl oluyor? Basamaklandırılmış rasyonel sayılar işlemi, merdiven işlemler, bana şekli kafamda nasıl canlandırabileceğimi öğretti, bana konu öğretmedi. Onu demeye çalışıyorum, matematiğin dilini öğretti. Ondan sonra kitaplarda zaten okunduğun zaman bütün teoremler, çıkarımlar hepsini kitap anlatıyor zaten, basamak basamak zaten hepsini tek tek yazıyor. O yüzden anlamak zor olmadı.

Görme engelli bireyin kendilerine ait sembol ve işaretler kullanmasının bir gerekçesi olarak, görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin matematiksel dilini anlamaya çabaları olduğu karşımıza çıkmaktadır. Onur, Braille yazı ile matematik öğrenmenin güçlüğünü kendisine ait işaretler kullanarak aştığını belirtmiştir.

Onur: ileri matematik işaretlerini bilmiyordum kafamdan uyduruyordum (güler). Çünkü bize ortaokulda şeyi öğretmediler, mesela sigma toplam sembolü, mesela sigmayı ben ne bileyim yani (güler). Kafamdan sanırım şey yapıyordum 3-4 yapıyordum galiba (düşünür). Braille 5-6 yanına da 3-4 yapıyordum mesela. Eğik çizgi (/ işaret eder) normalde olabilecek bir şey *yapıyordum yani. Slash gibi yani bölü gibi mesela köklü ifadelerde açılır ama kapanmaz. Bize öyle öğrettiler kök 2 dediler, kök 2 den ötesini öğretmediler yani (güler). Oraya bir sürü işlem giriyor araya, hatta şey var ne bileyim kök a+2 kök b şeklinde yazılan ifadeler diye, mesela formüllasyon diyorsunuz mesela işte bunu ben nasıl yazacağım. İşte onu ne yapıyordum ben, kök yazıyordum parantezler kullanıyordum ya da şey aynı kökü kapatmak için de kullanıyordum yani işareti tekrar sonuna koyuyordum.*

Benzer bir durum olarak Seda işaret kullanmak yerine alfabe karakterlerini tercih ettiğini belirtmiştir.

Seda: Mesela şunu yapıyordum bilmediğim için bilgisayarda mesela kimi sembollerin nasıl yapıldığını halbuki varmış. Kimileri mesela faktöriyelleri yazarken mesela hani faktöriyel işareti konur (ünlem) hah işte bilmediğim için de yazıyla yazıyordum. O yüzden çok zor oluyordu mesela kök içinde olacaksa bir şey onu bilgisayarda yapamıyordum. Yine kendim mesela kök aç yazıyordum oraya, sonra kök kapat gibi hani bayağı bildiğimiz yazıyordum. Yani tek tek kelime kelime yazıyordum onları öyle halletmeye çalışıyordum.

4.2.1. Matematik Dersine İlişkin Sorunlar, İhtiyaçlar ve Öğrenme Ortamlarındaki Uygulamaların Görme Engelli Bireylerin Tahmini Öğrenme Yol Haritasının Belirlenmesine ve Öğretim Deneyine Katkısı

Görme engelli bireylerin matematik dersi uygulamalarındaki sorunları, ihtiyaçları ve etkili bulunan öğretim uygulamalarına dair bulgular incelendiğinde aşağıdaki kritik durumlar elde edilmiştir:

- Denklem kurma becerisi ölçen ve geliştiren problemlere yer verilmesi,
- matematiksel işlemlerde art arda denklemler yazmalarını gerektiren problem çözümlerinin detaylı açıklanması,
- tahmin et ve uygula problem çözme stratejisinden başka stratejiler gerektiren problemlere yer verilmesi,
- problemler sıralanırken, çözümlerinin gerektirdiği işlem uzunluğuna dikkat edilerek sıralanması ve uzun matematiksel işlemlerin kısa parçalara ayrılarak sunulması,
- problemler için verilenleri not alabilecekleri ve işlemleri yapabilecekleri yazı yazmalarına yarayan araçlara yer verilmesi,
- Braille yazı ve latin harf ve rakamlar ile matematik yapma becerisini geliştirecek uygulamalara yer verilmesi,

- matematiksel işlemleri ve sembolleri belirleyebilme becerisini geliştirecek uygulamalar yapılması,
- öğrenciye ait bireysel işaret ve semboller varsa dikkate alınması ve kavramı algılamalarında yanılgılara sebebiyet vermeyecekse dikkatli kullanılması (ancak matematiksel dilin evrensel bir dil olduğu göz ardı edilmemesi),
- görme yetersziliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı matematiksel dilin açıklanması ve okuyucu ile iletişim kurma becerilerini artıracak uygulamalara yer verilmesi,
- dokunsal materyallere yer verilmesi önemli görülmektedir.

Söz konusu kritik durumlar görme engelli bireylerin tahmini öğrenme yol haritalarını belirlemek için öğretim deneyi protokollerinde mümkün olan en uygun adımları tasarlamamıza zemin oluşturmaktadır. Böylece görüşme protokolünde yer alan sorular için seçilmesi gereken problemler ve problem çözme stratejileri, matematiksel dil kullanımı, somut materyaller gibi klinik görüşme sorularının yapısına dair ön bilgi edinilmiştir.

4.3. Temel Cebir Kavramlarına İlişkin Öğretim Uygulamalarına Dair Sorunlar, İhtiyaçlar ve Tahmini Öğrenme Yol Haritası

Görme engelli bireylerin cebirsel kavramlara dair geçmiş öğretim uygulamalarındaki tecrübelerine dayanan sorunlar ve ihtiyaçlar genel bir perspektiften belirlenmiştir. Elde edilen bulgular matematik dersine ilişkin elde edilen kategoriler altında değerlendirilebileceği için bu başlık altında sunulmayacaktır. Cebirsel kavramlar, özelinde cebirsel işlemlerin uzun olması, işlemleri not tutmak için ve kavramları daha somut hale getirmek için araç gereçlerin kulanılması, sözel anlatımın önemi gibi kategoriler altında değerlendirilebilmektedir. Dolayısıyla bu bölümde, belirlenen kavramlara ilişkin tahmini öğrenme yol haritası ortaya konulacak ve görme engelli katılımcıların kavrayış, algı ve düşüncelerine yer verilecektir. Bulgular önce cebirsel kavramlara odaklı olarak, daha sonra bu kavramların altıdaki sorulara (bkz. EK 1, cebirsel kavramlara dair sorular) bağlı olarak sunulacaktır. Son olarak bulgulardan elde edilen tahmini öğrenme yol haritası paylaşılacaktır.

4.3.1. Değişken ve Bilinmeyen

EK 1' de yer alan görüşme formunda değişken ve bilinmeyen kavramlarının doğasını, sezgisel ve formal tanımlarını, cebirsel işlemlerdeki işlevlerini sorgulayan sorular yer almaktadır (bkz. 8-15. sorular). Bu bölümde katılımcıların değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin kavrayışları, algıları ve düşünceleri için elde edilen bulgular sunulmaktadır.

Değişken kavramı için bulgular ele alındığında kavram tanımı ve temsili için *destek eğitim araçlarının etkisi, bireyin kendine özgü semboller kullanması, yer tutucu, harfli ifadeler ile sembolleştirilen sayılar, değişkenlik arz eden durum, denklem çözme/işlmelerin sonucu, değişebilen nicelik* kategorileri elde edilmiştir. Bilinmeyen kavramı için *hiçbir zaman bilinmeyen şey, harfli ifade, harfli ifade yardımı ile sembolleştirilen sayılar, meçhul* kategorielrinden söz edilebilir. Bu kategorilerden katılımcıların alıntılarındaki söylemlerinde aynı anda birden fazlası tespit edildiğinden, bulgular katılımcı odaklı ele alınacaktır.

Çağatay ile gerçekleştirilen ilk görüşmede cebir kavramlarını öğrenirken veya cebirsel problem çözerken kulandığı araç gereçler ve kendisine ait sembol ve işaretlerin neler olduğu sorulduğunda aşağıdaki ifadelere ulaşılmıştır:

*Çağatay: Ben kağıtla Braille çok matematik yapamazdım o yüzden küptaş kasayla x işaretine daha değişik bir nokta düzeniyle kendim karar verdim. İşte bilinmeyeni bilinmeyen bir noktayla tanımladım. O şekilde kendi kafamda belirlediğim semboller vardı. […] x ve y-nin küptaş kasada belli bir karşılığı yok. O yüzden ben de kendi kafamdan belirlediğim sembollerle, kendi tanımladığım, kendi algıladığım sembollerle çalışırdım. Hiç bilinmeyen, hiç kullanılmayan işaretleri kullanırdım yoksa karışabilirdi. […] Şimdi 1' den 9' a kadar sayılar vardır ve 4 adet işaret vardır + , - , *, / ve işte =. Şimdi bunların belli bir sembolleri var, ama hiç bilinmeyen işaretler de vardır. Mesela 1' in konumunun yer değiştirildiği, işte*

birinci nokta mesela 1 bu Braille alfabesinde a diye de geçer, ama rakam işareti de koymanız lazım rakam olması için. Ben bu 1' i yazmaktansa ya da bu çok bilinen bir alfabeyi bir sayıyı kullanmaktansa daha bilinmeyen yani kimsenin kafasında, yani benim bile kafamda bir karşılığı olmayan sembolleri kullandım. Çünkü çok karışıyor. Mesela ben 1 yerine aynı zamanda 1' in karşılığı olarak x kullansam çok karışacak. [...] Tamamen kendimin ürettiği yani ne zaman o noktayı görsem x diyebileceğim bir sembol.
Araştırmacı: Peki x senin için ne ifade ediyor?
Çağatay: Bilinmeyen, evet hiçbir zaman bilemeyeceğimiz bir şey.
Araştırmacı: x' in yerine küptaş kasada karşılığı olmayan bir ifadeyi yazma fikri nasıl geldi aklına?
Çağatay: Bunu tabletle Braill olarak yazarken zaten x, x demek. x' in başka bir anlamı yok. Bu şekilde ben de madem kendim çözüyorum, ortak çözümlerde evet kullanamam küp kasada ama kendim çözüyorsam bir bilinmeyene ihtiyacım vardı, o bilinmeyen de bilmediğim birşey olmalıydı. Biraz karışık anlatmış olabilirim ama durum böyle. [...] x dediğimde bu, bu sembolün matematikte görmeyenler arasında hiçbir karşılığı yok (küptaş kasada bir sembol yazar) yani virgül anlamına gelir. Ondalıklı sayı yazarken kullanılır. Bazen x, bazen virgül, bazen a, bazen m.

Çağatay' ın ifadeleri analiz edildiğinde, küptaş kasa materyalini kullanmasının değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin algısına yansımaları dikkat çekmektedir. Burada küptaş kasa materyalinde *x* sembolünü harf olarak ifade edecek küptaşın olmaması ve var olan küptaşların farklı kullanımlara imkan vermesi rol oynamaktadır. Çağatay *x*' in 'yer tutucu' anlamına odaklanarak problemde istenen veri için bilinmeyen belirleme fikrine odaklanmıştır. Ayrıca matematiksel işlemlerde bilinmeyen yerine kullanılan harf ya da sembolün, yapılan işlem sırasında kabartma yazıda herhangi bir anlam içermemesine dikkat etmektedir. Alıntıda dikkat çeken ifade ise Çağatay' ın bilinmeyeni "*hiçbir zaman bilemeyeceğimiz şey*" olarak açıklamasıdır.

Çağatay' ın değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin kavrayışını ve algısını daha net ortaya koymak için görüşmenin ikinci oturumundaki ifadeleri incelenmiştir:
Çağatay: Değişken kavramı hiç belli olmaz ne olacağı. Değişken kavramı hakkında çok bir şey düşünemiyorum.
Araştırmacı: Peki bilinmeyen ne demektir?
Çağatay: Sizden istedikleridir. Asıl sizden istedikleri oluyor sınavda. Bilinmeyen x' tir bence. a da olabilir, kimine göre a, kimine göre başka bir harf, ama bana göre x mesela. Çünkü x ile yaptığım zamanlarda bana uğur getiriyormuş gibi hissediyorum x.

Araştırmacı: Bilinmeyenleri illa sence harflerle mi göstermeliyiz?
Çağatay: Şart değil bence göstermeyenler de var.
Araştırmacı: Neden peki harfle gösteriyoruz? Başka ne yapılabilir, harfle göstermek şart değilse?
Çağatay: Ona bilinmeyen diyebiliriz mesela. x' in ne demek olduğunu bilmeyen insanlar da vardır belki. x ne demek desen.

Çağatay' ın değişken kavramına ilişkin algısının duruma göre farklılık göstermekte olduğunu söyleyebiliriz. Bilinmeyen kavramına dair algısı ise daha önceki ifadesine paralel olarak problemde istenen için yer tutucu olduğu belirlenmiştir. Buna ek olarak bilinmeyen için harfli ifade algısı açıkça belirlenmektedir. Çağatay' ın ifadelerinde dikkat çeken bir diğer nokta x harfinin her zaman bilinmeyen kavramı için yer tutucu görevi gördüğü anlayışıdır. Görüşmede değişken kavramına ilişkin algısını ortaya çıkarmak için sorular yinelenmiştir:

Çağatay: Bilinmeyen ulaşılabilir bir sayı aslında, ama değişken ulaşılamayacak bir sayı gibi düşünüyorum. Çok bir bilgim yok açıkçası. [...] Değişebilen yani her an başka bir şey çıkabilen ulaşılamaz ve ulaşılsa bile ulaşılması zor olan.

Çağatay' ın değişken ve bilinmeyen kavramlarını 'harfli ifadeler yardımı ile sembolleştirilen sayılar' olarak algıladığını söyleyebiliriz. Her iki kavram için de yer tutucu görevi atadığı belirlenmiştir. Ancak burada değişken kavramını ulaşılamayacak bir sayı olarak ifade etmesi, değişkenlik arz eden durum olarak algılamasından kaynaklanabilir. Görüşmede örnek durumlar üzerinden Çağatay' ın değişken ve bilinmeyen kavramlarına dair kavrayışını ortaya çıkarmak istenmiştir:

Çağatay: (x=7 ifadesinde x sembolü için küptaş ile yazar) x eşittir 7. x, 7' dir demek. Yani artık biz bilinmeyeni bulduk demek. Bilinmeyen diye bir şey yok. Çünkü x zaten 7 imiş. (x+5=12 ifadesinde x) x burada değişken, çünkü x tam belli değil. Ne olacağı bilinmiyor. x+5=12 diyoruz aslında ben bunu 5' i 12' nin yanına -5 olarak atarak yaparım ama çoğu kişi bunun mantığını anlatmıyor mesela. Neden attım? 12-5=7. x, 7 imiş.
Araştırmacı: x değişken miydi burada?
Çağatay: Aa değilmiş. x=7 demiştik.
Araştırmacı: Ama onu sen çözdükten sonra buldun.
Çağatay: x-i şu andan itibaren biliyoruz çünkü bize zaten formülü vermiş. Bilinenleri verip bilinmeyenleri bulmamızı sağlamış.
Araştırmacı: x=7 ve x+5=12 arasında fark var mı?

Çağatay: Bir fark yok. Ama şöyle fark var, birinde belirtiyorsunuz direk x' in 7 olduğunu hiç yapmamıza bile gerek yok, zaten x 7 imiş diyoruz. Birinde x+5=12 burada da eşit olmayan bir ifade var. x' i bilmiyoruz. Buradaki iki x aynı, farklı değil. Nitelikleri ve amaçları aynı.
Araştırmacı: Amaçları ne orada?
Çağatay: Yani ikisi de bilinmiyor. Bilinmeyen amacı var. Ama birinde direk söylemiş olduk x-i. x=7 deki x-e biliniyor dedim, ama burada görevleri aynı demek istiyorum.

Çağatay' a yöneltilen sorularda değişken kavramına ait algısının denklem çözme veya başka bir ifadeyle denklemin işlem yapmayı gerektirmesi şeklinde ilişkilendirdiği söylenebilir. Başlangıçta denklem verildiğinde *x* ifadesinin değişken olduğunu, işlemler yapıldıktan sonra elde edilen sonucun istenen olduğunu belirtmektedir. Böylece Çağatay' ın bilinmeyen ve değişken kavramlarını ayırt edemediğini söyleyebiliriz. Daha sonra yöneltilen sorular ile bilinmeyen kavramını açıklamıştır. Ancak hala değişken kavramını açıklayamamıştır.

Çağatay: 2x+3y=25 ben bunu sabaha kadar çözemem (güler). Uğraşsam çözerim onu söyleyeyim yani. Bu x ile y' nin görevleri çok çok farklı. Burada mesela 2x, burada çarpım. Yani burada x-e ne verirseniz bu değeri sağlar. Ben eskiden buna uzun uzun değer verirdim. Ama iki farklı bilinmeyeni toplayamazsınız, işte x' ler bir yana y' ler bir tarafa, bu iki bilinmeyenli denklemlerde bunu yapamıyorsunuz. Burada + var. Bu ikisini topluyorum 25. 2 ve 3, 5. Ben bunu nasıl 25 yaparım. x ile y çok farklı, birbirleri ile farklı sayılar bence.
Araştırmacı: Değişken ya da bilinmeyen ne deriz?
Çağatay: İkisi de bilinmeyendir.
Araştırmacı: x ve y reel sayı dediğim zaman oradaki x ve y için ne dersin?
Çağatay: Çok geniş bir kümeye sahip yani bulunması çok zor. Değişken. İşte buna değişken diyebilirim. Bütün kesirleri verebiliriz.
Araştırmacı: 2x+3y=25 teki x ve y için ne dersin?
Çağatay: En azından 2 ile 1 arasında bir sayı değil. Direk 2 ya da 1, 3 ya da 2. İkisinden biri yani reel sayılardaki gibi 2 ile 3 ün arasında bir sayı değil. [...] Oraya bir değer verirsiniz. İki farklı değer ya da çeşitli formülleri var çok bilmiyorum bunları. Aslında değer vererek ya da şıklardan giderek çözüyorum. Ama bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri bir tarafa toplayarak yapıyorum ama burada işte işe yaramaz.

Görüşmede ilerleyen süreçte Çağatay' a yöneltilen sorular ile reel sayılar kümesinin elemanlarını temsil eden "*x* ve *y* birer reel sayıdır" ifadesi için değişken kavramını örneklendirebilmiştir. Ayrıca verilen iki bilinmeyenli denklemde yer alan *x* ve *y*' nin bilinmeyen olduğunu ifade edebilmiştir. Bu sonuca dayanarak Çağatay' ın daha önceki değişken tanımında "*değişkenlik gösteren*" ifadesini bir kümenin elemanlarını temsil etmesi olarak ele alabiliriz. Değişken ve bilinmeyen kavramlarının dışında Çağatay' ın ifadelerinde sınama (tahmin et-uygula) stratejisini benimsediği açıkça yer almaktadır. Ancak Çağatay, yöneltilen diğer soruda değişken ve bilinmeyen kavramları için net ifadelerden kaçınmıştır.

Çağatay: 18a-12 büyüktür 12a+30. (a sembolü) Bilinmeyen tabiki. Hangi sayılar olması gerektiğini bilinmeyenleri bularak yapacağımıza göre bilinmeyen bir ifade, ama değişken mi bilmiyorum.
Araştırmacı: a elemanıdır $\mathbb{Z}$ deki a?
Çağatay: a, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi içinde bir sayı. Hmm hala karar veremedim, ama değişken olabilir.

Çağatay' ın görüşmesinden alıntılarda değişken ve bilinmeyen kavramlarını bir arada ele aldığı, ayrıca bilinmeyenin aynı zamanda değişken de olabileceğini düşündüğü belirlenmiştir. Değişken kavramına dair algısının ise açıklık kazanmadığını söyleyebiliriz. Bu durum verilen ifadenin bir eşitlik değil, eşitsizlik olmasından kaynaklanabilir.

Cahit görüşmede denklem kavramı ile bilinmeyeni açıklamaya çalışmıştır. Her ne kadar iki bilinmeyenli denklem vb. gibi ifadelere yer verse de denklemde yer alan terimleri açıklamada yanılgıları ortaya çıkmıştır:

Cahit: Bilinmeyen, bunu biz denklemlerde görmüştük. Matematiksel olarak söylediğimizde bir bilinmeyenli iki bilinmeyenli ve 3 bilinmeyenli diye hatırlıyorum. [...] Yani bir kısmını sayı ile ifade ediyoruz, bir kısmını harfle ifade ediyoruz. Harf ile ifade edilen kısım genelde bilinmeyen kısım oluyordu. Onu daha sonra belli başlı işlemler yaparak buluyorduk.

Cahit, bilinmeyeni harfli ifade olarak açıklamaktadır. Değişkeni açıklaması istendiğinde hatırlamadığını belirtmiştir. Cahit' e bilinmeyen kavramına dair algısını daha iyi anlamak için aşağıdaki sorular yöneltilmiştir.

Cahit: (x=7 ifadesinde x) 7' nin katları veya 7' ye benzer bir şey olması lazım. x-in yerine bir sayı koymamız gerekiyor. Birkaç tane daha sayı olması lazım yanında onu direk bulamayız. (x+5=12 ifadesine dokunur) Evet böyle şeyler yapıyorduk. Bana göre bu iki x farklı. Hatırladığım kadarı ile farklı idi. 10 ya da 11. sınıfta görmüş olmam lazım. İkisi arasında bir çizgi olduğunu biliyorum. Ama bunu hatırlamıyorum ikisi arasında bir fark, bir detay vardı.

Cahit bilinmeyenin yer tutucu olmasına vurgu yaparak, bilinmeyeni *denklemlerde art arda yapılan işlemler sonucunda elde edilen harfli ifade* olarak tanımlamaktadır. Görüşmede değişken kavramına dair kavrayışını ve bilinmeyen ile arasındaki farkı ortaya çıkarmak için aşağıdaki sorulara yer verilmiştir:

Cahit: (2x+3y=25) Bizi x ve y sayısı 25' e ulaştırmak zorunda. Bilinmeyenler. İki tane bilinmeyenimiz var. x ve y. Bildiğimiz şey ne? 2 ve 3 sayıları. Bir de sonucun 25 olduğunu biliyoruz.
Araştırmacı: a bir tamsayı dediğimde buradaki a senin için ne ifade eder?
Cahit: Yine bilinmeyeni ifade eder. Bir sayı yok ki. Değişken olması için orada görülür bir şey olması lazım. [...] Görülen bir şey olması lazım. Şimdi mesela sadece a ile bir tamsayı dediniz. İyi de a' nın tamsayı olduğunu ispatlayan bir şey göstermediniz ki bana. Benim için a' nın tamayı olması için görülebilirliği olması lazım.
Araştırmacı: O zaman bana bir tane değişken örneği verebilir misin?
Cahit: Mesela a, 3 deseydik. Bu gördüğüm bir şeydir. Ama a dediğimde sadece a sayının ne olduğunu tamsayı mı, doğal sayı mı olduğunu görmüyorum.
Araştırmacı: a, 3' tür dediğimde o zaman değişken mi oluyor a?
Cahit: Hayır a' nın değişken olması durumundan söz etmiyorum, sadece gösterilebilir olduğunu söylüyorum. Az önce bana sayıyı ifade etmiyordu. Sadece a tamsayıdır diyordunuz.
Araştırmacı: Ama değişken olması için görülebilir olmalı demiştin.
Cahit: a değişebilir, a 3 iken 5 olabilir. İşlemin durumuna göre değişebilir. İşlem önceliğidir, işlem farkıdır, bu tip şeylere göre değişir.

Cahit' in ifadelerinde iki bilinmeyenli denklemde *x* ve *y*' nin bilinmeyen olduğu algısına ulaşılıyor. Ancak değişken kavramını "*elde edilen sonucun işlemlere bağlı olarak farklı olabilmesi*" şeklinde tanımlamaktadır. Bu durum Çağatay' ın denklem çözmede her adımda işlemlere bağlı değişkenlik göstermesi algısı ile paralellik göstermesi olarak yorumlanabilir. Bir başka yorum olarak Cahit' in tamsayılar kümesine ilişkin önbilgilerine dayanarak "*a* bir tamsayıdır" ifadesini kavrayamadığı söylenilebilir. Görüşmeye Cahit' in değişken kavramına dair kavrayışını anlamak için (grafik ve tablo içeren sorulara geçmeden önce) iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkinin sorgulandığı sorular ile devam edilmiştir:

Cahit: Coğrafyadan hatırlıyoum. Grafik yaparım. [...] Yıllara göre dağılışına, yıllara göre artışına, azalışına. Mesela 2000 yılında nüfus artışı şu kadardır. 2001 yılında ise şu kadardır. 2005' te şu kadardır. Elimizdeki sayıların artışı ve azalışı, bize o dönemdeki nüfus artışını veya azalışını gösterir. Nüfus piramitleri dediğimiz şey de zaten bunun için var.
Araştırmacı: Verdiğin örneğe göre 2012' de ne kadar olmasını bekleriz dersem?

Cahit: Belli bir düzen varsa o düzene göre katlarız. 2008' den 2012' ye olan oranı hesaplamak için her bir yıldaki artışını hesaplamak gerekiyor. Bundan önce dört yıl boyunca hep 500 bin, 500 bin artmış. Bundan sonraki üç yıl için 500 bin artma ihtimaline göre değerlendirirsin.

Cahit' in örneğine göre bağımlı ve bağımsız değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi grafik temsili ve cebirsel olarak ifade edebildiğini söyleyebiliriz. Ancak burada değişkenler arasındaki ilişki doğrusal olarak örneklendirilmesi dikkat çekmektedir.

İlker' in görüşmede ilk olarak değişken ve bilinmeyen kavramlarını tanımlaması istendiğinde düşüncelerini ifade etmekte zorlandığı belirlenmiştir.

İlker: Değişken bilirim. Eşitliği sağlayan kavram oluyordu. x, y kavramları vardı ya, onlar değişkenlerdi. Bunların hepsini biliyordum. Bilinmeyen neydi benim için? Değişkende hani x değerini bulduk ya biz o oluyordu. Bilinmeyen de o x hali oluyordu.

Yukarıdaki alıntıda İlker de diğer katılımcılar gibi bilinmeyen kavramını 'yer tutucu' olarak ve değişken kavramını 'elde edilen sonucun farklılık arz edebilmesi' olarak algılamaktadır. İlker' in kavrayışını daha net ortaya çıkarmak için örnekler üzerinden görüşmeye devam edilmiştir:

İlker: x=7 de oradaki 7 x-in karşılığı ya bulduğumuz sonuç, ben ona mesela değişken demiştim, x+5=12 deki x bilinmeyen. (2x+3y=25 ifadesine dokunur) x ve y bilinmeyendir.

İlker bilinmeyeni belirleyebilmiş, sabit terimi fark etmesine rağmen ifade edememiştir. İlker' in yukarıdaki ifadelerine dayanarak değişken kavramına dair kavrayışını oluşturmak için aşağıdaki sonda sorular ile görüşmeye devam edilmiştir.

Araştırmacı: a bir tamsayı ifadesinde a ne ifade ediyor senin için?
İlker: Herhangi bir sayı olmasını ifade eder. a bir değişkendir. [...] Herhangi bir tanesi olabiliyor çünkü.
Araştırmacı: Ama az önceki x=7 deki x-e de değişken demiştiniz.
İlker: Evet doğru söylüyorsunuz. [...] Bilmiyorum demek ki kavramlar üzerinde çok durmamışız.
Araştırmacı: Bir örnek daha vermek istiyorum size, 18a-12>12a+30 ifadesinde a için ne söylersiniz?
İlker: Bu değişken olmaması lazım o zaman. a sabit olması lazım. Çünkü a, bir dakika hayır. Değişken. Çünkü a-yı değiştirdiğiniz zaman ikinci kısımdaki a da değişiyor. O yüzden her halükarda sağlar. Yani a-yı ne yaparsanız yapın 18a-12 büyüktür 12a+30 dur.

İlker her ne kadar tamsayılar kümesini evrensel küme kabul eden örnekte değişken kavramını açıklamış olsa da, önceki örnek durum için yanılgıya sahip olduğu gözlenmiştir. Bir diğer örnek durumda ise İlker' in değişken kavramını istatistiksel olarak her tamsayı için elde edilen sonucun değişmesi şeklinde algıladığı belirlenmiştir.

Onur değişken ve bilinmeyen kavramlarını açıklamak için bu kavramları bir arada düşünmüştür. Bilinmeyen kavramını harfli ifade ve yer tutucu olarak tanımlamıştır. Değişken kavramını açıklaması için örnek durumlar üzerinden görüşmeye devam edilmiştir:

Onur: Haa bilinmeyenler bilmediğimiz şeyler bunları harflerle ifade ediyoruz x, y, z, t. Iıı değişken neydi? Katsayı 2x, 2. Evet. Bilinmeyen ile değişken. Değişkenler şeyle ilgili değil miydi, ıı denklem ile ilgili. Bilemedim şimdi (gülüyor).
Araştırmacı: x=7 dediğim de buradaki x sizin için ne anlam ifade ediyor?
Onur: Biliyoruz x demek ki 7 imiş.
Araştırmacı: Buradaki = sembolü sizin için ne ifade ediyor?
Onur: (Birkaç saniye düşünür) Eşittir işte hocam yani x eşittir 7 (güler). x-in 7- ye eşit olabilmesi için sonucunda 7 çıkabilecek bir şeydir o x. Ya 7' nin kendisidir ya işte 49/7 dir. Ne bileyim x öyle bir değişkendir yani.
Araştırmacı: Buradaki x bir değişken midir?
Onur: x bir değişkendir. Yok. Değişken değil mi? Ne deniyor ona? x orada bilinmeyen ama x=7 dendiğinde bilinir hale gelmiyor mu? Artık biliyoruz yani x=7.

Yukarıdaki ifadelerden Onur' un değişken kavramı için diğer katılımcılarda olduğu gibi 'farklı değerler alabilen durumlar' ya da 'işlemler sonucunda elde edilen sonucun değişkenlik arz etmesi' olarak algıladığı düşünülmektedir. Bunun için farklı örnek durumlar ile görüşmeye devam edilmiştir:

Onur: (x+5 =12) Haa orada x bilinmeyen oluyor yani. [...] (2x+3y=25) İki bilinmeyenli diyoruz işte ona. İkisi de bilinmeyen.
Araştırmacı: (a ϵ Z kabartma yazısına dokunması sağlanır) a ne ifade ediyor?
Onur: a bir tamsayı, a bir değişken oluyor öyle değil mi? Bilinmeyen değil değişken (emin olmayan bir ifade ve ses tonu ile). [...] Yani öyle ifade ediliyor o neden deniliyor bilmiyorum (gülüyor). Değişken kavramının ne demek olduğunu tam olarak bilmiyormuşum yani.

Onur' un bilinmeyen ve değişken kavramlarının sezgisel olarak farkında olmasına rağmen kavramları tanımlayamadığı belirlenmiştir. İki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiye dair farkındalığını tespit etmek için "*iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi bulmak için ne yaparsınız?*" sorusuna şöyle cevap vermiştir:

Onur: Mesela hız ile zamanı çarparım saatte 90 km ile gidiyor, 3 saatte gdiyor, t.v=yol olacak zaten, o yüzden 3 çarpı 90. Haa bir denklem kuruyorum. Sorusuna göre denklem kuruyorum. Bazen kolay görüyorum öyle çözüyorum bazen denklem kuruyorum.

Böylece Onur' un bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarına dair algısına ulaşılamasa da cebirsel olarak iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi ifade edebildiği belirlenmiştir.

Değişken ve bilinmeyen kavramları Özgür' e sorulduğunda, alıntıda yer aldığı gibi, bilinmeyen kavramını istenilen değer için 'yer tutucu' olarak tanımlarken, değişken kavramını 'problem çözümüne göre işlemsel olarak çeşitlilik' şeklinde açıklamaktadır. Değişken ve bilinmeyen kavramları sorgulandığında şöyle ifade etmiştir:

Özgür: Adı üstünde değişiyor yani nasıl anlatsam ki? Bir soruyu çeşitli yöntemlerle değişken olarak çözebiliyoruz. Öyle bir şey olabilir galiba. Tam emin değilim. Mesela farklı yollarla değişik yollarla. Bilinmeyen ise yok yani, x. Bizim bulmamızı istiyorlar bilinmeyeni, değer olarak yok.

Görüşmede Özgür' ün değişken kavramına ilişkin kavrayışını ortaya çıkarmak için örneklere dayalı sorular sorulmuştur:

Özgür: (2x+3y=25) 2x dediği kısım bilinmeyen oluyor, 3y değişken oluyor sanırım. Eşittir 25 diyor.
Araştırmacı: Neden 3y' nin değişken olduğunu düşündün?
Özgür: Mesela çarpa da biliriz, toplaya da biliriz. Tabi 25' e göre uyarlayacağız.
Araştırmacı: Neden çarpıp topluyoruz?
Özgür: Nasıl anlatsam ki? Mesela 2x+3y=25 dediniz ya, buradaki 3 ne durumda olduğunu bilmiyoruz ki? Çarpım mı bölüm mü?
Araştırmacı: 3y dediğim zaman 3 çarpı y, 2x de 2 çarpı x.
Özgür: Haa doğru. Ben değişken kısmında bunu söylemeye çalışıyordum. Çarpım, bölüm.
Araştırmacı: O zaman biz onu istediğimiz gibi alıyoruz anlamında. x ve y dediğimde değişken oluyor çarpıp topladım mı bilinmeyen oluyor öyle mi?
Özgür: Evet o bilinmeyen. Buradaki x bilinmeyen oluyor hocam. y de değişken oluyor.
Araştırmacı: 3 ile çarpıyorum?
Özgür: O da bilinmeyen mi oluyor?

Yukarıdaki alıntıda Özgür' ün harfli ifade, harfli ifadelerle işlemler, bilinmeyen, değişken ve denklem gibi kavramlara dair ön bilgisinin yetersiz olduğu ve kavram yanılgılarının olduğu görülmektedir. Her ne kadar *x* ve *y* tek başına ifade edildiğinde evrenin elemanlarını temsil ediyor gibi düşünülse de ve denklemde terimler halinde ele alındığında bilinmeyen olarak algılansa da bilinmeyen ve değişken kavramlarına ait kavrayışı yetersizdir. Ancak Özgür' ün sezgisel olarak bu kavramlara ait bir algısının olduğunu söyleyebiliriz. Özgür' ün bu algısını daha detaylı incelediğimizde aşağıdaki ifadeler dikkat çekmektedir:

Araştırmacı: a bir tamsayı ya da a tamsayılar kümesinin bir elemanı desem a nedir?
Özgür: a bir tamsayı istiyorsa tamsayıların hepsini kapsıyor. Mesela kaçtan başlıyorsa onun sonuna kadar. a bir tamsayı.
Araştırmacı: Bilinmeyen ya da değişken ne dersin?
Özgür: Hocam değişebilir. Çünkü bilinmeyen olsa tamsayı demez. Tamsayıların ne olduğunu biliyoruz, ama hangi sayı olduğunu bilmiyoruz. Hem bilinmeyen hem değişken desek daha doğru olmaz mı hocam? Çünkü bilinmeyen kısmı şey sayının kaç olduğunu bilmiyoruz. Ama sayı değişebilir. Hem bilinmeyen hem değişken bence.

Özgür' ün ifadelerinden değişken kavramına ait algısının sözlük anlamına (TDK, 2018) odaklı olduğunu söyleyebiliriz. Değişken sözlükte "değişebilen nicelik, değişik sayı değerleri alabilen nicelik ve cebirde bir denklemin katsayılarına giren değişken nicelik" olarak tanımlanmaktadır. Yine bilinmeyen kavramı için de "değeri belli olmayan, bilinmedik (nicelik), bilinmez, meçhul" (TDK, 2018) algısına sahiptir. Ayrıca bir harfli ifadeyi hem değişken hem de bilinmeyen olarak düşünebilmektedir.

Seda' nın değişken kavramına ilişkin tanımı istatistiksel olarak "her gözleme göre farklı değerler alabilen objeler, özellikler ya da durumlar" tanımı ile örtüşmektedir.

Seda: Yani değişken bunu nasıl açıklayayım (gülüyor). Farklı değişkenler yapacağımı aaa nasıl açıklayacağımı bilemedim. Farklı durumlara göre değişen sayı ya da durumlar, olaylar, olgular diyeyim ben aslında onlara. Tam açıklayamadım ama.

Bilinmeyen kavramına ilişkin açıklaması ise hem sözlük anlamı olarak "bilinmeyen, meçhul" ve hem de matematiksel olarak 'problemde istenen veri için yer tutucu' olarak belirtilebilir.

Seda: Bilinmeyen bir problem dizisi içinde veya herhangi bir olay veya olgu içinde hayata dair düşünürsek bilmediğimiz herhangi bir şey diye düşünebilirim veya problemlerde bilmediğimiz sayı veya kavram olabilir.

Görüşmeye Seda' nın değişken ve bilinmeyen kavramlarına dair matematiksel olarak algısını açıklaması için aşağıdaki sonda sorular ile devam edilmiştir:

Seda: Yani bütün değişkenler bilinmeyen olmayabilir. Sonuçta her değişken bilinmeyen değildir. Aslında alakasını kuramadım. Değişkene farklı özellikler yüklendiği zaman bilinmeyen haline gelir.
Araştırmacı: Farklı özellikler nedir?
Seda: Diyelim ki bir sayı için sıfırdan büyük olmak bir özelliktir. Veya x için diyelim ki sıfırdan büyük ve çift bir sayı olması durumu bir özellik olabilir. Şu an çok güzel attım ama öyle. [...] öğrendiklerimden yola çıkarak söyledim.

Seda' ya ait alıntılardan değişken kavramını matematiksel olarak net bir şekilde tanımladığı belirlenmiştir. Seda' nın değişkeni bilinmeyenleri temsil eden bir sembol ve bilinmeyi açık önermeleri doğru yapan elemanlar olarak algıladığı söylenebilir. Ancak görüşmeye devam edildiğinde Seda' nın evrensel küme ve bu kümede değişken kavramı algısına dair yanılgılara rastlanmıştır:

Araştırmacı: x eleman reel sayı ya da x bir reel sayı desem buradaki x ne ifade eder?
Seda: x reel sayılar kümesinin elemanıdır, böylece x' i bulmak için bir alanda sınırlandırmış olurum ben aslında. [...] x yine bilinmeyendir, x elemanıdır reel sayılar dedi ise. Ama bu sefer reel sayılar kümesinin elemanı olduğu için neye bakmamız gerektiğini bulmak için yani bulmamız için daha net bir sınır çizmiş oluyor. Bu x hala bilinmeyendir benim için çünkü reel sayı, hangi reel sayı?
[...]
Araştırmacı: a eleman ℤ ne ifade ediyor?
Seda: Tamsayılar eksiden başlayıp, sıfır, artı sonsuza kadar devam etmez mi? Bu a-nın bunlardan herhangi biri olabileceğini ifade ediyor benim için. a hala bilmiyoruz, bilinmeyen. [...] (18a-12>12a+30 ifadesinde) Burada yine a bir bilinmeyen benim için ama farklı sayılar eklendiğinde bu iki sayı mesela 18a-12 ile 12a+30 birbirine eşit değil. Burada aralarında büyüklük küçüklük ilişkisi var.

Yukarıdaki alıntılarda Seda' nın diğer katılımcılarda olduğu gibi bilinmeyen kavramı için problemde istenilen sonuç değerine odaklandığı söylenebilir. Bir başka yorum olarak bilinmeyenin bir kümenin elemanı olabileceği fikrine sahip olmadıkları ve değişken kavramının evrensel kümeyi temsil ettiği fikrine dair eksikliklerin olduğunu ekleyebiliriz.

Ayrıca Seda burada açık önermeleri belirlerken hata yaptığı için değişken kavramını, belirlediği açık önermeyi doğru yapan bilinmeyen kavramı ile karıştırmaktadır.

Seda: Mesela en basitinden x ile y arasındaki farkı anlamıyordum. y de bilinmiyor, x de bilinmiyor evet, niye yani bunun adı x de bunun adı y? Halbuki mesela şöyle anlatıldığında anladım bunu örnekle aştım. Mesela benim annem dedi öğretmenim seni de tanımıyor, arkadaşını da tanımıyor. Senle arkadaşın aynı kişi değilsiniz gibi […] hani x ve y bilinmeyen farklı kavramlardır. […]

Yukarıdaki alıntıdan Seda' nın bilinmeyen kavramına dair yer tutucu özelliğine odaklandığı ve harfli ifade ile temsilleri algıladığını belirtebiliriz. Harflerin veya sembollerin kullanımı yerine gerçek hayat durumlarına dayalı problemler ile bilinmeyen yerine yer tutucu tayin etme ihtiyacı hissetmesinin gerekliliği dikkat çekmektedir.

Araştırmacı: İki değişkenin temsil ettiği kümeler arasında bir ilişki olabilir mi?
Seda: Ters orantı, doğru orantı ilişkisi olabilir. Mesela hız arttıkça zaman azalır gibi. Bir yere gidiş problemi olduğunu düşünelim veya doğru orantı ilişkisi olabilir. […] Grafik çizilebilir mi zaman arttıkça kalorinin arttığına dair.

Seda' nın ifadeleri incelendiğinde bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarını kullanmasa da iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi grafik veya orantı kurarak gösterebileceği söylenebilir.

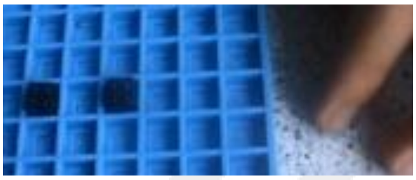
4.3.2. Eşitlik

Eşitlik kavramı için elde edilen bulgular, katılımcıların eşitlik tanımı ve sembol gösterimi için *destek eğitim materyalinin rolü*, *aynı/benzer olma*, *aynı özellikteki elemanları gruplama* ve *sonuçların karşılaştırılması* kategorilerini ortaya koymuştur. Bu kategorilere ilişkin örnekler ve açıklamalar aşağıda sunulmuştur.

Görüşmede Çağatay' dan eşitlik kavramını tanımlaması istenmiştir. Çağatay matematiksel işlemler için küptaş kasa somut materyalinden yaralandığından fikirlerini ifade etmesinde de yararlanabileceği belirtilmiştir.

Çağatay: Matematikte bir sayının değerini sağlayan, yani bir ifadeyi sağlayan, onun yerine de kullanılabilen. Her ikisini de kullanabiliyorsak o eşitliktir. […] Tanımda hiç iyi

değilimdir ama şöyle bir cümleleri toparlamak gerekirse; birbirine benzer iki öğenin birbirlerine eş değer olması yani birbirleri ile örtüşebilmesi.
Araştırmacı: Benzerlik ya da örtüşmek önemli mi eşitlik kavramında?
Çağatay: Önemli tabi. [...] Benzerlik, şöyle söyleyeyim yani bir şeyin karşılığı o söylediğiniz ile uyuşmak zorunda eşitlikte, yani eşit olmak zorunda. Yani o değeri sağlamak zorunda bir kere, yani eşit örtüşmek zorunda, örtüşmekten kasıt uyuşmak birbirlerine uymak, yani akrabalık gibi bir şey işte.
Araştırmacı: Küptaş ile anlatmak istersen deneyebilirsin.
Çağatay: Mesela bu budur, dört tane noktadır. Bu da bunun eşiti, aynısı (bkz. Şekil 35).



Şekil 35. Çağatay' ın küptaş kasa ile eşitlik kavramına ilişkin örneği

Çağatay' ın ifadelerinden eşitlik kavramını eşdeğer olma, aynılık, benzer olma gibi aynı niteliklere sahip olma şeklinde algıladığını belirtebiliriz. Küptaş kasa materyalinde iki farklı ifadeyi temsil eden sembolü kullanarak eşitlik kavramını örneklendirmiştir. Eşitlik kavramının işlevini açıklaması için görüşmede örnek durumlara yer verilmiştir:

Çağatay: (x=7 ifadesinde = sembolü) Aslında x diye bir şeyin olmadığını, x-in aradığımız şey olduğunu yani 7 olduğunu ifade ediyor eşitlik. Yani biz x-i bilmiyorduk ama 7 olduğunu öğrendik. x=7 diyoruz ve de biz aslında x-i bulduk, 7. Yani şu andan itibaren x diye bir şey kalmadı o artık 7.

Çağatay' a ait alıntıdan anlaşılacağı gibi *x*-in yer tutucu görevine işaret ederek 7 rakamını temsil ettiğini belirtmektedir. Bu temsile dayanarak *x* ve 7' nin eşit olduğunu belirtmiştir.

Cahit, Çağatay' ın küptaş ile ifade ettiği aynı olma durumunu 1 rakamını kullanarak açıklamıştır. Ayrıca Çağatay gibi "benzer olma" ifadesini vurgulamıştır.

Cahit: Eşiti, aynısı veya yansıması. Mesela 1 eşittir 1. 1' in eşiti gibi veya benzeri. Bir şekilde onunla bir ilişkisi olmak zorunda eşitlik kavramı dediğimizde. Yani iki şey olmak zorunda ve birbirleri arasında bir ilişki olmak zorunda. [...] Benzerlik olur, dengi olur.
Araştırmacı: Peki bir tanım yapabilir misin?
Cahit: İki şey olmak zorunda ve bu ikisi arasında bir ilişki, bir benzerlik veya bir denklik olmak zorunda.

Cahit' in ifadelerinden eşitlik kavramını bir 'aynı özellikteki elemanların grubu' olarak algıladığını söyleyebiliriz. Ayrıca bu grup için sıralı ikililerin var olması gerektiğini de algıladığını belirtebiliriz.

Cahit: (x=7 ifadesinde = sembolü) Eşitlik işareti ya aynısı olacak ya da bir benzerlik ifade edecek demiştim ya, x-in 7 ile arasında ya aynısı olacak ya da 7 ile bir benzerliği olacak. [...] (x+5=12 ifadesinde) Hayır buradaki farklı. İkisi arasındaki farkı 5' ten anlayabiliriz. Diğerinde sadece 7 ile ilişkili bir durum vardı. Burada hem 5 hem de 12 ile ilişkili bir durum var. [...] 5 ile 12 sayılarını alacağız. x-e ulaşmak için bunları kullanıyorduk. Bir dakika (birkaç saniye düşünür). Karşıya atma şeyi yapıyorduk. Olmaz ki karşıya atma işleminde ikisi arasında parantez olması gerekiyordu.
Araştırmacı: Burada da yapabilirsin. -5 ekleyebilirsin her iki tarafa ya da senin ifaden ile +5 diğer tarafa -5 olarak atabilirsin.
Cahit: O zaman sayı nötürleşmiş olur. Yani sayı değeri kalmaz. O zaman x=12 olur. Bu sefer 12 ile x arasında bir bağlantı kalmış olur. Yani 7 ile x durumu gibi olmuş olur aynı. İkisi arasında şöye bir bağlantı var, sadece sayı değiştiğinde durum değişikliği oluyor. O 5 sayısını orada atmadığım zaman farklı gibi gözüküyor. Ama diğerinde mesela x=7 yerine x çarpı 5 eşittir 7 de diyebilirdik yani. Sonuçta biz o 5' i orada bir şekilde göndermek zorundayız, o x-e ulaşabilmek için. [...] (x+5=12 ifadesinde = sembolü) Buradaki değiştiriyor. Buradaki eşitlik 5 sayısını karşıya atmamızı sağlayabiliyor. Bir şeyin özelliğinin değiştirilmesi gibi.

Cahit' in düşünmeleri incelendiğinde eşitlik sembolüne çözüme ulaşıp karşılaştırma anlamı yüklediğini söyleyebiliriz. Burada dikkat çeken nokta "$x = 7$" ve "$x + 5 = 12$" ifadelerinde '=' sembolünün farklı işlevler gördüğüne dair fikridir. İkinci durumda eşitliğin denklem çözmeyi mümkün kıldığını düşünmektedir. Ayrıca denklem çözmeye dair önbilgilerinde eksikliklerin olduğu görülmektedir.

Cahit' in eşitlik sembolüne yüklediği anlam ile İlker' in aşağıdaki alıntısında da karşılaşıyoruz:

İlker: [...] Eşitlikte sanırım denklem sonucu karşılıklı olarak ifadelerin birbirini sağlama kısmıdır. İşlemlere göre sağlıyor. Benim burada anladığım, eşitlik niceliksel veya sayısal eşitlikten bahsediyorum. Harfle de olabilir o.

İlker, eşitlik sembolünü denklem çözme sonucunda elde edilen sonuçların karşılaştırılması olarak açıklamaktadır. Niceliksel veya harfli ifade olarak ayrı durumları nasıl algıladığını ise aşağıdaki örnekler üzerinden yorumlayabiliriz:

İlker: (x=7 ifadesinde = sembolü) Eşitlik olduğunu ifade ediyor. (x+5=12 ifadesinde = sembolü) Ben 5' i öbür tarafa alıyorum. Sonrasında x=7 oluyor. Aslında x=7 ile x+5=12 aynı ifade. Her ikisi de sayısal eşitlik.

İlker, niceliksel eşitlik ifadesi ile sayı kümeleri üzerinde oluşturulan denklik sınıflarını belirtmektedir. Bu denklik sınıfının elemanlarının harfli ifadeler ile temsil edildiğini düşünmektedir.

Onur diğer katılımcılardan farklı olarak eşitlik kavramını açıklarken "aynı olma" durumunu göz ardı etmektedir.

Onur: Yani bir şey bir şeye eşit aynısı değil ama. Yani eşit işte x eşittir y diyor mesela. […] (düşünür) Eşittir işte hocam yani x eşittir 7. x-in 7' ye eşit olabilmesi için sonucunda 7 çıkabilecek bir şeydir o x. Ya 7' nin kendisidir ya işte 49/7 dir. Ne bileyim x öyle bir değişkendir yani.

Onur' un alıntısında iki ifadenin eşitliği için aynı olmama durumundan bahsetmesi "$a = a$" gibi bir durumu dikkate almadığını göstermektedir. Ayrıca açıklamalarından "$x = 7$" ifadesinde x-in 7' ye eşit olmadığı, 7' nin katları olan kümenin temsilcisi olduğuna dair düşüncelerinden bahsedebiliriz.

Özgür' ün ifadeleri incelendiğinde eşitlik kavramını sayısal değer olarak iki niceliğin aynı olması olarak algıladığını söyleyebiliriz.

Özgür: İki taraf var ikisinin de birbirine eşit olması lazım. Eşit olmayınca eşitsizlik oluyordu.
Araştırmacı: Eşit olması ne demek?
Özgür: Her tarafın aynı olması, yani iki tarafın aynı olması. […] Eşitlik karşılıklı verilen kısımların aynı olması.
Araştırmacı: Bu aynılık neye göre peki nicelik olarak mı, boyut olarak mı, özellik olarak mı?
Özgür: Mesela bir soruyu iki farklı yoldan sormuşlar, ikisinin cevabı da aynı olmak zorunda. […] Eşitsizlik de tam tersi oluyor galiba bir tarafın, iki tarafın da biririnden farklı olması.

Özgür' ün ifadelerinde dikkat çeken açıklama eşitlik kavramını problemin çözümlerinin karşılaştırılması ve cevabın aynı niceliksel değeri vermesi olarak algılamasıdır.

Seda' nın açıklamasında eşdeğer olma ve aynı olma durumlarına vurgu dikkat çekmektedir. Ayrıca cebirsel yapılar üzerinde sıralı ikililer ve denklik sınıfı kavramlarına dair sezgisel bir algıya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Seda: İki sayının birbirine denk, yani denk derken eşit olması, aynı şeyi ifade etmesi veya bir sayı ile bir kesrin de olabilir bilemedim şu anda salladım veya iki kesrin birbirine eşit olması durumu. Aslında iki şeyin sayı veya kesir olarak da sınırlandırmayayım, hayatta da düşünürsek iki farklı şeyin birbirine eşit olması durumu diye düşündüm ben. […] (x=7 ifadesinde = sembolü) Bir x ifadesi varmış 7' ye eşitmiş. x, 14/2 de olabilir (sesi kısılarak söyler) şu an nasıl anlatabilirim ki? Yani 7 de olabilir 7 çarpı 1 de olabilir. Ama bu 7' ye eşit sonuçta. (x+5=12 ifadesinde = sembolü) Evet farklı çünkü burada az önce iki şeyin birbirine eşit olduğundan bahsetmiştik. Ama burada üstüne 5 koyarsak 12' ye eşit olacağından bahsediyoruz. Yani aslında ikisinin tek başına bir şeye eşit olacağından bahsetmiyor.

Ancak Seda' nın örnek durumlar üzerinden açıklamaları eşitlik kavramını denklem çözümünü karşılaştırma olarak algıladığını göstermektedir. Seda "$x = 7$" ve "$x + 5 = 12$" ifadelerinde = sembolünün farklı işlevlerde olduğunu düşünmektedir. İlk durumda denk elemanların kümesi olarak tanımlarken, ikincisinde denklem çözme ile sonuca ulaşma işlevinden bahsetmektedir.

4.3.3. Değişken, Bilinmeyen ve Eşitlik

Bu bölümde, katılımcıların verilen bir problem durumunda cebirsel ifadelerden yararlanarak değişken(ler)i belirleme, eşitlik veya eşitsizlik durumuna karar verme ve denklem kurma kavrayışlarına ait bulgulara yer verilmektedir (bkz EK 1, soru 14).

Çağatay: 12 yaşından küçük olduğunu anlamam için 12' nin altına 10 yazarım. Bir yandan da hafizama kazırım. Sağ taraf pozitif ya, ya soluna yazardım ya altına, küçük olduğunu anlamak için. Sağ pozitif olduğu için şu anki 12' nin altına 10 yazdım. Bu 10 yaşından küçükler için, 12 yaşından büyükler için 20 TL, 20 TL' yi sağına yazdım. Bu arada TL' yi de aklımda tutuyorum TL için sembol yok. 20500 harcanmış mı? Onu ısrarla sorarım sınavda ne yapmış bilet mi almış, yoksa para mı harcanmış onu sorarım. […]
Araştırmacı: Peki bu soruda değişken, bilinmeyen, eşitlik veya eşitsizlik gibi kavramlar kullanmalı mısın?

Çağatay: Önce 12 yaşından küçük olanlar için 10 TL diyor ya, bir oranlama yaparım ama şu an nasıl yapılacağına dair, yani oranlama sistemi kullanırım herhalde. Matematiğin bu kısımlarında gerçekten sıkıntı çekiyorum, söylenecek bir söz de yok.

Çağatay' ın problem çözme süreci incelendiğinde, küptaş kasada problemi anlamasını ve aklında tutmasını sağlayacak notlar aldığı dikkat çekmektedir. Notları yazarken küçük ve büyük ifadelerini betimlemek için karakterin sağ altına yazmak gibi kendisine ait tekniklerinin olduğunu belirtmiştir. Ancak burada bilinmeyenleri belirleme ya da denklem kurmaya dair bulgu elde edilememiştir. Problemi dilediği stratejiyi kullanarak çözmesi istendiğinde, orantı kurarak yapmaya çalışmış fakat çözüme ulaşamayacağını belirtmiştir.

Cahit ise denklem kurmadan 'sınama (tahmin et-uygula)' stratejisini kullanarak ilerlemek istemiştir. Ancak problemi çözme sürecini betimlerken 12 yaşından küçükler için en az bilet sayısını bulması istendiğinde bölme işlemi, aksi durumda çarpma işlemi kullandığı görülmektedir:

Cahit: 20000 çarpı 10. Önce 20500 sayısına ulaşabileceğim çarpmalar yaparım. Yani mesela 20500' ü kaçla çarptığımda bana kaçı veriyor. Mesela 10 ile 20500' ü çarparım. 10 TL ile kaç tanesi bu sayıyı veriyorsa bu sayı aradığım sayıya beni götürür. Bu en fazlası olur. En azını bulmak için de bu bulduğum sayıyı şey yaparım. Bundan şeyi çıkartmam gerekir. Elimdeki oranı. Şimdi en fazlasını bulduk ya 20500 çarpı 10 dedim. En fazlasını buldu bana.
Araştırmacı: Neden çarptık?
Cahit: Kat durumundan dolayı. Bana bunu verebilecek şey bu. Toplama yapsam bana hiç bir şey vermez. Benim yapmaya çalıştığım şey önce en yükseği bulmak. Bu ikisini çarparak en yüksek oranı bulurum. Bulduğum oran ile daha sonra bölme yöntemine gideceğim. Yöntemlerden biri bu olabilir en azı bulmak için.
Araştırmacı: Peki en az 20500 TL kazanmak için 12 yaşından küçükler için bilet sayısını istesem?
Cahit: O zaman değişir. En fazla bilet satmamızı istiyor. O zaman 20500 ile 20 mi, 10 mu olması gerektiği ortaya çıkıyor. 20500, 10' a böldüğümüzde bize istediğimiz sayıyı verir. Sonuçta bir bilet 10 lira.

Yukarıda yer verildiği gibi Cahit' in akıl yürütmesini sağlamak için yukarıda görüldüğü gibi problem durumu değiştirilmiştir. Bu kez işlemleri yapabilmiştir, ancak bu durum Cahit' in denklem çözme ve bilinmeyen kavramlarına dair kavrayışı yetersiz bulunmaktadır.

İlker' in bu soru için çözüm sürecine dair fikri istendiğinde görüşmede yer alan soruların adım adım zihninde değişken, denklem kurma, bilinmeyen ve eşitlik kavramlarına ilişkin kavrayışına dair yansımaları olduğu gözlenmektedir.

İlker: Az önceki örnekteki 18a' lı sorudaki gibi çözüm kümesini bulacağız gibi. En az mı diyor? En az dediğine göre öncelikle şey yapacağız galiba 11 ile mi çarparız oraya ya? Şey 12 yaşından küçük. O zaman 10x+20y=20500. Oradan çözeriz. [...] Artık bulcağımız x ve y' ler değişken değildir herhalde (güler) bilinmeyenlerdir onlar. Çünkü bir kümeye aitler.

İlker her ne kadar değişken ve bilinmeyen kavramlarını "bir kümeye ait olma" fikri ile algılamış olsa da burada kastettiği çözüm kümesidir. Buradan hareketle değişken ve bilinmeyen kavramlarını ayırt etmeleri için evrensel küme fikrinin gelişmesinde görüşmedeki soruların yetersiz kaldığını söyleyebiliriz. İlker' in aksine Onur 'sınama (tahmin et-uygula)' stratejisini kullanmayı tercih etmiştir:

Onur: (1 dk düşünür) Tiyatro salonunun şu kadar koltuğu var vs bir bilgi yok değil mi? O zaman ben şunu yapardım, nedir onun adı 20' ye bölünebilecek en büyük sayıyı alırdım ve geri kalanını da işte kaç çıkıyor 20500' den mesela atıyorum 20480 mesela şu an tam düşünmedim de geriye kaldı iki tane onluk, demek ki o zaman en az 2 diyebiliriz.
Araştırmacı: Soruyu çözerken bir cebirsel ifadeye ihtiyaç duydunuz mu?
Onur: Burada ihtiyaç duymazdım, çünkü diyor ya en az, en yakın sayıyı bulurdum.

Onur' un stratejisi dikkate alındığında görüşmede yer alan soruda katılımcıların denklem kurmalarını gerektirecek ve farklı stratejiler kullanmalarına fırsat vermeyecek şekilde düzenlemeye ihtiyaç duyulduğu belirlenmiştir. Ancak bu şartlar altında bile İlker' in cebirsel ifadelere ihtiyaç duyması kayda değer görülmektedir. Bu durum görüşmede yer alan önceki soruların yönlendirmesinden kaynaklandığı İlker' in ifadelerinde açıktır.

Özgür de 'sınama (tahmin et-uygula)' stratejisini kullanmayı tercih etmiştir. Ancak burada akıl yürütmesini sağlamak için yönlendirici 'sonda/tetikleyici sorular' sorulmuştur:

Özgür: hocam ne yaptınız ya (güler) 20500 değil mi? Şimdi 12 yaşından küçüklere 10 TL, 12 yaşından büyüklere 20 TL. Ben bunu ne yaparım biliyor musunuz, sayı 20500 ya, şöyle hesaplamaya çalışırım. 100 tane 10 yaşındaki çocuk izlese 10 TL' den satıyoruz zaten oradan 1000 lira mı geldi? Geriye kaldı 19500 mü? Gerçi bu da tam bir şey olmuyor çünkü 20 TL olduğu için. Ben bunu tek tek deneyerek çözmeye çalışırım.
Araştırmacı: 100 çok büyük olmadı mı? En az diye sormuştum.

Özgür: Hocam öyle ama sayı tam değil. Sayı 20500 bir tane 12 yaşından küçük izlemiş olsa, 10 lira gitti. 20990 kaldı ama bu da 20' ye tam bölünmez.
Araştırmacı: O zaman iki çocuk izlesin.
Özgür: 2 gelse 20 yapar. 20480 yapar. Bence bu olur. Deneyerek çözerim.
Araştırmacı: Peki denklem kurmayı düşünmez misin burada?
Özgür: Hayır.

Özgür' ün ifadeleri incelendiğinde işlemlerinde dört işleme dair hatalarının yanı sıra cebirsel düşünmelerine dair yanılgıları da dikkat çekmektedir. Özgür denklem kurma ve bölünebilme kavramlarına ilişkin yanılgılara sahiptir.

Seda cebirsel olarak denklem kurmakta zorlanacağını belirterek, tahminlerde bulunarak çeşitli durumlar için bir sonuç elde etmeye çalışmıştır:

Seda: Ben bu soruyu çözemem (gülüyor) bunu a' ya b' ye dökebilmek için ben bunda 10 dakikamı harcarım belki. Çünkü şey yok kafamda hemen yapılanmıyor. [...] Ben şöyle düşünürüm çabalarım, derim ki 20000' nin katları, nasıl anlatayım, bir dakika, (birkaç saniye düşünüp) en az 10 tane mi bilet satmıştır? [...] Ben şöyle düşündüm, şöyle hayal ettim 20 liradan bilet sattı ise 20' nin katları olması lazım diye düşündüm çıkacak sayıyı. 20500 de 20' nin katı olan en az sayı 20400 diye düşündüm. Şöyle 100' ü de 10' a böldüm. Yani 10 liradan, 100 liralık bilet sattı ise 10 kişiye satmıştır diye hayal etmiştim. Yanlış mı düşündüm?

Seda denklem kurma ve değişken kavramlarından yararlanmak yerine tahminlerde bulunarak 'sınama' stratejisi tercih etmiştir. Burada problem çözme sürecinde olsa bile ileri düzeyde cebirsel bir işlem gerçekleştirmemiştir.

4.3.4. Fonksiyon

Bu bölümde fonksiyon kavramına, fonksiyonun farklı temsillerine (cebirsel form, venn şeması, liste, grafik) ve ilişkili alt kavramlarına (ilişkilendirme, eşleme, birebir ve örten eşleme vb.) ait görüşmelerden elde edilen bulgulara yer verilmektedir. Elde edilen bulgular söz konusu kavramlar için bütüncül olarak ele alınacaktır.

Fonksiyon kavram tanımı incelendiğinde katılımcıların fonksiyonu *değişim, sistem, değer, denklem* olarak açıkladıkları belirlenmiştir. Fonksiyon temsillerinde ise *kullanılan destek* *eğitimi araçları* (gridlendirilmiş grafik vb.), *dokunma* (dokunsal olarak sezgisel hareket etme, sağ ve sol elin eş zamanlı hareket etmesi, kabartma çizgilerin kullanılması), *ilişkinin nasıl olduğu* (doğrusal grafikleri yorumlamada başarılı olma), *günlük hayat ile ilişkilendirme* kategorilerinden söz edilebilir. Grafik temsiline dair kategoriler ise *yol, rota, kroki* olarak karşımıza çıkmkatadır. Söz konusu kategorilerin açıklanması ve katılımcılardan örnekler aşağıda sunulmuştur.

Öncelikle katılımcılardan fonksiyon kavramı hakkında hatırladıkları bilgilere ve/veya örneklere ilişkin düşüncelerini ifade etmeleri istenmiştir. Ardından fonksiyon kavramını tanımlamaları beklenmiştir. Görüşmede Çağatay, fonksiyon kavramı için hatırladıkları sorulduğunda, işlemsel bilgilerine dair fikir belirtmiştir. Ardından kavramsal olarak fonksiyonun tanımına ilişkin bilgilerini paylaşmıştır.

Çağatay: Şimdi fonksiyonda iki türlü değer vardır, iki türlü kural vardır. Ya size bir değer verir bunu x-in yerine koy der, bunu eşitle der ya da bu sayıya kadar eşitlik kur der. Ama örüntülü fonksiyonlarda o kadar zorlanıyorum ki. Örüntülü fonksiyon bir değer buluyorsunuz, onunla beraber bir diğeri, merdiven gibi bir şey yani bitene kadar devam. […] Fonksiyon iki türlüdür değer kümesi verir, tanım kümesi verir ve sizden bunların arasındaki değişimi bulmanızı ister. Ben böyle düşünüyorum. Mesela fonksiyon konusunu dersime gelen birisi bir ev örneği ile anlatmıştı. Bir odada 2 kişi kalabilir, tanım kümesinde evleri vermişti, değer kümesinde insanları vermişti. Bir değer kümesi iki tanım kümesinde aynı anda bulunamıyordu galiba. İlk verilen değer, ikinci verilen tanım mıydı? Bunu çok karıştırıyorum biraz, ama ilk tanım iki değer galiba. Çok karıştırdığım için. Birinci verilen aynı anda ikinci verilen de bulunamıyor, ama birinci verilen hem ikinci verilen de… Bir dakika çok karıştırmıyım. Şimdi aynı anda bulunamıyor ama ya ikincide ya da üçüncüde bulunabiliyor. Çünkü bir insan aynı anda iki evde bulunamaz, ama bir evde aynı anda iki insan bulunabilir. Evet öyle söyleyeyim. Fonksiyon bu. […] Tabi işin denklem kısmında birazcık zorlandığım oldu. Bileşke fonksiyonlar da olsun, f' den g' ye tanımlı, g' den f' ye tanımlı. Ama dediğim gibi ben çok çabuk unuttuğum için bunların üstünden çok geçmek zorundayım.

Çağatay' ın açıklamalarında işlemsel anlama olarak tanım kümesindeki elemanların görüntülerini hesaplanma ve fonksiyon örüntüsüne dayalı işlemler yapmaya odaklanmaktadır. Bir diğer alt kavram olan bileşke fonksiyonu belirlerken işlemleri yapmakta zorlandığını da belirtmiştir. Fonksiyonun tanımına ilişkin olarak tanım ve görüntü kümesinin farkında olsa da tanım ve değer kümelerinin kavramsal tanımına dair anlamanın gerçekleşmediği açıktır. Açıklamasında tanım ve görüntü kümelerindeki elemanların eşlenmesini '*değişim*' olarak ifade etmesi de anlamanın gerçekleşmediğine dair bir diğer bulgudur.

Çağatay' dan fonksiyonun bir alt kavramı olarak değişkenler arasında ilişki kurma becerisini anlamak için günlük hayattan bir örnek vermesi istenmiştir.

Çağatay: Mesela kitap okuma problemi ile de olabilir. Birinci gün x sayfa okuyor, ikinci gün onun yarısını okuyor derken burada olabilir mesela, ikinci gün ne kadar okuduğu bilinmiyor çünkü. Burada bir fonksiyon sistemi kurulabilir. [...] Mesela bir televizyon kumandasında bir sayıya bastığınız zaman belli bir kanalın çıkması gibi [...] birebir fonksiyon da mesela bu şekilde.

Çağatay verdiği örnekte bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirleyemese de görüşmede yer alan başka bir soruda (bkz EK 1, soru 16) aşağıdaki alıntıya yer vermiştir:

Çağatay: [...] Zamanın kaloriye tanımlı. Zamana bağlı olarak kalori değişimi.

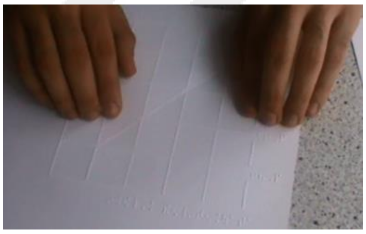
Her iki ifade de bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirlediği fakat terim olarak adlandıramadığını söyleyebiliriz. Ayrıca fonksiyonu bir 'sistem' olarak tanımlamaktadır. Bağımlı ve bağımsız değişkenin temsil ettiği kümeelr arasındaki ilişkiyi ise 'değişim' olarak adlandırmaktadır. Birebir fonksiyonu açıklamak için televizyon kanalları ile sayılar arasındaki eşlemeyi kullanmıştır. Görüşmede fonksiyon kavramını açıklamak istemiş ve aşağıdaki alıntılara yer vermiştir:

Çağatay: [...] denklemlerde kullanabiliriz. [...] Denklemlerde şu şekilde size mesela bir bilinmeyen verir, bilinmeyenli bir denklem verir. Bir bilinmeyenli altına da f fonksiyonunun değerini verir. Fonksiyon bu arada f değerini alır. Bunun eşitini sorar size, siz de ya ona eşitlersiniz ya da onun yerine koyarak fonksiyonu bulursunuz.
Araştırmacı: Neden yerine koyuyoruz?
Çağatay: Sıfıra eşitlemek için galiba. [...] Fonksiyonun değerini bulmak. Yani sıfıra eşitleyen hangi değer vardır gibi.

Çağatay' ın ifadelerinden fonksiyonu f ile temsil ettiğimizi anlamasına rağmen bunu 'değer' olarak tanımlaması kavramın öğretiminde terimleri açıklayamadığının göstergesidir. Benzer durum fonksiyon altındaki görüntüleri 'fonksiyonun değeri' olarak adlandırmasında gözlenmektedir. Ayrıca fonksiyonun cebirsel temsilini 'denklem' olarak algılamaktadır.

Söz konusu önbilgilerini belirledikten sonra Çağatay' ın ilişkilendirme, eşleme ve grafik ile temsil etme becerileri üzere görüşme devam etmiştir. Çağatay görüşme sorusunda (bkz. EK 1, soru 16) yer alan tabloyu ve değişkenleri inceledikten sonra bu değişkenlerin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyon grafiğini belirlemeye çalışmaktadır:

Çağatay: Ok çizmişler iyi onu fark ettik (grafiğin gridler ile yaptığı açıyı 'ok' olarak tanımlar). Okla beraber (sol eli ordinat eksenindeki değerlere dokunur) 70, 35, haa bunlar kalori. Gün sayısı nerede? (parmakları ile arar, 0 ve 1' e dokunur. Parmakları ile apsisteki değerleri takip eder) 0, 1, 2. Gün sayıları burada (saatlerden bahsediyor). (Geçen zaman yazısını okur) Süre yazmışlar, gün sayılarını buraya koymuşlar. (Hemen ordinatın nasıl adlandırıldığını kontrol eder) Yukarıdan aşağıya da kalorilerini yazmışlar (sol eli ile aşağıya doğru kalori miktarlarını kontrol eder). Ama şimdi birinci günde (sağ eli 1' in üzerinde) bu da herhalde 140. 140 birinci gün mü oluyor? (sol eli ile ordinat eksenine yukarıdan aşağıya düşünerek eşler, bkz. Şekil 36).



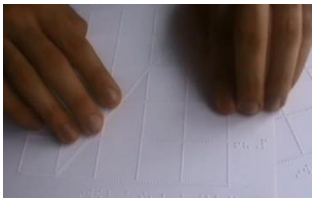
Şekil 36. Çağatay' ın grafik inceleme süreci

Çağatay' ın daha önce grafik incelemediği dikkate alındığında değişkenleri tespit etme ve tahmin etme becerisinin iyi düzeyde olduğunu söyleyebiliriz. Daha önce belirtiği gibi problemde verilenleri ve istenenleri sıklıkla unuttuğu, saat bağımsız değişkenini gün olarak ifade etmesinden de anlaşılmaktadır. Bu durumun önüne geçmek için iki küme arasındaki ilişkiyi gösteren tablo Çağatay' ın yanına bırakılmıştır. Çağatay bağımlı ve bağımsız değişkenin grafikte yer alması gerektiğini tahmin etse de, Çağatay' ın koordinat eksenlerini belirleme, eksenlerin kümeleri temsil ettiğini bilme ve eksenlerde hangi kümenin temsil edildiğini bilme gibi önbilgilerine dair eksiklikleri dikkat çekmektedir. Ayrıca değişkenlerin iki kümenin elemanları arasındaki eşleme sonucunda grafik üzerinde konumlandırılışına, yani sıralı ikilileri tespit etmeye dair önbilgisinin olmadığı belirlenmiştir. Değişkenlerin temsil ettiği iki küme arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyon grafiğini belirlemeye çalışırken Çağatay' da eksikliği tespit edilen önbilgilere dair açıklamalar yapılmıştır:

Çağatay: (Tablodan bakar) 35 evet. Bir de okunuşuna bakayım (grafiğe döner). Şurada 1, şurada 35 evet (sağ eli ile 1' e, sol eli ile 35' e dokunarak) demek ki ok okla gösterilmiş (grafiği hisseder ve gridleri ok olarak tanımlar). [...] x dikey, yatay y oluyordu galiba hatırlayamıyorum şu an.

Çağatay koordinat düzlemine dair önbilgilerinde eksiklerinin olduğunu açıkça ifade etmiş ve gridler yardımı ile yapılan grafiği incelerken doğruları ok olarak adlandırmıştır. Dört grafiği de inceledikten sonra görüşme aşağıdaki alıntılar ile devam etmiştir:

Çağatay: Bu tablo değil çünkü 2' nin karşılığı yok. 105 (araştırmacı parmağını tutarak yardım eder) 2' nin karşılığı 70 olması lazımdı. O yüzden bunu eledim. (Diğer grafiğe bakar) Bu sefer 1' den başlıyordu (1' in eşlendiği noktayı bulur) 1, 70' e mi gidiyor. Aynen. Bu değil 1, 35' e gidecek. (Diğer grafiğe bakar) Şimdi 0' dan başlamış ama 1' den de başlamış (çizgiyi takip eder orijine ve 1' e dokunur, çizgi ile eşler). Ama 1' den başlıyor burada bitiyor (kırılma noktasını gösterir) ama devam ediyor. Ben birden başlamak istiyorum (1 noktasından çizgiye gelir sonra iki eli ile ordinatı kontrol eder). Evet 35. 2' den başlayalım (iki eli ile 2' i bulup x=2 doğrusu boyunca çizilen gridi takip ederek çizgi ile kesiştiği noktayı belirler). Devam ediyor evet burada kırılmış (sağ eli kırılma noktasını ve sol eli ordinatı kontrol ediyor) 70. 3' ten başlayalım. 3 burada bitmiş (çizgi ile kesişme noktasına gelmeden gridlerin kesişim noktasını hisseder). [...] Şuradaydı galiba (4 noktası için kesiştikleri noktayı işaret eder).



Şekil 37. Çağatay' ın grafik üzerinde sıralı ikilileri tespit etme süreci

Çağatay grafikleri incelerken sıralı ikilileri tespit etmesine gridler yardımcı olmuştur. Ancak yukarıdaki alıntıda yer aldığı gibi, zaman zaman gridlerin kesişim noktaları ile grafiğin üzerindeki noktaları karıştırmaktadır. Ayrıca sıralı ikilileri tespit ederken, sol eli ile *y*-

eksenindeki bağımlı değişkenleri kontrol ederken sağ eli ile *x*-eksenindeki bağımsız değişkenleri kontrol etmektedir. Her iki elini gridler üzerinde hareket ettirerek sıralı ikilileri belirlemiş ve bu noktadan grafiğin geçip geçmediğini tespit etmiştir. Bunu yapmasında grafiğin farklı dokuda olması yardımcı olmuştur (bkz. Şekil 37).

Çağatay: (105 ile 140 noktaları arasında parmağını devam ettirir) Yok. Boşa çıkmış. Galiba bu birincisi demiştik herhalde birincisi çıkacak. 1 bitiyor 35. 2' ye bakıyorum. Bu arada 0' dan başlıyor (orijinden başlayarak çizgiyi takip eder) ama (düşünür)…
Araştırmacı: 0' dan 1' e kadar kalori harcıyor mu?
Çağatay: Evet doğru o yüzden 0' dan başlıyor. 2' den başlıyorum. 70. Bir de 3' e bakayım. 3' ten şöyle şurada kesişiyor 105. (Her defasında iki eli ile x değerlerinden doğru boyunca çizgi ile kesiştiği noktaya kadar devam eder. Kesişim noktasını belirleyince sağ elini bu noktada sabit tutar ve sol eli ile ordinatı belirler). 4' e bakalım. Şöyle geliyoruz burada bitiyor bu da 140. Bu tablo aradığımız tablodur. Ben ilk başta anlamamıştım işin gidişatını, siz gösterince.

Yukarıda Çağatay' ın grafikteki ilişkiyi gösteren eğriyi anlamlandırmada sıkıntıları olduğunu ve verilen tamsayıların dışında reel noktalarda ilişkinin devam ettiğini ilk başta algılayamadığını söyleyebiliriz. Burada verilen noktaların arasında bir reel sayının görüntüyü oluşturduğu fikrine sahip olmadığı için 'boşa çıkmış' ifadesini kullanmıştır. Çağatay' ın iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirleme ve anlamlandırma sürecine dair düşünceleri aşağıdaki gibidir:

Çağatay: İlişki kurduk evet. 1. günde 35 kalori yakılmış. Bunların ilişkisini aslında çizgilerle, kendisine çıkan çizgilerle bir yol, mesela siz adresini bildiğiniz yerlere rahat gidersiniz, bunda da bir adres gibir bir kroki gibi bir şey çizilmiş. Çok güzel bir şekilde karşıda o oluyor. […] Mesela geçen zamanla yol arasında bir ilişki var. İlişki ya geçen zaman bağlıdır ya da gittiğin yola bağlıdır. Ne kadar gittiği zamana bağlı biraz da. İki değişken birbirini etkiler derim mesela. Buradaki etki zamana bağlı bir şey. Mesela 1 günde 35 yakılıyorsa 3 günde ne kadar yakılıyor gibi bir soru sorulabilir. Ya da bu biraz değişimin artıp artmaması ile alakalı. Çözmek için muhakkak yazmak gerekebilir. Bir denklem kurabilirim yani.

Çağatay' ın ifadelerinden bağımlı ve bağımsız değişkene dair sezgisel bir kavrayış olduğu ve iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkinin grafik ile veya cebirsel ifade edilebileceğine dair algının olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca grafiği bir "kroki" ve gridleri "noktalardan çıkan yol veya rota" olarak tanımlaması kayda değer bir bulgudur. Böylece gridlerin grafiği anlamasında yardımcı olduğunu söyleyebiliriz, ancak burada gridlerin yanılgılara sebep olmadığından emin olmak gerekmektedir.

Cahit de koordinat eksenlerine dair önbilgisi yetersiz olduğu ve grafik okuma bilgisine sahip olmadığı için Çağatay' ın görüşmesine benzer şekilde kısa bir açıklama yapmıştır. Ancak Cahit Braille kullanmadığı için zaman zaman sayı değerlerini söylemek yerine gridlerin sıralamasını takip etmiştir. Grafikleri incelediği süreçlere dair bazı alıntılar aşağıda yer almaktadır:

Cahit: Hocam bunda bir farklılık var. Buradan gitmemiş (orijini işaret eder). Burada buraya gelmiş (1 noktasına dokunur). Diğerinde şuradaydı sıfırdan başlamıştı.
Araştırmacı: Peki sence hangisi olması gereken?
Cahit: Sıfırdan başlaması daha mantıklı. Zaman çizelgesinde başlatırken sıfırdan esas alıp başlatmıyor muyuz? Burada 2' den başlatmış yok 35' den başlatmış (üçüncü grafiğe dokunur). İyi de sıfırı da sıfara alması gerekmiyor mu? Bir saat sonrası için başlatmış. Ben spor yapıyorum oradan biliyorum öyle bir dünya yok. (Dördüncü grafiğe bakar) İyi de bu da sıfırdan başlatmış hocam.
Araştırmacı: 0 ve 1. saat için anladın. Peki 2. saat için çizgi hangi noktadan geçmeli?
Cahit: İkincide buradan geçecek ((2,70) noktasını işaret eder). (Sol eli birinci grafikte iken sağ eli dördüncü grafiktedir). Bakalım (Braille bilmediği için gridlerden yararlanarak satır veya sütun olarak saymaktadır) birincisinden geçmiş ikincisinden geçecek bakıyorum (önce ikinci satırda yani 70 noktasında parmağını tutar ve daha sonra y=70 grid çizgisi boyunca devam ederek çizgiyi bulmaya çalışır). Buradan geçmiş (y=70 grid çizgisini belirledikten sonra 2. saati belirleyemiyor). Buraya kadar sağlıyor.
Araştırmacı: Zorlandığın noktalar oldu mu?
Cahit: Bana kolay gelen saati belirlemekti. Ama yukarı çıktıkça daha çok karışıyor grafik (y-eksenine dokunarak). Birleşme noktaları da biraz karışıyor. Bu eğriyi biraz daha kalınlaştırabiliriz. Mesela bant yapıştırılabilir. Braille bilmediğim için parmaklarım iyi hissetmiyor. Gerçekten hoşuma gitti güzel bir materyal.

Cahit grafiği incelemeye başladığında öncelikle kalori miktarını *y*-ekseninde belirlemiş, daha sonra bu noktadan geçen gridi takip ederek grafiği kestiği noktayı belirlemiştir. Zaman zaman kesiştikleri noktayı belirlemekte zorluklar yaşamaktadır. Bunun gerekçesi olarak Braille kullanmadığı için parmakların gerektiği kadar hassas olmadığını belirtmiştir. Kesiştikleri noktayı belirledikten sonra hangi saatte kaç kalori tükettiğini belirlemek için belirlenen noktadan dikey geçen gridi takip ederek saati belirlemeye çalışmıştır. Ancak burada gridi takip ederken hatalı tespitlerde bulunabilmektedir. Söz konusu güçlüklerin önüne geçmek için gridlerin ve fonksiyon eğrisinin birbirinden ayırt edilmesi için bant gibi farklı materyaller kullanmayı önermiştir.

Cahit' in grafiğin başlangıç noktasını belirlemedeki başarısı da önemli bir diğer bulgudur. Grafiğin orijin noktasından geçmesi gerektiği ve bir saate kadar kalori tüketiminin olması gerektiğine ilişkin akıl yürütmüştür. Bu durum Cahit' in deneyimlerine dayanarak günlük hayatı ile ilişkilendirmesi sonucunda mümkün olmuştur. Bu fikri destekleyen bir başka bulgu ise günlük hayattan iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiye dair örnek vermesi istendiğinde Cahit' in ifadeleridir:

Cahit: Spor dediniz spordan devam etmek istiyorum. Çünkü ben de sporcuyum. Fitness-a falan gidiyorum. Kilom ile yağ kütlesi arasındaki denkliği yani kilom ile yağ kütlesi arasındaki oran. Mesela ben 60 küsur kiloyum bu kilonun ne kadarı yağ olarak kaldı, ne kadarı kasa dönüştü yaptığım spor sonucunda. İleride ne kadar spor yaparsam ne kadarını kasa dönüştürürüm.

Cahit' in iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi kavradığını ve bunu cebirsel olarak ifade edilebileceği fikrine sahip olduğu söylenebilir.

İlker görüşmede fonksiyon kavramı için sembol gösterimleri ve bazı alt kavramları hatırladığını belirtmiştir. Ancak fonksiyon tanımını ve işlevini açıklayamamıştır.

İlker: Bilgilerim çok eskide kalmış benim için sadece hatırladığım kavramları söyleyeyim size. f(x), g(x) vardı. Bunların bileşkeleri vardı. Tersine fonksiyon gibi bir şey vardı, ters fonksiyon vardı. Sonra fonksiyonlarda toplama, çıkarma, çarpma, bölme de mi vardı? İşte mesela çarpma bölmeden nefret ediyorum ama bunlar vardı bunları hatırlıyorum fonksiyon ile ilişkili. Ama bana fonksiyon nedir derseniz, fonksiyon ne işe yarar derseniz bilgim yok.

İlker her ne kadar koordinat eksenlerine dair bilgi sahibi olsa da daha önce fonksiyon grafiği incelemediği için görüşmede kısaca grafiği nasıl inceleyeceği anlatılmıştır. Ardından düşüncelerini ifade ederek grafikleri incelemesi beklenmiştir:

İlker: Tamam 1 yapıyorum, 1 yaptım. Şuraya geliyorum (sağ eli ile x=1 doğrusunu takip ederken sol eli ile (0,35) noktasını belirler. Sağ eli ile (1,35) notasıda durup (0,35) noktasına doğru y=35 doğrusunu takip eder).
Araştırmacı: Bu eşleştirmeleri göstermesi için de grafik var, dokusu farklı.

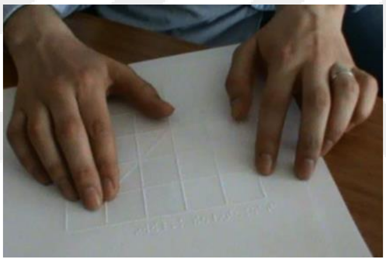
İlker: Şuna geliyorum (x=2 doğrusunu takip eder). Şunu evet (grafiği iki eli ile takip eder). Şimdi bakalım, anladım. [...] Tamam bu buranın, bu buraya gelmiş (grafiğin başlangıç noktasını bulur, (1,35) noktasını belirler ve eğri ile kesiştiğini hisseder, ardından tekrar 35 noktasını kontrol eder). Şimdi 2' ye bakıyorum (x=2 doğrusunu takip ederek grafik ile kesiştiği noktayı tespit etmeye çalışır, iki eli ile birlikte takip eder. Sağ eli x=2 doğrusunu takip ederken sol eli eğriyi takip etmektedir. y=70 doğrusu ile eğrinin kesiştiği noktayı sol eli ile hisseder, sağ eli ile (2,70) noktasını bulup y=70 doğrusunu takip eder, grafik ile kesiştiği notada sağ elini sabit tutar, sol elini kesişim noktasından y=70 doğrusu boyunca hareket ettirerek ordinatın kaç olduğunu belirler). Burada kesişmiş.
Araştırmacı: Öyle mi tam orada mı bir bakar mısınız?
İlker: (x=2 doğrusunu iki eli ile takip eder. (2,70) noktasına gelince iki parmağı ile farklı doku arar, sol eli ile y-eksenine doğru arar) haa burada kesmemiş. (İki eli ile x=2 doğrusunu takip eder ve eğriyi bulur) burada (sağ eli kesişim noktasında iken sol eli ile ordinatı belirlemeye çalışır). Neyi kesmiş? 105' i kesmiş. 4' e bakayım hatta sizin için (güler) burada açılmış tekrar. Tamam. Yanlış.
Araştırmacı: Yine de dördüncü grafiğe bakmak ister misiniz?
İlker: Tamam olur. Onun da neden yanlış olduğunu söyleyeyim. 0 doğru.1 doğru. 2 doğru. 3' e bakıyorum 3' ün içinden geçiyor yanlış (hızlı bir şekilde apsisten belirlediği noktalara ait doğruları takip ederek sağ eli ile eğriyi kestiği noktayı belirleyip sol eli ile ordinatı belirlemektedir. 2 ve 3 noktalarını belirledikten sonra yukarı doğru takip ederken 1, 2, şeklinde gridleri saymaktadır). 3 sağlamadığından doğru değil. (4 noktasını kontrol eder. 140 dan daha büyük bir değer olduğunu belirler nokta arar) buraya geliyor.

İlker gridlerin yardımı ile hızlı bir şekilde grafikleri incelemiştir. Ancak burada sadece gridler değil grafiğin doğrusal bir denklemi belirtmesi de cevaba hızlı ulaşmasını sağlamıştır. İlker her iki elinin işaret parmağını kullanarak gridleri ve grafiği takip etmiştir. Bu nedenle bazen doğru noktaları belirleyememiştir. Daha sonraki örneklerde ise öncelikle apsisi belirleyip, bu noktadan geçen gridi sağ eli ile takip ederken sol eli ile de grafiği takip etmiştir. Daha sonra kesişim noktasından sol eli ile gridi takip ederek ordinatı belirlemiştir. Son iki grafiği incelerken ise grafiğin kırılma notalarının olmamasından yararlanarak sağ eli ile apsisi ve sol eli ile ordinatın gridlerini kontrol etmesini sağlayacak şekilde, iki elinin işaret parmağı ile grafiği takip ederek gridleri sayarak hızlı bir şekilde doğru cevabı bulabilmiştir.

Onur fonksiyon kavramını tanımlamak için 'denklem' ifadesini kullanmış ve 'bir yol' olarak açıklamıştır. Ayrıca tanım ve görüntü kümesi kelimelerini kullanmamış olsa da fonksiyonun iki küme arasında eşleme ve bir bağıntı olarak kavramıştır. Ancak burada eşlemenin cebirsel olarak belli bir kurala göre yapılması gerektiğini düşünmektedir.

Onur: Mesela bir denklem var o denklemin gittiği bir yol var, bir şeye eşit oluyor o denklem, bağıntılar kuruyor, bir elemanı alıyor bir yere taşıyor. Mesela f(x)=x+1 ise f(2)=3 oluyor mesela. 2 diğer kümede 3' e gidiyor. […] Denklem çözmeyi anlamazsak fonksiyon zor. […] fonksiyonu anlamakta zorlanmadım, keyif aldım. Zaten bir denklem var o denklemin içerisinde onu şey yapıyorsunuz, ama işte değilini almak var vs işte biraz kafa karışıklığı oluyor, tersini pardon. Ters fonksiyonlar, bileşke fonksiyonlar, yani zorlayıcı tarafları var ama şey değil sonuçta o kavramları denklemi bilmeden olmaz.

Onur fonksiyon için alt kavramlara ait önbilgisinin olduğunu belirtmiş ancak söz konusu kavramları 'denklem' kelimesi ile ifade etmiştir. Onur, daha önce fonksiyon grafikleri incelediği ve hatta grafik oluşturduğu için rahatlıkla grafikleri incelemeye başlamıştır.



Şekil 38. Onur' un grafik inceleme süreci

Onur: (Grafiğin başlangıç noktasını ve orijini kontrol eder. Sağ eli ile eğriyi takip ederken sol eli ile y-eksenindeki değerleri takip eder.) bence 4. gibi ama. […]Yani orijinden geçmiş (orijinde parmaklarını gezdirerek) burayı kesmiş (x=1 noktasından grafiğe doğru parmağını götürerek) birinci 35. Sonra aynı şekilde tam (grafiği takip ederek 70 için grafiği kestiği noktadan x-eksenine doğru parmağını götürerek 2 noktasını kontrol eder) ikinciyi kesmiş. (Sol eli y-ekseninde hareket ederken sağ eli grafiği takip eder) Tam üçüncüyü kesmiş. (Grafiğin geçtiği noktayı bulur ve y-eksenine doğru sol elinin parmağını hareket ettirerek 140' ı kontrol eder) ve dördüncüyü kesmiş (bkz. Şekil 38).

Onur grafikleri incelerken orijinden geçmesi ve sıralı ikililerin belirtiği noktalardan geçmesi gerektiğini belirtmiştir. Zaman zaman önce apsisi daha sonra ordinati belirlerken, bazen de önce ordinat daha sonra apsis noktasını kontrol ederek grafikleri incelemiştir. Onur' un grafik incelemedeki başarısı ve önbilgilerine dayanarak fonksiyon kavramının tanımı sorulmuştur:

Onur: Fonksiyon eğrisi yaptık yine o kabloları kullanarak çünkü sonuçta çizgiydi bizim için o kablolar. Neydi onun adı böyle yukarı doğru çıkıyor sonra böyle gidiyor falan (eli ile masaya eğri çizerek) kabloyu kıvırıyorsunuz varsayımsal bir nokta alıyorsunuz (eli ile masanın üzerinde bir nokta işaret eder), tabi burası atıyorum apsiste 2' ye denk gelmiyor ama siz denk geldi deyin. […] mesela ben şekilli soruların hiç birinden derste muaf değildim. Mesela fonksiyonu çözerdim sonra arkadaşıma derdim bir koordinat sistemi çiz işte şuraya 2 yaz şuraya bilmem ne yaz o eğimi çizdirdim. Mesela elimle tarif ederdim, yani buradan geçireceksin sonra çizeceksin onu anlatırdım. O da çizerdi öğretmen de notunu verirdi.

Onur' un koordinat sistemi, sıralı ikililer ve fonksiyon grafiğini somut materyaller ile sezgisel olarak oluşturabildiğini belirtebiliriz. Ayrıca bireyselleştirilmiş eğitim programında görsel kavramlara yer verilmesi dikkat çekmektedir. Onur' un ifadeleri sözel anlatımın ve okuyucu ile iletişimin öğretim uygulamasındaki önemine ilişkin bulguları destekler niteliktedir.

Diğer katılımcılarından farklı olarak Özgür, iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkinin sunulduğu tabloyu anlamlandıramamıştır. Daha önce tablo incelemediği anlaşılan Özgür' ün görüşmede öncelikle tabloyu yorumlaması için zaman ayrılmıştır.

Özgür: (İlk hücreden okumaya başlar) Çizgi çekmiş şuraya (tablonun iki satırını birbirinden ayıran çizgiyi işaret eder). (Alt satırdan ilk hücreyi okumaya başlar) Gerçekten güzel olmuş (tablonun tamamında parmaklarını gezdirir). Burada da 105. Bu 105 ne oluyor bir dakika bakalım (tekrar satırın ilk hücresine döner ve yeniden okur). Haa hocam sanırım kalorisi 70, bir dakika hayır, kalori diyor (satırın alt sınır çizgisini inceler). […] (kutucukları hissetmeye çalışır ama hala sınır çizgilerini inceler. Kalori miktarı yazan hücreyi yeniden okur ve parmağını yanındaki hücrenin iç bölgesine dokundurur) Haa hocam, tüketilen 35 imiş. 70, 105. Toplamış bunu! […] (artık hızlı bir şekilde geçen süre hücresini okuyup bu satırdaki değerleri okumaya başlar) Geçen süre 1 saatmiş hocam, 2 saat, 3 saat, 4 saat.
Araştırmacı: Peki bu saatler ile tüketilen kaloriler arasında bir ilişki olabilir mi?
Özgür: Evet. Mesela saatte ne kadar tükettiği.
Araştırmacı: 1.saatte ne kadar tüketmiş? Nasıl okursun?
Özgür: Bakalım (geçen süre satırında baştan sona kadar parmakları ile inceler) haa o zaman şurada yazıyordu bir dakika bakalım (tüketilen kalori satırına geçer) şurada yazıyordu 70 tüketmiş hocam birinci saatte (ilk önce parmağına 70 sayısı dokunur, hala parmakları ile satırı inceliyordur) aa yok 35 tüketmiş ikinci saate, bir dakika o zaman (satırı tekrar inceler) hocam bu artmış 35, 35 artmış. Yani saatte 35 kalori tüketmiş.

Özgür ilk defa tablo incelediği için öncelikle satırları birbirinden bağımsız düşünerek her satırı ayrı ayrı incelemiştir. Sonda/tetikleyici sorular aracılığı ile tablodaki iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi fark etmiştir. Ancak Özgür her ne kadar değişkenler arasındaki ilişkiyi fark etse de bunu yaparken hücreleri sayarak, sezgisel olarak sorulara cevap verdiğini söyleyebiliriz. Ayrıca bu ilişkinin hücrelerdeki değerler toplanarak elde edildiğini düşünmektedir. Özgür fonksiyon grafiğini de daha önce incelemediği için görüşmede öncelikle koordinat eksenleri ve grafik için bilgi paylaşımı yapılmıştır. Daha sonra tablodaki ilişki düşünülerek bu ilişkiyi gösteren grafiği belirlemesi istenmiştir. İlk grafiği incelerken Özgür sol elinin işaret ve orta parmağını kullandığı için gridleri takip etmekte zorlanmıştır (bkz. Şekil 39, (a)).

(a) (b) (c)

Şekil 39. Özgür' ün grafik inceleme süreçleri

Özgür' den tek parmağı ile grafiği ve gridleri takip etmesi istenmiştir (bkz. Şekil 39, (b)). Özgür apsisi ve dokusu farklı olan grafiği belirlemesine rağmen bu nokta için görüntü olan ordinatı belirlemede güçlük yaşamıştır. Bu nedenle, Özgür' ün parmağını tutup iki örnek apsis noktası için sıralı ikilileri ve bu noktadan grafiğin geçip geçmediğini nasıl belirleyebileceği açıklanmıştır (bkz. Şekil 39, (c)). Bir sonraki grafik için artık orijinden incelemeye başlayarak grafiği ve ordinat için görüntü değerlerini daha rahat incelemiştir. Özgür bu kez 2 noktası için ordinatı doğru belirlemesine rağmen 70 noktası ile *y*-eksenini temsil eden çizgi arasında mesafe olduğu için hissedememiştir. Zaman zaman da gridleri takip ederken çizginin dışına çıkıp, sezgisel olarak boş alanda parmağını gride paralel olarak kaydırmaya devam etmektedir. Bu durum apsisi ve grafiğin geçtiği noktayı doğru belirlemesine rağmen ordinatı hatalı belirlemesine neden olmuştur. Bazen de grafiğin geçtiği sıralı ikililerde hem apsisi hem de ordinatı hatalı belirlemesine neden olmuştur. Her ne kadar Özgür gridleri takip etmekte zorlanmış olsa da grafikler ile ilgili yorumu sorulduğunda gridlerin anlamasını kolaylaştırdığını belirtmiştir. Fonksiyon kavramına dair neler hatırladığı sorulduğunda Özgür, sabit ve ters fonksiyon kavramlarını hatırladığını belirtmiştir.

Özgür: Sabit adı üstünde sabit yani, mesela şekil üzerinde böyle sabit her tarafa eşit tek bir noktada mesela olan bir fonksiyon.

Günlük hayatta iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi belirten bir örnek vermesi istendiğinde aşağıdaki alıntıya yer vermiştir:

Özgür: Sadece şeyde kullanıyorum. Bir yere gidiyoruz baba diyorum yolda kaç km hızla gidiyorsun? Mesela saatte 90 km ile gidiyorum. Kaç saatte varırız diye soruyor, ben kaç saatlik yolumuz kaldığını buluyorum. Bir kere spor yapmıştım günde ne kadar koştuğumu hesaplamıştım.

Özgür' ün ifadelerinden iki kümenin elemanları arasındaki ilişki ve bağımlı-bağımsız değişken kavramlarının farkında olduğu ve cebirsel olarak hesap yapabildiğini söyleyebiliriz.

Seda iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi göstermek için daha önce de grafik kullandığını, bunun için Word' de grafik çizdiğini ve ilköğretimde dikey olarak tablo oluşturmayı öğrendiğini ifade etmiştir.

Seda: […] Ben tabloyu nasıl çiziyordum biliyor musunuz? Geçen süre saat ve tüketilen kalori var ya şunları yukarı sütunlara yazıyordum. Boylamsal tablo çiziyordum ben.
Araştırmacı: Dikey daha mı anlaşılır oluyor?
Seda: Yok yani kişiden kişiye değişiyor. Ama görme engelli birisi için bu daha somut olabiliyor. Çünkü biz yazarken de nasıl olduğunu anlamak için böyle yazıp yanına yazarız ya her şeyi. Bu daha somut aslında diğerinden. (Parmağını hızlı bir şekilde gezdirerek) 1 saatte 35, 2 saatte 70, 3 saatte 105, 4 saatte 140 kalori yakmış. […]
Araştırmacı: Tabloya göre nasıl bir ilişki var ikisi arasında? Cebirsel ifade edebilir miyiz?
Seda: İki kat arttığını biliyorum saat aralığı boyunca. Buradan yola çıkarak saate belli bir bilinmeyen değeri versek, kaloriye de belli bir bilinmeyen değeri versek. […] Mesela kaloriye y dedik. Birinci saatte y ise ikinci saatte 2y, 3y, 4y diye değerlendirebilir miyiz? Ama dört katı artıyor sonuçta. 35' in 4 katı.
Araştırmacı: Sen o zaman 35 y mi dedin?
Seda: Evet 35' e y dedim ben.
Araştırmacı: O zaman tüketilen kaloriye y demedin.

Seda: Hayıır. Tüketilen kalori bir saatte 35 kalori ya? Tamam buna y dedim işte. Tamam bir saatte 35 kalori tüketiyor. 35 kaloriye y dedim.
Araştırmacı: Bir saate de x mi diyeceksin o zaman?
Seda: Ama olmaz ki o zaman (gülüyor). Doğru. Buradaki ilişkiyi, denllemi çözerim ama yazamam. Ben onları nasıl çözdüğümü bilmiyorum.

Seda Braille yazıya daha uygun olduğu için tablonun yatay olarak verilmesi gerektiğini söylemektedir. Tabloda yer alan değişkenleri ve bu değişkenler arasındaki ilişkiyi belirlemesine rağmen, Seda bu ilişkiyi gösteren cebirsel bir ifade yazmakta başarısız olmuştur. Burada değişkenleri belirleme ve bu değişkenleri harfli ifade olarak temsil etmede sıkıntı yaşadığı açıktır. Seda koordinat ekseni ve sıralı ikililer ile daha önce çalıştığı için grafikleri incelerken güçlük yaşamamıştır. Apsis ve ordinatı inceledikten sonra grafiğe dokunur:

Seda: İşte bu eğri neyi ifade ettiğini bilmiyorum.
Araştırmacı: Aslında aradaki ilişkiyi gösteren o. Mesela 1. saatte kaç kalori yakmasını istiyorsun?
Seda: 1 saatte 35 kalori.
Araştırmacı: Takip edebilir misin o noktadan geçmiş mi çizgi?
Seda: Geçmiş. O zaman 2. saatte de gittim gittim 70 kalori (2 noktasından x=2 doğrusu boyunca devam eder ve grafiğe dokunup y-eksenindeki noktayı kontrol eder). 3' te de 105.

Seda hızlı bir şekilde tek eli ile grafiklere dokunur. İkinci grafiği incelerken artık hemen grafiğe odaklandığı, apsis ve ordinatı incelemekle zaman kaybetmediği gözlenmiştir.

Seda: Mesela (grafiğe dokunur hemen) burada da, eveet anladım şu anda. Mesela 1 saatte yine 35, 2 saatte 70 kalori yakmış. 3 satte 105 kalori yakmış (tek parmağı ile x=3 doğrusu boyunca hareket eder ve grafiği (3,105) noktasında arar, bulamayınca bu nokta etrafında arar, eğriyi hissedince y=105 doğrusunu takip ederek kontrol eder)… Bir dakika görücem (tekrar 3 noktasından kontrol eder). Şurada kesişiyor hocam (grafik ile x=3 doğrusunun kesiştiği noktayı işaret eder) şurada mı, şurada mı (y=105 doğrusu ile grafiğin kesiştiği noktayı ve x=3 doğrusu ile grafiğin kesiştiği noktayı işaret eder. x=3 doğrusunda ilerlerken tüm köşe noktalarında (3,35), (3,70) ve son olarak (3,105) parmağı ile durup grafiği kontrol ederek ilerliyor ve sayıyor.)

Yukarıdaki betimlemelerden ve alıntılardan Seda' nın sezgisel olarak grafiğin geçeceği noktaları tahmin ederek hızlı bir şekilde kontrol edip grafikleri incelediğini söyleyebiliriz. Bunun için gridlerden yararlanmıştır. Ancak grafiğin orijin noktasından başlaması gerektiğini ilk incelemede anlamlandıramamıştır. Fonksiyon kavramı üzerine görüşmede aşağıdaki ifadelere yer vermiştir:

Seda: Nedir bu fonksiyon? Ne işe yarar? Neyi tanımlar? Neyle neyi tanımlamak için kullanılır? Bir kere bunu anlamadım. Problem çözmenin az çok ne işe yaradığını biliyorum veya denklemlerin. İşte kümelerin neye yaradığını biliyorum ama fonksiyon neyi anlatmaya yaradığını bilmiyorum. O yüzden de kafamda oturtamıyorum hiç bir şekilde.
Araştırmacı: Peki sen günlük hayatta iki küme ayrı kümeyi temsil eden değişkenler arasındaki ilişki kurduğun oldu mu?
Seda: […] Bizimkiler çok fazla diyet yaparlar mesela, az önce o kalori mevzusundan geldim. Mesela bir saatte yürüdüğü kaloriyi ve kaç saatte kaç kalori yakılacağına dair ilişkiyi kurma konusunda en basitinden veya dört kişilik bir yemek yapıyorun onun ne kadar malzeme katacağını mesela 2 kaşık un katılacaksa 8 kişiye kaç kaşık katılmalıdır veya ne kadar pişmelidir. Ders çalışırken sınavda, makale okumaktan nefret ediyorum, kaç sayfa okudum işte bir saatte 50 sayfa okudum haaa demek ki bu 100 sayfayı iki saatte bitiririm gibi. Bir çok ilişki kuruyorum fonksyon olduğunu sizinle konuşmamızdan anlıyorum.

Böylece Seda' nın iki kümenin elemanlarını temsil eden değişkenler arasındaki ilişkiye dair fikir sahibi olduğunu ve görüşmenin sonucunda fonksiyon ile ilişki kurmanın mümkün olduğunu algılamıştır. Ayrıca bağımlı ve bağımsız değişken kavramları ile bu değişkenlerin temsil ettiği elemanlar arasındaki ilişkiye dair vurgusu aşağıda yer almaktadır:

Seda: Fonksiyon kavramını anladığımı düşünüyorum. Aslında doğada var olduğunu düşünüyorum. Bağımsız olarak değişen bir şeyin, kendisi ile birlikte değişen yeni bir eşi olduğunu ifade edebiliriz. Zaman arttıkça insanın yaşı değişir ya bunun gibi aslında her bir değişkenin kendisine bağımlı olanları da değiştirdiğine dair bir şey. Bununla ilgili çözebilecek, somutlayabilecek kıvama geldim. Çok zor olduğunu düşünüyordum.

Aydın grafikleri incelemek için eliyle dokunduğunda daha önce görme engelli bireylere matematik anlattığından ve kendisi de grafik okuyup çizebildiğinden genel bir perspektiften fikirlerini ifade etmiştir.

Aydın: (Grafiğe dokunur dokunmaz) Haa şimdi burada iş karıştı işte. Burada çizgileri algılaması açıkçası zor. (Önce eksenlerin adlarını inceler) Şu ara çizgiler işi karıştırmış, onların olmaması lazım yani (gridleri işaret eder). Şu 35' e çizgi çekmenize gerek yok. Şu alt çizgi ile (x-ekseni) şu yan çizgi (y-ekseni) yeterli, artı şu aradaki şu çizgiler (ilişkiyi gösteren grafik). Şunlara gerek yok şunlar işi karıştırmış (gridler). Şuradan kendisine göre şöyle çizecek (parmağı ile y=35 doğrusunu çizer) kendisine göre şöyle çizecek (parmağı ile y=70 doğrusunu çizer) parmağını böyle gezdirdiği zaman çizgi olması gerekmiyor.
Araştırmacı: Mesela bu doğru olan grafik mi diye sorduğumda nasıl anlayacak bunu?

Aydın: Şimdi bakalım 35 tamam oraya bakar evet birincide 35.
Araştırmacı: 1' i nasıl bilecek.
Aydın: Buradan 1 (x=1 doğrusu boyunca ilerler (1,35) noktasında durur) buradan bu (y=35 doğrusu boyunca ilerler (1,35) noktasında durur). Siz bana deseniz ki şu masada 1 metre sağa 15 cm içeri gir dediğinde şu bir metre şu da 15 cm buyurun size o nokta (masa kenarından tahmini noktalar seçer). […] Şu masaya o noktayı bulmak için iplerle şey çekmeye file gibi yapmaya gerek yok.
Araştırmacı: Kendisi oluşturacağında da kabaca oluşturacak o halde.
Aydın: Kabaca evet. Şimdi çocuk şu çizgiler ne diye düşünecek. […] Şuraya geldiği anda bu mudur onun devamı, şu mudur onun devamı (gridleri ve grafiği gösterir). Evet bunu çift çizgi gibi yapmışsınız (grafik). Şuraya geldiğim anda şu yana mı döneceğim bu yana mı (grafik ile (2,70) noktasının kesişim nokatasını işaret eder). Çift çizgi olması işi biraz kurtarıyor ama bence şu çizgilerin hiç birine gerek yok. Nasıl ki sizde normalde bu çizgiler var mı? Diyorsunuz ki şöyle bir şey x-y-ekseni, bu çizgiler böyle var bu çizgiler yani kareli defter gibi (deftere örnek çizer). Birim kareler olabilir harita defteri gibi, ama biz mesela ekonomide şuraya çizeyim şöyle bir şey şu da bizim arz eğrisi (düzgün azalan grafik çizer). İşte şurası 3 noktası burası 7, yani 1,3,5,…yapabilir. Hiç bir şekilde öyle yapmadık. […] Tamam grafiği çizmek istediğinde 7 diyecek, şura da 3 diyecek böyle çizecek (y-ekseninde 3 noktasından x-ekseninde 7 notasına doğru parçası çizer).
Araştırmacı: Grafiğimiz böyle bir doğru değilse?
Aydın: Eğri olsun, o biraz hayal ürünüdür. Haa derseniz ki cm cm çizmeli o zaman zaten cetvel kullanmalı. Siz bana deseniz ki (3,7) noktasını göster yani x' i 3 olan y' si 7 olan noktayı göster ben burayı gösteririm. 1,2,3 (x-eksenine noktaları yazar) ondan sonra 1,2,3 (y-eksenine noktaları yazar). Yok öyle bir şey şurası 3 burası 7 (tahmini doğru parçaları çizer ve kesişimi işaretler) burası (3,7) noktası. Yine bizim küptaş kasada analitik geometride çocuğa (2,5) noktasını göstereceksem o delikler çok işe yaradı. Mesela 2 tane bu yana (x-ekseninde sağa doğru tahmini 2 birim çizer) 5 tane bu yana (y-ekseninde tahmini 5 birim yukarı doğru çizer). Ama o kasanın özelliğinden onda da çizgiler var, delikler vardı daha doğrusu. Ama o kasanın özelliğinden. Yeri geldi düz kağıt üzerinde şurada bana (2,7) noktasını göster dediğim zaman şurada mı gösterecek (sezgisel olarak (2,7) noktasını işaret eder) burada mı gösterecek (sezgisel olarak (7,2) noktasını işaret eder). Mesele o yani 2 nedir (x-ekseninde işaret eder), 7 (y-ekseninde işaret eder) nedir? (2,7) noktasından 3 virgül noktasından arasındaki aralık nedir? Bunu kendisi kasada öğretiyorum oraya bir taş koyuyor, oraya bir taş koyuyor (sezgisel noktaları işaret eder) say bakalım delikleri tamam (aradaki mesafeyi işaret eder). Bu kasanın özelliğinden. […] […] Hatta hocam bana şöyle bir şey yapardı. Bunu böyle bizim kabartma yazıda da vardı bu özellik bunu tersten çizerdi böyle (defter yaprağına tersten arz eğrisi çizer) ki şöyle yapardı bak bakalım Aydın şu bu yana mı eğri bu yana mı eğri (bkz. Şekil 40).

Şekil 40. Aydın' ın Latin harfler ile notları ve grafik çizimi

Aydın verilen grafiklerde gridlerin yer almasını eleştirirken görme engelli bireylerin sezgisel olarak birimlerini kendisine göre belirleyerek grafik çizmesinin daha uygun olacağını belirtmiştir. Öte yandan Aydın sıralı ikililer için tahmini olarak nokta belirlemenin anlamayı kolaylaştıracağını düşünmektedir. Birimleri tespit edilmiş grafik çizmek için küptaş kasa materyalini kullanmanın daha uygun olacağını belirtmiştir.

Şekil 41. Aydın' ın kabartma grafik çizme örneği

Ayrıca kabartma çizgi hissi oluşturması için kalem ile kağıda basınç uygulayarak ters yüzündeki dokuyu kullanmayı başka bir alternatif uygulama olarak paylaşmıştır (bkz. Şekil 41). Ancak görme engelli bireylere matematik anlatarak yardımcı olan bir diğer katılımcımız gridlerin kullanılmasına ilişkin bundan farklı olan aşağıdaki görüşü beyan etmiştir:

Araştırmacı: Gridler hakkında ne düşünüyorsunuz? Bunlar karışıklığına neden olur mu?
İlker: Ama kesişimi nasıl gösterecektiniz?
Araştırmacı: Kabaca bir grafik çizsin öğrenci mesela kesişimi göstermesin.
İlker: Hayır hayır hayır zaten sıkıntımız o. Her şeyi hayali yapıyoruz. Bak buradan bu geçiyor. Tamam da yani geçeni görebilir miyim acaba?

İlker sezgisel ya da tahmini algılar yerine, tanımına uygun olarak grafiklerin çizilmesini mümkün kılacak uygulamalara yer verilmesi gerektiğini düşünmektedir.

4.3.4.1. Fonksiyon ve Fonksiyonun Grafik Temsili

Görüşmede grafiksel temsilde fonksiyon kavramının tanımından yararlanarak yorum yapabilme, grafiğin bir fonksiyona ait olup olmadığını tespit etme becerilerini ölçmek amacı ile katılımcılara bazı sorular yöneltilmiştir (bkz. EK 1, soru 19). Bu sorulardan ilki grafik okumaya dairdir:

Araştırmacı: Bana 7' ye 8 noktasını gösterir misin?
Çağatay: (Eksenlerde 7 ve 8 noktalarını bulur ve parmakları ile işaret eder) Şunlar galiba?

Çağatay' ın ifadesinden sıralı ikilileri tespit etmeye dair önbilgisindeki eksiklik görülmüş ve bu eksikliği gidermek içinsıralı ikililerin koordinat düzleminde nasıl belirleneceğine dair izahat yapılmıştır. Buradan elde edilen en dikkat çekici bulgu koordinat düzlemine dair önbilgilerinde eksikliklerdir.

Her bir grafik ayrı ayrı katılımcılara sunularak bu grafiklerin fonksiyonlara ait olup olmadığı ve buna karar verirken nelere dikkat ettikleri sorgulanmıştır. Böylece, fonksiyon kavramının tanımına dair dikkat etmeleri gerek hususlar için grafik temsili üzerinden bilgi edinilmesi sağlanmıştır.

Çağatay: Tabiki de fonksiyondur. Ortada bir tanım bir değer kümesi var bir kere. İki öğeden mutlaka ikisi de var bir tanesi olsaydı imkansız diyebilirdim. Böyle bir koordinat düzleminde bahsetmiş fonksiyondur diyebiliriz. […] Tüm x noktalarını düşünecek olursak, evet fonksiyon. Çünkü her birinin bir karşılığı var.
Araştırmacı: Tamam o bir kalsın ben sana başka bir tane daha vereceğim.
Çağatay: Dışa doğru (grafikten bahsediyor). Bu bir fonksiyon mu? (düşünür, bu sırada önce grafik üzerinde elini gezdirir daha sonra y-ekseninin pozitif kısmında grafik devam ediyor mu arar) burada y düzlemi. Ne verilmiş burada takip edelim (grafiği takip eder). Bence evet çünkü şu kolları ayrı ayrı dağılmış (birinci ve ikinci bölgedeki grafiğin parçalarını işaret eder). Şunlar (grafiği gösterir iki eli ile sağ ve sol parçaları) yani şuna tanım dersek (x-eksenini gösterir) şu görüntü oluyor galiba (grafiğin üzerinde ellerini gezdirirerek) ayrı ayrı dağılmış çünkü.
Araştırmacı: Ayrı ayrı dağılmış derken tanım kümesindeki her nokta için mi?

Çağatay: Aslında şu an fonksiyon değil. Sayı yok.
Araştırmacı: Ben vermedim aslında var.
Çağatay: Hmm. Şekile baktığımız zaman. Evet yani öyle diyorsak o zaman fonksiyon.
Araştırmacı: Şuna da bakar mısın? (üçüncü grafik)
Çağatay: Burada bir tane var (-4 noktasını işaret ediyor). Bu değil. Şöyle söyleyeyim demiştim ya bir insan aynı anda iki evde bulunamaz diye, şöyle şuraya giderse (y-ekseninin pozitif kısmı ile grafiğin kesiştiği noktayı gösterir) burada olamaz (y-ekseninin negatif kısmı ile grafiğin kesiştiği noktayı gösterir). Buraya giderse şurada olamaz. Ya burada olacak ya burada olacak.

Çağatay' ın her grafik için ayrı incelemelerdeki ifadelerine baktığımızda, fonksiyon tanımına dair tanım ve görüntü/değer kümesi, tanım kümesindeki her elemanın bir tek görüntüsünün olması gibi noktalara dikkat ettiği gözlenmiştir. Bu nedenle buradaki yanılgıları daha önce grafik incelememiş olmasından kaynaklanabilir. Bu katılımcıların görüşmede yer alan bağımlı ve bağımsız değişkenlerin temsil ettiği elemanlar arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği incelemesi ve fonksiyon kavramına dair önbilgisi yardımıyla bu değerlendirmeleri yapması dikkat çekici bir bulgudur. Burada grafik üzerinde tanım ve görüntü/değer kümelerinin elemanlarının eksenler üzerinde yer almamasını, Çağatay' ın bu grafiğin fonksiyon belirtmiyor biçiminde değerlendirmesi önbilgilerindeki grafiğe dair eksikliklerinden kaynaklanmaktadır. Aksine koordinat ekseninin olmasını ise fonksiyon olması için yeterli görmüştür. Fakat üçüncü grafikte fonksiyon olmadığını tespit etmesi ile bu fikrinin grafik okumadaki tecrübesizliğinden kaynakladığını söyleyebiliriz. Çağatay' ın tanım kümesini *x*-ekseni ve değer kümesini *y*-ekseni olarak tanımladığı görülmektedir.

İlker birinci grafiğe eliyle dokunduğunda öncelikle sıralı ikilileri ve eşlemeleri inceler ve daha sonra grafiğin geçtiği noktaları tespit etmeye çalışır:

İlker: (Noktaları ve farklı dokudaki eşlemeleri kontrol eder) Tamam bu noktadan eğri geçiyor. O zaman -1 kısmını ne ile eşliyor (kontrol eder), o zaman şunu diyeceğiz, -1, 5' e gidiyor. Hayır. -1 neye gidiyor burada? 0' a gidiyor. (Tüm noktaları tek tek eğri üzerinde olup olmadığını kontrol eder). Bence değildir.
Araştırmacı: Neden?
İlker: Sezgisel desem. Mantıklı gelmedi eşleşmeleri, fonksiyonda bir mantığa göre bunların eşleşmesi gerekmiyor muydu? Yanlış mı hatırlıyorum doğru mu hatırlıyorum bilemedim.

İlker' in ifadelerinden tanım ve değer kümelerindeki elemanlar arasında yapılan eşlemenin cebirsel olarak bir örüntüye dayalı olması gerektiğini düşündüğü belirlenmiştir. İlker' in daha önce grafik ile öğretim uygulamalarına mağruz kaldığı düşünüldüğünde, koordinat ekseninde sıralı ikililerin gösterimine dair önbilgisinde eksiklik olduğunu söyleyebiliriz.

İlker: Eğri (eğriyi takip eder), tahmini bir şey belirleyelim buna da. Buraya geldi tamam buraya geldi, buraya geldi (eksenler ile kesiştiği noktalara tek tek dokunur). Şu kısmında bir şey geçmiyor (y-ekseninin pozitif olduğu kısmı işaret eder). Şu aralık tamam (x-ekseni ile kesiştiği nokta ile y-ekseni arasıdaki aralığı iki parmağının arasına alarak gösterir). Bunun aralığı yakın (y-eksenini kestiği nokta ile orijini iki parmağı ile gösterir). Bununla bunu aralığı yakın (orijin ile x-ekseninin negatif kısmında kesiştikleri nokta arasındaki aralığı iki parmağı ile belirtir). […] Şu kısımda bir sıkıntı var ya burayı niye tamamlamamışız (y-ekseninin pozitif kısmını işaret eder). Bu bana kalırsa fonksiyona daha yakın.
Araştırmacı: Neden?
İlker: Eşit aralıklarla kesmiş sanki doğruları. Bu biraz bana böyle gibi geldi.

İlker incelemesi istenilen ilgili grafiğin fonksiyon belirtmesi için belirli bir kurala bağlı olması gerektiği fikrini burada yansıtmaktadır. Ancak bunu sezgisel olarak koordinat eksenleri ile grafiğin her kesişim noktasını baz almış ve bu noktalar arasındaki aralıkları tahmini belirleyerek yapmıştır. Böylece aralıkların ölçüleri birbirine yakın ise belli bir kurala göre çizildiğini düşünerek fonksiyon olduğunu ifade etmiştir. Fakat *y*-ekseni ile grafik arasındaki bir aralığın ölçüsünün diğerleri ile aynı olmadığını ifade etmiştir. Bu durum çember denkleminin fonksiyon olduğunu düşünmek gibi bir yanılgıyı doğurabilir.

Onur da yine grafik üzerinde noktaların verilmemesini bu grafik bir fonksiyon tanımlamıyor şeklinde yorumlama yapmasına sebep olmuştur.

Onur: […] Şu x, bunda noktalar yok (eksenler üzerinde ve eğri üzerinde parmaklarını sürekli gezdirir, sol eli ile 2. ve 3. bölgeyi, sağ eli ile 1. ve 4. bölgeyi tarar).

Onur daha önce fonksiyon grafiği incelediği ve oluşturduğu için grafiklerde parmakları ile önce eğriyi, sonra eksenleri ve eksenler ile grafiğin kesiştiği noktalara dokunmuştur:

Onur: Hmm anladım, anladım bir dakika, şunu (2. grafiğe döner) ee burada nasıl? (parmaklarını eğri üzerinde gezdirir). Buradan geçiyor (y-eksenini kestiği nokta), aynı yerden geçiyor (y-ekseni için bir nokta seçer ve iki tane x noktası olduğunu işaret eder), haa x-ten alacağım. (Sol elinin işaret parmağını y-eksenini kestiği noktaya koyar ve sağ eli ve *sol elinin diğer parmakları ile yukarı doğru eğriyi takip eder. x-eksenine paralel doğrular çizen el hareketleri yapar) Anladım. 3. grafik fonksiyon değil.*

Onur fonksiyon tanımını doğrudan göz önüne almasa da dikey paralel doğrular testi yardımıyla tanım kümesindeki elemanın bir tek görüntüsü olması gerektiği fikrine odaklanmıştır. Ancak burada *x*- ve *y*-eksenlerini tanım ve görüntü/değer kümesi olarak tayin ederken güçlük yaşamaktadır.

Aydın' ın grafikleri incelerken tek ve çift fonksiyon, polinomlarda başkatsayıya bağlı grafiğin kolların yönlerine dair önbilgileri ile çelişkiye düştüğü söylenebilir:

Aydın: […] Ama bu ne diyorduk negatif fonksiyon mu bir şey yani bu şey negatif. Biz bunları döviz hesaplamasında gerçi o aşağıdandı. Bu yana gidiyorsa (düşünür) x, y-ekseni (parmağı ile eksenleri işaret eder) işte türk lirası (x-eksenini işaret eder), dolar (y-eksenini işaret eder) türk lirası şuna gelirse dolar bu olur, türk lirası şuraya gelirse dolar bu olur gibi.(İkinci grafiği inceler) Tabi ben bunları unuttum fakat bu da bir fonksiyondur. Şuradan sonrası için diğer bir fonksiyon mu oluyordu (kırılma noktasını işaret eder)? Bu da bir fonksiyondur çünkü neden x karşılığı var, y karşılığı var (parmağı ile y-ekseninden x-eksenine paralel doğrular çizerek gösterir) arada kesintiye uğrayabiliyordu bazı tanımsız kısımlar oluyordu (kırılma noktasını işaret eder) ama bunda öyle bir şey de yok. (Diğer grafiği inceler) Yarı elips gibi (eğriye dokunur) bu da fonksiyondur da artı eksili fonksiyon öyle bir şey hatırlıyorum ortada bir artı eksi olayı olması lazım.

Aydın' ın ifadelerinden tanım ve görüntü kümelerine dikkat ettiği, paralel doğrular testi uygulamaya çalıştığı, kırılma noktalarının da verilen grafiğin bir fonksiyon temsil etmeye engel teşkil etmediğinin farkında olduğu gibi pek çok noktaya dair algısından söz edebiliriz. Ancak yine de kavramlar arasında karmaşa yaşadığı (polinom ve fonksiyon kavramlarını ayırt edememesi) veya başka bir yorum ile fonksiyonu özellikleri ile ayırt edemediğini (tek, çift fonksiyon vb.) ve yanılgılarının olduğunu söyleyebiliriz.

Özgür daha önce koordinat eksenleri ile çalışmadığı için grafikleri sadece incelemiş ve aşağıdaki alıntılara yer vermiştir:

Özgür: […] Bir şey söyleyeceğim x niye burada yazıyor? (x-ekseninin adlandırmasını işaret eder)
Araştırmacı: Çünkü x-ekseni o.
Özgür: Şu taraf şu -4' ün olduğu taraf dememiş miydik?
Araştırmacı: Tamamı x-ekseni

Özgür: Ooo bu kadar büyük mü ya?

Seda grafiklerin bir fonksiyona ait olmasından çok grafiklerin nasıl çizildiğine odaklanmıştır:

Seda: Bunun y bunun x-i ifade ediyor olmasının mantığını çok merak ettim. O zaman y ile x arasındaki ilişkiyi belirtmiş ama neye göre? […] Eğriyi tek başına görmek benim için ciddi bir şey mesela bunun nasıl çizildiğini anlamak, bu o zaman geçtiği noktalar verilmediği için fonksiyon olmuyor öyle mi?

Seda' nın ifadelerinden diğer katılımcılara benzer olarak, eksenler üzerinde noktaların verilmemiş olmasını ilgili grafiğin bir fonksiyona ait olmadığı şeklinde algıladığı görülmektedir. Ayrıca tanım ve görüntü kümelerinin *x*- ve *y*-eksenlerine nasıl tayin edildiğinin belirtilmesi de önem arz etmektedir.

4.3.4.2. Fonksiyon ve Cebirsel Temsili

Görüşmede yer alan soru ile katılımcılardan iki değişkenin temsil ettiği elemanlar arasındaki ilişkiyi belirleyip harfli ifadelerden yararlanarak cebirsel temsili oluşturmaları beklenmektedir (bkz. EK 1, soru 20).

Görüşmede Çağatay' ın fonksiyon kavramına dair önbilgilerine dayanarak verilen bir fonksiyonu cebirsel olarak ifade etmesi için ona yönlendirici sorular sorulmuştur:

Çağatay: (küptaşa soruya dair bilgileri yazar) Şu öğrenci şu öğretmen, evet. Mesela öğrenci için 20s diyebiliriz. Çünkü her sınıfta 20 öğrenci var ve s de öğrenci sayımız bizim bunlar çarpım durumunda olabilir mesela. t de öğretmen.
Araştırmacı: Okuldaki tüm öğrencilerin sayısı s idi.
Çağatay: Evet o zaman s/20.
Araştırmacı: O zaman öğretmen sayısı?
Çağatay: Hmm sınıf sayısı?
Araştırmacı: Cebirsel olarak nasıl ifade edersin?
Çağatay: s/20= t.
Araştırmacı: Bu bir fonksiyon olabilir mi?
Çağatay: Olabilir. Şöyle söyleyeyim her sınıfa ancak bir öğretmen girebiliyor. Birden fazla öğretmen giremiyor. Öğretmenin sınırı olmasaydı.
Araştırmacı: Peki tanım kümesi ne burada?

Çağatay: Tanım kümesi öğrenciler, yani 20 tane. Bir dakika (düşünür). Tanım kümesi öğretmenler. Öğretmen sayısı. Önce tanım kümesi 1 gelir. t yani, ondan sonra s.
Araştırmacı: Yani f(t) mi diyeceğiz?
Çağatay: f(t)=s. s/20 mi?
Araştırmacı: Nasıl yapılandırdık?
Çağatay: Önce tanım kümemizden yararlandık öğretmen sayısıydı, bunu bulduğumuz takdirde, yani bir eşitlik diğer eşitliği veriyor aslında. Yani f(t) fonksiyonunu bulduk. Ondan sonra eşittir dedik, s/20 olduğu zaman hepsi eşit oluyormuş.

Çağatay tanım ve görüntü kümesini belirledikten sonra, tanım kümesindeki her elemanın bir tek görüntüsünün olduğunu vurgulayarak eşlemenin nasıl bir ilişki altında kurulacağını tespit etmeye çalışmıştır. Ancak daha önce de yaptığı gibi, fonksiyonu tanımlarken tanım kümesini 1 ve değer kümesini 2 olarak kodladığı dikkat çekmektedir. Bu durum soldan sağa doğru kümelerin sıralanışı ile ilgili olabilir. Öğrenci ve öğretmen sayısına bağlı olarak bağımlı ve bağımsız değişkenler için sembol belirlerken, çarpma veya bölme işlemi yapma konusundaki kararsızlığı da cevabından emin olmadığı şeklinde yorumlanabilir. Cebirsel olarak fonksiyonu ifade ederken, sonda/tetikleyici sorular yardımı ile yönlendirmeler olsa da Çağatay' ın fonksiyon tanımını dikkate alarak cebirsel ifadeyi belirleme kavrayışının başarılı olduğunu belirtebiliriz. Ancak burada elde edilen fonksiyonun bileşke fonksiyon olduğu göz ardı edilmiştir. Bir başka yanılgı ise kümelerin eleman sayısı için kullanılan harfli ifadeler ile fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin elemanlarını temsil eden değişkenler için aynı harfli sembolün kullanması olmuştur. Benzer yanılgısı olan Cahit, bağımlı ve bağımsız değişkenleri tespit etmek yerine tahmini sayılar üzerinden genellemeye ulaşmaya çalışmaktadır:

Cahit: İyi de her öğrenciye bir öğretmen düşmüyor ki.
Araştıracı: Her öğrenciye değil ama her sınıfa bir öğretmen var.
Cahit: Evet kurabiliriz aslında çünkü bize burada sınıfı vermemiş. Bir dakika sınıfı az önce ifade ettiğimiz şekilde yapacak olursak, bize öğrenciyi vermiş 20 öğrenci sınıf başına, t' yi vermiş, s' yi vermiş. Bilmediğimiz şey burada kaç tane sınıf olduğu. Kaç tane sınıf olduğunu bulursak t ve s' ye ulaşmış oluruz. İyi de s kaç? s' ye 500 dediniz. 20' şer 20' şer dağıttığınızda kaç sınıf olur? 20, 40 diye gideceksin ya da 500 bölü 20 yapacaksın. 25 tane sınıf elde ettim. 25 tane de öğretmen olması gerekiyor bu durumda.
Araştırmacı: Bunu cebirsel olarak söyleyebilir miyim?

Cahit: Söyleyebilirsiniz. s bölü t pardon s bölü 25. s bölü 20 (net bir sesle söyer) s bölü 20 eşittir t. Artık fonksiyon belirtir.

Cahit' in Çağatay ile benzer hatalara ve yanılgılara sahip olduğu belirlenmiştir. Fonksiyonun cebirsel ifadesinde değişkenler için kullandığı semboller ve genellemeye ulaşmada denklem kurmanın yeterli görülmesi bu yanılgılar arasındadır. Bu süreçte Cahit' in işlemleri gerçekleştirirken işlemsel hatalar yapması da derste not tutma imkanının bulunmamasından kaynaklanabilir. Bu yorumu yapabilmemizi sağlayan bir diğer bulgu ise Aydın' ın problemi anlama adımındaki ifadeleridir:

Aydın: Böyle kendimce not almaya ihtiyacım var. 20 sınıf dediniz 1 öğretmen (sadece sayıları not alır) S bir de T. Şimdi şu S ile T arasındaki bağlantıyı kuracağız (latin harfler ile notlar alır). Şimdi kaç sınıf olduğu belli değil. S sınıf sayısı mıydı T de öğretmen? […] Ama bunu kafadan düşünseniz şurada 45 saniyemi harcadıysam kafadan düşününce 3 dakika düşünmek durumundayım. 20 neydi 1 neydi S neydi? Ama şimdi bakın ben bunun ne olduğunu normal yazı bildiğim için böyle yaptım ama bunu kabartma kendince tablete bile yazsa yine aklında kalıcı olacak. Veya dediğim gibi kasa yöntemi kasaya bir 20 yazacak bir 1 yazacak kendine göre bir S anlamına gelen bir işaret mühim olan bize dört tane veri verildiğini önüne yazacak.

Burada dikkat çeken bulgu Aydın' ın Latin harfleri bilmesi değil, okuyamadığı halde Latin harfler ile notlar aldığında problemdeki verileri hatırlamasının kolaylaşmasıdır. Aydın' ın da benzer şekilde denklem kurmayı fonksiyonun cebirsel temsili olarak algılaması diğer bir bulgudur.

Özgür ile yapılan görüşmede iki değişkenin temsil ettiği elemanlar arasındaki ilişkiyi tespit etme ve bunu cebirsel olarak ifade etmede önbilgilerinin eksik olduğu belirlenmiştir:

Özgür: Denklem kurarsak buluruz. Şimdi 20s mi? Bir dakika bir daha alıyım mı hocam? 20 tane sınıf var? Haa 20 öğrencilik sınıflar, öğrenci sayısı s değil mi? Bir tane öğretmen ders veriyor. s+1 mi diyeceğiz hocam? Çünkü her sınıfa bir öğretmen ders veriyorsa.
Araştırmacı: Okuldaki toplam öğrenci sayısı s, her öğrenciye bir öğretmen mi?
Özgür: Yok o olmaz o zaman. 20s+1 mi dememiz lazım?
Araştırmacı: +1' i neden düşünüyorsun?
Özgür: Bir öğretmen veriyor çünkü her sınıfa. 20 kişilik sınıfa 1 öğretmen veriyor.
Araştırmacı: Kabul et ki 5 tane sınıf olsun bu okulda.
Özgür: Tamam. Öğretmen sayısı 5.
Araştırmacı: O zaman artı bir nereden geliyor?

Özgür: Haklısınız. 20s diyeyim.
Araştırmacı: Okuldaki bütün öğrenci sayısı s değil mi? Bir de bunu neden 20 ile çarpıyoruz?
Özgür: Hayır 20 ile çarpmıyacağım aslında. Hani 20s demiştik ya 20 kişilik sınıfa bir öğretmen demiştik ya onu söylemeye çalışıyorum.

Özgür başlangıçta $20s$ ve $s + 1$ gibi harfli ifadeler ile her sınıfa bir öğretmen eşlemesi ile öğretmen sayısını bulmaya çalışmaktadır. Daha sonra $20s + 1$ ifadesi ile her sınıfta 20 öğrenci ve 1 öğretmen fikrini temsil etmek istemiştir. Özgür' ün hatasını anlaması için örnek durum üzerinden düşünmesi sağlanmıştır. Böylece 5 sınıfı olan okul için öğretmen sayısının da 5 olacağı fikrine sahip olmuştur. Fakat her sınıfa bir öğretmen fikri yerine, 20 öğrenciye bir öğretmen fikrine odaklanmış ve bu durumu $20s$ ile ifade etmiştir. Buradan Özgür' ün denklem kurma, harfli ifadeler ile temsil etme gibi alt kavramlara dair önbilgilerinde eksikliklerin olduğunu belirtebiliriz.

Benzer durum Seda' nın alıntılarında da yer almaktadır:
Seda: 20 öğrenci ise 20s diyebiliriz oraya, öyle diyebilir miyiz hocam?
Araştırmacı: Toplam öğrenci sayısı s diyor.
Seda: 20s, 1 t ise diyelim ki buradan hesaplarım diye düşündüm. Kaç sınıf varsa 5t=100s mesela. 100 öğrenci gibi öyle düşündüm.

Seda' nın ifadelerinden orantı kurmaya çalıştığı, ancak diğer katılımcılarda olduğu gibi toplam öğrenci sayısını değil, her bir öğrenciyi s ile temsil ettiği görülmektedir. Ayrıca denklem kurmanın fonksiyonu cebirsel olarak temsil etme şeklinde düşünmektedir.

4.3.4.3. Fonksiyonda Çeşitli Özellikler

Tanım, görüntü ve değer kümesindeki elemanlar ve bu elemanların eşlenmelerine dair bazı özelliklerden söz etmek mümkündür. Bu özellikler tanım kümesindeki her elemanın görüntüsünün değer kümesinde farklı bir eleman olması, değer kümesinde her elemanın tanım kümesindeki en az bir elemanın görüntüsü olması şeklinde sıralayabiliriz. Görüşemede yer alan soru ile katılımcıların fonksiyona dair bazı özelliklere (birebir, örten, içine olma, sabit fonksiyon), ayrıca venn şeması yardımı ile eşleme kavramına ilişkin algı ve kavrayışları belirlenmiştir (bkz. EK 1, soru 21).

Çağatay' ın önbilgilerine dayanarak görüşme sorusunda yer alan fonksiyon özelliklerine dair bir hatırlatma yapılmamıştır. Yalnızca daha önce Venn şeması ile karşılaşmadığından, ilk önce şekilleri incelemesi için fırsat tanınmış ve gerekli durumlarda aşağıdaki alıntıdaki gibi açıklamalar yapılmıştır:

Çağatay: Burada boş bir kutu var (kümeyi gösterir). Bu küme.
Araştırmacı: Elemanlarını hissediyor musun?
Çağatay: Evet noktalar. (Araştırmacı parmağını tek tek rakamlara dokundurur)1, 2, 3.
Araştırmacı: Bunlar harf.
Çağatay: a, b, c evet.
Araştırmacı: Şuna bakar mısın? (Çağatay' ın elini değer kümesine dokundurur)
Çağatay: Haa. a bir, b iki, c üç.
Araştırmacı: Kim kimle eşleşmiş şimdi bakar mısın? (doğru parçalarına elini dokundurup)
Çağatay: (iki küme arasındaki doğru parçalarını inceler) a 1 ile, b 3 ile, c de 2 ile. Evet. f de A' dan B' ye tanımlıyor.

Çağatay sadece kümelere dokunarak elemanlar arasında bir eşlemenin yapılması gerektiğini ve iki kümenin bir f fonksiyonu için tanım ve görüntü kümesi olduğunu algılamıştır. Bu durum önbilgisinde tanım, görüntü ve değer kümesinin ve kümenin elemanları ve elemanların eşlenmesi alt kavramlarının mevcut olmasına bağlıdır. Ayrıca kabartma şekilleri incelerken Braille alfabesine göre rakam işareti konulmadığı için harfleri ve rakamları ayırt edemediği belirlenmiştir.

Çağatay: (İkinci şekli inceler) a yine 1' e tanımlı, b kısmı 3' e tanımlı, c de buradan 2' ye. 4' te bir şey yok.
Araştırmacı: İki fonksiyon arasındaki farkı söyleyebilir misin?
Çağatay: Şöyle söyleyeyim şu içine fonksiyon olur. Çünkü bir tane boş elemanı var. Şu da örten hepsinin bir karşılığı var.
Araştırmacı: Bunlara da bakabilir misin?
Çağatay: Bu da A' dan B' ye tanımlı (ilk önce kümelerin adlarını kontrol eder). a' ya bakalım. a 1' e, b 3, c kısmı da 2. Başka bir eleman var mı (değer kümesini kontrol eder). Başka bir eleman (tanım kümesini kontrol eder) a, b, c, bu sefer d var. d' nin bir karşılığı var mı? Bu da 3, aaa tuhaf bir şey olmuş (takrar b elemanının görüntüsünü kontrol eder). b ve d 3' e tanımlanmış. Hmm. Bu fonksiyon var da şu anda adını getiremedim. (Diğer diyagram verilir. Hemen a elemanı için kontrol eder, ardından 1 elemanının eşlenip

eşlenmediğine bakar) 1 bu sefer boşta. a 2' ye tanımlı, b yine 2 de, c de o da 2 de. Bu sefer 3 de boş. Bu da ne fonksiyon, ya birebir değil onu biliyorum. Ne dendiğini şu an bilmiyorum.
Araştırmacı: Sabit fonksiyon.
Çağatay: Ha sabit fonksiyon (tekrar eşlemelere dokunur). Aslında sabit fonksiyonun hatırlayamadığım için o an getiremedim. Sabit fonksiyonda tanım kümesinin bütün elemanları bir değer kümesi ne çıkacak. Yani sabit olacak ne bulursanız, içine fonksiyon, değer kümesinde bir eleman boşta kalabilir ya da birkaç eleman boşta kalabilir örten de hiçbir eleman boşta kalmayacak. Çok bilmiyorum ama birebir de her tanım kümesinin bir karşılığı var. Bu çok başarılı olmuş anlatım açısından.

Çağatay' ın ifadelerinde sırasıyla örten olmayan ve örten fonksiyon kavramlarını Venn şeması ile temsil edilen kümeler üzerinde algıladığı ve tespit edebildiği gözlenmiştir. Ancak değer kümesindeki her elemanın f fonksiyonu altında tanım kümesinde bir elemanın görüntüsü olmasını 'karşılığı olma' ile ifade etmiştir.

Birebir ve sabit fonksiyonu Venn şeması temsilinde algılamasına rağmen ifade edememiştir. Çağatay' ın söz konusu fonksiyon özelliklerine dair açıklamalar yapması kavramları algıladığının göstergesidir. Ancak eşlemeleri incelediğinde fikirlerini ifade edememesi fonksiyon veya eşleme fikri altında Venn şeması ile ilk defa karşılaşmasından kaynaklanabilir. Ayrıca görüntü kümesinde fonksiyon altında değer kümesine dahil olmayan elemanları 'boşta kalmış' olarak ifade etmesi dikkat çekmektedir. Bu terimi 'karşılığı olma' fikrine bağlı olarak elemanları eşleme durumundan kaynaklandığı söylenebilir.

Çağatay ile yapılan görüşmede gözlemlere dayanarak Venn şeması ile çizilen fonksiyonların daha büyük kağıtlara ve şekilleri de daha büyük ebatta çizmenin katılımcıların parmakları ile doğru parçalarını takip etmeleri için daha anlaşılır olacağı belirlenmiştir.

İlker daha önce somut materyaller yardımı ile küme ve fonsiyon kavramları üzerine tartışmalar yürüttüğü için verilen şekilleri sırası ile incelemiştir.

İlker: a, b, c (tek tek elemanları bulur doğru parçalarını takip eder ve eşlemeleri söyler). Tamamen mantıkla cevap vereceğim. Hatırlamıyorum çünkü. Burada bir tane eksik var a, b, c var. Burada 4 var o zaman birebir değildir bu. [...] Çünkü c' nin karşılığı var. 4' ün karşılığı yok.

İlker birebir eşleme kavramı için sonlu kümeler olan tanım ve değer kümesindeki eleman sayısının aynı olmasını ve her elemanın görüntü kümesinde bir tek eleman ile eşlenmesi şeklinde algılamaktadır. Bu durum İlker' in birebir fonksiyon tanımını kavrayamadığı şeklinde yorumlanabilir. Görüşmede İlker tanım kümesinin elemanlarından c noktasını başlangıçta parmağı ile hissedememiş ve 2 elemanının tanım kümesindeki hangi eleman ile eşlendiğini algılayamamıştır. Bu durum doğru parçasını oluşturan noktalar ile Braille yazıda c noktasının tek bir doğru parçası oluşturmuş gibi yakın konumlandırılmasından kaynaklanmaktadır. Açıklamadan sonra c noktasını fark eden İlker, c noktasının eşlendiğini vurgulamaktadır. Ancak İlker de diğer katılımcılar gibi eşlenmiş olma yerine 'karşılığı olma' ifadesini tercih etmektedir.

Onur soru ile ilgili herhangi bir açıklama yapmadan kağıtlar üzerinde ellerini gezdirmeye başlar:

Onur: (ellerini hemen kümeler üzerinde gezdirir, elipsi takip eder ve içerisindeki elemanları kontrol eder) Kümeler var haa tamam. [...] a var b var (A kümesinin elemanlarını söyler, parmakları ile tek tek elemanları aşağıya doğru hissederek) (A kümesinin elemanlarını iki eli ile tararken, B kümesinin elemanları için eşleme doğru parçalarını takip ederek B kümesini sağ eli ile bulur ve hızlı bir şekilde B kümesinin elemanlarını sağ eli ile takip ederek söyler) 1, 2, 3, 4 var. (doğru parçalarına dokunarak) Burada da bağıntılar var.

Onur daha önce destek eğitim araçları kullanarak kümeler yardımı ile fonksiyon kavramına dair uygulamalar yaptığı için kümeleri, elemanlarını ve bu elemanların eşlemelerini hızlıca keşfedebilmiştir. Burada 'bağıntı' kavramına odaklanması önbilgilerine dair bilgi vermektedir.

Onur: b, 3' e gidiyor, c, 2' ye gidiyor. Ha burada d de var. d de 3' e gidiyor. (alttaki eşlemeye geçer) Bunları gerçekten unuttum ya böyle bağıntıları unuttum. 1 boş (a' nın 2 ile eşlendiğini fark edince sağ eli ile 1' e bakar eşleme olmadığını kontrol eder), a 2' ye gidiyor. Haa bu hepsi ikiye gidiyor (c noktasını da kontrol ettikten sonra). Sabit o zaman. f(x)=2 tamam onda bir şey yok. Şunlar o zaman birim fonksiyon oluyor (bir üsttekine geçer). Ne oluyor? (bir taraftan eşlemeleri tekrar kontrol eder)
Araştırmacı: Örten fonksiyon.
Onur: Haa tamam çünkü açık yok. İşte kavramı biliyorum ama unuttum.
Araştırmacı: Bu kavram size nasıl tanıtılmıştı?

Onur: Hiç öyle değil, yani yine böyle tanıtılmıştı da aslında elektrik teli kullanmıştık yine, yine dokunsaldı yani.
Araştırmacı: Peki sizce nasıl öğretilmeli bu kavram?
Onur: Böyle öğretilmeli. Bu çok iyi bir yöntem çünkü şeyi görüyorum ben, a' yı, b' yi, c' yi kafamda görüyorum. Ama yine dokunsal diyeyim ben, önce dokunsal, gerçi kitaplar basılabilir böyle madem programlar var kitaplar da basılır neden olmasın yani.

Onur' un incelemeleri ve ifadeleri bağıntı, fonksiyon, sabit fonksiyon ve cebirsel temsili gibi alt kavramları kavradığını göstermektedir. Burada herhangi bir eleman ile eşlenmeyen elemanlar için 'boş' kelimesini kullandığı görülmektedir. Birim ve örten fonksiyon kavramlarını karıştırmış olsa da tanıma dair açıklamalar yapabilmesini önbilgilerinin mevcut olduğu ancak kalıcı olmadığı şeklinde yorumlayabiliriz. Burada kavramların ve şemaların zihinde yapılandırılması için uygulanan aracın öğrenmede kalıcılık ve anlama için faydalı olduğunu ifade etmektedir.

Aydın ile söz konusu soru üzerine görüşme devam ederken, Aydın' ın kavrama dair algısını ölçmekten ziyade görme engelli bireyler için tasarlanacak araç gereçlerin yapısı ve genel düşünceleri üzerine bugular elde edilmiştir.

Aydın: (A kümesinin elemanlarını inceler eşlemeleri takip ederek B kümesinin elemanlarını inceler) Bir saniye burada a mı demek istemiş, a, bir dakika c' si nerede ha şu da c. Evet burada 1, 2, 3, 4. Şimdi bu birebir (tek tek tekrar elemanların hangi elemanlar ile eşlendiğini kontrol eder). İşte fonksiyon hayatınızda nerede kullanılıyor eğer fonksiyon bu ise biz tabi modern değil de klasik eğitim aldığımız için x artı bilmem ne bizim için fonksiyon o. Böyle gayet güzel. Bakın burada çizgi farklı kullanılabilir.

Aydın' ın şemaları inceleyip gerekçeleri ile özellikleri doğru açıklamasına rağmen defalarca eşlemeleri kontrol ettiği gözlenmiştir. Bu durum diğer katılımcılarda da cevaba dair düşüncelerini açıklamadan önce birkaç kez eşlemeleri tekrar etmeleri ile gözlenmiştir. Ayrıca katılımcılar şemalarda her bir farklı kavram için nokta vuruşu ya da sıklığının farklı olmasını yeterli bulmayıp, farklı malzemeler kulanılmasını talep etmiştir. Farklı kavramlar ifadesi ile kastedilen, kümeyi oluşturan sınır çizgileri, kümenin elemanları ve eşlemeyi sağlayan doğru parçaları gibi katılımcıların hissetmelerini sağlayan kabartma dokuya ihtiyaç duyulan yapılardır.

Katılımcılarda ortak olarak gözlenen bir diğer tespit, küme kavramının öğretimi için liste gösteriminin tercih ediliyor olmasıdır. Bu nedenle Venn şeması ile kümeyi algılamaları zaman almaktadır. Fakat ilk örnekten sonra hız kazanmaları ve daha fazla yorum yapmaları dikkat çeken bir bulgudur. Bu bulguları destekleyen bir alıntı aşağıda sunulmuştur:

Seda: Kümeyi yazıyla küme parantezini biliyorum. Hatta altküme, mesela altkümeyi şöyle öğrenmiştik okul bir kümedir, sınıf okulun bir altkümesidir gibi. Çok çok küçükken öğretmenimiz kare çizmişti böööylee küme gibi, oraya meyvelerin isimlerini yazdık, onun içinde bir kare daha çizip ona da işte yaz meyvelerin adını yazmıştı. Yaz meyveleri meyvelerin altkümesidir gibi öğrenmiştik. Ama sonra hep küme parantezine dayalı öğrenmeler gerçekleştirdim. Hiç dokunmadım.

Seda' nın vurguladığı gibi Cihan da küme kavramını venn şeması olarak dikdörtgen veya kare şekilleri ile öğrendiklerini belirmiştir. Bu nedenle görüşmede önlerine konulan kümeleri inceleyip doğru şekle dokunup dokunmadıklarını teyit ettikleri gözlenmiştir.

Seda: Bana sorsanız bildiğimiz fonksiyon derim. A kümesindeki bütün elemanların B kümesinde görüntüsü eşlemesi var. Ama 4' ün görüntüsü olmak zorunda değil çünkü bu değer kümesi. Bildiğimiz fonk derim ama ismini söyleyemiyorum.

Seda görüşmede yer alan fonksiyon özelliklerine cevap verememiştir. Fakat onun yukarıdaki ifadesinden anlaşılacağı üzere fonksiyon tanımına dair tanım kümesindeki her elemanın görüntüsünün olması gerektiği ve görüntü kümesinde eşlenmeyen elemanların olabileceği fikrine sahip olduğu gözlenmiştir. Seda' nın fonksiyon tanımı üzerine fikirlerini cebirsel temsile göre tanım ve değer kümelerinin Venn şeması temsilleri üzerinden daha net ifade edebildiği belirlenmiştir.

4.3.4.4. Fonksiyon ve Değişkenler Arasında İlişki Kurma

Fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturmak için bağımlı ve bağımsız değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemek gerekmektedir. Bu ilişki belirlenen örüntünün, değişkenler için belirlenen semboller yardımıyla genellenmesi şeklinde ifade edilmelidir. Görüşmede katılımcıların tablo ile verilen hız ve takip mesafesi arasındaki ilişkiyi fark etmeleri ve belirledikleri değişkenler ile cebirsel temsili oluşturmaları istenmiştir (bkz. EK 1, soru 27). Burada değişkenler için birimlere dikkat etmeleri beklense de katılımcıların ilişkiyi ve dolayısı ile genellemeyi belirleyip ifade etmeleri esas alınmıştır.

Çağatay' ın matematiksel ifadelerin yanı sıra elde ettiği sonucu cebirsel olarak ifade etmede zorlandığı belirlenmiştir.

Araştırmacı: Burada bir örüntü fark edebiliyor musun?
Çapatay: Fark edebiliyorum. Hepsinin aslında bir (tek tek her hız için takip mesafesine bakarak) karşılığı var. (örüntü tekrar sorgulanır) Var galiba ... 60' ta 30. 70' te 35. Mesela 80' de 40 olduğunu görüyorum. Örüntü var 90' da 45. 100' de 50 (tabloyu inceliyor tekrar tekrar). Bence bir örüntü var ama neden var çok açıklayamayabilir.
Araştırmacı: Bir ilişki görebiliyor musun?
Çağatay: Evet hepsinin iki katı. Örüntüye hakim değilim sanırım. Örüntüden ziyade bu oran. Örüntü deyince bir sonuca gitmek için başka bir sonuca gitmem lazım. Mesela ben x+5 ile onun yaşını bulmamı istiyor ya benden, önce x-i bulmam lazım ki sonra x +5' i bulayım.
Araştırmacı: Fonksiyon ile arada bir ilişki kurabiliyor musun?
Çağatay: Kurabiliriz evet. Fonksiyonlaaa… iki kavram verir ve ikisi arasındaki ilişkiye göre verir ya da tersi olan ilişkiye göre verir.
Araştırmacı: Burada değişken belirle desem?
Çağatay: Değişken km/s. Değişken hız. Çünkü hıza göre takip mesafesi aynıdır. Mesela siz hangi hızı yaparsanız yapın takip mesafesi aynı olmak zorunda mesela 75 yaptıysam ya da 80 yaptıysam 40 olmak zorunda.
Araştırmacı: Hızı 66 olan bir araç önündeki aracı en az kaç metre mesafe ile takip etmeli?
Çağatay: 33.
Araştırmacı: 120 ile gitsem
Çağatay: 60
Araştırmacı: Böyle dediğim zaman hız ile takip mesafesi arasında cebirsel bir ifade kurabildin mi?
Çağatay: Evet. Hız bölü 2 eşittir takip mesafesi.
Araştırmacı: Takip mesafesinin en az 65 olması için hız kaç olmalı?
Çağatay: Takip mesafesinin 65 olması için takip mesafesi çarpı 2 demem lazım.

Çağatay' ın ifadelerinden değişken, değişkenlerin temsil ettiği iki elemanlar arasındaki ilişki, örüntü ve fonksiyon kavramlarına dair genel bir perspektifti vardır. Çağatay' ın değişken kavramına dair algısının 'sabit kalmayan' olarak devam ettiği belirlenmiştir. Bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarının dışında bağımlı ve bağımsız değişkenin temsil ettiği elemanların birbiri ile ilişkili olarak değişmesinin kavranmadığını söyleyebiliriz. Ayrıca tablodaki ilişkileri yorumlarken verilen değerlerin dışında bağımsız değişken değiştikçe, bağımlı değişkenin aynı kalacağını düşünmesi bir başka yanılgı olarak karşımıza çıkmıştır. Bu fikrine dayanarak sadece hızın yani bağımsız değişkenin farklı değerler alabileceğini düşünmüş ve değişkenleri belirlemesi istendiğinde yalnızca hızın değişken olduğu kanaatine varmıştır. Ayrıca cebirsel temsil oluşturması istendiğinde değişkenleri sembol ile temsil etmediği, sadece sözel olarak ifade ettiği görülmektedir.

Çağatay' ın değişkenlerin temsil ettiği iki kümenin elemanları arasındaki ilişkinin belirlenmesinde ilişkiyi sadece oran olarak algıladığı belirlenmiştir. İlişki örüntü olarak ifade edildiğinde işlemlerin birbiri ardına gelmesi ve birbirine bağlı sonuçlar üretilmesi olarak kavradığını söyleyebiliriz. Başlangıçta ilişkiyi belirlenmesine rağmen 'ilişki' ifadesini kullanmadan fikrinden emin olmadığı ve cevabını ifade etmediği görülmüştür. Bu durum cebirsel genellemeye dair algısından kaynaklanmaktadır.

Çağatay' ın cebirsel temsil ile ifade etmede güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Her ne kadar değişkenlerin temsil ettiği elemanlar arasındaki ilişkiyi belirlemiş olsa da sembolle temsil etme ve denklem kurmaya dair güçlükleri gözlenmiştir. Burada katılımcıya tabloda yer almayan bağımsız ve bağımlı değişkene dair durumlar sunularak cebirsel ilişkiyi kurması ve böylece cebirsel olarak ifade etmesi kolaylaştığı tespit edilmiştir.

Cahit görüşmede genelleme sorulduğunda diğer katılımcılar gibi oran bulmaya çalışmış, fakat bunu yaparken değişkenleri ayrı ayrı ele almıştır:

Cahit: Örüntü evet, her 10 km de 5 m. Hız mesela 10 km attıkça 5 metre artıyor. Şimdi mesela 60 km ile başladık 30 m idi. 70 km de 35 oldu. 80 de 40, 90 da 45, 100 de 50, 110 da 55. Hız arttıkça arasındaki mesafe uzaklığı artıyor.
Araştırmacı: Hız ve takip mesafesi arasında bir ilişki belirle desem?
Cahit: Belirleyeceğim şey hızın artması ile takip mesafesenin artması.
Araştırmacı: Değişkenleri belirle desem?
Cahit: Değişkenim hız olur.
Araştırmacı: Peki hız v olsa takip mesafesi ile arasındaki ilişkiyi nasıl ifade ederiz?
Cahit: v=t yani v' nin artması durumunda t de artar. v' nin değişmesi durumunda t' nin de değişmesi gerekiyor.
Araştırmacı: 66 km hızla giden aracın takip mesafesi en az kaç olmalı?

Cahit: Nasıl 66 km? 30 ile 35 arasında bir şey olacak.
Araştırmacı: 60 iken 30, 70 iken 35, 66 ise kaç olacak?
Cahit: 31 virgül bir şey olması lazım ya da 32 gibi bir şey. Çünkü 65 deseydi 32,5 derdim. Artış bu şekilde oluyor ya? 66 dediğine göre 33 ya da 32,6 falan olması lazım.
Araştırmacı: Peki 120 ile gitsem?
Cahit: 60 metre olacak.
Araştırmacı: 120 ile 60 arasında bir ilişki var mı?
Cahit: Evet iki katı.
Araştırmacı: Şu ana kadar hız ile takip mesafesi arasında aynı ilişki yok muydu?
Cahit: Evet 70, 35. 80, 40.
Araştırmacı: O zaman 66 km hızla giderken takip mesafem kaç olacak?
Cahit: 33.

Cahit birimlere dikkat etmiş ve bu nedenle iki kümeyi temsil eden değişkenlerin temsil ettiği elemanlar arasında doğrudan bir ilişki kurmak yerine elemanların her biri için ayrı ayrı ilişkiye odaklanmıştır. Genel bir ifade ile elemanlar arasındaki orana dikkat çekmiştir. Çağatay' ın ifadesine benzer şekilde, Cahit de sadece bağımsız değişkene odaklanmıştır. Değişkenlere sembol atayarak cebirsel bir ifade oluşturması istendiğinde değişkenlerin temsil ettiği elemanlar arasındaki orana odaklanmıştır. Ancak burada doğru orantıyı ifade etmek için eşitlik oluşturması sahip olduğu yanılgıyı ortaya koymuştur. Böylece doğru orantıyı cebirsel olarak ifade etmekte zorlandığı gözlenmiştir.

Cahit' e sunulan örnek durumlarda da bağımlı ve bağımsız değişkenler ile ilişkiyi ifade edememiş ve tahmini değerler elde etmeye çalışmıştır. Verilen örnek durumlar incelendiğinde 10' un katları olan sayılar ve özel olarak tek bir durum için ilişkiyi belirleyebildiği gözlenmiştir. Katılımcılardan elde edilen benzer bulgulara dayanarak örnek durumlar üzerinden değişkenler arasındaki ilişkiye odaklanmaları gerektiğini söyleyebiliriz.

Değişkenlerin temsil ettiği kümenin elemanların birimlerinin farklı olmasına odaklanan bir diğer katılımcı Onur, birimler farklı olsa da bağımlı ve bağımsız değişkenleri düşünmüştür:
Onur: Bu onar onar arttıkça bu beşer beşer artıyor. […] İkisi arasında bir ilişki var işte biri 10 arttıkça ne diyim? İki birim gibi mi? Nasıl düşünsek bilemedim. Bu 5 er 5 er artıyor yani.
Araştırmacı: Bir değişken belirleyebildiniz mi burada?
Onur: Birbirine bağlı kilometre arttıkça mesafe de yükseliyor. Şimdi burada biz hızı artırıyoruz kendimiz, o bağımlı mı oluyor? Evet ve ona bağlı olarak da şey değişiyor. […]

Bağımsız olarak hızı artırıyoruz, ona bağlı olarak da mesafe değişiyor. Bağımlı değişkenimiz mesafe. Hıza bağlı yani.
Araştırmacı: Saate 66 km hızla giden bir araç önündeki aracı kaç metrede takip etmeli?
Onur: Hızı artırdığımıza göre, hızımızı 6 birim artırmışız 10 birim değil. 6' nın yarısı 3. Yani 33. 33 herhalde evet 33.
Araştırmacı: Neden 5, 10 derken birden yarısı diye gittiniz?
Onur: Öyle ama öyle artıyor bu 5 metre artarken o iki katı değişiyor. Artış miktarının yarısı, değişkenimiz bağımsız değişkenimiz hızı artırmak ben oradan gittim bilmiyorum.
Araştırmacı: O zaman aracın hızı ile takip mesafesi arasında nasıl bir ilişki var?
Onur: Bir bölü iki oranında bir ilişki var (birkaç saniye düşünür).
Araştırmacı: Bunu cebirsel olarak ifade etme gereksinimi duyar mısınız? Nasıl yaparsınız?
Onur: Takip mesafesi eşittir ona t mesela, t eşittir, h bölü 2 ya da v bölü 2. 2t=v.

Onur birimlerin farklı olmasına dayanarak değişkenler arasındaki ilişkiyi değişkenlerden biri iki birim artarken, diğerinin bir birim artması şeklinde yorumlamıştır. Bu yoruma 10' ar ve 5' er artış miktarları arasındaki orandan ulaştığını söleyebiliriz. Değişkenleri belirlemesi beklendiğinde bağımlı ve bağımsız değişkenlere dair yorum yapabilmesine rağmen bağımsız değişkeni doğru adlandıramamıştır.

Değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanları arasındaki örüntüden yararlanarak cebirsel bir temsil oluşturması için örnek durumlar üzerinden farkındalık sağlanmıştır. Burada Onur' un elemanlar arasındaki artış miktarlarına bağlı değil, elemanların oranlarına odaklanarak cevap vermesi dikkat çekmektedir. Böylece örnek durum üzerinden değişkenleri temsil eden sembolleri belirleyerek cebirsel temsili oluşturabilmiştir.

Seda diğer katılımcılardan farklı olarak değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanları arasında oran bulmaktan ziyade cebirsel temsil ile çözüme ulaşmaya çalışmıştır:
Araştırmacı: Neden x/2 fikrine ihtiyaç duydun?
Seda: Sürekli bir değer verme ihtiyacı hissediyorum. Ama önce düşündüm 30' a mı değer versem 60' a mı? Yani mesafeye mi hıza mı değer versem diye düşündüm. Mesafeye x desem hız 2x olacak ama karışabilir diye düşündüm. Sürekli hızın yarısını düşünmek zorundayız. O yüzden hıza x diyeyim dedim. Değer vermediğim zaman ay hangisi 35 idi, 70, 80, o ne ya? Sayılar hep karıştığı için x deme ihtiyacı hissettim.
Araştırmacı: Orantı kurdun mu peki zihninde?
Seda: Önce buradaki artışa baktığım zaman 30, 35, acaba 5' er 5' er mi artıyor dedim. Tamam da şurası 10' arlı artıyor. Kafamda orantıyı kuramadım. Orantıda benim kafam

daha çok karışıyor. Düşünemiyorum çünkü yine zihinde tutma sorunu. En büyük sorunum bu benim.

Seda bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirlemek yerine, zihninde oluşturduğu ilişkiye göre bir örüntü belirlemiştir. Değişkenleri harfli ifade olarak temsil ederken bu ilişkiye bağlı kalmıştır.

4.3.5. Temel Cebir Kavramlarına İlişkin Bulguların Tahmini Öğrenme Yol Haritalarının Belirlenmesindeki Katkıları

Bu bölümde belirlenen temel cebirsel kavramlara dair katılımcılarından elde edilen bulgular bağlamında var olan kavramsal çerçeve (Arıkan & Halıcıoğlu, 2013; Argün vd., 2014; Bayazıt, 2015; Bayazıt & Aksoy, 2013; Bingölbali & Bingölbali, 2013; Clement, 2001; Cohen & Ehrlich, 1963; Dede & Argün, 2003; Falkner vd., 1999; Kabael, 2017; Kay, 2001; Kieran, 1992; Knuth vd., 2005; McNeil & Alibali, 2005; Narlı, 2016a; 2016b; Özgen, 2017; Tall & Baker, 1991; Zembat, 2016) ve öğretim programları (MEB, 2013; 2017a; 2018a) sınırlarında öğrenmenin nasıl gerçekleşeceğine dair hipotezlere yer verilecektir. Bu hipotezler kavramlara ait tanım, özellik, temsil gibi niteliklerin öğretilmesine odaklanacak öğrenme hedeflerine dayanmaktadır. Ortaya konulan öğrenme hedefleri görme engelli bireylerin söz konusu cebir kavramlarını öğrenme süreçlerine ilişkin bir tahmini öğrenme yol haritası sunacaktır.

Araştırmanın ilk aşamasında elde edilen bulgular genel olarak ele alındığında görme engelli bireylerin önbilgilerindeki eksikliklerinden kaynaklanan yanılgılarının olduğundan bahsedebiliriz. Değişken ve bilinmeyen kavramlarının tanımlarını kavrayamadıkları, denklem kurmada güçlükler yaşadıkları, eşitlik sembolüne dair farklı algılara sahip oldukları, fonksiyon kavramına dair önbilgilerinde eksikliklerinin olduğu belirlenmiştir. Bu önbilgiler arasında grafik ve tablo okuma, koordinat sistemi kavramına ilişkin eksikliklerin olması ve sıralı ikilileri belirleyememe, genellemeyi cebirsel olarak ifade edememe sıralanabilir.

Değişken kavramı için katılımcılardan elde edilen tanımlamalar; duruma göre değişen, sabit kalmayan, sembolleştirme, ulaşılamayan sayı, denklem çözme, işlem yapmayı gerektiren şey, kümenin elemanları için yer tutucu, ulaşılan sonucun işlemlere bağlı olarak farklı olabilmesi, kümenin her elemanı için sonucun değişmesi, farklı problem çözme stratejileri kullanabilme, her gözleme göre farklı değer alabilen durum şeklindedir. Burada değişkeni bilinmeyen kavramı ile karıştırdıkları ve bağımsız değişkene odaklanarak, bağımlı değişkeni sabit olarak tanımladıkları belirlenmiştir. Bilinmeyen kavramı için istenen veri veya sayılar için yer tutucu, sembolleştirme, denklem çözümü ile elde edilen harfli ifade ve meçhul gibi tanımlamalar yapmışlardır.

Eşitlik için tanımlamaları incelendiğinde denklik bağıntısı olduğunu ifade edemeseler de sezgisel olarak algıladıkları söylenebilir. Tanımları incelendiğinde eş değer olma, aynılık, benzer olma gibi aynı denklik sınıfına ait ikililerden bahsettikleri düşünülmektedir. Bu tanımlamada denklik sınıfına ait elemanların semboller ile temsil edildiğini belirtmişlerdir. Ayrıca denklem çözme veya ulaşılan çözümün karşılaştırılması gibi eşitliğin korunumuna vurgu yapmışlardır. "$x = 7$" ifadesi denklik sınıflarını algılamalarına neden olmakta iken "$x + 5 = 12$" ifadesinde denklem çözmeyi mümkün kılan sembol olarak düşünmektedirler. Bulgulara ek olarak denklik bağıntısı olarak eşitlikte yansıma özelliğinden yararlanarak tanımlamaya çalıştıkları gözlenmiştir (1=1 gibi).

Fonksiyon, eşleme, ilişki kurma, genelleme gibi kavramlar ve grafik ya da cebirsel gibi temsiller ile tanım ve görüntü kümesi gibi alt kavramlar için bulgular incelendiğinde yaygın önbilgi eksiklikleri, yanılgılar ve güçlükler ile karşılaşılmıştır. Fonksiyon için cebirsel bir ifade belirtme, sistem, denklem veya bir yol gibi alternatif tanımlamaları elde edilmiştir. Fonksiyon altında görüntü için fonksiyonun değeri ve karşılığı olma deyimlerini kullandıkları belirlenmiştir. Eşleme ile elde dilen görüntüler için boşta kalma ya da boş gibi tanımlamaları olmuştur. Eşlemeyi ise değişim olarak tanımlamışlardır. Cebirsel temsili denklem veya denklem kurma olarak algılarken, grafiği kroki veya rota ve gridleri noktalardan çıkan yol olarak ifade etmişlerdir. Venn şeması, grafik ve tablo gibi görsel şekilleri incelerken şekli oluşturan parçaları sıklıkla kontrol ettikleri ve böylece bütünü zihinlerinde canlandırmaya çalıştıkları söylenebilir. İki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişki sorulduğunda yalnızca orantı oluşturmaya çalıştıkları gözlenmiştir. Oran kurmak için değişkenlere veya değişkenler için artış miktarına dikkat ettikleri belirlenmiştir. İlişkiyi de eşleme de olduğu gibi değişim olarak ifade etmişlerdir.

Tahmini öğrenme yol haritalarını oluştururken;

- bireyler kendilerine ait semboller belirlemesi için fırsatlar oluşturulması (küptaş kasa materyalinde çalışırken vb),
- kavramlar için farklı temsil türlerine yer verilmesi,
- doğrusal fonksiyon grafiklerinden başka fonksiyon grafiklerine yer verilmesi,
- grafik yorumlama becerilerini artıracak gerçek hayat durumları ile örnek durumlar sunulmasır,
- koordinat sisteminde her bölgede grafikler incelenmesi,
- grafiklerde gridlendirilmiş yapı ve farklı zeminler üzerinde yapılandırılmış araçlar kullanılması,
- grafiklerde koordinat sistemi, fonksiyon eğrisi, gridler gibi her bir kavram farklı bir dokuda oluşturulması ve
- grafiklerde farklı dokuları tanımlamaları için lejanta yer verilmesi önemli bulgular olarak ortaya çıkmıştır.

Kavramlar için görme engelli bireylerin önbilgilerindeki eksiklikler, yanılgılar ve güçlükler göz önüne alınarak hedefler silsilesi şeklinde tahmini öğrenme yol haritası sunulacaktır. Görme engelli bireylerin söz konusu kavramların öğretimi için tasarlanacak olan görüşme protokolerinin hazırlanmasında Tablo 12’ de yer alan tahmini öğrenme yol haritası dikkate alınmıştır.

Tablo 12

Görme Engelli Öğrencilere Cebir Kavramları İçin Tahmini Öğrenme Yol Haritası

Kavram	Hedefler	Açıklama
Küme	Küme kavramının sezgisel tanımını yapabilme. Küme kavramına ilişkin örnekler sunabilme. Kümenin elemanı olma ve eleman sayısı kavramlarını bilme. Evrensel küme ve altküme kavramlarını bilme. Küme, kümenin adlandırılması, kümenin elemanları, elemanı olma sembollerini bilme. Sonlu ve sonsuz küme kavramlarını bilme.	Küme kavramının sezgisel olarak nesneler topluğu olduğu fikrini edinmesi, günlük hayattan çeşitli örnekler sunması, kümeye ait olma fikri ile elemanı olma ve eleman sayısı fikirlerine sahip olması beklenmektedir. Evrensel küme kavramının bağlama dayandığı ve altküme elemanlarının aynı zamanda bu kümeyi kapsayan kümenin de elemanı olduğu fikrine sahip olması beklenmektedir. Sonlu ve sonsuz küme kavramları için sayı kümelerinden örnekler sunmas ve küme gösterimlerine hakim olması istenmektedir. Küme, elemanları ve elemanı olma sembollerini kullanabilmesi hedeflenmektedir.
Eşleme ve İlişkilendirme	İki kümenin elemanları arasında eşleme ve birebir eşleme yapabilme. İki kümenin elemanları arasında birebir eşleme yapabilme. İki kümenin elemanları arasındaki ilişkiye göre eşleme yapabilme. Kümenin kendi elemanları arasındaki ilişkiyi ifade edebilme. İki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilme. Tablo ile verilen ilişkili elemanları eşleyebilme.	Eşleme ve ilişkilendirme kavramları için en az iki kümenin (aynı veya farklı) var olması gerektiğini, bu iki küme arasında gelişigüzel eşlemenin mümkün olduğu veya belli bir ilişkiye göre eşlenebileceği ve birebir eşlemin tanımına hakim olması beklenmektedir. Bir kümenin kendi elemanları arasında bir ilişkinin olabileceği (düzenli artma, azalma vb.), iki kümenin elemanları arasında bir ilişkinin olabileceği beklenmektedir. Ayrıca bu ilişkiyi ifade etmede çeşitli temsil türlerine hakim olması hedeflenmektedir.
Doğru ve Doğru Parçası	Doğru kavramını açıklayabilme. Doğru parçasını açıklayabilme. Düz çizgi ile doğruyu ilişkilendirebilme. Doğru ve doğru parçası temsillerini bilme.	Doğru ve doğru parçası kavramlarını tanımlayabilmesi ve temsil türlerini bilmesi beklenmektedir. Doğru kavramını düz bir çizgi olarak temsil etmesi ve doğru parçasını düz bir çizgi üzerindeki iki nokta arasınaki parçası olarak açıklayabilmesi istenmektedir.
Sayı Doğrusu (Cetvelleme)	Uzunluğun nesnelerin niteliği olduğunu sezdirme. Uzunluk için birim belirleyebilme. Standart bir uzunluk birimi belirleyebilme. Nokta ile bir reel sayıyı eşleyebilme. Bir doğruyu cetvelleyebilme. Sayı doğrusunu açıklayabilme.	Doğru kavramı üzerinden uzunluk ve uzunluğun belirlenmesi, bunun için belli bir birime ihtiyaç duyulması ve standart birimin önemini kavraması beklenmektedir. Doğru üzerindeki bir nokta ile sayıların eşlenebileceğini ve belirlenen bir birime göre doğrunun cetvellenebileceğini açıklaması istenmektedir. Verilen bir doğrudan sayı doğrusu elde edebilemsi ve sayı doğrusunu açıklayabilmesi hedeflenmektedir.
Koordinat Sistemi ve Uygulamaları	Sayı doğruları ile koordinat ekseni oluşturabilme. Eksen ve orijin kavramlarını bilme. Sıralı ikilileri açıklayabilme. Koordinatları verilen noktayı işaretleyebilme. İşaretlenen noktanın koordinatlarını belirleyebilme. Eksenlerin düzlemde birer kümeyi temsil ettiğini bilme. İki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilme.	Koordinat sisteminin düzlem üzerinde iki sayı doğrusu ile tanımlı olduğunu, düzlem üzerindeki noktaların reel sayılar ile eşlendiği fikrini, eksen ve orijin kavramlarını, sıralı ikili kavramını açıklayabilmesi beklenmektedir. Koordinatları verilen bir noktayı veya koordinat düzlemi üzerinde işaretlenen bir noktanın koordinatlarını belirleyebilmesi istenmektedir. Eksenlerin iki kümeyi temsil edebidiğini ve böylece iki küme arasındaki ilişkinin grafik yardımı ile temsil edilebileceği fikrini kavraması ve uygulaması beklenmektedir. Böylece ilişkiye göre eksenlerin hangi kümeyi temsil ettiğine karar verebilmesi ve grafik oluşturabilmesi, ayrıca grafik ve diğer temsil türleri arasında geçişleri yapabilmesi hedeflenmektedir.
Değişken	Değişken kavramını kendi ifadeleri ile açıklayabilme. Bağımlı, bağımsız değişken kavramlarını bilme. Verilen bir iki küme arasındaki ilişki temsilinde bağımlı ve bağımsız değişkeni tespit edebilme. Bağımlı ve bağımsız değişkenleri farklı harflerle temsil edebilme. Bağımlı ve bağımsız değişkenler ile cebirsel bağıntılar yazabilme.	Değişken kavramının bir kümenin elemanlarının tümünü temsil eden bir sembol olduğunu açıklayabilmesi beklenmektedir. Bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarını açıklayabilmesi, iki küme arasındaki ilişkiyi değişkenler yardımı ile cebirsel olarak ifade edebilmesi ve çeşitli temsil türleri ile gösterebilmesi hedeflenmektedir.

4.4. Görme Engelli Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçleri ve Tahmini Öğrenme Yol Haritası

Bu bölümde Tablo 12' de elde edilen tahmini öğrenme yol haritasına göre tasarlanan EK 2' de ve EK 3' te yer alan öğretim deneyleri ve klinik görüşmelerde görüşme protokollerine göre elde edilen bulgulara yer verilmektedir. Böylece görme engelli öğrencilerin cebirsel düşünme, algılama, anlama süreçleri, yanılgıları ve güçlükleri incelenmektedir. Bu incelemenin sonucunda belirlenen hedeflere ilişkin öğrencilerin anlamaları, kavramaları ve düşünmeleri sonucunda elde edilen tahmini öğrenme yol haritaları sunulmaktadır. Ön görüşmelerde (EK 2) katılımcının önbilgileri, görme geçmişi ve düşünmeleri belirlenmiştir. Öğretim oturumlarında ise tahmini öğrenme yol haritalarını belirlemek için katılımcının hedeflere ilişkin düşünmeleri, algı ve kavrayışları incelenmiştir. Sema ve Mete' nin cebirsel düşünme süreçleri ve tahmini öğrenme yol haritasında yer alan hedeflere ilişkin ilerleme durumları problem cümlelerinin (dolayısıyla protokollerin) sıralaması ile başlıklar halinde ele alınacaktır. Ardından her bir katılımcı için elde edilen öğrenme yol haritası sunulacak ve ardından iki katılımcının bulguları karşılaştırılacaktır.

4.4.1. Sema' nın Cebirsel Düşünme Süreçleri ve Öğrenme Yol Haritası

Bu bölümde önbilgilerini belirlemek için Sema ile gerçekleştirilen ön görüşme ve öğretim oturumlarındaki klinik görüşmelerden elde edilen bulgular yer almaktadır. Bulgular Sema' nın öğrenme yol haritasının belirlenmesine ışık tutacak şekilde öğretim oturumlarına göre ayrı ayrı ele alınmıştır ve her bir hedef için genel durum açıklanmıştır. Ayrıca Sema için öğrenme yol haritasının yer aldığı Tablo 13' e yer verilmektedir.

4.4.1.1. Sema' nın Önbilgilerine İlişkin Bulgular

Sema ortaöğretim kurumunda bireysel eğitim almadığı ve ses kaydı ya da okuyucu desteği olmadığı için sınıfta yalnızca dersi dinlemektedir. Destek eğitim aldığı özel eğitim kurumunda problem çözme ve denklem kurma kavramları için tasarlanmış bireyselleştirilmiş eğitim programı temel alınmaktadır. Ön görüşmede bulgular kavram odaklı önbilgilerini belirlemeye göre ele alınmıştır.

Küme ve ilişkili kavramlar için kendi ifadeleri ile açıklaması ya da örnekler vermesi istenmiştir. Ancak küme kavramı için önbilgisinin olmadığını ifade etmiştir.

Sema: Hmm hatırlamıyorum desem yalan olur çünkü bilmiyorum.

Küme kavramına ilişkin önbilgisi olmasa dahi nesneleri eşleme fikrinin olup olmadığı sorulduğunda '*Onları hiç görmedim, eşleme nasıl yapılır?*' şekinde ifade etmiştir. Futbol takımı örneği sorulduğunda ise eşleme fikrini açıklayamamıştır. Doğru ve doğru parçası kavramları sorulduğunda ise '*Matematikte mi soruyorsunuz? Matematikte var ama ne olduğunu bilmiyorum.*' şeklinde ifade etmiştir. Dolayısı ile sayı doğrusunu da bilmediğini belirtmiştir. Değişken kavramını da benzer şekilde duymadığını söylediğinde aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: Değişken hiç duydun mu?
Sema: Değişen mi?
Araştırmacı: Matematik derslerinde öğretmenin hiç değişken kelimesini kullanmadı mı? Ya da x ve y gibi harfler?
Sema: Evet x sürekli söylüyor ama değişken hiç duymadım.

Grafik ve tablo inceleyip inlemediği sorulduğunda ders kitaplarında var olduğunu, ama öğretmenlerinin anlatmadığını ifade etmişti.

Araştırmacı: Neler inceledin? Neler hatırlıyorsun?
Sema: Mesela dikdörtgen, böyle kapkarışık bir tablo var. Onların yanında yazıyor mesela a, b, f. Eşleştirme dediniz ya ondan yapıyorlar galiba. Mesela fizikte çok şekil var.
Araştırmacı: O şekilleri incelerken koordinat sistemi inceledin mi hiç? Burada bir grafik var falan dediler mi ya da dokundun mu hiç?
Sema: Koordinat falan yok o görenlerde oluyor.

Sema' nın tablo, şekil ve eşleştirme fikrine sahip olduğunu, fakat tanımlarına dair bilgi sahibi olmadığını söyleyebiliriz. Ayrıca burada kümelerin elemanları arasında eşleme ve ilişki kurma fikrine sahip olmadığı belirlenmiştir. Bununla birlikte, eşleme ve ilişkileri göstermede tablo ve grafiğin bir temsil yolu olduğu fikrine sahip değildir.

4.4.1.2. Sema' nın Öğretim Oturumlarından Elde Edilen Bulgular

4.4.1.2.1. Küme Kavramının İncelenmesi

İlk öğretim oturumu küme kavramını sezgisel olarak tanımlayabilme ve bu tanıma uygun örnekler sunabilme, kümenin elemanlarını ve eleman sayısını belirleyebilme, evrensel ve altküme kavramlarını açıklayabilme, sonlu ve sonsuz kümeyi örneklendirebilme hedefleri için tasarlanmıştır. Sema' nın küme kavramı için sadece altküme ve eleman sayısı terimlerini duyduğu ancak, kavramsal olarak açıklayamadığı bilinmektedir. Küme kavramına ilişkin fikirleri sorulduğunda terim olarak Sema' ya çağrıştırdığı 'kümes' kelimesini söylemiştir. Bunun için uygulama kümes örneği üzerinde yürütülmüştür.

Araştırmacı: Küme denilince zihninde ne canlanıyor?
Sema: Küme denilince aklıma ilk tavuk geliyor. Kümes.
Araştırmacı: Tavuk mu? Tamam kümes bir küme midir?
Sema: Evet.
Araştırmacı: İçinde neler var? Bu kümeye neler dahil?
Sema: Tavuk, horoz, civciv.
Araştırmacı: Başka, yumurtalar da var mı?
Sema: Evet yemleri var.
Araştırmacı: [...] Mutfak dolapları olabilir mi?
Sema: Buzdolabı da olabilir. Yemekler var içinde. Dolaplarda tabaklar var, tencere, kaşık.
Araştırmacı: [...] Takım tutuyor musun?
Sema: Evet Galatasaray.
Araştırmacı: Peki bu takım bir küme oluşturur mu?
Sema: Oluşturur ama ben kimler var bilmiyorum. Sadece tutuyorum, oyuncuları bilmiyorum.

Sema kümeyi sezgisel olarak açıklayamasa da örneklendirebilmiştir. Farklı örnekler vermesi istendiğinde sessiz kalmasına rağmen 'Peki kitaplığının raflarını düşünür müsün?' gibi benzer sorular yöneltildiğinde örnek durumu açıklayabilmiş ve farklı örnekler de sunmuştur. Futbol takımı, kitaplık ve müzik seti örnekleri incelendikten sonra Sema' dan kendi örneğini vermesi istenir. Sema futbol takımı örneğinde kümenin elemanları olan oyunculara dikkat çektiği için eleman ve elemanı olma kavramlarına ilişkin sorular yöneltilerek oturuma devam edilmiştir.

Sema: Arabalar olur mu? Nissan, Hyundai, tosbağa.
Araştırmacı: Bu saydıkların araba markaları kümesi için birer nedir?
Sema: Plakaları olur.
Araştırmacı: Her bir arabanın bir plakası olur haklısın, ama bu saydığımız markalar ve küme arasında nasıl bir durum var?
Sema: Bilmiyorum, içinde olurlar.
Araştırmacı: Bu kümeye ait olurlar diyebiliriz o zaman. Mesela kitaplık örneğinde her kitap, kitaplık kümesinin bir nesidir?
Sema: Kümeye ait olur. Üye.

Kümenin elemanı olma veya elemanları kavramları için yöneltilen sorularda başlangıçta 'ait olma' ya da 'üyesi olma' gibi terimlere ulaşılamamıştır. Bu durum Sema' nın araba markalarını birer plaka olarak düşünmesinden kaynaklanabilir. Çünkü daha önce futbol takımı kümesini oluşturanların oyuncular olduğu fikrini ifade etmiştir. Sonraki birkaç örnekte 'ait olma' fikri edinilmiştir.

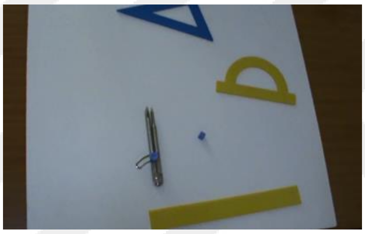
Somut nesneler ile küme oluşturma adımlarında öncelikle nesneleri incelemesi beklenmiştir. Cetvel, iletki, gönye, küptaş ve ruletli pergel nesneleri incelendikten sonra önündeki tablanın kümeyi temsil ettiği belirtilmiştir. Bu tablayı da incelemesi için zaman verilmiştir.

Araştırmacı: Verdiğim nesneleri kullanarak bu tabla yardımı ile sana ait bir küme oluşturabilir misin?
Sema: (Pergeli eline alır ve tablanın üzerini işaret ederek) Çiziyim mi şimdi?

Sema' nın tabla üzerinde çizim yapma düşüncesi verilen nesnelerin kulanım amaçlarından kaynaklanabilir. Ayrıca henüz küme, kümenin elemanları ve ait olma fikri somut örnekler ile oluşmadığını söyleyebiliriz.

Sema nesneleri tabla üzerine yerleştirirken görsel bir sıralama yapmaya çalışmıştır. Küme için elemanların konumu ya da sıralamasının önemli olmadığı sorgulanmıştır:

Araştırmacı: Kümeyi oluştururken nesneleri nasıl koyduğunun bir önemi var mı?
Sema: Yok. İstediğim gibi koyabilirim.



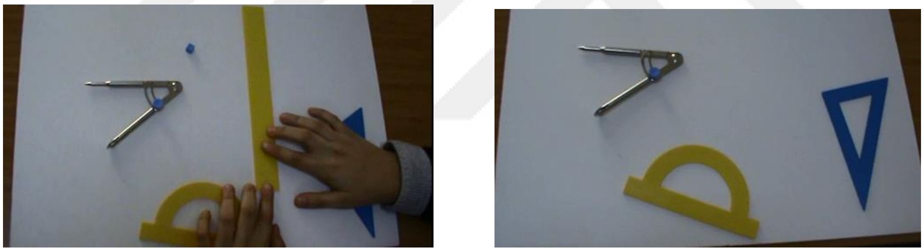
Şekil 42. Sema' nın oluşturduğu birinci küme

Sema verilen nesnelerin hepsini Şekil 42' de olduğu gibi tablaya yerleştirmiştir. Sema' ya bu küme ile ilgili ait olma fikrine dayanarak elemanı olma, kümeyi adlandırma, liste yöntemi ile küme gösterimi için sorular yöneltilmiştir.

Araştırmacı: Bu kümeyi başka birine tarif edecek olsan nelerden bahsedersin?
Sema: Pergel, cetvel, iletki, küptaş, gönye (tek tek nesneleri eli ile işaret eder).
Araştırmacı: Tek tek saydın nesneleri, bunlar ne peki?
Sema: Küme. Kümeye ait.
Araştırmacı: Kümeye ait nesneler. Peki bu ne kümesi? Mesela araba markaları kümesi dedik, futbol oyuncuları kümesi dedik. Bu kümelerin bir adı olmalı değil mi? Sadece içindekileri saymak yeter mi?
Sema: Hmm ne diyelim? Nesneler kümesi.
Araştırmacı: Bu nesnelerin bu kümeye ait olması ne demektir?
Sema: Bilemedim.
Araştırmacı: Peki bu kümenin eleman sayısı kaçtır?
Sema: (tek tek nesnelere dokunarak) Bir, iki, üç, dört, beş.
Araştırmacı: O halde bu nesneler bu küme için birer ne oldu?
Sema: Eleman oldu.

Sema ‘eleman veya elemanı olma’ kavramlarına terim olarak sahip olmasa da kümeye ait olma fikrini anlamıştır. Ayrıca kümenin eleman sayısı sorulduğunda içindeki nesnelerin sayısını söyleyebilmesi, Sema’ nın yalnızca terim olarak ‘eleman’ kelimesini bilmediğini göstermektedir.

İkinci bir küme oluşturması istendiğinde pergeli açık olarak tablaya yerleştirmiştir. Yine kümenin oluşturulmasında nesnelerin şeklinin ya da konumunun önem arz etmediğini ifade edebilmiştir. Sema tekrar verilen nesnelerin hepsini tablaya yerleştirir (bkz Şekil 43, (a)). Oluşturduğu kümenin ilk kümeden farkı olup olmadığı sorulduğunda ‘[…] *aynı küme oldu.*’ şeklinde ifade etmiştir. Elemanları aynı olan kümelerin eş olduğunu algıladığı belirlenmiştir. Tekrar farklı bir küme oluşturması istendiğinde ruletli pergel, iletki ve gönyeyi eleman kabul eden kümeyi oluşturmuştur (bkz Şekil 43, (b)). Bu kümeyi adlandırması istendiğinde B kümesi olmasını istemiştir. Kümenin Sema tarafından seçilen özel bir küme olduğu ve bu nedenle adlandırırken büyük harfle yazıldığı belirtilmiştir. B kümesinin elman sayısı sorulduğunda 3 elemanlı olduğunu hemen ifade etmiştir.

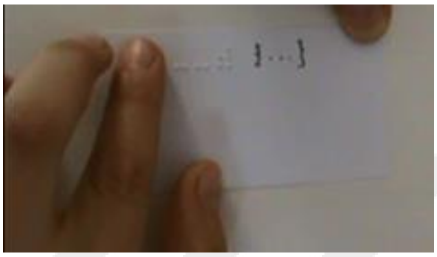


(a) (b)

Şekil 43. Sema’ nın oluşturduğu kümeler

Araştırmacı: Peki cetvel bu kümenin bir elemanı mıdır?
Sema: Değil.
Araştırmacı: Pergel bu kümenin elemanı mı?
Sema: Evet.
Araştırmacı: Tablet ve kalemin sağ tarafında. Senden bu kümeyi yazmanı istesem, elemanlarını ifade ederek, nasıl yazarsın?
Sema: Gönye, pergel, iletki (tek tek yazar). Yazdım.
Araştırmacı: Peki bunları yazarken aralarına virgül koydun mu?
Sema: Unuttum.
Araştırmacı: Annen senden alışveriş yapmanı istese ve sen de istekleri listelesen. Mesela mısır ve un almanı istese, sen virgül koymadığında mısır unu alıp gelebilirsin. O halde elemanları listelerken aralarına virgül koymalıyız. Peki B kümesini yazdığını bilebilir miyiz?
Sema: Hayır.

Araştırmacı: O zaman listelerken bu kümenin adını yazmalıyız. Alt satıra yazalım. Nasıl yazacaksın kümenin adını?
Sema: Büyük. Benim kümem o. (B harfini yazar)
Araştırmacı: Şimdi ne yapacaksın?
Sema: Nokta koyarız.
Araştırmacı: Neden nokta koymayı düşündün?
Sema: Çünkü cümle bitti.
Araştırmacı: Cümle mi bitti, yoksa kümenin elemanlarını mı yazmaya başlayacaksın? Bunun için küme sembolümüz var. Parantez. Şimdi buradan nasıl yazıldığını inceler misin? (bkz. Şekil 44)

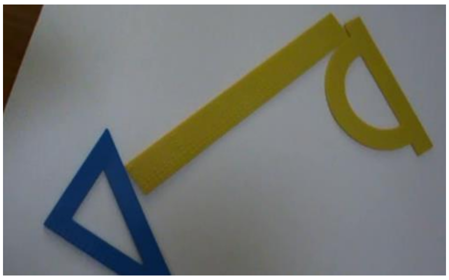


Şekil 44. Sema kabartma yazıda küme parantezlerini inceliyor

Sema, kümenin elemanlarını belirleyebildiği için liste yöntemi ile küme gösterimini yazması ve fikir yürütmesi sağlanmıştır. Bunun için öncelikle elemanları listelemesi, kümenin adını yazması ve parantez kullanımı için soru sorarak akıl yürütmesine imkan tanınmıştır. Küme parantezinin yazılması gereken durumda bir işarete ihtiyaç duyan Sema nokta kullanımını önermiştir. Sema' nın parantez kullanımını incelemesinden sonra B kümesini liste yöntemi ile yazması istenmiştir. Yalnızca incelemesi yeterli olmadığı için küme sembolünün kabartma yazıdaki nokta karşılıkları söylenmiştir. Bu temsilin liste yöntemi ile küme gösterimi olduğu ifade edilmiştir. Liste yönteminde kümenin adının yazılması, parantez kullanımı ve elemanlar arasına virgül konulması adımlarını doğru yapmasına rağmen, söylemden kaynaklanarak 'B kümesi' şeklinde yazdığı belirlenmişti. Bu yanılgı uyarılarak tekrar liste yöntemi ile örnekler yazılmıştır. Ayrıca tabla üzerindeki temsilin Venn şeması ile küme gösterimi olduğu ifade edilmiştir.
Sema' dan Venn şeması ile verilen nesneleri kullanarak yeni bir küme oluşturması istenir. Sema cetvel, iletki ve gönyeyi seçmiştir (bkz. Şekil 45). Nesneleri tablaya yerleştirirken '*Bunları seçmek istedim, benziyorlar.*' ifadesini kullanmıştır. Kümeyi oluşturduktan sonra Sema' ya aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

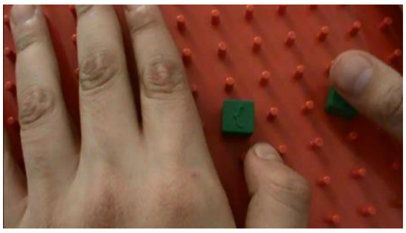
Araştırmacı: Kümeyi oluştururken bir şarta bağlı olarak nesneleri seçtin, öyle mi?

Sema: Evet. Şekil yaptım. Daha iyi şekil çıkarıldığı için seçtim. Üzerlerinde sayılar var bir de.
Araştırmacı: Peki bu kümenin adı ne olsun?
Sema: S kümesi. S eşittir küme parantezi aç, cetvel, gönye, virgül, iletki, sonra küme parantezini kapatıyoruz.



Şekil 45. Sema' nın tahterevalli yapmaya çalıştığı küme ve elemanları

Sema' nın nesneleri bir araya getirmek için belli bir şarta ihtiyaç duymaması kümenin sezgisel tanımı için istenen hedeflerdendir. Ancak nesneler arasında benzerlik aradığı bulgusu oturumda ilerleyen adımlarda sorgulanmıştır. Liste yöntemi ile küme yazmada başarılı olduğu belirlendikten sonra, Latin sembollerde küme parantezinin nasıl olduğunu incelemesi için iğneli sayfa materyalinde dokunması sağlanmıştır. Sema parantezlerin ok-a benzediğini söylemiştir (bkz. Şekil 46).



Şekil 46. Sema iğneli sayfa materyalinde küme parantezlerini inceliyor

Sema' nın verilen bir önerme ile kümeyi belirlemesi ve tek elemanlı küme kavramını anlaması için öğretim adımları takip edilmiştir. Öğretim adımlarında önermelere yer verilmemiştir. Ancak Sema' nın ileri sürdüğü fikirler oturumda yöneltilen sorulara yön vermiştir.

Araştırmacı: Bu nesneler arasında matematiksel dört işlem yapmak için kullanabileceğimiz nesneyi eleman kabul eden kümeyi oluşturabilir misin?
Sema: Küptaş var sadece. (Küptaşı tablanın üzerine bırakırken 2 rakamını üst yüzeye getirir.) İki.
Araştırmacı: Sayı değerini düşünme, yalnızca nesne olarak düşün. Kaç elemanlı bir küme oluştu?
Sema: Bakıyım. 1. (bkz Şekil 47)

Şekil 47. Sema’ nın oluşturduğu tek elemanlı küme

Sema haftanın s harfi ile başlayan günlerin kümesi ve 3’ ten küçük pozitif tek tamsayıların kümesi için elemanlarını belirler. Bir elemanlı kümelerin tek elemanlı küme olarak adlandırıldığı belirtilir. Her üç kümenin oluşmasında Sema’ ya verilen cümleleri incelemesi istenir. Burada bir kümenin oluşması için şart cümlesinin, yani önermenin varlığı sezdirilmiştir. Sema’ nın daha önce oluşturduğu B kümesi için belirlediği elemanların ortak özelliklerinin olması durumu yeniden sorgulanmıştır:

Araştırmacı: Az önce tahterevalli yapmak için seçtiğin nesneler vardı. Onlar için ortak bir özellik belirleyip belirlemediğini sormuştum.

Sema: Evet ben şekil yapma şartı koymuştum.

Araştırmacı: Başka bir şart olabilir miydi?

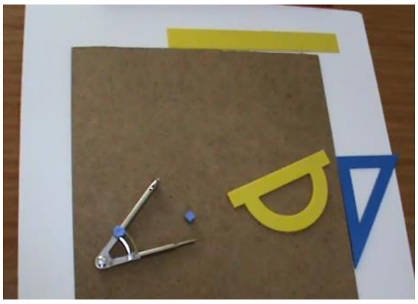
Sema: Sayılar vardı hepsinin üzerinde.

Araştırmacı: Evet cetvellemenin olması diyebiliriz o halde.

Sema: İsim kümesi yapabilir miyim? Şart olur değil mi?

Araştırmacı: Evet yapabilirsin.

Sema’ nın küme örnekleri sunma ve elemanlarını belirleme hedeflerini gerçekleştirebildiğini söyleyebiliriz. Bu hedeflere dayanarak evrensel küme ve altküme kavramlarına ilişkin adımlarla oturuma devam edilmiştir. Altküme oluşturması için beyaz tablanın içine daha küçük ebatlarda ikinci bir tabla yerleştirilmiştir. İkinci tablayı diğer tabla içinde ayrı bir bölüm gibi düşünmesi istenmiştir. Verilen nesneleri yerleştirerek bu kümeleri oluşturması beklenmiştir (bkz. Şekil 48).



Şekil 48. Sema’ nın altküme kavramına ilişkin oluşturduğu ilk küme

Araştırmacı: Büyük küme E kümesi olsun.
Sema: Küçük küme de P olsun.
Araştırmacı: Peki tamam. Cetvel, P kümesinin elemanı mı?
Sema: Cetvel P kümesinin elemanı.
Araştırmacı: Nerede cetvel, dokunabilir misin?
Sema: Yok değil (cetvele ve küçük tablaya dokunur).
Araştırmacı: Peki cetvel E kümesinin elemanı mı?
Sema: Evet.
Araştırmacı: Pergel, P kümesinin elemanı mı?
Sema: Evet.
Araştırmacı: Pergel, E kümesinin elemanı mı?
Sema: Hayır.
Araştırmacı: Neden?
Sema: Çünkü o büyük tahtada değil.
Araştırmacı: Ama küçük tahtayı büyük tahtaya yerleştirmiştim, içinde ayrı bir bölümdü. Büyük küme hepsini kapsamaz mı? Tekrar inceleyelim mi? (Sema’ nın elinden tutup kümeleri ve elemanları tek tek kontrol ettiriliyor) Burayı sınır kabul edersek pergel sınırın içinde değil mi?
Sema: Aa evet öyle düşünmemiştim.
Araştırmacı: (Küçük tablayı büyük tablanın içinden alıp yanına koyar) Senin dediğin gibi olması için şöyle yerleştirmemiz gerekir.
Sema: Hımm tamam evet.
Araştırmacı: (Tablaları ilk şekilde yerleştirir) İletki, P kümesinin elemanı mı?
Sema: Evet.
Araştırmacı: İletki E kümesinin elemanı mı?
Sema: Hayır.
Araştırmacı: İletki nerede?
Sema: (P kümesini işaret ederek) Şurada değil mi?
Araştırmacı: O halde iletki E kümesinin içinde mi?
Sema: Aa evet şurada sınırın içinde.
Araştırmacı: Küptaş, E kümesinin elemanı mı?
Sema: Hayır, evet. Hayır, evet.
Araştırmacı: Neden hayır, neden evet?
Sema: (güler) Evet, çünkü E kümesinin sınırının içinde.
Araştırmacı: Gönye, P kümesinin elemanı mı?

Sema: (İletki ve gönyeye tekrar dokunur) E kümesinin elemanı, P kümesinin değil.

Sema *P* ile adlandırılan altkümedeki elemanları belirleyebilmektedir. *E* evrensel kümenin *P* kümesinden fark kümesinde olan elemanların *P*' nin elemanı olmadığını, *E*' nin elemanı olduğunu ifade edebilmiştir. Ancak Sema, *P* kümesindeki her elemanın aynı zamanda *E* kümesinin elemanı olduğunu kavrayamamıştır. Bu durum oturum sürecinde sorgulanmaya devam edilirken altküme terimine söylem olarak ulaşmaya çalışılmıştır:

Araştırmacı: E ile P kümesi arasında bir ilişki var, fark ettin mi?
Sema: Bilmem.
Araştırmacı: P deki her eleman E' nin…
Sema: (Hızlı bir şekilde) Elemanı. Ama E' dekiler P' de değil.
Araştırmacı: Olmayabilir. Mesela pergel E' nin elemanı. Ama aynı zamanda…
Sema: Evet. P' nin de elemanı!
Araştırmacı: E ile P kümesi arasında altküme olma ilişkisi olabilir mi?
Sema: Evet. P, E' nin altkümesi değil mi?
Araştırmacı: Güzel. Peki E nasıl bir küme?
Sema: Üstü mü?
Araştırmacı: Üst küme demiyoruz ona, ama başka örnekler inceleyelim sonra adlandıralım.

Sema' nın altküme ve evrensel kümenin elemanlarını belirlemede yaşadığı güçlüğün devam ettiği belirlenmiştir. *P* kümesinin elemanlarını ve *E* kümesinin *P*' den fark kümesinin elemanlarını belirleyebilirken, *P* kümesinin elemanlarının aynı zamanda E kümesinin elemanı olduğunu anlamlandıramamıştır. Birkaç örnek durumun betimlenmesi ile bu durumu ifade edebilmesine rağmen, düşünerek ve kararsız kalarak doğru cevabı söylediği belirlenmiştir. Evrensel kümeyi üst küme olarak adlandıran Sema' nın evrensel kümeyi açıklayabilmesi için protokoldeki adımlar ile oturum devam etmiştir:

Araştırmacı: Bir yıl içindeki ayları düşünelim. 12 ayı eleman kabul eden kümemiz E kümesi olsun. Bahar mevsimindeyiz, o halde bahar mevsimindeki ayları eleman kabul eden küme de A kümesi olsun.
Sema: P değil mi?
Araştırmacı: Bu kez A kümesi olsun. A ile E kümesi arasında nasıl bir ilişki var?
Sema: Yani altküme oluyor. E, A' nın altkümesi oluyor.
Araştırmacı: Kümelerin elemanlarını tekrar söyler misin?
Sema: Ocaktan Aralık' a E kümesi, bahar ayları A kümesi oluyor.
Araştırmacı: Hangisi hangisinin alt kümesi olur?
Sema: E, A' nın değil mi?
Araştırmacı: A altkümesidir E' nin. Çünkü neden? E kümesi A kümesinin elemanlarını da
Sema: Elemanı olur evet daha fazla elemanı var.

Sema altküme ve evrensel kümenin elemanlarını belirleyebilmesine rağmen altkümeyi açıklayamadığı veya kavrayamadığı söylenebilir. Bu durum 'A altküme E' sembol temsili ve söylemden kaynaklabileceği için açıklama yapılmıştır ve örnek durumlar üzerinden oturum devam etmiştir:

Araştırmacı: Bir örnek daha inceleyelim. Futbol takımlarını düşünelim. Türkiye' deki bütün futbol takımlarının kümesi E olsun. Galatasaray, Beşiktaş, Fenerbahçe, Ankaragücü, Trabzonspor hepsi E kümesinin elemanı. Siyah ve beyaz renklerini kullanan futbol takımlarını da B kümesine atalım.
Sema: Siyah beyaz sadece Beşiktaş.
Araştırmacı: Sadece Beşiktaş değilmiş. Aksarayspor, Manisaspor varmış. Bunları eleman kabul eden B kümesi olsun. E ve B kümesini düşününce hangisi altküme olacaktır?
Sema: Daha az elemanı olan B kümesi, bütün takımların olduğu E' nin altkümesidir.

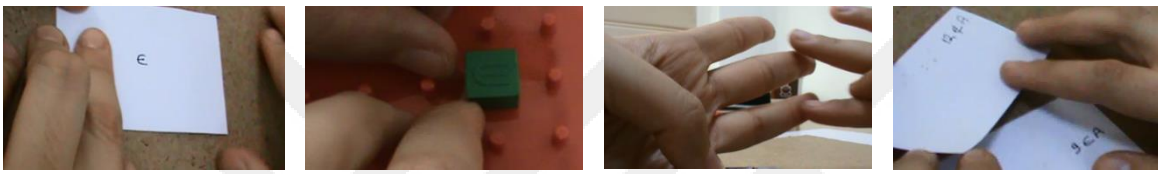
Evrensel kümenin bağlama göre değişeceği fikri tartışıldıktan sonra kabartma yazıda evrensel kümenin sembol gösterimi ve altküme olma sembol gösterimlerini incelemesi sağlanmıştır (bkz Şekil 49). Ayrıca Latin sembollerde evrensel kümenin E ile gösterildiği söylenmiştir. Ancak bu öğretim oturumunda evrensel küme ve altküme kavramlarını tanımlayamadığı, elemanlarını belirlemede güçlükler yaşadığı tespit edilmiştir. Bu nedenle ek öğretim adımlarının tasarlanması gerekmiştir. Bu durum pilot görüşmede de tespit edildiği için daha önce tasarlanan ek adımlar ikinci öğretim oturumundan önce gerçekleştirilmiştir.

Şekil 49. Sema evrensel küme sembol gösterimini inceliyor

Sema bir kümenin elemanlarını belirlemede başarılı olduğundan elemanı olma ve elemanı değildir sembollerini ve kullanımlarını incelemesi için pozitif tek tamsayılar sonsuz kümesi üzerinden örneklendirilmiştir.

Araştırmacı: Pozitif tek tamsayılar kümesinin elemanları nelerdir?
Sema: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.
Araştırmacı: Bu sayıları saymaya devam edebilir miyiz?
Sema: Evet. Sonsuz olur.
Araştırmacı: Bu küme A kümesi olsun. 9, A kümesinin elemanı mıdır?
Sema: Evet.
Araştırmacı: Peki 12?
Sema: Değil.

Sema' nın sonsuz küme kavramını düşünmesi istenir, 'elemanı olma' ve 'elemanı değildir' kavramlarının sembol gösterimleri kabartma yazıda ve ayrıca Latin sembollerde iğneli sayfa yardımı ile kabartma şekillerde dokundurulur (bkz Şekil 50, (a), (b)). Elemanı olma sembolünün Latin sembol gösteriminin algılanması için sol elin parmaklarının konumu ile benzetim ile dokundurularak açıklanmıştır (bkz Şekil 50, (c)). $9 \in A$ ve $12 \notin A$ sembol gösterimleri incelemesi daha sonra tablet kalem ile kabartma yazıda yazması istenmiştir (bkz Şekil 50, (d)). Farklı örnek durumlar için de elemanı olma ve elmanı değildir sembollerinin kabartma yazı sembol nokta vuruşları ile ifade etmesi istendiğinde doğru şekilde belirtmiş ve yazmıştır.



(a) (b) (c) (d)

Şekil 50. Sema elemanı olma ve elemanı değildir sembollerini ve gösterimlerini inceliyor

Sonlu ve sonsuz küme kavramları tartışılırken pozitif tek tamsayılar kümesini düşünmesi istenmiştir. Sema '*Peki cetvel?*' sorusunu yönelterek, cetvel üzerindeki sayıların sonlu veya sonsuz bir kümeye ait olup olmadığını merak etmiştir.

Araştırmacı: Cetvel üzerindeki sayılar sonlu mu, sonsuz mu?
Sema: Sonlu.
Araştırmacı: Orda kaç tane tamsayı var? Eleman sayısını belirleyebilir misin?
Sema: (Sırayla cetvel üzerindeki noktaları sayar) 25 yazıyor en son (bkz. Şekil 51).

Şekil 51. Sema cetvelin üzerindeki sayıları inceleyerek eleman sayısını belirlemeye çalışıyor

Sema daha önce pozitif tamsayılar kümesinin sonsuz küme olduğunu algılamıştı. Bu adımda ise kendisinin sonlu bir küme olarak cetvel üzerindeki tamsayılar kümesini örnek vermesi sonlu kümeyi kavradığını göstermektedir. Cetvel örneğinde sonsuz olan reel sayılar kümesi değil, yalnızca kabartma sayılar ile sunulan 0, 5, 10, 15, 20 ve 25 tamsayıları ele alınmıştır.

Sema' nın tamsayılar ve doğal sayılar kümelerinin elemanlarını belirlemesi istenmiş ve kabartma yazıda ve Latin yazıda sembol gösterimlerine dokunması sağlanmıştır. Oturumun sonunda hedeflere ilişkin sorular yöneltilmiştir:

Araştırmacı: Bu dersimizde neler öğrendik?
Sema: Kümeyi öğrendik.
Araştırmacı: Küme ne demek?
Sema: Elemanlar demek.
Araştırmacı: Örnek vererek açıklayabilir misin?
Sema: Kümes, kitaplık. Kütüphane olabilir mesela. Mesela ben küme oluşturdum (tablayı işaret ederek).
Araştırmacı: Kümeyi nasıl tanımlarız?
Sema: A kümesi isim veririz.
Araştırmacı: Güzel, peki küme nedir diye sorsam?
Sema: Elemanların bir araya gelmesi.
Araştırmacı: Nesnelerin bir araya gelmesi diyebilir miyiz?
Sema: Evet.
Araştırmacı: Peki her bir nesne bu kümenin birer neyi olur?
Sema: Eleman.
Araştırmacı: Güzel, liste yöntemi ile gösterim neydi?
Sema: Aralarına virgül koyarak, mesela büyük B küme parantezi açıyoruz, elemanları yazıyoruz, aralarına virgül koyuyoruz ve küme parantezini kapatıyoruz. Hocam dondurma kümesi olur mu?
Araştırmacı: Olur, çilekli dondurma, muzlu dondurma, çikolatalı dondurma. Bunların her biri bu kümenin nesi olur?
Sema: Elemanı.
Araştırmacı: Evrensel küme neydi?
Sema: Mesela Ocak' tan Aralık' a bütün ayların kümesi. E.
Araştırmacı: Peki altküme neydi?
Sema: A.
Araştırmacı: Bu kümenin elemanları neler?
Sema: Bahar ayları.

Sema' nın kümeyi 'nesenelerin bir araya gelmesi' olarak tanımladığı, elemanlarını belirleyebildiği, liste yöntemi ile gösterimine de hakim olduğu belirlenmiştir. Sema belirlediği örnekleri inceleyebildiği gibi sembol gösterimlerini de ifade edebilmektedir. Ancak evrensel küme ve altküme kavramlarını açıklayamamış, sadece öğretim adımında yer alan örneği ifade edebilmiştir.

II. öğretim oturumunda hatırladığı bilgilerin yanı sıra ek protokol uygulanmıştır. Sema' ya önceki öğretim oturumunda uygulamaya ve kavramlara ilişkin neler hatırladığı sorulmuştur. Sema, küme, tek elemanlı küme, günlük hayattan küme örnekleri, liste yöntemi ile küme gösterimi, elemanı olma ve elemanı değildir sembollerinin kabartma yazı kodlarında nokta karşılıklarını sırasıyla ifade etmiştir. Sema' nın '*[…] Evde tabakları yan yana çizdim, küme yaptım […]'* ifadesi ile günlük hayatın içinde küme örnekleri aradığını ve kavramsal anlamanın oluştuğunu söyleyebiliriz. Altküme ve evrensel küme kavramları için tasarlanan ek adımlardan önce Sema' nın neler hatırladığı sorgulanmıştır:

Araştırmacı: Altküme ve evrensel küme, bunları hatırlıyor musun?
Sema: Hatırlıyorum, mesela A cetveldeki tamsayılar sonluydu ama tamsayılar kümesi sonsuza gidiyordu. Sonsuza giden E miydi? Yok o sonsuz küme miydi?
Araştırmacı: Sonlu ve sonsuz kümeyi hatırlıyorsun evet. Tamsayılar kümesi sonsuz bir kümeydi. Eleman sayısını bir tamsayı ile ifade edebiliyorsak sonlu kümeydi. Peki evrensel kümeye örnek verebilir misin?
Sema: Hmm…
Araştırmacı: Bir yıl içindeki ayları düşünürsek?
Sema: Ocak' tan Aralık' a kadar ayların hepsi evrensel kümeydi. E. Şubat, Mart, Nisan mesela bu ayların kümesi de A oluyordu.

Sema' nın evrensel küme ve altküme kavramları için verilen örneği hatırladığı, ancak kavramsal tanımını yapamadığı belirlenmiştir. İlk oturumda olduğu gibi Sema' nın evrensel küme ve altküme kavramlarını anlamlandıramadığını söyleyebiliriz. Tasarlanan ek görüşme protokolüne göre Sema' ya Şekil 52 (a)' da yer alan nesneleri incelemesi için zaman verilmiştir.


(a) (b) (c)

Şekil 52. Sema' nın evrensel küme ve altküme örnekleri

Araştırmacı: Sema bu kez evrensel kümemizi bu masamız temsil etsin.
Sema: Evet.
Araştırmacı: Sana verdiğim bu poşet içindeki nesneleri gösteren şeffaf bir poşet. Bu poşeti bir nesne olarak düşünmeyelim, belli elemanları bir araya toplamaya yarayan bir sınır olsun. İstediğin bazı elemanları bu poşetin içine koyabilir misin?
Sema: (Top, kumanda, anahtar, silgi, kaşık ve çatal nenelerini poşete koyar) Tamam (bkz. Şekil 52, (b)).

Araştırmacı: Şimdi bu poşeti içindekilerle birlikte masanın üzerine bırakıyorum. Tüm nesneler masanın temsil ettiği kümenin elemanı mıdır? (bkz. Şekil 52, (c))
Sema: Evet hepsi üzerinde.
Araştırmacı: Peki poşetin temsil ettiği küme ile masa kümesi arasında nasıl bir durum var?
Sema: Altküme mi?
Araştırmacı: Hangi küme hangi kümenin altkümesi?
Sema: Evrensel kümenin mi altkümesi? Poşet kümesi altküme. Masa evrensel.
Araştırmacı: Peki top evrensel kümenin elemanı mıdır?
Sema: Evet elemanıdır. Masaya koyduk.
Araştırmacı: Bardak poşet kümesinin elemanı mı?
Sema: Değil. Poşete koymadım.
Araştırmacı: Evrensel kümedeki her eleman poşet kümesinin de elemanı oluyor mu?
Sema: Değil bardak poşette değil.
Araştırmacı: Poşet altkümesindeki her elaman evrensel kümenin elemanı olur mu?
Sema: Olur masaya koyduk.

Sema alıntıda olduğu gibi birkaç farklı örnek durumdan sonra altküme ve evrensel küme kavramlarını açıklayabilmiş ve örnekler üzerinden inceleyebilmiştir. Altkümenin her elemanının evrensel kümenin elemanı olduğunu kavrayabilmiştir. Evrensel kümeyi *'nesnelerin hepsinin olduğu küme'* olarak tanımlayan Sema, altkümeyi *'üst kümenin bazı elemanlarının olduğu küme'* şeklinde ifade etmiştir.

4.4.1.2.2. Eşleme ve İlişkilendirme Becerisinin İncelenmesi

İkinci öğretim oturumunda iki küme arasındaki eşleme ve ilişkilendirme becerilerinin oluşması ve/veya gelişmesi için adımlar uygulanmıştır. Küme temsil türlerinin beraberinde eşleme için farklı stratejilerin kullanılmasına fırsatlar oluşturulmuştur. Liste yöntemi ve Venn şeması ile küme temsillerinde elemanların eşlenmesi, tablo ile eşlemenin gösterimi, kümenin elemanları arasında ya da iki kümenin elemanları arasında ilişkinin belirlenmesi hedefleri yer almıştır. Bunun için günlük hayattan örnek durum incelemeleri ile öğretim uygulamasına başlanmıştır.

İki kümenin elemanları arasında eşlemenin var olduğu ve hayattın içinde nasıl yer aldığı örnekler üzerinden tartışılmıştır. Bu amaçla bir çikolata firmasındaki çikolata türleri ile bu türlere ait barkod numaraları arasındaki eşleme incelenmeye başlanmıştır.

Araştırmacı: Kasiyerin aldığın ürünleri kasada nasıl hesapladığını biliyor musun?
Sema: Makineye gösteriyorlar okutturuyorlar.
Araştırmacı: Makineye neyi gösterdiklerini biliyor musun?
Sema: Barkod üstüne yapıştırılan şeyler.

Araştırmacı: Mesela bir çikolata firması farklı her çikolata markası için farklı bir barkod kodu veriyor. Mesela Ülker firmasını düşünelim, çikolatalı gofrete verilen barkod ile cocostara verilen barkod aynı olabilir mi sence?
Sema: Olmaz.
Araştırmacı: O zaman buradaki kümeler hangileri?
Sema: Gofret ve cocostar bir kümede olurlar.
Araştırmacı: Evet firmanın ürettiği bütün çikolata türleri bir küme oluşturur. Peki bu çikolataların barkodları?
Sema: Farklı farklı olurlar. Küme olur.
Araştırmacı: Peki biz bu barkod gofretin olsun, bu barkod albeninin olsun şeklinde karar verirken aslında ne yapıyoruz?
Sema: Barkodlarını ayarlıyoruz, eleman kümesi yapıyoruz.
Araştırmacı: Çikolata kümesi ile barkod kümesinin elemanlarını düşünürsek ne yapıyorum?
Sema: Sıralıyorum, çiftler yapıyoruz. Eşleştiriyoruz.

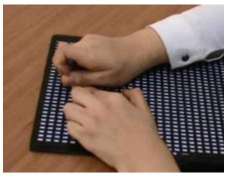
Barkod ve işlevi hakkında fikir alışverişi yapıldıktan sonra verilen örnekteki eşleme incelenmiştir. Öncelikle eşlemeden bahsedebilmemiz için kümeye ve elemanlarına ihtiyacımız olduğu fikrine odaklanılmıştır. Sema çikolataların ve barkodların birer küme oluşturduğunu belirtebilmiştir. İki kümenin elemanlarını eşlenmesini *'çiftler oluşturma'* olarak ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki hiç şehirlerarası otobüsle ya da uçakla seyahat ettin mi?
Sema: Annemle ettim ama uçakla değil, otobüsle.
Araştırmacı: Peki hangi koltukta oturacağınızı nasıl belirlediniz?
Sema: Bilet.
Araştırmacı: Biletin üzerinde ne yazıyor?
Sema: Numara yazıyor. Koltuk numarasına göre oturuyoruz.
Araştırmacı: Otobüsün içindeki bütün koltukları düşün.
Sema: Onlar da bir eleman, küme.
Araştırmacı: Koltuklar kümesi var değil mi?
Sema: Bir de sayılar kümesi var.
Araştırmacı: Bu iki küme arasında ne yapılmış?
Sema: Eşleştirme.
Araştırmacı: Eşleme değil mi? Peki sen 14 numaralı koltukta oturuyorsun. Seninkinden başka bir koltuğun numarası 14 olabilir mi?
Sema: Olmaz!
Araştırmacı: Koltuklarla koltuk numaraları arasında nasıl bir eşleme var?
Sema: Mesela bir koltuğa 14 veriyor, bir koltuğu 15, bir koltuğa 16, 24, 35. Öyle öyle gidiyor.
Araştırmacı: Yani her koltuğun yalnızca…
Sema: Bir sayısı var. Bir koltuk bir sayı.
Araştırmacı: Bu eşlemenin bir adı var.
Sema: Bilmiyorum.

Koltuk ve koltuk numaralarının eşlendiği örnekte Sema' nın kümeleri, bu kümelerin elemanlarını ve bu elemanlar arasındaki eşlemeyi fark etmekte ve belirlemekte güçlük yaşamadığı belirlenmiştir. Sema, çikolataların ve barkodlarının eşlenmesi ile koltukların ve sayıların eşlenmesi örneklerinde birebir eşleme kavramını sezgisel olarak ifade edebilmiştir. Sema her iki örnekte de bir kümenin elemanının, diğer kümenin yalnızca bir elemanı ile eşlendiğinin farkındadır. Sema' nın önbilgilerinde birebir eşleme kavramı olmadığı için terim olarak birebir eşlemeyi ifade edememektedir. Günlük hayat örneklerinin yanında matematiksel işlemlerde eşleme kavramını uygulayabilmesi için 'tamsayıları kendisinin karesi ile eşleme' örneği tartışılmıştır.

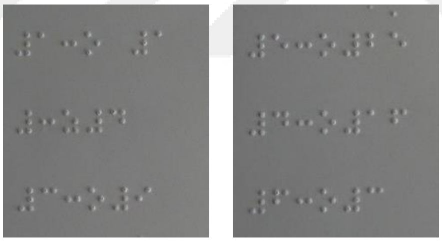
Sema: 2' nin karesi mi?
Araştırmacı: Mesela onun gibi. Her tamsayı olmasın da 1' den 6' ya kadar olan tamsayıları kendilerinin kareleri ile eşlemeni istiyorum. Mesela 1.
Sema: 1 ile eşleyeceğim.
Araştırmacı: 2' yi kiminle eşleyeceksin?
Sema: 4 ile.
Araştırmacı: 3?
Sema: 9, 16, 25, 36.
Araştırmacı: Bu eşlemeleri tablet kalemle ya da küptaş materyalinde nasıl gösterirsin? Seçimi sana bırakıyorum.
Sema: 1=1 gibi mi? Yoksa bölü ya da kesme işareti mi kullanacağız?
Araştırmacı: Nasıl kullanacaksın örnek verir misin? Eşleme için sembol mü kullanmak istiyorsun?
Sema: Evet. Tamsayıları eşlerken bir işaret var mı?
Araştırmacı: = kullanmak istedin. 1=1 olabilir, ama 2' yi 4 ile eşlerken 2=4 mantıklı bir gösterim olur mu?
Sema: Olmaz.
Araştırmacı: Eşittir sembolü yerine farklı bir sembol mü kullansan?
Sema: Virgül olmaz mı?
Araştırmacı: O zaman da sayıları listeliyor gibi olur. Ya da ondalık gösterim gibi olur 2 virgül 4 gibi.
Sema: O zaman tek bir şey kaldı. Büyük küçük işaretlerini mi kullanacağız ?
Araştırmacı: 1 büyüktür 1 olur.
Sema: (Güler) Olmadı.
Araştırmacı: Peki Sema buradaki kümeler kimler?
Sema: 1' den 6' ya kadar sayılar. Bir de 1, 4, 16 onlar var.
Araştırmacı: O zaman bu iki kümeyi yazalım, sonra eşlemeyi nasıl yapabileceğimize bakalım.

Sema örnek durumu incelerken öncelikle eşleyeceği elemanları belirlemeyi tercih etmiştir. Burada eşlemenin yapılacağı kümeleri belirlemek yerine elemanları tek tek sembol yardımıyla eşlemeye çabalamıştır. Burada matematiksel işlemlerde sıklıkla kullanılan =, / , >, < gibi sembolleri ve virgül kullanmayı denemiştir. Bu sembollerin elemanları eşleme anlamını veremeyeceği örnekler üzerinden tartışılmıştır. Eşlemenin yapılabilmesi ve eşlemenin gösteriminde farklı stratejiler düşünmesi ve öncelikle eşlemeden bahsedebilmek için kümelerin oluşturulması istenmiştir. Sema kümeleri yazarken liste yöntemi ile yazmayı tercih etmiştir. Kümeyi adlandırmış, küme parantezi ve virgül kullanımı gibi gösterimdeki bileşenleri sesli betimleyerek dikkat ettiğini vurgulamıştır. Sayıların kümesini R ve bu sayıların kareleri olan sayıların kümesini ise K ile adlandırmıştır (bkz. Şekil 53).



Şekil 53. Sema R ve K kümelerini liste yöntemi ile yazıyor

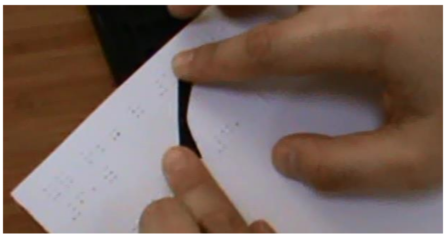
Burada belirlediği iki küme arasındaki eşlemeyi temsil etmesi için çizgi ya da ok kullnamsı önerilmiştir. Sema' ya sağa ok sembolünün kabartma yazıdaki kodu söylenmiştir. Böylece iki kümenin elemanlarını 'kendisinin karesi olma' şartına göre eşlemiş ve alt alta yazmıştır. Sema '$2 \longrightarrow 4$' sembol gösteriminde olduğu gibi R kümesinin her elemanını, K kümesindeki karşılık gelen eleman ile eşlemiştir (bkz. Şekil 54).



Şekil 54. Sema' nın tamsayıları kareleri ile eşlemesi

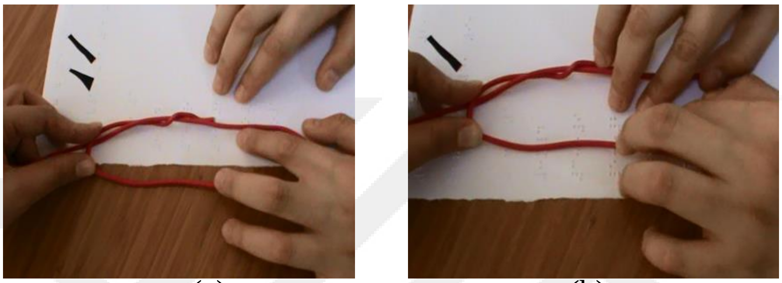
Sema' nın yazdığı liste gösterimindeki R ve K kümelerinin elemanları arasındaki eşlemenin temsili için farklı bir yol olup olmadığı sorgulanmıştır.

Sema: (Her iki kümedeki 1 elemanına sağ ve sol işaret parmağı ile dokunur) Böyle olmalı.
Araştırmacı: Sana bant vermemi ister misin? (bkz. Şekil 55)



Şekil 55. Sema iki kümenin elemanlarını bant yardımıyla eşliyor

Sema bazı elemanlar için bant yardımı ile iki kümenin elemanlarını ‘kendisinin karesi ile eşleme’ kuralına göre eşlemiştir. Bu bantların birer doğru parçasını temsil ettiği düşünülmüştür. Elemanları ‘⟶’ sembolü ile eşlemesi ve liste yöntemi ile gösterdiği kümeler üzerindeki eşlemenin farkı sorgulanmıştır. Sema sembol yardımı ile oluşturduğu eşlemelerde kümenin olmadığını belirtmiştir. Burada Venn şeması yardımıyla alt alta yazılan sayıların bir küme oluşturduğu belirtilmiştir. Bunun için elektrik kablosundan yararlanılmıştır (bkz. Şekil 56).



(a) (b)

Şekil 56. Sema elektrik kablosu ile oluşturulan Venn şeması ile küme temsilini inceliyor

Araştırmacı: Kablonun sınırladığı bölgedeki sayıları inceleyebilir misin?
Sema: 6, 5, 4, 3, 2, 1.
Araştırmacı: R kümesini oluşturmuş olduk.
Sema: Evet.
Araştırmacı: (Kablo diğer elemanların üzerine ötelenir) Senin okla eşlediğin sayıları inceleyelim şimdi. Bu kablo ile K kümesini oluşturmuş olur muyuz?
Sema: 36, 25, 9, 4, 1. K oldu.
Araştırmacı: Aslında R kümesinden K kümesine ok işaretleri yardımıyla ne yapmış olduk?
Sema: Eşleme yaptık.

Sema’ nın kümelerde eşlemenin temsillerinde, kümelerin temsiline dikkat ettiğini söyleyebiliriz. Ayrıca eşleme yapılabilmesi için kümenin var olması gerektiği fikrini edinmiştir. Daha önce örnek durumlar üzerinde tartışılan, tanımı ve adlandırılması ifade edilmeyen birebir eşleme için yeniden apartman numarası ve öğrenci numarası örnek durumları incelenmiştir.

Araştırmacı: Sema bugün seni almaya geldiğimde apartman numaranıza bakmıştım. 14 müydü?
Sema: Bilmiyorum (güler) evet 14 sanki.
Araştırmacı: Sizin sokakta başka 14 numaralı apartman var mıdır?
Sema: Yoktur.
Araştırmacı: Evet yoksa ben seni almaya geldiğimde apartmanınızın hangisi olduğunu bilemezdim. Peki buradaki kümeleri söyleyebilir misin?

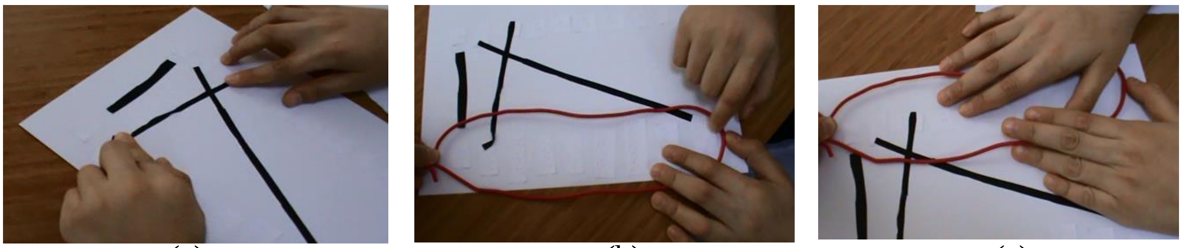
Sema: Binalar, apartmanlar kümesi, bir de sayılar kümesi.
Araştırmacı: Apartmanlar kümesi ve apartman numaraları kümesi. Peki Sema senin okul numaran ne?
Sema: 7025.
Araştırmacı: Ne kadar kalabalık bir okul. Sizin okulda başka 7025 numaralı öğrenci var mı?
Sema: Yok.
Araştırmacı: Bir numara birden fazla öğrenciye veriliyor mu?
Sema: Verilmez.
Araştırmacı: Peki bir öğrencinin birden fazla numarası olur mu?
Sema: Olamaz.
Araştırmacı: Buradaki kümeler hangileri?
Sema: Öğrenciler, öğrenci okul numaraları kümesi.
Araştırmacı: Bu iki küme arasında ne yapılmış?
Sema: Eşleştirme.
Araştırma: Her öğrencinin sadece bir numarası var ve her numara sadece bir öğrenciye verilebiliyor. Sence bu eşlemenin bir özel adı olabilir mi?
Sema: y eşlemesi .
Araştırmacı: Evet neden olmasın. Birebir eşleme diyoruz ayrıca böyle eşlemelere. Yani iki küme arasında her elemanın bir ve tek elemanla eşlendiği eşlemelere birebir eşleme diyoruz. Az önce incelediğimiz örneği hatırlıyor musun? Apartmanlar ve numaraları. Nasıl bir eşlemeydi?
Sema: Birebir o da.
Araştırmacı: Peki dersimize başlarken çikolatalar ve barkodlarını eşlemiştik. Yeniden döneceğim buraya demiştim hatırlıyor musun?
Sema: Evet, birebir o da.

Sema verilen bir eşleme örnek durumunun birebir eşleme olduğunu belirleyebilmektedir. Bu eşlemeyi adlandırırken '*y* eşlemesi' olarak adlandırması dikkat çekicidir. Ancak burada birebir eşleme örneklerini tespit edebilirken, tanımını yapmakta henüz yeterli tecrübeye sahip değildir. Bu nedenle televizyon kumandasında yer alan rakamlar ile kanalların eşlenmesi örneği üzerinden tartışma devam etmiştir.

Araştırmacı: Sema televizyon izlerken evinizde kumandadan 1 numaralı tuşa bastığında hangi kanal var?
Sema: TRT 1.
Araştırmacı: Kumanda da 1' den 9' a kadar rakamlar var biliyor musun?
Sema: Evet.
Araştırmacı: Bu rakamlara bastığın zaman birer ne var?
Sema: Kanallar var.
Araştırmacı: Sana bazı kanallar vereceğim, bu kanalları kumandada yer alan rakamlarla istediğin şekilde eşlemeni istiyorum. Bunun için tablet kalemini kullanacaksın ve eşlemeyi nasıl yazacağını da sana bırakıyorum. Dilediğin şekilde yazabilirsin.
(Sırasıyla tek tek kanalların adları söylenir. Sema sırayla yan yana tablette yazar.)
Sema: 1 şey olsun haber. 1 ok işareti haber (tablette yazmaya başlar). İkide çocuk kanalı olsun (aynı şekilde kanalları sayılar ile ok işareti yardımıyla eşler).

Araştırmacı: 1' den 9' a kadar kanal numaralarını da yazar mısın? (Sema aralarına virgül koyarak sayıları yazar). Buradaki kümeler neler?
Sema: Sayılar.
Araştırmacı: Rakam kümesi bir de?
Sema: Kanal kümesi var.
Araştırmacı: Senin yaptığın bu eşlemeyi farklı bir şekilde yapalım. Venn şeması ile gösterimden bahsetmiştik hatırlıyor musun? Öyle yapalım istiyorum. Ben senin yazdığın kanal isimlerini ve rakamları kestim ve önündeki kağıda yapıştıracağım. (Boş bir kağıtta sol kısma alt alta kanallar ve sağ kısma alt alta rakamlar yapıştırılır).

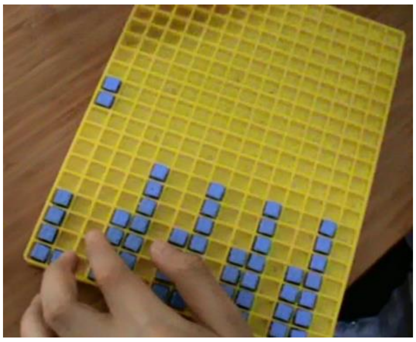
Sema verilen eşlemede eşlemenin yapılacağı sayılar kümesinin ve TV kanalları kümesini belirleyebilmiştir. Bu iki kümenin elemanlarını ok işareti yardımıyla istediği şekilde birebir eşlemiştir. Kanalları listelemiş ancak sayıları yalnızca ok işareti yardımıyla eşlemeler yaparak ifade etmiştir. Sayılar kümesini yazmamıştır. Ayrıca bu örnekteki kümeleri belirlemesine rağmen kümeleri herhangi bir temsil türü ile göstermemiştir. Burada öncelikle kümeleri liste yöntemiyle yazması istenmiştir. Daha sonra Venn şeması ile temsil edilen kümeler arasındaki eşlemeleri, doğru parçalarını temsil eden bantlar ile eşlemesi istenmiştir (bkz. Şekil 57, (a)). Sema bantları yapıştırmakta zorlansa da daha önce ok işareti yardımıyla yaptığı eşlemelere göre Venn şeması ile gösterilen iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeleri gösterebilmiştir (bkz. Şekil 57, (b) ve (c)).



(a) (b) (c)

Şekil 57. Sema televizyon kanalları ile kumanda üzerinde yer alan sayılar kümelerinin elemanlarını eşliyor

Sema kanallar kümesi K ve rakamlar kümesi R kümelerinin Venn şeması ile temsilini açıklamış ve gösterimi oluşturabilmiştir (bkz Şekil 57). Ancak hala birebir eşlemenin tanımını kendi cümleleri ile söyleyememiştir. Bu nedenle işsiz nüfus sayısının yıllara göre değişimini inceleyen örnek üzerinden öğretim deneyi devam etmiştir. Sema buradaki kümeleri, eşlemeyi açıklayabilmiş ve eşlemeyi göstermek için küptaş materyalinden yararlanmıştır. Sema küptaş kasada yılı ve bu yıla ait işsiz nüfusu alt alta yazmıştır. Yıl kümesi ve nüfus sayısı kümesinde yer alan elemanlar arasındaki her bir eşlemeyi de gruplandırarak alt alta yazmıştır (bkz Şekil 58).

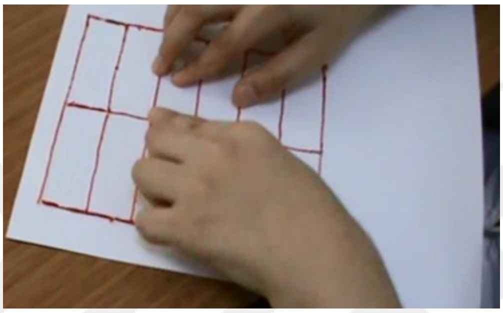


Şekil 58. Sema' nın yıllar ve işsiz nüfus sayıları eşlemesi

Araştırmacı: Buradaki kümeler nelerdi?
Sema: Yıllar kümesi ve nüfus kümesi.
Araştırmacı: Yıllar kümesinin elemanlarını sayabilir misin?
Sema: 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015, 2018 (elemanları sayarken küptaşlar ile yazdığı eşlemeden kontrol etmektedir).
Araştırmacı: Yıllar kümesinin elemanları arasında nasıl bir ilişki var?
Sema: İki binleri aynı.
Araştırmacı: Evet ama yılları notlarına bakmadan rahatlıkla sayabiliyorsun. Artma ya da azalma var mı mesela?
Sema: Üçer üçer artmış.
Araştırmacı: O zaman bu kümenin elemanları arasında nasıl bir ilişki varmış?
Sema: Üçer üçer artıyor.
Araştırmacı: Peki işsiz nüfus sayısı kümesinin elemanları arasında nasıl bir ilişki var?
Sema: Onlarda mı üçer üçer artıyordu?
Araştırmacı: 1 milyon, 1 milyon 200 bin, 1 milyon 400 bin, 1 milyon…
Sema: Artıyor.
Araştırmacı: Nasıl artıyor?
Sema: 200.
Araştırmacı: 200 bin, 200 bin artıyor.

Sema örnek durumdaki kümeleri ve elemanlarını belirleyebilmesine rağmen her iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi tespit etmekte güçlük yaşamıştır. Bu güçlük ilişki kelimesi ile kastedileni algılayamadığından kaynaklandığı düşünülerek, tetikleyici soru yardımıyla açıklanarak yeniden yöneltilmiştir. Sema elemanlar arasındaki ilişkinin artış olduğunu ifade etse de artış miktarını belirleyememiştir ve matematiksel dile uygun ifade edememiştir. Öğretim oturumunda iki küme arasındaki eşleme ve bu eşleme yardımıyla iki kümenin arasındaki ilişkiyi belirlemek için farklı stratejiler kullanmak amaçlanmıştır. Bu amaçla tablo ile sunulan bulut tohumlama sayısı ile yağış miktarı ilişkisi incelenmiştir.

Araştırmacı: Sabah kalktığında hava soğuk ya da sıcak, keşke bugün hava güneşli olsaydı gibi hiç hava durumunu değiştirmek istedin mi?
Sema: Keşke bugün kar yağsaydı, kar tatili olurdu (güler).
Araştırmacı: Çiftçiler de mesela yağmur duasına çıkıyor. İşte hava durumunu değiştirmenin bir yolu var. Bulut tohumlama […] Uzmanlar bulut tohumlama sayısı ile yağış miktarını gösteren bir tablo yapmışlar. Şu an önüne koydum.
Sema: Merhaba tablo (hemen tabloyu incelemeye başlar). Tohumlama ve yağış miktarı var. 2, 110, 4, 135, […] (sırasıyla önce tohumlama sayısını, daha sonra yağış miktarını söyleyerek alt alta tabloyu okumuştur, bkz. Şekil 59).

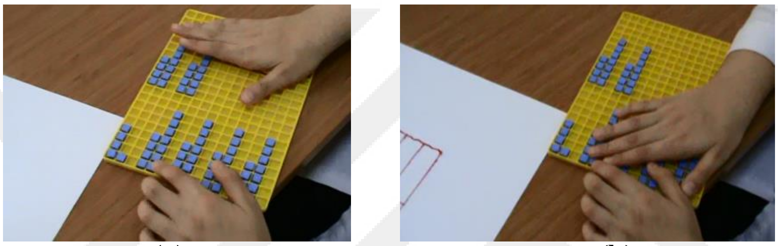


Şekil 59. Sema bulut tohumlama sayısı ile yağış miktarı arasındaki ilişkiyi temsil eden tabloyu inceliyor

Sema verilen durumdaki kümeleri ve elemanlarını kolaylıkla belirleyebilmiştir. Ayrıca tablonun bulut tohumlama sayısı ile yağış miktarı kümeleri arasında bir eşlemeyi temsil ettiğini ifade edebilmiştir. Sema tabloyu incelerken öncelikle sol sütunda yer alan bulut tohumlama sayısını (örneğin 2), daha sonra yağış miktarı sütununda yer alan sayıları okumuştur (örneğin 110).

Araştırmacı: Peki bu tabloyu ve eşlemeyi nasıl yorumlarsın? Mesela tabloyu ilk okurken önce 2' yi sonra 110' u okudun.
Sema: Eşleştirme, elemanları farklı farklı eşlemişler.
Araştırmacı: Mesela bir önceki örnekte senin yaptığın tabloda 2000 yılındaki işsiz sayısı 1 milyondu.
Sema: Hıı.. Artıyordu elemanlar.
Araştırmacı: 2 kez bulut tohumlama yaptığımda yağış miktarı?
Sema: 110.
Araştırmacı: Bana söyler misin 8 kez bulut tohumlama yapıldığında ne kadar yağmur yağıyormuş?
Sema: 185.
Araştırmacı: 6 kez bulut tohumlama yaptığımda
Sema: 160.
Araştırmacı: Bulut tohumlama kümesinin elemanları arasında bir ilişki var mı?

Sema: 2, 4, 6, artıyor. İki iki artıyor.
Araştırmacı: İkişer ikişer artıyor. Peki yağış miktarı kümesinin elemanları arasında bir ilişki var mı?
Sema: 110, 135, artıyor. Kaçar kaçar artıyor onu bilmiyorum (güler).
Araştırmacı: Sayıların arasındaki fark kaç?
Sema: 25, 25 artıyor.
Araştırmacı: Bu iki kümenin elemanları arasında bir ilişki var mı?
Sema: 2 kez bulut tohumunda 110 yağmur yağıyor.
Araştırmacı: Senin az önce yaptığın eşleme ile tablodaki eşlemeyi incelemeni istiyorum.
Sema: Alt alta tabloda.
Araştırmacı: Senin yaptığın eşlemeyi de tablo ile gösterebilir miyiz?
Sema: Olur muydu? Eşlerdik.
Araştırmacı: Yılları nereye yazardın?
Sema: (Eliyle küptaş kasanın sağ bölümünü işaret ederek) Bu tarafa alırdık.

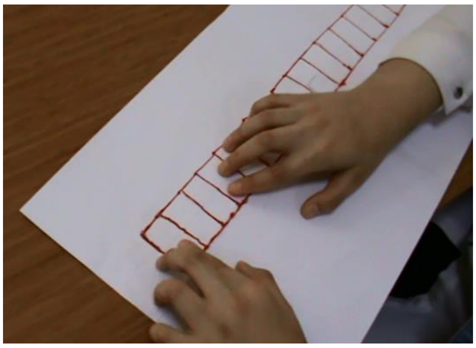


(a) (b)

Şekil 60. Sema iki küme arasındaki eşlemeyi gösteriyor

Araştırmacı: İşsiz nüfus sayısını ne tarafa alırdın?
Sema: (Eliyle küptaş kasanın sol bölümünü işaret ederek) Bu tarafa, yok! Yılları bu tarafa alırdım (sol bölümü işaret eder), nüfusu bu tarafa alırdım (sağ bölümü işaret eder; bkz. Şekil 60*).*
Araştırmacı: Fark eder mi? İkisi de mümkün. 2000 nin karşısına ne yazacaktın?
Sema: (Eliyle kontrol ederek) 2000 nin karşısına bir milyon yazardım.

Sema bulut tohumlama sayısı ve yağış miktarı kümelerinde yer alan elemanlar arasındaki ilişkiyi belirlemiştir. Ancak elemanlar arasındaki artış miktarını belirlerken güçlük yaşamıştır. Bulut tohumlama sayısındaki ikişer artışı belirleyebilmesine rağmen, yağış miktarındaki yirmi beşer artışı tespit edebilmesi için elemanlar arasındaki farka dikkat çekmek gerekmiştir. Sema' nın işsiz nüfus sayısının yıllara göre değişimi örneğindeki iki küme arasındaki eşlemeyi göstermek için küptaş kasada oluşturduğu gösterim ile bulut tohumlama sayısı ve yağış miktarı arasındaki ilişkinin gösterildiği tablo gösterimi kıyaslanmıştır. Sema daha önceki temsili bu kez sütun tablo olarak uyarlamayı tercih etmiştir. Yatay tablo ile temsilin incelenmesi ve yorumlanması için bir uçak firmasının bagaj fiyatlandırma tablosu tartışılmıştır. Sema bu tabloda yer alan bagaj ve ücret kümelerini ve bu kümelerin elemanlarını ifade etmiş, ayrıca her iki küme için elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemeye çalışmıştır.



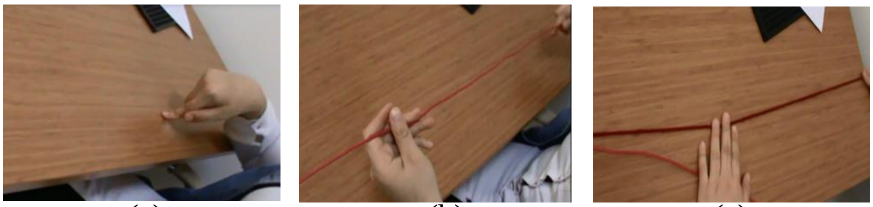
Şekil 61. Sema yatay konumlandırılmış tabloyu inceliyor

> *Araştırmacı: Sema ücret ve bagaj kümeleri var burada. Ücret kümelerinin elemanları arasında bir ilişki var mı?*
> *Sema: Yok, artıyor azalıyor.*
> *Araştırmacı: Yıldız' ın 7 kg bir bagajı olsaydı kaç para ödeyecekti?*
> *Sema: (Tablodan kontrol eder) 35 lira.*
> *Araştırmacı: Yıldız 55 lira para ödeyeceğini söyledi. Kaç kg bagajı varmış?*
> *Sema: (Tabloda ücret satırında 55 arar) 12.*
> *Araştırmacı: Emin misin? Başka olabilir mi?*
> *Sema: (Satırda incelemeye devam ederek) 13, 16, 17.*
> *Araştırmacı: Peki burada eşleme birebire mi?*
> *Sema: Değil.*
> *Araştırmacı: Neden?*
> *Sema: Çikolataya bir barkod vardı. Bagajla ücret öyle eşlenmiş.*
> *Araştırmacı: Peki Yıldız 55 TL ödediğinde bagajının ne kadar olduğunu biliyor muyuz?*
> *Sema: 12.*
> *Araştırmacı: 13, 16 ve 17 de olabilir mi?*
> *Sema: Evet olabilir.*
> *Araştırmacı: 55, hem 12 hem de diğerleri ile eşlenmiş. Birebir eşleme olabilir mi?*
> *Sema: Olamaz çünkü bir fiyat üç beş bagajla eşlenmiş* (bkz. Şekil 61).

Durumda yer alan kümelerin elemanları arasında ilişkiyi inceleyen Sema, ücret kümesinde yer alan elemanlar arasında sabit bir artma ya da azalma ilişkisinin olmadığını fark etmiştir. Bagaj ve ücret kümeleri arasındaki eşlemenin birebir eşleme olup olmadığı tartışılmıştır. Bunun için daha önce birebir eşlemeyi tanımlayamayan Sema' ya sezgisel olarak tanıma ulaşmasını sağlayacak sorular yönlendirilmiştir. Sema, öğretim oturumun başlangıcında yer alan çikolata ve barkodları örneğindeki birebir eşlemeden yararlanarak cevap vermiştir. Ancak Sema eşlemenin birebir olduğu yanılgısına sahiptir. Bu nedenle Sema' nın farklı bagaj ağırlıklarının aynı ücret ile eşlendiğini fark etmesi için sorular yönlendirilmiştir. Sema, birebir eşlemede bir kümenin her bir elemanlarının diğer kümenin yalnızca bir elemanı ile eşleneceği fikrine sahip olmuştur. Öğretim oturumun sonunda Sema değerlendirme sorularına verdiği yanıtlarda birebir eşlemeyi *'bir elemanı bir elemana eşleştirme'* olarak tanımlamıştır. Ayrıca bir kümenin elemanları arasında sabit bir artma ya da azalma ilişkisinin her zaman mümkün olup olmayacağı sorgulandığında *'mesela bagaj örneğinde kilogramlar bir artıyor, bir eksiliyor'* ifadesi ile ilişkinin farklı olabileceğini belirtmiştir.

4.4.1.2.3. Doğru ve Doğru Parçası Kavramlarının İncelenmesi

Sema doğru ve doğru parçasının matematiksel tanımı hakkında önbilgiye sahip değildir. Bu nedenle kavram tanımı ve niteliklerine ulaştıracak örnekler ve somut materyaller ile sorular yöneltilmiştir. Sema' ya doğruyu tanımlayabilmesi için günlük hayattan analoji yapabileceği ve fikir ileri sürebileceği örnekler üzerinde sohbet edilmiştir. Arabayla veya trenle seyahat ederken düz bir yolda ya da demiryolu hattında ilerlediklerini hissedip hissetmediği sorulmuştur. Sema' nın *"[…] Genel olarak şöyle düz çizgi (eli ile düz bir çizgi çizer,* bkz. Şekil 62, (a)*) […]"* ifadesi ile düz çizgi fikrine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu fikre dayanarak Sema' ya uzun bir elektrik kablosu verilmiş ve bu kablo ile düz bir çizgiyi temsil etmesi istenmiştir. Ardından aynı temsili bir ip yardımıyla yapması istenmiştir. Sema kablo ve ip ile düz çizgi temsillerini oluşturmuştur (bkz. Şekil 62, (b) ve (c)). Oluşturulan bu temsiller sorgulandığında Sema, düz bir çizgiyi temsil ettiğini belirtmiştir. Her üç temsilde de düz çizgiyi yatay eksene paralel konumda çizdiği gözlenmiştir.

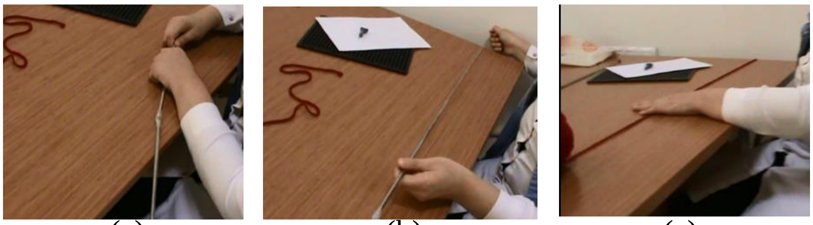


(a) (b) (c)

Şekil 62. Sema' nın düz çizgi temsilleri

Sema' ya verilen radyo antenini incelemesi istenir. Antenin sündürülmek istendiğinde istenildiği kadar sündürülebileceğinin hayal etmesi istenir.

Araştırmacı: Sana bir radyo anteni vereceğim. Ortadaki birleştirdiğim nokta da dahil düz bir çizgi olarak düşünelim. Bu anteni sündürmek istediğin kadar sündürdüğünü hayal edebilir misin?
Sema: Bakayım (antenin her iki ucundan sündürüp uzatır, bkz. Şekil 63, (a) ve (b)).



(a) (b) (c)

Şekil 63. Sema, doğru temsillerini inceliyor

Sema' ya bir diğer doğru temsili olan gergin ip ile doğrunun her iki ucundan dilediğimiz kadar sündürebileceğimiz fikrini edinmesi için sorular sorulur. Gergin bir ipin düz çizgiyi temsil ettiği fikri edinildiği için adımlar bu fikir üzerinden şekillenir.

Araştırmacı: Elini uzatır mısın? Orada ipimiz duruyor. Düz bir çizgi haline getirelim.
Sema: Evet (ipi masanın üzerinde üç karış uzunluğunda gerer).
Araştırmacı: Biraz daha uzatman mümkün mü?
Sema: Evet (ipi asılıp uzatır).
Araştırmacı: Biraz daha sündürmek istesem yapabilir miyim?
Sema: Evet sündürüyorum sündürüyorum geliyor (güler, bkz Şekil 63, (c)).
Araştırmacı: Her sündürmek istediğimde istediğim kadar yapabiliyorsam bu düz çizgi şeklindeki ip, kablo ya da anten neyi temsil eder?
Sema: Uzunluk mu, metre mi yaptık?
Araştırmacı: Evet uzunluk önemli ama temsil ettikleri nedir?
Sema: Ölçüm mü?
Araştırmacı: Düz bir çizgiyi nasıl tanımlarsın matematikte neyi temsil eder?
Sema: Doğru, çizgi doğrudur.

Sema kablo ve ip ile düz çizgi temsilinden sonra, bu düz çizginin her sündürmek istenildiğinde sünebilir olması fikri için anten ve ip incelenmiştir. Anten ve ipin temsil ettiği kavram sorulduğunda öncelikle uzunluk fikrinden yola çıkmış ve metreyi temsil ettiğini düşünmüştür. Araştırmacının düz bir çizginin matematiksel kavram olarak neyi temsil ettiğini sorgulaması üzerine doğru kavramı cevabı alınmıştır. Bu nedenle Sema' nın zihnindeki doğru için kavram imajının yalnızca düz bir çizgi olup olmadığı sorgulanmaya devam edilmiştir:

Araştırmacı: Doğruyu bana çizebilir misin parmağınla?
Sema: Parmağı ile düz bir çizgi çizer ve sanki çizgi devam ediyormuş gibi kolunu uzatarak çizmeye devam eder (bkz Şekil 64, (a)).

Araştırmacı: Doğru nasıl bir şeymiş?
Sema: Düz çizgi
Araştırmacı: İple gösterebilir misin bana?
Sema: (ipi gergin bir şekilde masanın üzerine uzatır) Böyle (bkz. Şekil 64, (b)).
Araştırmacı: Evet düz bir çizgi gibi oldu.
Sema: Ama ucu biraz yamuk oldu.
Araştırmacı: Uç ne? Önemli mi ucunun yamuk olması?
Sema: Yani düz olmadı gibi (masanın kenarına paralel olacak şekilde ipin doğrultusunu değiştirir).
Araştırmacı: Uç ne peki?
Sema: ...
Araştırmacı: Sündürmeye devam edecek misin? Sündürebilir misin istediğin kadar bu düz çizgiyi?
Sema: Uç burası işte uzattığım yer. Bu ipi uzatırım istediğim kadar.

(a) (b)

Şekil 64. Sema' nın doğru temsilleri

Sema' nın doğru kavramını '*sündürmek istediği zaman sündürebildiği düz bir çizgi*' olarak algıladığını söyleyebiliriz. Ancak doğrunun doğrultusu fikrine sahip olmadığından düz çizginin yatay eksene paralel konumda olması gerektiğini düşünmektedir. Ayrıca '*doğrunun ucu*' alternatif kavramı ile ok işaretini temsil ederek, ipin uç noktasını ifade etmektedir. Öğretim oturumun devamında bu kavramlar tekrar tartışılmıştır.

Araştırmacı: Peki sana başka bir ip vereceğim. Bu ipi sündürebilir misin?
Sema: (ipi inceler ve uç noktalarından çekiştirir) Sündüremem (bkz. Şekil 65, (a)).
Araştırmacı: Sence bu neyi temsil eder?
Sema: (masanın üzerine ipi gergin olarak bırakır ve uç noktalarından tutar) Böyle bir ip parçası (bkz. Şekil 65, (b)).
Araştırmacı: Evet bu şekilde tuttuğunda nedir bu?
Sema: Doğru, yok! Dar çizgi, bunu bilmiyorum ben.
Araştırmacı: Doğrudan bir kesit, bir parça almışım değil mi?
Sema: Doğru değil, sünmüyor.

Şekil 65. Sema doğru parçası temsili olarak ip parçasını inceliyor

Sema incelediği doğru parçası temsili olan ipi iki ucundan çekiştirerek sündürmeye çalışmıştır. İp parçasının dilediği kadar sünmediğini gözlemleyen Sema, masanın üzerinde düz bir çizgi parçası temsili olarak gerer. Bu temsili '*dar çizgi*' olarak ifade eder. Dar kelimesinin parça kelimesini karşılayıp karşılamadığını anlamak için tartışmaya devam edilmiştir. Sema' nın uç noktaları parmağı ile işaret etmesi ve sündürememe fikirlerinden hareketle adımlar şöyle devam etmiştir:

Araştırmacı: Doğru neydi?
Sema: Düz bir çizgi.
Araştırmacı: Bu da…
Sema: Düz çizgiden alınmış parça
Araştırmacı: Şimdilik düz çizgi parçası diyelim mi o zaman?
Sema: Olur.
Araştırmacı: Beyaz bastonun katlanan her bir parçasını düşünelim. Katladığımız her parça bir nedir?
Sema: Düz parçadır. Çizgi değil ama o.
Araştırmacı: Güzel. Ama düz çizgi parçasını temsil etmez mi?
Sema: Olabilir.
Araştırmacı: Bastonu açtığımızı düşünelim. Her bir parça yan yana geliyor.
Sema: Düz oluyor. Düz çizgi, ama katlayınca eğri mi oluyor?
Araştırmacı: Katladığımızda parçalar oluyor, nasıl parçalar?
Sema: Düz çizgi. Düz çizgiyi parçalara bölüyoruz.
Araştırmacı: Evet. O halde düz çizgi doğru ise bu parçalara ne diyelim?
Sema: Doğrunun parçası.
Araştırmacı: Harika! Bunun adı doğru parçası.

Sema ile doğru parçası terimine hazırlık yapmak amacıyla '*düz çizgi parçası*' terimi kullanılmıştır. Bir başka doğru parçası temsili için beyaz bastonun katlanan her bir parçası ele alınmıştır. Ancak burada beklenmedik bir şekilde Sema, bastonun katlanmış halini eğri olarak tanımlıyor. Buradaki eğri fikri öğretim oturumunun ilerleyen kısmında tekrar ele alınmak üzere, doğru parçası fikri tartışılmaya devam edilmiştir. Beyaz baston doğru parçasını 'düz çizgi parçası' olarak yapılandırma fikrini pekiştirmiştir. Daha sonra terim olarak doğru parçası zikredilmiştir.

Sema' nın daha önce uç noktası fikri ve parmakları ile doğru parçası temsili olan ip parçasının uç noktalarını tutmasından hareketle doğru parçası tanımın yapılandırılması için öğretim oturumuna devam edilmiştir:

Araştırmacı: Peki bu elindeki ipi gerip tekrar doğru parçası haline getirebilir misin? (Sema ipi masanın üzerine gergin halde tutar, bkz. Şekil 66, (a)). *Bu doğru parçasının uç noktalarını işaret edebilir misin?*
Sema: Buralar (Sema uç noktaları işaret eder, bkz. Şekil 66, (b)).
Araştırmacı: O zaman uç noktaları olan, sündürmek istediğimizde sündüremediğimiz düz çizgi parçasına ne diyoruz?
Sema: (İp parçasını işaret ederek) Doğru parçası.

Sema' nın işaret parmağı ile temsil ettiği noktalar sırasıyla A ve B noktaları olarak adlandırılır. Bu doğru parçasına [AB] doğru parçası denildiği açıklanır.


(a) (b)

Şekil 66. Sema doğru parçası ve doğru parçasının uç noktalarını belirliyor

Kabartma yazıda doğru ve doğru parçası gösterimlerini Sema sezgisel olarak çizebildiği için görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin temsillerini incelemek amacıyla tahta parçaları ve cetvelden yararlanılmıştır.

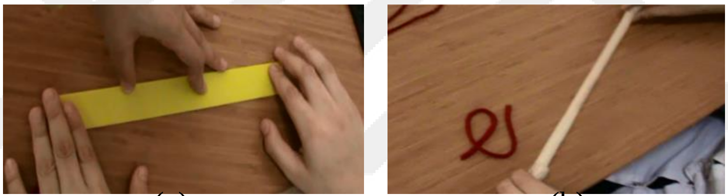
Araştırmacı: (tahtadan doğru temsilleri Sema' ya uzatır) Bu görenlerin doğru temsili.
Sema: (doğru temsilini oklardan tutar) Bu ne?
Araştırmacı: Bir doğru ama temsili, hissedebilmen için biraz kalın kesilmiş. Uçlarındaki okları hissedebiliyor musun?
Sema: Evet.
Araştırmacı: İşte bu oklar ne demek istiyor? Sündürmek istediğin zaman bu oklardan iki tarafa sündürebilirsin demek.
Sema: Nasıl? (iki ucundan tahtayı çekiştirip sündürmeye çalışır, bkz. Şekiz ?, (a)*)*
Araştırmacı: (güler) Sen bunu bu şekilde sündüremiyorsun ama hayali olarak bunu bir çizgi olarak çizdiğini düşün.
Sema: Haa!
Araştırmacı: Parmağınla çizdiğinde sündürmek istediğinde sündürebildiğin kadar yapabiliyorsun demek.

Sema doğru temsili olarak ip, kablo ve anten gibi tahtanın da sündürme eylemini gerçekleştirebilen bir yapıda olduğunu düşünmüştür. Bu duruma dayanarak doğrunun tanımının beklenilen şekilde algılandığını söyeleyebiliriz. Ok işaretinin temsil ettiği belirtilir. Sema hayali bir çizgi olarak düşünmesi istenildiğinde, doğru temsilini masanın üzerine bırakır ve eliyle sağ ok işaretinden başlayarak tek parmağı ile düz çizgiyi çizer gibi sol ok işaretine kadar inceler (bkz. Şekil 67, (b) ve (c)).

(a) (b) (c)

Şekil 67. Sema doğru temsili olan tahtayı inceliyor

Doğru parçası temsili için cetvelin ölçeklendirilmemiş yüzeyi kullanılır (bkz. Şekil 68, (a)). Doğru parçasının tanımı hatırlanarak uç noktalar incelenir. Ardından başka bir tane doğru temsili olan tahta incelenir (bkz. Şekil 68, (b)).



(a) (b)

Şekil 68. Sema doğru parçası ve doğru temsillerini inceliyor

Doğru parçası temsilini incelerken Sema ilk olarak uç noktalara dokunur ve hemen bir doğru parçası olduğunu belirtir. Tahtadan yontulmuş doğru temsiline dokunduğunda çok daha iyi zihnindeki temsili oluşturduğunu belirtir ve okların temsil ettiği fikri *'[...] Çizgi devam ediyor. [...]'* şeklinde yorumlamıştır. Bu temsiller üzerinden doğru ve doğru parçasının adlandırılması tekrar sorulduğunda ise doğru parçasının uç noktalarını A ve B' den farklı olarak *'[...] N ve K diyelim. [...]'* şeklinde fikir ileri sürmüştür.

Sonlu sayıda doğru parçalarının bileşkesinin yine bir doğru parçası olduğu fikri üzerine tartışılmak istenmiştir. Bu öğretim oturumun başında beyaz bastonu incelerken Sema bu konuda fikir ileri sürmüş ve tartışma yarım kalmıştır. Bu nedenle ilk önce okul ile ev arasındaki uzaklık üzerine konuşmaya başlanmıştır. Sema okul ile ev arasındaki mesafeyi "[…] *Yokuştan iniyor servis, sonra dönüyor, aa bizim eve geldik diyorum, sonra iniyorum*." şeklinde birer uç nokta belirleyerek parçalara ayırmıştır. Belirlenen noktaları uç nokta kabul eden doğru parçaları düşünülerek tartışma devam ettirilmiştir. Sema iki doğru parçası ile bir doğru elde edilemeyeceğini sorgulamıştır. Kendisine iki doğru parçasını temsil eden ip parçaları verilmiştir. Bu ip parçalarını uç noktalarından ekleyerek düz bir çizgi elde etmesi istenmiştir. Sema iki ip parçasını da doğru parçası temsili haline getirir ve uç uca denk getirir (bkz. Şekil 69). Daha sonra yine bir doğru parçası elde ettiğini belirtir.

Şekil 69. Sema' nın iki doğru parçası ile bir doğru parçası elde etmesi

Bu tartışma sonucunda doğru parçalarından yine bir doğru parçası elde edilebileceği fikrine ulaşılmıştır. Ayrıca bir doğru parçası üzerinde yer alan noktalar kümesi ele alınmıştır. Sema' dan rulet, tablet, kalem ve kağıt materyallerini kullanarak bir doğru parçası çizmesi istenmiştir. Sema küptaş kasa materyalini kullanmak istemiştir:

Sema: Tablet kalemle bir deneyeyim. Küptaşla da olurdu, yan yana koyardım taşları, çok kolay olurdu (güler).
Araştırmacı: Veriyim mi küptaş
Sema: Yoo ben tabletle de yaparım (kağıdı tablete yerleştirir). Nasıl yapacağız? 1-4, 1-4 yapıyım mı?
Araştırmacı: Olabilir.
Sema: Boşluk bırakıyım mı, bırakmayayım mı?

Sema' nın doğru parçası çizerken kullandığı materyaller doğru parçasının bir noktalar kümesi olarak düşünmeye sevk etmiştir. Burada noktalar arasında boşluk bırakma düşüncesi tartışıldığında Sema "*Bırakmayayım. Bu düz çizgi parçası.*" şeklinde ifade ederek çizimini yapmıştır. Sema' dan düz bir çizgi çizmesi istendiğinde "[…] *sonsuza kadar, doğru*" ifadesini kullanmıştır. 'Sonsuza kadar' ifadesi tekrar tartışıldığında sündürmek istediğimiz kadar sümdürebilme fikrini söyleyebilmiştir. Bunu nasıl gösterebileceğimiz sorgulandığında çizgiye ok işaretleri eklemek istemiştir. Böylece Braille yazı kodları ile Sema tablet kalem yardımıyla doğru çizer. Sema' dan çizdiği doğru parçasını ve doğruyu adlandırması istenir. Sema "*uç noktalar biri A, biri B olsun fark etmez.*" şeklinde [AB] doğru parçasını adlandırırken, Sema' ya doğrunun küçük harfler ile adlandırıldığı kabulü açıklanmıştır. Daha sonra doğru ve doğru parçasının Braille yazıda kodları kullanarak yazılışı ifade edilir ve Sema tablet kalemle yazar. Yazılan metin tabletten çıkarılarak incelenir. Kabartma yazıda doğru parçası sembolünün görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı Latin semboller ile benzer olduğu, köşeli parantez dediğimiz paranteze benzediği açıklanır.

Sema' dan ip yardımı ile bir eğri temsili oluşturması istenir. Şekil 70' te olduğu gibi Sema bir eğri oluşturur. Ardından görüşmede daha önce Sema' nın ifade ettiği doğrultusu yatay eksenden farklı doğrular üzerine tartışma devam ettirlir.

Şekil 70. Sema' nın eğri temsili

Araştırmacı: Dersimizin başında doğruyu oluştururken yamuk oldu demiştin.
Sema: O doğru, düz çizgi.
Araştırmacı: Doğruyu nasıl tanımlarsın?
Sema: Düz çizgi olarak (önündeki ipi gererek).
Araştırmacı: Nasıl bir düz çizgi?
Sema: Sonsuza kadar giden düz çizgi.
Araştırmacı: Doğru parçasını tanımlar mısın?
Sema: Belli noktası var, şurada başlıyor ve şurada bitiyor (parmağı ile önündeki doğru temsili olan ipin üzerinde iki farklı noktayı işaret eder.)

Sema doğru ve doğru parçası tanımlarını kendi ifadesi ile yapabilmiş ve ip yardımı ile temsilerini gösterebilmiştir. Ayrıca oluşturduğu doğru parçasını [BC] olarak adlandırmıştır. Oturumun sonunda doğru ve doğru parçası için neler söyleyebileceği sorgulanmıştır:

Sema: Düz bir çizgi, ok işaretleri ile gösteriliyor, çizgide noktalar var. Yazarken boşluk koymadım. Hep nokta vardı. Noktalar birleşik olmalı.
Araştırmacı: Başka neler söylersin?
Sema: Bu doğruyu küçük l ile gösteririz.
Araştırmacı: Güzel, doğru parçasını nasıl isimlendiririz?
Sema: Uç noktaları ile, A, B gibi. Büyük harf.

Sema' nın doğru ve doğru parçası için noktalar kümesi olan düz bir çizgi ve çizgi parçası olarak yapılandırdığını söyleyebiliriz. Ayrıca doğru ve doğru parçası temsillerini yapabildiği ve adlandırabildiğini söyleyebiliriz.

Bir hafta sonra dördüncü oturumda Sema' nın hatırladıkları sorgulandığında doğru ve doğru parçasını açıklayabilmiş, temsil türlerinden bahsetmiş ve adlandırmalarını yapabilmiştir. Bu görüşmede doğru temsilinde ok işareti sorgulandığında Sema' nın "*Doğrunun uçları yok ki, sonsuza kadar gidiyor*." ifadesi doğru kavramını beklenen düzeyde algıladığını göstermektedir.

4.4.1.2.4. Sayı Doğrusu (Cetvelleme) Kavramının İncelenmesi

Dördüncü oturumda nesnelerin niteliği olarak uzunluk, uzunluk için birimin önemi, standart bir birimin gerekliliği, bir nokta ile bir reel sayının eşlenmesi, bir doğrunun cetvellenebilmesi ve nihayetinde sayı doğrusunu tanımlayabilme hedefleri amaçlanmıştır. Öncelikle kumaş ya da bahçe çiti gibi nesneleri satın alırken nelere dikkat edildiği sorgulanmıştır. Sema metre ile uzunluklarının ölçülebildiğini belirtmiştir. Burada uzunluk kavramını terim olarak ifade etmesi ve açıklayabilmesi için tartışma sürdürülmüştür. Aynı zamanda Sema' nın uzunluk niteliği tartışılırken birim kavramına dikkat ettiği belirlenmiştir:

Araştırmacı: Ben ölçtüm ve 5 metre bahçe çiti almam gerektiğini anladım. Satıcı da ölçüp verdi. Eve geldiğimde aldığım bu çit benim bahçeme tam olacak mı?
Sema: Olacak.
Araştırmacı: Peki bunu sağlayan şey ne?
Sema: Eşitlik.
Araştırmacı: Eşitlik nasıl mümkün oluyor?
Sema: Ölçerek.
Araştırmacı: Güzel, ölçmede önemli olan ne?
Sema: Metre ile ölçtük.
Araştırmacı: Her ikimiz de metre ile ölçtük. Metrede standart olan bir şey var demek ki.
Sema: 1 metre 1000 milimetre.
Araştırmacı: 1 metrenin 1000 mm olmasından ne anlamalıyız?
Sema: Uzunluk.
Araştırmacı: Bahçe çitinde ölçtüğümüz ne?
Sema: Metre ile mi? Uzunluğu.

Sema nitelikleri aynı olan iki nesnenin uzunluğunun karşılaştırılması ve eşitliği hakkında fikir ileri sürebilmiştir ve uzunluğun ölçülebilen bir nitelik olduğunun farkındadır. Tartışmada birimin gerekliliğinin farkında olduğu ve metre için milimetreyi birim kabul ettiği belirlenmiştir. Burada esas olan uzunluğu metre ile birimlere ayırmak olmasına karşın Sema' nın fikri üzerinden tartışma devam ettirilmiştir. Ancak oturumun devamında birim kavramının anlaşılması için tahta çubuklar ve kablo parçaları kullanılarak yeniden tartışılmıştır. Nitekim tartışma devam ederken Sema' nın uzunluğun belirlenmesi ve birim kavramı için önbilgilerinin yetersiz olduğu tespit edilmiştir.

Araştırmacı: Sence bu çubuklar neyi temsil ediyor?
Sema: Düz çizgi, doğru parçası.
Araştırmacı: O zaman ben doğru parçalarıyla herhangi bir nesnenin uzunluğunu ölçebilir miyim?
Sema: Ölçeriz.
Araştırmacı: Mesela ben sana bir tane kablo vereceğim (kablo parçası verilir). Bu kabloyu arabada kullanacağım ama güneş ışınları zarar vermesin diye dışına başka bir kablo ile panel yapacağım. Bu çubuklar yardımı ile kablonun uzunluğunu ölçebilir misin?

Sema: Bilmem ölçebilir miyiz ki? Ama ölçemeyiz ki.
Araştırmacı: Neden?
Sema: Buna uygun çubuk yok burada (çubukları inceler, daha kısa bir tahta çubuk alıp kablonun yanına koyar; bkz. Şekil 71, (a)).
Araştırmacı: Uygun çubuk derken ne demek istedin?
Sema: Uzun çubuk yok burada (daha kısa olan kablo parçası ile uç uca getirmeye çalışır, bkz. Şekil 71, (b)).

Sema çubukların birer doğru parçası temsil ettiğini ve uzunluğu belirlemede kullanılabileceği fikrine sahip olmasına rağmen, uzunluğun yalnızca eşit uzunlukta nesneler ile ölçülebileceğini düşünmektedir.

(a) (b) (c)

Şekil 71. Sema kablonun uzunluğunu belirlemeye çalışıyor

Sema birkaç denemede kablo ile eşit uzunlukta çubuklar aramıştır. Birim kavramını tartışmak için görüşme aşağıdaki gibi sürdürülmüştür:

Araştırmacı: Kısa çubukları yan yana koyarak ölçsek olmaz mı?
Sema: Bilmem, bak burada uzun çubuk buldum (daha uzun tahta çubuğu gösterir, bkz. Şekil 71, (c)*). (Tahta çubuk ile kablonun uç noktalarını denk getirmeye çalışır) Bir de şunu deneyelim (başka bir tane tahta çubuk alır, uç noktalarını üst üste tutar) Hah, oldu. Yok.*
Araştırmacı: Daha kısa.
Sema: Evet. Yanına bir şey daha koymamız lazım. Ne koyacağız? (daha kısa bir tahta çubuk alır)
Araştırmacı: Şunu merak ediyorum, diyelim ki bu çubuk oldu (kablonun yanında tuttuğu uzun tahta çubuğu işaret ederek), bu çubuğun yanına da bir çubuk daha buldum (daha kısa bir çubuk yanına yerleştirilir, Şekil 72, (a)). *Tam denk geldi. Uzunlukları eşit oldu. Kablonun uzunluğuna ne diyeceksin?*
Sema: Bilmem (güler).
Araştırmacı: İki çubuk uzunluğunda, böyle diyebilir miyiz? Satıcıya iki çubuk uzunluğunda bir kablo istiyorum dedim. Sence bana doğru ölçüde verebilir mi?
Sema: (güler) vermez.
Araştırmacı: Veremez. Burada bazı çubuklar eşit uzunlukta ben sana şimdi onları vereceğim. Elini uzatır mısın? Bu çubukları yan yana koyarak ölçebilir miyiz? (bkz. Şekil 72, (b)).

(a) (b) (c)

Şekil 72. Sema verilen kablonunu uzunluğunu birim uzunluktaki çubuklar ile belirliyor

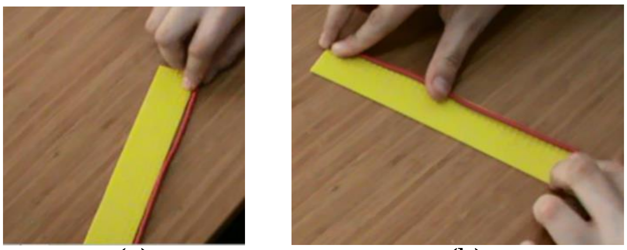
Sema kablonun uzunluğunu belirlerken eşit uzunluklarda çubuklar kullanmadığı için başarılı bir ölçüm yapamamıştır. Belirlediği uzunluğun kullanışlı olmadığını fark ettirildikten sonra birim uzunluk kabul edilen eşit uzunlukta çubuklar verilir. Böylece birim uzunluk cinsinden belirtilmesi gerektiği fikri ele alınmıştır. Sema çubukları incelemiş, uçları birbirine eklenecek şekilde yan yana dizmeye çalışmıştır. Ancak çubuklar biraz küçük olduğundan düz bir şekilde yerleştirememiştir. Sema' ya kaç tane çubuk kullandığı sorulduğunda yeniden çubukları tek tek saymıştır. Bu çubukların birim uzunluk kabul edilmesi istenmiştir. Böylece beş birim uzunluktaki kablo satın almanın mümkün olup olmadığı sorgulanmıştır.

Sema: Çubuk diyoruz satıcı bilemez ki.
Araştırmacı: peki ben bu çubuklardan bir tanesini götürsem, bu benim birimim, bu birime göre beş birim uzunluğunda kablo istiyorum desem, verebilir mi?
Sema: Verir, ölçerek verir.

Sema birim uzunluk için seçilen çubuğun uzunluğunun standart bir birim belirtmediğini algılamıştır. Böylece araştırmacı birim olarak cm kullanarak kablonun uzunluğunu ölçmesini istemiş ve bunun için kabartma yazılı cetvel sunmuştur. Sema cetveli incelemiş ve kablo ile yan yana koyarak ölçmeye çalışmıştır. Sema daha önce cetvel incelediğini ancak hatırlamadığını belirttiği için öncelikle verilen cetvel ve birimleri belirten çizgiler incelenmiştir. Bu çizgilere göre cetvelin birimi belirlenir (bkz. Şekil 73).

Şekil 73. Sema cetveli ve birimleri inceliyor

Sema beşer cm aralıklarla ölçeklendirilen cetveli inceler ve üzerindeki kabartma sayıları tek tek okur. Sema' nın cetvel üzerindeki 5 cm birim aralıklarla sayıların verildiği ve 0 noktasından başladığı dikkatini çekmiştir.

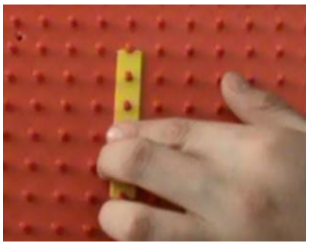


(a) (b)

Şekil 74. Sema cetvel ile kablonun uzunluğunu belirliyor

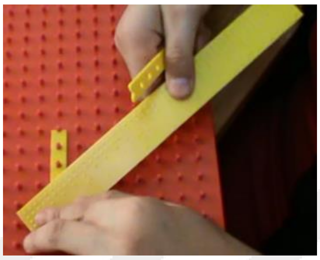
Sema başlangıçta Şekil 74 (a)' da görüldüğü gibi cetvel ve kabloyu yatay konumda tutarak kablonun uzunluğunu ölçmeye çalışmıştır. Cetveli inceledikten sonra kabartma yazının konumuna göre dikey konumda kablonun uzunluğunu ölçmüştür (bkz. Şekil 74, (b)). Sema kablonun uzunluğunu 20 cm olarak belirlemiştir. Tekrar dikkatli incelemesi istenir. Sema cetvel üzerindeki işaretlenmiş birimleri tekrar incelemiş ve kablonun uzunluğunun 22 cm olduğunu tespit etmiştir.

Birimin uzunluğun belirleneceği duruma göre değişebileceğinin fark edilmesi için iğneli sayfa materyali üzerinde çubukların uzunluğunun belirlenmesi istenmiştir. Sema verilen çubukların doğru parçası temsili olduğunu belirtmiştir. Çubukları hemen iğneli sayfaya yerleştirmeye çalışmıştır. Sema doğru parçalarını temsil eden çubukları yatay ya da düşey konumda tutmadığı için iğneleri çubuklar üzerindeki deliklere yerleştirmekte zorlanmıştır. Bir doğru parçasını yerleştirmiştir. Araştırmacı yerleştirdiği çubuğun uzunluğunu belirlemesini istemiştir.



Şekil 75. Sema iğneli sayfa üzerine yerleştirdiği çubuğun uzunluğunu belirliyor

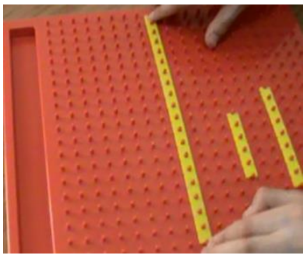
Sema: 1, 2, 3, 4 tane var (iğneleri sayar, bkz. Şekil 75)
Araştırmacı: Dört tane neyi saydın?
Sema: Çubukları, şunları saydım (iğneleri işaret eder)
Araştırmacı: Çubukları mı sayacağız sence, yoksa uzunluk ölçeceğimiz için iki çubuk arasındaki mesafeyi mi önemli?
Sema: (iğneler arasındaki mesafeyi işaret ederek) şunları sayacağız.
Araştırmacı: Sana cetveli tekrar veriyorum. Cetvelde 0 noktasını bana bulur musun?
Sema: (cetveli alıp inceler) Şurası (0 noktasını işaret eder)
Araştırmacı: 5' i bulur musun?(Sema 5 noktasını gösterir) Şimdi sen 1, 2, 3 diye bunları mı sayıyorsun, yoksa 0' dan 5' e bu uzaklık mı 5 cm?
Sema: 0' dan 5' e kadar 5 cm. [...] İğnelerin arasındaki boşlukları sayacağız.



Şekil 76. Sema cetvelde birimi inceliyor

Sema çubuğun uzunluğunu belirlemede iğneli sayfa üzerindeki iğneleri birim olarak kabul etmiştir. Bunun için iğneleri sayarak 4 birim uzunluğunda olduğunu belirtmiştir. Cetveli tekrar incelemiş ve birim uzunluk kavramını algılamıştır (bkz. Şekil 76). Böylece Sema iğneler arasındaki mesafeyi birim kabul ederek, birkaç tane farklı çubuğun uzunluğunu belirlemiştir.

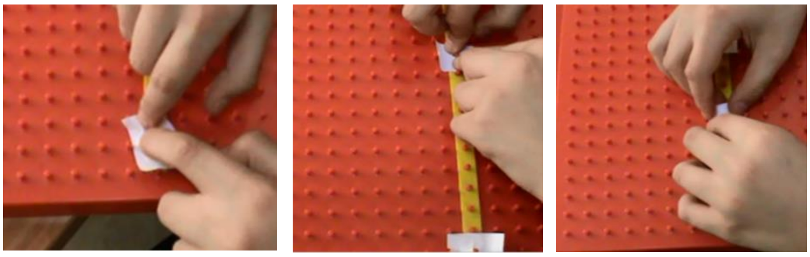
Uygulamanın bu adımında doğru ve doğru parçası üzerindeki noktaların varlığı tekrar sorgulanmıştır. İğneli tahta üzerindeki iğneler ve doğru parçası temsili olan çubuklar üzerindeki delikler bu bağlamda ele alınmıştır. Doğru parçalarının uzunluklarını belirlemek için iğneli sayfa üzerine yerleştirilen doğru parçalarının üzerlerindeki noktalarla iğnelerin eşlendiği fikri üzerine sohbet edilmiştir. Ardından daha uzun bir çubuk Sema' ya doğru temsili olarak sunulmuştur. Sema doğruyu iğneli sayfa üzerine yatay konumda yerleştirmiş ve iğneler arasındaki mesafeleri saymaya başlamıştır (bkz. Şekil 77).



Şekil 77. Sema doğru temsili çubuğun uzunluğunu belirlemeye çalışıyor

Doğrunun uzunluğunun belirlenmeyeceği belirtilerek sayılar ile doğru üzerindeki noktaların eşlenmesi tartışılmıştır. Sema iğneli sayfa üzerindeki iğneler ile doğru temsili üzerindeki noktaların eşlendiğini ifade etmiştir. Doğru üzerindeki nokta temsilleri ile tamsayıların eşlenip eşlenemeyeceği sorgulandığında da eşlemenin yapılabileceğini düşünmüştür.

Sema' ya negatif ve pozitif tamsayıların olduğu sayı etiketleri verilmiştir. Bu etiketleri iğneler üzerine tutturarak, doğru üzerindeki noktalarla sayıları etiketlemek için kullanacağı belirtilmiştir. Sema verilen etiketleri incelemiş, ancak etiketlerin yönünü belirlemekte zorlanmıştır. Daha sonra kabartma yazıda rakam işaretini belirleyerek etiketleri doğru okuyabilmiştir. Sema okuyabildiği ilk etiket ile eşlemeye başlamak ister:



(a) (b) (c)

Şekil 78. Sema sayı etiketleri ile doğru üzerindeki noktaları eşliyor

Sema: -4. Takıyım mı?
Araştırmacı: Tamam. (Sema sol en uçtaki iğneye yönelir) Burası mı olsun?
Sema: Evet. (bkz. Şekil 78, (a))
Araştırmacı: Şimdiki etiketi ben seçebilir miyim? 0' ı eşlemeni istiyorum. 0 neresi olsun?

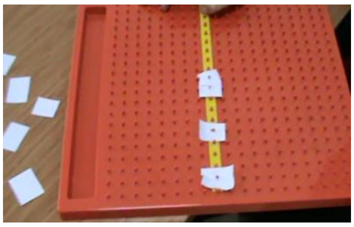
Sema, -4 noktasını doğru üzerinde sol uçtan ilk noktaya gelişigüzel taktığı düşünülerek 0 noktasını belirlemesi istenmiştir. Böylece Sema' nın, sayıların doğru üzerinde belli bir kurala ve birimlere göre yerleştirilmesi gerektiğini düşünmesi amaçlanmıştır. Sema doğrunun orta noktası ile 0' ı eşlemiştir (bkz. Şekil 78, (b)). Araştırmacının seçtiği 4 sayı etiketini Sema 0 ve -4 sayılarını eşlediği iğnelerin arasında kalan iğnelerden birini seçmiş ve 4 ile eşlemek istemiştir (bkz. Şekil 78, (c)).

Araştırmacı: Şimdi bir şeyi merak ettim. (Sema' nın elini tutar) 0 şurada, -4 de burada. +4' ü ikisinin arasına eşliyorsun neden?
Sema: Ne bileyim? Çünkü ikisinin arasında şey var, -4 ve +4, 0. -4 ile 0 arasına sayı koyacağım.
Araştırmacı: 0 ile -4 arasına neden pozitif bir sayı koymak istiyorsun?
Sema: Pozitif olsun istedim.
Araştırmacı: 0 ile -4 arası kaç birim uzunluğu?
Sema: (Parmağı ile sayarak uzunluğu belirlemeye çalışır) 10 birim.
Araştırmacı: O zaman +4' ün de 0' dan 10 birimlik bir mesafede olmasını beklemez miyim?
Sema: Aaa.. Evet. Ama olmaz ki. O zaman 0' ın yerini değiştirelim (0' dan sağa doğru 10 birim saymak ister, saymadan sezgisel olarak iğne sayısının yetersiz olduğunu anlar).

Sema sayıların gelişigüzel eşlenemeyeceği ve noktalar arasında birim uzunluğun dikkate alınması gerektiğini fark etmiştir. İğneli tahta materyalindeki iğnelerin sayısı yetersiz geldiği için Sema daha önceki etiketlerin yerlerini değiştirmek istemiştir.

Araştırmacı: 0 hangi iğne ile eşleyelim?
Sema: 4 birim sayalım.
Araştırmacı: Nasıl?
Sema: -4' ten 4 birim sayalım 0 olsun (0 etiketinin yerini değiştirir). 4' ü takmaya çalışıyorum (0' dan sağa doğru 4 birim sayarak +4' ü eşler).

Sema 0, -4 ve +4 sayılarını doğru üzerindeki noktalar ile eşledikten sonra araştırmacı Sema' nın belirlenen birime göre eşlemeye devam edip etmeyeceğini belirlemek için sıradaki sayıyı 5 olarak belirlemiştir. Sema 4 noktasının bir birim sağındaki noktayı işaretleyerek etiketlemiştir (bkz. Şekil 79). Sema' ya yapılan işlem sorulduğunda "*-4 ile 4 arasında, çubuklar üzerindeki iğneleri eşledik.*" cevabını vermiştir.



Şekil 79. Sema' nın doğru ile sayıları eşlediği etiketler

Doğru üzerindeki bir noktanın yalnızca bir sayı ile eşlenmesi tartışılmak üzere oturuma devam edilmiştir:

Araştırmacı: Mesela 5 noktasını eşlediğin iğneyi aynı zamanda 6 ile eşleyebilir miyim? Ya da başka bir sayı ile?
Sema: Olamaz. 6 burası olur (5' in bir birim sağını gösterir).

Araştırmacı: O zaman bu nasıl bir eşleme olur?
Sema: Birebir eşleme.

Sema doğru üzerindeki noktalar ile sayılar arasındaki eşlemenin birebir eşleme olduğunu açıklayabilmiştir. Ayrıca sayıların bir birime göre doğru üzerinde etiketlendiğini ifade etmiştir. Ancak sayı doğrusu oluşturması için devam eden görüşmede Sema aşağıda betimlendiği şekilde benzer yanılgıları tekrar etmiştir.

Sema' ya önünde yer alan köpüğün bir düzlemi temsil ettiği belirtilmiştir. Ayrıca doğruyu temsil etmesi için bir ip verilmiştir. Sema '*düz çizgi yapmamız gerekiyor*' şeklinde ifade etmiş ve hemen ipi düz bir çizgi olacak şekilde yatay eksene paralel olarak germiştir. Doğrunun bir noktalar kümesi olduğunu belirtebilmiştir. Bu noktaları temsil etmesi için raptiye kullanılmıştır. Böylece doğru üzerindeki noktalar ile sayı etiketlerini raptiyeler yardımıyla eşlemesi istenmiştir. Sema bu adım için '*sayılarla noktalar arasında eşleme*' ifadesini kullanmıştır. Bu ifadeye göre iki küme arasında eşleme yaptığının farkında olduğunu söyleyebiliriz. Sayı etiketleri 9 ve -9 dahil bu iki sayı arasındaki tamsayıları içermektedir. Sema' dan ilk önce 0 noktasını belirlemesi istenmiştir. Bunun için 0 etiketi verilmiştir. Sema 0 noktasını önündeki doğrunun konumuna göre sağ tarafında bir nokta belirlemiştir (bkz. Şekil 80, (a)).

(a) (b) (c)

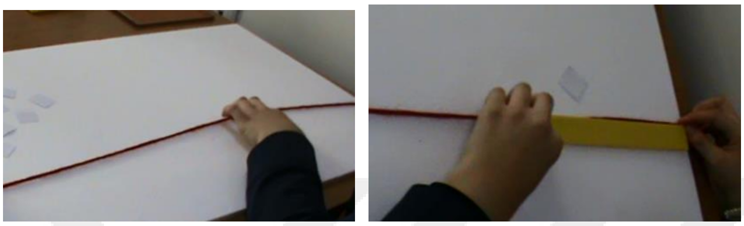
Şekil 80. Sema doğru üzerinde sayıları nasıl eşleyeceğini açıklıyor

Sema' ya pozitif ve negatif sayıların da doğru üzerindeki noktalar ile eşleneceği hatırlatılmıştır. Sema '*negatifler oraya olsun* (bkz. Şekil 80, (b)), *pozitifler buraya* (bkz. Şekil 80, (c)) *olsun.*' şeklinde sayıları eşleyeceği noktaların konumunu belirlemiştir. Sema' nın 0 noktasını belirlemesi için tartışma şöyle devam etmiştir:

Araştırmacı: 0 nerede olacak o zaman?
Sema: Burada (daha önce belirlediği noktayı işaret eder, bkz. Şekil 81, (a))
Araştırmacı: Pozitif sayılar nerede olacaktı?
Sema: Hocam 0 negatif mi pozitif miydi?

Araştırmacı: 0 ne negatif ne de pozitif. O zaman nerede olmalı sence?
Sema: Hiçbir yerde (güler)

Sema' nın 0 noktasını eşlerken tekrar aynı yanılgıyı yapmasında sıfırı pozitif veya negatif sayı olarak düşünmesinden kaynaklandığı belirlenmiştir. Sema' ya sıfırın ne pozitif ne de negatif olduğu belirtilmiştir. Sıfırı pozitif ve negatif sayılar arasına yerleştirme kabulünden bahsedilmiştir. Sema ipin konumuna göre sağ taraftan başlayarak parmağı ile doğru üzerindeki noktaları işaretler gibi saymaya başlamıştır (bkz. Şekil 81, (a)).

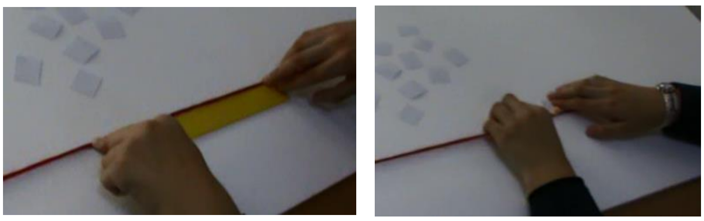


(a) (b)

Şekil 81. Sema sıfırı eşleyeceği noktayı belirliyor

Sema: 1, 2, 3, ..., 11 (bir anda vazgeçer) bir dakika elimle ölçemeyiz ki.
Araştırmacı: Tamam neyle ölçeceğiz peki?
Sema: Metre ile.
Araştırmacı: Cetvel ve çubuklar olur mu?
Sema: Cetvel ile ölçelim.

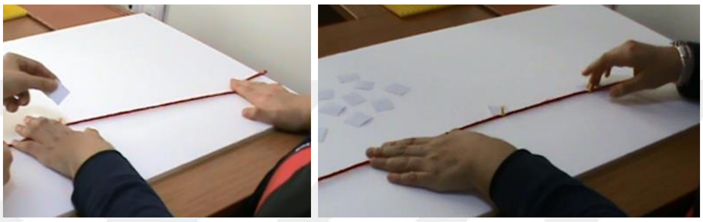
Sema' ya cetvel verilmiştir. Sema ipin konumuna göre sağ taraftan ölçmeye başlamıştır. Sema' ya neden ölçtüğü sorulduğunda '*Çünkü 0' ı nereye koyacağımı bilmiyorum (güler). Eşit uzaklıkta sayıları yerleştirmek istiyorum.*' cevabını vermiştir. Sema 0 noktasını ipin gergin kısmının tam ortasına koymak istemiştir. Bunun için orta noktayı cetvel ile ölçerek belirlemiştir (bkz. Şekil 82, (a)). Köpüğün üzerine gerilen ipin uzunluğu 100 cm olarak belirlenmiştir. 50 cm uzunluk sol kenardan tekrar hesaplamıştır ve orta noktayı işaretlemiştir (bkz. Şekil 82, (b)).



(a) (b)

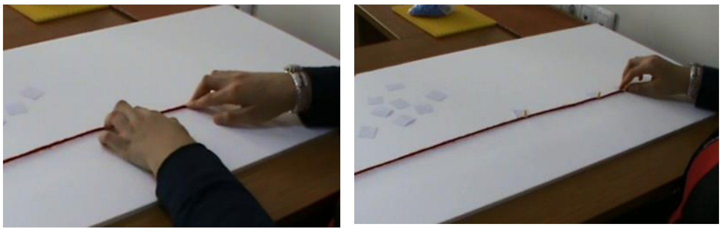
Şekil 82. Sema doğrunun verilen kısmının orta noktasını belirliyor ve 0 ile eşliyor

Sema’ dan 1 ile eşleyeceği noktayı belirlemesi istenmiştir. Sema ipin konumuna göre 0 noktasının sağ kısmında bir noktayı işaret etmiştir (bkz. Şekil 83). Bu noktayı belirlemesinin nedenini ‘*Bayağı uzakta olur. 50 cm almadık mı?*’ şeklinde açıklamıştır. 9’ a kadar sayıların bu noktalar ile eşleneceği hatırlatılınca birimi değiştirmeye karar vermiştir. Ancak burada Sema birim terimini hiç kullanmamıştır. Ayrıca pozitif sayıları neden 0 noktasının ipin konumuna göre sağ tarafına yerleştirdiği sorulduğunda cevap vermemiştir. Sema, 1 noktasını herhangi bir birim uzunluk belirlemeden gelişigüzel işaretlemiştir (bkz. Şekil 83). Birim kavramını henüz kullanmamıştır.



Şekil 83. Sema 1 ile eşleyeceği noktayı belirliyor

Sema’ dan 2 ile doğru üzerindeki bir noktayı eşlemesi istenmiştir. Sema daha önce cetvel ile ölçerek belirlediği 50 cm birimi değiştirmiş, ancak bu kez birim uzunluğu ölçmemiştir. Ancak belli bir birime göre noktaları eşlemesi gerektiğini kavrayamadığı için 2 sayısını 0 ile 1 noktaları arasında bir nokta ile eşlemeyi düşünmüştür (bkz. Şekil 84, (a)). 0 ile 1 sayıları arasına 2’ nin eşlenmesinin uygun olup olmadığı sorgulandığında Sema ‘*Giremez!*’ yanıtını vermiştir. Daha sonra Sema 1 noktasından ipin konumuna göre sağ tarafa doğru bir noktayı işaret etmiştir. 2 sayısını bu nokta ile eşlemek istemiştir (bkz. Şekil 84, (b)).



(a) (b)

Şekil 84. Sema 2 ile doğru üzerindeki bir noktayı eşliyor

Sema, 2 ile eşleyeceği noktayı sayıların sıralanışına göre belirlediğini ifade etmiştir. Noktalar arasındaki mesafeyi neye göre belirlediği sorgulanmıştır. Sema gelişigüzel

uzaklıkta bir noktayı 2 ile eşlediğini söylemiştir. Araştırmacı, Sema’ nın birim kavramını fark etmesi için cetvel ile noktalar arasındaki uzaklığı ölçmeyi teklif etmiştir. 0 ve 1 noktası arasındaki uzaklık 17 cm iken, 1 ve 2 noktası arasındaki uzaklık 8 cm olarak belirlenmiştir. Araştırmacı bu eşleme hakkında ne düşündüğünü sorduğunda Sema, ‘*Aralarında eşit mesafe olsaydı iyi olurdu*’ şeklinde ifade etmiştir. Ancak bu düşüncesinin gerekçesini açıklayamamıştır. Görüşmeye birim belirleyerek devam edilmiştir. Sema birim uzaklığın 17 cm olmasını düşünmüştür. Araştırmacı sayı etiketlerinin tamamının eşleneceğini hatırlatınca, 5 cm birim uzaklık ile sayıların eşlenmesine karar verilmiştir. Sema cetvelle 5 cm aralıklar ile 0 noktasından ipin konumuna göre sağa doğru 1, 2 ve 3 noktalarını belirlemiş ve etiketleyerek işaretlemiştir (bkz. Şekil 85, (a)).
Sema noktalar arasındaki uzaklığı belirlerken cetveli kullanmakta başlangıçta güçlük yaşamıştır. 0 ve 1 noktası arasında 5 cm belirleyebilmiştir. Ancak 1 ile 2 noktası arasındaki uzaklığı cetvelin konumunu değiştirmeden belirlemek istemiş ve 10 cm uzaklığı belirleyememiştir. Daha sonra 1 noktası ile cetvelin 0 noktasını eşleyerek yeniden ölçmesi sağlanmıştır. Böylece diğer noktalar için birim uzaklığı belirleyebilmiştir.

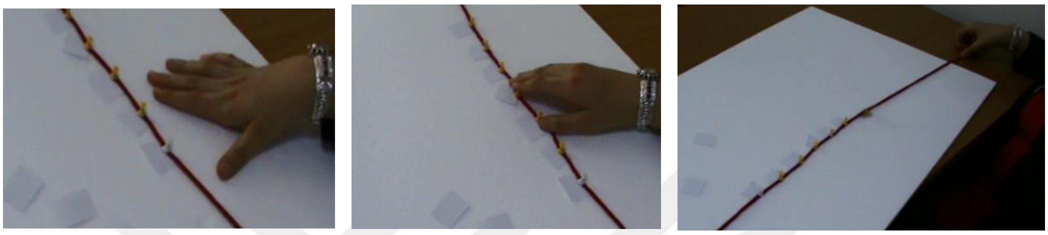
(a) (b) (c)

Şekil 85. Sema doğru üzerindeki noktaları birim uzaklığa göre sayılar ile eşliyor
Negatif sayıları nasıl eşleyeceği sorulduğunda Sema 0’ ın ipe göre sol tarafında elini gezdirerek ‘*Beş beş gideceğiz yine.*’ cevabını vermiştir. Sema cetvel ile birim uzunluğu belirleyerek -1, -2 ve -3 tamsayıları için noktaları belirleyerek etiketler yardımı ile eşlemiştir (bkz. Şekil 85, (b) ve (c)).
Sema’ dan sıfır noktasını göstermesi istenmiş ve bu noktanın orijin olarak adlandırıldığı belirtilmiştir. Orijinin ipin konumuna göre sağ tarafına pozitif ve sol tarafına da negatif sayıların eşlendiği kabulü açıklanmıştır. Ayrıca pozitif sayıların artan ve negatiflerin azalan sıra ile yerleştirildiği ve bu eşlemede sayıların farkının önemli olduğuna dikkat çekilerek açıklanmıştır. Ayrıca birim kavramını için Sema ile aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Peki bu sayıları yerleştirirken neye dikkat ettik?

Sema: Eşitliğe
Araştırmacı: Sayılar arasındaki uzaklığın eşit olmasına. Bu eşit uzaklıklara ne diyoruz peki?
Sema: Cetveldeki gibi eşit yerleştiriyoruz.

Cetvelin birimlere göre cetvellendiğini ifade edebilen Sema' ya, bu eşit uzaklığın birim olduğu hatırlatılmıştır. Daha sonra düzlemi temsil eden köpüğün konumu değiştirilerek doğrunun düşey eksene paralel olacak şekilde yerleştirilmesi sağlanmıştır (bkz. Şekil 86, (a)).

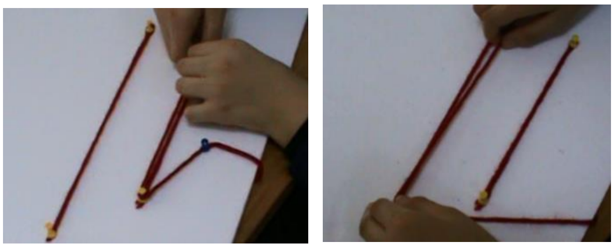


(a) (b) (c)

Şekil 86. Sema' ya doğru kavramının niteliklerini hatırlatılıyor

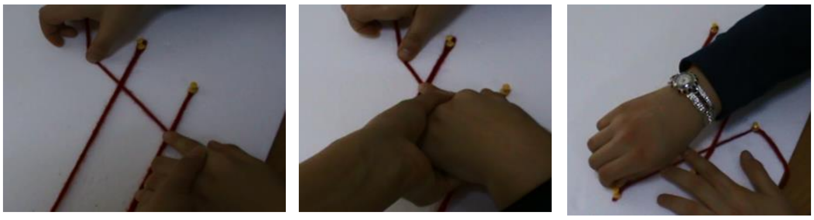
Sema' dan düşey konumda orijin noktasını bulması istenmiş (bkz. Şekil 86, (b)), bu noktaya göre pozitif ve negatif sayıların eşlenmesine ilişkin kabul açıklanmıştır. Sema' ya orijin noktası, doğru üzerinde sayıların konumu ve birim kavramı yeniden sorulmuştur. Sema sırasıyla bu kavramları açıklayabilmiştir. Böylece oluşturulan bu doğrunun sayı doğrusu olarak adlandırıldığı ifade edilmiştir. Sema kendi ifadeleri ile sayı doğrusunu '*Düz bir çizgi üzerindeki noktalara sayıları etiketler ile raptiyelersek, aradaki milimine göre eşlersek sayı doğrusudur*' şeklinde açıklamıştır.

Sema' ya reel sayılar kümesinin elemanları ile bir doğru üzerindeki noktaların eşlenip eşlenemeyeceği sorulmuştur. Sema '*bilmem herhalde eşleriz*' şeklinde cevap vermiştir. Araştırmacı ipi germeye yarayan raptiyeleri çıkararak, Sema' dan ipi daha fazla sündürmesini istemiştir (bkz. Şekil 86, (c)). Böylece istenildiği kadar doğrunun sündürülebileceği hatırlatılmış ve üzerindeki noktaların reel sayılar ile birebir eşlenebileceği fikrine ulaşılmıştır. Bir noktalar kümesi olarak doğrunun sonsuz bir küme olduğu fikrine ulaşmak için doğru parçaları ile görüşme devam ettirilmiştir. Bunun için farklı uzunlukta iki doğru parçası temsilleri olarak ip parçaları köpük üzerine yerleştirilmiştir. Bu doğru parçalarını kesecek şekilde yerleştirilen bir diğer ip yardımıyla Sema' dan bu iki doğru parçası üzerindeki noktaları eşlemesi istenmiştir.



Şekil 87. Sema doğru parçaları üzerindeki noktaları eşliyor

Sema' ya doğru parçaları üzerindeki noktaların sayısı sorulduğunda iki cevabını vermiştir. Bu iki noktanın uç nokta olduğunu belirtmiştir. Uç noktalar arasındaki noktaların kümesi sorulduğunda, Sema doğru parçası üzerinde parmağını gezdirerek '*sayamam çok, sonsuz kadar*' cevabını vermiştir. Sema' dan bu iki doğru parçası üzerindeki noktaları, verilen ışın temsili yardımı ile eşlemesi istenmiştir. Ancak Sema ışın temsili üzerindeki noktalar ile doğru parçaları üzerindeki noktaları ipleri üst üste getirerek eşlemiştir (bkz. Şekil 87). Neden böyle yaptığı soruduğunda Sema '*Bu şekilde noktaları birebir eşlerim diye düşündüm ama olmadı.*' cevabını vermiştir. Sema' ya tekrar iki doğru parçası üzerindeki noktaları eşlenmesi gerektiği hatırlatılmıştır. Bunun için Venn şeması ile verilen iki kümenin elemanlarını bant ile eşlediği hatırlatılmıştır. Sema' nın elini tutarak ışının doğru parçalarını kestiği noktaları eşlediği açıklanmıştır. Sema kendisi de eşlemeleri yaparak göstermiştir. (bkz. Şekil 88).



Şekil 88. Doğru parçası üzerindeki noktaların eşlenmesi

Araştırmacı: Bu şekilde kaç tane eşleme yapabilirim sence?
Sema: Sonsuz nokta var. Eşleme de sonsuz.
Araştırmacı: fakat bir doğru parçası diğerinden daha kısa?
Sema: Ama eşitler, sonsuz tane noktalar var.

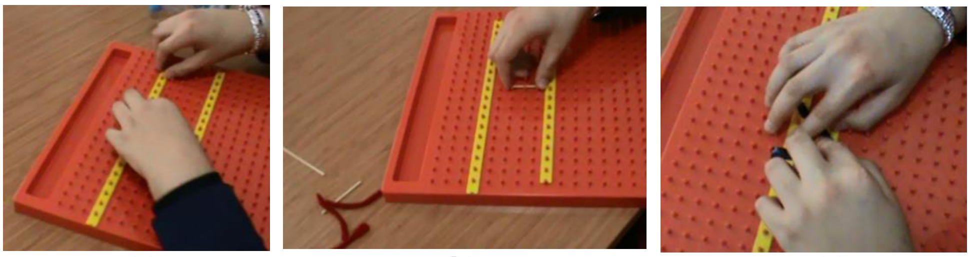
Sema doğru parçalarının üzerinde sonsuz noktanın var olduğunu algılayabilmiştir. Sayı doğrusu tanımı tekrar sorgulandığında ise '*sayılarla eşitliği sağlanarak eşlenmiş doğru*' şeklinde birim kavramına dikkat çekerek açıklayabilmiştir.

4.4.1.2.5. Koordinat Sistemi Kavramının İncelenmesi

Bu bölümde sayı doğruları ile koordinat sistemi oluşturmak ve sıralı ikilileri belirleyebilmek amaçlanmıştır. Bunun için öncelikle sayı doğrusunun bir küme belirtip belirtmediği sorgulanmıştır. Sema sayı doğrusunun bir küme olduğunu ifade etmiştir. Böylece aşağıdaki tartışma başlamıştır:

Araştırmacı: Elemanları nelerdir?
Sema: Pozitif, negatif tamsayılardır. Sıfır var bir de.
Araştırmacı: Yani sayı doğrusunda bu sayıları nelerle eşliyoruz?
Sema: Çizgiler var, noktaları belirten. Noktalarla eşliyoruz.
Araştırmacı: Sayı doğrusunun belirttiği kümenin elemanları…
Sema: Noktalar ve eşledik işte sayılar olur.

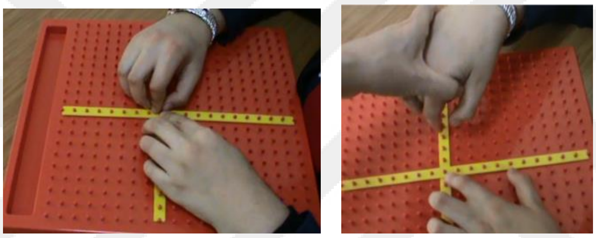
Sema sayı doğrusunun belirttiği kümenin elemanlarını belirlemiştir. Ayrıca sayı doğrusunun eşleme yardımı ile tanımlı olduğunu hatırlamıştır. Ardından Sema’ ya verilen iğneli sayfa materyalinin malzemelerinden iki çubuğun sayı doğrusunu temsil ettiği kabul edilmiştir. Sema bu sayı doğrularının birer küme olduğunu ifade etmiştir. Bu sayı doğrularının üzerindeki deliklerin elemanlar olan noktaları temsil ettiği kabul edilmiştir. Sema bu kabulü ‘*onlar zaten noktalar*’ şeklinde ifade ederek doğru üzerindeki noktalar temsilini kavradığını belirtmiştir. Bu kümeler adlandırılmak istendiğinde Sema, birini k ve diğerini s kümesi olarak belirlemiştir. Sema’ dan iki kümenin elemanlarını eşleme sürecini düşünmesi ve bu iki sayı doğrusu üzerindeki noktaları eşlemesi istenmiştir. Sema iki sayı doğrusunu birbirine paralel olarak iğneli sayfa üzerine yerleştirmiştir (bkz. Şekil 89, (a)). Ancak çubukları yerleştirmede güçlük yaşamıştır. Bu k ve s kümeleri üzerindeki noktaları artık iğnelerin temsil ettiği belirtilmiştir. Böylece Sema’ dan bu iki kümenin elemanları olan iğneleri birbiri ile eşlemesi istenmiştir. Eşlemeyi yapabilmesi için Sema’ ya ip, çubuk ve bant materyalleri sunulmuştur. Sema ilk önce bir çubuk almış ve iğneler üzerinde gezdirmiştir (bkz. Şekil 89, (b)). Bu şekilde eşleyemeyeceğini belirtmiş ve bant yardımı ile eşlemek istemiştir.



(a) (b) (c)

Şekil 89. Sema sayı doğrusu kümelerinde eşleme yapmaya çalışıyor

Sema bantları yapıştırmakta güçlük yaşadığı için çubuklar birbirine biraz daha yakınlaştırılmıştır. Böylece iki küme üzerindeki noktaları temsil eden iğneleri rastgele eşlemeye başlamıştır. Sema bir eşlemeyi de çubuk yardımı ile yapmıştır. Birkaç eşlemeden sonra Sema' nın bu eşlemenin kullanışlı olmadığını fark etmesi için araştırmacı birkaç eşleme daha yapıp, Sema' nın bu eşlemeleri belirlemesini istemiştir (bkz. Şekil 89, (c)). Sema eşlemeleri takip etmekte ve eşlenen noktaları tespit etmekte güçlük yaşamıştır. Bu güçlüğün sayı doğrularının konumundan kaynaklanmış olabileceği fikri ileri sürülmüştür. Sema hemen doğruların konumunu değiştirmek istemiştir. Doğrulardan birini çıkarıp dikey konumda yerleştirir. Bunu yaparken '*Nereden aklıma geldi bilmiyorum ama böyle yapmak istedim.*' şeklinde ifade etmiştir.



(a) (b)

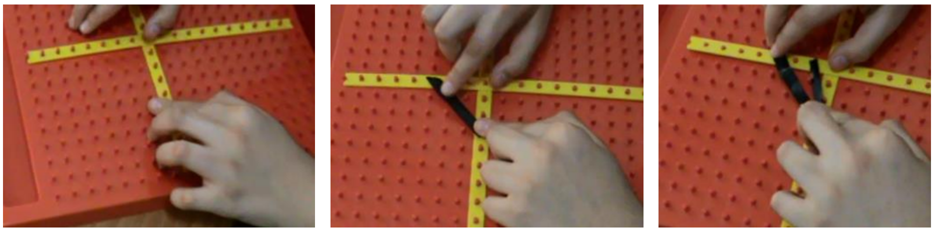
Şekil 90. Sema sayı doğrularını kesiştirerek koordinat sistemini oluşturuyor

Bu doğruların kesiştiği noktayı hissedip hissetmediği sorulduğunda, Sema doğruların kesiştiği noktayı işaret ederek göstermiştir (bkz. Şekil 90, (a)). Bu noktanın sayı doğrusu üzerindeki hangi noktadır olduğu sorulduğunda ise Sema hızlı bir şekilde '*Sıfır! Orijin.*' şeklinde ifade etmiştir. Böylece iki sayı doğrusunun orijin başlangıç noktasında kesiştikleri kabulü açıklanmıştır. Burada *k* ve *s* olarak adlandırılan sayı doğrularının bu konumda *x*- ve *y*-eksenleri olarak adlandırıldığı belirtilmiştir. Sema' nın elinden tutularak eksenlerin hangisinin *x* ve *y* olarak adlandırıldığı gösterilmiştir (bkz. Şekil 90, (b)). Bu konumda sayı doğruları üzerindeki noktaların nasıl eşleneceği sorulmuştur.

> *Sema: Bilmem. Bunu eşleyemeyiz ki? Mesela şununla şunu bantlasak (x-ekseni üzerinde biri pozitif diğeri negatif iki noktayı işaret ederek)? Üç üç bantlasak olmaz mı? (x-ekseni üzerindeki noktaları işaret eder)* (bkz. Şekil 91, (a))
> *Araştırmacı: Aynı sayı doğrusu üzerindeki noktaları eşliyorsun. İki ayrı küme olarak iki sayı doğrusunun elemanlarını eşlemeni istiyorum. Yani x üzerindeki bir noktayı y üzerindeki bir nokta ile eşlemeni istiyorum.*

Sema: Hı.. Mesela şununla şunu mu? (x-ekseninde negatif bir nokta ile y-ekseninde pozitif bir noktayı işaret eder).

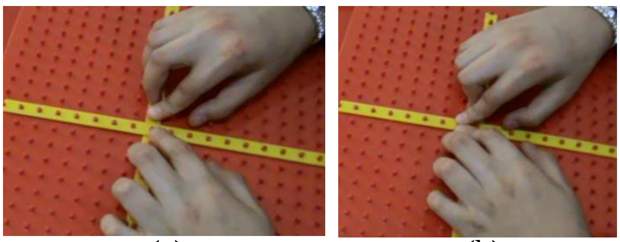
Bant yardımı ile noktaları eşlemiştir (bkz. Şekil 91, (b)). Araştırmacı Sema’ nın eşleme stratejisinin noktaların belirlenmesinde güçlüğe sebep olacağını anlaması için birkaç eşleme yapmıştır (bkz. Şekil 91, (c)).



(a) (b) (c)

Şekil 91. Sema koordinat sisteminde noktaları eşlemeye çalışıyor

Sema yapılan eşlemeleri incelediğinde ‘*Ama hocam birbirlerine girmemişler mi?*’ şeklinde eşlemenin karmaşık olduğunu belirtmiştir. Böylece eşlemenin nasıl yapılabileceğine ilişkin fikir ileri sürmesi istenmiştir. Sema farklı bir eşleme stratejisi geliştiremediği için oturuma koordinat sistemi açıklanarak devam edilmiştir. Öncelikle *x* sayı doğrusunun *x*-ekseni ve *y* sayı doğrusunun *y*-ekseni olarak adlandırıldığı belirtilmiştir. Sema orijinin, pozitif ve negatif sayıların nasıl konumlandığını gösterebilmiştir. Bu eksenler üzerinde *x*-ekseninde 1 (bkz. Şekil 92, (a)) ve 2 noktalarını göstermesi istenmiştir. Sema iki iğne arasındaki uzaklığı birim kabul ederek, birinci iğneyi 1 ile ve ikinci iğneyi 2 ile eşlemiştir. -1 ve -2 noktalarını da doğru şekilde gösterebilmiştir. *y*-ekseninde de 1 (bkz. Şekil 92, (b)), 2, -1 ve -2 noktalarını doğru şekilde işaretleyebilmiştir.



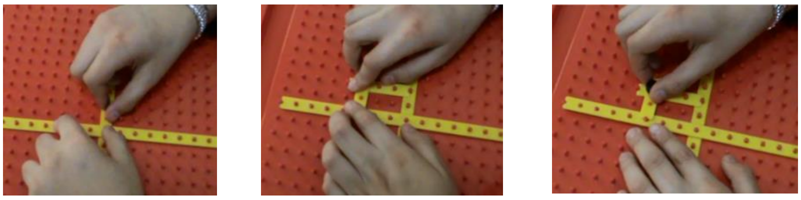
(a) (b)

Şekil 92. Sema eksenler üzerindeki noktaları birim belirleyerek gösteriyor

Koordinat sistemi tanıtıldıktan sonra tekrar iki kümenin elemanlarının nasıl eşleneceği sorgulanmıştır:

Araştırmacı: Peki şimdi eşlemeyi nasıl yapalım?
Sema: O zaman hocam -1 ile -2' yi eşleyelim, 1 ile 2' yi eşleyelim.
Araştırmacı: Bu elemanları nasıl seçtin? Hangi kümeden?
Sema: x-ekseninden
Araştırmacı: Ama iki küme arasında eşleme yapıyoruz. -1 ile -2' yi eşleyelim demiştin. Burada ilk eleman x-ekseninden ve ikinci eleman y-ekseninden olduğunu gösterir.
Sema: Tamam. x-ekseninde +2 ile y-ekseninde +3.

Sema ile birlikte eşlenmesi istenen noktalar belirlenmiştir. 2 ve 3 noktalarını eşlemesi için fikir ileri sürmesi beklenmiştir. Sema biraz düşünmüştür. Araştırmacı Sema' dan *x*-ekseninde +2 noktasını göstermesini istemiştir. Sema sağ işaret parmağı ile +2 noktasını göstermiştir. Sol eli ile *y*-ekseninde +3 noktasını işaretlemiştir (bkz. Şekil 93, (a)). Bu iki noktanın nasıl eşlenebileceği tartışılmıştır. Sema bant ile eşleme yapmak istemiştir. Ancak daha önceki örneği düşünerek '*az önce yaptık ama karıştılar, o zaman çubuk kullanalım*' ifadesini kullanmıştır. Böylece eksenler üzerindeki noktaların *x* ve *y*-eksenine paralel doğru parçaları yardımı ile eşlenebileceği açıklanmıştır (bkz. Şekil 93, (b)). Daha sonra bu doğru parçalarının kesiştiği nokta bir boncuk yardımıyla işaretlenmiştir. İşaretlenen bu noktanın (2, 3) noktası olduğu açıklanmıştır. Bu noktanın 2 ve 3 sayılarının eşlenmesini temsil ettiği belirtilmiştir (bkz. Şekil 93, (c)).



(a) (b) (c)

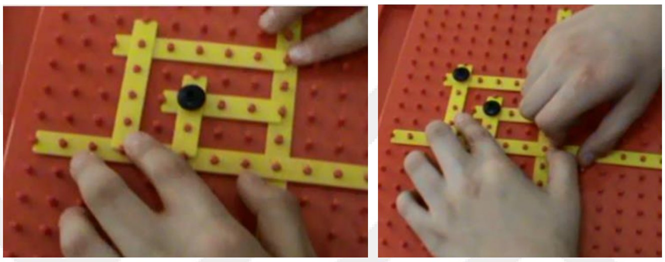
Şekil 93. Sema koordinat sisteminde eşleme ile sıralı ikilileri belirlemeyi inceliyor

Sema' dan 4 ve 5 noktalarını eşlemesi ve (4, 5) noktasını işaretlenmesi istenmiştir. Bunun için doğru parçaları ve boncuk verilmiştir. Sema ilk önce *y*-ekseninde iğneleri teker teker sayarak 5 noktasını belirlemiştir. Ancak diğer noktayı belirleyip eşleyememiştir.

Araştırmacı: 4 noktası ile 5 noktası dediğime göre 4 hangi eksenin elemanı?
Sema: Şunun (x-ekseni işaret eder)
Araştırmacı: x-ekseninde 4 noktasını belirler misin?

Sema: (iğneleri tek tek sayarak) 1, 2, 3, 4. Burası.
Araştırmacı: Doğru parçasını takabilir misin oraya?
Sema: (doğru parçasını takar) 5 noktasını bulacağım değil mi şimdi?
Araştırmacı: Nerede?
Sema: (y-eksenini işaret ederek) burada. 1, 2, 3 (orijinden saymaya başlar)
Araştırmacı: Tekrar sayabilir misin?
Sema: (orijini işaret ederek) 0, 1, 2, 4, 5 (doğru parçasını takar)

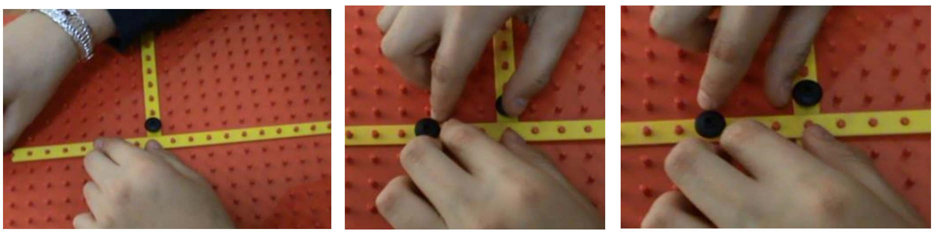
İki doğru parçasının kesiştiği nokta sorulduğunda, Sema 4 ve 5 noktalarını işaret etmiştir (bkz. Şekil 94, (a)). Araştırmacı doğru parçalarının kesiştiği noktanın eşlemeyi temsil ettiğini hatırlattığında, Sema (4, 5) noktasına boncuğu takmıştır (bkz. Şekil 94, (b)).



(a) (b)

Şekil 94. Sema koordinat sisteminde noktaları belirliyor

Sema 4 ve 5 koordinatlarının sırasıyla x ve y-eksenlerinin elemanı olduğunu söyleyebilmiştir. Sema' dan iğneli sayfa materyalinde doğru parçaları temsili olan çubuklar olmadan söylenen noktaları boncuklar ile işaretlemesi istenmiştir.

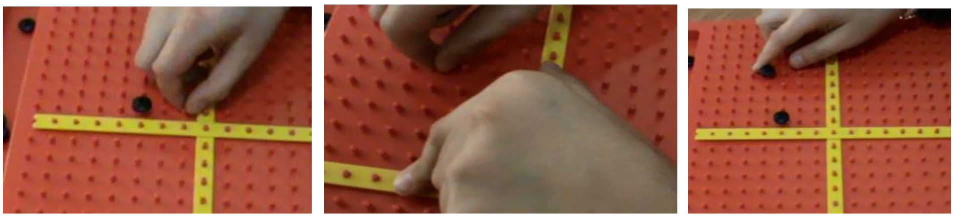


(a) (b) (c)

Şekil 95. Sema koordinat sisteminde noktaları işaretliyor

Araştırmacı: 1' e 3 noktasını işaretler misin?
Sema: (sağ eli ile 1 noktasını işaretler, sol eli ile sırasıyla iğneleri sayarak 3 noktasını işaretler ve 1 noktasına boncuk takar, bkz. Şekil 95, (a)) *Şurası (tekrar bir boncuk alarak 3 noktasına takmaya yönelir)*
Araştırmacı: Şu an sen nereye boncuk taktın?
Sema: 1' e.

Araştırmacı: Sen nereye boncuk takacaktın? 1' e 3 değil mi?
Sema: (3 noktasına da boncuk takar) evet (bkz. Şekil 95, (b)).
Araştırmacı: Şu an 1 ve 3 noktalarına boncuk taktın. 1 ile 3' ün eşlendiği nokta neresi?
Sema: Burası mı? ((1, 3) noktasını işaret eder, bkz. Şekil 95, (c))
Araştırmacı: Boncuğu aslında nereye takacaktın?
Sema: Buraya ((1, 3) noktasına boncuğu takar, bkz. Şekil 96, (a))

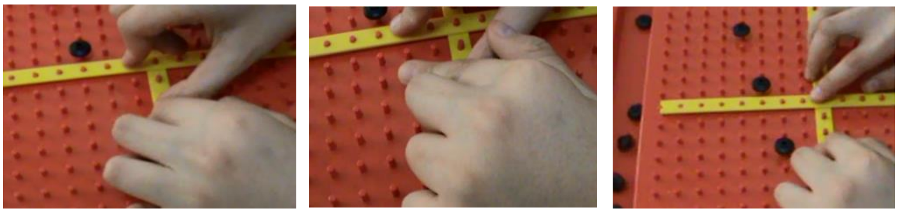


(a) (b) (c)

Şekil 96. Sema koordinat sisteminde noktaları belirliyor

Sema' dan (5, 5) noktasını işaretlemesi istenmiştir. Sema '*orijin, 1, 2, 3, 4, 5*' şeklinde iğneleri sayarak *x*-ekseni üzerindeki noktayı belirlemiştir. 5 noktasına boncuk takmıştır. Bu boncuğu neden taktığı sorulduğunda, noktayı eşlerken kolay bulmak istediğini belirtmiştir. Daha sonra *y*-ekseninde 5 noktasını sayarak belirlemiştir. 5 noktasındaki boncuğu çıkararak (1, 5) noktasına takmak istemiştir. 5 ile 5 noktasını eşlemesi istendiği tekrar edildiğinde Sema yeniden noktaları belirlemek istemiştir. Bu sırada *y*-ekseninde 5 noktasında sol işaret parmağını sabit tutmaktadır. Sağ eli ile *x*-ekseninde 5 noktasını yeniden iğneleri sayarak belirlemiştir (bkz. Şekil 96, (b)). Sol eli ile *x* ve *y*-ekseni üzerinde 5 noktalarını işaretlerken, sağ eli ile $y = 5$ doğrusu boyunca iğneleri 5' e kadar sayarak (5, 5) noktasını belirlemiştir. (5, 5) noktasına boncuk takıp '*demek ki saymak gerekiyormuş*' ifadesini dile getirmiştir (bkz. Şekil 96, (c)).

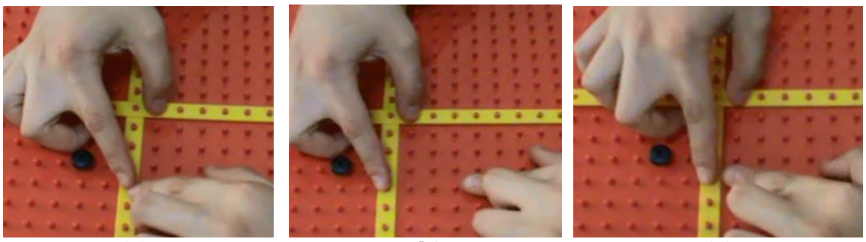
Sema' dan (-3, 2) noktasını boncuk temsili ile işaretlemesi istenmiştir. İlk önce negatif *x*-ekseninde '*1, 2, 3*' şeklinde saymaya başlamıştır. Daha sonra noktanın koordinatlarını tekrar sormuştur. Sol işaret parmağı ile *x*-ekseninde -3 noktasını gösterirken, sağ işaret parmağı ile *y*-ekseninde 1 noktasını işaret ederek '*Tamam 2' yi de buldum*' demiştir. Sema sağ eli ile *x* ve *y*-ekseninde noktaları işaret etmiştir (bkz. Şekil 97, (a)). Sema oturum süresince zaman zaman orijinden noktaları saymaya başlamadığında, orijin noktasını 1 noktası gibi düşünerek noktaları hatalı belirlemiştir. Sema' dan noktaları doğru belirlediğinden emin olması istenmiştir. Sema sol eli ile -3 noktasını işaret ederken sağ eli ile *y*-ekseninde 1 iğne daha ilerleyerek 2 noktasını işaretlemiştir (bkz. Şekil 97, (b)). Ardından sol eli ile $y = 2$ doğrusu boyunca iğneleri sayarak 3 birim ilerleyip x = *-3* doğrusu üzerine denk geldiğinde '*işte burası*' diyerek boncukla işaretlemiştir (bkz. Şekil 97, (c)).



(a) (b) (c)

Şekil 97. Sema (-3, 2) noktasını belirliyor

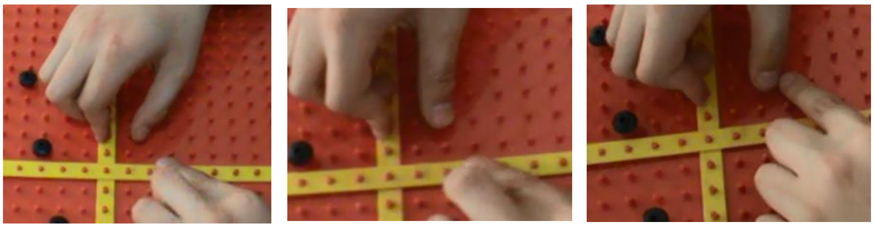
(-4 ,-1) noktasını işaretlemesi istendiğinde Sema, ilk önce x-ekseninde -4 noktasını birim iğneleri sayarak belirlemiş ve sol eli ile işaretlemiştir. Ordinatı hesaplamak istediğinde sağ eli ile orijini aramış ve birkaç saniye bulamamıştır. Orijini bulunca saymadan hemen -1 noktasını sağ eli ile işaretlemiştir. Sağ eli ile -4 ve -1 noktalarını işaretlerken, sol eli ile x = *-4* doğrusu boyunca tahtanın konumuna göre aşağıya doğru 4 birim saymıştır (bkz. Şekil 98, (a) ve (b)). Sema' ya noktanın koordinatları hatırlatılınca, '*1 mi?*' diyerek (-4, -1) noktasını işaret etmiştir (bkz. Şekil 98, (c)).



(a) (b) (c)

Şekil 98. Sema koordinat sisteminde (-4, -1) noktasını belirliyor

(2, -3) noktasını belirlemesi istendiğinde Sema hemen iki eli ile orijini belirleyip '*1, 2*' şeklinde birimleri sayarak x-ekseninde 2 noktasını işaretlemiştir. Sağ eli ile 2 noktasını gösterirken, orijin üzerindeki sol eli ile negatif eksende '*1, 2, 3*' şeklinde birimleri sayarak y-ekseninde -3 noktasını işaretlemiştir (bkz. Şekil 99, (a)). Sema sağ elinin başparmağı ile sezgisel olarak (2, -3) noktasını işaret ettiğini düşünerek (2, -2) noktasını gösterip '*o zaman buraya takacağız*' demiştir (bkz. Şekil 99, (b)). Araştırmacının sessiz kalması üzerine Sema iğneleri sayarak (2, -3) noktasını belirlemiş ve işaretlemiştir (bkz. Şekil 99, (c)).

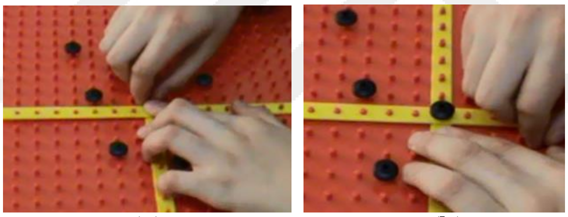


(a) (b) (c)

Şekil 99. Sema koordinat sisteminde (2, -3) noktasını belirliyor

Sema’ dan (0, 0) noktasını işaretlemesi istendiğinde aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: 0’ a, 0 noktası?
Sema: Olmaz ki öyle!
Araştırmacı: Niye, o nokta neresi?
Sema: (orijini işaret ederek) Burası mı? (bkz. Şekil 100, (a)) *Orijin.*
Araştırmacı: Tamam.
Sema: (boncuğu orijine takar) Taktım (bkz.Şekil 100, (b))
Araştırmacı: Neden olmayacağını düşündün?
Sema: Bilmem başlangıç diye düşündüm.



(a) (b)

Şekil 100. Sema koordinat sisteminde orijin (0, 0) noktasını belirliyor

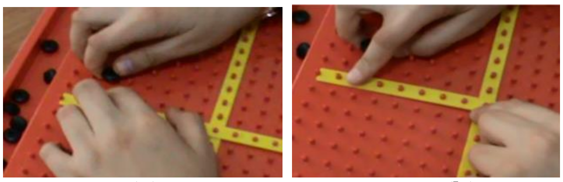
Sema noktaları belirlerken bazı yanılgıları ya da güçlükleri devam ettiği için örnek uygulamalar ile oturuma devam edilmiştir. (0, 3) noktasını belirlemesi istendiğinde sol eli ile orijini işaretlerken sağ eli ile 3 birim ilerlemiştir. Ancak Sema emin olmayan hareketler ile sessiz düşünmüştür. Sema’ dan *x*- ve *y*-ekseninde hangi noktaları belirlemesi gerektiğini düşünmesi istenmiştir. Sema ‘*Burası mı o zaman?*’ diyerek orijini işaret etmiştir.

Araştırmacı: x, 0 tamam. y-ekseninde kaç?
Sema: (y-ekseninde sayarak) 1, 2, 3.
Araştırmacı: Neresi o zaman?
Sema: ((0, 3) noktasını işaret ederek) Burası mı?

Sema her ne kadar başlangıçta apsisi 0 olan noktayı belirlemekte güçlük yaşasa da daha sonra (0, 3) noktasını işaretleyebilmiştir. Bu işaretlemeyi tahmini olarak ya da koordinatları düşünerek yapıp yapmadığını belirlemek için (-5, 0) noktasını belirlemesi istenmiştir. Sema hızlı bir şekilde *x*-ekseni üzerinde birimleri sayarak -5 noktasını işaretlemiş ve boncuk takmak istemiştir. Ancak hatalı saydığı için -6 noktasını göstermiştir. Ancak hemen '*Ben de fark ettim yanlış saydım*' diyerek yeniden birimleri sayarak -5 noktasını belirlemiş ve boncuk ile işaretlemiştir. Noktanın koordinatları sorulduğunda '*y, 0*' cevabını vermiştir. Birimleri hatalı saymasının farkında olmasına rağmen anladığını teyit etmek için diğer bir nokta ile görüşmeye devam edilmiştir. Sema (4, 0) noktasını belirlerken önce *x*-ekseninde saymaya başlar, ancak birden vazgeçip *y*-ekseninde pozitif kısımda saymaya başlamıştır. Noktanın koordinatları kendisine hatırlatılınca '*4, x' in bunun elemanı, haa o zaman...*' şeklinde ifade etmiştir. Hemen *x*-ekseninde birimleri sayarak 4 noktasını belirlemiştir.

(0, -6) noktasını işaretlemesi istendiğinde negatif *y*-ekseninde birimleri saymaya başlamıştır ancak orijini 1 noktası olarak düşünmüştür. Araştırmacı '*Nereden başladık?*' sorusunu yöneltince Sema yeniden orijini belirleyip '*(orijini daha yükses bir sesle işaretleyip vurgulayarak) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6*' şeklinde sayarak -6 noktasını belirlemiştir.

Koordinat sistemindeki bölgeler Sema' nın elini tutarak *x* ve *y*-eksenlerinin elemanlarının aldığı pozitif ve negatif sayılar vurgulanarak tanıtılmıştır. Boncukların temsil ettiği noktalar, bu noktaların *x* ve *y*-ekseninde eşlediği elemanların koordinat olarak adlandırıldığı açıklanmıştır. Sema' nın elinden tutularak daha önce işaretlediği birkaç nokta için koordinatları ifade edilmiş, *x* ve *y*-eksenlerindeki bileşenleri belirtilmiştir. Bu noktaların Braille kabartma yazıda parantez işaretinin kodu belirtilerek nasıl yazıldığı açıklanmış ve Sema' dan birkaç nokta için yazması istenmiştir. Sırasıyla (2, 3), (2, 6), (0, -4), (0, 0), (-3, -2) noktalarını kabartma yazıyla yazan Sema' ya (0, 0) noktası sorulduğunda '*orijin*' cevabını verebilmiştir. Sema noktaları yazarken parentez işaretinin kodunu daha önceden bildiği için virgül işaretini yaparak hızlı bir şekilde yazabilmiştir. Sema tableti açıp yazdığı noktaları okumaya başlamıştır. (2, 3) noktasını '*2 (duraksar) 3*' şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra diğer noktaları okurken virgül işaretini de söylemiştir. Parantez ile eşlemelerin bu gösterimine 'sıralı ikili' denildiği ifade edilmiştir. Sıralı ikililerde aksi belirtilmediği sürece ilk bileşenin *x*-ekseninin ve ikinci bileşenin *y*-ekseninin elemanı olduğu belirtilmiştir.



(a) (b)

Şekil 101. Sema işaretlenen (2, 6) noktasının koordinatlarını belirliyor

İğneli tahta üzerinde işaretlenmiş noktaların koordinatlarının belirtilmesi ve sıralı ikili olarak ifade edilmesi istenmiştir. Bunun için belirlenmesi istenen her nokta boncuk yardımı ile işaretlenmiş, Sema belirledikten sonra boncuk çıkarılarak yeni nokta işaretlenmiştir. Böylece Sema' nın noktaları karıştırmasının veya karışıklık yaşamasının önüne geçilmesi hedeflenmiştir. Sema (2, 6) noktasına dokunur dokunmaz sol eli *y*-ekseninde ve sağ eli boncuğun üzerinde olduğu için '*2!*' diyerek yüksek sesle belirtmiştir (bkz. Şekil 101, (a)). Hangi bileşen olduğu sorulduğunda '*x*' şeklinde ifade etmiştir. Koordinatının belirlenmesi için diğer bileşeni sorulduğunda Sema '*3*' şeklinde ifade etmiştir. Bu ifadeyi tamamen sezgisel olarak belirlemeye çalışmıştır. Ardından boncuktan *y*-eksenine parmağını götürerek *y*-ekseni üzerinde kestiği noktada sağ işaret parmağını sabit tutmuştur. Sol işaret parmağı ile orijini bulmuş ve sağ eli ile işaretlediği noktaya doğru birimleri saymaya başlamıştır (bkz. Şekil 101, (b)).

Araştırmacı: O zaman bu noktanın koordinatları neymiş?
Sema: x' i (sessiz kalır) 1, 2, 3, 4 (işaretli noktadan x-eksenine doğru birimleri sayar) 6 değil miydi?
Araştırmacı: x için ilk başta belirlemiştin. x-ekseni hangisiydi?
Sema: Yatay olan. 2.
Araştırmacı: Düşey y-ekseninde kaçtı?
Sema: 6
Araştırmacı: O zaman bu noktanın koordinatları neymiş?
Sema: 2 ve 6.
Araştırmacı: Sıralı ikili olarak yazmak istersek. Parantez açıyorum…
Sema: 2 virgül 6.

Sema böylece (2, 6) noktasının koordinatları belirleyebilmiş ve sarılı ikili olarak temsili ifade etmiştir. Noktanın koordinatlarını belirlerken eksenleri ve sıralı ikili temsilini tekrar sorgulamak gerekmiştir. Ardından (0, -4) noktasının koordinatlarını belirlemesi istenmiştir. Sema noktanın konumunu belirleyince '*Nasıl söylesem? (parmağı ile orijinden başlayarak birimleri sayar) 1, 2, 3, 4!*' şeklinde ifade etmiştir. Araştırmacı '*Nasıl 4?*' diye sorduğunda '*0' a -4*' şeklinde cevap vermiştir. Böylece koordinatlarından biri 0 olan noktaları belirlemekte başarılı olduğunu söyleyebiliriz.

Bir sonraki uygulamada (-3, -2) noktasını işaretlenmiştir. Sema notayı bulup, noktadan *x*-eksenine doğru ellerini götürür ve sol eli ile *x*-ekseni üzerinde kestiği noktayı işaretlemiştir. Daha sonra sağ eli ile orijini bulup birimleri sayarak -3 noktasını belirlemiştir. Belirlediği bu nokta sorulduğunda *'-3'* cevabını vermiştir. -3 noktasından boncuğa doğru parmağını indirirken birimleri sayarak '*2!*' yüksek sesle belirtmiştir. Sema' dan bu noktaları sıralı ikili olarak ifade etmesi istendiğinde parantez ve virgül işaretine dikkat ederek açıklamıştır. Orijin noktası işaretlenmiş ve koordinatları sorulmuştur:

Sema: (dokunur dokunmaz) 0.
Araştırmacı: Ne?
Sema: 0' a 0. Orijin.
Araştırmacı: Nasıl yazarız sıralı ikili olarak?
Sema: Parantez aç, 0 yaz, virgül koy, 0 yaz yine, sonra parantezi kapat.

Böylece orijin noktasını ve temsillerini yapılandırdığını söyleyebiliriz. Daha sonra (-3, 3) noktası işaretlenmiştir. Sema noktayı bulduktan sonra orijini bulup sağ eli ile *x*-ekseni üzerinde noktaları sayarak *'-1, -2, -3'* demiş ve sağ eli ile -3 noktasını işaret ederken sol eli ile boncuğa dokunmuştur. Daha sonra iki eli ile boncuktan başlayarak *y*-eksenine doğru birimleri saymaya başlamıştır. Noktayı belirlemiş ve işaretlemiştir. Son olarak (4, -5) noktası işaretlenmiş ve koordinatları sorulmuştur. Sema orijini bulmuş ve birimleri sayarak sezgisel olarak boncuk ile aynı doğru üzerine geldiğini anlayınca durmuştur. Sol eli ile *x*-ekseni üzerinde 4 noktasını işaret ederken sağ eli ile doğru boyunca boncuğa kadar devam etmiştir. İşaretlenen noktanın koordinatlarından birini belirlemiştir. Daha sonra boncuktan *y*-eksenine doğru parmağını götürmüş ve *y*-eksenini kestiği noktayı işaretleyerek orijinden birimleri sayarak -5 noktasını belirlemiştir.

Sema ile bu oturumda yapılanların tekrarlandığı görüşme şöyle devam etmiştir:

Araştırmacı: Bu sistemin adı neymiş?
Sema: Koordinat sistemi.
Araştırmacı: 0' a 0 noktasının adı neymiş?
Sema: Orijin. Bu x-ekseni yatay (x-eksenini işaret eder). Şu y-ekseni (y-ekseni boyunca elini hareket ettirir)
Araştırmacı: x-ekseninde pozitif sayılar nasıl yerleştirilir?
Sema: Sağa doğru (pozitif eksende elini hareket ettirir) Negatifler sol.
Araştırmacı: y-ekseninde pozitif sayılar…
Sema: Yukarı, negatifler aşağıya doğru.
Araştırmacı: Bu iki eksen arasındaki eşlemeleri nasıl yapıyoruz?
Sema: Boncuklarla. Yukarı veya aşağıya doğru sayarak eşliyoruz.
Araştırmacı: Başka ne vardı?
Sema: Sıralı sayı? Parantez ile yazdığımız.

Araştırmacı: Sıralı ikili. (1, 3) sıralı ikilisi için 1 hangi kümenin elemanı?
Sema: (x-eksenini işaret eder) 3 de y-ekseninin.
Araştırmacı: Sıralı ikilileri gösterirken nasıl yapıyorum?
Sema: x virgül y.

Sema' nın koordinat sistemi, eksenler, orijin, noktaların belirlenmesi ve temsillerini anladığı, ancak sıralı ikili terim olarak ifade edemediği belirlenmiştir. Bir sonraki oturumda benzer diyalog tekrar edildiğinde Sema bu kez '*sıralı ikililer*' şeklinde ifade etmiştir.

4.4.1.2.6. Koordinat Sisteminde İki Küme Arasındaki İlişkinin Temsil Edilmesi

Koordinat sisteminde eksenlerinden birinin tanım kümesinin, diğerinin değer kümesinin temsili olduğunu fark etmesi ve ilişkiye göre verilen kümeleri hangi eksen ile temsil edeceğine karar verebilmesi için tasarlanan adımlar ile oturum başlamıştır. Koordinat sisteminde iki küme arasındaki ilişkiyi eşlemeler yoluyla gösterebilmesi için günlük hayat örnekleri üzerinden yola çıkılmıştır. Eğmir gölü etrafında bisiklet turunun saatlik fiyatları üzerinden verilen örnek senaryo Sema' ya açıklanmıştır. Sema daha önce gittiği mesire alanlarındaki uygulamalardan yola çıkarak fikir yürütmüştür. İlk bir saatten sonra ödenecek fiyat için problem durumu tekrar okunmadan, Sema akıl yürütme yoluyla fiyat çizelgesini oluşturmuştur. Bu senaryoda yer alan kümeleri belirlemesi istenmiştir:

Sema: Burada bir tane küme var. 20, 35, 45, 55, 65 lira fiyatların olduğu küme.
Araştırmacı: Peki 1 saatte 20 lira, 2 saatte 35 lira, 3 saatte 45 şeklinde ifade ettiğimde?
Sema: Saat. 1, 2, 3, 4, 5.
Araştırmacı: 5 saatten sonra var mı?
Sema: Yok.
Araştırmacı: Bu iki küme arasında bir ilişki var mı?
Sema: Nasıl yani?
Araştırmacı: Mesela iki küme arasında bir eşleme yapmak istesem nasıl yaparım?
Sema: Aralarına çizgi koyarak.
Araştırmacı: O zaman nasıl yapalım? Tablet kalemle mi yoksa küptaş kasa ile mi yapalım?
Sema: Küptaş kasa ile (küptaş kasa materyali önüne getirilir) Şimdi neyi neyle eşleyelim? (küptaş kasada saat kümesinin elemanlarını yazmaya başlar) 1.

Sema verilen örnek durumda yer alan kümeleri sorular yardımı ile belirlese de kümelerin elemanlarını kolayca belirleyebilmiştir. Bu iki küme arasındaki ilişkiyi doğrudan belirleyemediği için kümelerin elemanlarının nasıl eşleneceği tartışılmıştır. Sema eşlemeyi temsil etmek için küptaş kasa materyali yardımı ile tablo oluşturmayı tercih etmiştir. Sema saat kümesinin elemanlarını yan yana birer karakter boşluk bırakarak tek satıra yazmıştır. Fiyat kümesinin elemanlarını sırasıyla saymış ve alt satıra yazmak istediğini söylemiştir. Eşlemeyi nasıl yapacağı sorulduğunda '*1' in altına 20' yi yazacağım*' diyerek tabloyu oluşturmaya başlamıştır (bkz. Şekil 102, (a)).

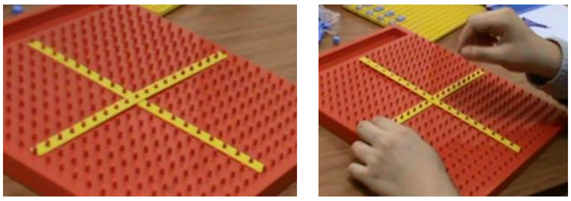
(a) (b) (c)

Şekil 102. Sema saat ve fiyat kümelerinin elemanlarını küptaş kasa materyali ile eşliyor

Sema, eşlemeyi göstermek için 1' in altına 20' yi yazarken '*Böyle karışık olmaz mı ama?*' şeklinde fikir ileri sürmüştür. Eşlemeyi nasıl göstermek istediği sorulduğunda '*O zaman şöyle mi yapayım?*' diyerek saat kümesinin elemanlarını tek satırda birer hücre boşluk bırakarak alt alta yazmıştır. Ardından eşlediği fiyat kümesi elemanlarını saat kümesi elemanlarının karşısına yazmaya başlamıştır (bkz. Şekil 102, (b)). Sema fiyat kümesinin elemanlarını tekrar sormadan zihninden hızlı bir şekilde eşlemeyi yazmıştır (bkz. Şekil 102, (c)). Sema' ya ne yaptığı sorulduğunda '*İki kümenin elemanlarını eşledim*' cevabını vermiştir. Yaptığı bu eşleme gösteriminin nasıl adlandırıldığı sorulduğunda da bu adlandırmanın '*tablo*' olduğunu ifade edebilmiştir. Tabloyu başlangıçta olduğu gibi yatay olarak da oluşturup oluşturamayacağı sorgulandığında '*Olurdu ama karışacaktı, birbirlerine girerdi*' şeklinde ifade etmiştir. Kümeler arasındaki eşleme için farklı temsil türleri sorgulandığında:

Sema: Bantla, çizgi çizebilirdik. […] Boncuklarla yapmıştık.

Sema' ya koordinat sisteminde eşleme yapması için iğneli sayfa materyali verilmiştir. Sema materyale dokununca '*eksenlerimiz eksik*' ifade ile 'koordinat sistemi' kavramını anladığını ifade etmiştir. Materyalin doğru temsilleri ile koordinat eksenlerini yerleştirilmiştir. Eksenlerden ilk önce dikey olanı yerleştirilmiştir. Sema aynı anda materyali incelediği için hemen '*bu y oldu*' şeklinde tanımlamıştır. Yatay eksen yerleştirildiğinde Sema '*Bu eksenlerden hangisini sonra koyduğumuz önemli mi?*' şeklinde sormuştur. Burada eksenlerin birer sayı doğrusu olduğu ve doğrunun düz bir çizgi olduğu hatırlatılarak, malzemenin yapısından kaynaklanan kabarıklığın koordinat sisteminin çizgi temsilinde olmadığı açıklanmıştır. Dolayısı ile eksen temsillerinden hangisinin üste takıldığının önemli olmadığı belirtilmiştir (bkz. Şekil 103, (a)). Sema *y*-ekseninin üste takıldığında materyalin daha anlaşılabilir olduğunu ifade etmiştir. Bunun için eksenler yeniden konumlandırılmıştır (bkz. Şekil 103, (b)).



(a) (b)

Şekil 103. Koordinat eksenlerinin iğneli sayfa materyalinde konumlandırılması

Koordinat sisteminde eksenleri konumlandırdıktan sonra kümeleri bu eksenler ile temsil etmesi için Sema' ya sorular sorulmuştur:

Araştırmacı: Şimdi ne yapacağız?

Sema: Bunları eşleyeceğiz.

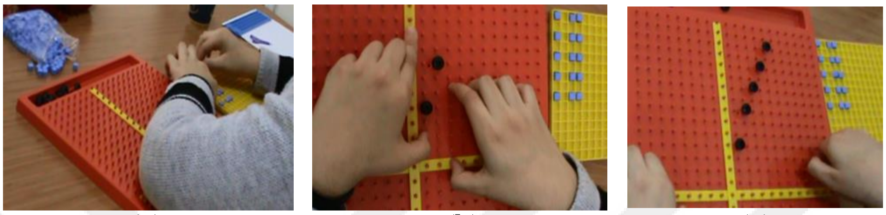
Araştırmacı: Kaç tane kümemiz vardı burada?

Sema: Saat kümesi ve fiyat kümesi.

Araştırmacı: Hangi eksen saat kümesini temsil etsin?

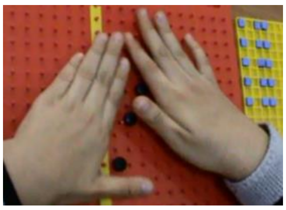
Sema: Şu (x-eksenini işaret eder). y-ekseni de fiyat kümesi olsun.

Burada materyalin sınırlılığı olarak *x*-ekseninde birim 1 birim olarak alınırken, *y*-ekseninde birim 5 birim olarak alınmıştır. Bu durum Sema' ya açıklanmıştır. İğneli tahta materyali üzerinde eksenler yeniden konumlandırılmıştır. Sema orijine dokunmuş, ardından *x*-ekseninde noktaların nasıl yerleştirildiği sorulduğunda iğnelere sırasıyla dokunarak '*1, 2, 3, 4, 5*' şeklinde ifade etmiştir. Ordinat için sayıların nasıl eşlendiği sorulduğunda ise sırasıyla iğnelere dokunarak '*5, 10, 15, 20, 25 diye gidiyor*' şeklinde açıklamıştır. Eşlemeyi yapması istendiğinde Sema biraz düşünmüştür. Oluşturduğu tabloyu inceleyebileceği söylendiğinde tabloyu incelemiş ve '*1 ile 20' yi eşlemişim*' diyerek koordinat sisteminde eşlemeye başlamıştır (bkz. Şekil 104, (a)). Sema hemen *x*-ekseninde 1 noktasını işaretleyerek '*burası 1*' sağ eli ile sabit tutmuştur, *y*-ekseninde iğneleri sayarak '*5, 10, 15, 20*' diyerek sol eli ile işaretlemiştir. 1 ve 20' nin eşlendiği nokta sorulduğunda (1, 20) noktasını işaretleyerek boncuk takmıştır. Sema hızlı bir şeklide *x*-ekseninde 2 noktasını işaret ederken '*35 ile* *eşleyeceğiz*' diyerek *y*-ekseninde orijinden noktaları beşer beşer sayarak 35 noktasını belirlemiştir. 35 noktasından iki birim sağa doğru iğneleri saymış ve (2, 35) noktasını boncuk ile işaretlemiştir. Bir sonraki eşleme için '*hatta ben hemen yaptım bile'* diyerek 35 noktasının üzerine beşer sayarak 45 noktasını belirlemiş ve sol eli ile 3 ve 45 noktasını işaretleyerek sağ eli ile (3, 45) noktasını işaretlemiştir (bkz. Şekil 104, (b)). Sema diğer eşlemeleri de hızlı bir şekilde tamamlamıştır (bkz. Şekil 104, (c)).


(a) (b) (c)

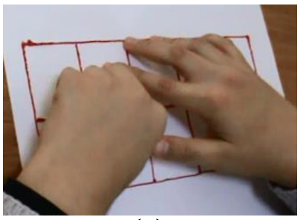
Şekil 104. Sema koordinat sisteminde iki kümenin elemanlarını eşliyor

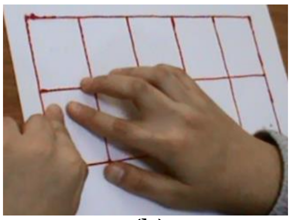
Grafiğin sadece noktasal olmadığı çizgi grafiği de olabileceğini fark etmesi için fiyat tablosundaki elemanların artırılması fikri ileri sürülmüştür. Burada eşlemelerin sayısını artırmak için 15 dakikalık fiyatların belirlenmiş olması durumu düşünülmüştür. Bu durumda yeni eşlemeleri gösteren noktaların nasıl olabileceği sorulmuştur. Sema işaretli noktalara dokunarak '*Hep iki iki gidiyor, böyle devam ederdi*' diyerek *y*-ekseninde noktalar arasındaki birim uzunluğa dikkat etmiştir. Sema eşlemeyi temsil eden noktaların artması durumunda düz bir çizginin oluşacağını eli ile '*Şöyle bir şey olurdu*' diyerek göstermiştir (bkz. Şekil 105).



Şekil 105. Sema çizgi grafiği betimliyor

Sema spor çalışmalarına gittiği için onun antrenörü ile yaptığı çalışmalar üzerinden sohbet edilerek, bir sporcunun saatte yaktığı kalori miktarı üzerine tasarlanan adım incelenmeye başlamıştır. Sema' ya sporcunun saatte yaktığı kalori miktarını gösteren tablo verilmiştir. Sema hemen tabloyu okumak istemiştir. Sema ilk önce saatlerin yer aldığı satırdaki elemanları okumuştur (bkz. Şekil 106, (a)). Daha sonra kalori miktarlarının yazdığı satırı hücre hücre okumuştur (bkz. Şekil 106, (b)).

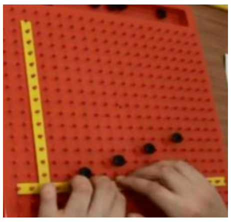

(a)


(b)

Şekil 106. Sema tablo inceliyor

Araştırmacı: Buradaki kümeler neler?
Sema: Saat ve tüketilen kalori.
Araştırmacı: Saat kümesinin elemanları neler?
Sema: 1, 2, 3, 4. Diğeri de 300, 600, 900, 1200.
Araştırmacı: Peki bu iki kümenin elemanları arasında bir eşleme ya da ilişkilendirme var mı?
Sema: Tabloyla eşlemişler (hemen tabloyu ilk satırdan inceleyerek, sağ eli ile 1 ve sol eli ile 300 hücresine dokunarak) Mesela 1 ile 300' ü. 2 ile 600' ü (satırlarda ellerini gezdirerek okuyarak)
Araştırmacı: Peki bu elemanlar arasında bir ilişki var mı?
Sema: Var. İkisini eşlemişler.
Araştırmacı: Tüketilen kalori kümesinin elemanlarının arasında kendi içinde bir ilişki var mı?
Sema: (tabloda tüketilen enerji satırında ellerini gezdirerek) Var. 300, 300 artmış.
Araştırmacı: O zaman saat kümesi ile tüketilen kalori kümesi arasında bir ilişki var diyebilir miyim?
Sema: Saate göre mi? 300, 300 artıyor işte.

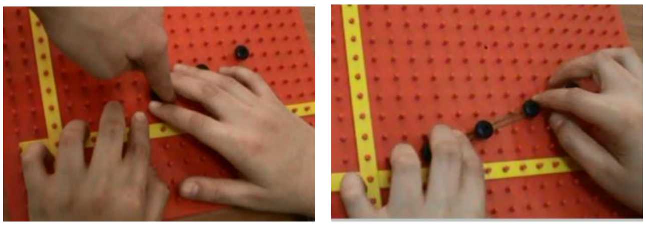
Sema tablo ile verilen kümeleri ve elemanlarını tespit edebilmiştir. Ancak henüz kümeler arasındaki ilişkiyi yalnızca elemanlarının eşlenmesi olarak algılamaktadır. Bu nedenle öncelikle kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi fark etmesi için sorular sorulmuştur. Daha sonra iki küme arasındaki ilişkiyi fark etmesi sağlanmıştır. Sema' dan belirlediği bu ilişkiyi grafikle göstermesi istenmiştir. Sema saat kümesini temsil etmesi için y-eksenini ve tüketilen kalori miktarı kümesini temsil etmesi için x-eksenini seçmiştir. Bunun için iğneli sayfa materyalinde eksenler düzenlenerek Sema' nın önüne verilmiştir. Tüketilen kalori ekseninde birim 100 kalori seçilirken, saat ekseni için ise bir birim seçilmiştir. Sema 1 ile 300' ü eşleyerek grafiği oluşturmaya başlamıştır. Sema hemen x-ekseninde 300 noktasını işaretleyip bir birim yukarıya boncuğu takmıştır. Sema' ya işaretlediği bu noktanın sıralı ikili olarak ifade etmesi istendiğinde birkaç saniye düşünmüş ve '*300' e 1*' şeklinde ifade etmiştir. Sema benzer şekilde (600, 2), (900, 3) ve (1200, 4) noktalarını işaretlemiştir (bkz. Şekil 107).



Şekil 107. Sema iki küme arasındaki ilişki için nokta grafiği oluşturuyor

Saate göre kalori miktarındaki değişimin devam edeceği ve aralarındaki eşlemenin yalnızca verilen noktalardan ibaret olmadığını fark etmesi ve orijin noktasında ilişkinin başladığını düşünmesi için tartışma şöyle devam etmiştir:

Araştırmacı: Sema sen bir saat boyunca spor yaptığında bir taraftan kalori yakıyor musun, yoksa bir saatin sonunda birden 300 kalori gidiyor mu?
Sema: Tüketiyorum.
Araştırmacı: O zaman yarım saatte bir nokta, bir buçuk saate başka bir nokta olması gerekmez mi? (grafik üzerinde noktalar işaretlenerek gösterilir, bkz. Şekil 108, (a))
Sema: Evet arada noktalar var. Bu noktalar böyle devam ediyor. Düz bir çizgi gibi.
Araştırmacı: (lastikler yardımı ile noktalar birleştirilir) Bu noktalar devam ettiğini ve düz bir çizgi olduğunu temsil etsin diye lastikler takıyorum (bkz. Şekil 108,(b)).

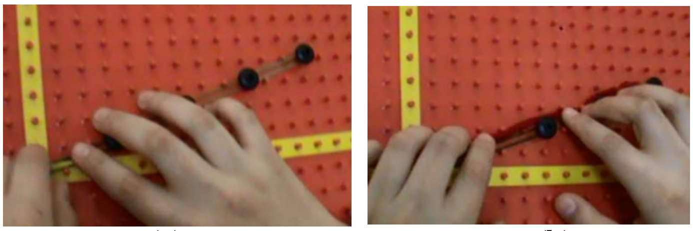


(a) (b)

Şekil 108. Sema grafik oluşturuyor

Böylece Sema' nın eşlemeleri temsil eden noktaları birleştirerek ilişkiyi temsil eden grafiği doğru parçaları yardımıyla gösterebileceği fikrine sahip olması amaçlanmıştır. Sema grafiğin lineer (doğrusal) olduğunu ve doğru parçalarının birleşimi ile oluştuğunu açıklayabilmiştir. Lastikler yalnızca 1, 2, 3 ve 4. saatler için takılmıştır. Orijin noktasının grafiğe dahil edilmesi ve 1 saat süresince kalori tüketimine ilişkin Sema' nın düşüncelerini sorgulamak için oturum şöyle devam etmiştir:

Araştırmacı: Sema şu an spora başlamadığı düşünelim. Sıfır anındayız. Burada tüketilen kalori nedir?
Sema: Var mı? Yok.
Araştırmacı: O zaman 0 anı için neyle eşleyeceğim?
Sema: Sıfır mı? Sıfıra sıfır noktası (boncuk ile orijin noktası işaretlenir)
Araştırmacı: O zaman 0 ile 1 noktası arasında yine bir ne var?
Sema: Çizgi (bu iki nokta için lastik takılır, bkz. Şekil 109, (a)).



(a) (b)

Şekil 109. Sema lastik ve ip yardımı ile oluşturulan grafiği inceliyor

Sema' dan oluşan grafiği bir ip parçası ile temsil etmesi istenmiştir. Sema lastiklere paralel olacak şekilde ipi yerleştirmiştir (bkz. Şekil 109, (b)). Sema' nın elinden tutularak grafik üzerinde her bir reel sayı için bir eşlemenin mümkün olduğu açıklanmıştır. Bu eşlemelerin grafik üzerinde nasıl elde edilebileceği de açıklanmıştır. Bunun için ikinci saatte tüketilen kaloriyi bulması istenerek örneklendirilmiştir. Elde edilen grafiğin tablo ile gösterilen eşlemenin grafik ile temsili olduğu belirtilmiştir.

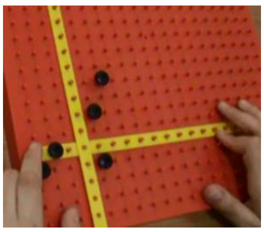
Sıralı ikili kavramını hatırlatmak için Sema' ya sorulduğunda '*1 virgül 2 şeklinde parantezle gösterim*' şeklinde ifade etmiştir. Ardından Sema' ya sırasıyla söylenen (2, 4), (1, 2), (-1, 1), (-2, 0), (-3, -1) noktaları kabartma yazı tablette yazması istenmiştir. Sema sıralı ikilileri yan yana yazmıştır. Sema tableti açıp yazdığı noktaları incelemiştir.

Araştırmacı: Bu sıralı ikililer neyi gösteriyor Sema?
Sema: Düz çizgiyi.
Araştırmacı: Sıralı ikililer yan yana gelerek düz çizgi oluşabilir, ama şu an bize bu noktaların sürekli devam ettiği bilgisi verilmedi. Mesela kalori tüketimi her saniyede devam ediyordu. Ama bir öncekinde saatlik ücret vardı. Yarım saatlik ücretler yoktu, onun için düz bir çizgi oluşmuyordu.
Sema: Haa..
Araştırmacı: Her zaman düz bir çizgi olmak zorunda değil grafik. Bazen sadece noktalardan oluşur. Bu sıralı ikililer neyi gösteriyor peki?
Sema: Koordinat sistemini. İki küme arasında eşlemeyi gösteriyor.

Sema sıralı ikililerin oluşturduğu kümenin bir grafiği temsil ettiğinin farkındadır. Ancak son uygulamadan dolayı grafiği sadece çizgi grafiği olarak genellemiştir. Bu nedenle nokta grafiği olduğu bisiklet kiralama senaryosu hatırlatılarak açıklanmıştır. Sıralı ikililerin koordinat sisteminin bileşenlerinden olduğu fikrine sahip olan Sema ile sıralı ikililerin iki küme arasındaki eşlemeyi temsil ettiği fikri üzerine tartışma sürdürülmüştür:

Araştırmacı: Birinci kümenin elemanları neler?
Sema: 2 ve (biraz düşünür)
Araştırmacı: Sıralı ikilileri yazarken nasıl yazıyorduk? İlk bileşen hangi kümeden oluyordu?
Sema: Yatay eksenden alıyorduk.
Araştırmacı: Yatay eksen bir kümeyi temsil eder mi?
Sema: Evet. İkincisi de y-ekseninden alıyorduk.
Araştırmacı: O zaman sıralı ikililerde ilk bileşenler hangi kümenin elemanı olacak?
Sema: x' in, diğerleri de y' nin.
Araştırmacı: O zaman x' in elemanları nelermiş bu yazdığımız sıralı ikililerde?
Sema: (yazdığı metinden okuyarak) 2, 1, -1, -2, -3.
Araştırmacı: Peki ikinci kümenin elemanları nelermiş?
Sema: (metinden okuyarak) 4, 2, 1, 0, -1.
Araştırmacı: O zaman yazdığımız bu sıralı ikililer bu iki küme arasında..
Sema: Eşleme.
Araştırmacı: Bu eşlemeyi sıralı ikililerden başka nasıl gösterebilirim?
Sema: Alt alta yazarak tablo oluştururuz.
Araştırmacı: Ya da nerede gösterebilirim?
Sema: Küptaşta.
Araştırmacı: Başka?
Sema: Bir de burada (iğneli sayfa materyalini işaret eder).
Araştırmacı: Hadi grafik ile yapalım.
Sema: (iğneli sayfayı alır) 2' ye 4 mü?

Sema verilen sıralı ikililer üzerinden eşlemenin yapıldığı iki kümenin elemanlarını belirleyebilmiştir. Bu iki küme arasındaki eşlemeyi de açıklayabilen Sema, diğer temsil türleri olarak tablo ve grafik temsillerinden bahsetmiştir. Ardından grafik temsili için noktaları koordinat ekseninde işaretlemeye karar vermiştir. Sema her zaman yaptığı gibi önce *x*-ekseninde 2 noktasını sağ eli ile ve sonra *y*-ekseninde 4 noktasını sol eli ile işaretlemiştir. Daha sonra 4 noktasından 2 birim sağa saymış ve sol eli ile (2, 4) noktasını işaretleyerek boncuk takmıştır. Sema yazdığı sıralı ikilileri kontrol ederek benzer şekilde diğer noktaları da hızlı bir şekilde işaretlemiştir. Ancak (-2, 0) noktasını işaretlerken tereddüt etmiş ve araştırmacıdan teyit etmesini istemiştir.

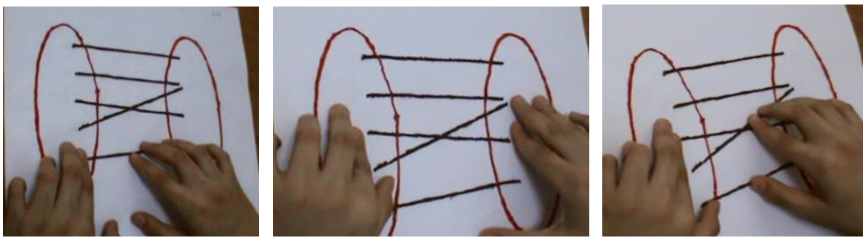


Şekil 110. Sema nokta grafiği oluşturuyor

Araştırmacı: Sema bu iki küme arasındaki ilişkiyi bir çizgi yardımı ile birleştirmemiz mümkün mü?
Sema: Birleştirebiliyoruz.
Araştırmacı: Birleştirebileceğimiz bir ilişki var mı?
Sema: Hayır ilişki yok, ama istersek olabilir. Hepsi ayrı bir yerde şimdi, bu burada (birinci bölge işaret eder) bu burada (üçüncü bölgeyi işaret eder) bu da burada (x-eksenini işaret eder)
Araştırmacı: (Sema' nın elinden tutarak) burada x-eksenine -1 için neyle eşleyeceğiz? Buradaki iki nokta arasında başka bir nokta daha olsaydı hangi iki elemanı eşlediğini bilebilir miyiz?
Sema: Yok bilemeyiz.

Verilen sıralı ikililer belirli bir ilişkiye göre bir eşlemeyi göstermediği için doğru parçaları yardımı ile eşlemeyi sürdürmenin ve verilen noktaları birleştirmenin mümkün olmadığı açıklanmıştır. Böylece nokta grafiği ve çizgi grafiği kavramlarını örneklendirmesi mümkün olmuştur.

Eşleme ve ilişkilendirme temsilleri için küme temsillerinin de önemli olduğu düşünülerek Venn şeması ile verilen iki küme arasındaki eşlemenin incelenmesi ve farklı temsil türleri ile temsil edilmesi hedeflenmiştir. Sema' ya Venn şeması ile verilen iki küme arasındaki eşleme temsili sunulmuştur. Venn şemasının ne olduğu sorulduğunda Sema '*sayılar var bu çizgiler içinde*' şeklinde açıklamıştır. Sema' dan bu iki kümeyi adlandırması istendiğinde sağdaki kümeyi A ve soldaki kümeyi B olarak adlandırmıştır. A kümesinin elemanlarını '*2, 4, -3, -2*' ve B kümesinin elemanlarını '*3, -1, 0, -3, -2*' olarak okuyup belirlemiştir. Bu iki küme arasındaki eşlemelerin olduğunu doğru parçası temsillerini göstererek farkında olduğunu ifade etmiştir (bkz. Şekil 111, (a)). Elemanların nasıl eşlendiği sorulduğunda yukarıdan aşağıya doğru sol eli ile B kümesinin elemanını ve sağ eli ile A kümesinin elemanlarını inceleyerek '*3, 2 ile, -1, 4 ile*' şeklinde belirlemiştir. Ancak B kümesinin 0 elemanının da 4 ile eşlediğini algılamıştır (bkz. Şekil 111, (b)). Çünkü Sema doğru parçalarının yalnızca uç noktalarını hissederek yatay eksene paralel olarak eşlemelerin yapıldığını düşünmüştür. 0 elemanı için doğru parçasını takip ederek eşlendiği elemanı belirlemesi istenmiştir. Sema 0 noktasından doğru parçasını sağ işaret parmağı ile takip etmiştir. Ancak iki doğru parçasının kesiştiği noktadan sonra diğer doğru parçasını takip etmeye başlamıştır (bkz. Şekil 111, (c)). Doğru paçasının düz bir çizgi parçası olduğu hatırlatılınca Sema yeniden doğru parçasını takip ederek 0 ile -3 elemanlarının eşlendiğini belirlemiştir. Ardından daha önceki eşlemeleri de tekrar doğru parçalarını takip ederek kontrol etmiştir. Daha sonra -3 ile 4 ve -2 ile -2 elemanlarının eşlendiğini belirlemiştir.



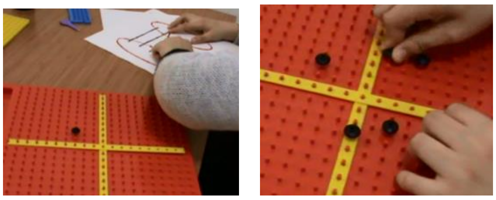
(a) (b) (c)

Şekil 111. Sema Venn şeması ile temsil edilen kümeler arasındaki eşlemeyi inceliyor

Sema' ya bu eşlemenin başka nasıl gösterilebileceği sorulduğunda, materyalleri de işaret ederek grafik ve tablo yardımı ile göstermenin mümkün olduğunu ifade etmiştir. Böylece Venn şeması ile verilen iki küme arasındaki eşlemeyi grafik ile temsil etmesi istenmiştir.

Araştırmacı: A kümesini hangi eksen temsil etsin?
Sema: (x-eksenini işaret ederek) bu eksen olsun. B kümesini de y temsil etsin.
Araştırmacı: Eşlemeleri yapabiliriz o zaman.
Sema: 3, 2 ile eşlenmişti.
Araştırmacı: Ama B kümesinden A kümesine söylüyorsun.
Sema: Haa 2 virgül 3.

Sema kümeleri eksenler ile temsil etmekte güçlük yaşamamıştır. Eşlemeleri sıralı ikililer ile temsil edeceğini de kolayca ifade edebilmiştir. Sema koordinat sisteminde (2, 3) noktasını hemen işaretlemiştir. Diğer eşlemeleri, tekrar doğru parçalarını kontrol ederek, Venn şemasından okuyarak grafik üzerinde göstermiştir. A kümesinin 4 elemanının B kümesinin iki ayrı elemanı ile eşlendiğinin farkında olarak her iki noktayı da eşleyeceğini belirtmiştir. Bu eşlemeyi yaparken artık sıralı ikilileri işaretlemede daha pratik olduğu gözlenmiştir. Sema önce *y*-ekseninde -3 noktasını işaretlemiş ve sağa doğru 4 birim sayarak (4, -3) noktasını işaretlemiştir. Ayrıca (4, -1) noktasını işaretlerken $y = -1$ doğrusu boyunca iğneleri sayarak doğru noktayı işaretlemiştir. Sema Venn şemasında eşlemeleri incelerken, eşlemeyi temsil eden doğru parçalarının kesiştiği noktada doğru parçalarını takip etmekte yine zorlanmıştır ve '*ama çok iç içe girdiği için takip edemiyorum*' şeklinde ifade etmiştir. (-3, 0) eşlemesini belirlediğinde hemen '*boncuğu -3' ün üzerine koyacağız*' şeklinde ifade etmiş ve grafikte işaretlemiştir. (-2, -2) noktasını belirlerken önce *x*-ekseninde -2 noktasını bulmuş ve iki birim $x = -2$ doğrusu boyunca aşağı inerek işaretlemiştir (bkz. Şekil 112).



Şekil 112. Sema iki küme arasındaki eşleme için grafik temsili oluşturuyor

Sema' ya işaretlediği bu noktaları birleştirmenin mümkün olup olmadığı sorulduğunda '*Birleştiremeyiz, çünkü bir nokta ile diğer nokta arasında belli bir şey yok, hepsi bir tarafta ayrı duruyor, diğer noktaları eşleyemiyoruz'* şeklinde ifade etmiştir. Burada kümelerin elemanları arasında ve birbirlerine göre bir ilişkinin olmadığı açıklanarak grafiğin bu şekilde nokta grafiği olduğu belirtilmiştir. Ayrıca diğer tüm noktaların verilmesi durumunda elde edilecek ilişkinin düz bir çizgi oluşturmak zorunda olmadığını açıklamak için lastikler yardımı ile grafik oluşturulmuştur.

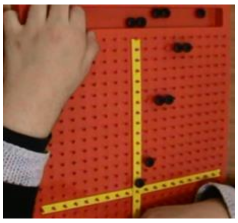
Grafiği oluşturması ve sürekli değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi algılaması için su basıncı ve derinlik arasındaki ilişki incelenmeye başlanmıştır. Sema' ya dalgıç ve dalış kavramları sorulduğunda '*suyun içine dalıyor ve bir metre, iki metre şeklinde yavaş yavaş dalıp çıkıyor*' şeklinde cevap vermiştir. Bu bilgiye dayanarak suyun dalgıçlara bir basınç uyguladığı ve 'vurgun yemek' deyiminin ne olduğu açıklanmıştır. Sema' ya su altındaki derinlik ve su basıncı arasındaki değişimi gösteren tablo sunulmuştur. Sema ilk önce derinlik elemanlarının yazdığı satırı incelemiştir. Kabartma yazılar zaman zaman silindiği için okumakta güçlük çektiği sayılar kabartma yazı kalemi ile düzeltilmiştir. Daha sonra Sema alt satırı incelememiştir. Bu satırda su basıncının yazdığını okumuş ve yan yana hücreleri incelemiştir. Tabloda yer alan kümeleri '*Biri derinlik biri basınç*' şeklinde belirlemiştir. Tablo ile bu iki kümenin elemanlarının eşlendiğini söylemiştir. Hem kümelerin kendi elemanları arasında ve hem de iki küme arasındaki ilişkiyi sorgulamak için oturuma devam edilmiştir:

Araştırmacı: Elemanlar arasında bir ilişki var mı?
Sema: Hangi kümede? Bu birer birer artıyor (derinlik satırını işaret eder) bu da (biraz düşünür ve hücrelere inceler) üç katı artmış.
Araştırmacı: Her zaman üç katı mı olmuş?
Sema: Yok 9, 9, 27, 27 olmuş.
Araştırmacı: O zaman bir ilişki var diyebilir miyim?
Sema: Yok gibi.

Sema kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi açıklayabilmiştir. Ancak su basıncına ait kümesinin elemanlarının arasındaki sabit kalma durumunu açıklayamamıştır. Buradaki eşlemeyi temsil etmek için farklı stratejiler sorulduğunda '*Küptaşla ya da tabletle yazabilirdik. Grafikle gösterebilirdik.*' şeklinde fikir ileri sürmüştür. Hangi temsil türünü tercih ettiği sorulduğunda ise '*Küptaşı seçmeyelim grafikle gösterelim yine. Eğlenceli oluyor (güler).*' şeklinde grafik temsili yapmak istemiştir.

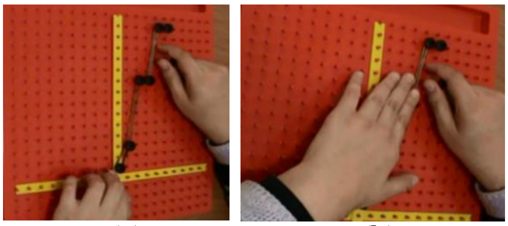
Sema: (tekrar tabloyu inceler) 0 ile 1' i eşleyeceğiz (koordinat sistemine dokunur) ama hangisini hangisi ile eşleyeceğiz?
Araştırmacı: Derinlik kümesini hangi eksenle temsil edeceksin?
Sema: x-ekseni ile.
Araştırmacı: O zaman 0 ile 1' i nasıl eşleyeceksin?
Sema: 0 burada (x-eksenini işaret eder) y' den 1' i bulacağım. O zaman 1' in üzerine takacağız.

Sema biran önce eşlemeleri yapmak istediği için kümeleri eksenler ile temsil ettiğini ifade etmemiştir. Bu nedenle nasıl temsil ettiği sorgulanmıştır. Ardından koordinat sisteminde temsil edilen noktaları işaretlemeye başlamıştır. Tablodan kontrol ederek diğer noktaları da koordinat sisteminde göstermiştir. (1, 3), (2, 9), (3, 9), (4, 27) ve (5, 27) noktalarını gösterebilmiştir. Ordinatta 27 noktasını temsil etmesi için iğneli sayfanın son satırında eksen üzerindeki nokta kullanılmıştır. Sema (4, 27) noktasını işaretlerken '*5 noktası için de hazırca yapalım*' demiş ve (5, 27) noktasını da işaretlemiştir (bkz. Şekil 113). Sema ile su basıncının dalış süresince saat ilerlerken sürekli arttığı fikri tartışılmıştır. Böylece noktaların birleştirilmesi ile elde edilecek olan grafiği oluşturması istenmiştir.



Şekil 113. Sema' nın tablo ile verilen eşleme için grafik temsili

Sema grafiği oluşturmak için lastikler kullanmıştır. Bunun için sıralı ikilileri temsil eden boncukları işaret ederek '*şuradan şuraya takmalıyım*' şeklinde lastikleri nasıl takacağını betimlemiştir. İlk önce (0, 1) ve (1, 3) noktalarını birleştirmiştir. Daha sonra (1, 3) ile (2, 9) noktalarını işaretleyerek lastik takmıştır. (3, 9) ile (4, 27) noktalarını birleştirdikten sonra (4, 27) ile (5, 27) noktalarını birleştirerek grafiği tamamlamıştır (bkz. Şekil 114, (a)). Sema' nın grafiğin nasıl ilerlediğini algılayıp algılamadığını kontrol etmek için eli ile oluşturduğu çizgiyi takip etmesi istenmiştir. Sema kırılma noktalarına dikkat ederek grafiği takip etmiştir (bkz. Şekil 114, (b)). Böylece grafiğin her zaman doğrusal olmadığı tekrar vurgulanmıştır.



(a) (b)

Şekil 114. Sema verilen tablo yardımıyla grafik oluşturuyor

Sema' ya sıralı ikililer söylenmiştir ve grafik oluşturması istenmiştir. Sema sıralı ikilileri tablette not tutmak istememiştir. Bunun yerine sırayla tek tek noktaları grafikte işaretlemek istemiştir. Sema daha önce kullandığı strateji ile *y*-ekseninde 9 noktasını belirlemiş ve sonra *x*-eksenine paralel olarak 3 birim sayarak (-3, 9) noktasını işaretlemiştir. (-2, 4) noktasını işaretlerken '-*2 virgül 4'* diyerek işaretlemelerini yapmıştır. (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9) noktalarını hızlı bir şekilde koordinat sistemi üzerinde işaretlemiştir. Buradaki ikililer arasındaki ilişki sorgulandığında, Sema noktalara yeniden dokunmuştur. Araştırmacı noktaları tekrar seslendirmiştir. Araştırmacı noktaları seslendirirken, sırasıyla söylenen noktaya Sema tekrar dokunmuştur.

Sema: Bir ilişki var. (-3, 9) ve (3, 9) var.
Araştırmacı: Nasıl bir ilişki?
Sema: Bilemiyorum ama (-2, 4) ve (2, 4) de var.

Burada karesi olma ilişkisini fark etmesi için 3, -3, 2 ve -2 sayılarının karesi sorulur. Sema noktalar arasında karesi olma ilişkisini fark edebilmiş ancak *x* ve *y* değerleri için genelleyememiştir. Burada *x*-ekseninde alınan her elemanın *y*-eksenindeki karesine karşılık gelen nokta ile eşlendiği açıklanmıştır.

Araştırmacı: O zaman önündeki noktalar baktığımızda aralarında bir ilişki var mı?
Sema: Evet, var. Kareleri ile eşlenmişler.
Araştırmacı: Bu ilişkiyi reel sayılar için düşünebilir miyiz?
Sema: Evet ama nasıl olacak?
Araştırmacı: İşaretlediğin noktaların arasında kalan noktaların da aynı şekilde kareleri ile eşlendiğini düşünelim.
Sema: Haa o zaman birleştirebiliriz.

Sema (-3, 9) ve (-2, 4) noktalarını işaret ederek '*şunlar şöyle'*, (-2, 4) ile (-1, 1) noktalarını işaret ederek '*şunlar şu şöyle'* şeklinde lastiklerin takılacağı noktaları belirlemiştir. Lastikleri takması için Sema' ya yardım edilmiştir. Sema sırasıyla noktaları eşlerken (0, 0) ile (1, 1) noktasını eşlememiştir. Sebebi sorulduğunda da gözden kaçırdığını belirtmiştir (bkz. Şekil 115, (a)). Sema grafik üzerindeki noktaları beklenen şekilde eşlemeyi yapabilmiştir. Başka bir eşlemenin olup olmadığı sorulduğunda '*yok*' yanıtını vermiştir.

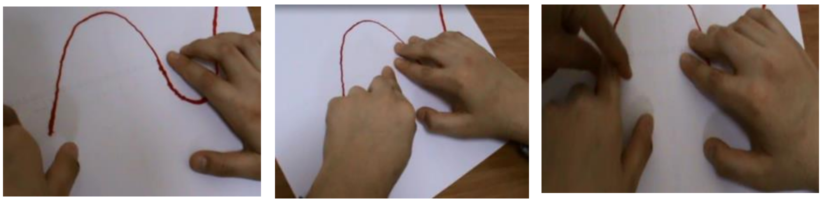
Araştırmacı: ((-3, 9) ile (3, 9) noktalarını işaret ederek) Bu iki noktadan yapacak mıyız?
Sema: Yapamayız.
Araştırmacı: Neden?
Sema: Böyle gidiyor bu çizgiler (grafiğin kollarını işaret ederek) yukarı doğru (bkz. Şekil 115, (b))

Böylece çizgi grafiği kablo yardımı ile temsil edilmiştir. Kablo noktaların üzerinden geçecek şekilde çizgi temsili olarak grafik oluşturulur. Kablo ile oluşturulan grafiğin kollarının devam ettiği vurgulanmıştır (bkz. Şekil 115, (c)).

(a) (b) (c)

Şekil 115. Sema y=x^2 grafiğini oluşturuyor

Bu grafiğin $y = x^2$ grafiği olduğu belirtilmiştir. Sıralı ikililer için *x*-ekseninden alınan her sayının *y*-ekseninde kendisinin karesi olan eleman ile eşlendiği açıklanmıştır. Ayrıca grafiğin çizgi yardımı ile temsil edildiği de vurgulanmıştır. Ardından silikon ile oluşturulmuş bir çizgi grafiği örneği sunulmuştur. Sema grafiği incelemeye başlamıştır. Grafiği incelerken eksenleri temsil eden noktaları sormuştur. Grafikte eksenleri temsil eden çizgiler, grafiğin silikon yardımı ile çizgi şeklinde oluşturulduğu ve bazı noktaların işaretlendiği eliyle dokunması sağlanarak açıklanmıştır. Sema *x*-ekseni, *y* -kseni, orijin ve kablonun yerine kullanılan silikon tek tek incelenmiştir (bkz. Şekil 116).



Şekil 116. Sema sırasıyla x-eksenini, orijini ve grafiği inceliyor

Grafiğin eksenleri kestiği noktalar sorulduğunda Sema sırasıyla (7, 0) ve (3, 0) noktalarını belirleyebilmiştir. Daha sonra *y*-eksenini kestiği noktalara dokunması sağlanmıştır. Sema (0, 5) noktasını belirleyebilmiştir (bkz. Şekil 117, (a)). Ancak (-3, 0) noktasını belirlemekte zorlanmıştır. Tekrar grafiğin üzerindeki noktalar parmağı ile işaretlenerek noktanın koordinatını söylemesi gerektiği açıklanmıştır (bkz. Şekil 117, (b)). Böylece Sema (-3, 0) noktasını belirlemiştir.

(a) (b)

Şekil 117. Sema grafiğin eksenleri kestiği noktaların koordinatlarını belirliyor

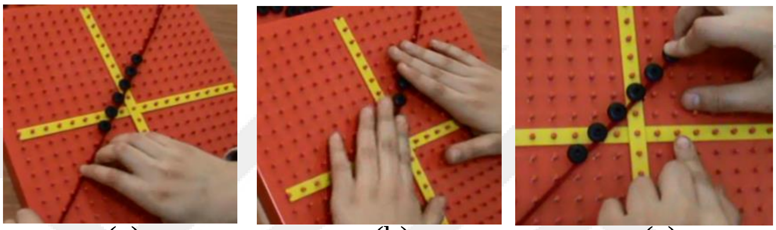
Sema ile oturumun değerlendirmesi yapılırken aşağıdaki ifadeler yer almıştır:

> *Sema: Bugün sıralı ikilileri yaptık. Eşlemeleri gösteren tablolar ile grafikler yaptık. Kablo ile grafik çizdik.*
> *Araştırmacı: Her zaman çizgi grafiği oluşturabiliyor muyuz?*
> *Sema: Hayır noktalara bakıyoruz, ilişkili ise birleştiriyoruz lastikle.*

Sema' nın ilişkiden ne anladığını açıklaması için bir sonraki hafta bu durum tekrar sorgulanmıştır:

> *Sema: Noktaları işaretliyoruz, eğer belli bir çizgi oluşuyorsa çizgi ile birleştirebiliyoruz. Yerleri farklı farklı ise birleştiremiyoruz.*
> *Araştırmacı: Yerlerinin belli olması ya da farklı olması ne demek?*
> *Sema: Noktalar ilişkili değilse farklı farklı yerlerde oluyor yani (güler)*
> *Araştırmacı: Noktaların ilişkili olması ne demek?*
> *Sema: Eşliyoruz ya işte, eşlerken üç katı oluyor mesela. 3, 6, 9 diye gidiyor.*
> *Araştırmacı: Nasıl eşliyoruz peki?*
> *Sema: Lastikle noktaları eşliyoruz, birleştiriyoruz yani. Ya da kablo ile.*

Sema için kümeler arasındaki eşleme ve ilişki kurma, bu kümeleri eksenler ile temsil etme ve eşlemeleri sıralı ikililer ile gösterme hedefleri ortaya konulmuştur. Böylece Sema' nın koordinat sisteminde grafik temsili ile ilgili eşleme ve ilişkilendirme kavramlarına geçiş yapılmıştır. Sema' dan Şekil 118' de yer alan grafiği incelemesi, işaretli noktaların koordinatlarını söylemesi ve grafiği betimlemesi istenmiştir. Grafikte noktalar boncuklarla, çizgi grafiği ise iple temsil edilmiştir. Sema ilk önce grafiği üçüncü bölgeden incelemeye başlamış ve ipi takip etmiştir (bkz. Şekil 118, (a)). Noktaları incelemiş ve eli ile düz bir zemine dokunur gibi '*düz çizgi'* diyerek ip boyunca dokunmuştur (bkz. Şekil 118, (b)).



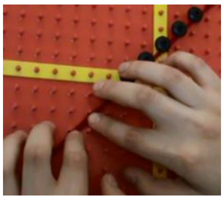
(a) (b) (c)

Şekil 118. Sema grafik inceliyor ve noktaların koordinatlarını belirliyor

Noktaların koordinatlarını belirlenmesi istendiğinde '*x' te -2 noktası var. 2' ye 0 noktası, y' de -2 noktası var. Pardon 0'a 2 noktası bu. Bu noktanın da x' i -1, -1' e 1. Bu uçtaki noktanın 2 mi? x, 2. (sırasıyla iğneleri sayar) 4, 2' ye 4* [...]' şeklinde koordinatları belirlemiştir (bkz. Şekil 118, (c)). Koordinatları belirlerken işaretli noktalardan dolayı iğneleri sayarken güçlük yaşamıştır. Zaman zaman da koordinatını belirlemeye çalıştığı noktayı karıştırmıştır. Eksenler üzerindeki noktaların koordinatlarını ise rahatlıkla belirlemiştir. Belirlenen noktalar için aralarındaki ilişki sorgulanmıştır.

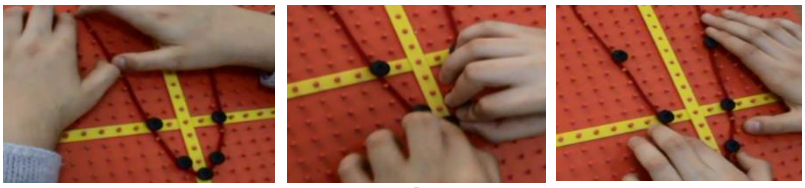
Sema: Mesela iki iki artmış.
Araştırmacı: İki iki artan hangisi?
Sema: 0' a 2, 1' e 3.
Araştırmacı: Yani? x ile ifade etmemiz mümkün mü?
Sema: İki fazlası işte.
Araştırmacı: x' in 2 fazlası olan y ile eşlenmiş diyebilir miyiz?
Sema: Evet doğru.
Araştırmacı: O zaman bu nasıl bir ilişkinin grafiğidir?
Sema: Eşlemenin grafiği, iki fazlası ile eşliyoruz.

Sema henüz değişken kavram bilgisi olmadığı için grafiği adlandırmakta ve ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmekte güçlük yaşamıştır. Ancak sıralı ikililer arasındaki iki fazlası olma ilişkisini fark edebilmiştir. Bu doğru üzerinde işaretlenmemiş başka bir noktanın koordinatlarının belirlenebilmesi sorgulandığında Sema rastgele bir noktayı işaret ederek '*Şurası mı mesela?*' şeklinde düşünmüştür (bkz. Şekil 119). Sema boncuklardan dolayı noktaları hissedemediğini belirterek önce noktanın ordinatını ve daha sonra apsisini belirlemiştir. (-4, -2) olarak noktayı belirlemiştir.



Şekil 119. Sema grafik üzerinde boncuk ile işaretlenmemiş bir nokta belirliyor

Araştırmacı Sema' nın koordinatları belirlemede yaşadığı güçlüğe dayanarak '*Sadece apsisi belirlesek, onun iki fazlası eşlendiği ordinat değil midir?*' şeklinde sorgulamıştır. Sema bahsi geçen şekilde de yapılabileceğini belirtse de hala cebirsel genelleme yapmada güçlük yaşadığını söyleyebiliriz. Sema' nın yaşadığı güçlüklerden dolayı başka bir örnek grafik oluşturulmuştur. Bu kez $y = x^2$ grafiği ip yardımıyla oluşturulmuştur. Grafik üzerinde bazı noktalar işaretlenmiştir. Sema grafiğe dokunur dokunmaz '*düz değil bu, yerleri belli değil bunların*' demiştir. Sema burada noktaların doğrusal olmadığını belirtmek istemiştir. Grafiği eli ile takip etmesi ve betimlemesi istendiğinde '*şöyle gidiyor çapraz* (bkz. Şekil 120, (a)), *burada kıvrılmış* (bkz. Şekil 120, (b)), *böyle çapraz* (bkz. Şekil 120, (c)), *eğri*' şeklinde betimlemiştir.



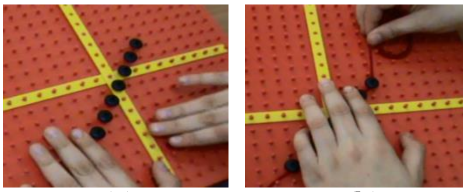
(a) (b) (c)

Şekil 120. Sema $y = x^2$ grafiğini inceliyor

Grafik üzerinde işaretlenmiş noktaların koordinatlarını belirlemesi istendiğinde yine öncelikle eksen üzerindeki (-2, 0), daha sonra (-1, -3) ve (0, -4) noktalarını belirlemiştir. (-1, -3) noktası için ordinatını hemen ifade ederken apsisi için eksenden kontrol etmiştir. (2,

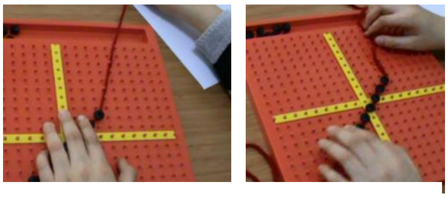
0) noktasını belirledikten sonra (3, 5) noktasının da önce ordinatını daha sonra apsisini belirlemiştir. Benzer şekilde önce ordinatı daha sonra apsisini birimleri sayarak (-3, 5) noktasının koordinatlarını belirlemiştir. Noktaları belirlerken artık parmağı ile eksenler üzerinde işaretlemeler yapmamaktadır. Bu noktalar arasında bir ilişki belirleyip belirleyemediği sorulduğunda '*3' e 5 ve -3' e 5 noktaları var. Üçer üçer mi artıyor? Artıyor mu azalıyor mu? Kaçar kaçar artıp azalıyor bilemedim? Artıp azalma değil sanki.*' şeklinde akıl yürütmüştür. Noktalar tekrar seslendirildiğinde '*karman çorman, kafamı karıştırdı*' diyerek ilişkiyi bulamayacağını söylemiştir. Burada bir ilişki olduğu ve bu nedenle bu şekilde bir çizgi grafiği elde edildiği ifade edilerek '*x' in karesinin 4 eksiği*' şeklinde ilişki ifade edilir ve (1, -3) noktası ile örneklendirilir. Benzer şekilde birkaç nokta için Sema' da örneklendirmeye çalışmıştır.

(-3, -4), (-2, -3), (-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2) noktalarını sırasıyla işaretlemiştir (bkz. Şekil 121, (a)). Sema yine daha önce olduğu gibi önce *x*-ekseninde apsisi belirlemiş ve ardından *y*-eksenine paralel birimleri ordinatın mutlak değeri kadar saymış ve noktayı işaretlemiştir. Sema orijini belirlemekte yine güçlük yaşamıştır. Orijine farklı boncuklar takılmaya çalışılmıştır, ancak bu durumda ya boncuk sabit kalmamıştır ya da diğer eşlemeler ile karışmıştır.


(a) (b)

Şekil 121. Sema $y = x - 1$ grafiğini oluşturuyor

Sema' dan işaretlenen bu noktalar arasındaki ilişkiyi belirlemesi ve bu ilişkiye göre tüm reel sayıların eşlendiğini düşünerek çizgi grafiğini oluşturması istenmiştir. Grafiği oluşturması için Sema' ya ip verilmiştir. Sema sadece verilen noktaları ip yardımı ile birleştirmiş ve '*Bitti!*' demiştir (bkz. Şekil 121, (b)). Bunun üzerine Sema' dan bu ilişkinin diğer noktalar için de devam ettiğini ve reel sayılar üzerinde tanımlı olduğunu düşünmesi istenmiştir. Sema elinde tuttuğu ipi sündürerek '*şöyle gidecek o zaman*' demiştir (bkz. Şekil 122). İp Sema' nın gösterdiği şekilde sabitlenmiş ve doğru grafiğe ulaşmak için tartışmaya devam edilmiştir:



Şekil 122. Sema grafiğin nasıl devam edeceğini inceliyor

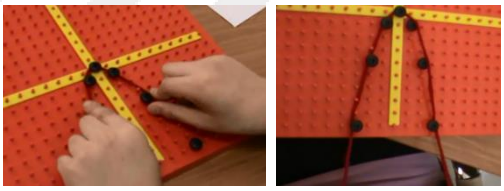
Araştırmacı: Bu noktalar arasında bir ilişki fark ettin mi? (Noktaları tekrar söyler)
Sema: Birer azalmıyor mu?
Araştırmacı: Şöyle düşün x ve y olarak nasıl söyleriz?
Sema: x azalıyor.
Araştırmacı: Kaç azalıyor?
Sema: 1 birim.
Araştırmacı: Yani x' ten 1 çıkarıyorum.
Sema: Evet.
Araştırmacı: Ne elde ediyorum?
Sema: y mi?
Araştırmacı: O zaman 3' e 2 noktasından sonraki noktayı belirler misin?
Sema: Burası mı? ((4, 3) noktasını işaret eder, bkz. Şekil 123, (a))
Araştırmacı: Bir sonraki noktayı söyle?
Sema: 5' e 4 (noktayı işaretler)

(a) (b) (c)

Şekil 123. Sema belirlediği noktalara göre grafiği kontrol ediyor

Sema değişken veya harfli ifade kavramlarına hakim olmadığı için apsis veya ordinat temsillerinden bir cebirsel genellemeye ulaşması amaçlanmıştır. Sema ilişkiyi fark etmesine rağmen grafiği oluşturamamıştır. Örnek noktaların artırılması ile grafiğin nasıl devam edeceğini fark etmesi üzerine oturum devam ettirilmiştir. Sema' ya çizdiği grafiğe göre işaretlediği noktaların konumunu incelemesi istenmiştir. Sema elini grafik üzerinde gezdirerek kontrol etmiştir (bkz. Şekil 123, (b)). Grafiği doğru oluşturup oluşturmadığı sorulduğunda ipi yeni belirlediği noktalardan geçecek şekilde tutarak '*dümdüz gidecekmiş*' demiştir. Dümdüz ifadesi ile ne anlamamız gerektiği sorulduğunda kırılma noktası olmadan bir doğru olması gerektiğini açıklamıştır (bkz. Şekil 123, (c)). Sema '*noktalar nasıl gidiyorsa* *ip de öyle oluyor*' şeklinde akıl yürütmüştür. Sema' ya oluşturduğu grafiğin $y = x - 1$ doğrusu olduğu açıklanmıştır.

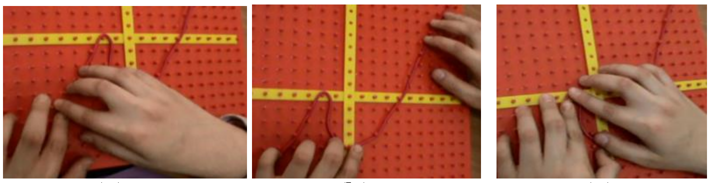
Sema' nın yaşadığı yanılgılar ve güçlükler göz önüne alınarak benzer bir uygulama daha yapılmıştır. Yine sıralı ikililer ifade edilmiş ve Sema' dan koordinat sisteminde işaretlemesi istenmiştir. (-3, -9), (-2, -4), (-1, -1), (0, 0), (1, -1), (2, -4), (3, -9) noktalarını hızlı bir şekilde işaretlemiştir. Bu noktalar arasındaki ilişki sorgulandığında '*dümdüz değil, doğru değil, dağınık bir grafik, şöyle giden bir eğri*' diyerek noktaları sağdan sola doğru avucunun içi ile dokunarak eğriyi çizmiştir. Sema daha önce incelediği $y = x^2$ grafiğini düşünerek '*az önceki grafiğin tersi gibi*' demiştir. Noktalar yeniden söylenerek aralarındaki ilişkiyi ifade etmesi istenmiştir. Sema grafiğin simetrik olmasını '*çaprazlama yapılmış*' şeklinde ifade etmiştir. Ancak noktalar arasındaki ilişkiyi belirlemekte güçlük yaşamıştır. Sema' ya düşünmesi için 2 ve -2' nin karesi sorulmuştur. Ancak Sema x^2 ifadesini belirleyememiştir. Bunun üzerine apsislerin karesinin negatifi olarak ordinat ile ilişkisi açıklanmıştır. Sema karesi ve negatifi olmasını algılamasına rağmen *x* ve *y* ile genellemeyi yapamamıştır. Grafiği ip ile oluşturması istendiğinde orijinden aşağıya doğru grafiğin kollarını oluşturarak ilerlemiştir (bkz. Şekil 124).



Şekil 124. Sema $y = - x^2$ grafiğini oluşturuyor

Sema' ya grafiğin nasıl devam edileceği sorulduğunda '*aşağıya ama birleşecekler mi?*' şeklinde sormuştur. Bu durumda (4, -16) noktasını hayali olarak işaretlemesi istenmiştir. Grafiğin bu noktadan geçmesi gerektiğini söyleyen Sema '*aaa evet o zaman böyle devam edecekler, bayağı uzun bir ip gerek*' şeklinde yorumlamıştır.

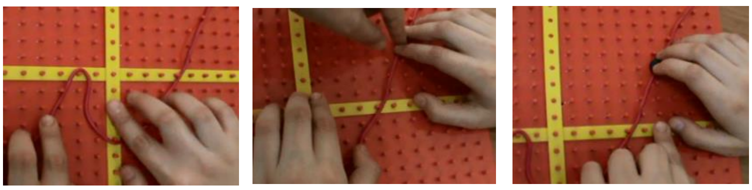
Grafik inceleme sürecinde grafik üzerinde bir noktayı tespit edebilmesi için iğneli sayfa üzerinde kablo ile bir grafik temsil edilmiştir. Sema' dan bu grafik üzerinde belirleyebildiği noktaların koordinatlarını tespit etmesi istenmiştir. Sema ilk önce kabloyu takip ederek grafiği bir bütün olarak incelemiştir. Bunun için iğneli sayfa materyaline göre kablonun sol ucundan başlayarak kabloyu takip etmiştir (bkz. Şekil 125, (a) ve (b)). Daha sonra istediği ve belirleyebildiği bir noktanın koordinatlarını söylemesi istenmiştir. Sema hemen (-2, 0) noktasına dokunarak ‘*Mesela şu -2!*’ demiştir (bkz. Şekil 125, (c)). Noktanın koordinatı soruduğunda ‘*-2’ ye 0*’ yanıtını vermiştir.



(a) (b) (c)

Şekil 125. Sema verilen bir grafikte bazı noktaların koordinatlarını belirliyor

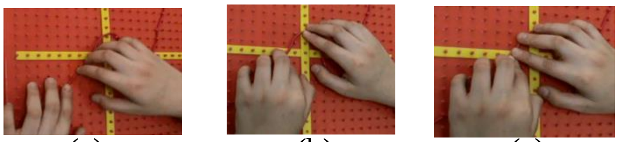
Ardından kablonun üzerinde elini gezdirirken kablonun geçtiğini düşündüğü ilk noktayı sol eli ile işaretleyip ‘*mesela bunun koordinatlarını mı söyleyeyim*?’ şeklinde sormuştur. Koordinatlarını belirlemesi istendiğinde sağ eli ile orijini bulup (-4, -3) noktası olduğunu tespit etmiştir. Bu tespiti yaparken ilk önce ordinatını belirlemiştir (bkz. Şekil 126, (a)). Yine grafiğin üzerinde olan (0, -4) noktasını belirlemiştir. Bu noktaya dokunduğunda ‘*x’ i yok bu noktanın*’ demiş ve orijinden *y*-ekseni üzerinde birimleri sayarak ordinatı belirlemiştir. (4, 0) noktası işaret edilerek koordinatı sorulduğunda ‘*bunun y’si yok*’ demiş ve apsisi birimleri sayarak belirlemiştir. Daha sonra (6, 4) noktası işaret edilerek Sema’ dan bu noktanın da grafik üzerinde olduğu belirtilmiş ve koordinatlarını söylemesi istenmiştir (bkz. Şekil 126, (b)). Sema ilk önce noktanın koordinatlarından apsisi y = 4 doğrusu boyunca birimleri sayarak 6 olarak belirlemiştir. Sema biraz düşünmüştür. Noktanın ordinatı sorulduğunda ‘*sıfır mı*?’ diye sormuştur. (6, 4) noktasına boncuk takılarak işaretlenmiş ve Sema’ dan bu noktanın koordinatlarını belirlemesi istenmiştir. Sema yeniden orijinden başlayarak *x*-ekseni üzerinde apsisi belirlemiştir (bkz. Şekil 126, (c)). Ordinatı tekrar sorulduğunda ‘*haa*!’ diyerek orijinden başlayarak *y*-ekseni üzerinde birimleri sayarak ordinatı 4 olarak belirlemiştir.



(a) (b) (c)

Şekil 126. Sema grafik üzerinde işaretlenen noktaların koordinatlarını belirliyor

Verilen diğer bir grafikte Sema yine iğneli sayfa materyaline göre üçüncü bölgeden başlayarak kabloyu takip ederek incelemiştir (bkz. Şekil 127, (a)). Grafik üzerindeki dilediği bazı noktaların koordinatlarını tespit etmesi istenmiştir. Sema ilk önce *y*-ekseni üzerindeki noktayı işaretlemiş '*mesela… şu! 1, 2. 0' a 2*' şeklinde koordinatlarını belirlemiştir (bkz. Şekil 127, (b)). Ardından (-2, 0) noktasının koordinatlarını belirlemiştir (bkz. Şekil 127, (c)).



(a) (b) (c)

Şekil 127. Sema grafik üzerindeki bazı noktaların koordinatlarını belirliyor

Sema grafik üzerinde (-3, -1) noktasını işaret edip '*mesela şu*!', koordinatlarını belirlemek istemiştir. Sol eli ile noktayı işaret ederken sağ eli ile (-3, 0) noktasından bir birim aşağıya sayarak '*-1*' demiştir. Hemen '*hayır*' diyerek orijinden birimleri sayarak apsisi -3 olarak belirlemiştir. Ardından orijinden bir birim sayarken '*haa… -1*' demiştir. Burada Sema' nın dikkat eksikliğinden dolayı yanıldığını en son koordinatları doğru olarak belirlemesinden ve ifadelerinden anlayabiliriz. (2, 0), (3, -2) ve (5, 0) noktalarının koordinatlarını sırasıyla belirlemiştir.

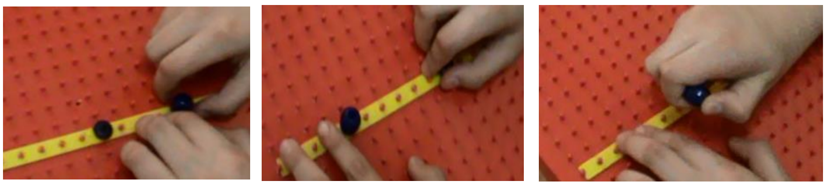
4.4.1.2.7. Değişken Kavramının ve İki Küme Arasındaki İlişkinin Cebirsel Temsilinin İncelenmesi

Görüşmeye değişken kavramının bir kümenin elemanlarını temsil ettiği fikrinin incelenmesi amacıyla sorular sorularak başlanmıştır. Burada günlük hayat ile ilişkilendirebilmek amacıyla sürekli ve süreksiz değişken olarak gruplandırmadan yararlanılarak temsil edeceği kümeler için cinsiyet, sıcaklık ve yaş gibi elemanlardan oluşan örnekler ele alınmıştır.

Araştırmacı: Cinsiyet kelimesi hangi kelimeleri karşılar?
Sema: Cinsiyet kız ve erkek olmayı kapsar.
Araştırmacı: O zaman cinsiyet kelimesi kız ve erkek kelimelerini temsil eder diyebilir miyim?
Sema: Evet.
Araştırmacı: Peki bireyin yaşını düşünelim. Yaş kelimesi neleri temsil eder?
Sema: Yaş, mesela…
Araştırmacı: Mesela sen yarın kaç yaşına giriyorsun?
Sema: Ooo.. 17.
Araştırmacı: Yaş kelimesi on yediyi temsil eder mi?

Sema: Evet. Mesela sizin yaşınız.
Araştırmacı: Aynen, bir yaşında bir bebek ya da dünyanın en yaşlı insanı 148 yaşında (gülerler). O zaman yaş kelimesi..
Sema: 1, 17, 148 gibi sayıları gösterir.
Araştırmacı: Pozitif sayıları temsil ediyor o halde. Peki sıcaklık kelimesi?
Sema: Soğuk da olabilir. Havanın sıcaklığını temsil eder. Güneşli veya soğuk.
Araştırmacı: Kışın hava durumunda -5 derece diyor mesela. Bahar mevsimindeyiz, hava sıcaklığı 23 derecede seyredecek diyor mesela.
Sema: O zaman eksi de olur artı da.
Araştırmacı: Pozitif ve negatif sayıları temsil ediyor diyebilir miyim?
Sema: Evet.

Sema değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanlarını belirlemekte güçlük yaşasa da araştırmacının yönlendirdiği sorular ile sonuca ulaşabilmiştir. Ancak Sema' nın değişkenin bir sembol olduğunu ve kümenin her elemanını temsil ettiğini kavraması için sayı doğrusu üzerindeki sayılar örnek durumu ile görüşmeye devam edilmiştir. Sema' ya sunulan bir sayı doğrusu temsilinde iğneli sayfa materyalinin aparatından yararlanılmıştır. Sayı doğrusu üzerinde 0 noktası işaretlenmiştir. Ayrıca Sema' ya iğneli sayfa materyalinin aparatlarından farklı bir boncuk verilmiştir. Sema ile bu boncuğun sayı doğrusu üzerindeki sayıları temsil etme durumu sorgulanmıştır. Sema boncuğu +4 noktasına takmıştır (bkz. Şekil 128, (a)). Sema' dan farklı bir noktayı işaretlenmesi istendiğinde -6 noktasını boncuk ile işaretlemiştir (bkz. Şekil 128, (b)). Daha sonra boncuk hiçbir sayı işaretlenmeden Sema' nın elinde iken temsil ettiği elemanlar sorgulanmıştır (bkz. Şekil 128, (c)).



Şekil 128. Sema değişken kavramı temsilini inceliyor

Sema: Buradaki sayıları (sayı doğrusu üzerindeki iğneleri işaret ederek)
Araştırmacı: Peki bir iğneye taktığında boncuk neyi temsil ediyor?
Sema: (-9 noktasına boncuğu takar) burada işte.
Araştırmacı: O zaman sabit bir sayı oluyor. Mesela ilk taktığın 4' tü. Eline aldığında?
Sema: Hepsi olabilir.

Sema boncuğun sayı doğrusu üzerindeki noktaların her birini temsil ettiğini ve işaretlenen bir nokta için bir sabit olduğunu algılamıştır. Daha sonra matematiksel temsil olarak boncuğun *x, y* veya *t* gibi harflerle gösterilen değişken kavramı olduğu açıklanmıştır. Sema *x* için 1-3-4-6 kodu ile Braille yazıda kodlandığını belirtmiştir. Değişken kavramı tekrar sorulduğunda Sema '*Elimde boncuk varsa her yere takabilirim, her sayıyı temsil edebilirim. Eğer şuraya takarsam (boncuk ile 8 noktasını işaretler) sabittir.*' şeklinde ifade etmiştir. Bir kümenin elemanlarını temsil eden değişkenin belirlenmesi ve diğer bir küme ile var olan ilişkinin bu değişken ile ifade edilmesi amacıyla balina örneği incelenmiştir. Bunun için bir mavi balinanın günlere göre yediği balık miktarı ifade edilmiştir. Sadece sözel ifade edilen durum için gün ile balinanın yediği balık miktarı arasındaki ilişki sorgulanmıştır. Öncelikle kümelerin elemanları arasındaki ilişkinin keşfedilmesi için tartışma başlatılmıştır:

Sema: Mesela ilk gün 4 ton yemiş, sonra 8 ton, kaç kaç artıyor?
Araştırmacı: Birinci gün 4 ton, ikinci gün 4 çarpı 2 ton.
Sema: Kat artmış.
Araştırmacı: Mesela beşinci gün kaç ton yiyecek?
Sema: Üçüncü gün 12 mi? 4 çarpı 4, 16. Beşinci gün 25 mi? Haa 20!
Araştırmacı: Altıncı gün kaç ton?
Sema: 24! Onuncu gün 40.

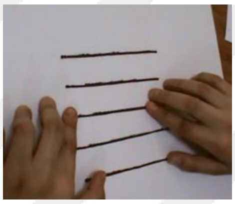
Sema başlangıçta kat ilişkisini fark edemese de günlere göre incelendiğinde 4 katı olma durumunu belirlemiştir. Ardından iki kümenin elemanları arasındaki ilişkinin değişken aracılığı ile ifade edilmesi için gün kümesini temsil eden değişkenin belirlenmesi sağlanmıştır:

Araştırmacı: Bu örnekteki kümeler neler?
Sema: 1, 2, 3, 4 günler var, bir de ton var.
Araştırmacı: Günlerin kümesi ve yediği yiyecek miktarı kümesi. O zaman gün kümesini bir değişken ile temsil edebilir miyiz?
Sema: Evet, x.
Araştırmacı: Peki x-inci günde kaç ton balık yediğini bulabilir miyiz?
Sema: Bilmiyorum hesaplayalım. Birinci gün 4, ikinci gün 2 çarpı 4, üçüncü 3 çarpı 4.
Araştırmacı: x-inci gün?
Sema: x çarpı 4.

Böylece Sema belirlediği değişkene göre iki küme arasındaki ilişkiyi belirleyerek cebirsel olarak ifade edebilmiştir. Ardından Sema' ya gün ve yiyecek miktarı arasındaki eşlemeyi gösteren tablo sunulmuştur. Sema ilk önce ilk satırı incelemiş ve sütunların temsil ettiği kümeleri okumuştur. Daha sonra yiyecek miktarı sütunundaki elemanları tek tek okumuştur. Tablodan elde ettiği yorum sorulduğunda Sema, '*Mavi balina her gün sürekli yemek yiyormuş. Birinci gün 4 ton, 8 ton, 40 ton ve bilmediğimiz gün için de 4 çarpı x ton*' şeklinde açıklamıştır. Gün sayısı ile yiyecek miktarı arasındaki ilişki sorulduğunda ise '*Nasıl arttığını mı soruyorsunuz? (yeniden yiyecek miktarlarının yazdığı sütunu inceler) 4 katı*' şeklinde ifade etmiştir. Araştırmacı yiyecek miktarının gün sayısının dört katı olduğunu açıklamıştır. Ancak Sema' nın kat ilişkisini belirlemede ve ifade etmekte güçlükler yaşadığı belirlenmiştir. Bu nedenle saate göre toplam yol miktarının değişimini gösteren tabloyu incelemesi istenmiştir. Sema ilk önce ilk sütunda yer alan kümelerin neler olduğunu okumuştur. Saate göre alınan yol miktarı sorgulandığında Sema önce sağ eli ile saat satırını, sol eli ile de yol satırını okurken, daha sonra yalnızca toplam yol miktarına odaklanmıştır. Bu örnek durumdaki kümeleri '*saat ve yol*' olarak belirleyen Sema' dan iki küme arasındaki ilişkiyi ifade etmesi beklenmiştir. Sema önce '*1, 50 ile, 2, 100 ile'* şeklide eşlemeleri ifade etmiştir. Bu elemanlar arasındaki ilişkinin cebirsel ifadesi sorgulandığında ise '*Elli elli artıyor*' şeklinde açıklamıştır. Sema' nın değişken yardımıyla ifade etmesi için tartışma şöyle devam etmiştir:

Araştırmacı: Yol kümesinin elemanları 50, 50 artıyor. Peki saat ile yol kümesi arasındaki ilişkiyi nasıl ifade ederiz?
Sema: Artıyor işte elli elli.
Araştırmacı: Değişkenlerden yararlansak nasıl ifade ederiz?
Sema: (saat kümesini temsil eden satırı işaret ederek) x (diğer satırı işaret ederek) y. Elli elli artıyordu ama bilemedim. x artı 50 mi?
Araştırmacı: x hangi kümeyi temsil ediyordu?
Sema: Saati.
Araştırmacı: O zaman x hangi elemanlar olabilir?
Sema: Haa! 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Araştırmacı: O zaman beşinci saatte senin dediğine göre 50 artı 5 ten 55 olmalı. Fakat kaç kilometre yol almış? 250.
Sema: Bilemedim galiba.
Araştırmacı: Bir de şöyle düşün. 1, 50 ile eşlenmiş; 2, 100 ile eşlenmiş; 3, 150 ile eşlenmiş. 4, 200 ile eşlenmiş. Mesela 4 ile 200 arasında nasıl bir ilişki var? Hepsi için düşünelim, 2 ile 100 arasında nasıl bir ilişki var?
Sema: Artıyor işte.
Araştırmacı: Tamam ama sayısal olarak ifade etmek istesek? Aynı ilişki 3 ile 150 arasında da var.
Sema: Haa elli ile çarpacağız.
Araştırmacı: Evet mesela 4 ile 50 çarparsak?
Sema: 200.
Araştırmacı: 4 200 ile mi eşlenmiş?
Sema: Evet.
Araştırmacı: O zaman saat ile yol arasında nasıl bir ilişki varmış?
Sema: Katı. 50 kat.
Araştırmacı: Saat kümesini x ile temsil edersek, yol için nasıl ifade ederiz?
Sema: 50 çarpı x.

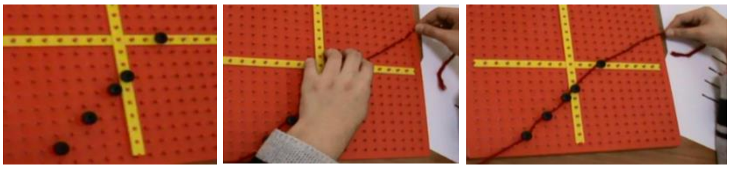
Sema yine kat ilişkisini belirlemekte güçlük yaşamıştır. Burada iki küme arasındaki ilişki ifade edildikten sonra, yol kümesinin elemanlarının saat kümesinin elemanlarına göre değiştiği ifade edilerek bağımlı ve bağımsız değişken tanımları açıklanmıştır. Sema' ya bağımsız değişken sorulduğunda 'saat' kümesi için *x* ve bağımlı değişken için 'yol' kümesi için *y* değişkenlerini belirtmiştir. Mavi balina örneği için bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirlemesi istendiğinde gün kümesinin elemanlarına bağlı olarak yiyecek miktarı kümesi elemanlarının değiştiğini ifade edebilmiştir. Burada bağımlı değişkeni *y* ile temsil edilebileceği ve $y = 50x$ cebirsel ifadesinin yazılabileceği açıklanmıştır. Mavi balina örneği için Sema '*O dört katıydı, y eşittir 4 çarpı x diyeceğiz*' şeklinde açıklamıştır. Görüşmenin devamında cebirsel ifade ile temsil sürecine ilişkin kavramanın sağlanması için temsil türleri arasında geçiş fırsatları sunulmuştur. Venn şeması ile verilen iki küme arasındaki eşlemeyi incelemesi için Sema' ya zaman verilmiştir. Sema önce *A* kümesinin daha sonra *B* kümesinin elemanlarını okumuştur. Daha sonra doğru parçalarını takip ederek eşlemeleri belirlemiştir.



Şekil 129. Sema Venn şeması ile sunulan kümeler arasındaki eşlemeleri inceliyor

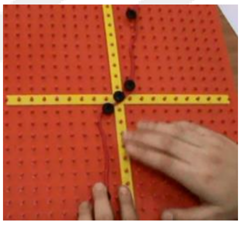
> *Sema: (yeniden eşlemleri kontrol eder) 3 ile 0, 0 ile -3, -1 ile -4, -3 ile -6, -5 ile -8 eşlenmiş. Azalıyor.*
> *Araştırmacı: Nasıl azalıyor?*
> *Sema: Üçer üçer azalıyor.*
> *Araştırmacı: Peki değişkenler belirlesek kümelerdeki elemanları temsil etse, az önceki gibi bağımlı ve bağımsız değişkenler ile söylesek? Mesela A kümesini temsil eden....*
> *Sema: x olsun. B de y olsun.*
> *Araştırmacı: Tamam. A kümesine göre B kümesinin elemanlarının değişmesi için nasıl bir ilişki kurmalıyım?*
> *Sema: x bağımsız değişken, y bağımlı değişken. y eşittir (düşünür)*
> *Araştırmacı: Elemanları eşlerken nasıl bir ilişkiye göre eşliyordu?*
> *Sema: 3 eksikti. A dan. y eşittir x eksi 3.*

Sema bağımlı ve bağımsız değişkeni belirleyebilmiş, ayrıca kümeleri farklı değişkenler ile temsil edebilmiştir. Bununla birlikte cebirsel ifade ile kümeler arasındaki eşlemenin bağlı olduğu ilişkiyi temsil edebilmiştir. Ardından bu ilişkiyi grafik ile göstermesi için iğneli sayfa materyalinden yararlanılmıştır. Sema Venn şeması ile verilen eşlemeden yararlanarak sıralı ikilileri işaretlemiştir (bkz. Şekil 130). Daha sonra bu ilişkiye göre eşlemelerin tüm reel sayılar için devam ettiği düşünülürse grafiğin nasıl olacağı sorgulanmıştır. Grafiği oluşturması için Sema'ya ip verilmiştir. Sema (-5, -8) noktasından başlayarak noktaların üzerinden ipi geçirerek grafiği oluşturmuştur. Daha sonra ipi aynı doğrultuda sündürmüştür. Bu grafiğin $y = x – 3$ ilişkisini gösterdiği belirtilmiştir.



Şekil 130. Sema $y = x – 3$ grafiğini oluşturuyor

Temsiller arasında geçiş için bu kez Sema' dan grafiği verilen bir ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmesi için iğneli sayfa materyali üzerinde elektrik kablosu yardımı ile oluşturulan grafiği ve işaretlenen noktaları incelemesi istenmiştir. Sema kabloyu iki eli ile takip ederek grafiğin nasıl olduğunu betimlemeye çalışmıştır. Sema sırasıyla (0, 0), (-1, -1), (1, 1), (-2, -8) ve (2, 8) noktalarının koordinatlarını belirlemiştir. Bu noktalardan yararlanarak bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmesi istenmiştir.



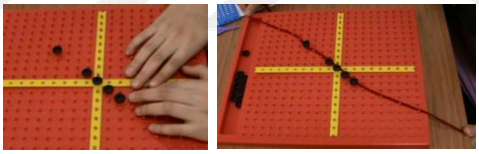
Şekil 131. Sema $y = x^3$ grafiğini inceliyor

Sema: Hocam bunlar eşit değil ama. Bunlar bir artıyor bir azalıyor. Burada noktalar birbirine eşit.
Araştırmacı: Demek ki artma veya azalma ilişkisi değil.
Sema: O zaman katı. 4 katı mı?
Araştırmacı: Ama -1' in 4 katı -4. -1 ile 1 eşlenmiş. Kuvvet olarak düşünsek?
Sema: 2 ile 8. 2 çarpı 2, 4. Sonra 8.
Araştırmacı: Güzel, peki -2 için?
Sema: -8 olmalı işte eşlemiş zaten. x' in küpü deriz.
Araştırmacı: y eşittir?
Sema: y eşittir x küp.

Sema elemanlar arasındaki ilişkinin artma ya da azalmanın dışında kat ilişkisini de dikkate almıştır. Ancak bu adımda kuvvet alması fikri için açıklama yapılması gerekmiştir. Bu nedenle iki kümenin elemanları arasındaki ilişkinin cebirsel olarak belirlenmesinde güçlüklerin devam ettiğini söyleyebiliriz. Cebirsel olarak verilen bir ilişkiyi grafik ile temsil edebilme becerisini inceleyerek söz konusu güçlüğün aritmetik bilgisinden kaynaklanıp kaynaklanmadığını belirlemek amaçlanmıştır. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanları arasındaki ilişkinin cebirsel olarak verilmesi durumunda, bu ilişkiyi temsil eden grafiği oluşturması üzerine görüşmeye devam edilmiştir. İlk önce $y = x$ doğrusunu grafik ile temsil etmesi istenmiştir.

Sema: Önce noktaları bulmam gerek. x, -2, y de -3 olsun.
Araştırmacı: Ama y = x ilişkisi vardı. -2, -3' e eşit mi?
Sema: O zaman -2, -2!

Sema (-2, -2) noktasından hemen sonra (1, 1) noktasını işaretlemiştir. Daha sonra hızlı bir şekilde noktaları sezgisel olarak belirleyerek (-1, -1), (0, 0), (4, 4) noktalarını işaretlemiştir. Bu ilişkiyi reel sayılar kümesi üzerinde düşünmesi istenildiğinde Sema, ip yardımı ile grafiği oluşturmuştur. Her ne kadar Şekil 132' de bir doğru oluşturamasa da Sema ipin noktalar ile aynı doğrultuda devam edeceğini belirtmiştir. Başlangıçta cebirsel olarak ilişkinin ifade edilmesini kavrayamadığı düşünülse de Sema' nın ilk sıralı ikiliden sonra kolay ve emin adımlarla ilerlemesi ve grafiği oluşturmada güçlük yaşamaması dikkat çekmiştir.

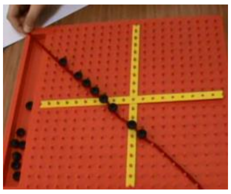


Şekil 132. Sema $y = x$ grafiğini oluşturuyor

Sema' nın grafik oluşturmadaki kavrayışını belirlemek için $y = x + 3$ doğrusunun grafiğini çizmesi beklenmiştir. Sema bu örnekte de ilk sıralı ikiliyi belirlemekte güçlük yaşamıştır.

Sema: Mesela x için 3 olduğunda ne yapacağım?
Araştırmacı: y eşittir x artı 3 dediğine göre, sen de x' i 3 aldığına göre?
Sema: 3' e 6 noktası o zaman?
Araştırmacı: Evet işaretleyelim. (Sema noktayı işaretledikten sonra) Başka bir nokta daha işaretleyelim.
Sema: 2!
Araştırmacı: x' i 2 olsun, y ne olur?
Sema: Iı.. 3 fazlası 5.
Araştırmacı: 2' ye 5 noktasını işaretle bakalım. Başka bir nokta daha x' i 1 olsun.
Sema: 1' in 3 fazlası 4.
Araştırmacı: Peki x' i 0, y?
Sema: 3! Şimdiki noktayı ben işaretleyeceğim 5 ile 8.

Sema ilk sıralı ikiliden sonra kolaylıkla verilen cebirsel ilişkiye göre noktaları işaretlemiştir. Daha sonra (-1, 2), (-3, 0) ve (-4, -1) nokalarını da işaretleyerek grafiği oluşturmuştur. Sema oluşturduğu bu doğrunun $y = x + 3$ doğrusu olduğunu ifade etmiştir.

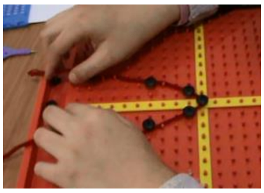


Şekil 133. Sema $y = x + 3$ grafiğini oluşturuyor

Doğrusal olmayan ilişkilerin grafiğini oluşturabilmesi için Sema' dan $y = x^2$ grafiğini çizmesi istenmiştir.

Sema: (hızlı bir şekilde) x' in karesi 2' ye 4.
Araştırmacı: (Sema noktayı işaretledikten sonra) Başka?
Sema: 3' e 9!
Araştırmacı: (Sema (3, 9) noktasını işaretledikten sonra) 1 ne ile eşlenir?
Sema: 1' in karesi 1.

Benzer şekilde kolaylıkla orijin, (-1, 1), (-2, 4) ve (-3, 9) noktalarını belirlemiş ve işaretlemiştir. Sema' dan bu ilişkiyi reel sayılar üzerinde düşünmesi ve grafik oluşturması istenmiştir. Sema ilk olarak hangi noktadan ipin geçirileceğini belirlemekte güçlük çekmiştir. Daha sonra (-2, 4) noktasından başlamış ve orijin noktasında ipi kıvırarak kolları yukarı doğru bir parabol çizebilmiştir. (-3, 9) noktası işaretlenerek grafiğin bu noktayı kapsayıp kapsamadığı sorulduğunda '*Bu boncuk için de ip devam edecek.*' şeklinde açıklayarak grafiğin kollarını yukarı doğru uzatmıştır (bkz. Şekil 134).



Şekil 134. Sema $y = x^2$ parabolünü oluşturuyor

Parabolün sol kolunu da yukarı doğru oluşturan Sema, ipin kollarını yukarı doğru asılarak '*Bunlar böyle gidecek*' şeklinde ifade etmiştir. (4, 16) ve (-4, 16) noktalarının bu kollar üzerinde olduğu tartışıldıktan sonra Sema, elde edilen bu grafiğin $y = x^2$ grafiği olduğunu ifade etmiştir. Böylece verilen bir cebirsel ilişkiyi yorumlayabildiği belirlenmiştir.

4.4.1.3. Sema' nın Öğrenme Yol Haritası

Öğretim oturumlarının geriye dönük analizleri sonucunda elde edilen bulgular Sema' nın küme, eşleme, ilişkilendirme, koordinat sisteminde temsilleri ve değişken kavramı yardımı ile temsillerine ilişkin öğrenme yol haritasını sunmuştur. Tablo 13' te Sema' nın öğrenme yol haritası gelişim süreci özet olarak sunulmuştur.

Tablo 13

Sema' nın Belirlenen Cebirsel Kavramlar İçin Öğrenme Yol Haritası

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
Küme kavramına ilişkin örnekler sunabilme	Küme kavramının sezgisel tanımını ifade edemese de günlük hayattan örnekler sunabilmiştir. Verilen örnek durumlarda elemanları belirleyebildiği gibi kendine ait örnekler de sunmuştur.
Kümenin elemanı olma ve kümenin eleman sayısı kavramlarını bilme	Kümeye 'ait olma' ve 'üyesi olma' terimleri ile kümenin elemanı olmayı kavramıştır. Kitaplık, dolap, futbol takımı gibi günlük hayattan örnekler anlamasına yardımcı olsa da somut olarak küme oluşturmakta zorlanmıştır. Verilen nesneleri bir tabla üzerinde bir araya getirerek küme oluşturma fikri elemanı olma ve eleman sayısını kavramasını sağlamıştır. Öncelikle ait olma fikrini edindiği, daha sonra eleman ve elemanı olmama kavramlarını terim olarak öğrendiği belirlenmiştir.
Küme kavramının sezgisel tanımını yapabilme	Küme kavramını örnek durumlar üzerinden, özellikle tabla üzerinde Venn şeması oluşturarak, ait olma veya elemanı olma, eleman sayısı, kümenin bir adının olması gibi alt kavramlar yardımı ile anladığını söyleyebiliriz. Kümeyi sezgisel olarak elemanların bir araya gelmesi olarak tanımlamıştır. Kümede elemanların şeklinin değişmesi veya elemanların sıralamasının değişmesi kümeyi değiştirmediğini algılamıştır. Liste yöntemi ile küme temsilini yazmada başarılı olmuş, ancak Venn şeması ile kavramı daha iyi anlamlandırdığı gözlenmiştir. Kümenin elemanları arasında ortak bir özellik olabileceği gibi istediği nesneleri bir araya getirerek de küme oluşturabileceğini kavramıştır. Ayrıca verilen bir önerme ile kümenin elemanlarının belirlenebileceğini de anlamıştır. Tek elemanlı küme kavramını da örneklendirebilmiştir.
Küme, kümenin adı, kümenin elemanları, kümenin 'elemanı olma' sembollerini bilme	Kavramsal olarak kümeyi adlandırmayı ve elemanlarını belirlemeyi oturumun başlarında kavramıştır. Ancak sembol gösterimleri örnekler incelendikten ve tanımlamalara ulaştıktan sonra öğretim adımlarında yer aldığı için daha sonra gelişmiştir. Liste yöntemi ile küme gösterimini yazabilmiştir. Elemanı olma ve elemanı değildir sembollerini kullanabilmiştir. Kabartma yazıda nokta vuruşlarını ve Latin sembollerin nasıl olduğunu bilmiştir.
Sonlu ve sonsuz küme kavramlarını açıklayabilme	Sonlu ve sonsuz kelimelerinin terim anlamlarından yola çıkarak örnekler verebilmiştir. Sezgisel olarak bu kümeleri algılamış ve kendine ait örnekler sunabilmiştir.
Evrensel küme ve altküme kavramlarını açıklayabilme	Evrensel küme ve altküme için verilen örnekleri anlamış, evrensel kümenin bağlama göre değiştiğini kavramış, elemanları belirleyebilmiştir. Ancak altkümenin her elemanının evrensel kümenin de elemanı olduğunu anlamlandırmakta zorlanmıştır. Evrensel kümeyi üst küme olarak adlandırmış ve eleman sayısı daha fazla olan küme olarak düşünmüştür. Burada güçlüğün kaynağı tablalardan olduğu düşünülerek pilot görüşmede olduğu gibi poşet yardımı ile altküme kavramı ele alınmıştır. Böylece evrensel kümeyi 'nesnelerin hepsinin olduğu küme' ve altkümeyi 'üst kümenin bazı elemanlarının olduğu küme' olarak tanımlayabilmiştir. Altkümenin her elemanının evrensel kümenin de elemanı olduğu fikrini birkaç örnekten sonra ancak kavrayabilmiştir. Ek öğretim oturumda kazanılan alt hedefler şöyle sıralanabilir: • Altküme ve evrensel küme için örnekler sunabilme • Verilen bir altküme ve evrensel küme örneklerinde bu kümelerin elemanlarını belirleyebilme • Altkümenin her elemanının evrensel kümenin elemanı olduğu, ancak evrensel kümenin her elemanının bir altkümenin elemanı olması gerekmediği fikrini açıklayabilme • Altküme ve evrensel kümeyi tanımlayabilme

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
İki kümenin elemanları arasında eşleme yapabilme	Günlük hayatta yer alan eşleme fikrine dayanan örnekleri fark edebilmiştir ve verilen örnek durumlarda eşlemeleri belirleyebilmiştir. Verilen bir eşlemenin tanımlı olduğu kümeleri belirleyebilmiştir. Verilen örnek durumda iki küme arasındaki eşlemeyi açıklayabilmiştir. Bir eşlemeden bahsedebilmek için öncelikle en az bir kümenin var olması gerektiğini fark edebilmiştir. İki kümenin elemanlarını eşlemede sembol veya doğru parçası kullanmayı tercih etmiştir. Bu tercihlerinin kümenin temsil türüne göre değiştiği belirlenmiştir. Örneğin, Venn şeması ile temsil edilen kümeler arasındaki eşleme için aşina olunan doğru parçalarından yararlanmıştır. Böylece farklı temsiller yardımıyla eşleme yapabilmektedir. Farklı temsil türlerinde verilmiş eşlemeleri (örneğin tablo yardımı ile) açıklayabilmiştir. Burada kümelerin temsil türlerinin yanında eşlemeyi göstermede tablo kullanımda tabloyu okuma, anlama ve açıklama becerileri önem arz etmiştir. Öncelikle dikey konumda verilen tablolarda eşlemeyi açıklayabilmiştir.
Kümenin kendi elemanları arasındaki ilişkiyi farklı yollarla ifade edebilme	Verilen bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi fark edebilmiştir. Ancak belirlediği ilişkiyi matematiksel dile uygun ifade etmekte güçlük yaşamıştır. Daha sonraki örnek durumlarda kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi matematiksel dile uygun olarak ifade edebilmiştir.
İki kümenin elemanları arasındaki ilişkiye göre eşleme yapabilme	İki küme arasındaki ilişkiyi anlama ve ifade etmede bu kümeler arasındaki eşlemden yararlanmıştır. Bu nedenle eşlemenin bir ilişkiye göre olabileceği fikri oluşmuştur ve bu fikre göre eşlemeyi oluşturabilmiştir.
İki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilme	Verilen örnek durumdaki iki kümeyi belirleyip, bu kümeler arasındaki ilişkiyi ifade edebilmiştir. Burada örnek durumun bağlamına dayanan ifadelere yer vermiştir. Ayrıca iki küme arasındaki eşlemelerden yararlanmıştır. İlk örneklerde yalnızca eşlemeye odaklanırken, bir kümenin kendi elemanları arasında ilişkinin var olabileceği fikrini edindikten sonra bu eşlemeye dayanan ilişkileri belirtebilmiştir. Son olarak her zaman bir kümenin elemanları arasında ilişki olmayabileceğini, her eşlemenin bir ilişkiye dayanmayacağını ifade etmiştir.
Tablo ile verilen ilişkili elemanları eşleyebilme	Tablo ile verilen belli bir ilişkiye dayalı eşlemeleri açıklayabilmiştir. Farklı temsil türlerinde bu eşlemeleri aralarındaki ilişkiye göre ifade edebilmiştir. Ayrıca verilen bir örnek durumda eşlemleri tablo yardımıyla temsil edip aralarındaki ilişkiyi yorumlayabilmiştir.
İki kümenin elemanları arasında birebir eşleme kurabilme	İki küme arasındaki birebir eşlemenin informal tanımı yapabilmiştir. Birebir eşleme örneklerini açıklayabilmiştir ve birebir eşlemeye günlük hayattan örnekler sunabilmiştir. Ancak birebir eşlemenin formal tanımını yapmakta güçlük yaşamıştır. Bu nedenle örnekler açıklanırken kümenin bir elemanını diğer kümenin yalnızca bir elemanı ile eşlediği fikri örnek durum üzerinde açık olarak ifade edilmiştir. Böylece birebir eşlemenin formal tanımını ifade edebilmiştir.
Düz çizgi kavramını bilme	Düz çizgiyi çeşitli materyaller ile temsil edebilmiştir. Ayrıca yol gibi analojilerden yararlanabilmiştir. Parmağı ile düz çizgiyi bir hat olarak belirleyebilmesine rağmen her temsil örneğinde yatay eksene paralel düz çizgiler oluşturduğu belirlenmiştir. İp ve kablo düz çizgi temsilleri için kullanılmıştır.
Düz çizgi ile doğruyu ilişkilendirebilme	Düz çizginin matematiksel kavramlardan doğruyu temsil ettiğini ifade edebilmiştir. Ancak bu durumun gerekçesini açıklayamamıştır. Çünkü doğrunun tanımını yapılandıramamıştır. Ayrıca sündürme fikrine hala sahip değildir.
Doğru kavramını açıklayabilme	İp, kablo ve anten yardımı ile doğruyu temsil edebilmiştir. Bu destek eğitim araçları ile doğruyu 'sündürmek istediğim zaman sündürebildiğim düz bir çizgi' şeklinde tanımlamıştır. Ancak tanımlamada doğrultu fikri yer almamaktadır. Ayrıca oluşturduğu tüm temsiller de yatay eksene paraleldir. Doğrultusu yatay eksenin doğrultusundan farklı olan doğru temsillerini 'yamuk' olarak nitelendirmiştir.
Doğrunun farklı gösterimlerini bilme	Doğrunun grafik gösteriminde okları betimlerken doğrunun ucu ifadesine yer vermiştir. Kabartma yazıda temsilleri incelenmiş ve örnek oluşturabilmiştir. Henüz görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerdeki temsillerine yer verilmemiştir.
Doğru parçasını düz çizgi ile ilişkilendirme	Doğru kavramının tanımından hareketle ip yardımı ile temsil edilen bir doğru parçasını sündürmeye çalışmıştır. Gergin ip parçasının uç noktalarını parmakları ile işaretlemiştir. Tanımlaması istendiğinde sündürme eylemi gerçekleşmediği için 'dar çizgi parçası' şeklinde açıklamıştır.
Doğru parçasını açıklayabilme	Doğrunun tanımının sorgulanarak tekrar doğru parçası temsilleri üzerinde fikir yürütmesi sağlanmıştır. Böylece doğru parasını 'düz çizgi parçası' şeklinde açıklamıştır.
Doğru parçası gösterimlerini bilme	Doğru parçasının uç noktaları yardımı ile adlandırıldığını algılamıştır. Kabartma yazıda gösterimlerini incelemiş ve örnek oluşturabilmiştir. Grafik gösterimini açıklayabilmiştir. Ancak her temside A ve B ile uç noktaları adlandırdığı belirlenmiştir.
Doğru ve doğru parçası kavramlarının görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için gösterimlerini bilme	Tahtadan oluşturulan doğru temsilleri ve cetvel yardımı ile temsil edilen doğru parçası kavramları görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için gösterimleri algılamasını sağlamıştır. Doğru temsilini sündürmek istemesi doğrunun tanımını kavradığı şeklinde yorumlanabilir. Doğru parçası için cetvelin uç noktalarını adlandırmak istemiştir. Kabratma yazı ve Latin gösterimlerinde doğru ve doğru parçası ifadelerini incelemiş ve kabartma yazıda örnek yazabilmiştir. Artık düz çizgide okları 'çizginin sonsuza devam ediyor' şeklinde yorumlayabilmiştir. Ayrıca doğru parçasını [AB] doğru parçasından farklı adlandırabilmiştir.
Doğru ve doğru parçası kavramlarını ilişkilendirebilme	Beyaz baston ve okul yolunun parçalanması fikirleri ile doğru parçalarının uç noktalarından birleştirme fikrini edinmiştir. Doğru parçası temsili olan ip parçaları yardımı ile sonlu sayıda doğru parçasının uç noktalarından bir araya getirilmesi ile yine bir doğru parçası elde edildiğini anlamıştır. Bir doğru üzerinde belirlenen farklı iki nokta ile doğru parçası elde edildiğini açıklayabilmiştir.

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
Doğru kavramını tanımlayabilme	Doğru bir noktalar kümesi olduğu fikrine sahip olmuştur. Düz çizginin dilediği kadar sünsürülebildiğini fark etmiştir. Buradan hareketle ok işaretlerin uç nokta olmadığını açıklayabilmiştir. Doğrunun bir doğrultusu olduğunu açıklayabilmiştir. Eğri kavramını ip yardımı ile temsil edebilmiştir. Böylece doğrultusu yatay eksene paralel olanlardan farklı doğrultuda doğruları temsil edebilmiştir.
Uzunluğun nesnelerin niteliği olduğunu bilme	Uzunluk kavramının nesneler için ölçülebilen bir nitelik olduğunu ifade etmiştir. Uzunluğun belirlenmesinde birimin önemli olduğunun farkındadır. Ancak nesnelerin uzunluğunu belirlemede iki nesneyi birbiri ile kıyaslayarak ölçmeye çalışmıştır. Birim uzunlukları uç uca ekleyerek nesnelerin uzunluğunu birim cinsinden hesaplayamamıştır.
Uzunluğu belirlemede birim tespit edebilme	Nesnelerin uzunluğunu belirlerken birim cinsinden ifade edilmesinin gerekliliği fark etmiştir. Bazı nesneleri satın alırken birime göre uzunluğun belirlenmesi gerektiğini açıklayabilmiştir. Birim uzunluktaki çubuklar yardımı ile nesnelerin uzunluğunu belirleyebilmiştir.
Standart bir uzunluk birimi belirleyebilme	Cetvel kullanırken veya bazı alışverişlerde nesnelerin uzunluğunu belirlemede standart bir birimin var olduğunu ve gerekliliğini açıklayabilmiştir. Verilen bir kablonun uzunluğunu birim uzunluktaki çubukların yanı sıra cetvel ile belirlemenin gerekliliğini ifade etmiş ve belirlemiştir.
Uzunluk niteliği için birim kavramını açıklayabilme	Cetvel üzerinde ve iğneli sayfa materyalinde birim belirlerken iki işaret arasındaki uzaklığın önemini algılayabilmiştir. Birim cinsinden uzunluğu tespit edebilmiştir.
Doğru üzerindeki noktaları reel sayılar ve/veya tamsayılar ile eşleyebilme	Doğrunun noktalar kümesi olduğunu ve sayılar kümesi ile eşlenebileceğini açıklayabilmiştir. Sayılar ile noktaları gelişigüzel eşlemiştir. Daha sonra belli bir birime göre ve belli bir kurala göre eşlenmesi gerektiğini fark etmiştir. Bu eşlemenin birebir eşleme olduğunu ifade etmiştir. Pozitif ve negatif sayıların bir doğru üzerinde nasıl konumlandırılması gerektiğini anlamıştır. 0 noktasının diğer sayılara göre konumunun belirlenmesinde güçlük yaşamıştır.
Doğruyu cetvelleyebilme	Öncelikle orijini belirleyebilmiştir. Daha sonra sayıların eşlenmesinde var olan kabulü ifade edebilmiş ve sayıların belirlenen bir birime göre noktalarla eşlenmesi gerektiğini kavramıştır. Birim uzunluğu belirlemede cetvel kullanmıştır. Pozitif ve negatif sayıların konumu düşey konumda doğru için kabulü anlayabilmiştir. Doğrultusu farklı olan doğruların da cetvellenebileceğini fark etmiştir.
Sayı doğrusunu açıklayabilme	Bir doğru üzerindeki noktaların reel sayılar ile belirli bir birime göre eşlenmesini sayı doğrusu olarak ifade etmiştir. Bu açıklamayı yaparken düz çizgi ve noktalar kümesinin sonsuz bir küme olması kavramlarını vurgulamıştır. Ayrıca bir doğru parçası üzerindeki noktaların sonsuz bir küme belirtiğinin farkındadır.
Sayı doğruları ile koordinat ekseni oluşturabilme	Sayı doğrusunun bir küme olduğunu ve elemanlarını açıklayabilmiştir. Ayrıca iğneli sayfa materyalinin çubukları yardımı ile temsil edilen sayı doğruları için elemanları belirleyebilmiş, adlandırabilmiş ve düzlemi temsil eden iğneli sayfa ile eşleyebilmiştir. İki sayı doğrusunun elemanlarını eşlemek için öncelikle sayı doğrularını paralel olarak düzleme yerleştirmiş, sırasıyla çubuk ve bant yardımıyla iki kümenin elemanlarını eşlemeye çalışmıştır. Bu eşlemenin başarılı olmaması sonucunda sayı doğrularını dik olarak kesiştirmiştir.
Eksen ve orijin kavramlarını açıklayabilme	Dik olarak kesiştirdiği sayı doğrularının kesişim noktasını sezgisel olarak orijin olduğunu ifade etmiştir. İki küme olarak sayı doğruları öncelikle *k* ve *s* olarak adlandırmıştır. Daha sonra bu sayı doğrularının *x* ve *y* olarak adlandırıldığı, apsis ve ordinat eksenleri oldukları açıklanmıştır. Bu iki eksen arasındaki eşlemeleri göstermesi istediğinde sayılar için *x*- ve *y*-eksenlerinin elemanları terimini kullanmıştır. Eksenlerde sayıların konumlandırılışının farkında olduğundan, bu fikre dayanarak bölgeler tanıtılıştır. Oluşturulan bu sisteme koordinat sistemi denildiği açıklanmıştır. Orijini başlangıçta diğer noktalardan farklı düşünmüş ve koordinatlarını belirleyememiştir.
Koordinatları verilen noktayı işaretleyebilme	Eksenler arasında eşleme yapması istendiğinde öncelikle bantlar yardımı ile çapraz eşlemeler yapmıştır. Bu eşlemeleri ayrıt etmenin ve belirlemenin güç olduğunu fark etmiştir. Böylece koordinat sisteminde eşlemelerin nasıl yapıldığı iğneli sayfa materyalinin doğru parçası temsili çubukları ile açıklanmıştır. Eşlemeleri gösteren noktalar boncuklar ile temsil edilmiştir. Birkaç uygulamadan sonra doğru parçalarını kullanmadan noktaları belirleyebilmiştir. Sezgisel olarak doğru parçaları varmış gibi öncelikle *x*-ekseninde, daha sonra *y*-ekseninde koordinatları belirleyip eşlemeleri gerçekleştirmiştir. Orijinin koordinatlarının olmadığı düşünmesine rağmen *x*- ve *y*-eksenleri için sıfır noktasını düşünerek işaretleyebilmiştir. Apsisi ya da ordinatı sıfır olan noktaları işaretlemede güçlük yaşamasına rağmen ikinci örnekten itibaren başarılı bir şekilde açıklayarak işaretlemeleri yapabilmiştir.
Sıralı ikilileri açıklayabilme	Sıralı ikililerin temsili boncuklar yardımı ile belirlenmiştir. Koordinatları belirlenen noktaların kabartma yazıda ve görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için sembol gösterimini parantezin kodunu bildiği için rahatlıkla yapabilmiştir. Bu gösterim ile ifade edilen iki küme arasındaki eşlemelerde eşlenen elemanların gösterildiği noktalara sıralı ikili denildiği açıklanmıştır. Sıralı ikililer için koordinatların yazılmasında ilk önce apsis ve daha sonra ordinatın elemanının yazıldığını fark edebilmiş ve uygulamalar yapmıştır. Sıralı ikili olarak verilen bir noktayı koordinat sisteminde gösterebilmiştir.
Koordinat sisteminde işaretlenen bir noktanın koordinatlarını belirleyebilme	İlk önce iğneli sayfa üzerinde temsil edilen koordinat sisteminde verilen bir noktanın koordinatlarını belirlemiştir. Bunun için hayali doğru parçaları ile eksenlere verilen noktadan parmağı ile doğru parçaları çizmiştir. Daha sonra eksenler ile kesiştiği noktaları işaretleyip orijinden kaç birim uzaklıkta olduğunu belirlemiştir. Böylece işaretlenen bir noktanın koordinatlarını belirlemiştir. Ayrıca sıralı ikili olarak bu noktaları yazabilmiştir. Orijinin koordinatlarını hemen ifade edebilmiştir. Apsisi ya da ordinatı sıfır olan noktaların da koordinatlarını ifade etmekte güçlük yaşamamıştır.
Eşleme yoluyla sunulmuş ilişkili iki kümeyi belirleyebilme	Farklı temsil türleri ile sunulmuş veya sadece senaryo üzerinden eşleme yoluyla ilişkisi ortaya konulan iki kümeyi ve bu kümelerin elemanlarını belirleyebilmiştir. Belirlediği elemanları eşlemek için genellikle küptaş kasa materyali yardımı ile dikey tablo oluşturmayı tercih etmiştir. Eşlemeleri yaparken tabloda ilk sütuna bağlı ikinci sütun şeklinde temsil etmiştir. Örneğin; saat kümesinin elemanlarına göre fiyat kümesinin elemanlarını yazması gibi. Verilen bir eşlemeyi Venn şeması ile temsil edilen kümelerde doğru parçaları (bant) yardımıyla veya ok sembolü kullanarak yalnızca elemanlar arasında yapmayı düşünmüştür. Ayrıca koordinat sisteminde eşlemenin temsil edildiğini açıklayabilmiştir.

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
Eksenlerin düzlemde birer kümeyi temsil ettiğinin farkında olma	Koordinat sisteminde iki kümenin elemanlarını eşleyebilmek için eksenlerin kümeleri temsil ettiğini ifade etmiştir. Kümelerin elemanlarını kabul ettiği bir birime göre eksenlerde konumlandırabilmiştir. İki kümeyi eşlerken eksenlere kümenin elemanlarına göre farklı birimler belirleyebilmiştir. Örneğin, *x*-ekseninde her iğne arasındaki uzaklık bir birim kabul edilirken, *y*-ekseninde her iğne arasındaki uzaklık beş birim kabul edilmiştir.
İlişkiye göre eksenlerin hangi kümeyi temsil ettiğine karar verebilme	Verilen kümeler için bağlama göre *x*- ve *y*-eksenleri ile temsil edeceği kümeyi belirleyebilmiştir. Bazı uygulamalarda bağımlı değişkeni *x*-ekseni ile bazı uygulamalarda ise *y*-ekseni ile temsil etmiştir. Ancak bağımsız değişkenin *x*-ekseni ile temsil edilmesinde eşlemelerin daha rahat ilişkilendirildiğini ifade etmiştir.
İlişkiye göre karşılık gelen noktaları belirleyebilme	Eksenler ile temsil ettiği iki küme arasındaki ilişkiye göre elemanların eşlenmesini sıralı ikililer ile gösterebilmiştir. Koordinat sisteminde eşlenen noktaları işaretleyebilmiştir. Bu aşamada sıralı ikililerde önce apsisi, daha sonra ordinatı belirleyerek noktaları işaretlemiştir.
Tablo ile sunulan eşlemeler yoluyla iki küme arasındaki ilişkiyi belirleyebilme	Yatay sunulmuş bir tabloyu incelerken öncelikle ilk satırdaki, daha sonra ikinci satırdaki her elemanı okumuştur. Ardından her eleman için (her sütun için) ilk önce ilk satırıdaki sonra ikinci satırdaki eşlendiği elemanı ilişkilendirerek tekrar incelemektedir.
İki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilme	İki küme arasındaki ilişkiyi başlangıçta sadece elemanları eşleme olarak düşünmektedir. Daha sonra bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi kefetmiştir, ardından iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi keşfetmiştir. Ancak henüz iki küme arasındaki ilişkiyi genelleyememiştir.
Noktaları doğru parçaları ile birleştirerek ilişkiyi grafik ile temsil edebilme	İki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi koordinat sisteminde noktaları işaretleyerek kolaylıkla temsil edebilmiştir. Nokta grafiği oluşturmakta güçlük çekmemiştir. İki küme arasındaki eşlemeyi göstermek için temsil türleri arasından seçim yapması istendiğinde her uygulamada grafik ile temsili tercih etmiştir. Verilen senaryo bağlamında kümeler arasındaki ilişkinin reel sayılar kümesi üzerinde düşünmekte güçlük yaşamamıştır. İlişkinin temsilinde nokta grafiği ya da çizgi grafiği olabileceğini belirleyebilmiştir. Ancak bu ayrımı lineer (doğrusal) ilişkiler için genellemiştir. İşaretlenen noktaları doğru parçaları (lastikler) ile birleştirerek çizgi grafiği oluşturabilmiş ve bu grafiği ip ile temsil edebilmiştir. Ayrıca sıralı ikililer kümesinin bir grafik temsili olduğunu fark edebilmiştir.
İki küme arasındaki ilişkinin farklı temsil türleri ile gösterebilme	Tablo, Venn şeması, sıralı ikililer kümesi şeklinde sunulan iki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilmektedir. Ayrıca diğer temsil türleri arasında geçişleri yapabilmektedir. Yalnızca henüz grafik temsili ile sunulan bir ilişkiyi ifade edememiştir. Ayrıca cebirsel ifade ile temsil etme hedefine henüz yer verilmemiştir. Ancak her ne kadar *x*- ve *y*-eksenleri için genelleyemese de örnekler üzerinden ilişkiyi sözel olarak ifade edebilmiştir.
İki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilme	Farklı temsil türleri ile sunulan iki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilmiştir. Nokta veya çizgi grafiği oluşturabilmiştir. Çizgi grafiği (reel sayılar kümesi üzerinde) oluşturabilmek için öncelikle bazı sıralı ikilileri işaretlemiştir. Daha sonra ip ile temsil edilen grafiği oluşturabilmiştir. Özellikle doğrusal grafikleri oluşturmada başarılı olmuştur. Sıralı ikilileri işaretledikten sonra grafiğin nasıl devam edeceğine ilişkin akıl yürütebilmiştir.
Grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiye ait noktaları tespit edebilme	Verilen bir grafik üzerindeki noktaları belirleyebilmiştir. Bu noktaları belirlerken öncelikle grafiğin eksenleri kestiği noktaları belirlemiştir. Sıralı ikilileri belirlerken önce apsisi belirlemesine rağmen grafik üzerindeki bir noktayı belirlerken öncelikle ordinatı belirlemeyi tercih etmiştir.
Grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleri ile ifade edebilme	Grafik temsili ile verilen iki küme arasındaki ilişkiyi belirlediği kritik noktalar yardımı ile sıralı ikililer olarak ifade etmiştir. Daha sonra bu eşlemeleri tablo ile gösterebilmiştir. Ayrıca bu sıralı ikililer arasındaki ilişkiyi belirleyerek iki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilmiştir.
İki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleri ile ifade edebilme	Daha önce iki küme arasındaki ilişkiyi tablo, Venn şeması ile temsiller arasında eşlemeler, sembol ile elemanları eşleme teşmil türlerini yapabilmişti. Bu hedeften sonra artık grafik ile temsil edebilmiştir. Temsil türleri arasında geçişleri yapabilmiştir. Yalnızca cebirsel ifade ile temsil edememiştir. Bunun yerine örnek noktalar üzerinden artma, azalma ya da katı olma şeklinde sözel ifadeleri tercih etmiştir.
Değişken kavramını kendi ifadeleri ile açıklayabilme	Cinsiyet ve yaş kümeleri örneklerinde değişkenin evrensel kümenin her elemanını temsil ettiğini algılayabilmiştir. Sayı doğrusu üzerindeki noktaların bir boncuk ile temsil edilmesi ile değişkenin bir sembol olduğu fark etmiştir. Değişken ve sabit kavramlarını açıklayabilmiştir. Değişkeni sayı doğrusu örneği üzerinden tamsayılar kümesinin elemanlarını temsil eden sembol olarak açıklamıştır. Değişkeni harf ile temsil edebilmiş ve Braille yazı kodunu bildiğini belirtmiştir.
Bağımlı ve bağımsız değişkenleri farklı harflerle temsil edebilme	İki küme arasındaki ilişkiyi belirlerken bu kümelerin elemanlarını temsil edecek olan değişkenleri *x* ve *y* olarak ifade edebilmiştir. Sezgisel ya da tahmini olarak Venn şeması ile verilen iki kümenin elemanlarını temsil edecek değişkenleri belirlerken *x* ve *y* olarak atamıştır.
Bağımlı, bağımsız değişken kavramlarını açıklayabilme	Verilen kümeler arasındaki ilişkiden yola çıkarak sezgisel olarak bir kümenin elemanlarındaki değişime göre diğer kümenin elemanları ile eşlendiğini açıklamıştır. Bağımlı de bağımsız değişken kavramları terim olarak belirtilmiştir.

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
Bir ilişkinin verildiği gösterim biçimindeki bağımlı ve bağımsız değişkeni tespit edebilme	Farklı temsil biçimleri ile sunulan kümeler veya eşleme temsilleri için bağımlı ve bağımsız değişkeni belirleyebilmiştir. Bu değişkenleri farklı harfler ile gösterimlerini yapabilmiştir. İlk örnek durumlarda kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi ifade etse de daha sonra bir kümenin elemanlarındaki değişimi diğer kümenin elemanlarındaki değişim ile ilişkilendirebilmiştir.
İki küme arasındaki eşlemeye dayanarak bağımlı ve bağımsız değişkenler ile ilişkiyi ifade edebilme	Öncelikle iki küme arasındaki ilişkiyi (bağımsız) değişken ile ifade etmiştir. İlk örneklere önce artma veya azalma ilişkisi belirlemeye çalışmıştır. Daha sonraki örnekler durumlarda kat ilişkisini fark etse de kuvvet ilişkisini ilk örnek durumda belirleyememiştir. Bağımlı ve bağımsız değişkene göre iki küme arasındaki ilişkiyi sözlü olarak açıklayabilmiştir. Ancak henüz cebirsel olarak temsil edememiştir.
Bağımlı ve bağımsız değişkenler ile cebirsel bağıntılar yazabilme	Cebirsel bağıntıları ifade etmede sözlü olarak açıklayabilirken, *x* ve *y* gibi farklı iki değişken ile bir bağıntı yazamamıştır. Örnek durumların artırılması ile belirlediği cebirsel ilişkiyi bağımsız değişken ile yazabilmiştir. Ancak bir bağıntı olarak ifade etmesi grafik temsilleri üzerinde çalışırken gerçekleşmiştir. Bu süreçte bağıntıyı yazmakta veya ilişkiyi belirlemekte güçlük yaşamasının aritmetik işlemlerindeki önbilgi eksikliğinden kaynaklığı belirlenmiştir.
Cebirsel temsil ile grafik temsili arasında geçişleri yapabilme	Verilen bir cebirsel temsil için ilişkiyi gösteren sıralı ikililerden ilk temsili belirlemekte güçlük yaşamıştır. Ancak bir sıralı ikili örneğinden sonra birkaç noktayı işaretleyerek grafik oluşturmada güçlük çekmemiştir. Grafik temsili verilen bir ilişki için cebirsel temsil etmede yaşadığı güçlükler de dikkate alındığında, bu güçlüklerin aritmetik bilgisindeki önbilgi eksikliklerinden kaynaklandığı belirlenmiştir.

4.4.2. Mete' nin Cebirsel Düşünme Süreçleri ve Öğrenme Yol Haritası

Bu bölümde Mete' nin önbilgilerini belirlemek için gerçekleştirilen ön görüşme ve öğretim oturumlarındaki klinik görüşmelerden elde edilen bulgular yer almaktadır. Bulgular Mete' nin öğrenme yol haritasının belirlenmesine ışık tutacak şekilde öğretim oturumlarına göre ayrı ayrı analiz edilmiş ve her bir hedef için onun öğrenme süreçleri ile ilgili genel durumu ortaya konulmuştur. Ayrıca Mete için öğrenme yol haritasının yer aldığı Tablo 14' te yer verilmektedir.

4.4.2.1. Mete' nin Önbilgilerine İlişkin Bulgular

Mete matematik dersleri için öğrenim gördüğü ortaöğretim kurumunda sunulan destek eğitim hizmetinin yanı sıra özel eğitim kurumunda bireysel eğitim hizmeti almaktadır. Bu derslerde kabartma yazı tablet-kalemi ve zaman zaman küptaş kasa materyalini kullandıkları belirlenmiştir. Destek eğitim uygulamalarında matematiksel kavramların sözlü olarak tekrar edildiği ve ek uygulamalara yer verilmediği, ayrıca bireyselleştirilmiş eğitim programının aktif olarak uygulanmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca Mete' nin ekran okuyucu programlar kullanmadığını ve sesli ders anlatım videoları takip etmediğini belirtmiştir.

Küme kavramına ilişkin bilgisini ve düşüncelerini paylaşması için fırsat sunulduğunda şöyle cevap vermiştir:

> *Mete: […] şimdi küme demek yani içinde elemanlar olan böyle grup şeklinde, yani sayı olabilir, harf olabilir, bunları gruplandırmaya kümelendirmek, aslında küme o anlama geliyor. Boş küme dediğimizde içinde eleman olmayanlar boş küme kabul edilebiliyor yani o şekilde. Her küme kendisinin yani altkümesi oluyor zaten boş küme o şekilde.*

Mete' nin ifadesinden küme kavramını elemanların bir araya gelerek oluşturduğu topluluk fikrine sahip olduğu söylenebilir. Boş küme ve altküme kavramları için ezbere ifadelere yer verdiği açıklamada yetersiz kaldığı belirlenmiştir. İki kümenin elemalarını eşlemek ve ilişkilendirmek için yöneltilen sorulara '*Yani eşlemek fonksiyon falan gibiyse, bu konuyu sınıfta anlatıldı ama bana işlenmedi geçen sene*.' şeklinde ifade etmiştir. Benzer şekilde yalnızca ezberlenmiş ilgilere dayanan bir diğer açıklama doğru ve doğru parçası kavramlarının tanımı için '*Doğru ve doğru parçası şimdi başlangıç ve sonu belli, başlangıcı belli sonu belli olmayan galiba doğru diye hatırlıyorum veya ışın da olabilir karıştırıyor olabilirim.* […] *O ışın galiba, o zaman başı ve sonu belli olan doğru olabilir. Doğru parçası* *da yani bir kısa parça galiba tam bilmiyorum ama doğru olarak.*' şeklinde açığa çıkmıştır. Mete' nin doğru ve ışın kavramlarına ilişkin yanılgıları olduğu belirlenmiştir. Sayı doğrusuna ilişkin önbilgileri ise '*Sol tarafta negatif sayılar var, sağ tarafta pozitif sayılar, ortası da var o şekilde.*' ifadesinden anlaşılabileceği gibi sayıların doğru üzerindeki konumları ile sınırlıdır. Koordinat sistemi ile olan çalışmaları '*Bölgeler vardı bir tek onu hatırlıyorum.*' olarak belirten Mete, değişken kavramına ilişkin sembol gösterimini bilmesine rağmen yanılgısının olduğu '*Değişken x gibi, y gibi, z gibi, t gibi harflerle gösterilen o şekilde bilinmeyen demek yani*' ifadesi ile belirlenmiştir. Tablo ve grafik inceleme üzerine daha önce çalışmaları olmadığını belirten Mete, ders kitaplarında yer aldığını ancak çizim üzerine tecrübesi olmasını ifade etmiştir.

4.4.2.2. Mete' nin Öğretim Oturumlarından Elde Edilen Bulgular

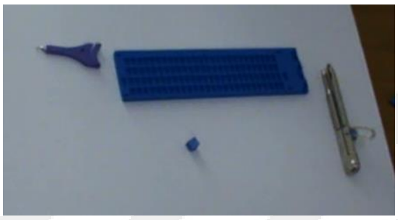
4.4.2.2.1. Küme Kavramının İncelenmesi

Mete' nin önbilgilerinde küme kavramı 'nesnelerin bir araya gelerek grup oluşturması' şeklinde yer aldığı bilinmekteydi. Bu nedenle Mete' den öncelikle küme örnekleri sunması ve bu örneklerde elemanları belirlemesi beklenmiştir.

Mete: Yani böyle belli şeyleri gruplandırmak, bir grup içerisine almak gibi çağrışım yapıyor. Yani mesela diyelim ki biraz geniş bir örnek olsun, reel sayılar kümesi dersek sonsuza kadar da devam edebiliyor, sonsuzluk işareti olması gerekiyor sonunda yani birkaç tane örnek verdikten sonra.
Araştırmacı: Güzel. Günlük hayatımızdan örnek verebilir misin?
Mete: Günlük hayatımızdan mesela insanlar da küme aslında [...] Başka, ağaçlar kümesi mesela.
Araştırmacı: Ağaçlar kümesi. Takım tutuyor musun?
Mete: Evet
Araştırmacı: Tuttuğun takım hangisi?
Mete: Fenerbahçe
Araştırmacı: Peki Fenerbahçe' nin oyuncularını düşünecek olursak bir küme oluşturur mu?
Mete: Hım yani şöyle aynı gruptan bir şeyse öyle çağrışım yapıyor, grup küme oluşturur.
Araştırmacı: Peki bu takım oyuncularının her biri bu küme için ne ifade eder?
Mete: Eleman.

Mete' nin küme kavramını liste yöntemi ile temsil ettiğini söyleyebiliriz. Ayrıca 'nesnelerin bir araya gelerek oluşturduğu grup' şeklinde küme tanımını yapmıştır. Bu gruba dahil olan nesneleri de eleman olarak adlandırmıştır. Ayrıca mutfak dolapları, kitaplık ve müzik seti gibi nesnelerin birer küme oluşturduğunu ifade edebilmiş, '*Mesela Edebiyat, Türk Dili*

Edebiyatı kitapları, o küme oluyor. Matematik kümesi mesela […] hoparlör, CD hepsi birer elemandır […] ' örneğinde olduğu gibi bu kümelerin elemanlarını belirlemiş ve kümeleri adlandırmayı denemiştir. Mete' den verilen nesneleri kullanarak kümeyi temsil eden tabla yardımı ile dilediği gibi kümeler oluşturması istenmiştir. Verilen nesneleri adlarını söyleyerek inceleyen Mete, seçtiği nesneler ile küme oluşturmaya başlamıştır. Ardından '*İstediklerimi seçerek, tabi ki (Kalem, tablet, rulet tablanın üzerine bırakır). Sayı var mı?*' sorusunu yönelten Mete küptaşı da tablaya bırakarak ilk kümeyi oluşturmuştur (bkz. Şekil 135).



Şekil 135. Mete' nin oluşturduğu küme örneği

Araştırmacı: Bu kümeyi oluşturmanda ya da bu nesneleri seçmenin bir gerekçesi var mı?
Mete: (cetvel, gönye, iletki nesnelerini işaret eder) Ölçüm yapmaya yarayan araçları seçmedim. Diğer çizim veya yazı için gerekli araçları seçtim.
Araştırmacı: Peki böyle bir ayrıma gidip çizim ve diğerleri şeklinde bir özellik yüklemenin gerekçesi var mı? Yoksa canın mı böyle istedi?
Mete: Gerekçesi var. Hani şöyle düşündüm, yazı ve çizim için araçlar bunlar, daha çok kabartma yazı için olan araçları seçtim. Geometride kullanılan araçları seçmedim.

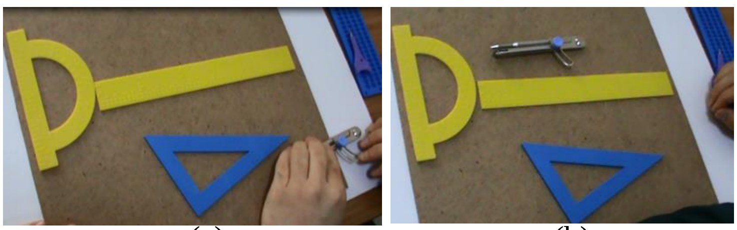
Mete küme oluştururken nesneler arasında ortak bir özelliğe göre tablaya yerleştirmiştir. Küme kavramına ilişkin dikkat ettiği diğer unsurları belirlemek için oluşturduğu kümeyi tanımlaması istenmiştir:

Mete: Şimdi buna başta bir küme diyoruz, bu karton üzerinde hepsi bir küme. İçinde elemanlarımızı sayabiliriz. Kabartma kalemimiz var Braille kalem, sonra mini tabletimiz var, çizim yaptığımız ruletimiz var ve bir adet küptaşımız var.
Araştırmacı: Peki şimdi bir kümemiz var dedin. Buna bir ad verir misin?
Mete: Buna Braille kümesi derim.
Araştırmacı: Braille kümesi var ve içerisindeki nesneleri saydın. Bu nesneler bu Braille kümesi için birer nedir?
Mete: Elemandır.
Araştırmacı: Peki kümemiz kaç elemanlı bir kümedir?
Mete: Hemen bakalım. Dört elemanlı bir küme (elleriyle dokunarak sayar)

Mete kümeyi açıklarken kümeye dahil olan nesneleri saymıştır. Belirli bir özelliğe göre gruplandırdığı küme için Braille kümesi olarak adlandırmış, kümenin elemanı olma durumunu algılamış ve eleman sayısını belirleyebilmiştir. Küme temsilleri için liste yöntemine ilişkin Mete' nin önbilgilerini belirlemek ve kavramı yapılandırmak için görüşmeye kabartma yazı tablet ve kalemi kullanmasını isteyerek devam edilmiştir. Mete' den oluşturduğu küme için bir liste oluşturması istenmiştir.

Mete: Liste olarak içindeki elemanları yazabilirim. Braille temsil eden B harfini koyuyoruz. Büyük harfle B yazıyorum.
Araştırmacı: Neden büyük harfle yazıyoruz?
Mete: Çünkü kümeyi belirttiği için büyük harf gerekiyor. Tabi bu da bir özel kümedir. Braille-in B-sini koyuyoruz eşittir diyoruz, küme parantezi açıyoruz. [...] 1-2-6 ve 3-4-5 ile kapatıyoruz.

Mete kümeyi adlandırmış ve büyük harf ile yazmış, eşit sembolünü ve küme parantezlerini kullanmış, kümenin elemanlarını sıralamıştır. Ancak elemanlar arasına virgül koymadan listelemiştir. Bu durum 'mısır unu' örneğinde olduğu gibi karışıklıklara sebep olacağı açıklanarak virgül koyması gerektiği şeklinde açıklanmıştır. Mete kabartma yazıda 'küme parantezi' yazabildiği için yalnızca kodlar tekrarlanmış ve kabartma yazı örneği sunulmuştur. Ardından görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı küme parantezi sembolleri iğneli sayfa materyalinde dokunması sağlanmış ve semboller betimlenmiştir. Küme açma parantezini inceledikten sonra kapatma parantezinin konumunu kendisi ifade etmiştir. Mete küme kavamı ve alt kavramlar için diğer örnek uygulamalarda da başarılı olduğundan, altküme kavramı için ikinci tabla temsili de sunulmuştur. Verilen nesneleri iç içe yerleştirilmiş küme temsillerine dilediği gibi yerleştirmesi istendiğinde, Mete ilk önce Şekil 136, (a)' da olduğu gibi pergeli iki kümenin sınırının üzerine yerleştirmiştir. Pergelin hangi kümenin elemanı olduğu sorulduğunda ise '*Yani evet böyle omadı (pergeli altkümeye yerleştirip) böyle olabilir galiba?'* ifadesi ile Şekil 136, (b)' deki gibi kümeleri oluşturmuştur.



(a) (b)

Şekil 136. Mete' nin altküme örnekleri

Mete, büyük tabla ile temsil edilen kümeyi E (evrensel) kümesi olarak kabul etmiş ve küçük tabla ile temsil edilen kümeyi A kümesi olarak adlandırmıştır. E ve A kümeleri arasındaki ilişki sorgulandığında ise Mete yeniden E ve A kümelerinin hangi bölgeler olduğunu sormuştur. İki küme arasında bir sınır olduğu düşünülerek yeniden materyallere dokunması sağlanmıştır.

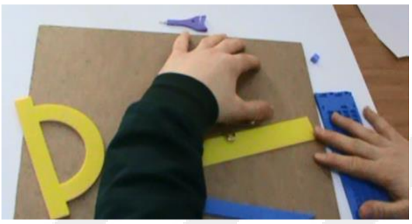
Mete: Şöyle bir ortak nokta yakaladım ama söyleyeyim mi? A kümesi E kümesinin ortak noktası ikisinde de pergel materyali var. Öyle bir şey yakaladım ama önemli mi bilmiyorum.
Araştırmacı: Tamam şimdi pergel her ikisinin de elemanı mı?
Mete: Elemanı evet.
Araştırmacı: Cetvel?
Mete: Cetvel sadece E' nin elemanı.
Araştırmacı: Neden sadece E' nin elemanı cetvel?
Mete: Çünkü A' da yoktu.
Araştırmacı: Cetveli nereye koydun bir dokunur musun?
Mete: (cetvele dokunur) İçinde ama biz E' ye koymadık şimdi.
Araştırmacı: Şu an için o zaman iletki, pergel, cetvel, gönye A kümesinin elemanı mı?
Mete: Evet.
Araştırmacı: E kümesinin elemanı mı?
Mete: Aaa.. İçinde olduğu için evet.

Mete 'kümeye dahil olma' fikri ile elemanı olmayı algılamış ve her iki kümenin de elemanlarını yanılgıları olsa da belirleyebilmiştir. A kümesinin elemanlarının aynı zamanda E kümesinin de elemanı olduğu fikrinin pekiştirilmesi ve fark kümesinin elemanlarının belirlenmesi için başka bir örnek duruma geçilmiştir. Araştırmacı altküme kavramını açıklarken yapılan tartışmayı daha anlaşılır kılabilmek için fark kümesine küptaş ve kalem elemanlarını yerleştirmiştir.

Araştırmacı: Şimdi küptaş A kümesinin elemanı mı?
Mete: A kümesi dışında, içinde değil.
Araştırmacı: Elemanı mı?
Mete: Değil.
Araştırmacı: E kümesinin elemanı mı küptaş?
Mete: E' de de değil (E kümesinine dokunur).
Araştırmacı: E kümesi neresi? Dokunduğun yer E kümesi değil mi?
Mete: Pardon burası kartondu. E kümesiymiş evet, ben masa zannettim bir an.
Araştırmacı: Tamam. Peki kalem şu an E kümesinin elemanı mı?
Mete: Kalem E kümesinin elemanı, ama A kümesinin içinde değil.
Araştırmacı: Güzel. Peki cetvel E kümesinin elemanı mıydı?
Mete: Buradaki kalem ve küptaş hariç E kümesinin ve A kümesinin elemanı.
Araştırmacı: O zaman A kümesindeki her eleman aynı zamanda E' nin de elemanı olur mu?

Mete: Evet E' nin de içinde, olur. Ama E' de ki her eleman A' nın elemanı değil. Kalem ve küptaş var mesela.

Mete sık sık kümelerin sınırlarını ve tablaların içinde bulunan nesneleri kontrol ederek ve kesik kesik cevaplar vermiş olsa da altkümenin her elemanının evrensel kümenin de elemanı olduğunu algılamıştır. Altküme ve evrensel küme kavramlarının tanımlanabilmesi için örnek uygulamalara devam edilmiştir. Bunun için yazı tableti de fark kümesine yerleştirilmiştir (bkz. Şekil 137).



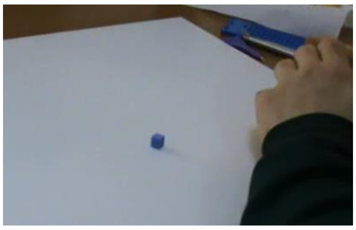
Şekil 137. Mete altküme ve evrensel küme örneklerini inceliyor

Mete' ye tabletin hangi küme(lerin) elemanı olduğu sorulduğunda '*A kümesinin elemanı değil, A kümesinin elemanı değil E kümesinin elemanı*' şeklinde cevap vermiştir. Benzer sorular için de doğru yanıtların alınmasının ardından, Mete' den bir yıl içindeki ayların kümesi E ve bahar mevsiminin aylarının kümesi B olmak üzere fikirlerini söylemesi beklenmiştir.

Mete: Bir dakika bütün ayların olduğu küme E. Ocak ayı E' nin elemanı, B' nin elemanı değil.
Araştırmacı: Peki Mart ayı?
Mete: Mart ayı E' nin ve B' nin elemanıdır.
Araştırmacı: Güzel. Bir soru daha, dünyadaki bütün araba markalarına E kümesi desek, bunun içerisinde Türkiye' ye ait olan firmaların kümesi de T kümesi olsa, şimdi bu durumda nasıl bir ilişki vardır T ile E arasında?
Mete: Yani tüm dünya diyorsunuz genel bir şey daha büyük, Türkiye sınır yani daha sınırlamışız.
Araştırmacı: Türkiye kümesinin içerisindeki her eleman aynı zamanda?
Mete: Dünya kümesinde de vardır. Ama sadece Türkiye' de üretiliyor olsa nasıl Dünya' da olabilir ki? Türkiye dünyanın içinde diye değil mi?
Araştırmacı: Dünya üzerinde üretiliyor olması yeterli. Ya da mesela daha spesifik düşünelim. Türkiye' deki tüm futbol takımlarını bir küme yapsam, bu küme F kümesi olsun. Siyah ve beyaz renkleri kullanan takımları da S kümesine alsam. İşte Beşiktaş var burada, Manisa var, Aksarayspor var. Şimdi bu S kümesi ile F kümesi arasında nasıl bir ilişki vardır?
Mete: Yine aynı ilişki Türkiye ve Dünya arasındaki gibi. Yani birinci küme daha geniş bir küme, ikinci sınırlanmış bir küme yani.

Mete altküme ve evrensel kümenin elemanları arasındaki elemanı olma, yani kapsama, ilişkisini kavrayabilmiştir. Ayrıca araba markaları ve futbol takımları örnekleri ile altküme olma, yani kapsama, kavramının yanı sıra evrensel küme tanımını algıladığını söyleyebiliriz. Tablalar ve nesneler ile verilen son örneği tekrar incelemesi istenmiştir. Var olan nesnelerin tamamının E kümesinin elemanı olduğu fikrine dayanarak bağlama göre evrensel kümenin tanımını yapılmıştır ve sembol gösterimi ifade edilmiştir. Diğer günlük hayat örnekleri için Mete' nin akıl yürütmesi beklenmiştir. Mete Braille yazı ile evrensel küme sembolünü inceledikten sonra eliyle masanın üzerine '*Görenlerde böyle mi?*' diyerek E harfi çizmeye çalışmıştır. Ancak Mete evrensel kümeyi tanımladıktan sonra, tablalar yardımı ile oluşturulan örnekte masayı evrensel küme gibi düşündüğünü '*Ya bunu başta hissedemediğim için E kümesini fazla, tam anlamamıştım. Şimdi anladım. Masa gibi algıladım yani.*' şeklinde belirtmiştir. Daha sonra futbol takımı ve bir yıldaki aylar ile oluşturulan örnek durumlar için altküme kavramı tartışılmıştır. Mete altküme ve evrensel kümeleri belirleyebilmiştir.

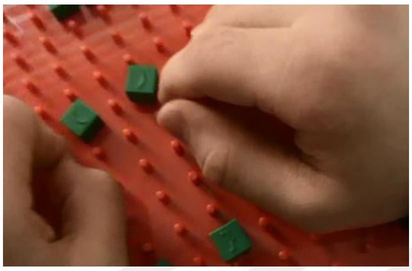
Mete' den tek elemanlı küme kavramı için dört işlem yapmaya kullanılabilir olan materyal(ler) ile bir küme oluşturması istenmiştir. Mete '*Dört işlem? Küptaş büyük ihtimal.*' diyerek küptaşı Şekil 138' deki gibi tablanın üzerine yerleştirmiştir.



Şekil 138. Mete tek elemanlı küme oluşturuyor

Mete' nin oluşturduğu bu kümeyi nasıl adlandırılacağı sorgulandığında '*Tek elemanlı kümelere ne deniyordu acaba?*' yanıtını vermiştir. Böylece bu şekilde bir elemanı olan kümelerin tek elemanlı kümeler olduğu açıklanmıştır. Ardından haftanın 's harfi' ile başlayan günlerinin kümesi tartışılmıştır. Mete bu kümenin de tek elemanlı bir küme olduğunu ifade etmiştir.

Mete daha önce liste yöntemi ile küme temsilini yazarken bazı hatalar yapmıştı. Bu nedenle Mete' den küptaş, tablet ve kalem ile oluşturulan bir kümeyi kabartma yazı tabletinde liste yöntemi ile yazması istenmiştir. Mete bu kümeyi D kümesi olarak adlandırmış ve liste yöntem ile yazmaya başlayıp '*Aralara kesinlikle virgül koyuyoruz.*' şeklinde elemanları listelerken virgül kullanılması gerektiğini belirtmiştir. Küme parantezini bu kez doğru şekilde kabartma yazı kodu ile yazabilmiştir. Ayrıca farklı parantez kullanımlarını sorgulamıştır. Böylece liste yöntemi ile küme temsilinde başarılı olduğunu söyleyebiliriz (bkz. Şekil 139)



Şekil 139. Mete farklı parantezleri inceliyor

Mete görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı parantezleri incelerken güçlük yaşamıştır. Bu durum materyalde kullanılan blokların iğneler üzerinde sabit kalmamasından kaynaklanmıştır. Mete' den tek tamsayılar kümesini yazması için liste yöntemini kullanması istenir. Mete öncelikle pozitif ve negatif olarak tek tamsayıların olduğunu ve pozitif tek tamsayıları yazmak istediğini belirtmiştir. Daha sonra bu kümeyi *T* kümesi olarak adlandırmıştır. Kümenin elemanlarını yazacağında '*Ama sonsuza kadar gidebilir ki*' ifadesini kullanmıştır. Ayrıca süslü parentezi kullanması gerektiğini '*Ok şeklinde olan parentezi yazacağım değil mi?*' şeklinde ifade etmiştir.

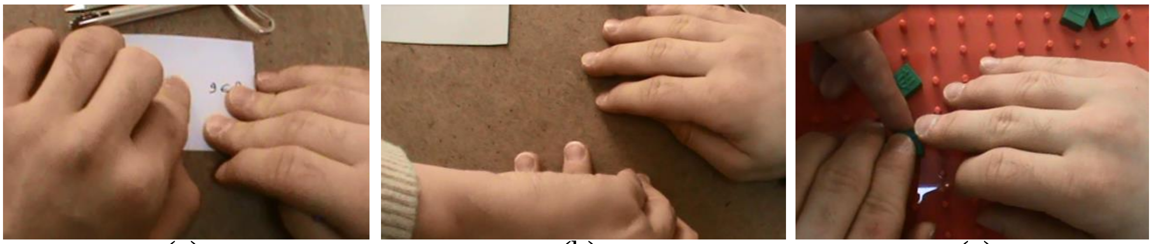
Mete: Bunu yapıyoruz ondan sonra içine 1 virgül, 3 virgül, 5 virgül, 7 virgül, 9 virgül, 11 virgül, 13 virgül, 15 virgül, 17 virgül öyle yazabiliriz.
Araştırmacı: Sonra devam ettiğinde küme parantezini ne zaman kapatacaksın?
Mete: Yani şöyle ben sonuna üç nokta koyarım. Sonra kapatırım.

Mete liste yöntemi ile sonsuz kümelerin gösterimini ifade edebilmiştir. Böylece bir kümenin elemanı olma durumunu matematiksel semboller ile gösterimi incelenmeye başlanmıştır. Bunun için 9 ve 12 tamsayılarının T kümesinin elemanı olup olmadığı sorgulanmıştır. Mete '*9 elemanıdır [...] 12 elemanı değildir, çift çünkü*' şeklinde yanıtlamıştır. Elemanı ve elemanı değildir sembollerini kabartma yazı kodları ile yazılmış kartlar yardımı ile incelemesi sağlanmıştır.

Araştırmacı: 9 elemanıdır T kümesi ya da 12 elemanı değildir T kümesi. Bunları nasıl yazarsın?
Mete: (Tablet kalemi alır) Önce kurgulayalım. Önce 12' yi mi gösterelim.

Araştırmacı: Tamam hadi! T tek tamsayılar kümesini gösteriyordu. 12, T' nin elmanı mı değil mi?
Mete: Iı.. T eşittir diyeyim (yazmadan düşünür) ama işte işareti nereye koyacağız?
Araştırmacı: Sözel olarak düşünür müsün Mete? 12, T' nin elemanı değildir diyorum. O zaman 12 elemanı değildir T diye yazabilir miyiz?
Mete: Söylüyorsak yazabiliriz o zaman.
Araştırmacı: Yazalım şimdi.
Mete: Ama 12' yi parantez içine almamız lazım.
Araştırmacı: Neden?
Mete: Sayı parantezinde olur, yani eleman parantezinde olur.

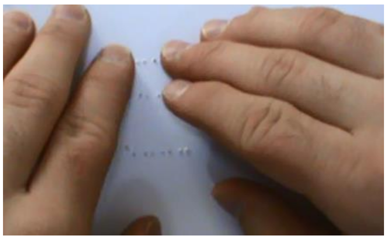
Mete matematiksel dilde elemanı değildir sembolünü kullanmayı denemiştir. Ancak kümenin liste gösterimini düşünerek güçlük yaşamıştır. Bir kümenin elemanlarının liste yönteminde küme parantezlerinin içine sıralanması Mete' nin yanılgıya düşmesine neden olmuştur. Ancak bu durum Mete' nin daha önce elemanı olma ve elemanı değildir sembollerini kullanmamasından kaynaklanmıştır. Bu nedenle kabartma yazı ile yazılmış kart örneklerini incelemesi sağlanmıştır (bkz. Şekil 140, (a)). Görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için kullanılan sembol gösterimi incelenirken Mete eli ile çizmeye çalışmış ve araştırmacının yönlendirmesini istemiştir (bkz. Şekil 140, (b)). Daha sonra iğneli sayfa materyalinde aparatlar yardımı ile hissetmesi sağlanmıştır. Aparatların sabit durması için araştırmacı parmağı ile müdahale etmiştir (bkz. Şekil 140, (c)).



(a) (b) (c)

Şekil 140. Mete elemanı olma ve elemanı değildir sembollerini inceliyor

Mete bu incelemeler sonunda görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için elemanı olma sembolünü Braille yazı tablette oluşturmak istemiştir. Tablet ve kalemi ile $\in$ sembolünü kabartma yazı noktaları ile oluşturmuştur (bkz. Şekil 141).



Şekil 141. Mete’ nin kabartma yazıda ∈ sembolü

Diğer taraftan ‘elemanı değildir’ sembolü için kabartma yazıda incelemeler yapan Mete, tamsayılar ve doğal sayılar küme gösterimlerini bildiğini ifade etmiş ve Braille yazıda kod karşılıklarını belirtmiştir.

Bir sonraki hafta Mete’ nin kavram yanılgıları ve güçlükler yaşadığı altküme ve evrensel küme kavramları tekrar ele alınmıştır. Mete tablalar yardımı ile yürütülen öğretim oturumunun sonunda bir E evrensel kümesi ve A altkümesi için ‘*Aynı zamanda altküme, evrensel kümenin elemanı değil midir?*’ sorusunu yöneltmiştir. Bu nedenle cetvel, telefon, top gibi çeşitli nesneler ve poşet yardımı ile altküme kavramı tekrar ele alınmıştır (bkz. Şekil 142). Mete önceki oturumda masayı evrense küme olarak düşündüğünü belirttiği için bu kez evrensel küme masa ile temsil edilmiştir. Poşet ise altkümeyi temsil etmiştir.

Şekil 142. Mete altküme ve evrensel küme kavramlarını inceliyor

Mete masanın evrensel kümeyi temsil ettiğini ve poşetin bu evrensel kümenin bir alt kümesi olduğunu ifade etmiştir. Poşet kümesinin evrensel kümenin bir elemanı olup olmadığı sorgulandığında ‘[…] *poşetin içindekiler nesneler, poşet elemanları ile bir nesne yani eleman değil, içindekiler evrensel kümenin de elemanı ama*’ şeklinde yanıtlamıştır. Evrensel kümenin elemanı olup poşet kümesinin elemanı olmayan birkaç örnek durumun sorgulanmasından sonra Mete, ‘*O zaman bizim ifademiz şöyle olacak. Altküme evrensel kümenin elemanı değil, yani değildir zaten ama altkümenin elemanı evrensel kümenin elemanı*’ şeklinde kavradığını belirtmiştir. Mete evrensel kümeyi ‘*tüm nesneleri gruplayan* *küme, Dünyadaki arabalar gibi, masadaki nesneler gibi*' şeklinde tanımlarken altkümeyi '*E kümesinin de elemanı olan sınır gibi düşündüğümüz eleman gruplarını ayıran küme*' şeklinde açıklamıştır.

Bir sonraki oturumda küme kavramına ilişkin Mete' nin açıklamaları '*Küme kavramı demiştik ki, belli şeyleri içine alan yani gruplayan, nesneler topluluğu daha doğru ifade, küme anlamına geliyordu. Kümeler, böyle evrensel kümemiz vardı. Bütün böyle nesneleri gruplayan nesneler topluluğuydu evrensel küme ve altküme vardı. Altküme de, evrensel kümenin içinde bulunan farklı bir gruplaşma topluluğuydu. Şöyle bir durumumuz vardı, altküme evrensel kümenin altkümesi ama elemanı değildi. Ama altkümenin içindeki elemanlar evrensel kümenin elemanıydı. O şekildeydi. Bu kümeleri yazarken de farklı yöntem kullanmıştık. Liste yöntemi, Venn şeması falan vardı.*' şeklindedir.

4.4.2.2.2. Eşleme ve İlişkilendirme Becerisinin İncelenmesi

İki kümenin elemanlarını eşleme fikri için günlük hayat örneklerinden yararlanılarak oturuma başlanmıştır. Market kasalarında ürünlerin barkotlarının bilgisayar sistemine okutulması örneğinde ürünler ve barkotları arasındaki eşleme fikri ele alınmıştır. Mete ürünlerin üzerinde barkotların olduğunu ve her ürünün kendine ait bir barkotun varlığının farkında olduğunu '*Hepsinde var, etiket gibi ama üzerinde bir şeyler yazıyordur herhalde […] Ya şöyle aynı marka çikolataların aynı barkotları ama farklı nesnelerin farklıdır yani*' şeklinde ifade etmiştir. Bir çikolata firmasının farklı çikolata ürünleri ve bu ürünlerin barkotları üzerine konuşurken bu örnekte yer alan kümeler sorgulanmıştır. Mete '*Çikolatalar bir küme, barkotları da küme mi olmalı?*' şeklinde yanıtlamıştır. Mete burada barkotlar kümesinin altküme örneğinde yer alan poşet temsiline benzetmiştir. Barkotların ürünlerin üzerindeki etiketler olmasından dolayı bu fikri ileri sürdüğü düşünülerek aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Mete: Barkotlar sınır diye düşünüyorum.
Araştırmacı: Nasıl sınır?
Mete: Hani yapmıştık ya temsil, o değil mi? Hani poşet gibi vardı ya. Poşet mi oluyor barkot burada temsilen yani?
Araştırmacı: Yok şimdi şöyle düşün
Mete: O da mı eleman oluyor?
Araştırmacı: O da ayrı bir küme oluyor. Çikolatalar bir küme, barkotlar bir küme. Fabrikadan çıkarken şu barkotları şu çikolatalara vereceğiz diyerek ne yapıyorlar?
Mete: Eşliyorlar.

Mete için kümeleri belirleme ve eşleme fikrinin daha anlamlı oluşması için başka bir örnek olarak otobüs koltukları ve koltuk numaraları örneği ele alınmıştır. Mete koltuk numaraları ile oturacağı koltuğu belirleyebildiğini, bu durumun yer alan koltuklar kümesinin ve koltuk numaraları kümesinin elemanların eşlenmesi ile mümkün olduğunu ifade edebilmiştir. Bu nedenle her tamsayının kendisinin karesi ile eşlenmesi örneği ele alınmıştır. Mete bir örnek üzerinden eşlemenin nasıl olacağını '*Mesela 17'yi seçiyorum. Ondan sonra karesi, 17 ile 17' nin çarpımı 289, yani bir kendisini yazarım diye düşünüyorum bir de çarpımı, kendisiyle çarpımı.*' şeklinde açıklamıştır. Bu eşlemeyi dilediği bir materyali kullanarak göstermesi istendiğinde, Mete kabartma yazı tabletini kullanmak istemiştir. Eşlemeleri yaparken tamsayılar kümesinin bir altkümesi ile örneklendirmesi istenmiştir.

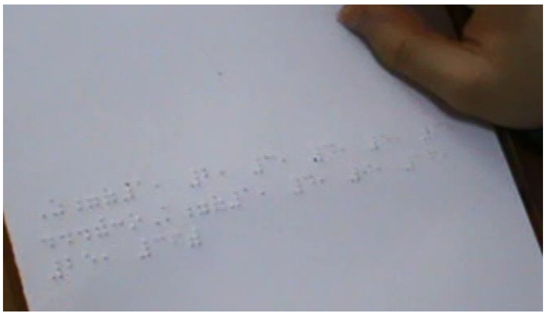
Mete: Yani 17 yazayım hadi o zaman, olur mu?
Araştırmacı: Olur. Bu senin tabletin kalemin, sen nasıl istersen.
Mete: Evet. 17 eşittir mi desem acaba? Ama eşit, eşleme yapıyoruz burada hımm eşit. Neyse yanlış da olabilir.
Araştırmacı: Tamam.
Mete: 17, direk üssü 2 yazayım mı, çarpı 17 mi? 17 çarpı 17 mi yazayım, yoksa üssü 2 mi yazayım?
Araştırmacı: Tamam üssü 2 yaz.
Mete: Eşittir 289
Araştırmacı: Ne yazdın?
Mete: Bir dakika. Öncelikle hani dediniz ya eşlemek gerekiyor, önce 17' nin kendisini yazdım. Öyle kurguladım yani belki de şey.
Araştırmacı: Tamam.
Mete: 17 eşittir dedim, yani öyle bir anlam ifade etmese de eşittir kullandım. Sonra 17^2 yazdım tekrar eşittir yazıp 289 yazdım.

Mete belirlediği bir tamsayı için bu tamsayıyı karesi ile eşlemeyi temsil etmek üzere eşit sembolünü kullanmıştır. Bu gösterimden emin olmasa da kendine ait seçtiği sembolü sorgulamadan yazmıştır. Eşit sembolünün anlamı sorgulandığında '*O zaman siz nasıl eşliyorsunuz, yani nasıl göstereceğim?*' şeklinde eşleme için kullanılacak sembolü öğrenmek istemiştir. Ok işareti ile eşlemeyi temsil edebileceği belirtilmiştir. Mete bu örnekte yer alan kümeleri, kümelerin elemanlarını ve bu kümeler arasındaki eşleme fikirlerini göz ardı etmiştir. Bu nedenle görüşmeye kümelerin sorgulanması ile devam edilmiştir:

Araştırmacı: Her tam sayı kendisinin karesiyle eşleme dediğimde, kaç tane küme var burada?
Mete: Mesela benim örneğim üzerinden mi?
Araştırmacı: Olur.
Mete: Mesela 17 bir küme mi acaba 17?
Araştırmacı: Şimdi sen bir tane örnek verdin, ama ben diyorum ki her tam sayı. Hadi her tam sayı olmasın, 6 tane eleman alalım.1, 2, 3, 4, 5, 6.

Mete: Tamam. 1, 2, 3, 4, 5, 6. Bir küme olur.
Araştırmacı: Peki bunların kareleri?
Mete: O da bir küme.
Araştırmacı: Onlar da ayrı bir küme olur değil mi? Peki bu eşlemeyi dediğim gibi ruletin var, tablet kalemin var, küptaş kasan var, nasıl gösterirsin ama kümelerle birlikte göstermeni istiyorum. Bu iki küme arasında eşleme göstermeni istiyorum.
Mete: Tamsayılar kümesi, tamsayıyı Z yaparım yani öyle galiba.
Araştırmacı: Biz burada bir alt kümesini aldık Z' nin, 1' den 6' ya kadar olan.
Mete: İşte 1' den 6' ya kadar yazarız küme içinde herhalde.
Araştırmacı: Tamam.
Mete: Sonra ok işareti mi yapıyoruz eşleme işareti? Sonra karelerini yazabiliriz yani.
Araştırmacı: Onu da ayrı bir kümeyle yazacaksın
Mete: Ayrı bir küme evet.
Araştırmacı: K kümesi mesela.
Mete: Hımm evet.
Araştırmacı: Sonra eşlemeyi nasıl yapacaksın?
Mete: İki küme arasına işareti koyarım dedim ben.
Araştırmacı: Bir yazar mısın hayalindeki şey ne?

Mete 17 tamsayısının oluşturacağı tek elemanlı kümeyi düşünememiştir. Ancak tamsayılar kümesinin bir alt kümesi için sunulan örnekte yer alan kümeleri belirleyebilmiştir. Bu iki kümeyi adlandırmış ve liste yöntemi ile doğru bir şekilde kabartma yazı tabletine yazmıştır. *Z* ve *K* kümelerini liste yöntemine uygun olarak alt alta yazmıştır. Ancak burada her bir kümenin temsilini kabartma yazıda sembol kullanımın fazla olması sebebiyle tek satıra sığmadığı için iki satır şeklinde yazabilmiştir. Mete iki kümenin liste yöntemi ile temsillerinin arasına 2-5 ve 1-3-5 kodları ile bir tane ok işareti yapmıştır (bkz. Şekil 143). Böylece iki kümenin elemanlarının eşlendiğini ifade etmiştir.



Şekil 143. Mete iki kümenin elemanlarını eşleme için temsil düşünüyor

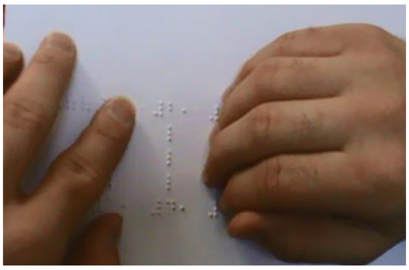
Araştırmacı: Şu an bu kümeyi bu kümeyle eşliyorum dedin ama nasıl eşliyorsun?
Mete: Eşlemedik bence.

Araştırmacı: Nasıl eşlediğin yazıyor mu orada, elemanlarını kafama göre eşleyebilirim. Senin yaptığına göre 1' i 1 ile, 2' yi 4 ile eşleyeceğimi ben anlamıyorum. Sen anlayabilir misin?
Mete: Anlayamam.
Araştırmacı: Söylememiş olsaydım, önüne bunu getirseydim, sadece ok işaretinin eşleme anlamına geldiğini bilseydin. Nasıl eşlerdin?
Mete: Bilemezdim. Ne yapacağız peki? O zaman sayılar yerine üssü 2 durumunu yazacaktık o zaman.
Araştırmacı: Yok hayır yine bilemem, belki ben her elemanı elemanın bir fazlasının karesiyle eşliyorum.
Mete: Hocam siz söyler misiniz, ben bilemedim.

Mete iki kümenin elemanlarını eşlemede yaşadığı güçlükten sonra iki kümenin elemanlarını eşlemek için nasıl bir gösterim yapması gerektiğini sormuştur. Mete' nin ileri sürdüğü fikir üzerinden devam edilmesi öğrenme yol haritası için uygun bulunmuştur. Bu nedenle yeniden *Z* ve *K* kümelerini yazması istenmiştir. Ancak bu kez küme temsillerinin tek satıra sığması için 1' den 5' e kadar tamsayıların kümesi ele alınmıştır. Mete' nin liste yöntemi ile yazdığı kümelerin elemanlarını eşlemesi için aşağıdaki gibi sorgulaması sağlanmıştır:

Araştırmacı: Şimdi elemanı eşleyeceksin değil mi, 1 nerede?
Mete: 1 burada (ℤ kümesinde 1 elemanını işaret eder)
Araştırmacı: 1' i kimle eşleyeceksin?
Mete: 1' i 1 ile.
Araştırmacı:1' i 1 ile eşlemek için bu araya bir eşleme yapmak istemez misin mesela?
Mete: Hocam bir şey sorabilir miyim?
Araştırmacı: Tabi ki.
Mete: Direk çizgi mi indirsem acaba?
Araştırmacı: Direk çizgi indireceksen ruletle arka yüzünden çizebilirsin.
Metre: Yok yok, ruletle değil diyorum Braille ile.

Mete kabartma yazı nokta vuruşları ile doğru parçaları oluturarak elemanları eşlemeyi düşünmüştür. Ancak noktaların tam olarak alt alta gelmesini istemiştir. Bunun için eli ile kümelere dokunarak eşlemesi gereken elemanları incelemiştir. Mete '*Sayıyı mı yapayım, rakam işaretini mi işaretleyeyim? Sayının olduğu kutucuğu işaretliyorum şey eşliyorum [...] Ama şöyle bir durum var mesela 16 çift haneli, 4' ü nasıl eşleyebilirim? 4' ün olduğu kutucuğa 16' nın 1' ini işaretliyorum çünkü öyle denk geliyor.*' şeklinde Braille yazı kodunun birden fazla karakter içermesinden dolayı tereddüt yaşamıştır. Mete' ye kendisinin anlayabileceği şekilde dilediği karakter kutucuğundan eşleme yapabileceği söylenmiştir (bkz. Şekil 144).



Şekil 144. Mete’ nin iki küme arasındaki eşleme temsili

Araştırmacı: Sen buradan artık eşleme yapıldığını anlayabilir misin?
Mete: Anlarım anlarım.
Araştırmacı: Şimdi böyle sıralı bir eşleme olduğu için kolay oldu, çapraz bir eşleme olsaydı?
Mete: O zaman da çapraz yaparız.
Araştırmacı: O zaman takip etmek biraz güç olabilir miydi?
Mete: Ama onu denk getirmek zor olabilir evet. Ya şöyle güzel takip ettiğimizde sıkıntı olmazdı.
Araştırmacı: Bunu peki küptaş kasada nasıl gösterirdin, eşlemeyi, ne yapardın?
Mete: Yapardım bir şekilde yapardım. Ben size şey sormak istiyorum, küptaş kasada küme gösterebiliyor muyuz, $\mathbb{Z}$ falan yazamıyoruz da?
Araştırmacı: $\mathbb{Z}$ falan yazamıyorsun ama sen kümenin ne demek olduğunu anlarsan eğer.
Mete: Biliyorum ben. Ben kendimce işaretler koyuyorum da yani yazabiliyorum
.

Mete doğru parçaları yardımıyla yaptığı eşleme için alternatif düşünmüş ve küptaş kasa materyalinde kendine ait semboller kullanarak bu eşlemeyi yapabileceğini ifade etmiştir. Mete’ nin farklı temsiller düşünmesi için yaşayabileceği güçlükler ifade edilmiştir. Ancak beklenilen akıl yürütme gerçekleşmediği için günlük hayat örnekleri ile görüşmeye devam edilmiştir. Mete’ ye oturdukları apartmanın numarası sorulmuştur.

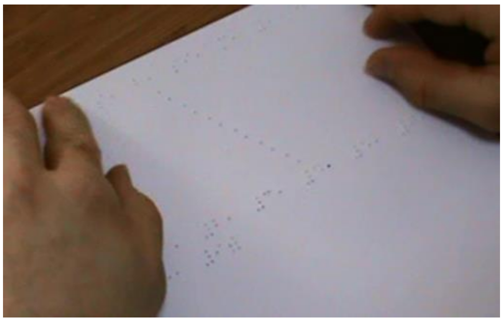
Mete: 112’ ye 7.
Araştırmacı: Peki sizin caddede başka 112 nolu apartman var mı?
Mete: Onu bilmiyorum. Yoktur büyük ihtimalle. Yani olmaz tabi ki mantıken.
Araştırmacı: Burada bir eşleme var mı?
Mete: Var tabi ki. Binayla 112 numarayı.
Araştırmacı: O zaman burada hangi kümeler var?
Mete: 112 numarası ve bina kümesi.
Araştırmacı: Binaların kümesi ve numaraların kümesi var. Peki 112’ yi ben birden fazla binayla eşleyebilir miyim?
Mete: Hayır, tek elemanlı küme.

Mete bu örnekte yalnızca kendi apartmanları ve apartman numaralarını düşünerek tek elemanlı iki kümede eşleme yapıldığını düşünmüştür. Caddede yer alan binaların ve bu binalara verilen numaraların birer küme oluşturduğu ifade edilmiştir. Ancak Mete’ nin bu fikri ileri sürmesi ve birebir eşleme kavramının yapılandırılması için okul numaraları örneği ile görüşmeye devam edilmiştir.

Araştırmacı: Peki okul numaran kaç?
Mete: 728.
Araştırmacı: 728, sizin okulda başka 728 numaralı öğrenci var mı?
Mete: Olamaz.
Araştırmacı: Yok değil mi? Peki buradaki kümeler neler?
Mete: Öğrenciler ve numaralar.
Araştırmacı: O zaman burada nasıl bir eşleme var, burada ve bina örneğinde?
Mete: Birebir mi?

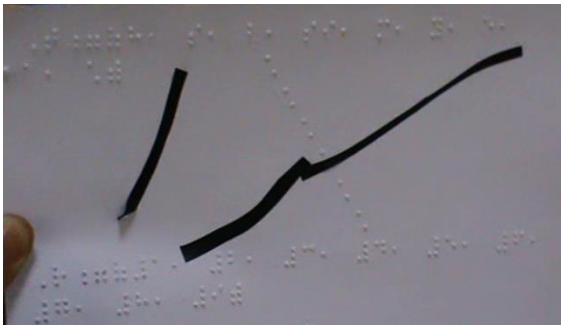
Mete okul numaraları üzerinden verilen örnekte kümeleri ve elemanlarını belirleyebildiği gibi birebir eşlemeyi de ifade edebilmiştir. Mete daha önce birebir eşlemeyi terim olarak duyduğunu ancak bu kez daha iyi algıladığını belirtmiştir.

İki küme arasındaki birebir eşlemeyi farklı temsiller kullanarak gerçekleştirmesi için televizyon kumandası ile kanalların eşlenmesi örneği sunulmuştur. Mete' ye verilen çeşitli kanalları dilediği gibi 1' den 9' a kadar kumandada yer alan numaralara yerleştirmesi istenmiştir. Burada Mete, kümeleri belirlemesi ve temsil biçimi seçmesi için serbest bırakılmıştır. Mete önce yazarak ifade etmek istemiştir. Bunun için kanalların kümesini *T* kümesi olarak adlandırmıştır. Mete kanalları kendine göre kısaltmalar kullanarak liste yöntemi ile *T* kümesine yazmıştır. Mete tek satıra yazamadığı küme için tableti açıp okumuş, bir alt satıra yazarak eşleme için daha sonra düşüneceğini belirterek tableti takıp yazmaya devam etmiştir. 1' den 9' a kadar sayıların kümesini de rakamlar kümesi olarak *R* kümesi şeklinde adlandırmıştır. Mete haber kanalı ile hangi rakamı eşleyeceğini düşünürken eşlemede güçlük yaşayacağını düşünerek '*Bir dakika (liste yöntemi ile yazdığı T kanal kümesinde haber elemanının elemanlar arasındaki sırasını sayar) 1, 2, 3, 4, 5, 6. (Sayıların kümesi R nin elemanlarını sayar) 1, 2, 3, 4, 5, 6. H ile 1 mi eşleştir.. Iıı… düz hesap 1, 2, 3, 4 diye mi acaba eşlesem?*' şeklinde akıl yürütmüştür. Mete dokunsal olarak doğru parçalarını daha iyi hissedebileceğini düşündüğü şeklide kabartma yazı nokta vuruşları ile birkaç eşleme yapmıştır. Bunun için tablet üzerindeki karakter kutucuklarını sayarak ve eşleyeceği kanal ile rakamın bulunduğu kutuları dikakate alarak hareket etmiştir.



Şekil 145. Mete’ nin TV kanalları ile rakamlar kümeleri arasındaki eşleme örneği

Mete yaptığı eşlemeyi görmek için tableti açıp kontrol etmiştir (bkz. Şekil 145). Bir diğer eşlemeyi nasıl yapacağını düşünüp hesaplamaya çalışmıştır. Ancak bu şekilde zor olacağını düşünerek bant yardımı ile eşlemeye devam etmek istemiştir. Mete’ ye nasıl bir eşleme yapacağı sorulmuş ve buna göre bantın uzunluğunu ayarlamak gerektiği söylendiğinde ‘*ben ispat değil de hani karmaşık olsa bile hissetme gücü yüksekse hissedebileceğimi düşündüğüm için karışık yapacağım*’ şeklinde cevap vermiştir. Bunun için farklı uzunluklarda hazırlanmış bant parçaları sunulmuştur. Mete ekonomi ve spor kanallarını bant yardımı ile Şekil 146’ deki gibi eşlemiştir. Ardından farklı bir yolla nasıl yapılabileceğini sorgulamıştır.



Şekil 146. Mete’ nin iki küme arasındaki elemanları eşleme temsili

Mete ile Venn şeması temsilinde kanallar ve rakamlar kümeleri oluşturup bu temsil üzerinde eşleme yapmaya karar verilmiştir. Venn şeması oluşturmak için daha önce Mete’ nin yazdığı kanallar listesi ve rakamlar kesilerek A4 kağıdına sırasıyla elemanlar alt alta gelecek şekilde yapıştırılmıştır. Mete kağıdın sol kısmına kanallar ve sağ kısmına rakamlar kümesini oluşturmak istemiştir. Elemanları eşlemek için yine bant kullanmak istemiştir. Mete öncelikle parmağı ile eşleme yapacağı elemanlar arasına sezgisel bir doğru parçası çizerek işaret etmiştir. Daha sonra araştırmacının yardımı ile bantlar yapıştırılmıştır (bkz. Şekil 147).

Şekil 147. Mete Venn şeması ile temsil edilen iki kümenin elemanlarını eşliyor

Benzer şekilde eşlemeleri tamamlayan Mete Venn şeması ile temsilin bu şekilde yeterli olup olmadığı merak etmiştir. Bunun için ip yardımı ile kümeler temsil edilmiştir (bkz. Şekil 148).

Şekil 148. Mete Venn şeması ile temsil edilen kümeleri belirliyor

Mete' nin incelemesinden sonra yapılan eşlemenin nasıl bir eşleme olduğu sorgulanmıştır. Mete eşlemenin birebir bir eşleme olduğunu ifade edebilmiştir. Mete' den kendi ifadeleri ile birebir eşlemeyi tanımlaması istendiğinde '*İki küme arasındaki bir eleman sadece bir elemanla eşlenebilir*' şeklinde açıklamıştır. Böylece iki küme arasındaki eşleme ve ilişkilendirme becerisi için farklı temsillerin kullanılması ile görüşmeye devam edilmiştir. Bunun için bir ülkenin ekonomik kalkınma verilerinin incelendiği, işsiz nüfus sayısının yıllara göre değişimi ele alınmıştır. Verilenler sesli okunurken Mete' nin not tutması için tablet ve küptaş kasa materyali sunulmuştur. Mete verilenleri yazmak için küptaş materyalini tercih etmiştir. Mete yıllara göre işsiz nüfus sayısını not alırken bu durumdaki kümeleri belirlemiş ve küptaş kasa materyalinde yazmaya çalışırken '*Eşittir mi diyeceğim ne diyeceğim küme yapamadım burada ama*' şeklinde ifade etmiştir. Öncelikle kümeleri liste yöntemi ile not tutmaya çalışmıştır. Bu nedenle nasıl yazacağını sorgulamıştır. Araştırmacı sadece durumu yeniden sesli okuyarak yardımcı olduğundan, Mete öncelikle not tutmaya karar vermiştir. Mete kasanın sol kısmına yılları not alırken sağ kısmına işsiz nüfus sayısını yazmıştır. İki verinin arasına ise bir hücre boşluk bırakmıştır. Mete işsiz nüfus sayısını not alırken '*Artmış mı? İki yüzer artmış*' şeklinde sesli düşünmüştür. Ancak elemanlar arasındaki artış miktarı ikiyüz bindir.

Araştırmacı: Bu ilişkiyi nasıl gösterirsin? Ben yıllara göre işsiz nüfus sayısının incelenmesi dediğimde ne söylersin, nasıl gösterirsin?
Mete: Yani yine mi eşleme yapacağız acaba? Birebir eşleme değil bu ama.
Araştırmacı: Neden?
Mete: Ama yıllarla sayıları eşlememiz gerekiyor, birebir eşleme oluyor.
Araştırmacı: Evet güzel. Yıllar 2000 ile başlıyor ve üç yılda bir hesaplanıyormuş. O zaman ne oluyor?
Mete: 2003, 2006,2009

Mete ilişkiyi oluşturan eşlemeyi fark etmiş ve eşlemeyi göstermek için küptaş materyalini seçmiştir. Ayrıca bu eşlemenin birebir eşleme olduğunu açıklayabilmiştir. Küptaş materyali ile not alırken işsiz nüfus sayısından sayıların sonunda yer alan sıfırları yazmamıştır. Materyalde not tutmanın güçlüğünden dolayı kendisi için hatırlayabileceği kısaltmalar kullanmıştır. Mete önce yılları yazmıştır ve daha sonra işsiz nüfus sayısını yazmaya başlamıştır. Yılları kontrol etmiş ve diğer verileri aynı şekilde alt alta yazmıştır. Bu süreçte araştırmacı ara sıra verileri tekrar ederek hatırlatmıştır. Tabloyu tamamladıktan sonra tekrar tek tek yılları ve işsiz nüfusu kontrol etmiştir. Mete' nin kontrolü sırasında bir taş yön değiştirmiştir. Araştırmacının uyarısı ile ilk veriden itibaren tekrar kontrol ederek düzeltmiştir. Bu durumdaki kümeler sorgulandığında '*Kümeler yıllar ve işsizlik sayıları*' şeklinde cevap vermiştir. Kablo ile Mete' nin oluşturduğu tablodaki kümeler Venn şeması temsili ile gösterilmiştir (Şekil 149).

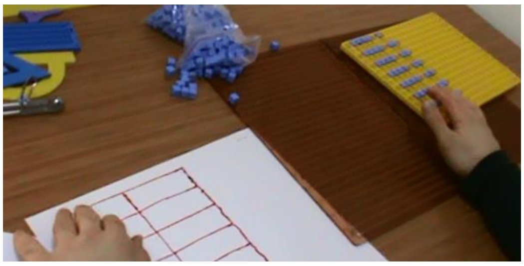
Şekil 149. Mete' nin küptaş kasa materyalinde eşleme temsili

Venn şeması ile temsil edilen yıllar kümesinin elemanları arasındaki ilişki sorgulandığında Mete '*3' er 3' er artıyor*' şeklinde cevap vermiştir. Benzer şekilde işsiz nüfus sayısı kümesi kablo yardımıyla Venn şeması ile temsil edilerek elemanları arasındaki ilişki sorgulandığında '*Burada da 200.000, 200.000 artıyor*' cevabını vermiştir. İki kümenin elemanları arasındaki ilişki sorulduğunda ise '*Birebir eşleme var*' şeklinde eşlemeyi açıklamıştır. Eşlemenin başka nasıl temsil edileceği sorulduğunda '*Venn şeması ile eşlemiş olduk şimdi, değil mi? Bantla da eşleyebilirdik [...] Liste yöntemiyle olmaz mıydı öyle? Kümeleri öyle yazsaydık*.' fikirlerini ileri sürmüştür. Mete' nin küptaş kasa materyalinde yaptığı eşlemenin tabloya benzediği vurgulanarak bir diğer temsil türü olduğundan bahsedilmiştir. Ayrıca Mete' ye cebirsel temsilin de mümkün olup olmadığı sorulmuştur. Mete '*Cebirde değişken olması gerekmiyor. Yani değişken dediğimiz bilinmeyecek bir şey, bilinmemesi gerekiyor. Ne bilinmiyor ki burada her şey biliniyor bence*.' şeklinde ifade etmiştir. Böylece değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin yanılgıları ortaya çıkmıştır.

Mete' nin farklı temsilleri kullanması ve temsiller arasında geçişi mümkün kılmak için görüşmeye 'bulut tohumlama' senaryosu ile devam edilmiştir. Hava durumunu değiştirme fikri ile tartışmanın başlamasının ardından verilen tabloyu incelemesi istenmiştir. Mete tabloyu incelemeye ilk satırdan başlamıştır. İlk satırda yağış miktarı sütununda 110, 135, 160, 185, 210 değerlerini okumuştur. Sonra ilk sütunun alt satırından başlayarak yukarıya doğru 10, 8, 6 tohumlama sayılarını okumuştur. Ardından '*bu da zaten ikişer ikişer artmış veya azalmış diyelim, 2 öyle bir şey.*' ifadesi ile incelediği son hücrenin de 2 olması gerektiğini düşünmüş ve dokunarak teyit etmiştir.

Araştırmacı: Peki burada nasıl bir ilişki var? Nasıl okursun bu tabloyu?
Mete: Burası neydi hocam? (yeniden tabloyu inceler) Tohumlama sayısı. İkişer ikişer artmış.
Araştırmacı: Evet
Mete: (diğer sütunu inceler) Öbür tarafta da 110, 25, 25 mi artmış? Evet 25, 25 artmış. Yağış miktarı mıydı burası?
Araştırmacı: Tamam peki ikisi arasında bir ilişki var mı iki küme arasında?
Mete: İlişkiden kastınız yani vardır mutlaka.
Araştırmacı: Kümeler neler burada?
Mete: Yağış miktarıyla buz atım miktarı
Araştırmacı: Güzel. Hangisi hangisine göre etkileniyor peki?
Mete: Yağış miktarı buza göre etkileniyor.
Araştırmacı: Başka nasıl gösterebilirdik bu eşlemeyi ya da ilişkiyi?
Mete: Kümeleri liste veya Venn şeması ile yapardık. Öyle eşlerdik elemanlarını.

Mete kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi fark edememiştir. Yalnızca her bir kümenin kendi elemanları arasındaki ilişkiyi açıklayabilmiştir. Verilen ipucu soruya da yetersiz yanıt vermiştir. Tabloyu incelerken de sık sık verilenleri kontrol etmesi gerekmiştir. Ayrıca Mete bir önceki durumda işsiz nüfus sayısının yıllara göre değişimi için küptaş kasada yaptığı eşlemeyi, önündeki tablo ile yapılan eşlemeye benzetmiştir (bkz. Şekil 150). İncelemesinin ardından ‘*Tablo da bir yöntem değil mi? Yani eşleme yapabiliyoruz orada da?’* sorusunu yöneltmiştir.



Şekil 150. Mete tablo ile eşlemeleri inceliyor

İki küme arasındaki ilişkinin fark edilmesi ve ifade edilmesi becerisi ve tablo ile temsiline ilişkin eksiklikler gözlemlenmiştir. Bu nedenle görüşmeye tablo ile temsil becerisi üzerine devam edilmiştir. Bunun için Mete’ ye bagaj ağırlıklarının ücretlendirilmesine ilişkin tablo sunulmuştur. Mete, ablası için ailesinin gönderdiği kargolar için benzer bir durum olduğunu söylemiştir. Mete bir eli ile üst satırı incelerken diğer eli ile alt satırı incelemiştir. Tablonun yatay konumda olduğunu ‘*bu kez soldan sağa doğru okumalıyım*’ şeklinde yorumlamıştır. Mete tabloyu incelerken aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Mete: Bagaj var, kg, ücret, TL. Sonra burada 1, 25. Ne anlama geliyor bu 1?
Araştırmacı: İşte onu sana soruyorum?
Mete: Evet. 2 ve 20. Hmm birer birer arttığında beşer beşer azalıyor.
Araştırmacı: Bir oku bakalım.
Mete: Ha yok değilmiş. Yine 25 var 3’ te.
Araştırmacı: Paketleme şekline göre fiyatlarını değiştiriyor demiştim hatırlıyor musun?
Mete: Ha evet. 4’ te 35, 5’ te de 35.
Araştırmacı: O 5 dediğin şey ne? 5’ te, 4’ te?
Mete: Ya 5 şey galiba bagaj mı?
Araştırmacı: Kg ağırlığı bagajın evet diğerleri de 25, 20, 35?
Mete: Ödeyeceği ücretler.
Araştırmacı: Bu kez tabloyu nasıl oluşturmuş konumu?
Mete: Karışık
Araştırmacı: Karışık ve yatay değil mi?
Mete: Bagaj kümesi üstte, TL kümesi altta evet.
Araştırmacı: Ve bu kümeleri ne yapmış?
Mete: Eşlemiş.
Araştırmacı: Peki standart bir artış azalış var mı?
Mete: Standart yok.

Mete tabloyu incelerken ilk önce bagaj ağırlığı satırının ilk hücresine dokunmuştur. Hemen ardından 1 kg ağırlığın eşlendiği ücret hücresine dokunmuştur. Ancak başlangıçta iki kümenin elemanları arasındaki bu eşlemeyi ve ilişkiyi belirleyememiştir. Tabloyu incelemeye devam ettiğinde bagaj ağırlığına göre ödenmesi gereken ücret fikrini algılamıştır. Ardından bagaj ağırlığı kümesinin elemanları arasındaki ilişkiyi ve ücret kümesinin elemanları arasındaki düzenli bir artma ya da azalma gibi bir ilişkinin olmadığını fark etmiş ve ifade etmiştir. Elemanların arasında belli bir kuralın ya da ilişkinin olmaması durumunu 'standart olmama' şeklinde ifade etmiştir. Bu eşlemenin birebir olmadığını ifade eden Mete' ye gerekçesi sorulduğunda aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Mete: Çünkü farklı şeyler var.
Araştırmacı: Mesela?
Mete: Ya standart bir şey yok yani.
Araştırmacı: Standart olmadığı için mi bu birebir olmuyor?
Mete: Neye göre belirlediğini açıklamıyor gibi bir şey. Mesela 6' da 40 diyor mesela 7' de 35 demiş.
Araştırmacı: Birebirlik o zaman buna mı bağlı bir şey Mete, yani bir standartın olması mı demek birebirlik? Mesela TV kanallarını eşlerken senin bir standartın var mıydı?
Mete: Ya bence yanlış düşündük, değil yani bu da bence birebir o zaman.
Araştırmacı: Ama şimdi bir şey soracağım sana ben 55 TL ödeyeceğim o zaman kaç kg bagajım var?
Mete: 55' e bakalım hemen var mıydı 55 (elleriyle kontrol eder ve okur) Var evet. Burada 12.
Araştırmacı: Başka?
Mete: Ha evet bir tanede 13 var.
Araştırmacı: Başka?
Mete: Bir tanede 16 var.
Araştırmacı: Başka?
Mete: Bir tanede 17.
Araştırmacı: Şimdi 55 TL kaç tane kg ile eşlenmiş?
Mete: Haa şey gibi bu hatırladım şu anda, bir eleman birden fazla elemana gitmiş.
Araştırmacı: O zaman bu birebir eşleme mi?
Mete: Değil.

Mete birebir eşleme kavram tanımını hatırlayamadığı için söz konusu eşlemenin belli bir kurala göre eşlemenin yapılmamasına bağlı olarak birebir olmadığını düşünmüştür. Bagaj kümesinin farklı elemanları ücret kümesinde yer alan aynı elemanlar ile eşlendiğini fark etmesi için sorular sorulmuştur. Mete bu eşlemeleri tablodan kontrol ederken birebir eşleme tanımını hatırlamış ve açıklamıştır.

Bir sonraki oturumda eşleme ve ilişkilendirmeye dair hatırladıklarını paylaşması istenmiştir. Mete kümelerin farklı temsilleri ile eşleme yapılabildiğini '*Listeleme yöntemi, tablo yöntemi, birebir eşleme yöntemi vardı galiba. Venn şeması diyebiliriz tabi ki. Tablo, Venn şeması o şekilde, listeleme yöntemi o şekilde. Eşleme yapabilmek için öncelikle kümenin elemanlarını yazıyorduk*' şeklinde ifade etmiştir. Burada Mete eşleme yapabilmek için öncelikle küme kavramını ele almıştır. Bu nedenle eşlemede küme kavramının önemi sorgulandığında

‘*Kümelere ihtiyacımız var. Küme arasındaki ilişki kurma gibi bir anlama geliyordu.*’ cevabını vermiştir. Ardından daha önce birebir eşleme tanımında yanılgı yaşıyan Mete’ ye birebir eşleme kavramı sorulmuştur. Mete birebir eşlemeyi ‘*Birebir eşlemede bir kümedeki elemanı sadece diğer kümedeki bir elemanla eşleyebiliriz durumuydu*.’ şeklinde açıklamıştır.

4.4.2.2.3. Doğru ve Doğru Parçası Kavramlarının İncelenmesi

Doğru ve doğru parçasına ilişkin kavram yanılgıları olan Mete ile düz çizgi temsili üzerine görüşmeye başlanmıştır. Mete araba ya da tren ile seyahat ederken düz bir hat üzerinde hareket ettiklerini hissedebildiğini söylemiştir. Mete hissettiği bu düz hattı Şekil 151’ de görülebileceği gibi eli ile masanın üzerine hayali bir çizgi çizerek temsil etmiştir. Mete düz çizgi çizerken ‘*Şu kadar yeterli galiba (düşey eksende yukarıdan aşağıya doğru işaret ve başparmağı ile kalemle çizer gibi düz bir çizgi temsili yapar) şöyle bir düz çizgi çizerdim*.’ şeklinde açıklamıştır.

Şekil 151. Mete’ nin düz çizgi temsili

Mete’ den kendisine sunulan kablo ile düz bir çizgiyi temsil etmesi istenmiştir. Mete kabloyu bir ucundan başlayarak kolu ile uzatıp düz bir çizgi halinde masanın üzerinde göstermiştir. Mete kablonun bu şekilde uzayıp gittiğini göstermek için kolu ile daha fazla uzanarak anlatmıştır (bkz. Şekil 152). Daha sonra Mete’ ye bir ip verilmiştir. Mete tekrar sağ eli ile ipin bir ucunu tutarken sol kolu ile uzanarak ipi sündürmüştür (bkz. Şekil 152). Mete’ ye ipi sündürmek istediği her an sündürme işleminin devam edip edilmeyeceği sorulduğunda, ipi asılarak sündürmeye devam etmiş ve ‘*evet istediğim kadar sündürüyorum*’ yanıtını vermiştir. Mete’ ye sündürme işinin istenildiği kadar devam edeceği söylendiğinde ‘*Buna galiba doğru diyoruz*’ fikrini ileri sürmüştür.

Şekil 152. Mete’ nin kablo ve ip ile düz çizgi temsili

Mete önbilgilerin tespiti görüşmesinde ışın ile doğru kavramını ayırt edemediği için ip ve kablo temsilinde de bu duruma dikkat edilmiştir. Mete her iki materyalde de sağ elini sabit tutarak sol eli ile sündürmüştür. Kavram yanılgısının devam etmemesi için Mete’ ye radyo anteni verilmiştir. Mete radyo antenini Şekil 153’ deki gibi düz bir çizgi şeklinde tutmuştur.

Şekil 153. Mete’ nin anten ile doğru temsili

Antenin her iki ucundan da istediği kadar sündürülebileceğini düşünmesi istenmiştir. Mete anteni sonuna kadar sündürmüştür. Bu işlemin istenildiği kadar devam ettiğini ve bunu temsilen antenin uçlarındaki boncukların yer aldığını düşünmesi istenmiştir. Mete’ ye bu şartlar altında antenin neyi temsil ettiği sorulmuştur:

Mete: Doğru. Daha doğrusu bu doğru parçası oldu aslında.
Araştırmacı: Peki bahsettiğimiz şartlar altında neyi temsil ediyor?
Mete: Doğru.

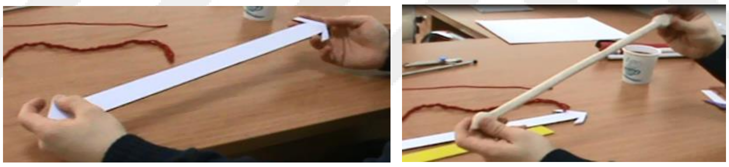
Mete somut bir nesne olarak antenin bir doğru parçası temsili olduğunu, ancak sündürme işlemi devam ettiği düşünüldüğünde doğru temsili olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle anten uçlarından sündürülmeden masaya bırakılmış ve bir doğru parçası temsili olduğu belirtilmiştir (bkz. Şekil 154).

Şekil 154. Mete’ nin anten ile doğru parçası temsili

Mete' nin doğru parçası temsilinden sonra yanında bulunan beyaz bastonu incelemesi istenmiştir. Mete beyaz bastonun katlanmış her bir parçasının bir doğru parçası temsili olduğunu söylemiştir. Beyaz bastonu açtığında temsil ettiği kavram sorgulandığında 'D*oğru parçaları birleşimi, doğru mu olur? Yok doğru parçası birleştiği zaman yine bir doğru parçası oluşturur*.' şeklinde akıl yürütmüştür (bkz. Şekil 155).

Şekil 155. Beyaz baston ile doğru parçası temsili

Mete' ye görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için doğrunun nasıl çizildiği sorulduğunda '*Yani düz bir çizgi olarak biliyorum ama*' yanıtını vermiştir. Doğru temsili için Mete' ye tahtadan yapılmış materyaller sunulmuştur (bkz. Şekil 156).

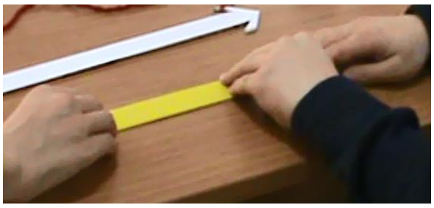


Şekil 156. Mete tahta materyalden doğru temsilini inceliyor

Mete tahta materyale dokunduğunda '*Ok işareti*' diyerek betimlemiştir. Bunun üzerine görüşme aşağıdaki gibi devam etmiştir:

Araştırmacı: Ok işareti var. Bu ok işareti ne anlama geliyor biliyor musun?
Mete: Başlangıç ve sonu belli mi acaba?
Araştırmacı: Belli mi, yoksa ok olduğuna göre sağdan ve soldan istediğimiz kadar..
Mete: Ok olduğuna göre haa pardon uzatabiliriz!
Araştırmacı: Sündürebiliriz demek oluyor. O yüzden biz bunu nasıl düşünüyoruz?
Mete: Doğru!

Mete doğru temsillerini inceledikten sonra artık doğru kavramı ve gösterimi için bir fikir sahibi olmuştur. Kavram tanımları tartışılmadan önce Mete, doğru parçası kavramını da ileri sürdüğü için doğru parçası temsili ele alınmıştır. Doğru parçası temsili için cetvelin ölçeksiz yüzeyi kullanılmıştır (bkz. Şekil 157).



Şekil 157. Mete doğru parçası temsilini inceliyor

Mete doğruyu incelerken ‘başlangıç ve sonu belli’ ifadesini kullanmıştı. Doğru parçası temsili sunulduğunda bu fikrini tekrar ifade etmiştir:

Araştırmacı: Bunu istediğim kadar sündüreyim, sünmez çünkü uç noktaları var.
Mete: Tabi ki. Başlangıcı ve sonu belli!
Araştırmacı: Evet uç noktaları varsa biz buna ne diyoruz?
Mete: Doğru parçası diyoruz.

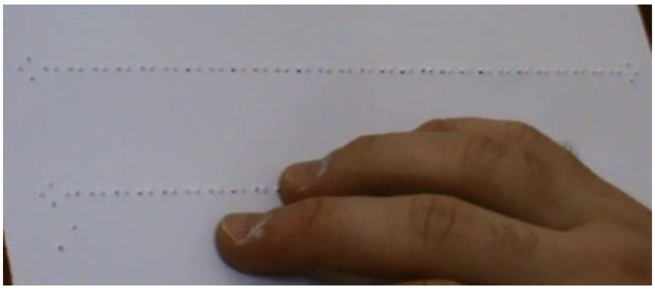
Doğru parçası için uç noktası fikri ileri sürülse de Mete ‘başlangıç ve son’ ifadelerini kullanmaya devam etmiştir. Doğru parçası kavramı için uç nokta ve uç noktalardan birleşimi kavramları için görüşme aşağıdaki gibi devam etmiştir:

Araştırmacı: Eve giderken yolda kendine belirteçlerin var mı? Şundan sonra ben ineceğim ya da işte şurayı geçtiğimiz zaman şuraya geliyoruz gibi.
Mete: Yani otobüs kullandığımda veya servislerde falan dönemeçleri şuradan döndüğümüzde şuraya yaklaşıyoruz, mesela döndüğümüzde otobana giriyoruz gibi şeylerde kullanabiliyorum.
Araştırmacı: O halde şöyle düşünebilir miyiz? Okulla ev arasında seyahat ederken senin kullandığın bu önemli yerleri birer nokta olarak kabul etsek. Okul bir nokta, ev diğer bir nokta, aklındaki iki ya da üç her bir önemli yere birer nokta koysak bu noktaları birleştiren doğru parçaları çizebilir miyiz?
Mete: Çizebiliriz.
Araştırmacı: O halde evinizle okul arasında yine bir ne var?
Mete: Doğru parçası var.
Araştırmacı: Evle okulun devam ettiğini düşünelim yol hala devam ediyor sizin eve geldik ama yol devam ediyor. Okula geldik ama yol devam ediyor. Düz bir çizgi olarak devam ediyor. O zaman bu bir neyi temsil eder?
Mete: Doğru!
Araştırmacı: O zaman doğrunun içerisinde farklı neler var pek çok?
Mete: Farklı noktalar var.
Araştırmacı: Farklı noktalar var değil mi doğru aslında bir ne?
Mete: Noktaları birleştirip doğru parçası haline getiriyoruz. Doğru parçalarının birleşimi hep devam etse mesela doğru oluyor.
Araştırmacı: O zaman biz doğruyu nasıl tanımlayabiliriz?
Mete: Doğruyu nasıl tanımlayabiliriz? Başlangıcı ve sonu belli olmayan noktalar kümesinin birleşimiyle oluşan düz bir çizgi.

Mete doğru parçası için uç noktaların olduğu ve sonlu sayıda doğru parçasının uç noktalarından birleşimi ile yine bir doğru parçası oluştuğunu, sonsuz doğru parçası ile bir doğru elde edileceğini ifade etmiştir. Ayrıca doğruyu noktalar kümesi şeklinde ifade edebilmiştir. Mete doğru temsili olarak masanın üzerine düz bir çizgi çizmiş ve çizginin devam ettiği izlenimi vermek için yine kollarını masa boyunca uzatmıştır. Ardından doğru parçasını tanımlaması istenmiştir:

Mete: Başlangıcı sonu belli olan, noktalar birleşimiyle oluşan yine böyle düşünüyorum düz bir çizgi.
Araştırmacı: Peki biz doğru parçalarının bu uç noktalarına senin deyiminle başlangıç ve bitiş noktalarına, isim verebildiğimizi biliyor musun?
Mete: İsim veririz mutlaka.
Araştırmacı: Şimdi başlangıç noktasına A, bitim noktasına B dediğimizi düşünelim. Biz doğru parçasını isimlendirirken…
Mete: AB mi?

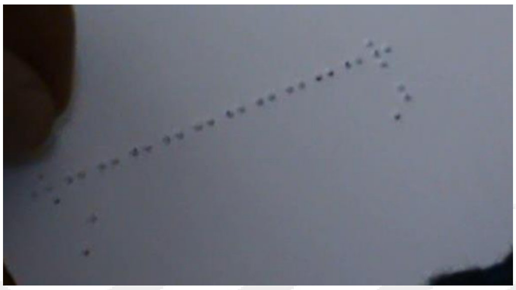
Mete doğru parçasını tanımlarken eli ile düz bir çizgi parçası çizerek temsil etmiştir. Ardından bir doğru parçasının nasıl adlandırıldığı açıklanmıştır. Daha sonra Braille yazıda kodları söylenerek doğru parçasının gösterimi tablette yazması sağlanmıştır. Ayrıca doğru ve doğru parçasını kabartma yazıda nasıl çizeceği sorulduğunda '*Braille tabletin gereğiyle çizmem gerekiyor. Satır sonuna kadar doğru olacak. Doğru parçası daha kısa olacak.*' fikrini ileri sürmüştür. Doğru ve doğru parçasını uzunluğuna göre ayırt etme fikri sorgulandığında '*ok yapacağım tahta çubuktaki gibi*' yanıtını vermiştir. Mete' nin çizdiği doğru parçalarını da adlandırması istenmiştir. Mete doğru paçasının uç noktalarını *A* ve *B* olarak adlandırmıştır. Ancak Mete doğru parçasına da ok işaretleri çizmiştir (bkz. Şekil 158).



Şekil 158. Mete' nin kabartma yazıda doğru ve doğru parçası temsili

Araştırmacı: Ne anlama gelir ok işareti?
Mete: Yanlış, hata yaptık. Doğru anlamına gelir.
Araştırmacı: Doğru için kullanıyoruz ama ne anlama geliyordu?
Mete: Haa çekiştirebileceğimiz, sündüreceğimiz demek!

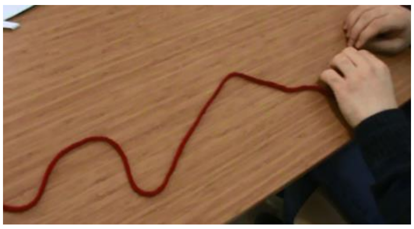
Doğru ve ok işaretlerinin anlamını sorguladıktan sonra Mete yeniden doğru parçası çizmek istemiştir. Mete bu kez doğru parçası temsilinde uç noktaları göstermesi için kısa çubuklar çizmiştir. Ancak çubuklardan sonra tekrar bir karater bastığı için görsel olarak ok işaretine benzeyen bir şekil oluşmuştur (bkz. Şekil 159). Mete ile kısa çubukları ya da son karakteri çizmeme kararı alınmıştır. Mete parmağı ile baskı uygulayarak fazla noktaları silmiştir. Doğru parçasını da [AB] olarak adlandırmıştır.



Şekil 159. Mete' nin kabartma yazıda doğru parçası temsili

Mete' ye doğruyu nasıl adlandıracağı sorulduğunda, Mete doğru parçasında olduğunda gibi iki nokta belirleyerek adlandıracağını ifade etmiştir. Doğrunun küçük harfler ile adlandırıldığı belirtildiğinde ise 'ab' şeklinde adlandırılacağını düşünmüştür. Genellikle *l* ve *m* gibi harflerle adlandırıldığı söylendiğinde tabletinde yer alan doğruyu 'lm' olarak adlandırmıştır. Ardından doğru üzerinde pek çok nokta ikilisi seçilebileceği açıklanarak, doğrunun büyük harfler ile $\overleftrightarrow{AB}$ veya tek küçük harf ile adlandırılabileceği açıklanmıştır. Mete çizdiği doğruyu *l* doğrusu olarak adlandırmıştır.

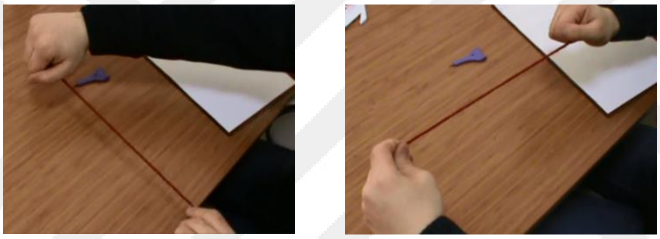
Doğru ve doğru parçasını kavrayan Mete' ye eğriyi nasıl temsil edeceği sorulmuş ve temsil için ip verilmiştir. Mete '*Tabi. Eğri? (düşünür) Yani doğru olmayan demek. Zikzaklı bir şekilde. Şöyle (ip üzerinde gösterir), dağlar da zikzak zaten. Mesela düz değil yani.*' ifadesi ile açıklamıştır. Şekil 160' ta görüldüğü gibi eğri temsilini oluşturmuştur.



Şekil 160. Mete' nin ip ile eğri temsili

Mete oluşturduğu eğriyi dağ ile tasvir etmiştir. Bu dağlar arasında akan bir nehrin oluşturduğu şekil sorgulandığında '*eğri*' yanıtını vermiştir. Ardından aşağıdaki tartışma gerçekleşmiştir:

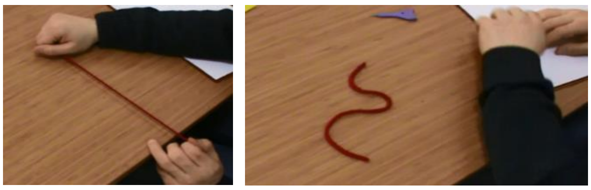
Mete: Ama ben bir şeyi merak ediyorum. Çapraz şekiller, çapraz bir çizgi eğri olabilir mi? Mesela düz değil ama şöyle çapraz indi diyelim (eli ile yatay eksene yaklaşık 45 derece açıya sahip çizgi çizer), eğri olur mu?
Araştırmacı: Burada bir ip var. Bu iple istediğin şekli bana gösterebilir misin?
Mete: Şöyle mesela, şöyle çapraz tutuyorum, eğri midir? (bkz. Şekil 161, (a))
Araştırmacı: Sence?
Mete: Yani şöyle düz değil (bkz. Şekil 161, (b)). *Eğri midir?*
Araştırmacı: Doğruyu nasıl tanımladık?
Mete: Doğruyu başlangıcı ve sonu belli olmayan noktalar kümesi birleşimi olan düz çizgi.
Araştırmacı: Düz çizgi! Bu şekilde tuttuğunda bir düz çizgi mi?
Mete: Evet. (Hemen ipi düşündüğü doğrultuda tutar) (bkz. Şekil 162, (a))
Araştırmacı: O zaman bu bir neyi temsil eder?
Mete: Eğri değildir doğrudur.



(a) (b)

Şekil 161. Mete doğrultu kavramına ilişkin düşünmektedir

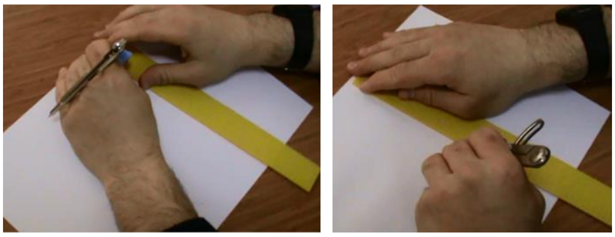
Mete doğrultusu yatay eksene paralel olmayan doğruların bir eğri olabileceğini düşünmüştür. Ancak bu fikrinden emin olmadığı için sorgulamıştır. Mete' nin oluştuduğu temsilin doğru tanımına göre incelendiğinde bir doğru olduğu fark edilmiştir. Böylece doğrunun bir doğrultusu olduğu açıklanmıştır. Dolayısı ile doğrultunun farklı olabileceğinden bahsedilmiştir. Mete tartışmanın sonunda elindeki ip ile tekrar bir eğri temsili oluşturmuş '*O zaman şöyle bir eğri yapalım*.' şeklinde açıklamıştır (bkz. Şekil 162, (b)).



(a) (b)

Şekil 162. Mete' nin doğru ve eğri temsilleri

Mete ile doğrunun doğrultusu kavramı tartışıldıktan sonra cetvel ve rulet yardımı ile doğru çizmesi istenmiştir. Doğrultusu düşey eksene paralel olacak şekilde bir doğru çizmeye çalışmıştır (bkz. Şekil 163).



Şekil 163. Mete cetvel ve rulet ile doğru çizmeye çalışıyor

Mete cetvelin hizasında çizmesine rağmen '*Yanından mı gidiyorum üstüne çıktım mı?'* diye sormuştur. Sağ eli ile cetveli tuttuğu ve ruletten dolayı hissetmediği için çizdiği çizginin düz bir çizgi olduğundan emin olamamıştır. Ayrıca kağıt boyunca çizmesine rağmen çizgi çizmeye masaya doğru devam etmiştir. Bu durum yine hissetmediğinden ya da doğruyu sündürme fikrinden kaynaklanıyor olabilir.

Bir sonraki oturumda Mete' ye bu öğretm oturumuna ilişkin hatırladığı kavramlar sorulmuştur. Mete '*Öncelikle doğru kavramını sağladık özetlemek gerekirse, başlangıç ve sonu belli olmayan noktaların birleşimiyle oluşan düz çizgiye doğru diyoruz. Doğru çizgi, doğrular başlangıcı ve sonunda ok işareti olarak kullanılıyor, gösteriliyor. Adları da büyük harflerle gösteriliyor. Mesela… Iıı.. Küçük d, küçük l, küçük m dediğiniz gibi tek harfle gösterebiliyoruz doğruları, o şekilde. […] Doğru parçası da başlangıcı ve sonu belli olan noktalar birleşmesiyle oluşan düz çizgi parçasıydı ve AB olarak isimlendiriyoruz. […] Eğri kavramından bahsettik. Eğri kavramı da ımm böyle ımm doğru olmayan hani düz bir çizgi değil de eee farklı yönlerde çizgiler yani. Yamuk yumuk bir çizgi, Dağ gibi demiştik.*' ifadeleri ile açıklamıştır. Dolayısı ile Mete' nin doğru ve doğru parçası tanımlarıı ve temsillerini kavradığını söyleyebiliriz.

4.4.2.2.4. Sayı Doğrusu (Cetvelleme) Kavramının İncelenmesi

Mete sayı doğrusu kavramına ilişkin tamsayılarla doğru üzerindeki noktaların eşlenmesi önbilgisine sahip olduğundan öncelikle uzunluk ve birim kavramları tartışılmıştır. Günlük hayat örnekleri sunarak bahçe çiti, ip, kumaş gibi nesneleri satın alırken dikkat edilen ortak nitelik sorgulanmıştır.

Mete: Yani yine uzunluk kullanıyoruz.
Araştırmacı: Nasıl belirliyoruz bu uzunluğu?
Mete: Yani ölçerek. Ölçerek derken elimizde metre var, evdeyiz mesela gerekli olan bir şeye diyelim ki kumaş alacağız, oranın uzunluğunu ölçüyoruz gidiyoruz bu kadar kumaş lazımdı diyoruz ona göre alıyoruz.
Araştırmacı: Evet. Neyle ölçüyoruz?
Mete: Metreyle. Metre uzunluk ölçüsünü kullanıyoruz.
Araştırmacı: Bizim belirlediğimiz ölçümle satıcının belirlediği aynı mı oluyor?
Mete: Hımm… Yani ölçüm araçları aynısı tabi ki, aynı yani.

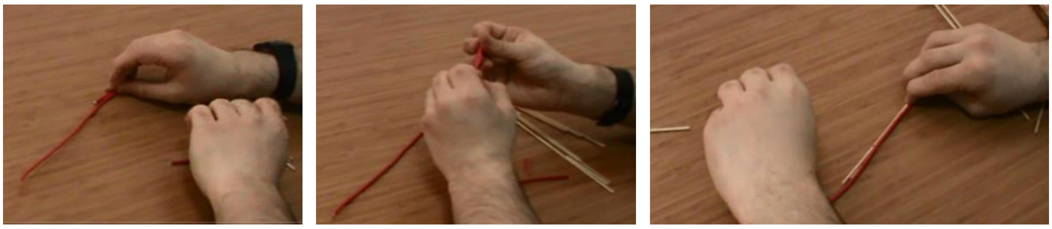
Mete nesnelerin uzunluk niteliğini ve uzunluk ölçüsü kavramlarını belirleyebilmiştir. Ayrıca ölçüm sonuçlarının eşit olmasının kullanılan ölçü birimine bağlı olduğunu ifade edebilmiştir. Böylece metre uzunluk ölçüsü için birim kavramı tartışılmıştır:

Mete: Standartlık var.
Araştırmacı: Standart olan nedir?
Mete: Ee ölçüde, ölçüm araçlarında yani.
Araştırmacı: Neden standart diyebiliyoruz? Metre için standart kılan ne?
Mete: Ya 1 metre 100 cm'dir yani. Yani standart var ıımm ona bakarsanız mm var işin içerisinde. O daha bir değişik kavramlar yani.

Mete metre, cm ve mm için birim kavramlarını açıklamaya çalışmıştır. İstenildiği kadar her ölçümde ölçüm sonucunun değişmemesinin ölçü birimi ile ilgili olduğunun farkındadır. Ancak burada birim kavramını terim olarak ifade edememiştir. Farklı birimlerin kullanılması ve cetvelleme sürecini anlaması için öncelikle kendine ait birimler oluşturması istenmiştir. Bu nedenle farklı uzunluklarda çubuklar ve kablo parçaları verilmiştir. Mete' ye bu çubukların temsil ettiği kavram sorulduğunda '*Uzunluklar mı? Doğru parçası bence*' cevabını vermiştir. Mete' nin çubukları 'uzunluklar' olarak ifade etmesi sorgulandığında '*Ya şöyle bir durum var. Uzunluğu belirlemek için kullanılan araç, ıı kavramlar yani.*' ifadesi ile görüşmenin bu adımında bir nesnenin uzunluğunu bu çubuklar yardımı ile belirleyeceğini fark etmiştir. Mete' ye diğer çubuklara göre daha uzun bir kablo parçası verilmiştir ve bu kablo parçasının uzunluğunu diğer çubukları kullanarak belirlemesi istenmiştir.

Mete: Uzunluğunu, ya diyeceğim ki mesela yanlarına koyacağım sıra sıra. Üç tane bu kadar. Mesela diyelim ki üç tane tutuyorum bakalım olacak mı? (bkz. Şekil 164, (a))
Araştırmacı: Güzel hadi ölçelim.
Mete: Kısa çubuklarla yapıyorum.

Mete kısa çubukları birbirlerine birleştirerek Şekil 164, (b)' de görüldüğü gibi çubukların uzunluklarını karşılaştırmıştır. Mete' ye eşit uzunlukta olan tahta çubuklar verilmiştir. Bu tahta çubukları uç uca ekleyerek kablonun uzunluğunu hesaplamıştır (bkz. Şekil 164, (c)).

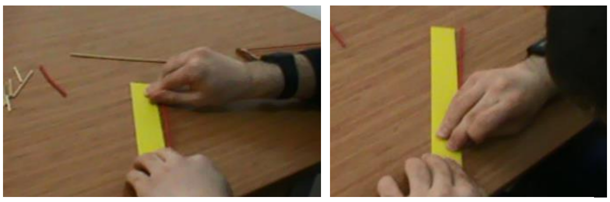


(a) (b) (c)

Şekil 164. Mete birim uzunlutaki çubuklar ile kablonun uzunluğunu hesaplıyor

> *Mete: Aşağı yukarı 5 tane gibi ama? Evet, 5 kısa çubuk.*
> *Araştırmacı: 5 kısa çubuk diyelim. O zaman bu 5 kısa çubuk senin için bir ne oldu?*
> *Mete: Bir ölçüm standardı oldu.*
> *Araştırmacı: Biz bu ölçüm standardına ne diyoruz biliyor musun?*
> *Mete: Ne diyoruz?*
> *Araştırmacı: Birim*
> *Mete: Birim evet!*
> *Araştırmacı: O zaman senin birim çubuğuna göre kablo 5 birim uzunluğunda mı?*
> *Mete: Evet veya şöyle yorumlayabiliriz. 1 kablo, 5 birim çubuk uzunluğunda.*

Mete geçerli ve standart bir ölçüm için birim kavramının gerekliliğini anlamış ve belirlediği birim cinsinden kablonun uzunluğunu ifade etmiştir. Mete' ye farklı uzunlukta başka bir birim uzunluktaki çubuk verilmiş ve aynı kablonun uzunluğunu bu çubukla hesaplaması istenmiştir. Mete belirlenen yeni birim çubuğa göre uzunluğu belirlediğinde '*İki buçuk? Evet, iki buçuk. Az önceki küçük çubuklarla 5 birimdi. Şimdi yarısı.'* ifadelerine yer vermiştir. Bu iki ölçümde belirli bir standardın olmadığını belirterek '*Ya şey gibi benzetme yapabilir miyim? Mesela eski endaze ve arşınla şu anki metre gibi [...] Eski birimler.*' ifadesi ile birimin önemini ve çeşitli birimlerin kullanılabileceğini açıklamıştır. Ardından Mete' ye incelemesi için kabartma yazılı cetvel verilmiştir. Cetvelin birimi sorulduğunda cm yanıtını vermiş ve 5 cm aralıklarla ölçeklendirildiğini fark etmiştir. Daha önce birim uzunluktaki çubuklarla uzunluğunu belirlediği kablonun bu kez uzunluğunu cetvel yardımı ile belirlemesi istenmiştir.



Şekil 165. Mete cetvel yardımıyla kablonun uzunluğunu belirliyor

Mete birim uzunluktaki çubukları sayarak tam olarak ölçümü tamamlamış '*22 cm'* şeklinde belirlemiştir (bkz. Şekil 165). Mete cetvelin standart bir ölçüm sağladığını belirtmiştir. Ayrıca kg ve okka gibi ölçümü standartlaştıran birimlere örnekler vermiştir. Daha sonra termometre örneği ele alınmıştır. Mete '*orada ama hem pozitif dereceler var hem negatif sayılar şey var derece*' ifadesi ile tamsayılar kümesi için negatif sayıların eşlendiğini de belirtmiştir. Ardından iğneli sayfa materyalinde doğru parçası temsili çubukların uzunluklarını belirlemesi istenmiştir. Mete başlangıçta çubukları birim uzunluk kabul ederek iğneli sayfanın uzunluğunu belirlemeye çalışmıştır. Mete' den iğneli sayfa materyali üzerinde çubukların uzunluklarını belirlemesi istenmiştir. Mete' nin '*Şimdi şöyle diyelim ki 5 tane iğne geldi, 5 tane iğne uzunluğu*' ifadesi iki iğne arasındaki mesafeyi birim uzunluk kabul ettiğini göstermiştir. Mete' ye belirlediği birim sorulduğunda '*iğnelerin birim olduğunu düşünüyorum*' cevabını vermiştir. Beş birim uzunluğundaki bir çubuğu ölçmüştür ve bu ölçüm sonucunda altı iğne saydığı ve uzunluğun iki iğne arasındaki mesafe ile belirlenmesi gerektiği fark ettirilmiştir (bkz. Şekil 166).

Şekil 166. Mete iğneli sayfa materyalinde doğru parçası temsillerinin uzunluklarını belirliyor

İğneli sayfa materyali üzerinde yer alan her bir iğnenin bir noktayı temsil ettiği düşünülmüştür. Mete iğneli sayfa materyali için '*iğnelerden bir küme*' şeklinde akıl yürütmüştür. Böylece doğru parçası temsili olan çubukların üzerinde yer alan deliklerin de noktaları temsil etmesi fikri ele alınmıştır. Mete '*doğru parçası noktalar kümesiydi, başı ve sonu belli*' şeklinde açıklamıştır. Buna göre o, doğru parçaları iğneli sayfa üzerine yerleştirildiğinde iki kümenin elemanları arasında bir eşlemenin yapıldığını ifade etmiştir. İğneli sayfa materyalinin doğruyu temsil eden aparatını materyale yerleştirmesi istenmiştir. Burada doğruyu temsil eden aparatın üzerindeki iğnelerin birer noktayı temsil ettiği tekrar ifade edilmiştir. Mete' den bu doğru üzerindeki noktaları tamsayılar kümesinin bir altkümesinde yer alan sayılar ile eşlemesi istenmiştir. Bunun için -9' dan 9' a kadar tamsayıların yer aldığı sayı etiketleri verilmiştir. Mete eşlemeyi nasıl yapacağını açıklarken

‘*Aralarındaki şeyleri sayıyoruz ya, aralarındaki şu mesela 1, 2 diye gidiyoruz, bunlar sayı oluyor aslında.*’ şeklinde materyal üzerindeki iğneleri ve belirlediği birimi ifade etmiştir.

Şekil 167. Mete iğneli sayfa materyalinde doğru üzerindeki noktalar ile verilen sayı kümesinin elemanlarını eşliyor

Mete iğneli sayfa materyalinin sol kenarından başlayarak iğneleri saymış ve 12. iğne ile -9 sayısını eşlemiştir. İkinci bir sayıyı eşlemesi istendiğinde ‘*Yani şu an kafama göre eşledim ama […] Yani şu anda öyle belli bir şeye göre değil’* şeklinde yaptığı eşlemenin doğru olup olmadığını teyit etmek istemiştir. Ardından -8 sayısını eşleyeceğinde aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 167):

Mete: Yine belli bir şey kullanmayacağım ama.
Araştırmacı: Peki kullanman gerektiğini mi düşünüyorsun?
Mete: Kullanmam gerektiğini düşünüyorum aslında.
Araştırmacı: O zaman lütfen öyle yap.
Mete: Ama neye göre yapsam. 12. mesela bir örüntü gibi yapalım biz. 12’nci -9’ sa mesela, şurası 12’ nci -9, bu 12 ise 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6 altı birim aşağısına -8 yerleştireyim mesela. Başkaa, şey eşleme aynı örüntü üzerinden gitmek zorunda mı?
Araştırmacı: Sence?
Mete: Yani aynı birim üzerine olduğu için bence evet.
Araştırmacı: Güzel, bir birim belirledin.

Mete: Tabi 6 birim.
Araştırmacı: O zaman bundan sonraki eşleyeceğin ne var elinde şu an?
Mete: Ee bakalım hemen -1.
Araştırmacı: -1’ in nerede olması gerekir normalde buna göre?
Mete: -1’ in? 6 birim aşağısı.
Araştırmacı: Aşağı ve yukarı neresi bu arada?
Mete: Eksi sayılara göre burası aşağı oluyor şöyle (sağ eli -2 noktasının üzerinde iken sol eli ile -2 noktasından sola doğru düz bir çizgi çizerek işaret eder). Şurası yukarısı (sağ eli ile -2 noktasından sağa doğru düz bir çizgi çizer gibi işaret eder) sıfıra doğru gittikçe yukarı oluyor ya hocam.

Mete sayıları doğru üzerindeki noktalarla eşlerken bir birime ihtiyaç duymuştur. Bunun için kendi ifadesi ile bir orantı kurarak 6 birim (iğneleri sayıyor) olarak belirlemiştir. Negatif sayıların konumunu eksenlerde ‘aşağı’ ve ‘yukarı’ şeklinde ifade etmiştir. Böyece eşlemeyi yaparken sayı kümesindeki elemanları küçükten büyüğe doru sıralamaya çalıştığını söyleyebiliriz. Mete belirlediği birime göre elindeki etiketleri eşleyemeceğini fark edince birimi değiştirmiş ve 2 iğne arasındaki uzunluğu bir birim olarak belirleyerek yeniden eşlemeye başlamıştır. Sıfır sayı etiketi ile eşlemeye başlamıştır ve bu kez pozitif sayıları eşlemek istediğini belirmiştir. Mete 0' dan 6' ya kadar sayı etiketleri ile iğneleri eşlemiştir (bkz. Şekil 168).

Şekil 168. Mete sayı etiketleri ile doğru temsilindeki noktaları eşliyor

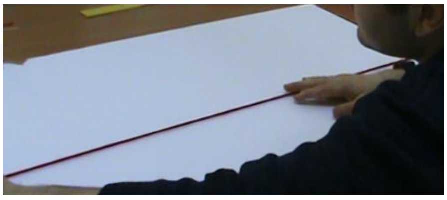
Mete: Belirli bir birime göre yaptım.
Araştırmacı: Birimin neydi?
Mete: Birimim 1 birim. İki iğne arasındaki boşluk.
Araştırmacı: Birim alarak yerleştirdin, neden birim ihtiyacı duydun?
Mete: Çünkü belli bir standart gerekiyordu. Birim kullandık.

Mete eşlemeyi nasıl yaptığını ve standart bir eşleme yapması için birime ihtiyaç duyduğunu ifade etmiştir. Ayrıca '*Veya illaki düz olmasına gerek yoktu çapraz da başka bir şekillerde eşleyebilirdik.*' ifadesi ile doğrunun doğrultusunun değişebileceğini ve o durumda da eşlemenin yapılabileceğini belirtmiştir.

Araştırmacı: Ve sayılar kümesiyle eşledik. Peki reel sayılarla eşleyebilir miyim?
Mete: Reel sayılar, bütün sayılardır o çok uzun bir iş ama eşleyebilirsin.
Araştırmacı: Nasıl yaparsın bu eşlemeyi? Nelere dikkat edersin bana ifade etmen yeterli.
Mete: Yani reel sayılar R işareti koyabilirim küme halinde, ondan sonra birkaç tane sayı yazarız sonra sonsuzluk işareti koyarız. Çünkü reel sayının hepsini yazamayız. Sonra al sana doğru, sonra başka şeyleri, birimleri, ne vermişse birimlerimiz onları doğruda eşleriz. İstediğim, belli bir şeye göre sayı sıralamasına göre.

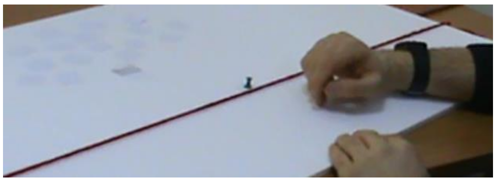
Mete reel sayılar kümesinin elemanları ile bir doğru üzerindeki noktaları eşlemenin mümkün olduğunu ve bu kümelerin sonsuz kümeler olduğunu belirtmiştir. Yapılan bu eşlemenin birebir olup olmadığı soruduğunda ise '*Immm.. bir taneyi bir taneye götürdüğüm için birebirdir bence*' ifadesi ile birebir eşleme olduğunu açıklamıştır. Reel sayılar için sayı doğrusunda eşlemenin nasıl yapılacağı ½ reel sayısı örneği ile sorgulanmıştır. Mete' nin '*0 ile 1' in arasında. Mesela burası 0, burası 1, burası ½ mi? (iki iğne arası uzaklığı bir birim kabul etmiştir) Ama iğneye denk geliyor. Tam ortaya denk geliyor.*' açıklamasında birime dikkat ederek eşlemeyi gerçekleştirdiği dikkat çekmiştir.

Mete' ye düzlemi temsil eden köpük plaka ve doğruyu temsil eden ip verilmiştir. Bu köpük plaka üzerine *l* doğrusunu konumlandırması istenmiştir. Mete' nin oluşturduğu doğru raptiyeler yardımı ile sabitlenmiştir. Mete doğruya tekrar dokunur gergin ve istediği doğrultuda olup olmadığını kontrol etmiştir (bkz. Şekil 169).



Şekil 169. Mete' nin düzlemde *l* doğrusu temsili

Mete' ye takrar doğru ve sayılar ile eşleme fikri sorulduğunda '*doğru noktalar kümesiydi […] reel sayılarla eşleyebiliyorduk*' şeklinde cevap vermiştir. Bu eşlemeyi sadece sayı etiketleri ile verilen tamsayılar için yapması istenmiştir. Bunun için sayı etiketleri ve doğru temsili ile eşlemesi için noktayı temsil eden raptiyeler verilmiştir. Mete ilk önce sayı etiketlerini incelemiştir. Pozitif ve negatif sayıları ayırmış ve 0 sayı etiketini belirlemiştir. Mete 0 ile doğru üzerindeki bir noktayı Şekil 170' teki gibi eşlemiştir.



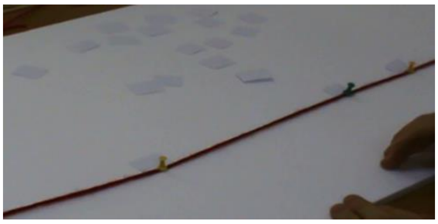
Şekil 170. Mete 0 ile doğru üzerindeki bir noktayı eşliyor

Mete noktayı temsil eden raptiyeyi ipin yanına sabitlemiştir. Raptiyenin doğru üzerindeki bir noktayı temsil ettiği hatırlatılınca '*Biliyorum ama biz Braille ile düşündüm de üzerine yazıyorduk*' ifadesinden kabartma yazıdaki temsil ile karşılaştırdığını söyeleyebiliriz. Daha sonra raptiye ipin üzerine sabitlenmiştir. Sayı etiketi ise Mete' nin aşina olduğu şekilde ipin üst kısmında okuyabileceği şekilde konumlandırılmıştır. Mete' ye işaretlediği bu noktanın bir adı olduğu söylendiğinde '*Başlangıç noktası mı? Haa ori ori ee orijinal mi?*' şeklinde fikir ileri sürmüştür. Bu noktanın başlangıç noktası ya da orijin olarak adlandırıldığı söylenmiştir. Ayrıca bu noktanın referans noktası olduğu açıklanmıştır. Mete' den ikinci eşlemeyi yapması istenmiştir. Mete gelişigüzel eline aldığı sayı etiketini okuyarak '*2 noktası var burada*' demiştir. Ardından '*bir çubuk alabilir miyim?*' şeklinde sormuştur. Mete' ye farklı uzunluklarda tahta çubuklar verilmiştir. Mete bulardan birini seçip '*Şu kısa olsun. Şurası 0 da şurasını 2 yapalım.*' demiştir.

Şekil 171. Mete 0 referans noktasına göre 2 noktasını işaretliyor

> *Mete: Hocam yok gayet iyi, 0 burası referans burası 2' yi seçmiştim ya hocam, 2 bulmuştum, sayımız 2 idi. Burası 0' ya, şöyle 2 birim kaydırırım. Evet çubuk burada. 1 birim ve tekrar şöyle 1 birim saydım. Şuraya işaretlemeyi düşünüyorum, şuraya hocam* (bkz. Şekil 171).
> *Araştırmacı: Başka?*
> *Mete: Başka negatif bir sayı isteyeceğim.*
> *Mete: -1 aldım bu kolay oldu ama değiştirmek istiyorum. -6.*
> *Araştırmacı: Tamam*
> *Mete: Çubuğu alabilir miyim?*
> *Araştırmacı: O çubukla aynı ebatta birkaç tane daha çubuk var istersen onları yan yana koyarak da yapabilirsin.*
> *Mete: Yok hocam kendi isteğimle hareket etmek istiyorum (belirlediği birim çubuğu 0 noktasının soluna koyar, sola doğru çubuğun uç noktasına aynı çubuğu tekrar koyar ve bu işlemi 6 kez tekrarlar) 1, 2, 3, 4, 5 (birim uzunlutaki çubukla her bir birim hareketinde sayar) -5' i bulduk. Bir tane daha kaydıracağım (çubuk ile bir birim daha sol doğru ilerler) -6. Şurası (parmağı ile işaret eder). Bir şey sormak istiyorum -5' in bitimi şurası mı oluyor, yoksa şurası mı oluyor -6' ın başlangıcı? Onu merak ediyorum.*

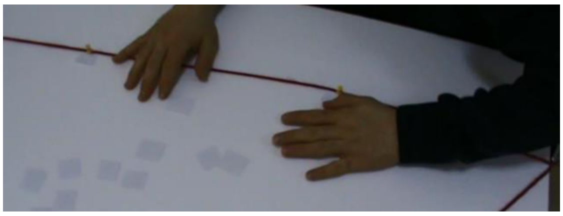
Mete 0 referans noktasından sonra Mete' ye göre ipin sağ tarafına doğru 2 ile eşleyeceği noktayı belirlemeye çalışmıştır. Bunun için birime ihtiyacı olduğunu düşünmüş ve belirlediği tahta çubuğu istemiştir. Birim çubuğu kendi etrafında uç noktasından döndürmek sureti ile öteleyerek iki birim hareket ettirmiş ve 2 noktasını işaretlemiştir. Daha sonra negatif bir sayı eşlemek istemiş ve -6 noktasını belirlemiştir. Eşit uzunluklarda birim uzunluktaki çubukları uç uca eklemek yerine tek çubuğu uç noktasından döndürerek eşleyeceği noktayı belirlemiştir. Ancak birim uzunluk kavramı için işaretleyeceği noktanın çubuğun hangi uç noktası olduğunu belirlemekte güçlük yaşamıştır. Mete' nin belirlediği birim çubuğun bir ucu referans noktasına denk gelecek şekilde doğru üzerine konumlandırılmıştır. Birim çubuğun diğer uç noktasının hangi sayı ile eşleneceği sorulduğunda Mete hızlı bir şekilde '*1! Hı... bittiği uç, sol taraf.*' yanıtını vermiştir. Birlikte tekrar -6 noktasını belirleyerek işaretlemişlerdir. Mete benzer şekilde diğer sayıları da eşleyebileceğini belirtmiştir. Mete' ye eşlemeyi yaparken nelere dikkat ettiği sorulmuştur.



Şekil 172. Mete' nin sayı doğrusu temsili

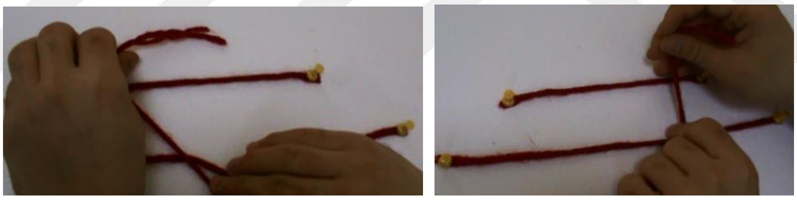
> *Mete: Standart olması için o birimi kullandık, 2 seçmiştim ya, referans noktasından, 0 referans noktamız, 2 birim kaydırdık o çubuk ile standart olması için. -6 noktası için 6 birim kaydırarak yaptık.*
> *Araştırmacı: Şu dikkatimi çekti, pozitif sayıları orijinin sağına negatif sayıları orijinin soluna yerleştirdin. Neden?*
> *Mete: Sayı doğrusunda böyleydi çünkü. Yukarıdan aşağıya doğru olsaydı da onu yapardım.*
> *Araştırmacı: Sayıları yerleştirmede referans noktası ile olan durumu nasıl ifade ederiz? Neye bakarız?*
> *Mete: Uzaklık.*

Mete doğru üzerindeki noktalar ile sayıları eşlerken standart bir birimin gerektiğine dikkat çekmiştir. Ayrıca önbilgilerinden pozitif ve negatif sayıların konumunu bildiği için eşlemede güçlük yaşamamıştır. Sayıları eşlerken referans noktasına olan uzaklığın önemli olduğunu da ifade edebilmiştir. Mete' ye bu eşlemenin cetvelleme olduğu açıklanmıştır. Oluşturduğu bu cetvelin birimi sorulduğunda '*Kısa çubuk*' yanıtını vermiştir. 2 ve 3 noktası arasındaki uzaklık sorulduğunda ise '*bir kısa çubuk*' şeklinde cevaplamıştır. Ardından bu doğru üzerinde her reel sayı için bir noktanın belirlenip belirlenemeyeceği sorgulandığında '*belirleriz [...] doğruyu uzatırız*' şeklinde sündürme eylemi ile sonsuz kümeleri eşleyebileceğini algıladığını belirtmiştir. Ayrıca sayı doğrusu üzerindeki işaretli noktalar için eşlenen sayıların bu noktaların koordinatları olduğu belirtilmiştir. Mete doğrunun doğrultusunu değiştirerek '*Dikey de yapabilirdik, bu x-ekseni değil mi şu an? Dikey olan da y-ekseni*' ifadesi ile önbilgisinde var olan koordinat eksenlerine dair ipuçları vermiştir (bkz. Şekil 173).



Şekil 173. Mete *l* doğrusunun doğrultusunu düşey eksene paralel olacak şekilde değiştiriyor

Mete önceki öğretim oturumunda doğru ve doğru parçasının sonsuz noktalar kümesi olduğunu belirtmişti. Ayrıca bu öğretim oturumunda reel sayıların sonsuz bir küme olduğunu ve doğrunun istenildiği kadar sündürülerek reel sayılar ile eşlenebileceğini ifade etmiştir. Bu öğretim oturumunun son adımında ise doğru parçası üzerindeki noktaların sonsuz olduğu fikrini pekiştirmek amaçlanmıştır. Bunun için biri diğerinden daha kısa iki doğru parçası temsili ip köpük üzerine paralel konumda sabitlenmiştir. Işını temsil eden başka bir ip bu iki doğru parçasını kesecek şekilde sabitlenmiştir. Mete' den bu ışın yardımı ile önündeki iki doğru parçası üzerindeki noktaları eşlemesi istenmiştir.



Şekil 174. Mete iki doğru parçası üzerindeki noktaları eşliyor

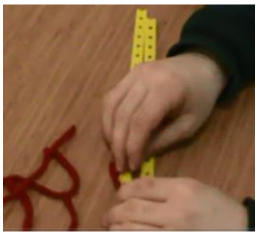
Mete: Bu nokta ile bu nokta (sol ile ipi tutar ve sağ eli ile ipin doğru parçaları üzerinde kestiğin noktaları işaret eder). Sonra düz bir şekilde şöyle olabilir. (bkz. Şekil 174)
Araştırmacı: Bu eşlemleri yaparken neyi fark ettin?
Mete: O ipin ışın galiba o. O ışın iki doğru parçasında aynı şeyleri eşleyebiliyor.
Araştırmacı: Peki doğru parçaları üzerindeki noktalar hakkında ne fark ettin?
Mete: Birini yaptığında ikisi de eşlenmiş oluyor yani. Her yerden eşleyebiliyorum.
Araştırmacı: Kaç tane eşleme yapabilirim?
Mete: Doğru parçasında sonsuz noktalar var. Hepsini eşleyebiliriz bence.

Mete doğru parçaları üzerindeki noktaları eşleyebilmiş, ışının paralel doğru parçalarının her ikisini de kestiğini ve kestiği bu noktaları birbiri ile eşlediğini anlamıştır. Doğru parçasının sonsuz noktalar kümesi olduğu fikrinden hareketle eşlemenin de sonsuz olduğunu ifade etmiştir.

Mete bu oturumda yer alan adımları, sırasıyla, uzunluk kavramını, standart bir birimin gerekliliği, doğru üzerindeki noktalar ile reel sayıların eşlenebileceği, 0 referans noktasının belirlenmesini ve sayıların eşlenmesi şeklinde özetlemiştir. Ardından sayı doğrusunu tanımlaması istenmiştir. Mete sayı doğrusunu '*Yani başlangıç noktası bulunan referans noktası bulunan, pozitif ve negatif sayılardan oluşan, bütün reel sayıları içine alan sonsuz, bir doğru eee… standart bir birime göre eşlenen*' şeklinde açıklamıştır. Bir sonraki oturumda Mete' ye hatırladıkları sorulduğunda benzer şekilde nesnelerin uzunluk niteliğinden, uzunluğun belirlenmesinde standart bir birime ihtiyaç duyulduğundan, doğru ve doğru parçası temsillerinden, doğru üzerindeki noktalar ile sayıların eşlenebileceğinden bahsetmiştir.

4.4.2.2.5. Koordinat Sistemi Kavramının İncelenmesi

Koordinat sistemi yapılandırmak için iki küme arasındaki eşleme fikrinden yararlanılmıştır. Bunun için öncelikle sayı doğrusunun bir küme olup olmadığı tartışılmıştır. Sayı doğrusunun bir küme olduğunu ifade eden Mete' ye bu kümenin elemanları sorulduğunda '*Sayılar, noktalar […] Noktalar ve sayılar eşleşmiş oluyor*' şeklinde cevap vermiştir. Böylece Mete' ye iki sayı doğrusu yani iki küme verilmiştir. Mete bu sayı doğrularını *m* ve *l* olarak adlandırmıştır. Mete bu iki doğrunun birer küme olduğunu ifade etmiştir. Böylece bu doğrular üzerindeki nokta temsillerini nasıl eşleyebileceği sorulmuştur. Mete ilk önce ipi sayı doğrusunu temsil eden çubukların noktayı temsil eden deliklerinden geçirerek eşlemeyi düşünmüştür (bkz. Şekil 175). Hemen ardından '*Ha tamam. Yani bu sayı olması için önce orijin belirlememiz gerekiyor, ya orijin belirleyeceğiz önce öyle düşünüyorum.*' ifadesi ile noktaları değil sayıları eşlemesi gerektiğini düşünmüştür.



Şekil 175. Mete sayı doğrularındaki temsili noktaları eşlemeye çalışıyor

Mete orijini belirlerken '*O yüzden tam orta noktasını bulacağım [...] Yani başlangıç noktası olduğu için orta nokta diye düşünüyorum.*' şeklinde sıklıkla kullanılan sayı doğrusu prototipini düşünmüştür. Ancak farklı bir noktayı da 0 ile eşleyebileceğini belirtmiştir. Mete noktaları ip ile eşlemekte güçlük yaşadığı için çubuk yardımı ile eşlemeleri göstermek istemiştir. İlk önce sayı doğrularından birini eline alıp 0 noktasını işaretlemiştir. Bu noktaya bir çubuk takmış '*İçinden geçirdim çünkü orijin diye ayarladım. Sonra burasını sıfırla eşledim yani*' şeklinde açıklamıştır (bkz. Şekil 176, (a)). Diğer sayı doğrusunu eline alarak '*Onu da sıfır noktasında mesela 5 ile eşleyelim 5. nokta*' demiş ve noktaları saymaya başlamıştır (bkz. Şekil 176, (b)). Aynı çubuğu belirlediği 5 noktasına takmıştır (bkz. Şekil 176, (c)). Eşlediği noktaları '*Ee burası -5 olsun. Çünkü sol tarafta ya. Sol tarafta 0' a -5*' ifadesiyle açıklamıştır.

(a) (b) (c)

Şekil 176. Mete iki sayı doğrusu üzerindeki noktaları eşliyor

Mete' den başka bir eşleme olarak l sayı doğrusundaki 0 noktası ile m sayı doğrusundaki 2 noktasını eşlemesi istenmiştir. Mete başka bir çubuk yardımı ile 0 ve 2 noktalarını eşlemiştir. Daha sonra l sayı doğrusundaki 3 noktası ile m sayı doğrusundaki -5 noktasını işaretlemesi istenmiştir. Mete derin bir nefes alarak '*Yani yapılabilir de şimdi imkansız. Eşlenir ama kafa karıştırıcı olabilir.*' şeklinde açıklamıştır. Mete' nin stratejisi ile eşlemelerin ayırt edilmesinin güç olacağına karar verildikten sonra iğneli sayfa materyali üzerinde konumlandırarak sayı doğruları arasında eşleme yapması istenmiştir. Mete ilk sayı doğrusunu taktıktan sonra ikinci sayı doğrusunu konumlandırırken '*Yakına mı yerleştireyim?*' diye sormuştur. Sayı doğrularını dilediği gibi konumlandırabileceği söylendiğinde Şekil 177 (a)' da olduğu gibi paralel olacak şekilde sayı doğrusu temsillerini konumlandırmıştır. Mete iğneleri sayarak sayı doğrusu temsillerindeki orta noktayı işaretleyerek '*Şimdi 0 noktasını burası kabul ediyorum.*' şeklinde belirtmiştir (bkz. Şekil 177, (b)). Mete sayı doğrusu temsili üzerindeki iğneleri 0 noktasından sola doğru sayarak en uçtaki iğneyi işaretlemiş ve -7 noktası olarak belirlemiştir. Bu noktayı eşlemek için iğneli sayfa materyalinin doğru parçası temsili aparatları almıştır. Ancak aparatlar sadece yatay ve düşey eksende takılabilir olduğundan tahta çubuklar yardımıyla eşlemeyi temsil etmeye karar vermiştir. Ancak eşlemenin sabitlenmesi için bant ile eşlemede karar kılınmıştır.

(a) (b) (c)

Şekil 177. Mete iğneli sayfada sayı doğrusu temsillerinde eşleme yapıyor

Mete bant yardımı ile birkaç noktayı eşlemiştir (bkz. Şekil 177, (c)). Birkaç tane eşleme daha yapıldıktan sonra Mete' den eşlediği noktaları söylemesi istenmiştir. Mete noktaları belirlemekte güçlük yaşamıştır. Bu durumu '*Karmaşık oldu nasıl eşleyebilirdik?*' şeklinde ifade etmiştir. Ardından '*Düzgün konumlayamamızdan olabilir mi?*' ifadesi ile eşlemelerdeki güçlüğün gerekçesi üzerine akıl yürütmüştür. Sayı doğrularının konumlarını değiştirebileceği belirtildiğinde '*Birini dikey birini yatay mı acaba?*' diyerek önce *l* daha sonra *m* sayı doğrusu olduğunu belirttiği temsilleri iğneli sayfa üzerinde konumlandırmıştır. Sayı doğrularının konumlandırırken iğneli sayfanın iğnelerini saymış ve '*Ortalı takmak istiyorum*' şeklinde belirtmiştir (bkz. Şekil 178, (a)).

(a) (b) (c)

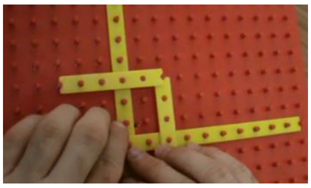
Şekil 178. Mete iğneli sayfa materyalinde sayı doğrularını konumlandırıyor

Sayı doğrularının kesiştiği nokta sorulduğunda '*Orijin, sıfır, başlangıç noktası*' cevabını vermiştir. Mete' nin bu algısını tartışmak üzere görüşme şöyle devam etmiştir:

Araştırmacı: Peki neden orijinde kesiştirme gereksinimi duydun?
Mete: Ee neden? Çünkü tam ortada konumlandığı için yani başlangıç noktası olduğu için
Araştırmacı: Ama ben 0' ı kenara da konumlandırabilirdim illa tam ortaya konumlandırmak zorunda değilim.
Mete: Ama sayı doğrusunda 0' ı ortada kabul ederiz. Sağda pozitif sayılar, solda negatif sayılar.

Mete her ne kadar sayı doğrularının kesiştiği noktanın 0 referans noktası oduğunu doğru cevaplasa da bu cevabının gerekçesi doğru değildir. Bu nedenle Mete ile doğrunun orta noktası şeklinde bir nokta belirlemenin mümkün olup olmadığı tartışılmıştır. Doğrunun temsil eden çubuk üzerinde düşündüğü gibi orta noktası ile 0' ın eşlenmesi gerekmediği belirtilmiştir. Mete *m* sayı doğrusunu çıkarıp birkaç iğne kaydırarak yeniden konumlandırmış ve '*Yani şöyle mi diyorsunuz?*' şeklinde sormuştur (bkz. Şekil 178, (b)). Bu noktanın temsil ettiği nokta sorulduğunda ise '*Şey yani ee 0 değişebilir yeri konumu*' şeklinde açıklamıştır. Burada doğrunun istenildiğinde sündürülebileceği fikri tartışılmış ve ek bir çubuk yardımıyla doğrunun sündürüldüğü temsil edilmiştir (bkz. Şekil 178, (c)). Böylece iki sayı doğrusu kesiştirildikten sonra doğruların üzerindeki noktaların sayılarla uygun şekilde eşlenebileceği fikri ele alınmıştır. Daha sonra sayı doğruları Mete' nin ilk oluşturduğu konuma göre yerleştirilmiştir. Kesiştikleri noktanın 0 noktası olmasının gerekçesi sayı doğrusunda sayılar ile noktaların eşlemelerinin 0 referans noktasına göre yapılması olduğu açıklanmıştır.

Dik kesişen sayı doğrularının konumuna göre iki sayı doğrusu arasında eşlemenin nasıl yapılacağı tartışılmıştır. Mete '*Şu an noktaları nasıl eşlerim, ee yani 0 başlangıç noktası olduğu için ona göre eşlerim, yani ona göre derken başlangıç noktam belli ona göre sayıları konumlandırırım, ona göre eşlerim.*' ifadesi ile öncelikle dik kesişen doğruların 0 referans noktasına göre sayı kümesinin elemanları ile eşlenmesi gerektiğini ifade etmiştir. Mete' ye *l* ve *m* doğrusu için sayıları nasıl eşleyeceği sorulmuştur. Mete yatay ve düşey eksen için 'aşağı-yukarı' ve 'sağ-sol' ifadelerini kullanarak pozitif ve negatif sayıların sıralanışını açıklamıştır. Mete' ye oluşturduğu bu sistemin adı sorulduğunda '*Koordinat sistemi*' olduğunu ve 0 referans noktasının '*Orijin*' olduğunu, ayrıca *m* ve *l* doğrularının sırasıyla '*x* ve *y*' olarak adlandırıldığını ifade edebilmiştir. Mete' den bu sayı doğruları/eksenler arasında nasıl eşleme yapacağı *x* sayı doğrusunda 2 ile *y* sayı doğrusunda 3 noktalarını eşleyerek göstermesi istenmiştir. Mete *'+2 ile +3 değil mi?'* diyerek *x*-ekseninde belirlediği birime göre noktaları saymaya başlamıştır. Mete sırasıyla *x* ve *y*-ekseninde istenen noktaları belirlerken '*2, bir iki üç, doğru parçası alabilir miyim?*' şeklinde eşlemeyi göstermek için iğneli sayfa materyalinin doğru parçası aparatlarından istemiştir. 3 noktasını da belirleyen Mete, '*Ama şuranın boyunda olmasını istiyorum da, iki parça alabilir miyim?*' diyerek kendisine sunulan aparatlar arasından iki aparat seçmiştir. Mete Şekil 179' de görüldüğü gibi doğru parçası temsilleri yardımı ile 2 ve 3 noktasını eşlemiştir. Doğru parçalarının istediği uzunlukta olmadığını ve sayı doğrularını kesmesini istemediğini belirtmiş, '*Yani eşlediğimi düşünüyorum sadece materyal denk gelmedi*' demiştir.

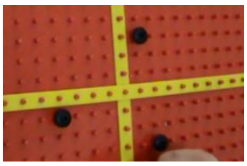
 

Şekil 179. Mete koordinat sistemin eşlemeyi gösteriyor

Mete eşlemeyi nasıl yaptığını '*Önce orijin 0 burası. 1, 2 sayıyorum. Önce bir tane materyal çubuk yerleştirdim ve sonra şeyi 3' ü bularak tabi ki 1, 2, 3 burası. Şöyle bunların boyunca şurası, şu noktayı eşledim.*' şeklinde iğneleri sayarak açıklamıştır. Mete' nin eşlemeyi gösterdiği nokta boncuk ile temsil edilmiştir (bkz. Şekil 179). Mete' ye bu noktanın kabartma yazıda yazarak nasıl gösterilebileceği sorulduğunda '*Yani işlemi yapabiliyoruz ama ifade etme nasıl olabilir?*' bilmediğini eklemiştir. Böylece bu noktanın $(2,3)$ noktası olduğu söylenmiş ve kabartma yazıda ayracın kodları söylenerek yazması sağlanmıştır. Mete' ye eşlenen noktaların yazımında sıralamanın önemi sorulduğunda *'(Mete biraz düşünür) Yazım sırasının önemi yani x-eksenini önce yazdık, 2' yi yazdık sonra y-ekseninin elemanını 3 yazdık.*' cevabını vermiştir. Mete' nin açıkladığı bu gösterimin sıralı ikili olarak adlandırıldığı açıklanmıştır.

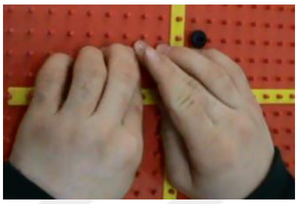
İğneli sayfa materyalinin doğru parçası temsilleri olmadan söylenen sıralı ikilileri işaretlenmesi istenmiştir. Mete $(1,3)$ noktasını işaretlemek için önce orijini bulmuş, *x*-ekseninde 1 noktasını işaretlemiş ve sol eli ile *y*-ekseninde 1, 2, 3 şeklinde sayarken sağ elini $x = 1$ doğrusu üzerinde eş zamanlı hareket ettirmiştir. Daha sonra sağ eli ile işaretlediği $(1,3)$ noktasına boncuk takmıştır. Benzer şekilde $(2,-3)$ noktasını da işaretlemiştir.

Mete $(-4,-1)$ noktasını işaretlemesi istendiğinde önce *y*-ekseninde -4 noktası için iğneleri saymaya başlamıştır. $(-4,-1)$ noktası tekrar söylendiğinde '*-4' e -1 hımm, ilk önce x-i veriyoruz*' diyerek *x*-ekseninde -4 noktasını, ardından *y*-ekseninde -1 noktasını belirleyerek $x = -4$ doğrusu üzerinde bir birim hareket ederek $(-4,-1)$ noktasını işaretlemiştir (bkz. Şekil 180).



Şekil 180. Mete' nin işaretlediği sıralı ikililer

Orijinin koordinatları söylendiğinde Mete '*Sıfıra sıfır, yani sıfıra boncuk takılır diye düşünüyorum, yani sıfıra sıfır derken?*' şeklinde düşünmüştür. Daha sonra orijine boncuğu takarak '*x de 0, y de 0*' diyerek koordinatları betimlemiştir. $(-3, 2)$ noktasını bulması istendiğinde bu kez Mete önce *x*-ekseninde -3 noktasını, sonra *y*-ekseninde 2 noktasını işaretlemiş ve iki elini de bir doğru boyunca ikinci bölgede hareket ettirmiştir. Parmaklarının birleştiği noktayı işaretlemiştir (bkz. Şekil 181).

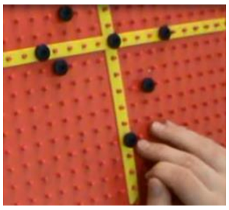


Şekil 181. Mete (-3,2) noktasını belirliyor

Mete' nin $(0, 3)$ noktasını işaretlemesi istenmiştir. Mete önce orijin noktasını bulmuş ve *x*-ekseni üzerinde iğneleri sayarak 3 noktasını belirlemiştir. Sağ işaret parmağını bu noktada tutarken aşağıdaki diyalog gerçekleşir:

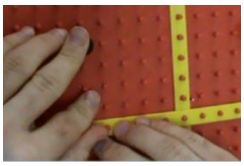
Mete: 0 virgül 3. 1, 2, 3. Nereye takabilirim onu size sorabilir miyim?
Araştırmacı: Şimdi bu 0 virgül 3 noktası dediğimde x kaç?
Mete: x sıfır
Araştırmacı: x-in 0 olduğu yer neresi?
Mete: Burası orijin (orijini gösterir)
Araştırmacı: y-nin 3 olduğu yer neresi?
Mete: Ha y eşittir 3, ha pardon, haa 1, 2, 3 burası (orijinden y-ekseninde yukarıya doğru üç iğne sayar ve noktayı işaretler)

Mete sadece *x* sayı doğrusunda sıfır noktasının hatırlatılması ile doğru noktayı işaretlemiştir. Ardından $(-5, 0)$ noktasını işaretlemesi istenmiştir. Mete '*-5 e 0*' diyerek bir an düşünür ve yine orijini bulup *x*-ekseni üzerinde sola doğru iğneleri sayar ve bulduğu noktayı sol eliyle işaretleyip sağ eliyle de '*0*' diyerek orijini işaretlemiştir. $(-5, 0)$ noktasını işaret ederek '*Burası olduğunu düşünüyorum. Çünkü direk saydığımızda sıfıra gider zaten yani -5*' ifadesi ile açıklamıştır. Mete' nin açıklamaları doğru parçası temsil eden aparatlar yardımı ile açıklanmıştır. Daha sonra $(4, 0)$ noktası sorulduğunda tereddüt etmeden hızlı bir şekilde *x*-ekseninde sayarak işaretlemiştir. $(0, -6)$ noktasını işaretlerken '*0*' diyerek orijini göstermiş ve *y*-ekseni üzerinde aşağıya doğru iğneleri sayarak bulduğu -6 noktasına boncuğu takmıştır.



Şekil 182. Mete' nin işaretlediği sıralı ikililer

Koordinat sisteminde bölgeler tanıtılmış ve açıklanmıştır. Bu bölgelerde sıralı ikililer için pozitif ve negatif olan bileşenler belirtilmiştir. Daha sonra iğneli sayfa üzerinde işaretlenen noktaların koordinatlarını belirlemesi istenmiştir. $(0,-4)$, $(-3,-2)$, $(-5,4)$, $(-4,4)$, $(0,8)$ ve $(1,-1)$ noktaları işaretlenmiştir. Mete ilk olarak $(1,-1)$ noktasının koordinatlarını parmaklarını bir iğne hareket ettirerek sezgisel olarak hızlı bir şekilde belirlemiştir. Daha sonra başka bir boncuğa dokunup, sonra orijini hissederek '*Başka kontrol edelim, şimdi 0 burası -1, -2, -3 burası, -1, -2 burası, ee -3' e -2 mi?*' şeklinde önce *x*, daha sonra *y*-ekseninde iğneleri sayarak $(-3,-2)$ noktasının koordinatlarını belirlemiştir. *y*-ekseni üzerinde hissettiği boncuğa dokunarak '*Hımm şuna bakalım önce, bu direk 0' a -1, -2, -3, -4. 0' a -4*' diyerek $(0,-4)$ noktasının koordinatları kolayca belirlemiştir. $(-5,4)$ noktasının koordinatlarını belirlerken ise boncuğun işaretlediği noktadan *y*-eksenine paralel olacak şekilde *x*-eksenine kadar iğneleri saymış '*1, 2, 3, 4*' diyerek sol başparmağı ile işaretlemiştir. Sonra sağ eli ile orijinden işaretlediği bu noktaya kadar olan iğneleri '*1, 2, 3, 4, 5*' şeklinde sayarak koordinatları belirlemiştir (bkz. Şekil 183).



Şekil 183. Mete (-5, 4) nokyasının koordinatlarını belirliyor

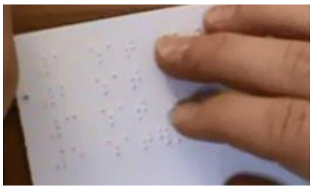
Mete $(4,4)$ ve $(0,8)$ noktalarının koordinatlarını daha önceki stratejisi ile belirlemiştir. $(1/2,0)$ noktasını işaretlemesi istendiğinde daha önceki birim ile hareket ettiği için *x*-ekseninde 1 noktasını işaretler ve '*0 şurası 1 de burası, tamın yarısı olacak ama arasını nasıl göstereceğim?*' diyerek işaretleyemeceğini belirtmiştir. Eksenlerin sayılar ile eşleşmesinde birimi değiştirmesi teklif edilmiştir. İki iğne uzaklığını bir birim olarak belirlemesi önerilmiştir. Mete '*Nasıl yani 1, 2, burası 1 noktası mı olacak? Haa… tamam tamam o zaman orijin burası 1 noktası burası tamın yarısı burası*' diyerek $(1/2, 0)$ noktasını işaretlemiştir. Aynı birimi kullanarak $(3/2, 2)$ noktasını belirlemesi istenmiştir. Mete 2 iğneyi 1 birim olarak *x*-ekseni üzerinde 3 noktasını belirler '*sizin dediğiniz birime göre 3 noktası burası*' demiştir. Mete belirlenen birime göre tamsayılar için noktaları işaretlemesine rağmen 3/2 noktasını belirleyememiştir.

Mete: 3/2, 3 buraysa 2 burası, burası mı oluyor?
Araştırmacı: 3/2. Ondalık olarak düşün, 3' ü 2' ye böldüğünde?
Mete: Ee 1,5.
Araştırmacı: O zaman 3/2 hangi iki sayının arasındaymış?
Mete: 1 ile 5.
Araştırmacı: 1,5 ne demek? Bir buçuk?
Mete: Bir buçuk ha evet! 1 ile 2' nin.
Araştırmacı: O zaman 1 ile 2' nin tam orta noktası.
Mete: Şimdi 1 burası, 2 burası, o zaman burası.
Araştırmacı: Bir 1 birim, bir de 0,5 birim yani yarım birim.
Mete: Şimdi bir 1 birim gitse burası (1 noktasını işaret ederek) oluyor yarım birim burası mı? (1 ve 2 noktasının arasındaki iğneyi işaret ederek) Yani 3/2 burası.
Araştırmacı: 3/2' yi neyle eşlemeni istiyorum.
Mete: 2 demiştiniz. 2 şurası(y-ekseninde 2 noktasını işaret ederek)

Böylece $(3/2, 2)$ noktasını belirlemiştir. Ancak rasyonel sayıların sayı değerini ve rasyonel sayılarda sıralamada önbilgilerinde eksiklikleri olduğu belirlenmiştir. Bu öğretim oturumunda yapılanları hatırlatması istendiğinde Mete '*Bu dersimizde sayı doğrularıyla öncelikle iki doğru belirledik, onlarla üzerine eşleme yaptık, sonra dikey ve yatay eksen olmak üzere koordinat sistemi belirledik ve koordinat sistemi üzerinde eşlemeler yaptık. Önce normal sayılarda eşlemeler yaptık sonra reel sayılarla eşledik ve bölgeleri tanıdık.*' şeklinde sayı doğruları ile koordinat sisteminin yapılandırılmasına ve eşlemelerin gösterimine ilişkin özetlemiştir. Eşlemelerin boncuklarla temsil edildiğini, kabartma yazıda parantezlerin kodları ile birlikte gösterimini açıklamıştır. Bu gösterime ilişkin '*İlk bileşen x-eksenine ait, ikinci bileşen y-eksenine ait […] bu kesişime noktanın koordinatları diyoruz*' ifadelerine değinmiştir. $(3, 2)$ temsiline sıralı ikili denildiğini belirtebilmiştir. Sıralı ikililerin eşlemeleri temsil ettiği ifade edilmiştir.

4.4.2.2.6. Koordinat Sisteminde İki Küme Arasındaki İlişkinin Temsil Edilmesi

Koordinat sisteminde küme temsili, eşleme temsili ve ilişkinin temsili için öncelikle sıralı ikili ve temsil ettiği kavram sorgulanmıştır. Mete sıralı ikilinin nokta ile temsil edildiğini ve iki küme, yani eksenler, arasındaki eşlemeyi gösterdiğini ifade etmiştir. Ardından iki küme arasındaki eşlemeyi temsil etme yolları soruduğunda '*Eşlemeleri listeleme yöntemimiz vardı, Venn şeması, tablo yöntemi, eee koordinat üzerinde doğrularla eşledik*' şeklinde küme temsillerinden bahsetmiştir. Böylece farklı temsil türleri ile sunulan eşlemeler ve bu eşlemelerin koordinat sisteminde temsili üzerine adımlarla görüşmeye devam edilmiştir. İlk olarak Eğmir gölü etrafında bisiklet turu ücretlerinin saatlik değişimini ele alan senaryo ile başlanmıştır. Mete senaryoyu dinlerken tableti ile saat ve ücret hakkında verileri not almıştır. Mete not tutmadığı bilgileri tekrar sormuş ve notlarını tamamlayınca '*Ee şimdi kümeler ve eşlemeleri değil mi, soruyorsunuz? Şimdi küme burada yani kümeler burada bisikletin saatleri, saatler bir küme ücretler bir küme*' şeklinde senaryoda yer alan kümeleri belirlemiştir. Mete' nin notları Şekil 184' te incelendiğinde tablo temsili gibi eşlemeler yaptığı görülmektedir.



Şekil 184. Mete' nin senaryoya göre aldığı notlar

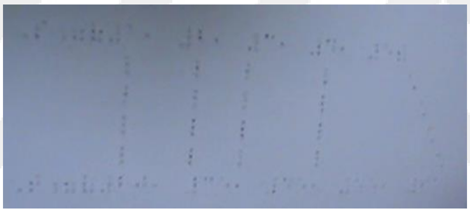
> *Mete: Saatler kümesi S kümesi olsun, olur mu? Diğeri de T kümesi, TL. S kümesinin elemanları 1, 2, 3 yani 3 derken 2' den fazla olduğu için 3 diye aldım. 4 ve 5. 5' den fazla olamaz.*
> *Araştırmacı: Güzel, peki T kümesinin elemanları neler?*
> *Mete: T kümesinin elemanı 20, 35, 10 TL arttığı için 45 yazdım ve son olarak 55 ve 65.*

Mete senaryoda yer alan kümeleri ve elemanlarını doğru olarak belirlemiştir. Bu iki küme arasındaki eşlemeyi nasıl yapacağı sorulduğunda:

> *Mete: Bu eşlemeyi nasıl göstermek isteriz? Imm yani rakamlar ve saatleri eşleyebiliriz şekil olarak.*
> *Araştırmacı: Şekil olarak, nasıl eşleyeceksin şekilde?*
> *Mete: Imm, ya önce saatleri yan yana yazalım sonra alt kısma TL-leri yazalım. Sonra eşleyelim.*
> *Araştırmacı: Tamam hadi yapalım, hadi öyle yapalım.*

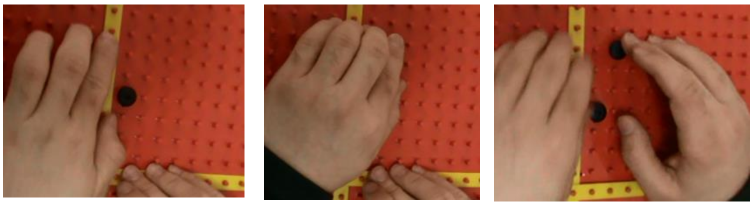
Mete: Ya sadece rakamları yazıyorum saat falan gerek yok diye düşünüyorum.

Mete belirlediği iki küme arasındaki eşlemelere ilişkin aldığı notun bir tablo olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra *S* ve *T* kümelerini liste yöntemi ile alt alta yazmıştır. Önce elemanları bant ile eşleyerek göstermek istemiştir, daha sonra eşleyeceği her elemanın alt alta yazıldığını fark ederek kabartma yazıda doğru parçaları ile eşlemeye karar vermiştir. Mete tableti kapatıp kümeleri ve elemanları yazdığı metinde belirlemiştir. Daha sonra eşlemeleri yaparken '*2' i 35 ile eşleyeceğiz*' şeklinde betimleyerek doğru parçalarını çizmiştir (bkz. Şekil 185). Ancak tabletin hücreli yapısı ve Braille yazıda karakterlerin fazla olması çapraz eşlemleri temsil etmesine engel olduğu durumlarda sayıları doğru parçalarının uç noktalarına denk getirememiş '*Virgülüne denk geliyor ancak böyle yapabileceğim. Ya sayılar, rakam işaretleri gereği* ' şeklinde belirtmiştir. Mete bu temsilde güçlük yaşadığını belirterek '*hepsini doğru parçası ile eşleyemedim, şekiller farklı oldu, belki de başka şekilde eşlemeyi yapmalıydık*' ifadesiyle farklı temsil kullanmak istediğini belirtmiştir.



Şekil 185. Mete' nin liste yöntemi ile küme temsili kullanarak iki küme arasındaki eşleme temsili

Mete eşleme temsilini tek tek kontrol etmiş ve farklı bir temsil ile göstermek istediğini belirtmiştir. Bunun için iğneli sayfa materyalinde koordinat sisteminde temsil etmesi istenmiştir. İğneli sayfa materyalinin bir sınırlılığı olarak ücret kümesini temsil eden eksende iki iğne arasındaki uzaklığın 5 birim olarak temsil edilmesi istenmiştir. Mete koordinat sisteminde normal şartlar altında eksenlerdeki birimlerin eşit olması gerektiğini bildiğini ve bu durumun anlamasını güçleştiremeyeceğini '*x-ekseniyle y-ekseni birimler aynı olmak zorunda. Normalde (!) (güler)*' şeklinde ifade etmiştir. Mete belirlenen birimlere göre apsiste saatleri ve ordinatta ücretleri temsil ederek iğneleri işaretleyip eşlediği elemanları söylemiştir. Mete iki küme arasındaki eşlemeleri hızlı ve güçlük yaşamadan belirleyebilmiştir. Önce *x*-eksenindeki noktayı sağ eliyle, sonra *y*-eksenindeki noktayı sol eliyle belirleyerek, sağ işaret parmağını *y*-eksenine paralel olarak ordinattaki noktaya kadar hareket ettirerek sıralı ikiliyi boncukla işaretlemiştir. Bazı eşlemelerde ise *x*-eksenindeki noktayı sağ eliyle ve *y*-eksenindeki noktayı sol eliyle belirledikten sonra sol işaret parmağını *x*-eksenine paralel olarak hareket ettirmiştir. Sezgisel olarak sol işaret parmağının sağ eliyle aynı doğru üzerinde olduğunu fark ederek sıralı ikiliyi boncukla işaretlemiştir (bkz. Şekil 186).



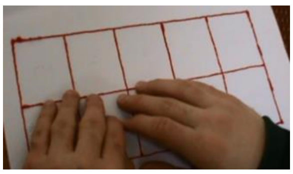
Şekil 186. Mete eşlemeyi temsil eden noktayı belirliyor

Mete *S* ve *T* kümeleri arasındaki tüm eşlemeleri göstermiş ve bu noktaların eşlemeyi temsil ettiğini ifade etmiştir. Mete ile kümelerin farklı eksenler ile temsili üzerine tartışılmıştır:

> *Araştırmacı: Peki şöyle bir şey yapabilir miydik? y-ekseni saatleri gösterseydi, x-ekseni ücreti gösterseydi mümkün olur muydu öyle?*
> *Mete: Ya o zaman şöyle yorumlanabilir ilk önce x-eksenini yorumladığımız için yani şöyle yorumlayabilirdik, ee 1 saati 20 lira değil de, 20 lirası 1 saat yani 20 lira 1 saat alacak. Çünkü dediğim gibi ilk önce x-i yorumladığımız için burada yorum değişecek. Önce diyordu ki 1 saat için 20 lira yani 20 TL, şimdi 20 TL 1 saat.*

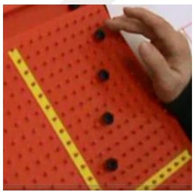
Mete eksenlerde kümelerin farklı sıralama ile temsilinde sıralı ikililer için koordinatların temsiline de dikkat çekerek grafiği nasıl yorumlaması gerektiği açıklamıştır.

Farklı temsil türleri arasında geçişler yapabilmesi için sonraki adımda bir sporcunun saatte yaktığı kalori miktarını gösteren tablo sunulmuştur. Mete ilk önce tablonun hangi iki küme arasındaki veriler olduğunu okuyacağını belirterek satırlarda yer alan ilk hücreleri okumuştur. Ardından saat satırında yer alan 1 ve hemen ardından kalori satırında yer alan 300 hücrelerini okuyarak '*1 saat 300 kalori*' şeklinde yorumlamıştır (bkz. Şekil 187).



Şekil 187. Mete tablo inceliyor

Mete benzer şekilde tabloyu okuduktan sonra '*Şimdi şöyle bir yorum yapabilirim. Ya ben acaba dedim standart devam edecek mi etmeyecek mi onu bekledim. Şimdi burada yani 1 saat diyor, 1 saatte 300 kalori, diğer artan 1 saat artmış 300' er kalori artmış yani*' ifadesiyle tabloyu yorumlamıştır. Mete' nin kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi fark ettiğini ve iki küme arasındaki ilişkiyi yorumlayamaya çalıştığını söyleyebiliriz. Bu iki küme arasındaki ilişkiyi tekrar ifade etmesi istendiğinde ise '*Eee nasıl bir ilişki var, yani saatte 300 kalori tüketimi var*' ifadesiyle açıklamıştır. Bu eşlemeyi temsil etmesi için farklı temsiller sorulduğunda da '*liste yöntemiyle kümelerin yazılması*', '*tablonun dikey olarak konumlandırılması*' ve '*koordinat ekseni üzerinde*' temsili şeklinde sıralamıştır. Böylece koordinat sisteminde verilen eşlemenin gösterilmesi beklenmiştir. İğneli sayfa üzerinde eksenler kümelerin elemanlarını temsil edilebilecek şekilde konumlandırılmış ve birimler belirlenmiştir. Mete koordinat sistemini yeniden konumlandırdığımız için '*Burasını 0 kabul ediyorum. Çünkü kesiştiği nokta 0' dır.*' şeklinde orijini belirtmiş ve birime göre eksenlerde elemanların nasıl eşleneceğini açıklamıştır. Saat kümesi x-ekseniyle ve yakılan kalori kümesi y-ekseni ile temsil edilmiştir. x-ekseni için üç iğne arası 1 birim, y-ekseni için iki iğne arası 100 birim olarak kabul edilmiştir. Mete ilk eşlemeyi yaparken sağ işaret parmağı ile 1 noktasını işaretlemiştir. Sol eli ile '*100, 200, 300*' şeklinde iğneleri sayarak 300 noktasını belirlemiş ve bir birim kayarak $(1, 300)$ noktasına boncuk takmıştır. Aynı strateji ile $(2, 600)$, $(3, 900)$ ve $(4, 1200)$ noktalarını işaretlemiştir (bkz. Şekil 188).

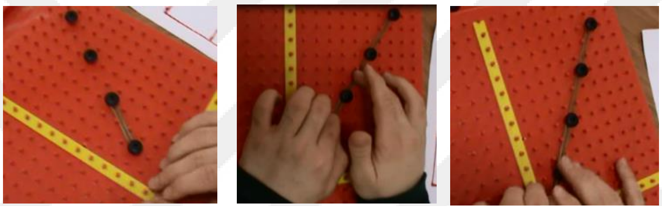


Şekil 188. Mete' nin saat ve kalori kümeleri arasındaki eşleme temsili

Mete' ye işaretlenen bu noktaların dışında zaman ile tüketilen kalori arasındaki ilişki sorulduğunda '*Kalori yakmaya devam ederiz*' yanıtını vermiştir. Bu ilişkinin gösterimi için antrenmana başladıktan yarım saat sonra tüketilen kalori miktarı sorulduğunda '*1 saatte 300 ise yarım saatte 150*' şeklinde ilişkiye dayalı yorumlamıştır. Belirlenen bu noktayı temsil etmesi için Mete' nin 0 ile 1 arsında belirlediği tahmini noktaya bir boncuk bırakılmıştır. Benzer şekilde her yarım saat için yan yana diğer eşlemeleri temsil eden boncuklar bırakılmıştır (bkz. Şekil 189).

Şekil 189. Mete belirlenen ilişkiye göre temsili diğer eşlemeleri gösteriyor

Mete birkaç boncuk koyduktan sonra '*eşlemeler düz bir doğru oluyor*' şeklinde ifade etmiştir. Bu ifadesini temsil etmesi için Mete' ye paket lastikleri verilmiştir. Mete lastikleri kullanarak daha önce işaretlediği noktaları birleştirerek doğru parçaları oluşturmuştur (bkz. Şekil 190).



Şekil 190. Mete' nin ilişkiyi götermede doğru parçaları yardımıyla grafik temsili

Mete benzer şekilde diğer noktaların birleştirilmesi ile oluşan doğru parçalarını yerleştirdikten sonra '*Yani düz bir hat oluşturuyoruz*.' olarak yorumlamıştır (bkz. Şekil 190). Mete orijin ile $(1, 300)$ noktaları arasındaki doğru parçasını oluşturmamıştır.

Araştırmacı: Şu an duruyorum, spora başlamadım. 0' ı kaçla eşlemişim aslında?
Mete: 0' ı 0?
Araştırmacı: Hiçbir şey yapmıyorum daha kalori tüketmeye başlamadığımı düşün.
Mete: Hı hı evet, 0' a 0 olur.
Araştırmacı: 0' dan 1. saate gelene kadar ne olacak?
Mete: Bir çizgi halinde kalori tüketimi devam eder.

Mete grafiği tamamlayan lastiği de taktıktan sonra Şekil 190' da görüldüğü gibi grafikle temsili göstermiştir. Yaptığı bu eşlemleri ve temsilleri yorumlaması istendiğinde '*Eee yani eşlemeleri gösteriyor. Eee eşleme grafiği! […] Antrenman yapan sporcunun günlük kalori eee yakımı grafiği*' ifadesi ile açıklamıştır.

Bir sonraki adımda Mete' ye bazı sıralı ikililer söylenmiştir. Mete bu sıralı ikilileri eş zamanlı olarak tabletinde yan yana yazarak not almıştır. Not alırken sesli olarak parantezleri ve virgülleri söylemiştir. Sırasıyla $(2, 4)$, $(1, 2)$, $(-1, 1)$, $(-2, 0)$ ve $(-3, -1)$ sıralı ikilileri not almıştır. Mete' nin yan yana listelediği sıralı ikililerin bir küme oluşturduğunu belirten araştırmacı bu kümenin neyi temsil ettiğini sormuştur.

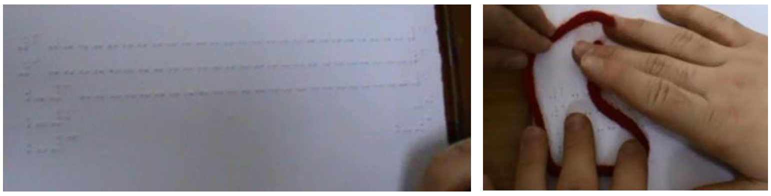
Mete: Neyi temsil eder, acaba ee eşlemeleri mi? Grafik mi?
Araştırmacı: Peki bu ilişkiyi başka nasıl temsil edebilirdik, nasıl gösterebilirdik?
Mete: Yani böyle sıralı ikili yazmak yerine koordinat sisteminde gösterebilirdik. Venn şeması, böyle kümeleri yazarız sağa ve sola sonra eşleriz iple bantla doğru parçasıyla.
Araştırmacı: Tamam nasıl yapacaksın o zaman? Hangi elemanlar hangi kümede olacak bu ikililere göre?
Mete: İkililere göre yani o zaman x-eksenindekiler bir tarafa, y-eksenindekiler bir tarafa. O zaman 2, 1, -1, -2, -3 bir kümenin elemanı 4, 2, 1, 0, -1 bir kümenin elemanı (yazdığı nottan okuyarak)

Mete iki küme arasındaki eşlemeleri gösteren sıralı ikililer kümesini fark etmiştir. Ayrıca bu kümenin bir grafik temsili de olabileceğini belirtmiştir. Ayrıca sıralı ikililer aracılığı ile eksenlerin temsil ettiği kümelerdeki elemanları belirleyebilmiştir. Böylece Venn şeması ile temsil ettiği iki küme arasındaki eşlemeyi gösterebileceğini ifade etmiştir. Tartışmanın sonunda verilen sıralı ikilileri grafik ile temsil etmeye karar verilmiştir. Mete sıralı ikilileri yazdığı nottan okuyarak iğneli sayfa materyelinde grafiği oluşturmaya başlamıştır. İlk noktayı belirlemeden önce '*Birimimiz 1 birim, her iki eksende de*' şeklinde açıklama yapmıştır. $(2, 4)$ noktasını belirlerken önce *x*-ekseninde 2 noktasını, sonra *y*-ekseninde 4 noktasını belirlemiştir. Ardından sol eli ile 4 noktasından $y = 4$ doğrusu boyunca iki birim sayarak $(2, 4)$ noktasını ve benzer şekilde $(1, 2)$ noktasını işaretlemiştir. Mete $(-1, 1)$ noktasını işaretlerken ise orijin noktasından *x*-ekseni üzerinde -1 noktasını belirlemiş ve $x = -1$ doğrusu üzerinde bir birim hareket ederek $(-1, 1)$ noktasını işaretlemiştir. Ayrıca $(-2, 0)$ noktasını işaretlerken biraz düşünmüştür. '*-2' ye 0 noktası -2' ye koyacağım ama? -2 ile 0' ı eşliyoruz. x-ekseninde -2, y de 0*' şeklinde sesli düşünmüş ve $(-2, 0)$ noktasını işaretlemiştir. Mete ile tekrar doğru parçaları yardımı ile sıralı ikilileri belirleme tartışılmıştır. Mete' nin zaman zaman $(x, 0)$ ya da $(0, y)$ noktalarını işaretlerken orijin noktasını işaretleme yanılgısı olduğu belirlenmiştir. Bunun için birkaç örnek sorulduğunda Mete doğru parçalarından yararlanmandan doğru noktaları işaretlemeye başlamıştır. Ayrıca $(0, 0)$ noktasını işaretlemesi istendiğinde Mete '*orijini şimdi işaretleyeceğim tamam bir an karıştırmışım*' şeklinde ifade etmiştir.

Grafik temsilindeki noktaları işaretlemeye devam edilmiştir. $(-1, -2)$ noktası için önce *x*-ekseninde -1 noktasını belirlemiş daha sonra $x = -1$ doğrusu boyunca '*-1, -2*' şeklinde iki birim sayarak $(-1, -2)$ noktasını işaretlemiştir. Benzer şekilde $(-3\ , -1)$ noktasını da işaretlemiştir. Son noktayı işaretledikten sonra '*Evet şimdi grafikle temsil etmiş olduk*' ifadesi ile eşlemenin grafik temsilini tamamlamıştır.

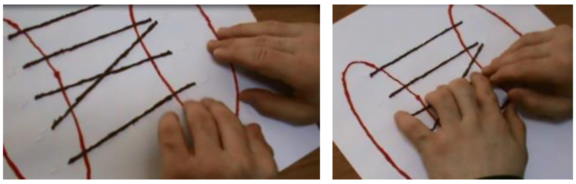
Araştırmacı: Peki burada noktaları doğru parçaları ile birleştirecek miyiz?
Mete: Gerek var mıdır bilmiyorum ama.
Araştırmacı: Ben bu noktaların dışındaki noktalar için eşlemeyi ya da eşlemedeki ilişkiyi biliyor muyum?
Mete: Bilmiyoruz.
Araştırmacı: Kalori örneğinde ne vardı? Standart 300, 300 artış vardı, o yüzden düzgün bir artış olduğunu biliyordum.
Mete: Burada bilmiyoruz. O yüzden birleştirmememiz gerekiyor.

Yukarıdaki sorgulama sonucunda Mete' nin ilişkiye dayalı olarak nokta veya çizgi grafiği çizilmesi gerektiğini henüz anlamadığı tespit edilmiştir. Ayrıca burada verilen kümelerin de önemli olduğunu fark etmediği de görülmüştür. Ancak Mete bu eşlemeyi Venn şeması üzerinde göstermek istemiştir. Bunun için tabletini almış '*Sayıları yani x-leri bir tarafa y-leri bir tarafa*' diyerek sıralı ikilerin koordinatlarında apsislerin söylenmesini istemiştir. Araştırmacı sıralı ikilileri söylemiş, Mete apsisleri ve ordinatları belirleyerek tablette yazmış ve satır başına apsisleri, satır sonuna ordinatları yazarak alt alta sıralı ikililere göre elemanları yazmıştır. Örnek olması için üç elemanı kabartma yazıda doğru parçası çizerek eşlemiştir. Daha sonra ip ile küme temsilleri yapılmıştır (bkz. Şekil 191).



Şekil 191. Mete Venn şeması ile küme temsilinde eşleme yapıyor

Mete' nin temsilinden sonra Venn şeması ile verilen bir eşlemenin grafikle temsilini oluşturması istenmiştir. Bunun için kabartma yazıyla yazılmış ve 3D kalemle temsillerin yapıldığı kağıtlardan eşlemeleri incelemesi istenmiştir. Mete soldaki kümeyi *A* ve sağdaki kümeyi *B* kümesi olarak adlanmıştır. Mete eşlemeleri temsil eden doğru parçalarını incelemiş ve doğrultularının farklı olduğundan bahsetmiştir. Öncelikle sırasıyla *A* ve *B* kümelerinin elemanlarını belirlemiştir (bkz. Şekil 192).

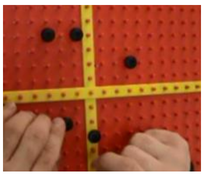


Şekil 192. Mete Venn şeması temsilinde eşlemeleri inceliyor

Eşlemeler için doğru parçalarını takip eden Mete 3 ile 2’ nin, -1 ile 4’ ün eşlendiğini belirlemiştir. Eşlemeleri belirlerken *A* kümesinde elemanı bulduktan sonra iki eli ile doğru parçasını takip ederek *B* kümesinde eşlendiği elemanı okumuştur (bkz. Şekil 192). Benzer şekilde diğer eşlemeleri de belirleyen Mete doğru parçalarının kesiştiği eşlemelerde bir an duraksamış ‘*doğru parçası dediğimize göre düz devam edeceğim*’ diyerek tereddütsüz eşlemeleri belirlemiştir. Mete eşlemeleri belirlerken *A* kümesindeki iki elemanın *B* kümesinde aynı elemanla eşlendiğini fark etmiştir.

Mete: Haa bu eleman 2 tane şeye gitmiş.
Araştırmacı: Nasıl bir eşleme değil bu?
Mete: Birebir eşleme değil.

Mete incelediği eşlemenin birebir olmadığını kolaylıkla ifade edebilmiştir. Burada belirlenen eşlemeyi koordinat sisteminde nasıl temsil edeceği sorulduğunda ilk eşlemeyi tekrar incelemiş ‘*3’ e 2 yani (3, 2) noktasını işaretlerim […] x-eksenine A kümesini, y-eksenine B kümesini koyarım*’ demiştir. Mete eksenler üzerindeki noktalarla elemanları eşlerken iki iğne arasını bir birim olarak belirtmeyi ihmal etmemiştir. Daha sonra Venn şeması temsilindeki eşlemelerde belirlediği sıralı ikilileri tek tek iğneli sayfa materyalinde işaretlemiştir (bkz. Şekil 193).

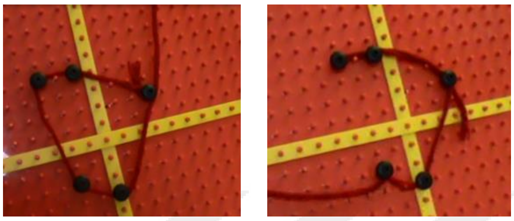


Şekil 193. Mete’ nin Venn şeması temsilinde belirlediği sıralı ikilileri koordinat sisteminde gösterimi

Araştırmacı: Peki bununu sence çizgi grafiği olarak gösterebilir miyiz?
Mete: Yani grafik olarak düz bir hat üzerindeyse
Araştırmacı: Yani çizgi grafiği her zaman düz bir çizgi olmak zorunda mı?
Mete: Biz onları birleştiririz o zaman.
Araştırmacı: Çizgilerin geçeceği diğer noktaların nasıl eşlendiğini biliyor muyuz?

Mete: Bilmiyoruz.

Mete ile nokta ve çizgi grafiğini fark etmesi ve doğru parçaları ile çizgi grafiği oluşturmak için iki nokta arasındaki diğer noktalarda ilişkinin varlığını fark etmesi üzerine tartışılmıştır. Mete henüz bu kavramları ayırt edememiştir. Bunun için işaretlediği noktalar ile çizgi grafiği oluşturabilseydi nasıl bir şey çizmeyi düşündüğü sorulmuştur. Mete Şekil 194 (a)' daki gibi nokta grafiğindeki her noktayı birbiri ile ip yardımı ile birleştireceğini belirtmiştir.



(a) (b)

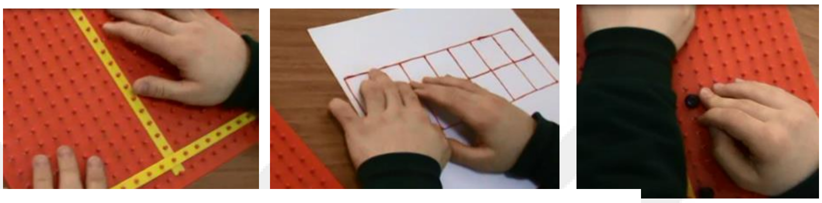
Şekil 194. Mete' nin çizgi grafiği yanılgısı

Araştırmacı nokta grafiği üzerinde başka bir çizgi grafiği oluşturur ve işaretli noktaların dışında diğer noktalarda çizgi grafiğinin nasıl hareket ettiğini bilmediği için çizgi grafiği oluşturamayacağını açıklamıştır (bkz. Şekil 194, (b)).

Bir sonraki adım için dalgıç, su basıncı ve vurgun yeme üzerine kısa bir sohbet edilmiştir. Deniz altındaki mesafeye göre su basıncını gösteren tablo sunulmuştur. Mete tablonun yatay konumlandırıldığını anlar anlamaz satırların ilk hücrelerini sırasıyla okumuştur. Daha sonra sırasıyla önce derinlik satırındaki hücreyi, ardından su basıncı satırındaki hücreyi okuyarak tablodaki tüm verileri sesli olarak belirtmiştir. Tabloyu nasıl yorumladığını anlamak için aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

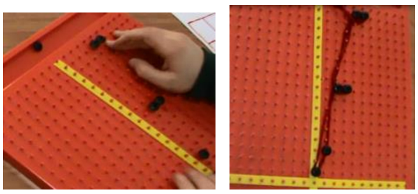
Mete: Yani ben şöyle düşünüyorum buradan birincisi metreydi, bunlar metre derinlik yani, hani 2 var, 1 var falan A kümesi diyelim metre (tablodaki üst satırı işaret ederek)
Araştırmacı: Derinliğe A kümesi dedik.
Mete: Derinlik yani, B kümesi de atm cinsi, basınç (tabloda alt satırı işaret ederek)
Araştırmacı: Su basıncı kümesi. Peki aralarında ilişki nasıl bir şey?
Mete: Aralarındaki ilişki burası 0, deniz seviyesindeyiz. O zaman, basınç birmiş. 1 atm. 3 metrede 9, 4 metrede 27, 5 metrede 27. 5 metrede nasıl 27 oluyor ki yani daha da neyse yani bu şeyi gösteriyor birebir eşleme olmamış.
Araştırmacı: Evet birebir eşleme olmamış.
Mete: Yani bir eleman iki farklı elemana gitmiş. Yani eşlenmiş.

Mete tabloda yer alan kümeleri belirlemiş, elemanlarını söylemiş ve yorumlamıştır. Ayrıca tablo temsilinde eşlemeyi belirleyip birebir eşleme olmadığını ifade etmiştir. Ancak iki kümenin elemanları arasında herhangi bir ilişkini var olup olmadığını incelememiştir. Bu eşlemeyi temsil eden grafiğin nasıl olacağı sorulduğunda '*Bunun grafiği? Bunun grafiği düz bir çizgi olur, çünkü diğer noktalar arasındaki şeyi biliyoruz yani hani artış ama düzenli bir şey yok*' ifadesiyle grafik temsilindeki yanılgısının devam ettiği tespit edilmiştir. Mete' nin grafiği oluştururken sıralı ikilileri işaretlerken ilişkiyi fark etmesi için fırsat verilmiştir. Bunun için iğneli sayfa materyalinde temsil etmesi istenmiştir. Mete ilk önce derinlik kümesini x-ekseniyle ve basınç kümesini y-ekseniyle temsil etmiş, ardından birimleri belirleyerek koordinat eksenlerini yerleştirilerek eksenler üzerindeki noktaları kümelerin elemanları ile eşlemiştir (bkz. Şekil 195).



Şekil 195. Mete' nin koordinat sisteminde grafik temsili

Mete tabloyu okuyarak sıralı ikililer şeklinde eşlemeleri ifade etmiştir (bkz. Şekil 195). Daha önce yaptığı gibi önce x-eksenindeki noktayı tespit etmiş, sonra y-eksenindeki noktayı tespit etmiş ve x-eksenine paralel doğru boyunca birimleri sayarak sıralı ikilileri işaretlemiştir. $(2,9)$ noktasını işaretledikten sonra $(3,9)$ noktasını işaretleyeceğini bildiği için bir birim hareket ettirerek bu noktada sağ elini sabit tutmuştur. Sol eli ile aldığı boncuğu $(3,9)$ noktasına takmıştır (bkz. Şekil 195). Şekil 196' daki gibi sıralı ikililerin her birini işaretledikten sonra grafik üzerine aklı yürütmesi için tartışma ortamı oluşturulmuştur.



Şekil 196. Mete' nin oluşturduğu nokta grafiği

> *Araştırmacı: Bunları doğru parçaları ile birleştirmen mümkün mü?*
> *Mete: Yine aralarındaki ilişkiyi bilmiyoruz ya! Sabit bir artış, azalış böyle bir şey bilmediğimiz için çizemeyiz.*

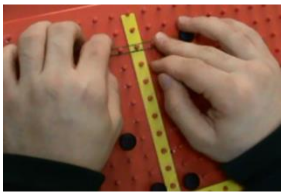
Mete eşlemelerin belirli bir ilişkiye göre kurulmadığından, çizgi grafiği oluşturamayacağını ifade etmiştir. Ancak bir çizgi grafiği oluşturması istendiğinde noktaları doğru parçaları ile nasıl eşleyeceği sorulmuştur. Bunun için çizgi grafiğini ip ile temsil etmesi istenmiştir.

Ayrıca su basıncının diğer noktalarda sabit şekilde arttığını düşünmesi istendiğinde Şekil 196' daki gibi ip ile noktaları birleştirerek temsil etmiştir.

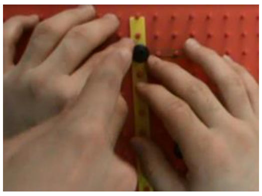
Mete' ye bazı sıralı ikililer söylenmiştir. Mete' de tabletinde yazması istediğinde '*Sıralı ikili halinde mi yazacağım?*' diyerek eşlemelerin nasıl temsil edileceğinin farkında olduğunu belirtmiştir. $(-3,9),(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1,),(2,4)$ ve $(3,9)$ noktaları verilmiştir. Bu sıralı ikililerin temsil ettiği eşlemenin bağlı olduğu ilişkiyi tespit etmesi beklenmiştir. Mete yazdığı sıralı ikilileri tekrar sesli olarak okumuştur.

Mete: Yani birinin karesi mi acaba kareleri mi?
Araştırmacı: Neyin karesi?
Mete: Yani birbirlerinin karesi, ee şimdi -3' ün karesi 9 mesela.
Araştırmacı: Birinci bileşen neyi anlatıyordu?
Mete: x! x, y-nin karesi mi? Ha y, x-in karesi ile eşlenmiş.
Araştırmacı: Peki bu ilişkiye göre bu noktalardan hareketle grafik çizebilir miyiz?
Mete: Tabi, o çünkü düzgün olduğu için çizebiliriz. İlişkiyi biliyoruz, çok net biliyorum, kareleri, y-leri verir.

Mete güçlük yaşamadan verilen sıralı ikililerin temsil ettiği eşlemenin yapıldığı kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi belirleyebilmiştir. Ayrıca cebirsel olarak da ifade edebilmiştir. Belirlediği bu ilişkiye göre grafik çizebileceğini söylemiştir. Böylece Mete' nin nokta ve çizgi grafiği arasındaki farkı anladığı belirlenmiştir. Grafiği oluşturması istendiğinde önce $(0,0)$ noktasını işaretlemek istemiştir. Daha sonra eksenlere elemanların iki iğne arası uzunluğu bir birim kabul ederek yerleştirdiğini ifade etmiştir. Sonra yazdığı nottaki sırayla sıralı ikilileri işaretlemiştir. Noktaları daha önceki stratejisi ile belirledikten sonra '*Lastik alabilir miyim? Çünkü benim için lastik daha hissedilebilir olduğu için*' diyerek grafiği paket lastikleri ile temsil etmek istemiştir. Mete ilk olarak $(3,9)$ noktasını işaret etmiş '*Şuradan başlıyorum, fark eder mi?*' şeklinde sormuştur. Düşündüğü şekilde grafiği oluşturması istenmiştir. Mete Şekil 197 (a)' da olduğu gibi $(3,9)$ ve $(-3,9)$ noktalarını birleştiren doğru parçasını oluşturmuştur.


(a)


(b)

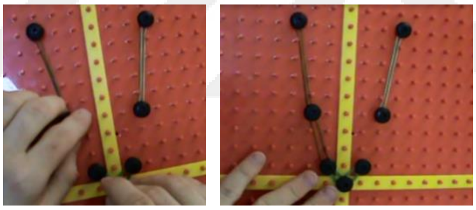

(c)

Şekil 197. Mete çizgi grafiği oluşturuyor

Mete' nin oluşturduğu doğru parçasının verilen ilişkiyi gösteren noktaları birleştirdiğini fark etmesi için aşağıdaki tartışma ile devam edilmiştir:

Araştırmacı: O zaman bu aradaki diğer eşlemeleri mi gösteriyor bu lastik?
Mete: Galiba
Araştırmacı: Şurası 9 noktası değil mi şu an? (bkz. Şekil 197, (b))
Mete: Evet
Araştırmacı: Çizdiğin grafik 9 noktasından geçtiğine göre (Araştırmacı (0, 9) noktasına boncuk takar, bkz. Şekil 197, (c)). *Ama bizim eşlememiz karesi ile eşleniyordu. Şu an ne oldu 0 ne ile eşlenmiş oldu?*
Mete: 0' ın karesiymiş gibi yaptım. Burası (0,9) noktası değil mi? (boncuğu çıkarır) Ha ona göre yapacağız.
Araştırmacı: Evet, o zaman lastik buradan geçiyor mu?
Mete: Geçmez!

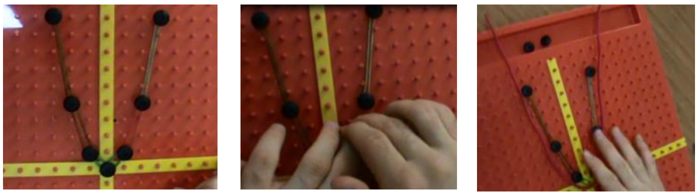
Mete lastiği çıkarmıştır, $(-3, 9)$ ve $(-2, 4)$ noktalarından lastik takmıştır. Böylece ilişkiye göre eşlenen noktaları birleştiren çizgiyi oluşturduğunu algılamıştır. Daha sonra $(-1, 1)$ ve $(0, 0)$ noktalarını, ardından $(0, 0)$ ve $(1, 1)$ noktalarını birleştiren lastikleri takmıştır. (3, 9) ve (2, 4) noktalarını birleştiren lastikleri taktıktan sonra '*Başka var mı ilişkili olan nokta?*' şeklinde sormuştur (bkz. Şekil 198).



Şekil 198. Mete sıralı ikililer arasındaki ilişkiye göre grafik oluşturuyor

Araştırmacı: Mesela (-2, 4) noktasına kadar (-1,1) var. Mesela -1 ile -2 arasında bir sayı düşünelim -3/2!
Mete: Hı hı 9/4!
Araştırmacı: 2,5 ile 3 arası yani şu arada bir yerde bir nokta daha var (Mete' nin elini tutar ve tahmini noktaya dokundurur)
Mete: Bu arada da ilişkili noktalar var yani.
Araştırmacı: O zaman niye eşlemedik?
Mete: Hımm eşleyebiliriz.

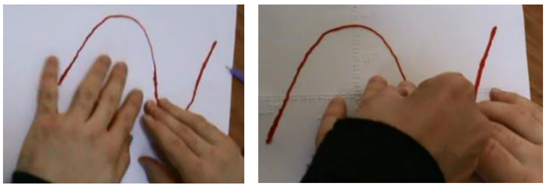
Mete (-1, 1) ve (-2, 4) noktalarından geçen lastiği takmıştır. Başka ilişkili olan eşlemesi gereken noktaların olup olmadığı sorgulanmıştır (bkz. Şekil 198). Mete eliyle sadece orijinin etrafındaki noktalara dokunarak '*Başka, yok hocam artık, bence*' şeklinde cevap vermiştir. (1, 1) ve (2, 4) noktaları arasında daha önceki sürece benzer şekilde örnek bir nokta sorgulanmıştır. Mete bu iki noktayı içeren lastiği takmıştır. Grafiği tamamlayan Mete' den nasıl bir grafik oluştuğunu betimlemesi istenmiştir. Mete eliyle (-3, 9) noktasından başlayarak parmaklarıyla grafiği takip ederek betimleye çalışmıştır (bkz. Şekil 199).



Şekil 199. Mete' nin $y = x^2$ grafiği

Mete grafiği betimlerken '*Ya V şekline benziyor.*' İfadelerini kullanmıştır. Lastiklerden ve boncuklardan kaynaklanan bu algıyı ortadan kaldırmak için elektrik kablosu ile grafik yeniden temsil edilmiştir. Mete grafiği incelediğinde '*Evet bu kez U şeklinde olmuş*' ifadeleri ile betimlemiştir (bkz. Şekil 199).

Mete' ye aşina olduğu kabartma yazı ile çizilmiş ve 3D kalemle belirginleştirilmiş bir grafik verilmiştir. Bu grafiği öncelikle betimlemesi ve grafiğin geçtiği noktalardan belirleyebildiklerinin koordintalarını söylemesi istenmiştir. Mete grafiği Şekil 200' da görüldüğü incelemiştir.



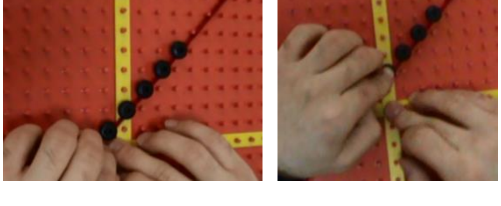
Şekil 200. Mete kabartma yazı ile tasarlanmış grafiği inceliyor

> *Mete: Hocam şimdi burada bir 5 yazıyor ama. Burası 5.*
> *Araştırmacı: Bu noktanın koordinatları ne? Apsisi ne?*
> *Mete: 0! Haa 0' a 5 mi? Evet başka hangi nokta var. Hadi bakalım (elini grafik üzerinde gezdirir, y-ekseni üzerinde parmağını tutarak) burada bir 3 var. 3' e 5 mi? (sağ eli x-ekseninde 3 noktasında iken sol eli y-ekseninde 5 noktasındadır)*
> *Araştırmacı: Niye öyle grafiği takip ettin böyle yaptın (sol elinden tutarak grafik boyunca 5 noktasına doğru Mete' nin parmağını gezdirerek)*
> *Mete: 5' i kesmiyor mu?*
> *Araştırmacı: Mete orası 0' a 5 noktası değil miydi?*
> *Mete: Evet. Ama aynı zamanda 3' e 5 de olamaz mı?*
> *Araştırmacı: 3' e 5 noktası neresi Mete?*
> *Mete: Hmm*

Mete grafiğin geçtiği noktaları belirlemekte ve noktaları hissetmekte güçlük yaşamıştır. Mete' nin elini tutarak sanki doğru parçaları varmış gibi $(3, 5)$ noktasının yaklaşık yeri gösterilmiştir. Grafiğin bu naktadan geçmediği belirlenmiştir. Daha sonra Mete' nin elinden tutularak grafiğin geçtiği noktalar ve bu noktaların koordinatları birlikte incelenmiştir (bkz. Şekil 200). Kabartma yazı ile grafik çizimlerinde noktaların doğru parçaları ile eşlenmesinin koordinatları belirlemede daha iyi olacağı fikri üretilmiştir.

Bu öğretim oturumunda yer alan adımların değerlendirilmesinde Mete '*Koordinat sistemini inceledik. Koordinat sisteminde eşlemeler yaptık üzerinde. Sonra sıralı ikili kavramını tanımıştık. Sıralı ikili x ve y noktalarından oluşan noktalar veya x virgül y şeklinde. Sonra grafikleri tanıdık biraz. $y = x^2$ grafiğini anlattık. Ama grafikleri doğru parçaları ile birleştirmemiz gerektiğini biraz anladık. Yani bizim için. Grafik incelemeleri yaptık, doğru parçaları başka materyaller yardımıyla da yaptık. […] Ondan sonra eşlemeleri farklı yöntemlerle gösterdik. Belli bir ilişki varsa eşlemede o zaman çizgi grafiği yaptık, yoksa kalıyordu noktalar sadece. Bir de noktaları rastgele birleştiremiyoruz iple, ilişkili olan noktalar oluyor sadece*' şeklinde özetlemiştir. Bu ifadelerden Mete' nin koordinat sisteminde iki küme arasındaki eşlemeleri temsil etmeyi, belirli bir ilişkiye göre eşlemelerin tanımlı olduğu küme üzerinde çizgi grafiği oluşturmayı, sıralı ikili kavramı ve farklı temsiller üzerine bilgi sahibi olduğunu söyleyebiliriz.

Bir sonraki öğretim oturumda Mete' nin iki küme arasındaki ilişkiye dayalı koordinat sisteminde grafik temsilleri üzerine çalışmalar devam etmiştir. Mete' ye iğneli sayfa üzerinde ip ile temsil edilen $y = x + 2$ grafiği bazı noktaları işaretlenmiş olarak sunulmuştur. Mete ilişkiyi belirlemek için işaretlenmiş noktalardan başlamak istemiş ve eksenlere noktaların eşlenmesinde kullanılan birimi sormuştur. İlk $(0, -2)$ noktasına dokunan Mete '*Şimdi burası orijinse (orijin noktasını eliyle gösterir) bir dakika 1, hocam şurası -2 mi oluyor? Şey (-2,0) oluyor*' şeklinde iğneleri sayarak kolaylıkla koordinatları belirleyebilmiştir (bkz. Şekil 201).



Şekil 201. Mete $y = x + 2$ grafiğini inceliyor

$(-1, 1)$ noktasının koordinatlarını orijin noktasına dokunmadan yalnızca iğneleri hissederek belirleyebilmiştir. $(0, 2)$ noktasının koordinatlarını ise sol işaret parmağı ile 2 noktasını, sağ işaret parmağı ile orijin noktasını işaret ederken sezgisel olarak belirlemiştir (bkz. Şekil 201). $(1, 3)$, $(2, 4)$ ve $(3, 5)$ noktalarının koordinatlarını belirlerken sağ eli ile *x*-ekseninde iğneleri sayarak ve sol eli ile *y*-eksenindeki iğneleri saymıştır. İğneleri sayarken işaretli nokta ile parmağının aynı doğru üzerinde olduğunu sezgisel olarak belirlemiştir. Mete noktaların koordinatlarını kolaylıkla belirleyebilmesini ve eşlemeleri oluşturan ilişkiyi '*Yani birer tane kaydı galiba [...] eksenlerde birer tane kaymış. Bir ilişkiyi bir örüntü gibi göstermiş*' şeklinde açıklamıştır. Mete' nin kümeler arasındaki ilişkiye dayalı eşlemeyi örüntü kavramı ile ele alması üzerine tartışma aşağıdaki gibi devam etmiştir:

Mete: Örüntü çünkü aynı şeyler olduğu için artış aynı hani örüntü gibi.
Araştırmacı: Hah, güzel o zaman bir ilişki var değil mi?
Mete: Evet
Araştırmacı: Biz ona ilişki diyoruz, örüntüyü oluşturan şey aslında bir ilişkidir.
Mete: İlişkidir evet.
Araştırmacı: Burada bir ilişki var, o zaman bu iki küme yani x-ekseni bir kümeyi gösteriyor, y-ekseni bir kümeyi gösteriyorsa bu iki küme arasındaki eşleme nasıl bir ilişkiye göre yapılmış?
Mete: Nasıl bir ilişkiye göre? Ya şimdi x-ekseninden mesela 1' e 3 dedi. Sonra (2, 4), sonra (3, 5) dedi. Yani ondan sonra (-2, 0) mesela, o da vardı. (0, 2) vardı. Yani birer tane sağa doğru kaydığını düşünüyorum.
Araştırmacı: Tamam, peki elemanlar arasında bir ilişki var mı, yani x-eksenindeki elemanlarla y-eksenindeki elemanlar arasında bir ilişki var mı?
Mete: Mesela (2, 4), (3, 5) eee yani ikişer fazlası! Şey yani 3 ve 5, 5 3' ün iki fazlası.
Araştırmacı: Güzel, o zaman y-ekseninin elemanları
Mete: x-ekseninin elemanlarının 2 fazlası olarak ilişkilendirilmiş ve eşlenmiş.
Araştırmacı: Eşlenmiş değil mi? O zaman buradaki ilişki y-nin, x-in 2 fazlası olacak şekilde eşlemenin yapılması.

Tartışmanın bu bölümüne kadar Mete, iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiye dayalı eşlemeyi açıklayabilmiş ve bu ilişkiyi belirleyebilmiştir. Ayrıca bu ilişkinin belirli bir örüntü oluşturduğunu da ifade etmiştir. Ayrıca *x* ve *y*-eksenleri üzerinden genellemeye ulaşarak bu genellemeyi sözel olarak açıklamıştır. Ancak grafiği temsil eden ilişkiyi gösteren cebirsel ifadeyi belirlemek istediğinde aşağıdaki yanılgıları ve önbilgi eksiklikleri ortaya çıkmıştır:

Mete: 2x mi oluyor?
Araştırmacı: 2x mi olur sence?
Mete: Yok yani hani x eee y mi 2 tane artıyor değil mi?
Araştırmacı: y, x-in 2 fazlası.
Mete: Hı.
Araştırmacı: Öyle demedin mi? (3, 5) dedin 5, 3' ün 2 fazlası dedin.

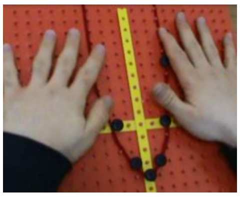
Mete: y, x-in 2 fazlası evet, x + 2y mi?
Araştırmacı: Hmm bu ifadeyi inceleyelim ama önce bana şunu söyeler misin, bu doğru üzerinde aldığın herhangi bir noktanın nasıl bir ilişkiyi göstermesini beklersin?
Mete: x-in yani y-nin x-in 2 katı şey 2 fazlası olduğunu.

Mete' nin ilişkiyi ifade ederken cebirsel temsildeki yanılgısının 'kat ve fazlası' kavramlarındaki yanılgısına dayalı olduğu belirlenmiştir. Bu nedenle Mete' den doğru üzerindeki başka bir noktayı belirlemesi ve bu noktanın koordinatlarını ifade etmesi istenmiştir. Mete grafik üzerindeki örüntüden yararlanarak '*O zaman (3, 5) idi, (4, 6) yapalım*' diyerek o noktaya boncuk takmıştır. Daha sonra üçüncü bölgede doğrunun üzerindeki bir noktaya dokunur '*Burası bir dakika (-2, 0) idi burası… Eee (-1, 1) mi, yok. Burası -3 değil mi hocam? (-3, -1) mi?*' şeklinde tereddüt içerisinde yanıtlamıştır. Mete bu noktaları belirlerken grafik üzerinde noktaların koordinatlarını belirleme bilgisinden yararlanmıştır. Başka bir ifade ile noktaların koordinatlarını iğneleri sayarak belirlemiştir. Ancak belirlediği cebirsel ilişkiyi kullanmamıştır. Ardından hızlı bir şekilde $(-4, -2)$ ve $(-5, -3)$ noktalarının koorinatlarını söyleyerek boncukla işaretlemiştir. Mete noktaları belirledikten sonra '*Haa şöyle bir şey de fark ettim hocam, şimdi x-eksenindeki negatif sayı ama yani aslında küçük ama rakam olarak büyüyünce negatif sayı gerçi ama fazla bir şey anlam olmadı ama neyse. Hani (2, 4) ama bu da (4, 2) oldu ama negatif sayı sonuçta hani çünkü -4, -3' ten daha küçük olduğu için*' ifadesi ile fikrini açıklamıştır. Böylece cebirsel ifadede yer alan '+2' fazlası terimine dikkat çekilmiştir. Mete '*iki fazlası oluyor yani*' diyerek tekrarlamıştır. Ancak daha sonra '*Peki bir şey sorabilir miyim? x + 2 + y mi oluyor, yoksa 2y + 2 mi oluyor grafik?*' ifadesi ile cebirsel temsilde güçlük yaşamıştır. Burada $(3, 5)$ noktası için düşünmesi istenmiş, 3' ün *x* ve 5' in *y*-eksenine ait olduğu belirtilmiştir. Ancak Mete cebirsel ifade etmede başarısız olunca bir sonraki oturumda tekrar ele alınacağı belirtilmiştir.

Mete iğneli sayfa materyalinin iğneleri yardımı ile cebirsel ilişkiyi kullanmadan grafik üzerindeki noktaların koordinatlarını belirlemiştir. Bu nedenle doğrusal bir ilişki yerine parabolik bir grafik sunulmuştur. İğneli sayfa materyali üzerinde $y = x^2 - 4$ grafiği ve bu parabol üzerinde bazı noktaların işaretli olduğu temsil verilmiştir. Mete grafiği incelemeye başladığında '*Şey, ipi takip ediyorum*' demiş ve dokunduğu ilk boncuk için '*Burası var. 3' e 5 noktası değil mi?*' şeklinde koordinatlarını belirtmiştir. Mete sağ eli ile boncuğa dokunurken sol eli ile *x*-eksenindeki tahmini apsis noktası üzerinde elini sabit tutmuştur (bkz. Şekil 202). Mete sezgisel olarak koordinatları belirlemeye başlamıştır. Ardından araştırmacıdan teyit etmesini istemiştir.

Şekil 202. Mete grafik üzerindeki noktaların koordinatlarını belirliyor

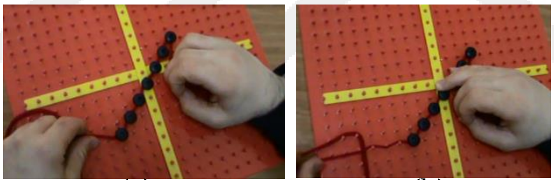
Mete $(-2, 0)$ boncuğunu hisseder hissetmez koordinatlarını söylemiştir. Bu noktadan ipi takip ederken $(-3, 5)$ notasına dokunduğunda sol eli ile -3 noktasından iğneleri sayarak $(-3, 5)$ boncuğuna dokunduğunda bu noktanın koordinatlarını söylemiştir. Benzer şekilde diğer işaretli noktaların koordinatlarını da belirledikten sonra, ondan grafiğin temsil ettiği ilişkiyi belirlemesi ve işaretli noktaların koordinatlarını tekrar söylemesi istenmiştir. İşaretli noktaların koordinatları sırasıyla söylendikten sonra '*şimdi şöyle bir durum var, bazıları 4 tane artıyor falan bazıları ikişer tane, bazıları da sanırım beşer tane, öyle bir şey var ama*' diyerek apsis ve ordinatlar arasındaki artma veya azalma ilişkisine odaklandığını belirtmiştir. Mete cebirsel olarak ilişkiyi belirleyemediği için grafiğin doğrusal olmadığını belirtmiştir. Bu nedenle Mete' den bu grafiği nasıl yorumlayacağını açıklaması için grafiği betimlemesi istenmiştir. Mete grafiğin kollarında ellerini gezdirdikten sonra Şekil 203' teki gibi grafiği işaret ederek '*Şöyle U şeklinde mesela*' ifadesiyle betimlemiştir.



Şekil 203. Mete grafiği inceliyor

Grafiğin temsil ettiği ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmesi için $(-3, 5)$ noktası üzerinden apsisin karesini alması ve 4 eksiğinin ordinata eşit olduğunu belirlemesi için ipucu verilmiştir. Mete '*Anladım yani üssü 2, eksi 4 öyle bir şey. x^2 - 4 mü?*' diyerek emin olmadan sormuştur. Bu fikri doğrulaması için seçtiği başka bir nokta için ilişkinin aynı olup olmadığı kontrol etmesi istenmiştir. Mete $(1, -3)$ noktası için belirlediği cebirsel ilişkiyi doğrulamıştır.

Sonraki adımda Mete' ye sıralı ikililer söylenmiştir ve bu noktalara göre ilişkiyi belirlemesi istenmiştir. Mete sıralı ikilileri eş zamanlı olarak iğneli sayfa üzerinde işaretlemeyi tercih etmiştir. Sırasıyla $(-3, -4), (-2, -3), (-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1)$ ve $(3, 2)$ noktalarını kolaylıkla işaretleyebilmiştir. Bu noktalar için işaretlerken önce apsisi, daha sonra o noktadan iğneleri sayarak ordinatı belirlemiş ve işaretlemiştir. $(-1, -2)$ noktasını işaretlerken '*Galiba çapraz gideceğiz yine*' demiştir ve bu noktadan sonra diğer noktaları doğru üzerinde hareket ederek işaretlemeye başlamıştır. Ancak başlangıçta ilk noktayı işaretlemeden önce orijini belirlemekte, yani hissetmekte sıkıntı yaşamıştır. Mete ilişkiyi fark ettiğini ifade etse de sadece bir doğru grafiği olduğunu hissetmiştir. Mete' nin grafiği zihninde nasıl algıladığını anlamak için ip veya kablo ile grafiği oluşturması istenmiştir. Mete kablo ile grafiği temsil etmeye çalışmış, fakat kabloya şekil vermekte zorandığı için ip yardımıyla grafiği oluşturmayı denemiştir. Başlangıçta $(3, 2)$ noktasından başlayarak ipi noktalar üzerine dolayarak Şekil 204, (a)' daki gibi oluşturmuştur.



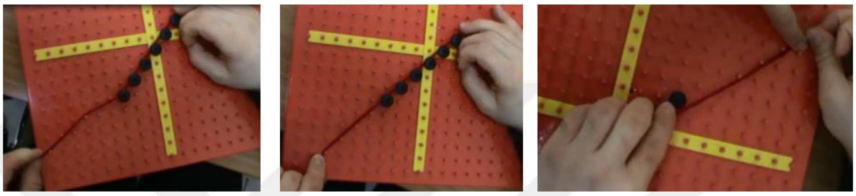
(a) (b)

Şekil 204. Mete $y = x - 1$ grafiğini oluşturuyor

Mete işaretli noktalardan sonrası için grafiğin nasıl olacağını düşünürken '*Sonra? İlişki devam edebilir mi?*' şeklinde sormuştur. Bu noktaların iki reel sayılar kümesi arasındaki eşlemeler arasından seçildiği söylendiğinde Şekil 204, (b)' deki gibi grafiğin devam ettiğini ifade etmiştir. Mete' nin oluşturduğu grafik üzerinden aşağıdaki tartışma yaşanmıştır:

Araştırmacı: Niye grfaik sabit devam ediyor?
Mete: Çünkü aynı şekilde yapmayacak mıyız?
Araştırmacı: Nasıl? Devam ettirir misin bana bu ilişkiyi?
Mete: En son buradaydı ((-3, -4) noktasını işaret eder)
Araştırmacı: Böyle çapraz çapraz gidince buradan görüntü nasıl oluyor biliyor musun? Zig zag gibi oluyor? Öyle mi olmalı?
Mete: Ben bunu birleştirmeyi bilemedim galiba, acaba ipi noktalara dolamadan göstersem olur mu?

Mete ipi işaretli noktaların etrafına dolayarak ipin sabit kalmasını istediği için benzer şekilde iğneler için de zig zag şekiller yaparak grafiği devam ettirmiştir. İpi çıkarıp tekrar sadece noktaların yanından geçirerek uzatmıştır. Ancak bu kez de düz bir çizgi olarak uzatamamıştır. Araştırmacı ipi gergin bir şekilde tutacağını ve Mete' nin eliyle olmasını istediği şekilde iğnelerin arasından düzeltmesini teklif etmiştir. Grafiğin birinci bölgede nasıl devam edeceği sorulduğunda ise '*doğru bu grafiğimiz bir doğru yani, onun için aynı devam edecek, siz yine ipi gerebilir misiniz ben göstereyim?*' diyerek grafiği tamamlamış ve bir doğru grafiği olduğunu ifade etmiştir (bkz. Şekil 205).



Şekil 205. Mete' nin $y = x - 1$ grafik temsili

Grafik temsili yaptığı ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmesi istenmiştir. Mete işaretli noktaların koordinatlarını tekrar söylenmesini istemiştir. Ancak ilişkiyi grafik üzerinden kendisinin belirlemesi istenmiştir. Mete grafik üzerinde noktalara dokunarak koordinatlarını söylemiştir. Sırasıyla $(1, 0), (2, 1), (3, 2)$ noktalarını belirledikten sonra aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

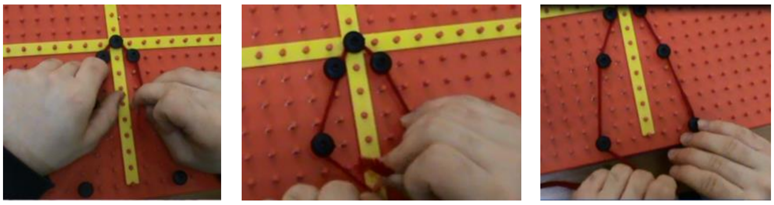
Mete: Hocam aralarında birer tane azalarak gitmiş, şeyi x ile y arasındaki ilişkiyi söylüyorum. (1, 0), (3, 2) yani x, y-lerden birer tane fazla.
Araştırmacı: x, y-lerden birer tane fazla ne demek?
Mete: Yani y-ekseni, x-ekseninin bir eksiği.
Araştırmacı: y-eksenindeki elemanlar x-eksenindeki elemanların bir eksiği ile eşlenmiş.
Mete: Ama diğer türlü de doğru değil mi? x deki elemanlar y-deki elemanların birer fazlası ile eşlenmiş desek?
Araştırmacı: Öyle de doğru evet.
Mete: Peki şey mi olurdu bu, ee nasıl söyleyeyim x in yerine 1 yazarsak, 1 eksi ee, eksi mi diyeceğiz, 1-y mi? Anlamadım.

Mete grafiğin temsil ettiği ilişkiyi ifade etse de cebirsel olarak söylemlerinde matematiksel yanılgılar vardır. Bunun için ipuçları verilerek ifade etmesi sağlanmıştır. Bunun üzerine Mete cebirsel ifade ile $x = y + 1$ veya $y = x – 1$ doğru denklemlerini ifade etmeye çalışmış, ancak başarılı olamamıştır. Bu durum bir sonraki oturuma yön verecek önbilgileri için önemli bulgular sunmuştur.

Bir sonraki adımda sıralı ikililer iğneli sayfa materyali üzerinde işaretlenmiş olarak sunulmuştur. $(0,0), (-1,-1), (1,-1), (-2,-4), (2,-4), (-3,-9)$ ve $(3,-9)$ noktaları işaretlenmiştir. Mete tek tek bu noktaların koordinatlarını belirlemiştir. Mete' ye bu eşlemeyi oluşturan ilişkiyi belirlemesi ve ondan bu ilişkinin reel sayılar kümesi üzerinde grafiğinin nasıl olacağını belirlemesi istenmiştir. Mete işaretli noktaları dokunarak koordinatlarını düşünmüştür.

Mete: Grafiği bizce nasıl olur? (0,0) var bir kere, (0,0) bir kere eşit gibi bir şey yani ne fazla ne eksik. Şurası (-1,-1), Bu da aynı (0,0) gibi. (1,-1) var, 1 , -1' in 2 fazlasıdır. -1 de 1' in 2 eksiğidir, öyle düşünüyorum, şu an yorum yapıyorum.
Araştırmacı: Diğer iki nokta için geçerli mi bu ilişkiyi?
Mete: İşte sağlamıyor yani bence bu sadece nokta grafiğidir.
Araştırmacı: Diğer noktalara da bir bak bakalım.
Mete: Bakalım da bence, çünkü bir şeylik ilişki yoksa noktalar grafiği olabilir mi? Dersin başında söylemiştiniz noktalar grafiği olabilir diye. (-2, -4) yani -4, -2' nin 2 eksiğidir. Doğru yorum yaptım mı? Negatif sayılar ya çünkü. Hocam bunlar, noktalar grafiği bu, öyle konuşabilirim ama bilmiyorum.
Araştırmacı: (-3, -9) var, bir de (3, -9) var. (-2, -4) var, bir de (2, -4).
Mete: Haa… Evet, o zaman onlar da bir ilişki olabilir. (Biraz düşündükten sonra) (-1,1) ya dedik işte birincisinin 2 fazlası, 2 eksiği şeklinde. -2, -4' ün 2 fazlası değil mi?
Araştırmacı: Tamam, başka, başka bir ilişki var mı? İlişki deyince sen sadece 2 fazlası, 2 eksiği, 1 fazlası,1 eksiği diye mi düşünürsün?
Mete: Yok hocam kat ilişkisi ve bölümler olabilir. Haa şöyle olabilir belki, (-2, -4) var (2, 4) var. Şimdi (-2, -4), -2' nin karesi 4, kare denesek. 2 ile -4 ee… 2' in karesi 4. Düşünebiliriz galiba!
Araştırmacı: Bak mesela 1 için düşün, (1, -1) noktası var değil mi? x için birinci bileşen, 1 karesi 1, onun negatifi -1.
Mete: Ha eksilisi var eksiği değil, eksilisi! Aaa evet! Ha 3' ün karesi 9, eksilisi -9, ee -3' ün karesi de 9.
Araştırmacı: O zaman neye göre eşlenmiş bunlar?
Mete: Bunlar ee karesinin eksilisi, x-in karesinin y-deki negatifi, öyle mi?

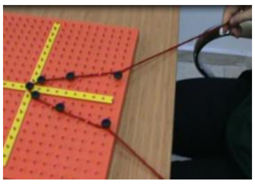
Mete ilk olarak sabit bir sayı ile artma veya azalma üzerine ilişkiyi belirlemeye çalışmıştır. Belirlediği bu ilişkilerde verilen sıralı ikililerin her biri için doğru olacak bir ilişki belirlemeyince nokta grafiği olduğunu düşünmüştür. İki kümenin elemanları arasındaki eşlemede yalnızca artma ve azalma ilişkisi ile sınırlı olmadığı hatırlatılınca apsis ve ordinatlar arasında birinin diğerinin kuvveti olması durumunu düşünmüş ve 'karesi olma' ilişkisini fark etmiştir. Negatif ilişkisi için ipucu verilmiş olsa da Mete apsis ve ordinat arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilmiştir. Daha sonra bu ilişkinin reel sayılar üzerinde devam ettiği düşünüldüğünde nasıl bir grafik olacağını iple temsil etmesi istenmiştir. Mete ipi orijine takılı olan boncuğa takmış, sağ ve sol eli ile sırasıyla dördüncü ve üçüncü bölgedeki işaretli noktaların yanından geçirmiştir (bkz. Şekil 206).



Şekil 206. Mete $y = -x^2$ grafiğini oluşturuyor

Dördüncü ve üçüncü bölgedeki noktaları ifade etmek için '*Önce pozitife mi gitsem negatife mi?*' şeklinde sesli düşünmüştür. Daha sonra önce dördüncü bölgedeki $(2, -4)$ noktasından, ardından üçüncü bölgedeki $(-2, -4)$ noktasından ipi geçirmiştir (bkz. Şekil 206). Son olarak sırasıyla $(3, -9)$ ve $(-3, -9)$ noktalarından ipi geçirip '*Tamam, şöyle bir şey*' demiştir (bkz. Şekil 206). Grafiğin tamamlanıp tamamlanmadığı sorgulandığında '*Uçlar, ama zaten sonda bunlar, ama grafik devam edebilir de devamı olmadığı için gösteremem işte*' şeklinde iğneli sayfa materyalinin sınırlı olduğunu ifade etmiştir. Tahmini olarak grafiğin nasıl devam ettiğini göstermesi istenmiştir.

Araştırmacı: Tamam mesela bir sonraki noktayı düşün. Reel sayılar kümesinde grafik nasıl olur?
Mete: Yani şey mi 4 noktası için mi düşüneceğim? Karesinin 1 eksiği şeklinde değil mi?
Araştırmacı: Tamam 16?
Mete: Ha 16, ama -16!
Araştırmacı: O zaman iğneli tahtanın devam ettiğini düşünürsek tahmini olarak nerede olacak o nokta?
Mete: Şöyle aşağıda bir yerde (sağ eli ile tuttuğu ipin ucunu asılarak germiştir)



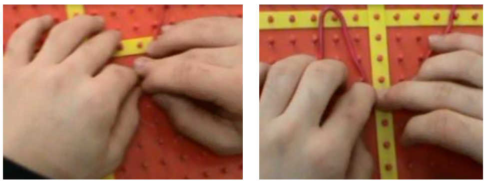
Şekil 207. Mete' nin $y = -x^2$ grafik temsili

Mete grafiğin kollarının devam edeceğini anlamasına rağmen iğneli sayfa materyalinin bir sınırlılığı olarak temsil etmekte güçlük yaşamıştır. Sezgisel olarak grafik üzerindeki başka bir noktayı belirlemesi ile grafik temsilini tamamlamıştır (bkz. Şekil 207).

Mete son iki oturumda verilen bir grafik üzerindeki noktaların koordinatlarını belirlemekte zaman zaman güçlük yaşamıştır. Bu nedenle bu adımda iğneli sayfa materyali üzerinde bir grafik elektrik kablosu ile temsil edilmiştir. Mete' den bu grafik üzerinde belirleyebildiği noktaların koordinatlarını söylemesi istenmiştir. Mete ilk önce grafiği bütün olarak anlamaya çalışmıştır. Bunun için üçüncü bölgede grafiğe dokunarak ellerini kablo üzerinde gezdirirken '*Tamam, şuradan başlıyor, şöyle devam ediyor, bir dakika ((2, 0) noktasında teraddüt yaşamış, x-eksenini dokunmuş ve kabloyu kontrol edip) ha şuradan devam ediyor*' şeklinde grafiği incelemeyi tamamlamıştır (bkz. Şekil 208).

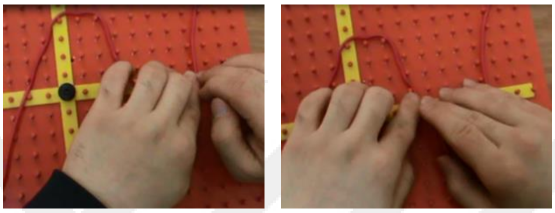
Şekil 208. Mete iğneli sayfa materyalinde grafik inceliyor

Mete önce orijin noktasını işaret etmiştir. Daha sonra birim kavramına dikkat çekerek '*Şimdi 2 iğne 1 birim*' demiş ve ilk olarak x-ekseninde iğneleri sayarak $(2, 0)$ noktasının koordinatını belirlemiştir. Daha sonra kabloyu takip ederek '*Şuradan geçmiş galiba*' demiş ve $(3, -1)$ noktasını göstermiştir (bkz. Şekil 208). Mete' den grafiğin y-eksenini kestiği noktanın koordinatlarını belirlemesi istenmiştir. Mete '*şurası mı?*' diyerek $(0, -4)$ noktasını işaret ederek sormuştur (bkz. Şekil 209). Ardından kolaylıkla koordinatlarını belirlemiştir. Benzer şekilde x-eksenini kestiği nokta sorulduğunda da belirlemekte güçlük yaşamamıştır.



Şekil 209. Mete grafik üzerindeki noktaların koordinatlarını belirliyor

Üçüncü bölgede grafik üzerindeki birkaç noktanın koordinatlarını da belirledikten sonra Mete '*Evet, yani en başında noktalar olmadan grafiği okuyabildik, yani okuyabildik derken inceledik en büyük fark ettiğim o oldu*' ifadesi ile boncuklar olmadan grafik üzerindeki noktaları hissedebildiğini ve koordinatlarını belirleyebildiği belirtmiştir. Ayrıca incelediği çizgi grafiğinin noktalar kümesi olduğu fikri tartışılmıştır. Ardından başka bir grafik temsilinde iki iğne arasındaki uzaklığı bir birim olarak belirlendiği belirtilmiş ve grafik üzerinde istediği noktaların koordinatlarını belirlemesi istenmiştir. Mete kablonun sert yapısından dolayı iğnelerin üzerinden geçmediğinden bazı noktalar için bu noktaların grafik üzerinde olup olmadığını teyit etmiştir. Kablo üzerinde bir uçtan diğerine ellerini gezdirerek grafiği inceledikten sonra başlangıçta yine orijin noktasını belirlemiştir. Orijini hissetmekte zaman zaman güçlük yaşadığı için bu noktaya boncuk takmıştır. Ardından grafiğin *x*-eksenini kestiği noktaların koordinatlarını belirlemiştir (bkz. Şekil 210).



Şekil 210. Mete grafik üzerindeki notaların koordinatlarını belirliyor

Mete her ne kadar grafiğin maksimum ve minimum nokta kavramlarını terim olarak bilmese de bu noktaları işaretlemiş ve koordinatlarını belirlemiştir. $(3,-2)$ noktası için herhangi bir ifade belirtmezken $(0,4)$ noktası için '*y-eksenini kesitiği nokta şu*' şeklinde açıklama yapmıştır. Mete incelemesini tamamladığında, '*Bir şey söyleyebilir miyim? Bu grafiğe şöyle diyebilir miyim sıra dağlar gibi bir eğri?*' ifadesi ile hissettiği grafiği betimlemiştir.

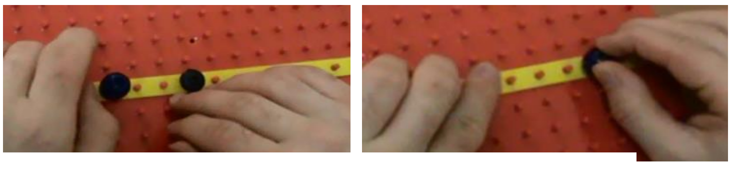
4.4.2.2.7. Değişken Kavramının ve İki Küme Arasındaki İlişkinin Cebirsel Temsilinin İncelenmesi

Mete iki küme arasındaki eşlemeyi meydana getiren ilişkiyi cebirsel temsil etme sürecinde değişkenleri belirlemede, bağımlı ve bağımsız değişkeni belirlemede ve bu değişkenler aracılığı ile cebirsel ifadeyi belirlemede yanılgılara ve güçlüklere sahip olduğu belirlenmişti. Bunun için öğretim oturumunda ilk olarak değişken kavramının bir kümenin tüm elemanlarını temsil eden bir sembol olduğu fikri incelenmiştir. Başlangıçta sürekli ve süreksiz değişken diyebileceğimiz 'günlük hayat' örnekleri ele alınmıştır. Cinsiyet kelimesinin temsil ettiği kavramlar sorulduğunda Mete, '*İnsanlardaki bayan ve erkek olma* *durumu*' ifadesiyle açıklamıştır. Bu örnekte cinsiyet kelimesinin ker iki elemanı da temsil ettiği belirtilmiştir. Ardında yaş kelimesinin temsil ettiği elemanlar sorulmuştur.

Mete: Evet, yaş kelimesi, bütün yaş gruplarını temsil edebilir yani insanlar mesela çocuklar, gençler.
Araştırmacı: Kaç yaşındasın?
Mete:17
Araştırmacı: Mesela 120 yaşında Türkiye' nin en yaşlı ninesi diyorlar.
Mete: 120' yi de temsil edebilir.
Araştırmacı: Ya da işte 1 yaşın kutlu olsun bebeğimizin partisi yapıyoruz.
Mete: 1 için de temsil edebilir.
Araştırmacı: O zaman dünya üzerinde bir bireyin en fazla işte 140 yaşına kadar yaşadığını düşünelim, o zaman 1' den 140' a kadar olan tamsayıları
Mete: Yaş temsil edebilir deriz.

Mete başlangıçta genç ve yaşlı gibi kategoriler düşünerek kadın ve erkek örneğinde olduğu gibi süreksiz değişken kavramını düşünmüştür. Mete' ye yaşı sorulduğunda ise yaş kelimesinin tamsayıları temsil ettiğini algılamıştır. Bu örneğin anlaşılması ve temsil edilen kümenin genişletilmesi için sıcaklık kelimesinin temsil ettiği elemanları belirlemesi istenmiştir. Mete '*Sıcaklık eee yani termometre üzerindeki hava dereceleri, negatif ve pozitif. Sıfır da var tabi ki, hespini temsil eder*' ifadesi ile termometre örneğini düşünerek sıcaklık kelimesinin temsil ettiği reel sayılar kümesini açıklamaya çalışmıştır. Ardından Mete' ye iğneli sayfa materyalinde yalnızca 0 referans noktasının işaretlendiği bir sayı doğrusu sunulmuştur. Değişken kavramını temsil eden bir boncuk verilmiştir, ancak Mete' ye bu temsil açıklanmamıştır. İğneli sayfa materyalinin aparatlarından farklı olan bu boncuğun bu sayı doğrusu üzerindeki noktalardan hangisini veya hangilerini temsil edeceği sorulmuştur. Mete bir müddet düşündükten sonra aşağıdaki tartışma gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: Hangi noktaları işaretleyebilirsin sen o boncukla?
Mete: İşte pozitif ve negatif sayıları.
Araştırmacı: Hepsini işaretleyebilir misin?
Mete: Bir taneyi, bir taneyi sadece.
Araştırmacı: Bir tane ama ondan başka bir yere de takabilirsin çıkarıp, değil mi?
Mete: Tabi, hı hı
Araştırmacı: Mesela tak bir yere
Mete: Bir yere taktık, -3.
Araştırmacı: Şu an -3' e koydun, mesela şu an senin boncuğun o halde -3.



Şekil 211. Mete' nin sayı doğrusunda işaretlediği noktalar

Mete daha sonra boncuğu çıkarıp 8 noktasına takmıştır (bkz. Şekil 211). Birkaç örnekten sonra boncuğun sayı doğrusu üzerindeki 0' da dahil olmak üzere tüm sayıları temsil ettiği açıklanmıştır. Mete boncuğun temsil ettiği sayıları açıklarken '*sayı doğrusundaki sayıları temsil eder, istediğim noktayı işaretlerim ama temsil ettiği sayıları ama bir hamlede değil yani sıra sıra hamlelerde*' ifadeleri ile açıklamıştır. Burada Mete' nin 'hamle' kelimesi ile açıklamaya çalıştığı sabit kavramını anlatmak için ona boncuğun sayı doğrusundaki sayıları temsil ettiği, herhangi bir nokta ile eşlendiğinde ise o noktanın sayı değerine eşit olduğu açıklanmıştır. Yaş kelimesinin 1' den 140' a kadar sayıları temsil etme durumu hatırlatılarak örneklendirilmiştir. Mete iğneli sayfa üzerinde ve sayı doğrusu üzerinde olmayan başka bir noktayı işaret ederek '*Peki bir şey sormak istiyorum. Burada diyelim ki şurayı, bunu temsil edemez değil mi? Sayı doğrusu üzerinde olacak*' şeklinde sormuştur. Boncuğun düzlem üzerindeki noktaları temsil edebileceği, ancak bu örnekte evrensel küme olarak sayı doğrusu üzerindeki noktaların alındığı açıklanmıştır. Böylece Mete boncuğun evrensel kümenin her elemanını temsil ettiğini algılamıştır. Burada boncuğun değişken kavramını temsil ettiği belirtilmiştir. Mete '*Haa değişken, x ve y*' şeklinde karşılık vermiştir. Ayrıca kabartma yazı kodlarını bildiğini ifade etmiştir. Değişkenin x, y ve z gibi harflerle gösterildiği belirtildiğinde Mete '*t de olabilir*' demiştir. Sabit kavramı için a, b ve c gibi harflerin kullanıldığı belirtilmiştir. Bu durumun matematiksel dil kullanımında bir kabul olduğu ifade edilmiştir. Sabit kavramı tartışılırken Mete '*Ee boncuk değişken, 3 sabit mi?*' sorusunu yönlendirmiştir.

Araştırmacı: Evet, 3 sabit ama boncuğumuz değişken oluyor. Değişken aslında o elindeki (boncuğu işaret eder)
Mete: O zaman 3x mi oluyor?
Araştırmacı: Hayır x eşit 3 oluyor. Sayı doğrusu ile tüm reel sayıları eşliyorduk değil mi? O zaman bu boncuğa da x dersem, x eleman ℝ dediğim an x burada bir değişkendir.
Mete: x eşittir ℝ

Mete boncuğun bir nokta ile eşlendiğinde bu noktanın sayı değerine eşit olduğunu düşünememiştir. Ayrıca cebirsel olarak bu durumu '*3x*' ile belirtmiştir. Sabit kavramını açıklarken ona, x ile temsil edilen boncuğun 3' e eşit olduğu, reel sayıları temsil ederken $x \in \mathbb{R}$ olduğu açıklanmıştır. Burada x-in bir sembol olduğu ve reel sayılar kümesi ℝ' ye eşit olamayacağı belirtilmiştir. Boncuğu sayı doğrusu üzerinde bir noktaya takan Mete '*O zaman eşledim şimdi sabit oldu, elime aldım reel sayılar kümesinin hepsini gösterdi şey yani temsil* *etti. Her nokta ile eşleyebilirim. Ama takıyım şimdi burası (iğneleri sayar) 5, x = 5 diyebilirim çünkü bu nokta, ama küme ile eşittir diyemem*' şeklinde açıklamıştır.

Değişken kavramının bir kümenin elemanlarını temsil ettiği ve bu kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi açıklamada bir temsil oluşturduğu fikrini incelemek üzere bir mavi balinanın tükettiği yiyecek miktarı örneği ele alınmıştır. Senaryoda yer alan verilenler okunduktan sonra Mete' den bu örnekteki kümeleri belirlemesi istenmiştir. Mete '*şimdi birincisi gün kümesi var, diğeri de yediği yiyecek, ton*' şeklinde kümeleri belirlemiştir.

Araştırmacı: Peki bu iki kümeyi de temsil eden değişkenler belirleyebilir miyim, mesela gün kümesini temsil eden bir değişken?
Mete: Ee gün G kümesi olur mu? Şey değişken mi?
Araştırmacı: Evet, G kümesinin elemanlarını temsil edecek bir değişken belirlesek.
Mete: O zaman m olabilir mi?
Araştırmacı: m biz genelde sabitler için kullanıyoruz. x, y, z gibi harfleri değişken için kullanıyoruz.
Mete: Ne olabilir ki x mi olsun?
Araştırmacı: x olsun. O halde x dediğimde gün kümesi elemanları için?
Mete: Hepsi olabilir, gün kümesinin elemanlarının hepsini gösteriyor.
Araştırmacı: Peki x gününde kaç ton yiyecek tükettiğini bilebilir miyim?
Mete: Ya x gününde ölçerek bilinmiş. Ama tekrar söyler misiniz birinci gün 4 tondu diğerleri?

Mete öncelikle kümeyi adlandırmıştır. Kümenin elemanlarını temsil ettiğini söylediği değişken için önce *m* ve daha sonra matematiksel kabulü dikkate alarak *x* değişkeni belirlemiştir. Ancak senaryoda yer alan verilenleri hatırlayamadığı için iki kümenin elemanları arasındaki eşlemenin dayalı olduğu ilişkiyi belirleyememiştir. Bunun için Mete' ye kabartma yazı ile hazırlanmış tablo sunulmuştur. Mete, sırasıyla, önce gün sütunun yer alan hücreyi, ardından yiyecek miktarı sütununda yer alan hücreyi okuyarak satır satır incelemiştir. Henüz ikinci satırı incelerken '*2 çarpı 4 ton, 4x ton olmaz mı? 4x olur*.' şeklinde daha önce kendisine yöneltilen soruyu yanıtlamıştır. Tabloyu incelemeye devam etmesi söylendiğinde tabloyu incelemiş ve cevabının doğru olduğunu teyit etmiştir. Tablonun temsil ettiği ilişki sorulduğunda Mete, '*Eee yani dörder ton böyle katlanarak artıyor. 4 katı artıyor*.' ifadesini kullanmıştır. Tüketilen yiyecek miktarı kümesinin elemanlarını temsil etmesi için *y* değişkeni belirlendiğinde, gün kümesi ile yiyecek miktarı kümesi arasındaki ilişki sorgulanmıştır.

Mete: x ile y arasındaki ilişki, 1. gün 4 ton, 2. gün 4 çarı 2 ton demiş. Yediği miktar, gün sayısının eeee 4 katı.
Araştırmacı: Hepsi bu! O zaman aralarında nasıl bir ilişki var?
Mete: Şey x gün değil mi? Eee x kaç katı demiştik, 4 katı, x çarpı 4y mi?
Araştırmacı: Tabloda ne yazıyor Mete, x. gününde kaç ton yemek yemiş olacak?

Mete: x gününde 4 çarpı x, haa y buna eşit.
Araştırmacı: Evet, günle yiyecek miktarı arasında da bir ilişki var 4 katı olma. Peki, ne neye göre değişiyor?
Mete: Yiyecek güne göre değişiyor. y, x-e göre değişiyor.

Mete gün ile tüketilen yiyecek miktarı arasındaki ilişkiyi belirlemesine rağmen cebirsel olarak ifade etmekte güçlük yaşamıştır. Ayrıca burada bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarına sezgisel bir yaklaşım yapılmıştır. Mete' nin değişkeni belirleme ve ilişkiyi cebirsel ifade etmede yaşadığı güçlük göz önüne alınarak bir seyahatte saatte alınan toplam yolun gösterildiği tablonun incelenmesi ile oturuma devam edilmiştir. Mete tabloya dokunduğunda, ilk olarak tablo satırlarının temsil ettiği kümeleri belirlemek için ilk sütundaki hücreleri okumuştur. Daha sonra sırasıyla ilk önce saat satırındaki hücreyi ve bu satırla eşlenen toplam alınan yol satırındaki hücreyi olmak üzere tablonun tamamını okumuştur.

Mete: Gün yani yol sayısı saat başına göre 50 tane, km saate göre saatte 50 km artmış, artarak gitmiş.
Araştırmacı: Artarak gitmiş, öyle mi yorumlarız?
Mete: Şimdi saat x olsun. Bir dakika, 1' de 50 (tabloyu tekrar kontrol eder), 2' de 100, 3' te 150.
Araştırmacı: Başka bir ilişki var mı burada? Çünkü bak aldığı toplam yol onlar. O zaman nasıl bir ilişki olur?
Mete: Şimdi birincide 50 olmuş, ikicide 100, 25 katı mı artmış?
Araştırmacı: Bana açıklar mısın? Nasıl hesapladın?
Mete: Şimdi 2, mesela 1'e göre 50 ya, bilmiyorum ki hocam olmadı.

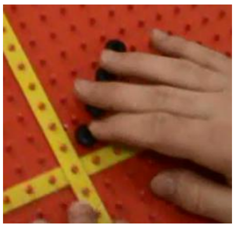
Mete toplam yol satırının temsil ettiği kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirleyebilmiştir. Ancak saat ve toplam yol arasındaki ilişkiyi belirlemekte güçlük yaşamıştır. Burada saat kümesinin elemanlarını temsil edecek bir değişken belirleyebilmişken, bu değişken yardımı ile ilişkiyi ifade edememiştir. Bunun üzerine Mete' den öncelikle buradaki kümeleri belirlemesi istenmiştir:

Mete: Buradaki kümeler x ve y, yani saat ve yol.
Araştırmacı: Saat ve yol, x-eksenine ve y-eksenine mi atadın x ve y diye?
Mete: Evet. Saat x, yol y.
Araştırmacı: Bu kümeleri temsil etmesi için değişken atayabilir miyim?
Mete: Atarız. O zaman x ve y o değişkenler olsun mu, olabilir mi öyle?
Araştırmacı: Tamam olsun. Şimdi x cinsinden yolu nasıl söyleyebiliriz?
Mete: x cinsinden yolu, söyleyemeyiz. Çünkü yol y demiştik.
Araştırmacı: Hmm tamam y bir kenarda kalsın, az önce yiyecek miktarını gün cinsinden nasıl söyledik? 4x demiştik.
Mete: Ha söyledik evet. Yolu söyleriz, o zaman nasıl yaparız hocam? Ya 1 saatte 50 diyor, hmm… 2x mi oluyor?
Araştırmacı: Niye 2x dedin?
Mete: Bilmiyorum. 2' de 100, 3' te 150. 50x mi? Ama açıklayamıyorum işte (güler)

Mete kümeleri belirlemekte, koordinat eksenlerinde temsil etmekte ve kümeleri temsil edecek değişkenleri belirlemekte güçlük yaşamamıştır. Ancak iki küme arasındaki ilişkiyi belirlemekte ve değişkenlerle ifade etmekte güçlük yaşamıştır. Bu nedenle bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarına dayanarak saat kümesi için ikinci saatteki gidilen toplam yolu nasıl ifade edebileceği sorgulanmıştır:

Mete: Şimdi o zaman 50x dediğimde mesela x = 2 olsa 50 çarpı 2' den 100. Böyle mi oluyor?
Araştırmacı: 100, 2.saatte 100 km yol gitmedim mi? Gittim, 50x olduğunda peki 4 için?
Mete: 200 gittim evet oldu!

Böylece Mete iki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilmiştir. Bu ilişkiyi grafik ile temsil etmesi istendiğinde '*Ya burada birimler sıkıntı olabilir de bunu mesela 1 birimi 10 birim kabul etmemiz lazım ya da 50 mi alalım? 1' e 50 alalım.*' şeklinde gidilen toplam yolu eksen üzerinde temsil edebilmek için iki iğne arasını 50 km ile temsil etmek istemiştir. Saat kümesini temsil ettiği eksen için de 1 saat birim olarak almıştır. Ardından ilk noktayı belirlemiş ve '*O zaman 1' e 50 burası*' diyerek ilk boncuğu takmış ve ardından ilişkinin doğrusal devam ettiğini fark eden Mete noktaları kontrol etmeden arka arkaya boncukları takmıştır (bkz. Şekil 212). İki küme arasındaki ilişkiyi ifade etmesi istendiğinde '*saate bağlı yol değişiyor 50x diye belirlediğimiz*' şeklinde açıklamıştır.

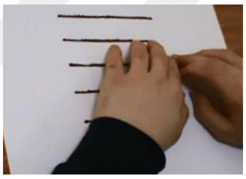


Şekil 212. Mete saat ve yol arasındaki ilişkiyi grafikle temsil etmeye çalışıyor

Araştırmacı: O zaman hangi kümenin elemanlarını hangi kümenin elemanlarıyla ifade ediyoruz?
Mete: Yani yol kümesinin elemanlarını saatle ifade ediyoruz.
Araştırmacı: O zaman burada bağımlı değişken hangisi?
Mete: Bağımlı değişken y.
Araştırmacı: y yani yol kümesinin temsilcisi.
Mete: Bağımsız değişken de x.
Araştırmacı: Bağımsız değişken de saat kümesine atadığımız değişken.
Mete: x yani, saate bağlı yol değişiyor, yani x bağımsız değişken, y bağımlı.

Mete ile bağımlı ve bağımsız değişken kavramları tartışıldığında değişkenleri belirlemede, bağımlı ve bağımsız değişkeni belirlemede ve değişkenlerin birbirlerine göre durumunu açıklamada başarılı olmuştur. Ancak bu iki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi ifade etmesi istendiğinde '*Ee nasıl ifade edebiliriz? 50y = x mi?'* şeklinde cevaplamıştır. Mete' den $(1, 50)$ eşlemesi için kontrol etmesi istenmiştir. Mete cevabının yanlış olduğunu anlayarak '*Haaa yok olmaz, 50x!*' şeklinde ifade etmiştir. 50*x* ifadesinin temsil ettiği küme sorulduğunda, '*yol, haa y mi? y, 50x mi?*' şelinde doğru cevaba erişmesi oldukça güç olmuştur. Böylece tabloda verilen çeşitli eşlemelar için cebirsel ifadeyi doğrulaması istenmiştir. Mete birkaç örnekten sonra '*gerçekten öyle oldu*' şeklinde ifade etmiştir.

Farklı temsil türleri aracılığı ile iki küme arasındaki ilişkiyi belirleyebilmesi ve özellikle cebirsel temsile ilişkin öğrenmenin kuvvetlenmesi için farklı örneklere devam edilmiştir. Venn şeması ile temsil edilen iki küme arasındaki eşlemenin sunulduğu adımda öncelikle ondan *A* ve *B* kümesinin elemanları arasındaki eşlemeleri belirlemesi istenmiştir. Mete önce *A* ve daha sonra *B* kümesinin elemanlarını okumuştur. Ardından doğru parçalarını takip ederek eşlemeleri belirleyen Mete sıralı ikili olarak ifade etmiştir. (3, 0), (0, -3) ve (-1, -4) noktalarını belirledikten sonra '*üçer üçer azalıyor galiba*' demiştir (bkz. Şekil 213).



Şekil 213. Mete iki kümenin elemanlarını eşlemede yer alan ilişkiyi belirliyor

Araştırmacı: Şu an A' dan B' ye diye düşündün değil mi ilişkiyi?
Mete: A' nın 3 eksiği -3 mesela.
Araştırmacı: Peki bu ilişkiyi nasıl ifade ederiz?
Mete: İlişkiyi nasıl ifade ederiz, şimdi şuraya x desek (A kümesini işaret eder), buraya y desek (B kümesini işaret eder).
Araştırmacı: A kümesini x değişkeni temsil etsin, B kümesini de y değişkeni temsil etsin, tamam.
Mete: -3x mi oluyor? Şey yani ilişki, arasındaki ilişki? x-3 mü yoksa?

Mete *A* ve *B* kümesinin elemanlarının eşlenmesindeki ilişkiyi ifade ederken cebirsel dil kullanmadan fikrini paylaşmıştır. Değişkenlerin temsil ettiği kümelerin belirlenmesinden sonra, ilişkiyi belirlediği 'üç eksiği' ifadesini cebirsel ifade etme sürecinde ilk önce '-3*x*' olarak düşünmüştür. Bu ifadeye dayanarak *A* kümesinden bir eleman seçerek '-3*x*' ifadesine göre seçtiği bu elemanın eşlenmesi beklenilen elemanı belirlemesi ondan istenmiştir. Mete -

3 elemanının 9 ile eşlenmesi gerektiğini belirlemiştir. Ancak verilen ilişkiye göre -6 ile eşlenmesi gerektiğini söylemiştir. Ardından Mete ‘o *zaman şöyle mi diyeceğiz x-3. Tamam ben ikisini karıştırdım işte yani x-3 olacak*’ şeklinde cebirsel temsili ifade etmiştir. Mete’ nin kat, kuvvet, artma ve azalma gibi ilişkileri cebirsel olarak ifade etmede yetersiz olduğu ve önbilgilerinde eksikliklerinin olduğu belirlenmiştir.

Araştırmacı: x - 3 neye eşit?
Mete: y’ ye.
Araştırmacı: O zaman buradaki ilişkiyi cebirsel oarak nasıl ifade ederiz?
Mete: y = x - 3
Araştırmacı: Peki burada bağımlı değişken ne?
Mete: Bağımlı değişken y, x e göre bağımlı, x bağımsız değişken.

Mete belirlediği ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilmiş, bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirlemiştir. Burada edinilen hedeflerin pekiştirilmesi için eşlemenin B kümesinden A kümesine düşünmesi istenmiştir:

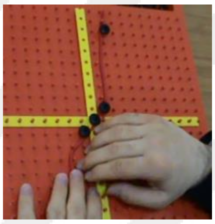
Mete: B’ den A’ ya üçer üçer artıyor o zaman. O zaman şöyle derdik y + 3 = x.
Araştırmacı: O zaman bağımlı değişken ne olurdu?
Mete: O zaman x bağımlı, y bağımsız olurdu.

Mete cebirsel temsili doğru bir şekilde ifade etmesinin yanı sıra, bağımlı ve bağımsız değişkenleri de doğru belirlemiştir. Mete’ nin farklı temsil türlerinden cebirsel temsili ifade edebilme kazanımını edinmesi için grafik temsilleri üzerinden adımlarla görüşmeye devam edilmiştir. İlk olarak $y = x^3$ grafiği iğneli sayfa materyalinde grafiğin üzerindeki bazı noktaları işaretlenmiş olarak sunulmuştur. Mete’ den buradaki kümelerin bazı elemanlarını, eşlemenin dayalı olduğu ilişkiyi, bağımlı ve bağımsız değişkeni belirlemesi istenmiştir. Mete ilk olarak $(0,0)$ noktasının yer aldığını belirlemiştir. $(1,1), (-1,-1), (2,8)$ ve $(-2,-8)$ noktalarını belirlemiştir.

Mete: Bu aynı şey gibi, karesinin eksilisi gibi. Karesi değil, bir daha söyler misiniz noktaları?
Araştırmacı: (0, 0), (1, 1), (-1, -1), (2, 8), (-2, -8).
Mete: Şimdi -2’ nin karesi artı 4. Eksilisinin 2 katı o zaman.
Araştırmacı: O zaman -1 için bakalım.
Mete: -1’ in karesi 1, onun 2 katı 2. O zaman 2 katı değil de 1 eksiği mi acaba? Şeye 1’ e 1 dedik ya, 1’ in karesi 1, 2 katı […] (2, 8) noktası için olmadı. O zaman 5 fazlası […] Yok karesinin 2 katı küpü olur.
Araştırmacı: 1 küpü kaç?
Mete: 1 in küpü, 1 üzeri 3’ ten 1. -1’ in küpü -1, -2’ nin küpü -8.
Araştırmacı: O zaman neymiş?
Mete: Küpüymüş. x-in küpüymüş
Araştırmacı: x değişkeni hangi kümenin temsilicisi?

Mete: Apsisdeki küme işte.
Araştırmacı: Peki bunu nasıl ifade ederim cebirsel olarak, bağımlı ve bağımsız değişken olarak?
Mete: y bağımlı değil mi burada? $x^3 = y$ *ya da* $y = x^3$.
Araştırmacı: O zaman incelediğin grafik?
Mete: İşte $y = x^3$ *grafiği.*

Mete iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlerken sadece bir sıralı ikiliyi düşünerek genellemeye ulaşmaya çalışmaktadır. Bu fikrinin hatalı olduğunu fark etmesi için belirlediği cebirsel ifadenin diğer sıralı ikililer için doğru olup olmadığını kontrol etmesi sağlanmıştır. Mete bu stratejiyi kullanarak çeşitli ilişkiler belirleyerek doğru genellemeye ulaşabilmiştir. Burada bağımlı-bağımsız değişkenleri belirlemiş ve grafik temsili için yorum yapabilmiştir. Ayrıca bu grafiği betimlemesi istendiğinde eli ile kabloyu üçüncü bölgeden birinci bölgeye takip ederek, grafik üzerindeki noktaları söyleyerek açıklamıştır (bkz. Şekil 214).



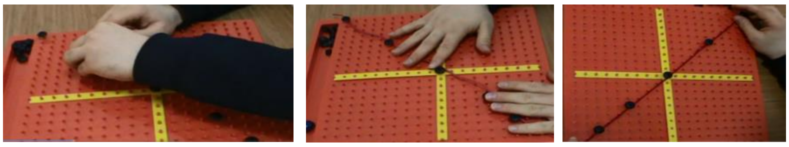
Şekil 214. Mete $y = x^3$ grafiğini inceliyor

Sonraki adımda Mete' den $y = x$ cebirsel ifadesini temsil eden grafiği çizmesi istenmiştir. Mete ilk olarak '*y = x garfiği, bir kere bunun orijinden geçmesi gerekecek*' tespitinde bulunmuştur. Hemen orijine boncuk takmıştır. Mete diğer noktaları belirlerken '*x, x-ekseninin değişkeni y de y-ekseninin değil mi?*' şeklinde sormuştur. Daha sonra *x*-ekseninde -4 noktasını iğneleri sayarak belirlemiş ve *'-4 noktası için düşünelim'* demiştir.

Mete: y eşit x olsa artı -4.
Araştırmacı: O zaman hangi nokta varmış bu eşlemede?
Mete: (-4, -4)

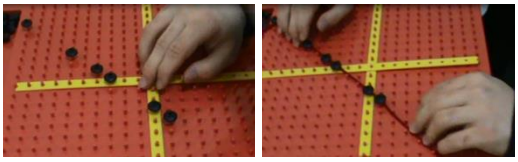
Mete $y = x$ ifadesine göre apsisi -4 olan noktanın ordinatını belirlemede başlangıçta güçlük yaşasa da ipucu sorularla $(-4, -4)$ noktasını belirlemiş ve iğneli sayfa materyalinde işaretlemiştir. Ardından apsisi 10 olan noktayı belirlemek istemiş '*10' a 10 (x = 10 doğrusu üzerinde iğneleri sayarak) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Şurası yani (boncuğu takar)*' şeklinde $(10, 10)$ noktasını işaretlemiştir. Daha sonra $(-7, -7)$ ve $(5, 5)$ noktalarını belirlemiş ve işaretlemiştir. Mete' ye sıralı ikilileri belirlemeye devam edip etmeyeceği sorulduğunda

‘*Yeterli, kabloyu alabilir miyim grafiği yapalım?*’ demiş ve grafiği elektrik kablosu ile temsil etmek istemiştir (bkz. Şekil 215).



Şekil 215. Mete *y* = *x* grafiğini çiziyor

Mete kablo ile grafiği oluştururken ‘*Hangi noktadan başladığım önemli mi? Orijinden mi başlamak zorundayım*’ şeklinde sormuştur. Bu fikrinin gerekçesi sorulduğunda ‘*Bilmiyorum ilk onu işaretledik diye galiba önemli mi?*’ şeklinde açıklamıştır. Grafiğin işaretlenen noktaların üzerinden geçmesi gerektiği hatırlatıldığında *‘(10, 10) noktasında bitecek mi kıvırıyım mı kabloyu?*’ şeklinde sormuştur. Eşlemenin reel sayılar kümesi üzerinde olduğu hatırlatınca kabloyu biraz daha sündürmüş ve ‘*o zaman devam edecek değil mi?*’ diyerek grafiği oluşturmaya devam etmiştir. Mete grafiğin bir doğru olduğunu ve kablonun güzel bir temsil olmadığını belirtmiş ve ip yardımı ile yeniden grafiği Şekil 215’ teki gibi çizmiştir. Böylece Mete’ nin cebirsel temsili verilen iki küme arasındaki bir ilişkiyi grafikle temsil edebildiğini söyleyebiliriz. Ayrıca grafik temsilini oluştururken eşlemenin tanımlı olduğu kümeleri sorması, reel sayılar için grafiğin devam ettiğini belirtmesi ve doğru temsilini oluşturmadaki başarısı da dikkat çekmiştir. Mete’ nin söz konusu kavramları kavradığına ilişkin bulgular elde etmek için reel sayılar kümesi üzerinde *y* = *x* + 3 cebirsel ifadesi ile temsil edilen ilişkinin grafiğini oluşturması istenmiştir. Mete ilk olarak ‘ *y* = *x + 3 dediğine göre x-in 3 fazlası y olacak değil mi? Mesela 3 aldım ya şimdi 3 ekleyeceğim 6 olacak onunla eşleyeceğim, yani burası olacak*’ diyerek $(3, 6)$ noktasını işaretlemiştir. Ardında ‘*Şimdi de negatiflere geçelim, -4 olsun x -4 olsun. O zaman hmmm -4’ e -7 mi demeliyim? Ama yok fazlası diyor. -4’ e -1*’ demiş ve $(-4, -1)$ noktasını işaretlemiştir. Sonra sırasıyla $(7, 10), (1, 4), (0, 3), (-3, 0)$ noktalarını işaretlemiştir (bkz. Şekil 216). Grafiği oluşturabileceğini belirten Mete ip ile temsil ettiği grafiği Şekil 216’ daki gibi çizmiştir. Grafiği betimlemesi istendiğinde ise ‘*Bu ip doğruyu temsil eder. x + 3 = y doğrusu*’ demiştir.



Şekil 216. Mete $y = x + 3$ grafiğini çiziyor

Böylece Mete' nin grafik temsilini oluşturabildiği ve yorumlayabildiğini söyleyebiliriz. Ayrıca cebirsel temsil ile verilen bir ilişkide kümeler arasındaki eşlemelerden bazılarını belirleyebildiği, sıralı ikili olarak ifade edebildiği tespit edilmiştir. Doğru grafiğini betimleyebildiği de dikkat çekmektedir. Bir sonraki adımda ise linner ilişkinin dışında bir grafiği yorumlaması için $y = x^2$ cebirsel temsilinin grafiğini oluşturması beklenmiştir.

> *Mete: y eşittir x kare, x noktasının karesi, x kare eşittir y diye de yorumlayabilir miyim? Ya ben çok öyle rahat ediyorum da. Çünkü koordinat sisteminde ilk x-i baz aldığımız için, öyle gibi aklımda kalmış.*
> *Araştırmacı: Hımm tamam, peki ilişki nasıldır, grafiği nasıldır?*
> *Mete: Mesela bir tane nokta belirleyeyim. 2 desem mesela, karesi 4. Yani (2, 4) noktası.*

Mete ilişkiyi belirlemek için '*x*-in karesi *y*' şeklinde ifade etmiş ve bunun için cebirsel ifadeyi zihinsel alışkanlığına göre belirtmiştir. Sonra sırasıyla $(2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (-3,9),$ $(3,9), (-2,4), (2,4), (4,16), (-4,16)$ noktalarını cebrisel ifade ile verilen ilişkiye göre belirlemiş ve işaretlemiştir (bkz. Şekil 217).

Şekil 217. Mete $y = x^2$ grafiğini çiziyor

Mete artık grafiği hissedebildiğini belirtmiş ve noktalara dokunarak '*Ama biz yine U şeklinde yaptık*' demiştir. İp ile temsil ettiği grafiği oluştururken '*Reel sayılar kümesi dediğiniz için (-4, 16) noktasından başlıyorum ama devam edecek böyle, sonra orijine gelelim, bütün noktalardan geçirdim değil mi? Sonra da böyle devam edeceğim.*' ifadesi ile grafiği tamamlamıştır. Böylece ilişkinin tanımlı olduğu kümenin önemli olduğunun farkında olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca grafiği betimleyebilmiş ve işaretlediği her noktanın grafik üzerinde olması gerektiğini belirtmiştir. Mete grafiği oluştururken '*Resmen grafik çiziyorum şu anda*' ifadesi ile heyecanını dile getirmiştir. Şekil 217' daki gibi grafikle temsili tamamlamıştır.

4.4.2.3. Mete' nin Öğrenme Yol Haritası

Öğretim oturumlarının geriye dönük analizleri sonucunda elde edilen bulgular Mete' nin küme, eşleme, ilişkilendirme, koordinat sisteminde temsilleri ve değişken kavramı yardımı ile temsillerine ilişkin öğrenme yol haritasını sunmuştur. Tablo 14' te Mete' nin öğrenme yol haritası gelişim süreci özet olarak sunulmuştur.

Tablo 14
Mete' nin Belirlenen Cebirsel Kavramlar İçin Öğrenme Yol Haritası

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
Küme kavramının sezgisel tanımını yapabilme	Kümeyi sezgisel olarak 'belli nesnelerin bir araya gelerek gruplandırılması' olarak tanımlamıştır. Çeşitli örnekler incelenmeden önce kümeyi oluşturan elemanlar arasında ortak bir özellik olması gerektiğini düşünmekteydi. Daha sonra kümenin elemanları arasında ortak bir özellik olabileceği gibi istediği nesneleri bir araya getirerek de küme oluşturabileceğini kavramıştır. Ayrıca verilen bir önerme ile kümenin elemanlarının belirlenebileceğini de anlamıştır. Liste yöntemi ile küme temsilinde daha başarılı olsa da gösterimde çeşitli önbilgi eksiklikleri mevcuttur. Oluşturulan bir kümenin adlandırılması gerektiğini ifade etmiştir. Başlangıçta matematik kümesi gibi terim olarak kümeleri adlandırmıştır.
Küme kavramına ilişkin örnekler sunabilme	Küme kavramının sezgisel tanımını ifade edebildiğinden matematik kavramlarından ve günlük hayattan örnekler sunabilmiştir. Verilen örnek durumlarda elemanları belirleyebildiği gibi kendine ait örnekler de sunmuştur. Reel sayılar kümesinin sonsuz bir küme olduğunu belirtmiştir. İnsanlar ve ağaçlar gibi nesnelerden oluşan örnekler de vermiştir.
Kümenin elemanı olma ve kümenin eleman sayısı kavramlarını bilme	Kümenin 'üyesi olma' terimleri ile kümenin elemanı olmayı kavramıştır. Sonlu ve sonsuz küme örnekleri için elemanları ifade edebilmiştir. Nesnelerle tabla üzerinde oluşturduğu kümelerin eleman sayısını belirleyebilmiştir. Sonsuz kümeler için eleman sayısını algılayabilmiştir. Öncelikle bir gruba ait olma fikrini edindiği, daha sonra eleman ve elemanı olmama kavramlarını terim olarak öğrendiği belirlenmiştir.
Sonlu ve sonsuz küme kavramlarını açıklayabilme	Sonlu ve sonsuz kelimelerinin terim anlamlarından yola çıkarak örnekler verebilmiştir. Sezgisel olarak bu kümeleri algılamış ve kendine ait örnekler sunabilmiştir. Reel sayılar kümesi ve nesnelerle tabla üzerinde oluşturduğu sonlu kümeler üzerinden örneklendirmiştir.
Küme, küme adı, kümenin elemanları, kümenin 'elemanı olma' sembollerini bilme	Başlangıçta terim olarak adlandırdığı kümeleri, ilerleyen örneklerde harf ile adlandırmıştır. Örneğin; kabartma yazı için kullanılan materyallerden oluşan bir kümeyi Braille kümesi olarak adlandırmış ve liste yöntemi ile yazarken büyük B harfini kullanmıştır. Liste yöntemi ile temsilde eşit işaretinin kullanımı, normal parantez (ayraç) kullanımı ve elemanlar arasına virgül koymadan gerçekleştirmiştir. Bir örnek uygulamadan sonra liste yöntemi ile temsili başarılı şekilde gerçekleştirmiştir. Tek elemanlı küme kavramını açıkladıktan sonra liste yöntemi ile temsili tam olarak ifade edebilmiş ve yazabilmiştir. Matematikte kullanılan ayraç, süslü ve köşeli parantezler üzerine uzun süre konuşulmuş ve incelemeler yapılmıştır. Elemanı olma ve elemanı değildir sembolleri kabartma yazı kodlarının yanı sıra görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için kullanılan gösterimler iğneli sayfa materyalinde, masa üzerinde eli ile çizim yaparak, betimleyerek ve en son kabartma yazıda nokta vuruşlarından yararlanılarak incelenmiştir. Sonsuz bir küme olan tek tamsayılar kümesini liste yöntemi ile yazabilmiştir.
Evrensel küme ve altküme kavramlarını açıklayabilme	Evrensel küme ve altküme temsili için kullanılan tablaların belirttiği sınırları algılayamadığı için pergeli konumlandırırken sınır üzerine yerleştirmiştir. Daha sonra altkümede yer alan her elemanın aynı zamanda evrensel kümenin de elemanı olduğunu fark etmiştir. Ayrıca evrensel kümede yer alan her elemanın altkümenin de bir elemanı olmayabileceğini de algılamıştır. Bir yılın ayları, dünyadaki araba markaları ve futbol takımları gibi örnekler yardımıyla evrensel küme ve altküme için elemanları belirleme ve kapsama fikrini edinmiştir. Bu aşamada tüm elemanları içeren kümenin evrensel küme olduğunu ifade etmiştir. Evrensel kümenin E sembolü ile gösterildiği kabartma yazı kodu ile birlikte açıklanmıştır. Evrensel küme temsili için masa ve altküme temsili için poşet kullanılarak gerçekleştirilen oturumdan sonra evrensel küme ve altkümeyi kendi ifadeleri ile açıklayabilmiştir. Evrensel kümeyi 'tüm nesneleri gruplayan küme' olarak ve altkümeyi 'evrensel kümenin bazı elemanlarını sınırlandıran gruplayan küme' olarak ifade etmiştir. Başlangıçta altkümeyi evrensel kümenin elemanı olarak algılarken ikinci oturumdan sonra altkümenin evrensel kümenin bir elemanı olmadığını, ancak her elemanının aynı zamanda evrensel kümenin elemanı olduğunu belirtmiştir.
İki kümenin elemanları arasında eşleme yapabilme	Günlük hayatta yer alan eşleme fikrine dayanan örnekleri fark edebilmiştir ve verilen örnek durumlarda eşlemeleri belirleyebilmiştir. Verilen bir eşlemenin tanımlı olduğu kümeleri belirleyebilmiştir. Verilen örnek durumda iki küme arasındaki eşlemeyi açıklayabilmiştir. Bir eşlemeden bahsedebilmek için öncelikle en az bir kümenin var olması gerektiğini fark

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
	edebilmiştir. İki kümenin elemanlarını eşlemede sembol (=) veya doğru parçası kullanmayı tercih etmiştir. Bunun için kabartma yazıda eşlemeleri göstermiştir. Bu tercihlerinin kümenin temsil türüne bağlı olmaksızın uyguladığı belirlenmiştir. Örneğin, liste yöntemi veya Venn şeması ile temsil edilen kümeler arasındaki eşlemelerin her ikisi için de aşina olunan doğru parçalarından yararlanmıştır. Bu nedenle başlangıçta farklı temsiller yardımıyla eşleme yapmamıştır. Ancak farklı temsil türlerinde verilmiş eşlemeleri (örneğin tablo yardımı ile) açıklayabilmiştir. Burada kümelerin temsil türlerinin yanında eşlemeyi göstermede tablo kullanımda tabloyu okuma, anlama ve açıklama becerileri önem arz etmiştir. Dikey konumda verilen tablo için iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi fark edemezken yatay konumda sunulan tabloda ilişkiyi belirleyebilmiştir. Ayrıca incelediği her örnekte birebir eşleme kavramını terim olarak ifade etmese de elemanların bir tek eleman ile eşlendiğini algılayabilmiş ve belirtmiştir. Öğretim oturumunda yer alan örneklerde eğer temsil türleri ile kümelerin elemanları açık olarak sunulmadı ise kümeleri belirlemesine rağmen elemanları belirlemekte güçlük yaşamıştır. Başlangıçta tek elemanlı kümeler ile örnekler sunmuştur. Daha sonra öğrenci numaraları örneği ile kümelerin elemanlarını belirlemede ve eşlemeleri temsil etmede başarılı olmuştur.
Kümenin kendi elemanları arasındaki ilişkiyi farklı yollarla ifade edebilme	Verilen bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi fark edebilmiş ve matematiksel olarak ifade edebilmiştir. Belirlediği bu ilişkiye göre kümenin diğer elemanlarını da belirleyebilmiştir.
Tablo ile verilen ilişkili elemanları eşleyebilme	Tablo ile verilen belli bir ilişkiye dayalı eşlemeleri açıklayabilmiştir. Ancak yatay konumlandırılmış tabloda ilişkiyi belirlemede daha başarılı olmuştur. Farklı temsil türlerinde bu eşlemeleri aralarındaki ilişkiye göre ifade edebilmiştir. Ayrıca verilen bir örnek durumda eşlemeleri tablo yardımıyla temsil edip aralarındaki ilişkiyi yorumlayabilmiştir. Tablo ile oluşturduğu temsillerde dikey konumlandırılmış tabloyu tercih etmiştir.
İki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilme	İki kümenin elemanları arasındaki eşlemenin dayalı olduğu ilişkiyi belirlemekte güçlük yaşamıştır. Bu güçlük yatay tablo ile sunulan eşlemeyi yorumlaması ile ortadan kalkmıştır. İki küme arasındaki ilişkiyi anlama ve ifade etmede bu kümeler arasındaki eşlemeden yararlanmıştır. Daha sonra bu ilişkiyi farklı temsil yolları ile ifade edebileceğini açıklamıştır. Ancak değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin yanılgıları olduğu için cebirsel temsil yapamamıştır.
İki kümenin elemanları arasındaki ilişkiye göre eşleme kurabilme	İlk örneklerde yalnızca eşlemeye odaklanırken, bir kümenin kendi elemanları arasında ilişkinin var olabileceği fikrini edindikten sonra bu eşlemeye dayanan ilişkileri belirtebilmiştir. Örneğin bir tamsayısı kendisinin karesi ile eşlemeyi yapabilirken, buradaki ilişkiyi ifade etmekte güçlük yaşamıştır. Daha sonra belirlenen bir ilişkiye göre elemanları eşleyebilmiş ve farklı temsil türleri için açıklamalar yapabilmiştir. Son olarak bagaj ağırlığına göre ücretlendirmenin gösterildiği tablo yardımı ile her zaman bir kümenin elemanları arasında ilişki olmayabileceğini, her eşlemenin bir ilişkiye dayanmayacağını ifade etmiştir.
İki kümenin elemanları arasında birebir eşleme yapabilme	Öğretim oturumunda yer alan ilk örnekten itibaren terim olarak ifade edemese de birebir eşleme yapıldığını elemanların nasıl eşlendiğini açıklarken belirtmiştir. Televizyon kanallarının rakamlar ile eşlenmesi örneğinde birebir eşlemeyi ifade edebilmesinin yanı sıra daha önceki örneklerden birebir eşleme olanları da açıklamıştır. Ancak bagaj ağırlığına göre ücretlendirmenin yapıldığı tabloyu incelerken birebir eşleme ile belli bir ilişkiye dayalı olmayan eşleme arasında yanılgı yaşamıştır. Tabloda yer alan eşlemelerin sorgulanması ile eksiklikleri olsa da birebir eşlemenin formal bir tanımını yapabilmiştir.
Düz çizgi kavramını bilme	Düz çizgi temsili olarak çizgi çizebilmiş, analojiler ile örneklendirebilmiş ve çeşitli materyaller ile temsil edebilmiştir. Eli ile düz çizgiyi temsil ederken düşey eksene paralel çizmiştir. İp ve kablo ile temsilde sündürme işleminin devam ettiğini anlatmak için kolu ile uzanarak göstermiştir.
Düz çizgi ile doğruyu ilişkilendirebilme	Düz çizginin matematiksel kavramlardan doğruyu temsil ettiğini ifade edebilmiştir. Bu fikrini açıklamak için ip ve kabloyu sündürme işleminin devam edebileceğini göstermiştir. Bir eli ile ip veya kablonun bir ucunu tutarken diğer ucunu gergin olarak uzatmış ve sündürme işleminin devam ettiğini göstermek için masaya kolunu uzatmıştır.
Doğru kavramını açıklayabilme	İp, kablo ve anten yardımı ile doğruyu temsil edebilmiştir. Düz çizgi ile temsilde sündürme fikrine sahip olduğu için ip veya kabloyu gergin bir şekilde uzatırken sündürme eyleminin devam ettiğini uzanarak masanın üzerinde göstermeye çalışmıştır. Temsilleri oluştururken ip veya kablonun bir ucunu sabit tuttuğu için anten destek eğitim aracı olarak kullanılmıştır. Antenin mevcut durumda sündürmenin devam etmediği durumda doğru parçası temsili olduğunu ifade etmiştir. Doğrunun iki nokta arasındaki bir parçasının doğru parçası olduğunu fark ettiğinde doğrunun noktalar kümesi olduğunu belirtmiştir. Eğri kavramından sonra başlangıçta düz çizgi temsilini düşey eksende oluşturmasına rağmen doğrultusu düşey eksene paralel olan doğrunun eğri olabileceğini düşünmüştür. Doğru kavramının tanımını sorgulaması sonucunda doğrultu kavramı açıklanmıştır.
Doğru parçasını düz çizgi ile ilişkilendirme	Doğru temsilini anten yardımı ile incelerken sündürme fikrinin devam etmeyeceği durumda bir doğru parçası olduğunu ifade etmiştir. Beyaz bastonun katlanabilen her bir parçasının bir doğru parçası temsili olduğunu söylemiştir. Ev ve okul arasındaki yolu düz bir çizgi olarak kabul ettiğinde belirli noktalar arasındaki düz çizgi parçasının doğru parçası olduğunu ifade edebilmiştir.
Doğru ve doğru parçası kavramlarının görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için gösterimlerini bilme	Tahtadan oluşturulan doğru temsilleri ve cetvel yardımı ile temsil edilen doğru parçası kavramlarının görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için gösterimlerini algılamasını sağlamıştır. Ayrıca anten materyali doğru ve doğru parçası kavramlarının ilişkilendirilmesini sağlamıştır. Doğru parçası için uç nokta fikrinin fark edilmesine katkı sunmuştur.

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
Doğru ve doğru parçası kavramlarını ilişkilendirebilme	Anten, beyaz baston ve ev ile okul arasındaki yolun doğru parçası temsillerinden oluşturulması fikirleri doğru ve doğru parçası kavramlarının anlaşılmasına fırsat sunmuştur. Bir doğru üzerinde belirlenen farklı iki nokta ile doğru parçası elde edildiğini açıklayabilmiştir. Ayrıca beyaz baston fikrine dayanarak sonsuz sayıda doğru parçasının uç noktalardan birleşiminin bir doğru belirttiğini ifade etmiştir.
Doğru parçası gösterimlerini bilme	Doğru parçasının uç noktaları yardımı ile adlandırıldığını algılamıştır. Uç noktaları 'başlangıç ve son' olarak ifade etmiştir. Kabartma yazıda gösterimlerini incelemiştir. Görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için temsilleri incelemiştir. Doğru parçası grafik temsilini başlangıçta çeşitli yanılgılarla çizmiş olsa da daha sonra uç noktalarını belirttiği doğru parçası temsilleri çizmiştir. Ancak her temsilde A ve B ile uç noktaları adlandırdığı belirlenmiştir.
Doğrunun farklı gösterimlerini bilme	Doğrunun grafik gösteriminde okların sündürme eylemini temsil ettiğini fark etmiştir. Kabartma yazıda temsilleri incelenmiştir. Görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için temsilleri incelemiştir ve kabartma yazıda doğrunun grafik temsilini çizebilmiştir. Doğrunun adlandırılması en son kazandığı adım olmuştur.
Doğru parçasını açıklayabilme	Öncelikle anten, daha sonra beyaz baston ile temsil ettiği doğru parçası kavramını tanımlamadan önce sonlu sayıda doğru parçasının uç noktalarından birleşiminin yine bir doğru parçası olduğu fikrini edinmiştir. Böylece doğru parçası kavramı ve dahası doğru kavramı için noktalar kümesi olduğu fikri gelişmiştir. Nihayetinde doğru parçasını 'noktalardan oluşan başlangıcı ve sonu belli olan düz çizgi parçası' olarak tanımlamıştır.
Doğru kavramını tanımlayabilme	Doğru kavramını başlangıçta 'sonsuza kadar sündürülebilen düz çizgi' olarak kavramıştır. Doğrunun grafik temsilinde ok işaretlerinin sündürme eyleminin devam edeceği fikrini temsil ettiğini anlamıştır. Daha sonra doğrunun üzerinde belirlenen iki farklı nokta arasında kalan düz çizgi parçasının bir doğru parçası belirttiğini açıklamıştır. Böylece doğrunun noktalar kümesi olduğunu açıklayabilmiştir. Nihayetinde 'sonsuz noktalar kümesi olan düz bir çizgi' şeklinde tanımlamıştır. Eğri kavramını 'dağlara' benzetip ip yardımı ile temsil etmiştir. Eğriyi düz bir çizgi olmayan şeklinde tanımlamıştır. Ardından doğrultusu düşey eksene paralel olan bir doğru temsili oluşturup doğru veya eğri olduğun ilişkin akıl yürütmüştür. Doğrunun tanımını ele alarak oluşturduğu temsilin bir doğru olduğunu açıklayabilmiştir. Son olarak doğrultu kavramını anlamış ve farklı doğrultularda doğru temsilleri oluşturabilmiştir.
Uzunluğun nesnelerin niteliği olduğunu bilme	Uzunluk kavramının nesneler için ölçülebilen bir nitelik olduğunu ifade etmiştir. Uzunluğun belirlenmesinde birimin önemli olduğunun farkındadır ve çeşitli uzunluk ölçü birimlerini belirtmiştir. Ölçüm sonuçlarının eşit olması için ölçü biriminin standart olması gerektiğini açıklayabilmiştir. Ancak henüz terim olarak 'birim'i ifade edememiştir.
Uzunluğu belirlemede birim tespit edebilme	Nesnelerin uzunluğunu belirlerken birim cinsinden ifade edilmesi gerektiğini düşünmektedir. Uzunluk ve kütle için farklı birimlerin olduğunu ve bu ölçümlerde kullanılabilecek çeşitli birimlerin de yer aldığını ifade etmiştir. Birim uzunluktaki çubuklar yardımı ile nesnelerin uzunluğunu belirleyebilmiştir. Bunun için eşit uzunlukta birim uzunluktaki çubuklar kullanmış ve birim cinsinden ifade etmiştir.
Standart bir uzunluk birimi belirleyebilme	Cetvel kullanırken veya nesnelerin uzunluğunu belirlerken standart bir birimin var olduğunu ve gerekliliğini açıklayabilmiştir. Verilen bir kablonun uzunluğunu birim uzunluktaki çubukların yanı sıra cetvel ile belirlemenin gerekliliğini ifade etmiş ve belirlemiştir. Günlük hayatta kullanılan ölçü birimlerinin sayı kümeleri ile ilişkilerine örnek vermiştir.
Uzunluk niteliği için birim kavramını açıklayabilme	Cetvel üzerinde ve iğneli sayfa materyalinde birim belirlerken iki işaret arasındaki uzaklığın önemini algılayabilmiştir. Başlangıçta iğneli sayfa materyalinde birim belirlemekte zorlanmıştır. Ancak iki iğne arasındaki uzaklığın esas alınacağı fikri belirtildiğinde birim belirlemekte güçlük yaşamamıştır. Belirlediği birim cinsinden uzunlukları tespit edebilmiştir.
Doğru üzerindeki noktaları reel sayılar ve/veya tamsayılar ile eşleyebilme	Doğrunun noktalar kümesi olduğunu ve sayılar kümesi ile eşlenebileceğini açıklayabilmiştir. İğneli sayfa materyalinin noktalar kümesi olduğunu, doğru temsili çubuklardaki deliklerin nokta temsili olduğunu ve sayı kümelerinin elemanları ile eşlenebileceğini belirtmiştir. İğneli tahta materyalinde tamsayılar ile doğru üzerindeki noktaları eşlemesi istendiğinde birim belirlemiş ve bu birime göre artan sırada sayıları doğru üzerindeki noktalar ile eşlemiştir. Daha sonra belirlediği birime göre verilen sayı etiketlerinin hepsini eşleyemeyeceğini fark etmiş ve birimi değiştirmiştir. Pozitif ve negatif sayıları 0 noktasının konumuna dikkat ederek eşlemeyi tamamlamıştır. Bu eşlemenin birebir eşleme olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca bu doğrunun doğrultusunun değişebileceğini belirtmiştir.
Doğruyu cetvelleyebilme	Bir doğru üzerindeki noktaların reel sayılar ile eşlenebileceğini ifade etmiştir. Her iki kümenin de sonsuz kümeler olduğunu ve doğrunun istenildiği kadar sündürülebileceğini açıklamıştır. Bu eşlemenin birebir olduğunu belirtmiştir. Ayrıca ½ reel sayısını eşlemek için birim belirlemiş ve örnek üzerinde eşleme yapmıştır. İp ile temsil edilen doğru üzerindeki noktalar raptiye ile temsil edilmiştir. Sayı etiketleri de sayı kümesinin elemanlarını temsil etmiştir. Bu eşlemeyi yaparken öncelikle 0 referans noktasını belirlemiştir. Ardından birim olarak kısa bir çubuk belirlemiştir. Bu çubuk yardımı ile eşlemeyi yapacağı noktanın referans noktasına olan uzaklığını belirlemesi gerektiğini ifade etmiştir. Pozitif ve negatif sayılar için mutlak değer alması gerektiğinin farkında olarak 0 noktasına göre konumlanmalarını açıklamıştır.
Sayı doğrusunu açıklayabilme	Sayı doğrusunu tanımlarken başlangıç noktası olarak referans noktasını içeren, pozitif ve negatif sayıların yer aldığı reel sayıları içine alan sonsuz bir doğru ifadelerine yer vermiştir. Burada belirlenen bir birime göre eşlemenin yapıldığını da ifade etmiştir. Ayrıca bir doğru parçası üzerindeki noktaların sonsuz bir küme belirtiğinin farkındadır.
Sayı doğruları ile koordinat ekseni oluşturabilme	Sayı doğrusunun bir küme olduğunu ve elemanlarını açıklayabilmiştir. Ayrıca iğneli sayfa materyalinin çubukları yardımı ile temsil edilen sayı doğruları için elemanları belirleyebilmiş, adlandırabilmiş ve düzlemi temsil eden iğneli sayfa ile eşleyebilmiştir. İki sayı doğrusunun elemanlarını eşlemek için öncelikle sayı doğrularını paralel olarak düzleme yerleştirmiş, sırasıyla çubuk ve bant yardımıyla iki kümenin elemanlarını eşlemeye çalışmıştır. Bu eşlemenin başarılı olmaması sonucunda sayı doğrularını dik olarak kesiştirmiştir.
Eksen ve orijin kavramlarını açıklayabilme	Dik olarak kesiştirdiği sayı doğrularının kesişim noktasını temsil eden çubukların orta noktalarında kesiştirmiş ve bu noktanın 0 başlangıç noktası olduğunu ifade etmiştir. Doğrunun orta noktasının olup olmayacağı tartışmasının ardında kesiştirdiği doğruları sayı kümeleri ile eşlerken kesişim noktasının referans noktası 0 olacağını anlamıştır. İki küme olarak doğruları öncelikle *m* ve *l* olarak adlandırmıştır. Daha sonra bu sayı doğrularının *x* ve *y* olarak adlandırıldığı, apsis ve ordinat eksenleri olduklarını ifade etmiştir. Oluşturduğu bu sistemin koordinat

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
	sistemi olduğunu ve eksenlerin kesiştiği noktanın orijin olduğunu belirtmiştir. Bu iki eksen arasındaki eşlemeleri göstermesi istediğinde sayılar için *x*- ve *y*-eksenlerinin elemanları terimini kullanmıştır. Eksenlerde sayıların konumlandırılışının farkında olduğundan, bu fikire dayanarak bölgeler tanıtılmıştır. Orijinin koordinatlarını belirlemekte güçlük yaşamamıştır.
Sıralı ikilileri açıklayabilme	Sıralı ikililerin temsili boncuklar yardımı ile belirlenmiştir. Koordinatları belirlenen noktaların kabartma yazıda ve görme yetersizliği olmayan bireyler için sembol gösterimini parantezin kodunu bildiği için rahatlıkla yapabilmiştir. Bu gösterim ile ifade edilen iki küme arasındaki eşlemelerde eşlenen elemanların gösterildiği noktalara sıralı ikili denildiği açıklanmıştır. Sıralı ikililer için koordinatların yazılmasında ilk önce apsis ve daha sonra ordinatın elemanının yazıldığını fark edebilmiş ve uygulamalar yapmıştır. Sıralı ikili olarak verilen bir noktayı koordinat sisteminde gösterebilmiştir.
Koordinatları verilen noktayı işaretleyebilme	Eksenler arasında eşleme yapması istendiğinde iğneli sayfa materyalinin doğru parçasını temsil eden çubuklarından yararlanmıştır. Eşlemenin temsili sorulduğunda sıralı ikiliyi işaretlediği noktayı ifade edebilmiştir. Kabartma yazıda bu noktanın yazımı kodlarıyla yazdırılmıştır. Bu gösterime sıralı ikili denildiği açıklanmıştır. Eşlemeleri gösteren noktalar boncuklar ile temsil edilmiştir. İlk eşlemeden sonra doğru parçalarını kullanmadan noktaları belirleyebilmiştir. Sezgisel olarak doğru parçaları varmış gibi öncelikle *x*-ekseninde, daha sonra y-ekseninde koordinatları belirleyip eşlemeleri gerçekleştirmiştir. Orijini işaretlemekte ve koordinatlarını ifade etmekte güçlük yaşamamıştır. Apsisi ya da ordinatı sıfır olan noktaları işaretlemede ilk örnekte güçlük yaşamasına rağmen ikinci örnekten itibaren başarılı bir şekilde açıklayarak işaretlemeleri yapabilmiştir. $(1/2, 0)$ ve $(3/2, 2)$ noktalarını eksenlerdeki noktaların eşlenmesinde kullanılan birimi değiştirerek gerçekleştirebilmiştir. Ancak rasyonel sayıların sıralanması, ondalık gösterimi ve sayı doğrusunda yerinin belirlenmesinde güçlük yaşamıştır.
Koordinat sisteminde işaretlenen bir noktanın koordinatlarını belirleyebilme	İlk önce iğneli sayfa üzerinde temsil edilen koordinat sisteminde verilen bir noktanın koordinatlarını belirlemiştir. Bunun için hayali doğru parçaları ile eksenlere verilen noktadan parmağı ile doğru parçaları çizmiştir. Daha sonra eksenler ile kesiştiği noktaları işaretleyip orijinden kaç birim uzaklıkta olduğunu belirlemiştir. Böylece işaretlenen bir noktanın koordinatlarını belirlemiştir. Ayrıca sıralı ikili olarak bu noktaları yazabilmiştir. Orijinin koordinatlarını hemen ifade edebilmiştir. Apsisi ya da ordinatı sıfır olan noktaların da koordinatlarını ifade etmekte güçlük yaşamamıştır.
Eşleme yoluyla sunulmuş ilişkili iki kümeyi belirleyebilme	Farklı temsil türleri ile sunulmuş veya sadece senaryo üzerinden eşleme yoluyla ilişkisi ortaya konulan iki kümeyi ve bu kümelerin elemanlarını belirleyebilmiştir. Kümeleri farklı temsil biçimleri ile temsil etmiş ve kümelerin elemanları arasındaki eşlemeleri her bir temsil türü için gösterebilmiştir. Her adımda sunulan senaryo için öncelikle liste yöntemi ile temsil kullanmış ve kümeler arasındaki eşlemeyi göstermiştir. Ardından farklı temsillere yer vermiştir. Temsillerde genellikle kabartma yazı tabletini veya iğneli sayfa materyalini kullanmıştır. Kümeleri liste yöntemi ya da Venn şeması ile temsil ederek kabartma yazıda eşlemeleri göstermiştir. İğneli sayfa materyalinde ise eksenler ile temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi sıralı ikililer yardımı ile göstermiştir.
Eksenlerin düzlemde birer kümeyi temsil ettiğinin farkında olma	Koordinat sisteminde iki kümenin elemanlarını eşleyebilmek için eksenlerin kümeleri temsil ettiğini ifade etmiştir. Kümelerin elemanlarını kabul ettiği bir birime göre eksenlerde konumlandırabilmiştir. İki kümeyi eşlerken eksenlere kümenin elemanlarına göre farklı birimler belirleyebilmiştir. Örneğin, *x*-ekseninde her iğne arasındaki uzaklık bir birim kabul edilirken, *y*-ekseninde her iğne arasındaki uzaklık beş birim kabul edilmiştir. Eşlemeleri gösteren sıralı ikilileri belirlemekte ve işaretlemekte sıkıntı yaşamamıştır.
İlişkiye göre eksenlerin hangi kümeyi temsil ettiğine karar verebilme	Verilen kümeler için bağlama göre *x*- ve *y*-eksenleri ile temsil edeceği kümeyi belirleyebilmiştir. Bazı uygulamalarda bağımlı değişkeni *x*-ekseni ile bazı uygulamalarda ise *y*-ekseni ile temsil etmiştir. Birkaç tane durum için her iki ihtimali de değerlendirmiştir. Yani bağısız değişkeni önce *x*- ve daha sonra *y*-ekseni ile temsil ederek eşlemeleri göstermiştir. Eksenler ile hangi kümeyi temsil ettiğini ifade ettikten sonra önce orijini işaretlemiş, sonra eksenlerin her biri için birim belirlemiş, daha sonra kümelerin elemanlarını belirlediği birime göre eşlemiştir.
İlişkiye göre karşılık gelen noktaları belirleyebilme	Eksenler ile temsil ettiği iki küme arasındaki ilişkiye göre elemanların eşlenmesini sıralı ikililer ile gösterebilmiştir. Koordinat sisteminde eşlenen noktaları işaretleyebilmiştir. Bu aşamada sıralı ikililerde önce apsisi, daha sonra ordinatı belirleyerek noktaları işaretlemiştir. İlişkiyi keşfettiği durumlarda eksenlerden kontrol etmeden koordinatları belirleyerek noktaları işaretleyebilmiştir. Bazı sıralı ikilileri işaretlerken önce ordinatı, sonra apsisi belirlediği gözlenmiştir. Genellikle apsisi 1, 2 ve 3 birim sayması gereken durumlarda önce ordinatı belirlediği tespit edilmiştir.
Tablo ile sunulan eşlemeler yoluyla iki küme arasındaki ilişkiyi belirleyebilme	Tablo yatay ya da dikey sunulması fark etmeksizin öncelikle satıların ya da sütunların temsil ettiği kümelerin adını belirlemek için ilk hücreleri okumuştur. Daha sonra sırasıyla eşlemeleri okuyarak elemanları belirlemiştir. Kümelerin her biri için elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemekte güçlük çekmemiştir. İki küme arasındaki eşlemler üzerinden ilişkiyi ifade etmeye çabalamıştır. Belirlediği eşlemeyi farklı temsil türleri ile gösterebilmiştir.
İki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilme	İki küme arasındaki ilişkiyi başlangıçta sadece elemanları eşleme olarak düşünmektedir. Yönlendirilen soru ile iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi açıklamakta güçlük çekmemesine rağmen, bu ilişkiyi cebirsel ifade etmekte güçlük yaşamıştır. Başka bir ifade ile henüz iki küme arasındaki ilişkiyi genelleyememiştir.
Noktaları doğru parçaları ile birleştirerek ilişkiyi grafik ile temsil edebilme	İki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi koordinat sisteminde noktaları işaretleyerek kolaylıkla temsil edebilmiştir. Nokta grafiği oluşturmakta güçlük çekmemiştir. İki küme arasındaki eşlemeyi göstermek için temsil türleri arasından seçim yapması istendiğinde her uygulamada grafik ile temsili tercih etmiştir. Verilen senaryo bağlamında kümeler arasındaki ilişkinin reel sayılar kümesi üzerinde düşünmekte güçlük yaşamamıştır. İlişkinin temsilinde nokta grafiği ya da çizgi grafiği olabileceğini belirleyebilmiştir. Ancak bu ayrımı lineer (doğrusal) ilişkiler için genellemiştir. İşaretlenen noktaları doğru parçaları (lastikler) ile birleştirerek çizgi grafiği oluşturabilmiş, ancak ilk doğru parçasını belirlemekte güçlük yaşamıştır. Başlangıçta paket lastikleri ile grafiği temsil etmiş, ilerleyen adımlarda ip ve kablo kullanmıştır. Ayrıca sıralı ikililer kümesinin bir grafik temsili olduğunu fark edebilmiştir.

Öğretim Hedefleri	Öğretim Sürecinde İlerleme Durumu
İki küme arasındaki ilişkinin farklı temsil türleri ile gösterebilme	Tablo, Venn şeması, sıralı ikililer kümesi şeklinde sunulan iki küme arasındaki ilişkiyi sırasıyla önce liste yönteminde doğru parçaları ile eşleme kullanarak, daha sonra Venn şemasında doğru parçaları ile eşleme kullanarak ve nihayetinde grafik ile temsil edebilmiştir. Ayrıca diğer temsil türleri arasında geçişleri yapabilmiştir. Yalnızca henüz grafik temsili ile bazı noktaları işaretlenen ilişkinin grafik temsilini gerçekleştirememiştir. Ayrıca cebirsel ifade ile temsil etme hedefine henüz yer verilmemiştir. Ancak her ne kadar *x*- ve *y*-eksenleri için genelleyemese de örnekler üzerinden ilişkiyi sözel olarak ifade edebilmiştir.
İki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilme	Farklı temsil türleri ile sunulan iki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilmiştir. Nokta grafiği oluşturmakta güçlük yaşamamıştır. Çizgi grafiği oluştururken ilk önce işaretli noktaların hepsini birleştiren kapalı bir eğri oluşturmuştur. Noktalar arasındaki ilişki ve kümelerin tanımlarına dikkat etmesi gerektiği açıklandığında çizgi grafiğini oluşturabilmiştir. Lineer (doğrusal) ilişkilerin grafik temsilinde oldukça başarılı olmuştur. Parabol grafiğinde ise tekrar işaretli noktaları birleştirme eğilimde olmuştur. Oluşturduğu doğru parçasının üzerinde yer alan bir noktanın belirlenen ilişkiye göre incelenmesi ve işaretli noktalardan farklı bir noktanın incelenmesi sonucunda grafiği oluşturabilmiştir.
Grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiye ait noktaları tespit edebilme	Verilen bir grafik üzerindeki noktaları belirleyebilmiştir. Eşlemeleri oluşturan ilişkiyi sözel olarak ifade edebilmiştir. Ancak ilişkiyi cebirsel ifade edememiştir.
Grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleri ile ifade edebilme	Grafik temsili ile verilen iki küme arasındaki ilişkiyi belirlediği kritik noktalar yardımı ile sıralı ikililer olarak ifade etmiştir. Daha sonra bu eşlemeleri Venn şeması ile temsil ettiği kümeler yardımıyla gösterebilmiştir. Ayrıca bu sıralı ikililer arasındaki ilişkiyi belirleyerek iki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilmiştir.
İki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleri ile ifade edebilme	İki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil türleri ile göstermede ya da temsiller arasında geçişler yapmada başarılı olmuştur. Sadece cebirsel temsil etmeye çabalamasına rağmen başarısız olmuştur. Ancak iki küme arasındaki ilişkiyi belirlerken öncelikle artma ve azalma ilişkisi, ardından kat ve kuvvet ilişkisi aradığı tespit edilmiştir. Tablo ile temsil en az kullandığı temsil türü diyebiliriz.
Değişken kavramını kendi ifadeleri ile açıklayabilme	Cinsiyet ve yaş kümeleri örneklerinde kümelerin elemanlarını belirleyebilmiş ve değişkenin evrensel kümenin her elemanını temsil ettiğini algılayabilmiştir. Sayı doğrusu üzerindeki noktaların bir boncuk ile temsil edilmesi ile değişkenin bir sembol olduğu fark etmiştir. Ayrıca düzlem üzerindeki noktaları temsil etmesi durumu üzerine akıl yürütmüştür. Değişken ve sabit kavramlarını açıklayabilmiştir. Ardından sayı doğrusu örneği üzerinden örnek verebilmiştir. Reel sayılar kümesine dair örnek durumda güçlük yaşasa da değişkenin her reel sayıyı temsil eden bir sembol olduğunu açıklayabilmiştir. Değişkenin *t* gibi harf ile temsil edileceğini örneklendirerek açıklamıştır. Ayrıca Braille yazıda değişkenin nasıl kodlanacağını belirtmiştir.
Bağımlı ve bağımsız değişkenleri farklı harflerle temsil edebilme	İki küme arasındaki ilişkiyi belirlerken bu kümelerin elemanlarını temsil edecek olan değişkenleri *x* ve *y* olarak ifade edebilmiştir. Sezgisel ya da tahmini olarak Venn şeması ile verilen iki kümenin elemanlarını temsil edecek değişkenleri belirlerken *x* ve *y* olarak atamıştır.
Bağımlı, bağımsız değişken kavramlarını açıklayabilme	Verilen kümeler arasındaki ilişkiden yola çıkarak sezgisel olarak bir kümenin elemanlarındaki değişime göre diğer kümenin elemanları ile eşlendiğini açıklamıştır. Bağımlı de bağımsız değişken kavramları terim olarak belirtilmiştir.
Bir ilişkinin verildiği gösterim biçimindeki bağımlı ve bağımsız değişkeni tespit edebilme	Farklı temsil biçimleri ile sunulan kümeler veya eşleme temsilleri için bağımlı ve bağımsız değişkeni belirleyebilmiştir. Bu değişkenleri farklı harfler ile gösterimlerini yapabilmiştir. İlk örnek durumlarda kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi ifade edebilmiş ve bir kümenin elemanlarındaki değişimi diğer kümenin elemanlarındaki değişim ile ilişkilendirebilmiştir.
İki küme arasındaki eşlemeye dayanarak bağımlı ve bağımsız değişkenler ile ilişkiyi ifade edebilme	Öncelikle iki küme arasındaki ilişkiyi (bağımsız) değişken ile ifade etmiştir. İlk örneklerde önce artma veya azalma ilişkisi belirlemeye çalışmıştır. Daha sonra kat ve kuvvet ilişkisini belirleyebilmiştir. Benzer adımlarda sıralı ikilileri belirledikten sonra eşlemeyi meydana getiren ilişkiyi belirlemesi gerektiğinde, sadece bir sıralı ikiliyi ele alarak tahmin et-uygula stratejisi kullanmıştır. Ancak bu şekilde belirlediği ilişkilerin diğer eşlemeleri oluşturan sıralı ikililer için geçerli olmadığını fark etmiştir. Bağımlı ve bağımsız değişkene göre iki küme arasındaki ilişkiyi sözlü olarak açıklayabilmiştir. Ancak henüz cebirsel olarak temsil edememiştir. Cebirsel temsillerde 'kat, fazlası, artma' gibi matematiksel ifadeleri cebirsel olarak yazmakta güçlük yaşamıştır.
Bağımlı ve bağımsız değişkenler ile cebirsel bağıntılar yazabilme	Cebirsel bağıntıları ifade etmede sözlü olarak açıklayabilirken, *x* ve *y* gibi farklı iki değişken ile cebirsel ifadeyi yazmakta güçlük yaşamıştır. Örnek durumların artırılması ile belirlediği cebirsel ilişkiyi bağımsız değişken ile yazabilmiştir. Ancak bir bağıntı olarak ifade etmesi grafik temsilleri üzerinde çalışırken gerçekleşmiştir. Bu süreçte bağıntıyı yazmakta veya ilişkiyi belirlemekte güçlük yaşamasının aritmetik işlemlerindeki önbilgi eksikliğinden kaynaklandığı belirlenmiştir.
Cebirsel temsil ile grafik temsili arasında geçişleri yapabilme	Verilen bir cebirsel temsil için ilişkiyi gösteren sıralı ikililerden ilk temsili belirlemekte güçlük yaşamıştır. Aynı örnekte diğer noktaları belirlemekte güçlük yaşamamıştır. Diğer adımlarda yer alan cebirsel ifadeler için grafik oluşturmakta güçlük yaşamazken, $y = x$ cebirsel ifadesinde ilk sıralı ikiliyi belirlemekte tekrar güçlük yaşamıştır. Grafik temsili verilen bir ilişki için cebirsel temsil etmede yaşadığı güçlükler de dikkate alındığında, bu güçlüklerin harfli ifadelere ilişkin önbilgi eksikliklerinden kaynaklandığı belirlenmiştir.

4.4.3. Sema’ nın ve Mete’ nin Öğrenme Yol Haritalarının Hedeflerin Sıralanmasına Göre Karşılaştırılması

Sema’ nın öğrenme yol haritası ile Mete’ nin öğrenme yol haritası karşılaştırıldığında hedeflerin sıralamalarında farklılıklar yer almaktadır. Katılımcıların güçlük yaşadıkları adımlar, kavramlar ya da temsiller farklı olmasının yanında tercih ettikleri çözüm stratejileri ve temsil türleri de farklılık arz etmektedir. Bu başlık altında öğrenme yol haritalarında yer alan hedefler sıralaması bağlamında katılımcılara ait bulgular karşılaştırma yapılarak sunulmuştur.

Sema küme kavramının sezgisel tanımını yapamazken, Mete’ nin ‘belirli nesnelerin bir araya gelerek gruplandırılması’ ifadesi ile topluluk fikrine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu nedenle Sema ‘küme kavramına ilişki örnekler sunabilme’ hedefi ile yol haritasını oluşturmaya başlarken, Mete ‘küme kavramının sezgisel tanımını yapabilme’ hedefi ile yol haritasının ilk adımını oluşturmuştur. Her iki katılımcı da kendilerine verilen nesneler ile küme oluştururken belirledikleri ortak bir özelliğe göre nesneleri seçmiştir. Sema küme kavramını açıklamadan önce ‘ait olma’ ve ‘elemanı olma’ fikirlerine dayanarak kümenin elemanı olma ve eleman sayısı hedefine yer vermiştir. Mete ise bir guruba ‘üyesi olma’ fikri ile küme kavramına verdiği örnek üzerinden elemanı olma ve eleman sayısı hedefine eriştiğini göstermiştir. Sema Venn şeması ile küme kavramını yapılandırmayı tercih ederken, Mete’ nin liste yöntemi ile temsil etmeyi tercih ettiği belirlenmiştir. Mete küme kavramını örneklendirimede reel sayılar kümesi gibi sonsuz kümelerden bahsederken, Sema tek tamsayılar kümesinin sorgulanması sonucunda sonlu ve sonsuz küme kavramlarını açıklamıştır. Dolayısıyla ‘sonlu ve sonsuz küme kavramlarının açıklanması’ hedefi ile ‘küme kavramında yer alan sembollerin kavranması’ hedefleri katılımcıların öğrenme yol haritalarında farklı sıralamalarda yer almaktadır.

Evrensel küme ve altküme kavramları her iki katılımcının da benzer güçlükler yaşadığı kavramlar arasında yer almıştır. Bu güçlükler arasında evrensel küme ile altküme kavramlarının elemanlarını belirleyememe en dikkat çekeni olmuştur. Altkümenin elemanlarının aynı zamanda evrensel kümenin de elemanı olduğu tasarlanan ikinci öğretim oturumunda altkümenin poşet temsili ile algılanmıştır. Ancak Mete’ nin altkümenin evrensel kümenin bir elemanı olduğu yanılgısının olduğu belirlenmiştir. Poşeti bir nesne olarak düşünmemesi belirtilerek ve günlük hayattan örnekler ile söz konusu kavramları anlaması mümkün olmuştur.

İki kümenin elemanlarını eşleme için katılımcıların her ikisi de sembol kullanmak istemiştir. Her ikisi de aşina oldukları sembolleri kullanmayı tercih etmiştir. Ortak olarak katılımcıların eşleme fikrini temsil etmek için '=' sembolü kullanmaları dikkat çekmektedir. Farklı temsil türlerinde eşleme yapabilmişlerdir. Tablo ile eşleme temsilinde Sema dikey konumlandırılmış tabloda eşlemeleri yorumlayabilmişken, Mete yatay konumlandırılmış tabloda eşlemeyi oluşturan ilişkiyi ifade edebilmiştir. Ardından her iki katılımcı da bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirleyebilme hedefine erişmiştir. Ancak katılımcıların daha sonraki hedef sıralamalarında farklılıklar gözlenmiştir. Sema iki küme arasındaki ilişkiye göre eşleme yapabilmişken, Mete öncelikle iki küme arasındaki eşlemeleri inceleyerek ilişkiyi tespit etme adımını gerçekleştirebilmiştir. Bunun için Mete tablo temsili ile sunulan eşlemeleri incelemiştir. Bu adımdan sonra her iki katılımcı da verilen iki küme arasındaki eşlemeyi oluşturan ilişkiyi belirleme hedefine erişmiştir. İki kümenin elemanlarını belirli bir ilişkiye göre eşleme hedefini Mete liste yöntemi ile küme temsili üzerinde tamamlamışken, Sema öncelikle tablo ile temsil edilen eşlemeyi gerçekleştirme hedefini gerçekleştirmiş ve ardından ilişkiye dayalı kümelerin elemanları arasındaki eşlemeleri yapabilmiştir. Birebir eşleme kavramı için katılımcılar farklı performanslar sergilemiştir. Mete eşleme kavramına ilişkin ilk adımdan itibaren birebir eşleme kavramını fark etmiş, sezgisel ifadelere yer vermiştir. Sema ise öğretim oturumunun sonunda verilen örnek durum üzerinde tartışılması üzerine fark edebilmiş ve alternatif bir tanım yapabilmiştir. Mete ise verilen örnek durumlarını tartışmak istemiş ve tanımını yapabilmiştir.

Katılımcıların her ikisi de doğru kavramı için düz çizgi temsilini algılamış ve açıklayabilmiştir. İp ve kablo ile temsil edebilmiştir. Sema düz çizginin doğruyu temsil ettiğini ifade etse de sündürme fikrini kavrayamamıştır. Mete ise ip yardımı ile düz çizginin doğruyu temsil ettiğini açıklarken kollarını masanın üzerine uzatarak sündürme fikrine işaret etmiştir. Sema doğruyu 'sündürmek istenildiği kadar sündürülebilen düz çizgi' olarak tanımlarken, Mete doğrunun sonsuz noktalar kümesi olduğunu işaret etmiştir. Katılımcıların her ikisi de doğrultu kavramına henüz dikkat etmemiştir. Her ikisi de yatay ve düşey konumlarda doğru temsillerine yer vermiştir. Sema doğru parçasını düz çizgi ile ilişkilendirmeden önce doğrunun görme yetersizliği olmayan bireyler için ve kabartma yazıdaki temsillerini öğrenmek istemişken, Mete öncelikle düz çizgi parçasının doğru parçasının temsili olduğunu ifade etmiştir. Anten ve beyaz baston örnekleri Mete' nin doğru parçası kavramını daha öncelikle ele almasına fırsat oluşturmuştur. Ardından Mete doğru ve doğru parçası kavramlarının görme yetersziliği olmayan bireylerin kullandığı ve kabartma yazıdaki temsillerini incelemiştir. Sema doğru parçasını açıklayarak, temsil türlerini inceledikten sonra doğru ve doğru parçası temsillerini görme yetersizliği olmayan bireyler için ve kabartma yazıda ele almıştır. Her iki katılımcı da doğru temsilinde ok işaretlerine dikkat etmiş ve doğru parçası için uç nokta kavramını algılamıştır. Mete doğru ve doğru parçası kavramlarını anten örneği üzerinden ilişkilendirebilme hedefine daha önce yer vermiş, doğru parçası ve doğru gösterimlerine ilişkin hedefleri daha sonra gerçekleştirmiştir. Daha sonra doğru ve doğru parçası kavramlarını tanımlamıştır. Katılımcıların her ikisinin de doğrultu kavramını öğretim oturumun sonunda sorguladığı dikkat çekmektedir. Mete eğri kavramını tartışırken doğrultusu farklı farklı doğruları ip ile temsil ederek sorgulamış ve doğrunun tanımını hatırlayarak doğrultu kavramına ulaşmıştır. Bu nedenle katılımcıların eğri kavramından sonra doğrultu kavramını düşündükleri söylenebilir.

Katılımcılar uzunluk kavramını nesnelerin bir niteliği olduğunun farkındadır, ancak Mete uzunluk ölçü birimleri ile ölçümden bahsederken, Sema iki nesneyi birbiri ile kıyaslayarak uzunluk belirleme eğilimindedir. Daha sonra her ikisi de uzunluk niteliği için birim tespit edebilmiş ve standart bir birimin gerekliliğini ifade etmiştir. Katılımcılar cetvel ve iğneli sayfa materyali arıcılığı ile birim kavramını açıklayabilmişlerdir. Doğru üzerindeki noktalar ile sayıları eşleme hedefinde Sema 0 noktasını belirlemekte ve sayıları konumlandırmakta güçlük yaşamıştır. Mete' nin ise bu adımda dikkat ettiği önemli noktalardan biri sayıları konumlandırırken birimin belirlenmesi gerektiğidir. Nitekim bir doğruyu cetvelleyebilme hedefi için Mete birim uzunluktaki çubuğu kullanarak doğru üzerindeki noktalar ile sayıları eşlemeyi tercih ederken, Sema cetvel yardımı ile 5 cm uzunluğu bir birim olarak kullanmıştır. Ardından her iki katılımcı da sayı doğrusunu tanımlayabilmiştir. Bu öğretim oturumunda hedeflerin sıralamasına ilişkin öğrenme yol haritalarında farklılık olmayan katılımcılar, sayı doğruları aracılığı ile koordinat sisteminin oluşturulması hedefi için de benzer düşünmeleri sergilemiştir. Her iki katılımcı da iki sayı doğrusu üzerindeki noktaları eşlemek için önce doğruları paralel düşünmüş, daha sonra dik kesiştirmek sureti ile doğru parçaları yardımı ile eşlemeyi düşünmüştür. Böylece eksen ve orijin kavramlarını bilme hedefi gerçekleşmiştir. Mete daha önceki bilgilerine dayanarak eşlemeleri temsil ettiği noktanın koordinatlarını ifade edebildiği için sıralı ikilileri açıklayabilme hedefine daha önce ulaşmıştır. Sema ise eşlemeyi temsil eden noktaları koordinat sisteminde işaretleyebilmiş, ardından bu noktaların gösterimlerini anlamış ve sıralı ikili kavramını açıklayabilmiştir. Mete koordinat sisteminde eşlemeleri ve noktaları belirlemede daha başarılı olmuş ve rasyonel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan eşlemleri de gösterebilmiştir. Katılımcıların apsis ya da ordinatı 0 olan noktaları işaretlemekte güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Ayrıca katılımcılar orijinin koordinatlarını belirlerken ve eksenlerin üzerindeki noktaların koordinatlarını belirlerken güçlük yaşamışlardır. Doğru parçaları yardımı ile eşlemenin ve sıralı ikili kavramlarının hatırlatılması ile birkaç uygulamadan sonra söz konusu noktaları koordinat sisteminde belirlemekte ya da işaretli noktanın koordinatlarını belirlemekte başarılı olmuşlardır. Eşleme yoluyla sunulmuş iki kümeyi ve bu kümelerin elemanlarını belirlemekte güçlük yaşamamışlardır. Sema verilen eşlemeleri temsil etmek için tablo ile temsili tercih ederken, Mete kümeleri liste yöntemiyle temsil ederek eşlemeleri doğru parçaları ile temsil etmektedir. Mete bazı örnekler için Venn şeması ile temsili kullansa da koordinat sisteminde grafik ile temsil etme eğilimi de göstermiştir. Dolayısı ile her iki katılımcı da eksenlerin birer kümeyi temsil ettiğinin kavramışlardır. Böylece katılımcılar ilişkiye göre eksenlerin hangi kümeyi temsil ettiğine ve ilişkiye göre karşılık gelen noktaları belirleyebilme hedeflerine aynı sıralama ile öğrenme yol haritalarında yer vermiştir. Daha sonra tablo ile temsil edilen ve ardından diğer temsil yolları ile verilen ilişkiyi belirleme hedeflerine ulaşmışlardır. Katılımcıların belirledikleri ilişkiyi sadece cebirsel olarak ifade etmekte güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Ayrıca katılımcılar grafik ile temsil etmede istekli ve başarılı oldukları gözlenmiştir. Belirledikleri eşlemeleri koordinat sisteminde sıralı ikililer ile işaretledikten sonra verilen ilişkiye göre noktaları doğru parçaları ile birleştirebildikleri tespit edilmiştir. Nokta ya da çizgi grafiği oluşabileceğinin farkında olan katılımcıların lineer (doğrusal) ilişkileri temsil etmede daha başarılı oldukları belirlenmiştir. İki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil türleri ile göstermede başarılı olan katılımcılardan Sema öncelikle tablo ile temsili tercih ederken, Mete kümeleri liste yöntemi ile temsil ederek doğru parçaları ile eşlemeleri göstererek cebirsel olarak temsil etmeye çabalamıştır. İki küme arasındaki ilişinin grafik ile temsil edilmesi ve verilen bir grafik üzerindeki noktaların, dolayısı ile verilen ilişkinin tespit edilmesi hedeflerinin katılımcıların öğrenme yol haritalarındaki yeri aynı olsa da düşünme süreçleri farklılık arz etmektedir. Sema verilen bir ilişkide birkaç eşlemeyi koordinat sisteminde sıralı ikili olarak işaretleyerek grafiği oluşturabilirken, Mete daha fazla noktayı işaretleme gereksinimi duymaktadır. Ayrıca Mete grafiği oluştururken, grafiğin nasıl devam edeceğini belirlemek için birkaç nokta daha işaretleme eğiliminde olmuştur. Grafik ile verilen bir ilişkiyi farklı temsil türü ile gösterim hedefi için kümelerin tanımlı olduğu kümelere göre Sema’ nın tablo ve Mete’ nin Venn şeması ile temsil etme eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Her iki katılımcının da cebirsel temsili sözel olarak ifade edebilirken cebirsel eşitliği yazmakta zorlandıkları tespit edilmiştir.

Değişken, bağımlı ve bağımsız değişken, iki küme arasındaki ilişkinin cebirsel temsili üzerine yer alan hedeflerde katılımcıların öğrenme yol haritalarında hedef sıralaması paralel devam etmiştir. Katılımcılar değişken kavramının bir kümenin elemanlarını temsil eden sembol olarak açıklayabilmişlerdir. Bağımlı ve bağımsız değişkenleri farklı harfler ile temsil edebilmişler, ardından Venn şeması ile temsil edilmiş kümeler üzerinde örneklendirerek bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarını açıklayabilmişlerdir. Katılımcılar bir ilişkinin verildiği gösterim biçimindeki bağımlı ve bağımsız değişkeni tespit edebilme hedefinde güçlük çekmeden ulaşabilmiştir. Ayrıca iki küme arasındaki eşlemeye dayanarak bağımlı ve bağımsız değişkenler ile ilişkiyi ifade edebilmişlerdir. Ancak cebirsel ifade etme sürecinde değişkenler arasındaki ilişkiyi tespit etmelerine rağmen, bu ilişkiyi bir bağıntı olarak yazmakta güçlük yaşamışlardır. Öğretim oturumlarında artırılan örnek uygulama sayısı ile bağımlı ve bağımsız değişkenler ile cebirsel bağıntılar yazabilme hedefi gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte sıklıkla grafik temsili kullanılmasına rağmen katılımcıların cebirsel ifade ile verilen bir ilişkiyi grafik ile temsil etmede güçlük yaşadığı gözlenmiştir. Dolayısı ile her iki katılımcının da en son eriştiği hedef cebirsel temsil ile grafik temsili arasında geçişleri yapabilme olmuştur.

Sonuç olarak katılımcıların öğrenme yol haritalarının karşılaştırılması, kavram odaklı olarak katılımcıların önbilgilerindeki farklılıklar ve öğretim oturumlarında kullanılan destek eğitim araçlarına bağlı olarak hedef sıralamalarında farklılıkları işaret etmektedir.

BÖLÜM V

SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışma görme engelli bireylerin cebir kavramlarına ilişkin öğrenme yol haritalarının ortaya konulması amacıyla tasarlanmış ve söz konusu amaca hizmet edecek alt problemler ortaya konulmuştur. Bu amaca ulaşabilmek için araştırma problemi iki alt probleme ayrılmıştır. Problemlerden birincisi görme engelli bireylerin genelde eğitime ve özelde matematik eğitimine ilişkin sorunlara, ihtiyaçlara ve beklenilen öğrenme ortamlarının özelliklerini belirlemeye yönelik olduğundan, bu bölümde önce bununla ilgili sonuçlara ve tartışmalara yer verilecektir. Daha sonra da, görme engelli bireylerin bu doğrultuda elde edilen tahmini öğrenme yol haritalarına dair sonuçlar verilecek ve bu sonuçların eğitim ve öğretim açısından ne anlama geldiği tartışılacaktır.

5.1. Genelde Eğitime ve Özelde Matematik Eğitimine İlişkin Sorunlar, İhtiyaçlar ve Öğrenme Uygulamaları İçin Sonuçlar

Genelde eğitim ve matematik dersi özelinde uygulamalara dair ortaya konulan sonuçlar incelendiğinde, her iki alanda da sonuçların paralellik gösterdiği belirlenmiştir. Okuyucu birey desteği veya kaynak materyal ihtiyacı gibi benzer ihtiyaç ve sorunların her iki alanda da zuhur ettiğini söyleyebiliriz. Bu iki temada farklılık arz eden sonuçlara bakıldığında matematik eğitiminde Braille yazı ile matematik öğrenme ve öğretmeye dair sorunlar ve ihtiyaçlar dikkat çekmektedir. Diğer farklılıklar ise genel eğitim uygulamalarına dair sonuçlarda vurgulanan 'okuyucu birey desteği' ve 'sözlü anlatım' iken, matematik uygulamalarına dair sonuçlarda ise 'dokunsal iletişim', 'bireylerin ve öğretmenlerin tecrübeleri'dir. Nitekim Bayram (2014) görme engelli ortaöğretim öğrencilerinin kaynaştırma uygulamalarındaki akademik ve sosyal güçlükleri incelediği tez çalışmasında, öğretim uygulamaları ve uygulamalarda kullanılan materyallerden öğrenme stillerine, değerlendirme sistemlerinden eğitimde eşitlik algısına kadar farklı ihtiyaçlardan söz etmiştir. Şimdiki tez çalışmasında ise görme engelli bireylerin eğitim ortamlarında sıklıkla yaşadıkları sorunlara ve uygulamalara dair ihtiyaçlar incelendiğinde eğitim materyalleri, öğretmen, eğitim-öğretim uygulamaları ve duyuşsal davranışlar çerçevesinde kategoriler karşımıza çıkmıştır. Elde edilen bu sonuçlar görme engelli bireyin görme yetersizlik geçmişi, görme oranı veya eğitim düzeyi gibi değişkenlere bağlı olmaksızın yaygın sorunlar ve ihtiyaçlar olarak tespit edilmiştir.

Görme engelli bireylerin eğitim uygulamalarında mevcut sorunları ve ihtiyaçları ele alındığında birbirine yansımaları olan bir ilişki ağı elde edilmiştir (bkz. Şekil 29). Bu ağ bireylerin ihtiyaçlarının birbirini meydana getirdiği veya kuvvetlendirdiği şeklinde düşünülebilir. Dolayısı ile ihtiyaçlar sorunları ortaya çıkarmaktadır. Eğitim uygulamalarında görme engelli bireylerin gereksinim duydukları ihtiyaçların başında ders materyallerinin eksiklikleri ve yetersizliği gelmektedir. Bu gereksinimler destek eğitim araçlarından yazılı materyaller, ses kaydı ve ekran okuyucu programlarının yetersizliği şeklinde sıralanmaktadır. Görme engelli bireyler ders kitaplarının yanı sıra kaynak kitapların da Braille yazı basımına ulaşamamaktadır. Ayrıca derslerin ya da kaynakların ses kayıtları yer almamaktadır. Fakat ses kaydı dinlemek görme engelli bireyler için bir avantaj olması gerekirken, diğer bir sorun olarak karşımıza çıkmaktadır. Buna sebep ise, bireyin istediği bilgiye erişmek için uzun ses kayıtları dinlemek zorunda kalmasıdır. Bu ihtiyaca çözüm olarak teknolojik materyallerden beklenen destek, ekran okuyucu programların şema, tablo ve diyagram gibi görsel içeriğe ilişkin sorunlarından dolayı karşılanamamaktadır. Ayrıca bu programların pek çoğu diğer araştırmalarda da belirlendiği gibi matematiksel sembolleri ve denklemleri seslendirmekte de başarılı değildir (Başkurt, 2015). Görsel içerikler yalnızca teknolojik materyallerde değil, sınıf uygulamalarında da genel bir sorun olarak ortaya çıkmaktadır. Sınıf uygulamalarında şema, diyagram veya sembol gibi görsel içeriklerin ayrıntılı betimlenmemesi ve söylemlerde yön veya konum belirten ifadelere yer verilmesi görme engelli bireyler için önemli güçlükler arasında yer almaktadır. Yazılı materyallerin eksikliğinden doğan söz konusu sorunlar ve ihtiyaçlar görsel içerikler ve sınavlarda yaşanan güçlükler ile daha da artmaktadır. Dahası sadece matematik özelinde değil diğer bilimler için uygulamalarda benzer sorunlar yer almaktadır (Okcu, Yazıcı & Sözbilir, 2016).

Görme engelli bireyler sınıf uygulamalarının bireysel ihtiyaçlarına göre uyarlanmasının yanı sıra destek eğitim uygulamalarına ihtiyaç duymaktadır. Destek eğitim uygulamaları bireyselleştirilmiş eğitim programının tasarlanmasını, uygulanmasını ve destek eğitim odalarında bireysel dersleri içermektedir. Söz konusu programın öğrencinin bireysel ihtiyaçları ve bireysel farklılıkları göz önüne alınarak tasarlanmış olması gerekmektedir. Ayrıca bu farklılıklara uygun destek eğitim araçları ile donatılmış olması gerekmektedir. Görme engelli bireylerin ihtiyaç duyduğu destek eğitim araçlarının arasında, onların not tutmalarını kolaylaştıracak materyaller gelmektedir. Nitekim araştırma sonuçları görme engelli bireylerin önemli sorunlarından biri olarak not tutma güçlüğünü işaret etmektedir. Kabartma yazı tabletinde not tutmanın güç olması, daktilonun taşınabilir olmaması ve teknolojik materyaller kullanmaya aşina olmama gibi sorunlar not tutma güçlüğünü kuvvetlendiren değişkenler arasındadır. Zira görme engelli bireyin not tutma ihtiyacı, öğrendiği bilgileri tekrar etme ihtiyacını karşılaması açısından elzemdir. Ancak, görme engelli bireylerin not tutmadaki güçlüklerin ve ses kaydının kullanışsız olması, bilgileri tekrar edebilmelerinin önünde önemli engellerden bazılarıdır. Not tutma güçlüğünün bir sonucu olarak, görme engelli bireyler zihinden işlem yapma eğilimindedir. Fakat çeşitli derslerde yer alan uzun matematiksel işlemler zihinden işlem yapılmasını güçleştirmektedir. Benzer şekilde art arda matematiksel işlemlerin sıralanması da zihinden işlem yapmayı imkansız hale getirmektedir. Not tutma ihtiyacı ve uzun işlemler gerektiren soruların olması sınavlarda çeşitli sorunları ve ihtiyaçları ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla, bireyler daha fazla sınav süresine ve okuyucu desteğine ihtiyaç duymaktadır. Sınav esnasında ise okuyucudan kaynaklanan sorunlar baş göstermektedir. Okuyucu bireyin seslendirmede diksiyonundan kaynaklanan sesi yakalama güçlüklerin olması, okuyucunun sembolleri ve işaretleri okuyamaması veya bireyin motivasyonunu etkilemesi, metni tekrar etme problemleri veya okuyucunun işlemleri okumak istememesi bu sorunlar arasında yer almaktadır. Okuyucunun bireye karşı olan tutumunun bireyin akademik başarısına olan olumsuz yansımaları, matematik eğitimi ve ilişkili alanlarda yapılan araştırmaların konusu veya sonucu olmuştur (Bülbül, Demirtaş, Oktay, Cansu & Garip, 2012; Rule, Stefanich, Boody & Peiffer, 2011; Zorluoğlu & Sözbilir, 2017). Görme engelli bireylerin okuyucu ile ilgili sorunları ve ihtiyaçları bununla sınırlı değildir. Görsel içeriklerin kabartma yazıda temsilinin güç olması, görme yetersizliği olan bireyleri sınavlarda okuyuculara bağımlı hale getirmektedir. Okcu, Yazıcı ve Sözbilir (2016) görme yetersizliğine sahip bireylerin matematik, fen ve İngilizce derslerinde güçlük yaşadığını belirlemiştir. Araştırmacılar bu güçlüğün kaynağını matematik ve fen dersleri için görsel içeriklerin yer olması olarak yorumlamıştır. Araştırmacıların sınavlarda yaşanılan sorular üzerinden yaptığı bu yorum, genel olarak söz konusu derslerin semboller içermesi ve sembollerin söylemde farklılıklar barındırması ile ilişkilendirilebilir. Nitekim İngilizce kelimelerin yazılışı ve telaffuzundaki farklılıklar da matematiksel sembollerin kullanılması ile benzer nitelikler taşımaktadır. Cowan (2011, s.174) matematiksel sembollerin, yazı ve söylemdeki farklılıklardan dolayı görme engelli bireylerin sınıf uygulamalarında not tutmakta güçlük yaşadığını belirtmiştir. Bu nedenle görme yetersizliği olan bireyler okuyucu bireylerin yardımlarına ihtiyaç duyduklarını söyleyebiliriz.

Okullarda ve destek eğitim hizmeti veren kurumlarda görev alan görme engelli bireylerin iletişim içerisinde olduğu öğretmenlerle de benzer sorunlar yaşanmaktadır. Ayrıca öğretmenlerin daha önce görme engelli bir öğrenci ile sınıf pratiklerine ve deneyimlere sahip olmaması önemli bir sorun olarak ortaya çıkmaktadır. Özel eğitim tecrübesi olmayan öğretmen, Braille kabartma yazı bilmemesinden ziyade öğrencinin bireysel farklılığını dikkate alan uygulamalarda yetersizdir. Dolayısı ile ilgili öğretmenlerin önemli bir kısmı, görme engelli bireyler için eğitim ortamı tasarlamanın yanı sıra kaynaştırma eğitimine ilişkin de tecrübeden yoksundur. Doğal olarak bu durum, öğretmenin kaynaştırma öğrencisine ilişkin tutumuna yansımaktadır. Öğretmenin tutumu sadece görme engelli öğrenciye eğitim veremeyeceği ya da öğrencinin soyut matematiksel kavramları öğrenemeyeceği yönünde değildir. Dahası, öğretmen görme engelli öğrencisinin matematiksel kavramları öğrenebildiğini fark ettiğinde, görsel kavramlar içeren kazanımlar için öğrencisinden başarılı performanslar bekleyebilir. Ancak, somut materyaller ile desteklenmeyen öğretim uygulamaları ile görme engelli öğrencilerin geometri gibi görsel unsurlar içeren kavramların olduğu öğrenme alanlarında akademik başarı göstermesi güçtür (Spindler, 2006). Duyuşsal alanda belirlenen bir diğer sorun, görme engelli öğrencilerin kaynaştırma uygulamalarına dahil olduğu anda ortaya çıkmaktadır. Görme engelli birey, görme yetersizliği olmayan akranlar, ihtiyaçlarına göre uyarlanmamış sınıf uygulamaları ve kaynaştırma uygulamaları için tecrübesiz öğretmenler ile karşılaştığında kaygı hissedebilmektedir. Bu durum görme engelli öğrencilerin eğitim ve öğretim uygulamalarında başarı göstermesinde önemli bir engel teşkil etmektedir. Nitekim görme engelli bireylerin eğitim öğretim uygulamalarında akademik başarılarını artıran uygulamalar, stratejiler ve diğer değişkenler incelendiğinde, sınıf düzeninden destek eğitim araçlarına, yazılı matematiksel dil kullanımından söylemlere kadar sonuçlar ortaya konulmuştur.

Görme engelli bireylerin sınıf uygulamalarında bilgiye erişimi için çeşitli önlemlerin alınması gerekmektedir. Bu önlemler sınıf oturma düzeni ile başlamaktadır. Sınıf düzeninin öğrenmenin üzerindeki yansımalarının (Huebner vd., 2004) yanı sıra, görme engelli bireyler için daha önem kazandığı belirlenmiş ve yapılan düzenlemelerin olumlu yansımaları olduğu görülmüştür (Kızılaslan, 2016). Görme engelli öğrencilerin öğretmen ile kolaylıkla iletişim kurması veya az gören bireylerin tahtada yazılanlara erişimi için bireylerin ön sıralarda oturmayı tercih ettiği belirlenmiştir. Cowan (2011, s.170) görme yetersizliği olan bireyin sıklıkla soru sorduğu ve dokunsal iletişime ihtiyaç duyduğu için sınıfta oturma düzenin önemli olduğunu ve ayrıca, tahtada yazılan metinlerin, ders notlarındaki, kitaplardaki veya sınav kağıtlarındaki bilgilerin ve soruların betimlenerek sözlü anlatımla desteklenmesinin önemli olduğunu ifade etmektedir. Böylece akranın, öğretmenin, ailenin ya da sınavlarda yardımcı olan bireylerin okuyucu desteği sunması gerektiğini söyleyebiliriz. Okuma desteği sunan birey ile öğrencinin iletişiminde betimlemenin beraberinde kullanılan dilin de önemli olduğu dikkat çekmektedir.

Öğrenme süreçleri bağlamında sonuçlar incelendiğinde, görme engelli bireylerin not tutma ihtiyaçlarının giderilmesinin kilit rol oynadığını söyleyebiliriz. Bunun için uygun teknolojik ya da somut materyallerin kullanılması gerekli görülmektedir. Not tutma işlevi olan destek eğitim araçlarının yanı sıra soyut kavramları öğrenmelerinde, algılamalarında ve kavramalarında etkili olacak araçlara yer verilmesi gerekmektedir. Görme engelli bireyler için tasarlanacak dokunma duyusunun aktif rol aldığı etkinliklerde, materyal kullanımı kadar somut örnekler ve dramanın da önemli olduğu söylenebilir. Drama sadece matematik derslerinde değil, fen bilgisi dersleri için ortaokul düzeyinde görme yetersizliğine sahip olan öğrencilerin de tercihleri arasındadır (Okcu, Yazıcı & Sözbilir, 2016). Bu nedenle drama ile eğitimin, görme yetersizliğine sahip bireylerin zihinlerinde soyut kavramları veya işlemleri somut kavramlar ile ilişkilendirmesine katkı sunduğu yorumunu yapabiliriz. Merak uyandırıcı örneklerden ya da görme yetersizliğine sahip bireylerin somut nesnelere ilişkin tecrübelerinden yararlanmak önemli stratejiler arasındadır. Öğrenilen bir kavramı yorumlayabilmek için bireyin özellikle algılama biçiminden etkilendiği söylenebilir. Bireyin algısını etkileyen faktörler arasında geçmiş tecrübeleri, fizyolojik yapı, fiziksel ve sosyal çevre, istek ve hedefler yer almaktadır. Dolayısı ile görme duyusundan yoksun olan görme engelli bireylerin kavram öğrenme süreci görme yetersizliği olmayan akranlarının süreçlerine benzememektedir (Budayasa & Juniati, 2018). Nitekim görme engelli bireylerin hayal gücünden yararlanmak, avuç içlerine çizim yapmak, kabartma şekillerden yararlanmak veya hikayeler üzerinden sözlü anlatım yapmak diğer stratejiler arasında sıralanabilir (Brazier, Parry & Fischbach, 2000; Bülbül & Eryılmaz, 2012; Kızılaslan, 2016).

Genel olarak görme engelli bireylerin matematiksel kavramlar için yaşadığı sorunları ve ihtiyaçları meydana getiren değişkenleri şöyle sıralayabiliriz: (i) kullanılan Latin ve Braille alfabelerde matematiksel dil farklılıkları, (ii) farklı alfabelerde matematiksel iletişim kurmanın güçlüğü, (iii) not tutma güçlüğü, (iv) soyut kavramları algılayabilecekleri somut materyallerin eksikliği, (v) yazılı materyallerin eksikliği. Birbiri ile ilişkili olan bu sonuçlar incelendiğinde temelde kabartma yazının doğasından kaynaklanan sözlü ve yazılı matematiksel iletişimdeki güçlük yer almaktadır. Braille yazıda matematiksel sembollere ait kodları bilmeyen görme engelli bireyler, kendilerinin ortaya koyduğu kısaltma ifadeler veya semboller kullanmaktadır. Bu kısaltmalar görme engelli bireylerin, öğretmenleri veya akranları ile iletişim sürecinde ve matematiksel dil kullanımında güçlükler oluşturabilir. Bireylerin kendilerine özgü kullandığı matematiksel bir yazı dili oluşturmaları, matematiksel dilin evrensel olması ile çelişmektedir. Görme engelli bireylerin görme yetersizliği olmayan bireylerin kullandığı Latin harfler, semboller veya işaretlerde matematiksel dile hakim olmaması sadece matematiksel dilde farklılıklar oluşturmamaktadır. Aynı zamanda kavram yanılgılarına ve beraberinde hatalara sebep olmaktadır. Bu durumun bir diğer yansıması ise sınavlarda yardımcı bireyler ile iletişim süreçlerinde gözlenmektedir. Sınavlarda matematiksel sembollerin görme yetersizliği olmayan bireyler tarafından kendi algısına göre betimlenmesi, görme engelli bireyin betimlenen kavramı ve sembolü algılayamamasına sebep olabilmektedir. Halbuki kaynaştırma sınıflarında ya da destek eğitim uygulamalarında görevli öğretmenlerin Braille yazıda matematiksel dile hakim olması, görme engelli bireyler ile matematik içinde iletişim süreçlerini destekleyecektir (Brenner, 1994). Benzer şekilde Horzum (2013) görme engelli bireylerin kavram tanımlarını incelediği tez çalışmasında, bireylerin kendilerine ait terimlerle betimlemeler yaptığını belirlemiştir. Bu durum görme engelli bireylerin kavramlara ve sembollere dair algılarını somut nesneler ya da görsel şemalardan ziyade, betimleyerek alternatif tanımlar ve açıklamalar tercih ettikleri sonucunu desteklemektedir. Nitekim görme yetersizliği olan bireylerin herhangi bir dinleme eyleminden sonra kullandığı stratejiler arasında, dinlediklerini kendi ifadeleri ile not tutma stratejisi önem arz etmektedir (Şenel & Topuzkanamış, 2018).

Kinzel (2000) kolej öğrencilerinin cebirsel ifadelerde notasyonları nasıl kullandığını ve yorumladığını incelediği araştırmasında, öğrencilerin sembolleri tanımlamada yetersiz ve cebirsel ifadeleri yorumlanmalarının sınırlı olduğunu belirtmiştir. Görme yetersizliğine sahip öğrenciler için kabartma yazıda not tutmanın güçlüğüne bağlı olarak Kinzel' in ortaya koyduğu sınırlamalara daha farklı sınırlılıklar ve güçlükler eklenebilir. Bu araştırmanın sonuçları, söz konusu güçlükler arasında, görme engelli bireylerin uzun matematiksel işlemler için not tutma güçlüğüne de işaret etmektedir. Not tutma güçlüğünün sonucu olarak, görme engelli bireylerin matematik problemleri için çözümlerinde sınama stratejisine başvurdukları belirlenmiştir. Bu stratejiyi seçmelerinin gerekçesi ise not tutmak yerine zihinden işlem yapmayı tercih etmeleridir. Böylece zihinden işlem yapma gereksinimi duyan birey, sınama stratejisi ile tahminleri doğrultusunda ileri sürdükleri fikirleri sınayarak çözüme ulaşmaya çalışmaktadır. Ancak görme engelli bireyler cebirsel kavramlarda en çok işlem takibinde ve işlemleri hafızalarında tutmakta zorlanmaktadır (Cahill vd., 1996). Nitekim bireylerin cebirsel işlemlerde sıklıkla hata yaptıkları araştırmanın sonuçları arasındadır.

5.2. Temel Cebir Kavramlarına İlişkin Öğretim Uygulamalarına Dair Sorunlar, İhtiyaçlar ve Cebirsel Düşünme Süreçleri

Temel cebir kavramlarından değişken, bilinmeyen ve eşitlik kavramları için bulgular incelendiğinde, görme engelli bireylerin algılarının, kavrayışlarının ve yanılgılarının yer aldığı görülmektedir. Öncelikle bu kavramlara dair bireylerin algıları ve cebirsel düşünme süreçleri incelendiğinde, kullanılan destek eğitim araçlarının önemli olduğu belirlenmiştir. Buna bağlı olarak destek eğitim araçlarının bireylerin kavrayışları ile ilişkisinin olduğu ve hatta kavram yanılgılarına yol açtığı söylenebilir. Örneğin; iğneli sayfa materyalinin doğru temsili çubuklarının orta noktasını belirleme algısı, doğrunun uzunluğunun olması gibi yanılgılara neden olabilir. Dolayısıyla bu sonucu kavram odaklı olarak incelemek tartışmayı kuvvetlendirecektir.

Değişken kavramına dair görme engelli bireylerin algıları ve kavrayışları incelendiğinde, bu kavramları birbirinden ayırt etmekte güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Değişken kavramını 'ulaşılamayacak sayı', 'problem çözümlerinde farklı stratejilerin varlığı', 'işlemler sonucunda elde edilen sonucun değişebilir olması', 'değişebilen nicelik' ve 'önermeye bağlı farklı değerler alabilen nicelik' gibi alternatif kavramlarla algıladıkları belirlenmiştir. Bu tanımlamalara göre değişken kavramının bilinmeyen kavramından ayırt edilemediği, değişkenin bir temsilci olduğunun fark edilmediği ve kavrayışlarında değişkenin sözlük anlamından öteye matematiksel olarak tanımlanamadığı tespit edilmiştir. Benzer şekilde bilinmeyen kavramını 'değeri belli olmayan' ya da 'meçhul' gibi sözlük (TDK, 2018) anlamları ile açıkladıkları belirlenmiştir. Bağımlı ve bağımsız değişken kavramları sorgulandığında ise bireylerin terim olarak bu kavramları ifade edemedikleri ve tanımlayamadıkları tespit edilmiştir. Ancak cebirsel düşünme süreçleri incelendiğinde, değişkenler ile temsil edilen iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi cebirsel temsil edemeseler de sözlü olarak ifade edebildikleri veya grafik temsilini yorumlayabildikleri belirlenmiştir. Kieran (1990) cebir anlama evrelerinde öğrencilerin öncelikle kendi ifadeleri ile ilişkileri incelediğini ve sembol gösterimini kavradıklarını belirtmiştir. Buna dayanarak katılımcı bireylerin cebir anlamanın ilk düzeyinde olduğunu söyleyebiliriz. Ancak bireyler terim olarak bağımlı ve bağımsız değişken olarak belirtmemelerine rağmen, bir kümenin elemanlarının diğer kümenin elemanlarına bağlı değiştiğini ifade edebilmiştir. Bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirlemedeki başarılarının gerekçesi, görüşme sorularında sunulan örneklerin bireylerin deneyimlerine hitap etmesi olabilir. Bireylerin cebirsel temsillerini belirlemede ise sadece doğrusal ilişkileri tespit etmede başarılı oldukları ve sıklıkla orantı kurma stratejisi kullandıkları belirlenmiştir. Leinhardt vd. (1990) eğitim hayatında öğrencilerin ilk olarak doğrusal ilişkiler ile karşılaştığını belirtmektedir. Bu nedenle değişkenler ile temsil edilen iki kümenin elemanları arasında da doğrusal ilişkinin kontrol edilmesi veya belirlenmesi kaçınılmazdır.

Değişken kavramını formal olarak tanımlayamamak cebir öncesi dönem öğrencilerinden öğretmen adaylarına kadar her düzeyden öğrenenin yanılgılarının olduğu bir kavramdır (Çelik, 2007; Kinzel, 2000; Küchemann, 1978; Stacey & MacGregor, 1997). Bu araştırmada değişken kavramını 'ulaşılamayacak bir sayı' olarak ifade eden bireylerin cebirsel düşünmeleri incelendiğinde, bilinmeyen ve değişken kavramlarına dair yanılgıya sahip oldukları belirlenmiştir. Bu yanılgı değişken kavramını, verilen cebirsel ifadede yer alan terimlere ve katsayılara göre işlem sonucunun değişmesi olarak düşünmelerinden kaynaklanmaktadır. İlginçtir ki denklemi çözüp '$x = a$' (a bir tamsayı) sonucuna ulaştıklarında bu kez x-in bilinmeyen olduğunu ifade etmişlerdir. Ancak 'x ve y bir reel sayı' ya da 'a bir tamsayı' şeklinde verilen gösterimlerde, sembollerin değişken olduğunu ifade edebilmektedirler. Başka bir ifade ile aynı cebirsel ifade için bilinmeyen x-in aynı zamanda değişken olabileceğini düşünmektedirler. Bireylerin $x + 5 = 12$ cebirsel ifadesinde x harfinin bir değişken ve aynı zamanda bir bilinmeyen olarak düşünmesi şaşırtıcıdır. Evrensel kümenin elemanlarını temsil eden x-in, aynı zamanda verilen önermeyi doğru yapan elemanların kümesini temsil ettiği şeklinde yorumlamış olmaları sadece aynı harf ile iki kavramı temsil etmenin sonucu olarak algılanabilir. Ancak daha detaylı sorgulandığında bireylerin değişken ve bilinmeyen kavramları için tanımlara hakim olmadıkları belirlenmiştir. Nitekim $x + 5 = 12$ ifadesinde x harfinin sayısal değeri aranan bilinmeyen kavramı olarak düşünülürken, yapılan işlemler sonucunda elde edilen $x = 7$ ifadesinde x harfinin değişken olduğunu belirtmektedirler. Çünkü yapılan işlemin sonucunun cebirsel ifadede verilen katsayı ve sabit terime bağlı olarak elde edildiğini ve sonucun buna bağlı olarak değişebileceğini düşünmektedirler. Bu değişimi de değişken kavramı olarak adlandırmışlardır. Bu yanılgının bir diğer sebebi ise değişken ve bilinmeyen kavramlarının her ikisinin gösteriminde de x, y, z ve t gibi harflere yer verilmesi olabilir. Benzer şekilde Argün vd. (2014, s.105) farklı durumlarda farklı nicelikleri temsil etmek için aynı sembollerin kullanılıyor olmasının, öğrencilerin bu kavramları anlamalarında güçlüğe neden olduğunu vurgulamıştır. Sonuç olarak bireylerin değişken kavramını ‘değişebilir olma’ sıfatı ile ilişkilendirdiklerini söyleyebiliriz. Bu sonucu destekleyen bir diğer kanıt, eşitsizlik ifadelerinde ‘$x > 5$’ için x-in alabileceği tamsayı değerini net olarak bilemeyeceklerini düşünerek x-in değişken olduğunu belirtmeleridir.

Bilinmeyen kavramını ‘hiç bir zaman bilinemeyen şey’ olarak tanımlayan bireylerin, bilinmeyeni göstermek için kabartma yazıda matematiksel dilde anlamı olmayan sembolleri tercih ettiği belirlenmiştir. Burada x bilinmeyenine, verilen önermeyi doğru yapan elemanlar için ‘yer tutucu’ anlamını yükledikleri söylenebilir. Li (2006) bilinmeyen değerin yerine kullanılan temsilleri ‘yer tutucu’ olarak adlandırmıştır. Ayrıca öğrencilerin cebirsel kavramları anlamasındaki en büyük engelin değişken kavramına ilişkin yanılgılarının olduğunu vurgulamıştır. Ancak burada aşina olmadıkları sembol kullanma fikri, görme engelli bireylerin kullandıkları destek eğitim materyallerinden kaynaklanabilir. Nitekim küptaş kasa materyalinde sadece rakamlar, temel dört işlem sembolleri, ayraç ve eşittir sembollerinden oluşan 4 nokta düzeninde kabartma yazı karaterler yer almaktadır (Braille Matematik Kılavuzu, 2017, ss. 37-38; Maulana, 2019). Bu nedenle görme engelli bireyler bilinmeyeni göstermek için bu karakterlerin dışında küptaşlar ile olasılıklar dahilinde kendilerine özgü semboller kullanmaktadır. Böylece küptaş kasa materyalinin kavram yanılgısına sebep olmasının yanı sıra, olumlu olarak harf gösteriminden başka temsillerin kullanılmasına teşvik edici rol oynadığı söylenebilir. Kavram yanılgısını ortaya çıkaran temel neden ise görme engelli bireylerin not tutmada yaşadığı güçlüktür. Kabartma yazı tabletinde pek çok sembol ve işareti kullanmak mümkün olmasına rağmen, matematiksel işlemlerde kabartma yazı karakterlerin fazla olması ve kullanımın güç olması bireyleri farklı materyaller kullanmaya yöneltmektedir. Bunun için daha kullanışlı olan küptaş kasayı tercih eden bireylerde, karakter eksikliğinden dolayı çeşitli kavram yanılgıları ya da hatalar ortaya çıkmaktadır.

Değişken ve bilinmeyen kavramları için ‘kitabi tanım’ olmasa da sezgisel açıklamalar yapabilen bireyler, bilinmeyen kavramını açıklamak için belirli bir önermenin varlığını ‘özellik’ kelimesi ile ifade etmektedir. Ancak açıklamalarında yer verdikleri ‘5’ ten büyük tamsayılar’ ya da ‘3 fazlası 5 olan tamsayılar’ gibi ifadeler birer açık önerme örnekleridir. Bu açıklamalarına rağmen bireylerin değişken ve bilinmeyen kavramlarını zaman zaman karıştırmaları ise kavramların tanımlarına dair bilgi eksikliği ile açıklanabilir. Nitekim katılımcılar çözüm kümesi ve bu kümenin elemanlarını temsil eden sembol kavramlarını açıklayabilirken, evrensel kümenin elemanlarını temsil eden sembol fikrine sahip değillerdir.

Görme engelli bireyler, sembol kullanımına göre iki gruba ayrılmıştır. Bireylerin bazıları sembollerin bir kümenin elemanlarının her birini temsil etmesini algılayamazken, tersine diğer grubun sembol ile gösterimde ve kavramları soyutlamada başarılı olduklarını söyleyebiliriz. İlk grupta yer alan bireyler ‘*a* bir tamsayıdır’ ya da ‘$a \in \mathbb{Z}$’ gibi ifadelerde, bir harfin tamsayılar kümesindeki her elemanı temsil edebileceğini algılayamamaktadır. Ayrıca harf gösteriminde, bu harfin bir tamsayı olduğunun anlaşılmasının güç olduğunu belirtmişlerdir. Bu durum elbette değişken kavramının tanımına ya da sembol ile gösterimine ilişkin bilgi eksikliğinden kaynaklanabilir. Fakat bu güçlüğün temelinde yer alan bir diğer neden Braille yazıda matematiksel karakterlerin doğası da olabilir. Zira Braille yazıda harf karakterlerinin önüne gelen rakam işareti (⠼ sembol) ile sayılar elde edilmektedir. Örnek vermek gerekirse Braille yazıda *a* harfi “⠁” karakteri ile temsil edilirken, 1 rakamı ‘⠼⠁’ şeklinde aynı karakterin önüne rakam işaretinin (⠼) gelmesi ile oluşmaktadır. Ancak kabartma yazıda rakamların harfler ile elde edilmesi ikinci grup bireylerde gözlendiği gibi görme engelli bireylerin harf gösterimlerinde kavrayışlarının güçlü olmasına da neden olabilir. Böylece bireyler harf ile gösterimin yanı sıra farklı sembollerin de tamsayılar kümesinin elemanlarını temsil etme gücünü algılamaktadır.

Değişken ve bilinmeyen kavramlarında olduğu gibi eşitlik kavramı ve eşittir sembolü için görme engelli bireylerin bilgi eksikliğinin yanı sıra, kullanılan somut materyallerden kaynaklanan yanılgıların olduğu belirlenmiştir. Küptaş kasa materyalinde kabartma yazıda ‘eşittir (=)’ sembolüne karşılık ‘_ _’ karakterleri yanyana kullanılmaktadır. Küptaş kasa materyalinde ‘=’ sembolü için görme engelli bireylerin bir kısmı 7 rakamına karşılık gelen ‘⠛’ sembolünü kullanırken, bazıları kesir çizgisine karşılık gelen ‘_’ karakterini ve bir kısmı da boş bir karakter kutusu bırakmayı tercih etmektedir. Bireyler ‘_ _’ ve ‘⠛’ sembol gösterimlerinde eğer kullandığı gösterimi hafızasında tutabiliyorsa, işlem yapmakta güçlük çekmemektedir. Benzer şekilde bireylerin eşit sembolüne karşılık boş bir karakter bırakarak işlem takibi yapabildikleri belirlenmiştir. Ancak bu gösterimler eşitlik kavramına ilişkin yanılgılara sebep olmaktadır. Görme engelli bireyler eşitlik kavramını açıklarken ‘aynı’ ya da ‘benzer’ olma ifadelerini kullanmaktadır. Şekil 35’ de bireyin küptaş kasa materyalinde ‘7 = 7’ ifadesini ‘⠛[boşluk]⠛’ olarak yazdığı görülmektedir. Bu ifade ile eşitlik kavramını açıklarken iki niceliğin ‘aynı’ ya da ‘benzer’ olmasından söz edilmektedir. Dolayısı ile sayıların nicelik olarak eşitliğini ya da denkliğini vurgulamak yerine, sembollerin ‘aynı’ ya da ‘benzer’ olması vurgulanmaktadır. Eşitlik sembolünü boşluk bırakarak temsil etme çabası, benzerlik ve yansıma gibi kavramlar ile eşitlik kavramını açıklamalarına neden olmuş olabilir. Nitekim Cansu (2014) görme engelli öğrencilerin ‘=’ sembolünü ‘boşluk’ olarak algıladığını ve bu durumun denklem kurma, dolayısı ile işlem yapma becerilerinde yetersizliklere ve yanılgılara sebep olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde Cowan (2011, s.183) görme engelli bireylerin denklem çözmedeki yanılgılarının temelinde, eşittir sembolünü nasıl kullanacaklarını bilmemelerinin yer aldığını belirtmiştir. Dolayısı ile bireylerin ‘=’ sembolünün ilişki ve eşitlik anlamlarını kavramaları için kabartma yazıdaki gösteriminin önemli olduğunu söyleyebiliriz. Bireylerin ‘=’ işaretini sadece sembol olarak düşünmemeleri, beraberinde bu sembolün işlevine odaklanmaları gerekmektedir.

Eşittir sembolüne dair yapılan alternatif açıklamalarda bireylerin ‘denklem kurmaya ve çözmeye yarayan sembol’ veya ‘iki niceliği karşılaştırmaya yarayan sembol’ olarak düşündükleri belirlenmiştir. Nitekim sabit bir sayıya eşit bir harf veya bir bilinmeyenli denklem verildiğinde eşitlik kavramını farklı açıkladıkları tespit edilmiştir. Görme engelli bireyler, sabit bir sayı olan *x*, yani ‘$x = 7$’ gibi bir ifade için *x*-in 7’ ye denk olan kesirleri temsil ettiğini düşünmektedir. Başka bir ifade ile *x*-in {7, 14/2, …, 49/7, … } kümesinin elemanlarını temsil ettiğini belirtmektedir. $x + 5 = 12$ ifadesinde ise bireyler ‘=’ sembolünün işlem yapılarak *x* bilinmeyeni belirlemenin amaçlandığını düşünmektedir. Bireyler burada yapılan işlemler sonucunda elde edilen ‘$x = 7$’ ifadesinde yer alan *x*-in, başlangıçtaki durumdan farklı bir görevi olduğunu düşündükleri gibi ‘=’ sembolünün görevinin de değiştiğini düşünmektedir. Böylece eşitlik kavramının ‘denge’ anlamında düşünmedikleri veya bu anlamı sadece birden fazla terimi olan ifadeler için sınırlandırdıklarını söyleyebiliriz. Bu durum matematikte farklı yapılarda farklı anlamlar barındıran eşilik kavramının doğasından kaynaklanmaktadır (Argün vd., 2014). Bireylerin her ne kadar eşittir sembolünün işlevine dair bilgi sahibi olsalar da kavram yanılgılarının, denklem kurmada ve cebirsel işlemlerde hatalarının yer aldığı belirlenmiştir. Li (2006), $19 = 3 + 4y$ ifadesinde öğrencilerin yanılgılarının '=' sembolüne yükledikleri anlamdan ziyade '$3 + 4y$' cebirsel ifadesini algılayamadıklarından kaynaklandığını iddia etmektedir. Bu nedenle sınama stratejisi diyebileceğimiz 'sınama (tahmin et – kontrol et)' kategorisinden bahsetmektedir. Eşitlik kavramının öğretim programında cebirsel ifadeler, denklem çözme ve değişken kavramları ile birlikte sunulduğu göz önüne alındığında (Dede & Argün, 2003; Kieran, 1989; MEB, 2013; MEB 2018a; 2018b), bireylerin bu kavramlar için yanılgılarının ve hatalarının bütüncül olabileceğini söyleyebiliriz.

Eşitlik ifadesini 'aynı veya benzer' olma şeklinde yorumlayan bireylerin aksine '$x = 7$' ifadesinde x harfinin 7 olmadığını, 7' ye denk olan kesirlerin bir temsilcisi olduğunu düşünen katılımcılar da olmuştur. Burada '$a = a$' gibi yansıma özelliğinin göz ardı edildiğini veya denge durumunun sağlandığının düşünülmediğini söyeleyebiliriz. Bu durum eşitlik kavramına ilişkin bilgi eksikliğinden kaynaklanmaktadır. Benzer sonuçları elde eden Kızıltoprak (2014) 5.sınıf öğrencilerin eşitlik kavramı için 'aynı', 'eşdeğer' ve 'sonuç bulma' alternatif tanımlarını ortaya koymuştur. Elde ettiği sonuçları öğrencilerin somut nesneler ya da soyut kavramlar üzerinden düşünerek, niceliklerin eşit olması ve nesnelerin aynı olması fikirlerine eriştiğini belirtmiştir. Nitekim bu araştırmada da görme engelli bireylerin de kullandıkları somut materyallerden kaynaklanan yanılgılarından söz edilmiştir. Ancak görme engelli bireylerin yanılgıları söylemlerden de kaynaklanabilir. Behr vd. (1980) cebirsel gösterimlerde kavramlara ilişkin algıların ve dolayısı ile anlamanın yönlendirilmesinde söylemlerin rolüne işaret etmektedir. Behr vd' e (1980) göre $2 + 5 = 7$ ifadesi için 'iki artı beş eşittir yedi' söylemi, '=' sembolüne 'sonuç bulma veya işlem yapma' anlamınının yüklenmesindeki gerekçelerdendir. Alanyazında yer alan pek çok araştırma da ilkokuldan üniversite düzeyine her gruptan öğrencilerin '=' sembolüne 'tüm işlemleri gerçekleştir', 'birşeyler yap' veya 'işlem=cevap' gibi anlamlar yüklediğini ortaya koymuştur (Barcellos, 2005; Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Herscovics & Kieran, 1980; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005). Benzer algılardan yola çıkan Knuth vd. (2005) eşitlik sembolünü 'aynı olma' ifadesi ile açıklayan öğrencileri ilişkisel anlama düzeyinde, 'sayı eklemek' veya 'cevap' ifadelerini kullanan öğrencileri ise işlemsel anlama düzeyinde sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırmaya göre '=' işaretinin işlevsel yönüne odaklanan görme engelli bireylerin de işlemsel anlama düzeyinde olduğunu söyleyebiliriz.

Değişken, bilinmeyen ve eşitlik kavramları ve bu kavramların sembol gösterimlerinin dışında görme engelli bireylerin cebirsel ifadeler, cebirsel ifadelerde işlemler gibi kavramlara ilişkin yanılgılarının olduğu tespit edilmiştir. Temelde yanılgının gerekçesi, cebirsel ifadelerde bilinmeyen ve sabit kavramlarını değişken kavramından ayırt etmekte güçlük yaşamalarıdır. Ayrıca problemlerde bilinmeyenleri belirleme ve sembol ile gösterme, denklem kurma ve çözme, bölünebilme kavramları için güçlükler, yanılgılar ve dolayısı ile hatalar belirlenmiştir. Bu nedenle bireylerin problemleri çözmek için sıklıkla sınama ve orantı kurma stratejilerine başvurduklarını söyleyebiliriz. Bu stratejilere sadece görme engelli öğrenciler değil öğretmen adaylarının da başvurduğunu ortaya koyan çalışmalar yer almaktadır (Çelik, 2007). Çelik (2007) öğretmen adaylarının bu yanılgılarını, bireylerin aşina olmadıkları durumlarda sayısal bir çözüme ulaşma çabası olarak yorumlamıştır. Görme engelli bireylerin sıklıkla zihinsel işlemler yapabileceği problemler ile karşılaştığı düşünülecek olursa, cebirsel ifadelerin onlar için aşina olmadıkları kavramlar arasında yer aldığını söyleyebiliriz. Ayrıca Şafak (2005) kabartma yazıda cebirsel ifadeler ile çalışmanın güçlüğünü vurgulamıştır. Sembollerin ve işaretlerin birden fazla kabartma yazı karakteri ile temsil edildiği göz önüne alındığında, görme engelli bireylerin cebirsel ifadeleri ve işlemleri zihninde tutması mümkün değildir. Dolayısı ile görme yetersizliğine sahip bireylerin işitsel olarak takip ettiği işlemleri zihinden yapıyor olması bir diğer sınırlılık olarak vurgulanmaktadır (Şafak, 2005).

Fonksiyon kavramına, fonksiyonun alt kavramlarına ve özelliklerine ilişkin görme engelli bireylerin bilgi eksiklerinin ve yanılgılarının yanı sıra bireysel farklılıklarına dayanan söylemleri elde edilmiştir. Fonksiyon kavramını görme engelli bireylerin 'sistem' ya da 'değişim' olarak tanımladığı belirlenmiştir. Bireyler fonksiyonu günlük hayattan verilen örnekler ile açıklamaya çalıştıklarında 'sistem' olarak adlandırmaktadır. Örneğin; bireylerin yaşadıkları ev ve bireyler arasındaki ilişkinin ya da televizyon kanallarının kumanda üzerindeki rakamlar ile eşlenmesinin birer fonksiyon belirttiğini açıklarken, fonksiyon bu eşlemeyi sağlayan bir sistem olarak ifade edilmiştir. Ayrıca iki kümenin elemanlarının eşlenmesi fikrinden dolayı fonksiyon kavramını 'değişim' olarak ifade ettikleri dikkat çekmektedir. Tanım kümesi elemanlarının fonksiyon altındaki görüntülerini, bu elemanların değişimi olarak algıladıklarını söyleyebiliriz. Bu durum $f(x) = y$ cebirsel ifadesinde, tanım kümesindeki görüntüsü elde edilen elemanın değişimi şeklinde yorumlanmasının sonucudur. Bu tanımlama sadece görme engelli bireylere özgü değildir. Öğrencilerin genel olarak fonksiyon kavramı ile ilgili cebirsel ifade, formül, denklem, eşitlik veya bir model olarak sayıları başka sayılara dönüştüren makine şeklindedir (Clement, 2001; Tall & Bakar, 1991). Bu tanımlamalar ya da modeller, kavram öğrenmeye katkı sunabileceği gibi kavram özelliklerinin işlemsel özelliklere sınırlandırılmasına neden olabilir. Nihayetinde bireylerin öğrenme alanında yer alan fonksiyon kavramına ilişkin terimlere hakim olmadıkları, kendilerine ait ifadeler, tanımlamalar ya da açılamalar ile öğrenmelerin gerçekleştiği açıktır. Görme engelli bireylerin kendilerine ait adlandırmaları fonksiyon kavramına ilişkin adlandırmalar ile sınırlı kalmamaktadır. Fonksiyonun alt kavramları ve özellikleri için de benzer alternatif adlandırmalar ile karşılaşılmıştır. Bunlardan ilki tanım ve değer kümelerini ifade etmek için ‘birinci ve ikinci küme’ olarak betimlemeleridir. Bu betimlemeye sebebin, ilk önce tanım kümesinin söylenmesi, inceletilmesi ya da okunması ve daha sonra görüntü/değer kümesinin inceletilmesi, okunması ya da açıklanması olduğu görülmektedir. Dolayısı ile fonksiyonun bireylere taslak olarak sunulduğunu, onlardan bir fonksiyon tanımlamalarının beklenmediğini, tanım ve değer kümelerinin en azından fonksiyonun tersi için sorgulanmadığını söyleyebiliriz. Alt kavramlara ilişkin bilgi eksikliği bununla sınırlı kalmamaktadır. Nitekim tanım ve değer kümesi kavramlarına dair bilgi sahibi olan katılımcılar da dahil olmak üzere bireylerin ‘kümenin elemanı olma’ fikrine sahip olmadıkları belirlenmiştir. Tanım kümesinin elemanlarını ‘verilenler’ olarak adlandırdıkları dikkat çekmektedir. Bu alternatif adlandırmanın görme engelli bireylerin fonksiyon kavramı için sadece ve sıklıkla tanım kümesindeki elemanların fonksiyon altındaki görüntüsünü hesaplama soruları ile karşılaşmalarının sonucu olabilir. Bu yorumu destekleyen sonuçlardan bir diğeri, görme engelli bireylerin fonksiyonun cebirsel temsilini ‘denklem’ olarak düşünmesidir. Çünkü bireyler sürekli tanım kümesindeki elemanların görüntüsünü bulmak için verilen cebirsel temsilde x yerine tanım kümesinin elemanını yazarak denklem çözmektedir.

Fonksiyonun cebirsel temsilini ‘denklem’ olarak algılayan sadece doğuştan görme engelli bireyler değildir. İlerleyen yaşlarda görme kaybı yaşan ve ileri matematiksel kavramlara ilişkin bilgisi olan Aydın’ ın da ‘denklem’ algısına sahip olduğu belirlenmiştir. Halbuki Cowan (2011, s.203) daha önce görme tecrübesi olan bireylerin yorumlama, anlama, temsiller arası geçiş yapma süreçlerinde daha başarılı olduğunu belirtmiştir. Ancak, öğrencilerin x ve y gibi notasyonlar içeren ifadeleri fonksiyon olarak kabul ettikleri yanılgısı ile yaygın olarak karşılaşılmaktadır (Vinner, 1983). Dolayısıyla bu durum görme engelli bireylerin kavramlara ilişkin temel düzeyde kazanımlar üzerine eğitim aldığının kanıtıdır. Elbette bu sonuç fonksiyonun tanımına ve fonksiyon ile ilişkili alt kavramların (fonksiyonun tanımında yer alan) yapılandırılmasına dair eksikliklerin de göstergesidir. Nitekim bireyler tanım ve değer kümelerinin elemanlarını temsil etmesi için gerekli olan değişken belirlemekte güçlük yaşamaktadır. Elemanları alfabede yer alan harfler olan bir kümenin elemanlarını temsil edecek değişkeni belirlerken, yine bu kümenin elemanlarından birini değişken olarak temsil ettikleri belirlenmiştir. Örneğin, *a* tanım kümesinin bir elemanı ise tanım kümesinin elemanlarını temsil edecek olan değişkeni *a* harfi ile göstermektedir. Ardından bağımsız değişken olarak belirlediği *a* elemanı ile iki küme arasındaki ilişkinin cebirsel temsilini ifade etmeye çabalamaktadır. Cowan (2011, s.172) görme engelli öğrencilerin %63' ünün sadece denklem kurma ve çözme üzerine öğretim uygulamalarına maruz kaldığını belirtmiştir. Dolayısı ile bu sonucun cebirsel temsil bilgisinin eksikliği ve denklemde verileni yerine yazma alışkanlığı ile ilgili olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca küme kavramının yanı sıra bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarına dair önemli sonuçlara dikkat çekmektedir. Fonksiyon kavramına ait özellikler ele alındığında ise bileşke ve bir fonksiyonun tersi olma kavramlarına hakim olmadıklarını söyleyebiliriz. Birebir ve sabit fonksiyon kavramlarını açıklayabilmelerine rağmen tanımlayamadıkları ve terim olarak ifade edemedikleri belirlenmiştir. Bu sonuçların söz konusu kavramlara görme engelli bireylerin bireysel eğitim programında yeteri kadar yer verilmediğinden kaynakladığını söylebiliriz.

Cowan (2011) görme engelli bireyler için denklemlerin küçük paketler halinde daha fazla bilgi veren yapılar olduğunu iddia etmektedir. Bu nedenle, daha kısa sürede ve daha az bilişsel uygulama ile bilgiye veya çözüme erişildiğini ifade etmektedir. Bu yorumun sonucu olarak görme engelli bireylerin fonksiyon kavramında işlemsel bilgilere hakim olup, denklem kavramı ile ilişkilendirdiklerini söyleyebiliriz. Öğrencilerin ilişkileri göstermede öncelikle cebirsel temsili tercih ettiğini bilinmektedir (Herman, 2007, s.35; Huntley & Davis, 2008; Keller & Hirsch, 1998; Knuth, 2000). Özaltun-Çelik (2018) 10. sınıf görme yetersizliği olmayan öğrenciler ile gerçekleştirdiği çalışmasında da iki küme arasındaki ilişkinin temsil edildiği cebirsel ifadenin 'denklem' olarak ele alındığını belirtmiştir. Özaltun-Çelik (2018) bu durumu görme yetersizliği olmayan öğrenciler tarafından fonksiyon kavramının eş zamanlı değişim fikrinin kavranamaması ile yorumlamıştır. Araştırmalar da bu yorumu destekleyerek, bireyin rutin yaptığı cebirsel işlemleri sorgulamadan ve anlamlandıramadan yürüttüğünü belirtmiştir (Çelik, 2007; Kieran, 1992; Kinzel, 2000; Sfard, 1995). Fonksiyon kavramını denklem olarak kabul etmek öğrenciler ve hatta öğretmen adayları arasında gözlenen yaygın bir yanılgıdır (Çelik, 2007; Even, 1998;

Sierpinska, 1992). Sierpinska (1992) öğretmen adaylarının fonksiyonla ilgili bilgi toplamak için denklem ve bilinmeyen kavramları üzerine düşündüklerini iddia etmiştir. Bu iddia görme engelli bireyler için aşina olunan kavramlar üzerinden fonksiyonu anlama çabası şeklinde yorumlanabilir. Her düzeyde öğrenenin yaşadığı bu zorluk, zihinlerinde değişken kavramına 'bilinmeyen' rolü yüklemelerine dayanmaktadır. Bu yanılgının yaygın olarak gözlenmesi ise cebir öğretiminin nasıl uygulandığının bir sonucu olabilir (Kieran, 1992; Kinzel, 2000). Dolayısı ile gerçekleştirilen cebir öğretiminde değişken, bilinmeyen, sabit, parametre ve genelleştirilmiş sayı olarak harfli gösterimlerin açıklanmasında yetersizliklerin olduğunu söyleyebiliriz.

Küme kavramına dair sonuçlar 'kümenin elemanı olma', çeşitli 'küme temsil türleri'ne ilişkin kavram bilgisi eksiklikleri ve görme engelli bireylere özgü tercihleri barındırmaktadır. Bireylerin küme temsillerinde sıklıkla liste yöntemi ile gösterimi tercih ettikleri belirlenmiştir. Bu durumun gerekçesi öğrencilerin genellikle sembolik temsilleri tercih etmesi (Herman, 2007) olabileceği gibi, öğretim uygulamalarında kabartma yazı ve liste yöntemi ile temsilin, görsel olmasından dolayı Venn şeması yardımıyla temsil edilmesine göre daha kullanışlı görülmesi olabilir. Dolayısıyla görme engelli bireyler öğretmenlerin sınıf uygulamalarındaki tercihlerinin yansıması olarak aşina oldukları temsil türünü tercih ediyor olabilir. Gerçekten, öğrencinin tercihlerinin, öğretim uygulamalarında öğretmeninin vurguladığı tercihlere göre şekillendiğine dair araştırmalar yer almaktadır (Herman, 2007; Keller & Hirsch, 1998; Friedlander & Tabach, 2001). Başka bir yorum olarak her eğitim uygulamasında (sınavlar vs) Venn şeması oluşturmak için zamanın ve kaynağın yeterli olmaması da bireylerin tercihlerini etkiliyor olabilir. Venn şemasıyla küme temsiline dair tecrübelerinin yetersizliği, görme engelli bireylerin Venn şeması ile sunulan kümeleri uzun süre incelemesine neden olmuş olabilir. Fakat bireylerin Venn şeması ile temsil edilen ilk küme örneğinden sonraki örneklerde daha hızlı incelemeye, algılamaya ve daha fazla üzerinde düşünmeye başladığı dikkat çekmiştir. Venn şemasına ilişkin önbilgisi olan bireylerin ise dikdörtgen veya kare şekilleri ile temsillere aşina olduğu belirlenmiştir. Bu nedenle farklı geometrik şekiller ile sunulan temsillerde sık sık dokundukları elemanları ve kümeleri teyit ettikleri gözlenmiştir. Bireyler Venn şeması ile temsil edilen iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeleri incelerken 'karşılığı olma' ifadesini kullanmıştır. Cebirsel temsilde elemanların eşlenmesini 'değer' olarak ele alan bireylerin, görsel temsilde 'karşılığı olma' ile tanımlaması dikkat çekmektedir. Diğer kümenin herhangi bir elemanı ile eşlenmemiş kümenin elemanlarını 'boşta kalmış' veya 'boş' ifadeleri ile betimlemişlerdir.

Böylece görme engelli bireylerin söylemlerinin temsil türlerine göre değiştiğini söyleyebiliriz. Ayrıca bu sonuç görme engelli bireyler için dokunma duyusunun öğrenmedeki önemini vurgulamaktadır. Sonuç olarak bireylerin alternatif tanımlamalar yaparken dokunma duyusuna dayanarak söylemlerinde yön ve nitelik belirten ifadelere yer verdiğini söyleyebiliriz.

Görme engelli bireylerin öğrenme süreçlerinde dokunma duyusunun yansımasına ilişkin bir diğer sonuç Venn şeması temsillerini incelemedeki tecrübeleridir. Bireylerin Venn şemalarını inceleyip eşlemenin özelliklerini gerekçeleri ile doğru açıklamalarına rağmen, defalarca eşlemeleri kontrol ettikleri gözlenmiştir. Bu şekilde tekrar dokunmaları, şekli algılamak ve hafızalarında oluşturmak için şeklin parçalarını tek tek inceleyerek zihinlerinde bütünü oluşturma çabası olarak yorumlanabilir. Zira görsel algıya benzer şekilde dokunsal algıda da bütünü algılamak, bütünü oluşturan parçaları algılamakla mümkün olmaktadır (Thinus-Blanc & Gaunet, 1997). Bir diğer neden ise şemalardaki kabartma çizimlerde, farklı nokta vuruşlarının ya da nokta sıklığının bireylerin algılamaları için yeterli olmaması olabilir. Nitekim bireyler eşlemeleri temsil etmesi için farklı malzemelerin kulanılmasını talep etmişlerdir.

İki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi oluşturan ilişkinin belirlenmesinde ve ifade edilmesinde, görme engelli bireyler için bireyselleştirilmiş eğitim programlarına dair önemli ipuçları elde edilmiştir. Bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemede başarılı olan bireylerin, iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi oluşturan ilişkiyi belirlemede yanılgıları ve hataları belirlenmiştir. İlişkiyi belirlediklerinde ise cebirsel olarak temsil etmekte güçlük yaşamışlardır. Söz konusu güçlüklere ve yanılgılara, görme yetersizliği olmayan akranların ve hatta öğretmen adaylarının da sahip olduğu bilinmektedir (Çevik, 2007; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008). Ancak görme engelli bireylerin bireyselleştirilmiş eğitim programları ve kullanılan destek eğitim araçları bağlamında sonuçların şekillendiğini söyleyebiliriz. Çünkü akademik başarısı yüksek olan görme engelli bireylerde dahi ortak tespit edilen güçlükler ve tercihler yer almaktadır. Kümeleri temsil eden bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirleyebilen katılımcıların da genellemeye ulaşmalarına rağmen, bu genellemeyi cebirsel ifade edemedikleri dikkat çekmektedir. Nihayetinde cebirsel temsili ortaya koyan katılımcıların ise bu temsili sözel olarak betimlediği, semboller ile yazamadığı ya da tektikleyici sorular ile yönlendirmeler yardımıyla yazabildiği gözlenmiştir. Bireylerin yaşadığı güçlükler incelendiğinde ‘kat ve fazlası’ gibi terimleri cebirsel olarak ifade edemedikleri, tablo ile verilen ilişkileri belirleyemedikleri, kümelerin kendi içinde elemanları arasındaki ilişkilere odaklandıkları, bağımlı ve bağımsız değişkeni tespit edemedikleri, semboller ile matematiksel dil kullanamadıkları şeklinde sıralanmaktadır. Bu güçlükler bağımlı ve bağımsız değişken kavramları ile matematiksel içeriklere aşina olmadıklarından, sembol ile temsil etme ve bu temsillerle cebirsel işlemler yapma tecrübelerindeki eksikliklerden kaynaklanıyor olabilir. Tablo ile sunulan eşlemelerde ise tablo okumada ve incelemede yetersiz oldukları belirlenmiştir. Nitekim tablo temsilini bir süre inceledikten sonra, kümelerin elemanlarının eşlendiğini tespit etmelerine rağmen bu eşlemenin dayalı olduğu ilişkiyi belirleyememişlerdir. Bu sonucun nedenleri ele alındığında bireyin algısını etkileyen geçmiş tecrübeleri, fiziksel ve sosyal çevre deneyimleri ve iletişimin (Budayasa & Juniati, 2018) rol aldığını söyleyebiliriz. Bireylerin tablo temsilinden ziyade sözel problemlerde iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemede daha başarılı olmaları, tablonun öğretim uygulamalarında sıklıkla yer almadığını ortaya koymaktadır. Ayrıca güç de olsa kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi cebirsel ifade etmeyi başaran bireylerin, temsil sürecinde problemin senaryosundan hareket ettiği belirlenmiştir. Cowan (2011, s.184) görme engelli bireylerin problemlerin bağlamını yorumlamakta ve kurgulamakta başarılı olduklarını belirtmiştir. Sözel problemlerde daha başarılı olmalarını ise öğrenme deneyimlerinde sözel problemlere daha fazla maruz kalmalarına bağlamaktadır (s.228). Bu nedenle problemin kurgusunun da görme engelli bireyin günlük hayat tecrübeleri üzerine dayanması önem arz etmektedir. Nitekim Li (2006) cebirsel düşünme, kavramları anlama ve cebirsel temsillerde yaşamdan deneyimlere dayandırılan öğretim uygulamalarında bireyin daha başarılı performans sergilemesine neden olduğunu vurgulamıştır. Tablo kullanımında ise bireylerin dikey tabloları kullanmayı tercih ettikleri belirlenmiştir. Bu tercihin görme engelli bireylerin sıklıkla kullandığı küptaş kasa materyali gibi destek eğitim araçlarında not tutmanın dikey tabloya benzemesinden kaynaklandığı belirlenmiştir. Halbuki kabartma yazıda matematik tek satırda doğrusal (lineer) olarak devam etmektedir (Bitter, 2013; Edwards, Stevens & Pitt, 1995; Karshmer & Farsi, 2007). Bu nedenle kabartma yazı kulanımına benzer olan yatay tablolaları tercih etmemeleri dikkat çekmektedir. Bu sonuç görme engelli bireylerin kabartma yazıda lineer (doğrusal) matematiksel dil kullanımında güçlük yaşamasından kaynaklanıyor olabilir. Destek eğitim araçlarının rol aldığı bir diğer sonuç ise not tutma güçlüğüdür. Bireylerin not tutmada yaşadıkları güçlüklerden dolayı zihinden işlem yapmayı tercih ettikleri, ancak bunun sonucunda cebirsel işlemlerde hatalar yaptıkları belirlenmiştir.

Görme engelli bireyler önbilgilerine bağlı olarak bir kümenin elemanları arasındaki ilişkinin bir örüntü oluşturduğunu anlamayabilir. Zira katılımcılardan bir kısmı örüntüyü belirlemesi istendiğinde fikir ileri süremezken, kümenin elemanları arasındaki ilişki sorgulandığında rahatlıkla ilişkiyi belirledikleri tespit edilmiştir. Ayrıca örüntü kavramını 'matematiksel işlemlerin birbiri ardına sıralanması' veya 'bir işlemin sonucunun diğer işlem için gerekli olması' olarak algıladıkları belirlenmiştir. Dolayısı ile bu sonucu bireylerin cebirsel genelleme fikrine sahip olmadıklarının bir diğer kanıtı olarak düşünebiliriz. Nitekim iki kümenin elemanları arasındaki ilişki sorgulandığında sıklıkla orantı kurmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Gerçekten, iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemede matematik öğretmen adaylarının da sıklıkla başvurduğu strateji orantı kurmak olduğu belirlenmiştir (Çevik, 2007). Örüntülerin genellenmesinde, görme yetersizliği olsun ya da olmasın bütün öğrencilerin orantı bulma ve sınama stratejilerine sıklıkla başvurduğu belirtilmektedir (Aktaş & Argün, baskıda; Lannin, Barker & Townsend, 2006). Ancak burada görme engelli bireylerin cebirsel temsillerde yanılgıları ortaya çıkmaktadır. Örneğin; aralarında doğru orantının yer aldığı hız ve zaman ilişkisinin cebirsel temsilinin '$v = t$' olduğunu iddia etmişlerdir. İlginçtir ki cebirsel genelleme sürecinde tercih edilen stratejiler (oran, fark ile çarpma vb.) ve hatalar her düzey öğrenen ile yürütülen çalışmalar ile paraleldir (Çevik, 2007; Lannin vd., 2006; Zazkis ve Liljedahl, 2001). Bu sonuç bireyselleştirilmiş öğretim programlarının yetersizliğini değil, kazanımlar için tasarlanan öğretim uygulamalarının yetersizliğini işaret etmektedir.

Cebirsel ifadelerde yaşanan güçlükler sadece orantı kavramında tespit edilmemiştir. Bazı katılımcıların $20s$ (yirmi s telaffuzu) gibi ifadelere aşina olmadığı belirlenmiştir. Bunun yerine katılımcılar $20\times s$ (yirmi çarpı s) ifadesini anlayabiliyor. Ancak, $20s$ ifadesini 'yirmi tane öğrenci' olarak düşünmeleri veya $2x$ gibi terimlerin değişken ve bilinmeyen kavramlarına dair düşünmelerine yansıdığı belirlenmiştir. Ayrıca yirmi öğrencinin olduğu bir sınıf ile bir öğretmenin eşlenmesine dair ilişkinin $20s+1$ şeklinde cebirsel olarak ifade etmeleri önemli bilgi eksiklerini ortaya koymaktadır. Burada elbette sözlü ifadenin de öneminden bahsedilebilir. Görme engelli bireyler için sözlü ifadeler ile cebirsel gösterimlerin eş zamanlı yazılmasının ve betimlenmesinin önemli olduğunu söyleyebiliriz. Ancak bireylerin denklem kurma bilgisinin eksikliği dikkat çeken bir sonuçtur. Cowan (2011) görme engelli bireylerin sözel problemlerin çözümünde cebirsel temsilde denklem kurmayı tercih ettikleri belirlemiştir. Fakat görme yetersizliğine sahip olan ve olmayan bireylerin nihai sonucu elde etmek için denklemi etkin bir şekilde kullanma yeteneklerinde büyük bir tutarsızlık olduğunu belirtmiştir (Cowan, 2011; Herman, 2007; Keller & Hirsch, 1998). Dolayısı ile görme engelli bireylerin cebirsel ifadeler, denklem kurma, bilinmeyen ve 'cebirsel ifadelerde işlemler' kavramlarına dair önemli yanılgılarının ve eksikliklerinin olduğunu söyleyebiliriz. Her ne kadar Kinzel (2000) çalışmasında yer alan kolej öğrencilerinin cebirsel işlemlere gereğinden fazla odaklandığını iddia etse de, öğrencilerin rutin durumlardaki notasyonları yorumlayabilirken daha az aşina oldukları durumlardaki notasyonları yorumlama becerilerinin yetersiz olduğunu vurgulamıştır. Bu yorum görme engelli bireylerin çeşitli kavramların yanı sıra cebirsel notasyonlara dair eksikliklerini desteklemektedir. Burada bir başka yorum, bireylerin harf temsillerini 'etiket' olarak düşünmüş olabileceğidir (Li, 2006). Sonuçlar üzerinden yorumlamak gerekirse, öğrenci sayısını temsil eden 's' harfini 'öğrenci' kelimesi için bir etiket olarak algılamış olabilirler. Dolayısı ile bireylerin 20 öğrencilik sınıfı '$20s$' şeklinde ifadesi etmelerini 'etiket' ile yorumlayabiliriz. Philipp (1999, s.160) sabit, bilinmeyen, genelleştirilmiş sayı ve değişken için ayrı ayrı etiketlerden bahsetmiştir. Ancak Clement' in (1982) üniversite öğrencileri ile yürüttüğü çalışmasının ve bu araştırmanın sonuçlarının da desteklediği gibi 'etiketler' öğrencilerin yanılgılara düşmesine neden olmaktadır. Clement (1982) çalışmasında $S = 6P$ yerine $P = 6S$ yazan katılımcıların etiketleme anlayışına dayanan 'farklı harfler farklı değerleri belirler' fikrinden kaynaklandığını belirtmiştir.

Fonksiyonun cebirsel temsiline ilişkin kavram bilgisindeki eksiklikler kavramsal bilgide olduğu kadar işlemsel bilgilerinde de yanılgıları beraberinde getirmektedir. İşlemsel hatalarda not tutma güçlüğü önemli rol oynamaktadır. Görme engelli bireylerin cebirsel kavramlarda en çok işlem takibinde ve işlemleri hafızalarında tutmakta zorlandığı bilinmektedir (Cahill vd., 1996). Örneğin, görme yetisini ilerleyen yaşlarında kaybeden Aydın, Latin semboller ve rakamlarla fonksiyonun cebirsel temsilini belirlemeye çabalamıştır. Bu süreçte yazdığı metni okuyamasa da zihninde işlemlerin kalıcı olduğunu belirtmiştir. Dolayısı ile not tutmanın bireyin cebirsel işlem yapmasında kayda değer bir öneme sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Fonksiyonun grafik temsiline ilişkin sonuçlardan önce, görme engelli bireylerin temelde grafik kavramı ile tecrübelerinin yetersiz olduğunu belirtmek gerekmektedir. Bu nedenle fonksiyonun grafik ile temsili için basamak basamak süreçler incelenmiştir. Tanım ve değer kümelerinin x- ve y- eksenleri ile temsili, iki kümenin elemanları arasındaki eşlemenin sıralı ikililer ile temsili ve bu eşlemeyi oluşturan ilişkinin grafik ile temsili bireylerin farkında olmadığı grafik kavramına dair bilgilerdir. Ayrıca koordinat sisteminde sıralı ikilileri temsil eden noktaları işaretleyemedikleri ve eksenleri düzlem olarak adlandırdıkları tespit edilmiştir. Dolayısı ile koordinat sistemi ve koordinat sisteminde grafik temsili üzerine kavram bilgilerinin eksikliğinden söz edebiliriz. Çelik (2007) tez çalışmasında öğretmen adaylarının da fonksiyon kavramında tanım ve değer kümesine ilişkin formal bir tanım yapamadıklarını ortaya koymuştur. Bu sonuçlar öğretim programlarında kavramların formal tanımları ve temsilleri için ele alınan kazanımların, öğretim uygulamalarının ve özelde bireyselleştirilmiş eğitim programlarının yetersizliğini ortaya koymaktadır.

Grafik inceleme ve yorumlama üzerine tecrübeleri olan katılımcıların ise sadece doğrusal ilişkileri yorumlayabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Nitekim öğrencilerin eğitim hayatında karşılaştığı ilk ilişkinin doğrusal ilişkiler olduğu bilinmeketdir (Leinhardt, Zaslavsky ve Stein, 1990). Ancak ilişkiyi temsil eden çizgiyi takip etmekte sıklıkla güçlük yaşadıkları gözlenmiştir. Bu nedenle belirledikleri doğrusal ilişkiyi düşünerek, sezgisel olarak noktaları işaretlemişlerdir. Bu durum bireylerin deneyimlerinin artması ile grafik yorumlamada ve oluşturmada başarılı olacakları şeklinde yorumlanabilir. Cowan (2011, s.173) görme yetersizliğine sahip bireylerin doğrusal ilişiler için grafik incelemede başarılı olmalarını, dağınık grafikleri incelemelerinin güç olması ile açıklamaktadır. Ayrıca bu sonucu doğrusal grafikte ilişkinin test edilmesinin daha kolay olmasına bağlamaktadır. Kieran (1992) bu durumu öğrencilerin 'doğrusallığa düşkünlüğü' şeklinde ifade etmiştir. Grafik incelemedeki söylemlerin de sonuçları yorumlamaya ipuçları sunduğu belirlenmiştir. Grafik incelerken eşlemenin olmadığı noktaları 'boşa çıkmış' şeklinde ifade etmişlerdir. Grafiği ise 'yol', 'harita', 'kroki' veya 'rota' olarak tanımlamışlardır. Öğrencilerin iki boyutlu bir yapıyı yorumlarken, bu yapıya benzer özelliklere sahip deneyimlerinde yer alan gerçek bir nesne ile ilişkilendirdiği bilinmektedir (Budayasa & Juniati, 2018). Grafik tanımlamalarında da kabartma çizgilerle oluşturulan gridlerin etkili olduğu gözlenmiştir. Gridler görme engelli bireyler için iki ayrı görüşe sebep olmuştur. Bireyler gridlerin grafiği anlamayı kolaylaştırdığı ve çizgiyi takip etmeyi zorlaştırdığı şeklinde iki karşıt fikri ileri sürmüştür. Gridlerin noktaların işaretlenmesinde ve koordinatların belirlenmesinde kolaylık sağladığı belirlenmiştir. Ancak bireylerin doğrusal bir ilişkinin olduğunu fark ettiklerinde, gridleri kullanmadan sezgisel olarak grafiği takip ettiklerini söyleyebiliriz. Fakat bireylerin sezgisel olarak, yani elleri ile noktaları takip etmeden, noktaları belirlediklerinde zaman zaman hata yaptıkları da gözlenmiştir. Gridlerin takibi zorlaştırdığını düşünen bireyler ise noktaların konumunu tahmini olarak belirleyerek sezgisel bir grafik oluşturmanın yeterli olacağını düşünmektedir. Fakat görme engelli bireyler için sezgisel hareket ederek doğru bir grafik temsili oluşturmanın güç olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim görme engelli bireylerin görsel unsurlar içeren matematiksel kavramlara ilişkin en önemli yetersizliği tahmini ve sezgisel öğrenmelerden kaynaklandığı düşünülmektedir. Çünkü bu yaklaşım yetersiz tasarlanmış bireyselleştirilmiş eğitim programlarını meydana getirecektir.

Gridlere ilişkin eleştirilerin yanında grafikleri incelerken orijin ve eksenlerin belirlenmesinde güçlükler ortaya çıkmıştır. Bireyler sıklıkla orijin noktasını ve eksenleri kontrol etme gereksinimi duymuştur. Grafik incelerken zaman zaman sözlü anlatım ile betimlemeye ihtiyaç duymuşlardır. Braille yazı kullanmaktan kaçınan bireylerin ise dokunma duyusu gelişmediği için şekilleri algılamakta da güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Ayrıca eksenlerle küme elemanlarının eşlenmesinde birim kavramına dair bilgilerinin eksik olması, noktaları sezgisel belirlemelerine neden olmuştur. Bu ise noktaları belirlemelerini güçleştirdiği gibi sık sık doğru noktayı belirleyip belirlemediklerini kontrol etmelerini gerektirmiştir. Bu güçlükler koordinat sisteminde eksenlerin ve grafiğin çizgilerinin ayrı materyaller ile temsil edilmediğinden veya bireylerin dokunma duyularının hassasiyetlerine uygun materyallerin kullanılmadığından da kaynaklanmış olabilir. Çünkü Cowan (2011, s.173) kabartma yazı ile tasarlanmış grafiklerin anlaşılmasının güç olduğunu belirtmiştir. Grafikte farklı çizgiler farklı nokta vuruş sıklığında kabartma yazı ile oluşturulmasına rağmen, bireyler algılamakta ya da hissetmekte güçlük yaşamış olabilirler. Görme yetersizliği olan bireyler özellikle sınavlarda yardımcı bireyin betimlemelerine ihtiyaç duyduklarını belirtmiştir. Cowan (2011, s.205) görme yetersizliğine sahip bireylerin bağımsız olarak destek eğitim araçları kullansa da ileri düzeyde başarı gösteremediklerini belirtmiştir. Burada bahsedilen başarının görme yetersizliği olmayan birey tarafından betimlemeye ihtiyaç duymaları ile açıklamak mümkündür. Ancak diğer taraftan grafik inceleme görme duyusundan bağımsız olarak, her birey için sözlü ve şekil olarak ayrılmaz bir bütün içerisinde algılanmaktadır. Jestler, sözlü ifadeler, grafiği algılamada göze çarpan algısal tüm değişkenler birbiriyle etkileşim içerisinde olup grafiği anlamanın birer parçasıdır. Bu nedenle grafik algılamada sözlü ifadeler ve görsel unsurlar bir bütünü oluşturan eş zamanlı bileşenler olarak düşünülebilir (Roth & Lee, 2004). Böylece bireylerin başarısızlığının grafik temsiline dair kavram bilgisindeki eksikliklere dayandırmak mümkündür. Ayrıca kullanılan grafik çizimlerinde sadece kabartma çizgilerin yeterli olmadığı, bireylerin lastik bant gibi ekstra malzemelere ihtiyaç duyduğu belirlenmiştir. Bülbül (2013) görme engelli bireyler için grafik çiziminde kullanılan materyallerin ortak probleminin birim kavramı için güçlükler içerdiğini vurgulamıştır. Bu nedenle bireylerin grafikleri incelerken birimleri belirlemede sezgisel hareket ettiklerini söyleyebiliriz.

Görme engelli bireylerin iki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil etmekte güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Ancak grafik temsili ile sunulan ilişkiyi belirleyebilmişlerdir. Grafikleri incelerken verilen senaryonun günlük hayattan örnekler ile sunulmuş olması etkili olmuştur. Böylece bireyler başlangıç anı ile birim zaman arasındaki ilişiyi temsil edebilmişlerdir. Fonksiyon kavramının tanımına ve temsil türlerine dair önbilgileri olan bireylerin tanım ve değer kümesine, tanım kümesindeki her elemanın görüntüsünün olmasına dikkat ettiği belirlenmiştir. Ancak eksenler üzerinde kümelerin elemanları belirtilmediğinde verilen grafiğin fonksiyon olmadığını düşünmek bireyler arasında gözlenen yaygın bir hatadır. Bu hata öğretmen adayları ile yürütülen araştırmada da gözlenmiştir. Öğretmen adaylarının tahmini olarak noktaları belirleme çabası, onların yaşadığı güçlükleri orataya koymaktadır (Çevik, 2007). Bu durumun katılımcıların grafiği bir bütün olarak yorumlama çabasının sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Bir diğer hata ise koordinat sistemi üzerinde grafik temsillerinin hepsinin fonksiyon grafiği olduğunu düşünmeleridir. Bu hata katılımcıların daha önce grafik temsili ile fonksiyon kavramını inceleme tecrübelerinin yetersiz olmasından kaynaklanabilir. Grafik temsilinde başarılı olan bireylerin ise her zaman tanım kümesini *x*-ekseni ile temsil ettiği belirlenmiştir. Bu katılımcıların aksi durumun mümkün olacağına ilişkin örnekler ile karşılaşmadıklarını söyleyebiliriz.

Katılımcıların grafik temsilinde kümeler arasında eşlemeleri inceleyerek elemanlar arasında bir örüntü aradıkları belirlenmiştir. Örüntüyü tespit edemedikleri grafikler için fonksiyon temsili olmadığını düşünmüşlerdir. Bir diğer fikir ise katılımcılar parmakları ile noktaların arasındaki uzaklığı belirlemeye çalışmaktır. Katılımcılar bu mesafelerin örüntü oluşturması gerektiğini düşünmüşlerdir. Bu hatalardan farklı olarak dikey paralel doğrular testini kullanmaya çabalayanlar da olmuştur. Parabolün kollarına, kırılma noktalarına veya grafiğin bulunduğu bölgelere göre fonksiyon olup olmadığını belirleme yanılgıları ile karşılaşılmıştır. Bu yanılgılar kavram bilgisi eksikliğinin yanı sıra verilen grafikler arasında bir farklılık arama çabasından kaynaklanabilir. Temsiller arası geçişlerde görme yetersizliği olmayan bireylerin ve öğretmen adaylarının da başarılı olmadığını ortaya koyan çalışmalar yer almaktadır (Çelik, 2007; Even, 1998). Her ne kadar bu çalışmalarda ileri düzey matematiksel kavramlar yer alsa da, yeni edinilen bir kazanım için benzer güçlüklerin yaşandığını söylemek mümkündür. Söz konusu çalışmalarda da grafik temsilinden cebirsel temsile geçişte benzer güçlükler belirlemiştir.

5.3. Görme Engelli Öğrencilerin Belirlenen Cebir Kavramlarına Dair Tahmini Öğrenme Yol Haritasına İlişkin Sonuçlar

Değişken, bilinmeyen, eşitlik ve fonksiyon kavramları üzerine elde edilen ihtiyaçlar, sorunlar ve cebirsel düşünme süreçleri, görme engelli bireylerin cebir kavramları üzerine tahmini öğrenme yol haritasının belirlenmesine katkı sunmuştur. Katılımcıların cebirsel düşünme süreçleri incelendiğinde küme, eşleme, ilişkilendirme, değişken, sayı doğrusu, koordinat sistemi kavramları ve iki kümenin elemanları arasındaki ilişki için farklı temsil türlerine dair öğrenme süreçlerinin tasarlanmasının gerekliği ortaya çıkmıştır. Böylece Tablo 12' de hedefler dizisi olarak sunulan tahmini öğrenme yol haritası oluşturulmuştur (bkz. Bölüm 4.3.5).

Tahmini öğrenme yol haritasında eşleme, ilişkilendirme ve dolayısı ile fonksiyon kavramlarının yapılandırılması için temel unsur olan küme kavramına dair hedefler öncelikle ele alınmıştır. Burada 'kümenin sezgisel tanımını ifade edebilme' ve 'küme örnekleri sunabilme' hedefleri ile başlanılmıştır. MEB (2018a) öğretim programında küme kavramı için temsil türlerine dair kazanıma, küme tanımından önce yer verilmiştir. Tahmini öğrenme yol haritası hedefleri ile kazanımlar arasındaki bu farklılık ortaokul ve ortaöğretim sınıf düzeylerindeki farklılıktan kaynaklanabilir. Ancak küme kavramının 'topluluk' algısı üzerinden öncelikle ele alınması ve günlük hayat örnekleri üzerinden tartışılması kavramın öğrenilmesine katkı sunacaktır. Nitekim ortaöğretime ait öğretim programında (MEB, 2018b) küme kavramına ilişkin kazanımlar gerçek hayat örnekleri, temsil türleri ve küme tanımı üzerine sıralanmaktadır. Altküme ve evrensel küme kavramları için yer alan kazanımlarda evrensel kümenin tanımına dair vurgunun yer almaması önemli bir farklılıktır (MEB, 2018a; 2018b). Kazanımların sıralanmasında (MEB, 2018a) dikkat çeken farklardan biri de uzunluk ve standart ölçü birimleri ile sayı doğrusu kavramlarının küme kavramından daha önce ele alınmasıdır. Bu farkın gerekçesi sayı doğrusu kavramı ile ilişkilendirilerek temel işlem becerileri, sayı kümeleri ve kesir kavramlarının öğretimine yer verilmesi olabilir. Bu araştırmada ise sayı doğrusunun bir küme olduğu vurgusu ile hedefler sıralanmıştır. Değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin öğretim programlarında yer alan kazanımlar incelendiğinde, araştırmanın sonuçlarında elde edilen öğrenci yanılgılarının kaynağı belirlenmiştir. Öğretim programlarında değişken kavramı ilk olarak cebirsel ifadeler kavramı ile karşımıza çıkmaktadır (MEB, 2018a). Burada değişken kavramı sınırlı bir anlam içermesine rağmen formal tanımına uygun olarak 'harflerin sayıları temsil etmesi' şeklinde ele alınmıştır. Sınıf düzeylerine göre ilköğretim programında kazanımlar incelenmeye devam edildiğinde, örüntü genellemelerinin ifade edilmesinde değişken kavramına yer verilmiştir. Burada sayıları temsil eden harfli ifade algısı devam etmektedir. Ancak öğrencilerin genelleyerek harfli ifadeleri değişken kavramı şeklinde algısının, bu kazanımlara dair tasarlanan öğretim uygulamalarından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Nitekim ilerleyen kazanımlarda doğrusal denklem kavramında doğrusal ilişkinin incelenmesi sürecinde iki değişkenin varlığı ele alınmıştır. Böylece bilinmeyen ve değişken kavramlarına ilişkin yanılgıların temelleri atılmış olacaktır. Benzer şekilde ortaöğretim öğretim programında (MEB, 2018b) birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler kavramına ilişkin kazanımlar ile beraberinde değişken kavramının ele alınması beklenmektedir. Ancak değişken kavramının tanımına dair kazanıma yer verilmemektedir. Bu durum tahmini öğrenme yol haritası ile öğretim programları arasındaki önemli farklardan biridir.

Koordinat sistemine dair kazanım ilköğretim öğretim programında doğrusal denklemler kavramı ile beraber ele alınmıştır (MEB, 2018a). Kazanımlarda öncelikle koordinat sistemin tanıtılmasına ve daha sonra iki değişkenin temsil ettiği nicelikler arasındaki doğrusal ilişkinin tablo ve cebirsel temsillerine yer verilmesi beklenmektedir. Bu kazanımları doğrusal ilişkinin grafik temsiline dair kazanım takip etmektedir. Bu kazanımlarda öğretmenin sınıf uygulamasını nasıl tasarladığı önem arz etmektedir. Zira öğretim programında sayı doğrusu ile koordinat sisteminin yapılandırılması, sıralı ikili vb kavramlara yer verilmesi için açıklayıcı bilgiler sunulmamaktadır. Ayrıca sıralı ikili kavram tanımı sadece ortaöğretim öğretim programında karşımıza çıkmaktadır (MEB, 2018b).

Bu araştırmada tasarlanan tahmini öğrenme yol haritası ile öğretim programlarında (MEB, 2018a; 2018b) yer alan kazanımlar arasındaki en önemli fark eşleme ve ilişkilendirme kavramlarını içermektedir. Eşleme ve ilişki belirleme kavramlarına dair doğrudan kazanımlar yer almamaktadır. Hatta kümelerin elemanları arasındaki eşleme ve ilişki kavramlarına yer vermeden, fonksiyon kavramının grafik temsiline yer verilmektedir. Tablo, grafik ve cebirsel temsil türlerine yer verilmesine rağmen değişken, eşleme ve ilişki kavramlarına yer verilmemesi temsil türlerini yorumlamada eksiklikler ve yanılgılara neden olacağı düşünülmektedir. Dolayısıyla Tablo 12' de yer alan hedefler ile öğretim programlarında kazanım ya da kazanım bileşenleri olarak karşılaşmadığımızı söyleyebiliriz.

Görme engelli bireylerin küme, eşleme, ilişkilendirme, koordinat sistemi gibi söz konusu cebirsel kavramlara ilişkin tahmini öğrenme yol haritalarının incelendiği çalışmalar ulaşılabilir literatürde karşılaşılmamıştır. Bu nedenle görme yetersizliği olmayan öğrenciler için tasarlanan tahmini öğrenme yol haritaları incelenmiştir (Arieli-Attali, Wylie & Bauer, 2012; Czarnocha, 2016; Moss, Boyce & Lamberg, 2019; Panorkou, Maloney & Confrey, 2013; Weber & Thompson, 2014). Arieli-Attali vd. (2012) çalışmasında değişken ve bilinmeyen kavram tanımlarına öğrenme yol haritalarında yer vermedikleri belirlenmiştir. Eşitlik, değişken ve bilinmeyen kavramları tek hedef olarak ele alınan çalışmada harfli ifadelere ve bilinmeyen kavramlarına odaklandıkları söylenebilir. Gerçekten, çalışmanın sonuçları öğrencilerin değişken ve bilinmeyen kavramlarını ayırt edemediklerini ortaya koymaktadır. Ayrıca hedefler arasında değişken, parametre ve genelleştirilmiş sayı kavramlarına yer verilmiştir. Öğrencilerin düşünmelerine dair gelişimlerinin değişken ve bilinmeyen kavramlarını ayırt etme düzeyinde olduğu göz önüne alındığında, bu hedefe erişilmesinin mümkün olmadığı düşünülebilir. Ancak bu çalışmada, kavramlar ve özelliklerine dair daha geniş perspektifte tahmini öğrenme yol haritası oluşturulmadığından, parametre ve genelleştirilmiş sayı kavramlarına ilişkin hedefler yer almamaktadır. Bu sonuç fonksiyon kavramını yapılandırma amacıyla başlatılan araştırma sürecinin, eşleme ve ilişkilendirme kavramlarına odaklanmasından kaynaklanmaktadır. Öğrenme yol haritasında bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarının yanı sıra bu değişkenlerin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkinin çeşitli temsil türlerine dair hedeflere yer verilmiştir. Bu hedeflerde tablo, grafik ve cebirsel temsil türlerine ek olarak sözel olarak ifade etme kategorisinden bahsedilmektedir. Bu çalışmadaki tahmini öğrenme yol haritasında bir hedef olarak ele alınmasa da, 'sözel olarak cebirsel temsili betimleme' kategorisi araştırma sonuçlarına yansıyan önemli sonuçlardandır. Nitekim görme engelli bireylerin cebirsel temsiller için örüntü genellemelerinde de sözel betimlemeyi tercih ettiği bilinmektedir (Aktaş & Argün, baskıda). Dolayısı ile görme yetersizliğine sahip olmayan akranların da 'sözel betimleme' tercih etmesi öğrencilerin genel olarak cebirsel temsillerde güçlük yaşadığını ortaya koymaktadır.

Moss vd. (2019) öğrenci düşünmeleri ve öğrenme yol haritalarını inceledikleri çalışmalarında değişken kavramını harfli ifadeler kavramı ile ele almışlardır. Hedefleri sıralarken değişken kavramını literatürde yer aldığı gibi 'etiket' ve 'bilinmeyen' anlamları ile ele aldıkları dikkat çekmektedir. Değişken kavramının tanımına yer vermemeleri ve öğrenci düşünmelerini temel almaları söz konusu araştırmanın sınırlılığını oluşturmaktadır.

Bu nedenle çalışmanın sonucunda ortaya konulan öğrenme yol haritasını baz alarak öğretim uygulamaları tasarlamak öğrenci yanılgılarını meydana getirmesi muhtemeldir.

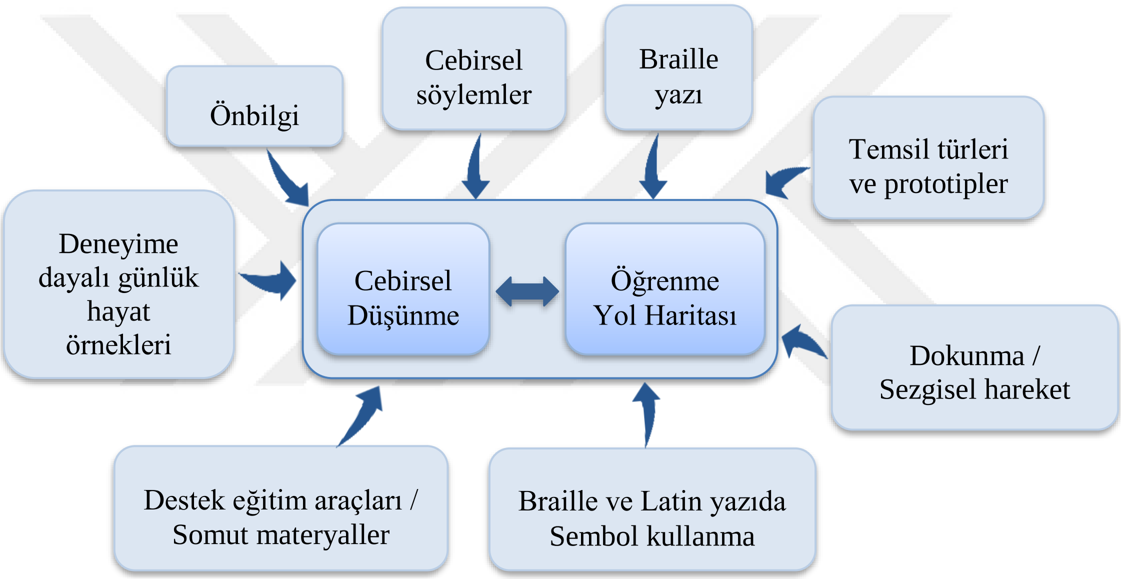
Tablo 12' de ortaya konulan tahmini öğrenme yol haritası ile daha fazla benzer hedeflere sahip olan Panorkou vd.' nin (2013) tasarladığı öğrenme yol haritasıdır. Panorkou vd. (2013) hedeflerde eşleme ve ilişkilendirme kavramları için çeşitli temsil türlerine yer vermiştir. Tablo 12' de yer alan hedefler ile en dikkat çeken benzerlik sayı doğrusu kavramı ve sayı doğrusu temsilleri ile eşleme ve ilişkilendirme kavramlarına yer vermiş olmalarıdır. Ayrıca tablo ve grafik temsillerinin yer alması da öğrenme yol haritaları arasındaki benzerliği güçlendirmektedir. Öğrenme yol haritaları arasındaki önemli farklılık ise değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin hedeflerdedir. Panorkou vd. (2013) değişken kavramını sadece bilinmeyen kavramının temsilcisi olarak ele almıştır. İlerleyen hedeflerde bağlama göre bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirleme üzerine odaklanmaktadır. Böylece bu çalışmanın da değişken kavramına ilişkin tahmini öğrenme yol haritasında yer alan hedeflerin kavram bilgisine dair yetersiz kaldığı ve öğrencilerde kavram yanılgılarına sebep olacağı düşünülmektedir.

Değişken kavramı için kavram tanımını dikkate alarak öğrenme yol haritası oluşturan Czarnocha (2016) üç şemadan bahsetmektedir. Öğrenci düşünmeleri ile elde edilen bu şemalar 'bilinmeyen olarak değişken', 'genelleştirilmiş sayı olarak değişken' ve 'fonksiyon kavramına geçişte iki nicelik arasındaki ilişkiyi belirleyen değişken' olarak sıralanmıştır. Ancak bu hedef sıralamalarının da öğrenci zihinlerinde değişken ve bilinmeyen kavramlarını ayırt etmede güçlüklere neden olabileceği düşünülmektedir. Nitekim bu araştırmanın sonuçlarında, öğrencilerin bilinmeyeni temsil eden *x* harfi için denklem çözümlerinde farklı sayı değerlerinin elde edilmesini değişken olarak yorumladıkları belirlenmiştir.

Weber ve Thompson (2014) fonksiyon grafikleri için tasarladıkları tahmini öğrenme yol haritasında koordinat sisteminin oluşturulmasına dair önemli kavramlara yer vermiştir. Eksenlerin iki kümeyi temsil ettiği, eksenlerin yapılandırılmasında bir birimin belirlenmesinin gerektiği, sıralı ikililerin eksenler arasındaki eşleme sonucu belirlenmesi üzerine hedefler oluşturmaktadır. Ancak, çalışmada hedefler ifade edilirken formal dilde ele alınmadığı ve 'küme' yerine 'nicelik' kavramının kullanıldığı, 'sıralı ikili' yerine 'dik eşleme' gibi ifadelere yer verilmiştir. Dolayısı ile her ne kadar Weber ve Thompson (2014) Tablo 12' de yer alan hedefler ile aynı amaca hizmet eden hedeflere yer vermiş olsa da, araştırmalarının en önemli sınırlılığı öğrenme yol haritası tasarlanırken kavram tanımlarının ve kavramsal terminolojinin dikkate alınmamasıdır.

5.4. Görme Engelli Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerine İlişkin Sonuçlar

Bu araştırmada ortaya konulan tahmini öğrenme yol haritasına göre tasarlanan öğretim oturumlarında, görme engelli bireylerin küme, eşleme, ilişki ve temsil türleri, doğru, doğru parçası, sayı doğrusu, koordinat sistemi kavramlarına dair cebirsel düşünme süreçleri incelenmiştir. Görme engelli öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinde rolü olan değişkenlerin incelenmesi ile oluşan ve Şekil 218' de yer alan diyagram elde edilmektedir. Öğrenme yol haritasının cebirsel düşünme süreçlerini kapsayan hedefler dizisi (Simon, 1995) olduğu göz önüne alınırsa, sonuçlarda elde edilen değişkenlerin cebirsel düşünmenin yanı sıra öğrenme yol haritalarında da rol aldığını söylemek mümkündür.



Şekil 218. Görme engelli öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi

Şekil 218' de yer alan önbilgi, cebirsel söylem, destek eğitim aracı gibi her bir değişkenin cebirsel düşünme süreçlerinde rol almalarının yanı sıra birbiri ile ilişkili olduğu söylenebilir. Örneğin; öğretim oturumunda yer verilen destek eğitim aracında seçilen semboller ile cebirsel temsiller oluşturmayı amaçlayan görme engelli bireylerin Braille' in doğasından kaynaklanan güçlüklerden dolayı kavrama ilişkin temsil türlerini tercih ettikleri söylenebilir. Bu nedenle cebirsel düşünme süreçlerine ilişkin sonuçlar söz konusu değişkenler bağlamında alt başlıklar altında sunulamamaktadır. Kavram odaklı gerçekleştirilen öğretim uygulamalarından elde edilen sonuçlar ayrıntılı incelenmek üzere ilişkili kavramlara göre başlıklar altında tartışılmıştır.

5.4.1. Küme, Eşleme, İlişkilendirme, Koordinat Sisteminde İki Küme Arasındaki İlişkinin Temsil Edilmesi İçin Cebirsel Düşünme Süreçlerine İlişkin Sonuçlar

Görme engelli bireylerin küme kavramına dair kavrayışlarının, onların önbilgilerinin düzeylerine bağlı olmaksızın örnekler üzerinden kavramı tanımlama ya da açıklama eğiliminde olduğu belirlenmiştir. Küme kavramı sorgulandığında katılımcıların 'kümes', 'ağaçlar' ya da 'insanlar' kümesi gibi günlük hayattan örnekler vermesi ve sezgisel olarak algılarını ifade etmeleri bu sonucun en somut delilidir. Böylece araştırmanın bulgularında da elde edildiği gibi bireylerin verdikleri örneklerden yola çıkarak, küme kavramını açıklamak için 'kümenin elemanı olma' fikrine dayanarak '*ait olma*' veya '*bir gruba üye olma*' terimlerine yer vermesi muhtemeldir. Ancak bu terimler arasındaki farklılık bireyin önbilgilerine dayanmaktadır. Çünkü öğretim oturumlarına başlamadan önce küme kavramı için farklı hazır bulunuşluk düzeylerine sahip olan Mete ve Sema' nın kavram tanımları da farklılık göstermiştir. Örneğin, önbilgilerine dayanarak Mete küme kavramını '*grup*' olarak ifade ettiği reel sayılar kümesi üzerinden, Sema ise günlük hayat örneklerinden yola çıkarak açıklamaya çabalamıştır. Bu farklılığın öğrenme yol haritasında ortaya koyduğu diğer bir sonuç, kümenin tanımından önce 'kümenin eleman sayısı' kavramının edinilmesidir. Çünkü görme engelli bireyler küme kavramına ilişkin incelediği küme örneklerindeki toplulukların üyelerini sayma eğiliminde olabilmektedir. Söz konusu farklılık küme kavramına ilişkin ele alınan hedeflerin kazanılmasında güçlük teşkil edeceği düşünülmemelidir. Aksine bireyin kümenin elemanı olma kavramını, '*belirli ortak özellikleri olan grup*' fikrine odaklanmadan, başka bir ifade ile ortak özellikler aramadan, bir araya getirdiği nesneler topluluğuna '*ait olma fikri*' ile açıklaması muhtemeldir. Nitekim Sema tabla üzerinde oluşturduğu küme örneklerinden 'ait olma' fikrine ulaşmıştır. Her ne kadar Fischbein ve Baltsan (1998), küme kavramını '*nesnelerin bir topluluğu*' olarak algılamanın öğrencide kavram yanılgılarına neden olacağını iddia etse de, Sema' nın sonlu ve sonsuz küme kavramları ele alındığında örnekler sunmada ve açıklamada daha başarılı olduğu tespit edilmiştir. Örneğin, Sema tartışılan örnek durumla ilgisi olmadığı halde masanın üzerindeki cetvele dokunarak, cetvel üzerinde yer alan tamsayıların sonlu bir küme oluşturacağı fikrini ileri sürmüştür. Böylece Sema' nın karşılaştığı çeşitli nesneler ya da sayı kümelerinde, küme kavramına dair özellikler ya da tanımlamaları yorumlamada daha başarılı olduğu söylenebilir. Küme örnekleri incelenirken sunulan araçların ve önbilginin yansımalarını ortaya koyan uygulamalardan diğeri küptaşı eleman kabul eden küme örneğidir. Dolayısı ile görme engelli bireyler için somut materyal seçimi ve kullanımı, tıpkı Mete' nin sıklıkla sayı kümeleri ile çalışmaya aşina olduğundan bir tane küptaşı eleman kabul eden tek elemanlı kümenin elemanının küptaşın üst yüzeyinde yazan rakam olarak ifade etmesi gibi, önem arz etmektedir.

Görme engelli öğrenciler için deneyimlerine dayanan günlük hayat örneklerinin katkı sunduğu ilişkili diğer kavram eşlemedir. Görme engelli öğrencilerin eşleme kavramına dair başarılı olması günlük hayattan incelenen örneklere dayandırılabilir. Çünkü öğrencilerin aşina olduğu ve 'eşleme' fikrine dair farkındalıklarının olduğu 'okulda öğrenci numaraları' gibi örneklere yer verilmesinin başarıyı artırdığı tespit edilmiştir. Ancak burada vurgulanmalıdır ki katılımcıların küme kavramına dair kavrayışları, sunulan örneklerde kümeleri ve elemanları belirlemedeki başarılarının kaynağıdır. Dolayısı ile öncelikle 'küme' ve 'kümenin elemanı' kavramlarına dair önbilgilerinin gerekliliği belirlenmelidir.

Görme engelli bireylerin görsel içerikler ile çalışmakta güçlük yaşadığı düşünüldüğünde, bireylerin küme temsili için liste yöntemini öğrenmiş olmaları ya da öğrendikten sonra sıklıkla tercih ettikleri gösterim biçimi olması beklenmektedir. Nitekim bulgularda Sema' nın önbilgilerinde küme kavramına dair bulguya rastlanmazken, beklenildiği gibi Mete' nin önbilgilerinden hareketle öğrenme oturumlarında küme temsili için öncelikli tercihi 'liste yöntemi' olmuştur. Ancak Mete' nin de liste yöntemi ile küme temsilinde eksiklerinin olduğu belirlenmiştir. İlginçtir ki koordinat sisteminde iki kümenin elemanlarının eşlenmesi hedefi için tasarlanan öğretim oturumuna kadar, Sema' nın küptaş kasa materyali yardımıyla Venn şeması ile küme temsilini tercih ettiği belirlenmiştir. Bu sonuç bireylerin önbilgilerinde yer alan veya daha önce öğrendiği bir kavramı, sonraki öğrenmelerine tercih ettiği şeklinde yorumlanabilir. Önbilgilerin tercih edilmesinin gerekçesi ise öğrenenin önbilgilerini kullanmaya dair daha fazla tecrübeye sahip olması olabilir. Bir başka yorum ise görme engelli bireyin kabartma yazı tableti kullanarak not alıp liste yöntemi ile temsil etmeyi tercih etmiş olabileceğidir. Çünkü nihayetinde görme engelli bireylerin sıklıkla tercih ettiği stratejiler arasında not tutma ve not aldırma yer almaktadır (Şenel & Topuzkanamış, 2018). Koordinat sisteminde kümelerin elemanları arasındaki eşlemenin temsiline dair tasarlanan öğretim oturumundan sonra ise, her iki katılımcının da eşlemeyi gösterirken küme temsilinde liste yöntemi ile Venn şeması temsilini öncelik olmaktan çıkardığı belirlenmiştir. Sonuç olarak iğneli sayfa materyalinde grafik temsili katılımcı bireylerin ilk tercihinde yer almaya başlamıştır.

Görme engelli öğrencilerin kavramlar için temsil türleri tercihlerinde kullanılan destek eğitim aracının ve Braille yazının rolünden söz etmek mümkündür. Sonuçlar arasında her iki katılımcı için benzerlik arz eden söz konusu değişkenler, görme engelli bireylerin eşlemeyi kuracakları kümeleri Venn şeması ile temsil etmeyi düşünmediklerini işaret etmektedir. Örneğin, Sema tamsayılar kümesinin bir altkümesinin elemanlarını alt alta yazmış ve her elemanı ok işareti yardımıyla karesi olan sayı ile eşleyerek göstermiştir. Fakat alt alta yazdığı elemanları Venn şeması ile küme temsili kullanmayı düşünememiştir. Mete ise küptaş kasa materyali ile eşlemeyi göstereceğinde, elemanları arasında eşleme yapılan kümeleri liste yöntemi ile temsil etmeyi düşünmüştür. Küptaşın üzerinde yer alan semboller yetersiz (Braille Matematik Kılavuzu, 2017, 37-38; Maulana, 2019) olduğu için temsilleri yazmakta güçlük yaşamıştır. Bu güçlüğü aşmak için Mete, kendisine özgü semboller ile kümenin adını temsil etmeyi düşünmüştür. Mete' nin Venn şeması ile temsili düşünmemesi, tablo ile eşlemenin temsil edilmesinde de güçlükler yaşamasına neden olmuştur. Katılımcıların Venn şeması ile temsili kullanma eğiliminde olmamaları bu temsil ile ilk öğretim oturumlarında karşılaşmış olmaları olabilir. Fakat ilginçtir ki görme engelli bireylerin kullandığı küptaş kasa materyali gibi destek eğitim araçları Venn şeması ile küme temsiline uygundur. Sadece görme engelli bireylere bu destek eğitim araçlarındaki temsillerin Venn şeması ile temsil olduğunu vurgulamakta fayda vardır. Ayrıca Mete' nin liste yöntemi ile küme temsilinde kendine ait semboller ve kısaltmalar kullanması sadece küptaş kasa materyalinin değil, kabartma yazı tabletinin de kullanışsız olmasından kaynaklanmaktadır. Örneğin, tablette liste yöntemi ile küme temsillerinin elemanları arasındaki eşlemeyi gösterirken, sık sık tableti açıp yazdıklarını kontrol etmesi gerekmektedir, ayrıca doğru parçaları ile eşlemeleri tabletin kutucuklarından dolayı tam ve kesin gösteremediği gözlenmiştir. Bu sonuçlar görme engelli bireyleri Venn şeması ile küme temsili ile çalışmasının kolaylık olduğunu ortaya koymaktadır.

Liste yöntemi ile küme temsili ele alındığında dikkat çeken bir diğer sonuç, her iki katılımcının da temsillerde kullanılan sembolleri bilmemelerine rağmen sezgisel olarak sembol kullanmaya ihtiyaç duymasıdır. Katılımcıların önbilgilerinde tam ve doğru bir şekilde liste yöntemi ile küme temsiline dair bilgi yer almıyordu. Öğretim oturumunda kendilerine verilen nesneler ile tablet ve kalemi kullanarak bir küme oluşturdukları çalışmada, her iki katılımcının da küme temsillerinde 'parantez kullanma' ve 'kümenin adını yazma' gibi sembollere ihtiyaç duyduğu belirlenmiştir. Örneğin, küme parantezi kullanmasının gerekliliğini hissederek 'nokta' kullanmayı denemişlerdir. Bu sonuç bireylerin cebirsel temsillere aşina olduklarının göstergesidir. Kümenin adını yazarken ise 'B kümesi' şeklinde yazmaları, görme engelli bireyler ile matematiksel dil kullanımında söylemler ile eş zamanlı olarak yazı dilinin kullanılmasının önemini ortaya koymaktadır. Dolayısı ile görme yetersizliği olan bireylerle matematiksel iletişimde sembollerin ve söylemin öneminden bahsetmek gerekmektedir.

İki kümenin elemanları arasındaki eşleme kavramı için günlük hayattan incelenen örneklerin ardından, cebirsel temsile ihtiyaç duyulan 'her tamsayının kendisinin karesi ile eşlenmesi' gibi örneklerin tartışılması kavram öğrenmeye katkı sunmaktadır. Sürdürülen tartışmalarda bireylerin sembol kullanmanın gerekliliğini fark etmesi ve kullanacağı sembol için tahmin yürütmesi olasıdır. Ancak araştırmanın katılımcıları söz konusu tahminlerde tamsayılar kümesini ve tamsayıların karelerinin kümesini belirlemelerine rağmen, bu kümeleri göz önüne almadan tek tek elemanlar arasındaki eşlemelere odaklanmıştır. Ayrıca her iki katılımcı da eşlemeyi incelemek için tamsayılar kümesini değil, tamsayılar kümesinin bir altkümesini ele almıştır. Bu durumun gerekçeleri, katılımcıların sadece birkaç elemana odaklanmaları ve cebirsel temsile dair önbilgilerinin olmaması şeklinde sıralanabilir. Dahası ele aldıkları altkümenin eleman sayısı da önem arz etmiştir. Çünkü katılımcılar Braille yazıda tabletle not alırken, liste yöntemi ile temsil ettikleri kümelerin tek satıra yazılmasını istemiştir. Braille yazıda matematik pek çok karakterin yazılmasını gerektirdiği için (Bitter, 2013; Edwards vd., 1995) liste yöntemi ile temsilde bir satıra yazılabilecek küme 5 veya 6 elemanlı olarak belirlenmiştir. Dolayısı ile Braille yazıda matematiksel temsillerin, öğrenci düşünmesi ve kavrayışları üzerinde önemli roller oynadığı açıktır. Başka bir yorum olarak bireylerin sadece elemanlara odaklanmasının temel nedeni, eşlemenin kümelerin elemanları arasında gerçekleşmesidir. Diğer bir gerekçe ise sunulan örneği yorumlama ve algılamadır.

Eşleme kavramı için öncelikle kümelerin belirlenmesi gerektiğini fark eden katılımcılar, kümeleri temsil etmek için ilk örnekte liste yöntemini tercih etmiştir. Mete' nin ilk önce elemanları tek tek ok ile eşlemesi, ancak liste yöntemi ile küme temsilleri üzerinden eşlemeyi gösterirken bu kez sadece kümeleri ok ile eşlemesi dikkat çeken bir sonuçtur. Nihayetinde iki küme arasındaki eşlemeyi '$A \rightarrow B$' ile göstermek mümkündür. Ancak burada Mete, eşlemenin cebirsel temsiline yer vermediği için elemanların birbiri ile nasıl eşleneceği açık değildir. Dolayısı ile Mete de elemanları tek tek eşlemek için eşlemeyi kabartma çizgi parçaları çizerek doğru parçaları ile temsil etmiştir. Ancak kabartma yazıda, tablette yer alan hücrelerin sıralanışı ve Braille yazıda karakterin fazla olması yine eşlemelerde tam olarak elemanları işaretlemede güçlükler oluşturmuştur.

Eşleme için kümeleri belirleyen katılımcılar, eşlemenin elemanlar arasında yapıldığını göstermek için sembol arayışına girmiştir. Katılımcıların sembol kullanma gibi matematiksel dilde gösterimler sunmaya aşina oldukları vurgulanmıştı. Dolayısı ile burada dikkat çeken, katılımcıların eşleme kavramını temsil etmesi için seçtikleri sembollerdir. Sema 1’ den 6’ ya kadar tamsayıları kendisinin karesi ile eşlerken öncelikle ‘=’, ardından ‘, (virgül)’ ve son olarak ‘>’, ‘<’ sembollerini kullanmayı denemiştir. Sema’ nın ilk olarak ‘=’ sembolünü tercih etmesinin nedeni, kümenin ilk elemanı olan 1’ in diğer kümede yine 1 ile eşlenmesi olabilir. Ancak ikinci eleman için ‘2=4’ gösterimi tartışıldığında Sema, eşleme kavramı için ‘=’ temsilinden vazgeçmiştir. Sema’nın diğer tahminleri için de benzer tartışmaların sürdürülmesinin ardından, Sema farklı bir sembol kullanımın gerekliliğini fark etmiştir. Ancak ilginç olan Mete’ nin de eşleme kavramını ilk olarak ‘=’ sembolü ile temsil etmesidir. Mete istenen eşleme için tek örnek olarak 17 tamsayısı ile düşünmeye başlamıştır. 17 ile 289 tamsayılarını eşlemek için ‘=’ sembolünü kullanmayı denemiştir. Dolayısı ile katılımcıların ‘=’ sembolünü kullanmak istemesi, ‘1=1’ eşlemesinin dikkate alınmasından daha farklı bir gerekçeye dayanmaktadır. Bölüm 5.2.’ de eşitlik kavramı için elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında, görme engelli bireylerin ‘=’ sembolü için ‘boşluk’ gibi farklı gösterimler kullanmasının ilerleyen kavramlar için yanılgılar meydana getirdiği bilinmektedir. Artık bu yanılgılar arasına ‘=’ sembolünün eşleme temsili olan ok işareti yerine kullanılması eklenebilir. Sonuçlarda görüleceği üzere katılımcılar küptaş kasa materyalinde elemanları eşlerken, eşlenen iki eleman arasında bir kutu boşluk bırakarak bu iki elemanın eşlendiğini göstermiştir. Bu gösterime dayanarak katılımcılar cebirsel temsilde de ‘2=4’ ya da ‘17=289’ gösterimlerine yer vermiş olabilirler.

Görme engelli bireylerin önbilgilerinin cebirsel düşünme süreçlerinde önemli roller aldığının kanıtlarından biri, kavram tanımları ele alındığında terimlere dair önbilgilerin yetersizliğidir. Örneğin birebir eşleme kavramı önbilgilerinde yer almadığı için katılımcılar terim olarak ifade etmekte güçlük yaşamıştır. Buna rağmen katılımcıların inceledikleri örnek durumlarda yer alan eşlemeyi betimleyebildikleri ve bir kümenin her elemanın diğer kümenin bir tek elemanı ile eşlendiğinin farkında oldukları belirlenmiştir. Örneğin, Mete birebir eşlemeyi ‘iki küme arasındaki bir eleman sadece bir elemanla eşlenebilir’ ve Sema ‘bir elemanı bir elemana eşleştirme’ ifadeleri ile açıklamıştır. Sema birebir eşlemeye bir özel ad vermesi gerektiğini düşündüğünde, ‘*y* eşlemesi’ ifadesini kullanmıştır. Sema’ nın önbilgilerinde bağıntı kavramına dair kavram bilgisi yer almasa da, böyle bir cebirsel gösterimi düşünmesi dikkat çekmektedir. Bu sonuç, Sema' nın cebirsel dile hakimiyetini işaret etmektedir.

Cebirsel söylemlerin ve sembollerin cebirsel düşünme süreçlerini şekillendirdiği araştırmanın önemli sonuçları arasında yer almaktadır. Nitekim matematiksel dilde söylem ve yazı dilindeki farklılıklardan dolayı öğretim oturumlarında, sembollerin kabartma yazıda ve Latin yazıda gösterimlerine yer verilmiştir. Görme engelli katılımcılar iğneli sayfa materyalinde görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı sembolleri incelerken, bu incelemelerin yetersiz kaldığı durumlar ile karşılaşılmıştır. Örneğin, '∈' sembolünü materyalin aparatında dokunarak hissedemedikleri belirlenmiştir. Dolayısı ile bir eldeki parmakların konumu ile '∈' sembolü temsil edilmiş ve katılımcıların fikir sahibi olması sağlanmıştır. Küme parantezini incelerken her iki katılımcının da parantezler içerisinde sadece ayraç kullanımına aşina oldukları söylenebilir. Çünkü katılımcıların küme temsilinde ve diğer matematiksel ifadelerde sadece ayraç ile karşılaştıkları belirlenmiştir. Ayrıca iğneli sayfa materyalinde çeşitli parantez kullanımlarını incelerken, aparatların materyal üzerinde sabit durmamasından dolayı güçlük yaşamışlardır. Bu nedenle katılımcıların öğretim oturumlarında kabartma çizgiler kullanılarak görme yetersizliğine sahip olmayan bireylerin kullandığı sembolleri algılamaları mümkün olmuştur. Ancak aparatların iğneler ile uyumlu olmaması ve %90 üzeri görme kaybı yaşayan bireylerin aparatlar üzerindeki sembolleri hissetmekte güçlük yaşaması, iğneli sayfa materyalinin önemli eksiklerinden olduğunu belirtmekte yarar vardır.

Matematikte somutlaştırmaya elverişli olan kavramlardan biri olan 'küme kavramı', öğretim oturumunda pergel, cetvel, kumanda, pil gibi çeşitli nesnelerin topluluğu olarak ele alınmıştır. Kümeyi temsil etmesi için de tahta tablalardan yararlanılmıştır. Görme engelli bireylerin bu temsil türü ile küme kavramını yapılandırmada güçlük çekmediği, ancak bazı yanılgıların ortaya çıkmasına neden olduğu belirlenmiştir. Bu yanılgıların ilki, görme engelli bireylerin verilen nesnelerin işlevlerine odaklanmalarıdır. Örneğin, katılımcıların çizim yapmaya yarayan pergel ve cetvel gibi nesneleri tablaya yerleştirerek küme oluşturmaları, kümenin elemanlarının ortak özelliklere sahip olması gerektiği algısını oluşturmaktadır. Buna ek olarak katılımcıların nesnelerin tabladaki konumuna göre kümeler oluşturmaya çabaladığı belirlenmiştir. Örneğin, verilen nesneleri kullanarak tahterevalli gibi şekiller oluşturdukları ya da pergeli açık veya kapalı konumda tablaya yerleştirerek farklı kümeler oluşturdukları bulgular arasında yer almıştır. Katılımcılar ile oluşturdukları kümelerde nesnelerin şeklinin ya da konumunun önemli olmadığı tartışılsa da, onların her yeni küme için nesnelerin şeklini ve konumunu vurguladıkları belirlenmiştir. Bu sonuç katılımcıların küme kavramını yapılandırmalarında yanılgılara neden olmamış, sadece katılımcıların eğlenerek öğrenmeleri için ortam sunmuştur.

Kümenin tabla ile temsilinde görme engelli bireylerin seçtikleri nesneler arasında 'çizim yaparken kullanabilme' ya da 'ölçüm yapabilme' gibi ortak özellikler veya nitelikler aramaları sadece yanılgılara neden olmamaktadır. Aksine nesnelere yüklenen bu nitelikler, kavramın öğrenilmesine katkı sunduğu söylenebilir. Çünkü bu durum nesneler topluluğu olan sezgisel tanımdan yola çıkarak, kümenin önermeler ile aksiyomatik tanımına katkı sunacağı düşünülmektedir. Katılımcılar kümenin aksiyomatik tanımında yer alan önermeyi '*şart*' olarak adlandırmıştır. Dolayısı ile katılımcıların küme oluştururken belirledikleri 'şart' ifadelerinden ortak özelliklerin belirlenmesi mümkün olacaktır. Nihayetinde ortaya konulan 'önerme' fikri ile aksiyomatik tanımı belirleyebilecekleri düşünülmektedir.

Küme kavramının tabla ile temsil edilmesinde ikinci güçlük, katılımcıların altküme ve evrensel küme kavramlarını kavrayışlarında ortaya çıkmıştır. Tabla temsillerinde en dikkat çeken bulgu, katılımcıların altkümeyi temsil eden küçük tablayı nesne olarak düşünmesidir. Bu düşünce aynı zamanda önemli bir öğrenmenin gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. Katılımcıların kümeyi '*nesneler topluluğu*' olarak kavradıklarını ve 'kümeye ait olma' fikri ile 'kümenin elemanı olma' kavramını edindikleri söylenebilir. Fakat söz konusu güçlük önemli bir yanılgıyı beraberinde getirmiştir. Bu temsilde Mete, altkümenin aynı zamanda evrensel kümenin bir elemanı olduğunu düşünmüştür. Bu yanılgı günlük hayattan verilen örneklerin incelenmesi ve altkümenin poşet ile temsil edilmesi ile giderilmiştir. Tablalar ile yaşanan güçlüklerden diğeri ise altküme ile evrensel kümeyi temsil eden tablaların ayırt edilememesidir. Katılımcılar ancak küçük tablanın kenarının, altküme ve evrensel küme arasında 'sınır' olarak belirtilmesi ile nesnelerin hangi kümeye ait olduğunu belirleyebilmiştir. Fakat bu durum görme yetersizliği olmayan bireyler için de benzerlik göstermektedir. Görme yetersizliği olmayan bireyler de Venn şeması temsilinde kümeleri birbirinden ayırmak için geometrik şekillerden yararlanmaktadır.

Kümelerin elemanlarını belirlerken görme engelli bireylerin tabla üzerine yerleştirdiği nesnelerden, zihninde konumunu hatırlayabildiği elemanların ait olduğu kümeyi söylemesi beklenmelidir. Çünkü bireylerin bazı nesneler için tekrar tablaya dokunması ve nesneyi arayarak tablalar üzerindeki konumunu teyit etmesi muhtemeldir. Bu sonucu destekleyen Şekil 136' da Mete' nin iki kümeyi ayıran sınıra eleman yerleştirdiği gözlenmiştir. Benzer şekilde Mete masa ile evrensel kümeyi temsil eden tablayı birbirinden ayırt etmede anlık güçlükler yaşamıştır. İlk dokunduğunda tablayı algılayamasa da ellerini tablanın üzerinde gezdirerek fark edebilmiştir. Bu durum görme engelli bireylerin parça-bütün ilişkisi içerisinde nesneleri algılamasından kaynaklanabilir. Sema ise tabla temsilinde ‘altkümenin her elemanının aynı zamanda evrensel kümenin de elemanı’ olduğunu algılayamamıştır. Bu nedenle altküme temsili olan tablanın evrensel küme temsili olan tabladan bağımsız olduğunu ve altkümenin evrensel küme tarafından kapsandığını, altkümede yer alan elemanların büyük tabladaki konumu incelettirilerek fark ettirilmesi yararlı olacaktır. Altküme ve evrensel küme arasındaki ilişkinin kavranmasında, görme engelli bireyi güçlüğe iten değişkenlerden bir diğeri yine semboller ve söylemler üzerinedir. Görme engelli bireyin ‘A kümesi E’ nin altkümesidir’ ifadesine dayanarak incelenen günlük hayat örneklerinde altküme ve evrensel kümeyi belirlemeye çabalaması öğretim oturumunun bir parçasıdır. Bu aşamada Sema tartışılan günlük hayattan örnekler ile evrensel kümeyi zihninde yapılandırdığında ‘üst küme’ olarak adlandırmıştır. Sema’ nın terim olarak evrensel kümeye ilişkin önbilgisi olmadığından, betimleme amaçlı ‘üst küme’ açıklaması görme engelli bireylerin kendilerine ait kısaltmalar ya da ifadeler kullanmalarına güzel bir örnek teşkil etmektedir. Sembol gösterimlerinde yer alan güçlüklerle ise katılımcılar A pozitif çift tamsayılar kümesi olmak üzere ‘$12 \in A$’ gösterimini yazmaya çabalarken karşılaşılmıştır. Katılımcılar kümenin bir elemanının bu kümeye ait olduğunu cebirsel olarak ifade etmek istediklerinde, bir sembol kullanmaları gerektiğini fark edebilmiştir. Bu nedenle önbilgilerinde yer almasa da katılımcıların cebirsel düşünme süreçlerinde sembol kullanımına aşina oldukları söylenebilir. Fakat katılımcılar ‘12 elemanıdır A kümesi’ betimlemesini yorumlamakta güçlük yaşamışlardır. Örneğin Mete 12, A kümesinin bir elemanı olduğu için liste yöntemi ile küme temsili bilgisinden yola çıkarak, ‘$\{12\} \in A$’ şeklinde küme parantezi kullanılması gerektiğini düşünmüştür. Bu sonuç elbette Mete’ nin daha önce elemanı ve elemanı değil sembolleri ile çalışmaya aşina olmadığından kaynaklanmaktadır. Ancak dikkat edilirse ‘ait olma’ ve ‘kapsama’ ifadeleri söylemde olduğu gibi matematiksel sembolik dilde de farklılık içermektedir (Bagni, 2006). ‘$x \in I$’ ait olma iken, ‘$\{x\} \subseteq I$’ kapsamayı sembolize etmektedir. Bagni’ nin (2006) küme temsili için ileri sürdüğü ‘semiyotik’ yaklaşımda olduğu gibi burada da sözel, sembolik ve görsel bileşenlerin bir arada yer aldığı söylenebilir. Venn şeması ile küme temsilini ele alan Bagni’ nin (2006) temsil yaklaşımını, söz konusu sonuçlara dayanarak görme engelli bireyler için Venn şeması ve liste yöntemi gibi tüm temsil türlerine genelleyebiliriz. Benzer şekilde Bagni (2006) de bu genellemenin görsel temsil türlerinin tümünde işlevsel olabileceğini iddia etmiştir. Görme yetersizliği olan bireyler için sembol, metin ya da şekil içeren tüm temsillerin görsel ve dokunsal unsurlar barındırdığı düşünüldüğünde, semiyotik yaklaşımın görme engelli bireyler için her temsil türüne genellenmesi mümkün görünmektedir.

Tabla temsili ile yaşanılan güçlükler sonucunda tasarlanan ek oturumda, altkümeyi temsil etmesi için ‘poşet’ kullanılmıştır. Evrensel küme ise üzerinde çalışılan masa ile temsil edilmiştir. Evrensel kümenin masa ile temsili, tablalar ile çalışırken Mete’ nin “*[...] aslında evrensel kümeyi masa da alabilirdik*” fikrinden esinlenerek kararlaştırılmıştır. Bu temsilde katılımcıların nesneleri poşetin içine koyması, seçtiği elemanları hatırlamalarını ve altkümeyi algılamalarını kolaylaştırmıştır. Altküme ve evrensel küme kavramlarını anlamalarını kolaylaştıran bir diğer unsur da ‘bir yıl içindeki ayların kümesi’ veya ‘araba markalarının kümesi’ gibi günlük hayattan verilen örneklerdir. Ancak bu temsil ve örneklerden önce, tabla ile temsil edilen küme örnekleri ile çalışılmasının da, katılımcıların altkümeyi kavramalarında önemli rolü olduğunu söyleyebiliriz. Zira, Mete’ nin altküme ve evrensel küme kavramları arasında ‘altkümenin her elemanının aynı zamanda evrensel kümenin de elemanı olduğu’ fikrini tabla temsilinde edindiği belirlenmiştir. Bağlama göre evrensel kümeyi ‘daha geniş olan küme’ şeklinde açıklamaları ise günlük hayattan örnekler yardımı ile kazanılmıştır.

Sonuç olarak görme engelli bireylerin liste yönteminde ve tabla temsilinde güçlükler yaşaması şaşırtıcı bir sonuç değildir. Cahill vd. (1996) küme kavramında görme engelli bireylerin öğrenmede en çok zorlandıkları kavramların küme temsilleri olduğunu vurgulamıştır. Bu araştırmada karşılaşılan güçlüklerin tercih edilen destek eğitim araçlarından kaynaklandığını söyleyebiliriz. Ancak poşet gibi farklı erişilebilir somut nesneler ile desteklenen ek öğretim oturumları ve söylemler ile desteklenen sembol kullanımları, görme yetersizliği olan bireyler için güçlükleri ortadan kaldıran önemli uygulamalar olmuştur.

Kullanılan destek eğitim araçlarının kavram öğrenme ve temsil türleri üzerindeki rolüne ilişkin önemli sonuçlardan biri tablo temsilinde ortaya çıkmıştır. Öğretim oturumlarında eşlemenin ilk kez tablo ile temsil edildiği ‘bulut tohumlama sayısı’ ve ‘yağış miktarı’ örneğinde, Sema tabloyu okumakta ve yorumlamakta güçlük yaşamamıştır. Çünkü dikey konumlandırılan tablodaki eşleme temsilini Sema, daha önce onun küptaş kasada Venn şeması temsili ile gerçekleştirdiği eşlemeye benzetmiştir. Ayrıca dikey konumda sunulan ilk tabloyu incelerken, Sema’ nın öncelikle kümelerin adlarını okuması ve doğrudan kümeleri ve elemanları belirleyerek alt alta satırları okuması kayda değerdir. Mete, daha önce benzer bir gösterim düşünmediği için ilk tablo inceleme tecrübesinde kümeleri ve eşlemeleri belirlemede güçlük yaşamıştır. Bu sonuçlar görme engelli bireylerin küptaş kasa materyalini kullanma becerilerine göre tablo okumada başarılı olduklarını ortaya koymaktadır. Özellikle dikey konumda sunulan tabloları anlama ve yorumlama becerilerinin daha kuvvetli olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla eşlemenin tablo ile temsilinde görme engelli bireylerin kavrayışlarını, genel olarak onların kullandıkları destek eğitim araçları ile ilişkilendirmek mümkündür.

Görme engelli bireylerin 'matematikte ilişki kurma' ve daha da önemlisi aritmetik bilgilerine dair kavram bilgilerinde eksiklikleri yer almaktadır. Örneğin; Sema ve Mete elemanları arasında eşleme ile sunulan günlük hayattan küme örnekleri ya da sayı kümeleri için her bir kümenin kendi elemanları arasındaki ilişkiyi belirleyebilmiştir. Ancak her iki katılımcının da, bu iki kümenin elemanları arasındaki eşlemenin bağlı olduğu ilişkiyi tespit etmekte zorlandığı belirlenmiştir. Katılımcılar elemanları yıllardan oluşan bir kümenin elemanları arasındaki üçer artışını ya da işsiz nüfus sayısını eleman kabul eden kümenin elemanlarının iki yüz biner artışını belirleyebilmişlerdir. Ancak Sema' nın ilk örnekte elemanların 'üçer üçer arttığını' ifade edemediği tespit edilmiştir. Ayrıca Sema, her örnekte artma veya azalma ilişkisine odaklandığı ve nicelikler arasında bunlardan başka farklı bir ilişkinin olabileceğini düşünmediği belirlenmiştir. Mete ise iki kümenin elemanları arasındaki ilişki sorulduğunda, 'ilişki' kavramını 'birebir eşleme' olarak düşünmüştür. Mete' nin incelediği eşleme bir birebir eşleme olduğu için Mete bu yorumu yapmış olabilir. Ancak burada esas olan Mete' nin ilişki kavramını yorumlayamamış olmasıdır. Bu nedenle bu araştırmadaki öğretim oturumlarında sıklıkla ele alınan ve ek adımlar tasarlanan hedefler arasında, 'iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi tespit edebilme ve ifade edebilme' yer almıştır.

Dikkat çeken sonuçlar arasında görme engelli bireylerin cebirsel temsili ifade etmede yanılgıları yer almaktadır. İki kümenin elemanları arasında eşlemeye dair verilen örnekler üzerinden cebirsel olarak genellemeyi temsil etmede başarısız oldukları tespit edilmiştir. Örneğin Mete, bu eşlemelerde bilinmeyenin olmadığını ve dolayısı ile cebirsel olarak ifade edilmeyeceğini iddia etmiştir. İlerleyen öğretim oturumlarında ele alınan 'bir kümenin elemanlarını temsil eden değişken kavramı' ile Mete' nin yanılgıları giderilmiştir. Ancak Mete' nin iki küme arasındaki ilişkiyi cebirsel temsil ile ifade edebilmesi için tek öğretim oturumu yeterli olmamıştır. Bu nedenle bu öğretim oturumlarında öğrenci düşünmesi için söylem olarak iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirtmeleri önem arz etmektedir. Matematiksel söylemler incelendiğinde ise görme engelli bireylerin pek çok yanılgıları gün yüzüne çıkmıştır. Örneğin Sema, aralarında 3 artış miktarı olan yıllar kümesinin elemanları arasındaki ilişkiyi "*iki binler aynı [...] üç üç artmış*" gibi ifadeleri ile belirtmiştir. Mete ise belirli bir artma ya da azalma ilişkisi belirleyemediğinde, kümenin elemanları arasındaki ilişkinin 'standart' olmadığını belirtmiştir. Katılımcıların öncelikle ilişki kavramından ne anlaması gerektiği, daha sonra elemanlar arasındaki ilişkiyi nasıl belirleyebileceği ve bu ilişkinin artma ve azalma ilişkileri ile sınırlı olmadığı gibi hedefler silsilesi ile öğrenme yol haritaları şekillenmiştir. Sonuç olarak kavram bilgilerindeki eksikliklerin yanı sıra, görme engelli bireylerin matematiksel söylemlerden ve dil kullanımından uzak olduklarını söylemek mümkündür.

5.4.2. Doğru, Doğru Parçası, Sayı Doğrusu (Cetvelleme) ve Koordinat Sistemi Kavramları İçin Cebirsel Düşünme Süreçlerine İlişkin Sonuçlar

Öğrenen için görme duyusuna bağlı olmaksızın matematikte soyut kavramlar arasında yer alan doğru kavramının, bireyin hayal gücü ile desteklenen temsil çeşitleri ile yapılandırıldığı söylenebilir. Doğru kavramı için bu temsiller arasında 'düz çizgi' ve 'yol' bireylerin aşina olduğu temsillerdir. Nitekim Sema ve Mete de önbilgilerinde yer alan düz çizgi temsili ile doğru kavramını yapılandırmıştır. Sema' nın önbilgilerinde doğru ve doğru parçası kavramlarına ilişkin kavram bilgisi yer almazken, Mete' nin doğru ve ışın kavramlarını birbirinin yerine kullandığı tespit edilmiştir. Bu nedenle günlük hayattan doğru temsilleri düz çizgi kavramı ile ilişkilendirilerek tartışma yapılandırılmıştır. Düz çizgi kavramını parmakları ile masanın üzerine çizdikleri şekil ile gösteren katılımcılardan, doğru kavramını Sema yol ile tasvir ederken Mete demiryolu ile tasvir etmiştir. Ayrıca doğru temsilinde öğrencilerin sahip olduğu prototipin rolünden bahsetmekte yarar vardır. Örneğin doğru kavramının ip ve kablo ile temsilinde, Sema yatay eksene paralel bir doğru oluştururken, Mete' nin düşey eksene paralel bir doğru temsili oluşturduğu dikkat çekmektedir. Öğretim oturumu süresince katılımcıların çizdikleri doğru temsillerinin doğrultularını değiştirmemeleri de önemli bir sonuçtur. Katılımcılar ile doğrultu kavramı tartışıldıktan sonra, katılımcıların etkinlik adımlarında yer alan doğrular için ilk doğru temsillerinin doğrultusuna paralel olarak doğru çizmeye devam ettikleri gözlenmiştir. Öğrenenin aklına ilk gelen bu temsillerin, Yu, Barret ve Presmeg' e (2009) göre kavramlar için prototiplerin, Sema ve Mete için farklılık arz ettiğini söyleyebiliriz. Ancak bu tercihlere neden olan değişkenler Yu vd.' e (2009) göre bireylerin sıklıkla maruz kaldığı temsillere aşina olmasına ya da görsel olarak daha kullanışlı olduğunu düşünmelerine bağlamaktadır. Böylece katılımcılar doğrultuları farklı olan doğrular üzerinden fikir yürütmeleri gerektiğinde de başarılı oldukları göz önüne alındığında, doğrultu tercihlerinin yalnızca ilk prototiplerine bağlı kalmaları olarak yorumlanabilir. Bu tercihleri ile katılımcıların kendilerine yöneltilen sorulara daha rahat cevaplar verdikleri ve fikir yürüttükleri tespit edilmiştir.

Doğru kavramı ele alınırken öğretim oturumlarında kullanılan somut materyallerin öğrenci düşünmelerinde 'doğru' temsili oluşturmada başarısız olduğu tespit edilmiştir. Örneğin, doğru kavramı için ip ve kablo temsilleri ile çalışırken Sema, dilediği kadar sündürebileceği materyaller için 'uzunluk' kavramının ele alındığını düşünmüştür. Ancak 'düz bir çizginin' temsil ettiği matematiksel kavram sorgulandığında, Sema 'doğru' kavramının incelendiğini fark etmiştir. Dolayısıyla öğrenenin düz çizgi kavramını bilmesi, doğru kavramını öğrenmesine katkı sunmaktadır. Bu sonuca dayanarak 'düz çizgi', 'doğru' ve 'doğru temsilleri' sıralaması ile kavram öğrenmenin gerçekleştiği söylenebilir. Diğer taraftan somut materyallerin (ip gibi) önbilgiler (düz çizgi gibi) ile desteklenmesinin gerektiğini söyleyebiliriz. Fakat doğru temsili için kullanılan ip, kablo ve anten destek eğitim araçlarının her iki katılımcı için farklı katkılar sunduğu belirlenmiştir. Katılımcılar genel olarak iple çalışmayı tercih etmiş olsa da öğretim oturumlarında katılımcıların farklı materyal için farklı algılarının olduğu söylenebilir. Bu farklılıklardan ilki doğrunun ip ile temsilinde her iki katılımcının da beklenmeyen düşünmeleri ortaya çıkmıştır. Örneğin; Sema ipin bir ucunu bir eli ile tutup, ipin diğer ucuna doğru sündürme eylemini gerçekleştirdiği için '*uç*' kavramını doğru kavramı ile ilişkilendirmiştir. Ancak sürpriz bir şekilde Sema, doğru kavramı ile ışın kavramını ya da uç noktaları ile tanımlanan doğru parçası kavramını karıştırmamıştır. Aksine ipin uç noktasından tutarak sündürmenin mümkün olması, doğru temsilinde 'ok' gösteriminin yapılandırılmasına katkı sunmuştur. Söz konusu yanılgıların meydana gelmediğinin bir başka kanıtı, Sema' nın bir hafta sonraki oturumda *"[...] doğrunun uçları yok ki!*" söylemine yer vermesidir. Dolayısı ile kullanılan destek eğitim araçlarının kavram yanılgısına sebep olmaması için bu araçları kullanırken söylemler ve diğer temsil türleri ile desteklenmesi ve kavram tanımının detaylı olarak ele alınmasının önemli olduğu söylenebilir.

Öğretim uygulamalarında kullanılan somut materyallerin kavram öğrenmedeki rolüne dair bir diğer örnek, Mete' nin ipi veya kabloyu düz çizgi temsilinde sündürmek yerine, kolunu masa boyunca uzatarak çizginin devam ettiğini temsil etme çabasıdır. Bu temsil Mete' nin düz çizgiyi gergin bir iple temsil etme çabası olabilir. Ancak burada ipin bir ucunun sabit tutulması, ışın ve doğru kavramları arasında bir kavram yanılgısına sebep olabilir. Nitekim önbilgilerin belirlendiği görüşmede Mete' nin ışın ve doğru kavramlarını karıştırdığı belirlenmişti. Bu nedenle Mete' nin bu temsili, onun sahip olduğu yanılgının bir yansıması olabilir. Öğretim oturumlarında söz konusu yanılgının oluşmasının veya sürdürülmesinin önüne geçmek için anten temsili ele alınmıştır. Anten temsilinin doğru ve ışın kavramları arasındaki yanılgıyı önlediği belirlenmiştir. Fakat anten destek eğitim aracının kavram öğrenmede başka güçlüklere neden olabileceğini belirtmekte fayda vardır. Çünkü Mete, anteni dilediği kadar sündüremediği için bir doğru parçası temsili olduğunu belirtmiştir. Buna bağlı olarak bireyin zihninde antenin sündürme eyleminin devam ettiğini düşünememesi kavram yanılgılarına neden olabilir. Aynı zamanda Mete doğru parçası iddiasını antenin uçlarındaki boncuklar ile uç noktası fikrini temsil ederek desteklemiştir. Bu temsil ise Mete' nin doğrunun tahtalar ile temsilindeki okları uç nokta olarak düşünmesine neden olmuştur. Mete' nin ileri sürdüğü fikirlerden dolayı kavram yanılgısına düşmesini engellemek için antenin dilediği zaman sündürebileceğini hayal etmesi, doğrunun uç noktaların olmadığı ve okların sündürme eylemini temsil ettiğini düşünmesi açıklamaları yeterli olmuştur. Bu sonuç da destek eğitim materyallerinin kullanıldığı öğretim uygulamalarında söylemlerin önemine işaret etmektedir. Öte yandan bu olumsuzlukların yanında, anten materyali Mete' nin doğru ve doğru parçası üzerindeki noktaları fark etmesine katkı sunmuştur. Mete uç nokta fikrini tartışma sürecinde, antenin her bir parçasının birer doğru parçası temsili olduğunu ve bu doğru parçalarının uç noktalarının antenin temsil ettiği doğrunun üzerinde yer aldığını fark etmiştir. Dolayısı ile Mete, doğrunun ve doğru parçasının noktalar kümesi olduğunu belirtmiştir.

Cebirsel düşünme süreçleri ve öğrenme yol haritaları arasındaki ilişkiyi işaret eden en güzel örneklerden biri doğru ve doğru parçası kavramlarına dair hedeflerin ele alınmasında ortaya çıkmıştır. Doğru ve doğru parçası kavramlarını öğrenirken katılımcıların bu kavramlardan hangisini daha önce kavradığının önemli olduğunu söyleyebiliriz. Doğru veya doğru parçası kavramlarından herhangi birine dair bilginin diğer kavramı yapılandırırken öğrenci düşünmelerinde rol aldığı belirlenmiştir. Örneğin, Mete doğru kavramını '*istenildiği kadar sündürülebilen düz çizgi*' olarak kavradığından, kabartma yazı tabletinde de doğruyu çizerken tabletteki satırın sonuna kadar düz çizgi çizmiştir. Doğrunun istenildiği kadar sündürülebileceğini belirtmek için okları da çizmiştir. Ancak Mete doğru temsiline göre daha kısa bir düz çizgi çizerek oluşturduğu doğru parçası temsilinde de uç noktalara ok çizmiştir. Bu durum Mete' nin tahta ile doğru temsilinde okları uç nokta olarak düşünmesi ile paralellik göstermektedir. Mete' nin doğru parçasına ait kavramları genellediği bir diğer durum, doğrunun adlandırılmasında '*lm*' gibi küçük harfler kullanmasıdır. Mete' nin yaşadığı bu güçlükler doğru parçası kavramını doğru kavramından önce kavramasından kaynaklanmış olabilir. Çünkü Mete' nin sıklıkla doğru temsillerini incelerken doğru parçası kavramı ile karşılaştırma yaptığı belirlenmiştir. Bu karşılaştırmalara verilebilecek en iyi örnekler Mete' nin uç nokta ve ok kavramlarının karşılaştırması veya anten ve beyaz baston temsillerinin öncelikle doğru parçası temsili ile karşılaştırmasıdır. Dolayısı ile kullanılan anten destek eğitim aracının somut olarak doğru parçası temsili iken hayali olarak doğru temsili olması yanılgının sebebi olabilir. Mete' nin doğru parçasını doğrudan daha kısa bir çizgi ile temsil etme çabası, Öksüz' ün (2010) belirttiği gibi 'doğrunun uzunluğu' olduğuna dair bir kavram yanılgısının göstergesi de olabilir. Ancak böyle bir yanılgıyı destekleyen Mete ile gerçekleştirilen öğretim oturumlarında farklı bir bulgudan bahsetmek mümkün değildir.

Kavramların öğrenilmesinde öğrenme yol haritasındaki sıralamanın önemine dair bir diğer sonuç, doğru kavramını daha önce yapılandıran bireyin kavram öğrenmede ilerleyişinin daha başarılı olmasıdır. Bu sonucun ayrıntılı ele alınması gerekirse, Sema' nın doğru tanımına dair kavrayışını incelemek yeterli olacaktır. Tahta materyali ile görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için doğru temsilini incelerken, Sema bu temsilde de sündürme eylemini gerçekleştirmek istemiştir. Bu eylem Sema' nın doğrunun tanımını kavradığının göstergesidir. Böylece doğru temsili tahta materyalde yer alan okların sündürme eylemini temsil ettiğini açıklamaya fırsat oluşmuştur. Dolayısı ile Mete' nin aksine doğru kavramını öncelikle yapılandıran Sema' nın kavram öğrenmesinin daha başarılı ilerlediğini söyleyebiliriz. Sema' nın öğrenmedeki ilerleyişi takip edildiğinde, doğru parçasını sündürme eylemini baz alarak öğrendiği dikkat çekmektedir. Her ne kadar doğru parçasını 'dar çizgi' olarak tanımlamış olsa da, Sema' nın bu söylemi ile 'parça' kelimesini anlatmak istediği belirlenmiştir.

Doğru parçası kavramının tartışılmasına katkı sunan bir diğer destek eğitim aracı beyaz bastondur. Örneğin; Sema ip temsili ile yapılandırdığı 'düz çizgi' kavramından dolayı beyaz bastonun düz bir çizgiyi temsil etmeyeceğini düşünmüştür. Nihayetinde Sema beyaz bastonu düz çizgi temsili olarak kabul ettiğinde ise doğru parçalarının bileşkesi kavramını tartışmaya başlamıştır. Doğru parçasının ip ile temsil edilmesinin, doğru parçası kavramına dair alt kavramları algılamaya ve kavramaya katkı sunduğu belirlenmiştir. Sema doğru parçasını temsil ederken ip parçasının uç noktalarını işaret parmağı ile sabit tutmuş ve germiştir (bkz. Şekil 65 ve Şekil 66). Böylece doğru parçası için uç noktaların fark edilmesinde ve algılanmasında ip parçası önemli bir araç olmuştur. Uç noktalar fikrinin kavranması doğru parçasının adlandırılmasına katkı sunmuştur. Bu hiyerarşik ilerleme doğru parçası kavramının bütün olarak öğrenilmesi sürecini betimlediği söylenebilir.

Her iki katılımcı da doğru parçası kavramı tartışılırken, doğru parçalarının birleşiminin doğru veya doğru parçası oluşturduğunu merak etmiştir. Katılımcıların ileri sürdüğü bu fikrin beyaz baston temsilinin incelenmesinin sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Beyaz bastonun destek eğitim aracı olarak kullanılması ise 'sonlu sayıda doğru parçasının birleşiminin yine bir doğru parçası oluşturduğu' fikrine katkı sunmuştur. Doğru parçalarının uç noktalarından birleşiminin tartışıldığı bir diğer uygulama ise, okul ve ev arasındaki yolda belirlenen uç noktalara göre doğru parçası temsillerinin oluşturulmasıdır. Söz konusu uygulamalar öğrenenin doğru parçası kavramını 'uç noktalar ile belirli doğrunun bir parçası' kavrayışının yanı sıra, 'noktalar kümesi' şeklinde yapılandırmasına fırsat sunmaktadır. Örneğin; bu tartışmalar sonucunda Sema iki doğru parçasının birleşimi ile oluşan kavramı merak etmiş ve ip temsili ile sunulan iki doğru parçasını uç uca ekleyerek yine bir doğru parçası elde edildiğini belirlemiştir. Burada doğru parçalarının uç noktaları ve doğru parçalarının birleşim noktalarından dolayı, doğru parçası üzerindeki noktaların fark edilmesi mümkün olmuştur. Katılımcıları doğru parçasını bir noktalar kümesi olarak düşünmeye sevk eden diğer uygulama, kabartma yazıda doğru ve doğru parçası temsillerini çizerken ortaya çıkmıştır. Örneğin; Sema tablet ile doğru ve doğru parçası temsillerini çizerken, kabartma yazıda '1-4' kodunu kullanmıştır. Böylece Sema yan yana sıralanmış noktalar ile düz bir çizgi çizmiş ve burada noktalar arasına boşluk koymasının gerekliliğini tartışmıştır. Nihayetinde Sema, düz bir çizgi çizmesi gerektiğini belirterek noktalar arasına boşluk koyma fikrinden vazgeçmiştir. Dolayısı ile doğru parçası çizerken kullanılan materyallerin, öğreneni doğru parçasını bir noktalar kümesi olarak düşünmeye sevk ettiğini söyleyebiliriz.

Kavram öğrenirken kavramları, temsilleri ya da çizim ve somut materyaller gibi görsel unsurları betimlerken görme engelli bireylerin söylemlerinin (betimlemede kullandıkları kelimeler vb) kavrayışlarında rol aldığı belirlenmiştir. Örneğin; Mete' nin doğru parçasının uç noktalarını 'başlangıç ve son' ifadeleri ile betimlemişi, onun doğru kavramını '*başlangıcı ve sonu belli olmayan [...]*' ifadesi ile tanımlamasına neden olmuştur. Başlangıç ve bitiş noktası terimleri doğru parçası tanımlarında literatürde de yer aldığından (Doğan, 2013, s.203), doğru ve doğru parçası kavramları incelenirken uç noktası fikrinin vurgulanmasının önemi ortaya çıkmaktadır. Öksüz (2010) özel yetenekli öğrencilerin kağıt üzerindeki konumuna göre, doğru üzerindeki noktaların soldan sağa doğru ilk ve son işaretli noktalar ile doğruyu adlandırdıklarına dikkat çekmektedir. Bu nedenle Mete' nin doğru parçasının uç noktalarını 'başlangıç ve son' olarak adlandırmasını, öğrenenin soldan sağa doğru işaretli noktalara odaklanmasına dayandırabiliriz. Mete kavramları öğrenirken öncelikle doğru parçasına odaklandığı için doğru kavramını tanımlarken de doğru parçası kavramından yola çıktığı söylenebilir. Mete' nin bu genellemesi önbilgilerin öğrenme yol haritasına etkisi (Li, 2006; Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004) ile açıklanabilir.

Önbilginin öğrenme yol haritasının şekillenmesine katkısı bilinen bir gerçektir. Ancak cebirsel düşünme olarak öğrenme yol haritası göz önüne alındığında önbilginin cebirsel düşünme süreçlerindeki rolü tartışmaya değerdir. Sonuçlar incelendiğinde ise öğretim oturumuna başlarken katılımcıların 'doğrultu' kavramına ilişkin önbilgisi olmadığından, düşey veya yatay eksene paralel doğruları 'yamuk', 'eğri' veya 'çapraz çizgi' olarak tanımladıkları belirlenmiştir. Doğru kavramının incelenmesinden sonra, öğretim oturumunun sonunda her iki katılımcının da eğri kavramını ip yardımıyla temsil edebildiği ve açıkladığı belirlenmiştir. Bu açıklamaların ardından doğru kavramının tanımını düşünmeleri istendiğinde, her iki katılımcı da doğrultusu farklı olan doğru temsillerinin birer doğru olduğunu fark etmiştir. Doğrultusu yatay ve düşey eksene paralel olmayan doğruların yamuk, eğri ya da çapraz terimleri ile nitelendirilmesi, görme engelli bireylere görsel nesneleri betimlerken yardımcı bireylerin söylemlerinden kaynaklanmış olabilir. Başka bir yorum olarak günlük hayatta kullanılan söylemler de katılımcıların bu yanılgıyı yaşamasına neden olmuş olabilir. Ancak burada en önemli rol doğru ve doğrultu kavramları için bireyin kavram bilgisindeki eksikliğe aittir. Nitekim görme engelli bireyin kavramları veya nesneleri tanımlarken ya da betimlerken söylemlerinde bireyin günlük hayat tecrübelerinin ve kavram bilgisinin rol oynadığı bilinmektedir (Ely vd., 2006).

Doğru ve doğru parçası kavramlarına ilişkin önemli noktalardan biri de çizim yaparak temsil etmedir. Görme engelli bireylerin tecrübeden yoksun kaldığı durumlardan biri olarak çizim yapmaya dair hedeflerden söz etmek mümkündür. Nitekim Mete, rulet ve cetvel ile doğru çizmek istemiştir. Her ne kadar doğrultu kavramı tartışılmış olsa da Mete yine düşey eksene paralel bir doğru çizmiştir. Fakat bu kez Mete' nin doğrunun doğrultusunu belirlemedeki kriteri daha rahat çizim yapabilmek olmuştur. Çünkü Mete rulet ve cetvel kullanmaya alışkın olmadığı için doğru çizmekte zorlanmıştır. Mete kağıt üzerine düz bir çizgi çizdiğini hissedemediğini belirterek sık sık çizgiyi kontrol etmiş ve ruleti tuttuğu eli ile kağıdı hissetmediği için masaya doğru çizmeye devam etmiştir. Dolayısı ile görme engelli bireylerin çizim için destek eğitim araçlarını kullanmaya dair pratiklerinin olmadığını söyleyebiliriz. Klingenberg (2007) görme engelli bireylerin görme yetersizliğine sahip olmayan akranlarına kıyasla çizim yapma becerilerinin gelişmesinde güçlüklerin meydana geleceğini iddia etse de, Horzum (2013) farklı şekillerde (doğrultularda vb.) sunulan geometrik nesneleri çizmekte ve anlamlandırmakta güçlük çekmediklerini ortaya koymuştur. Benzer şekilde Sema ve Mete de çeşitli doğrultularda doğru temsilleri ile çalışabildiği göz önüne alındığında, Mete' nin doğru çizimindeki güçlük yaşamasını deneyim eksikliği olarak yorumlayabiliriz.

Cetvel için birim kavramının önemi öğrencilerin önbilgilerine dayanan bir diğer sonuç olarak belirlenmiştir. Dahası Sema ve Mete için farklılık arz eden sonuçlardan biri olarak cetvel için birim kavramının incelenmesi ve cetvel ile ölçüm yapabilme şeklinde tespit edilmiştir. Örneğin Mete, cetvelin birimi sorgulandığında cm olduğunu belirtip 5 cm aralıklarla cetvellendiğini ve tamsayılar ile eşlendiğini fark edebilmiştir. Birim kavramının genellik özelliğini kavrayan Sema ise, verilen kablonun uzunluğunu cetvel ile ölçmeye karar vermiştir. Öncelikle cetveli inceleyen Sema' nın cetvelin üzerindeki standart birimleri bilmemesinin ötesinde, daha önce hiç cetvel ile ölçüm yapmadığı belirlenmiştir. Ancak öğretim oturumunda birim kavramını öğrenen Sema cetveli incelerken, cetvellemede birimin 5 cm olduğuna ve 0 noktasından başladığına dikkat etmiştir. İlk kez cetvel ile kablonun uzunluğunu ölçen Sema' nın daha sonra kolaylıkla cetvel kullanması, daha önce cetvel ile ölçüm yapma tecrübesinin olmadığının kanıtıdır. Bir diğer kanıt ise Sema, ip ile temsil edilen sayı doğrusu örneğinde tamsayıları 5 cm aralıklardaki noktalar ile eşlerken ortaya çıkmıştır. Sema, 0 referans noktasından 5 cm ölçerek 1 noktasını belirlemiştir. Ancak cetveli kaldırmadan 5 cm daha ölçerek 2 noktasını belirlemeye çalışmıştır. Dolayısı ile 0 noktasından 10 cm uzaklığı belirleyemediği tespit edilmiştir. Dikkat çeken bir diğer sonuç ise kabartma yazı ile cetvellenmiş olan cetvelin, görme yetersizliği olmayan bireyler için tasarlanan cetvellerin aksine, düşey eksene paralel konumlandırılarak nesnelerin uzunluğunu belirlemenin daha kolay olmasıdır. Böylece kabartma yazının cetvel üzerindeki konumlandırılışı ölçümün nasıl yapılacağını etkilediği söylenebilir. Ancak yatay ya da düşey konumlandırmanın görme engelli bireyler için herhangi bir kolaylık sağlayacağı noktasında yeterli bulgu elde edilmemiştir.

Önbilgilerin ve kullanılan destek eğitim aracının öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerindeki rolüne ilişkin dikkat çeken bir diğer örnek uzunluk kavramı ile alındığında ortaya çıkmıştır. Katılımcılar uzunluk kavramının nesnelerin bir niteliği olduğunun farkındadır, ancak birim kavramına ilişkin farklı önbilgilere sahip olduklarından nesnelerin uzunluğunu belirlemede farklı stratejiler kullanmışlardır. Bu farklılıklar arasında en dikkat çeken sonuç Sema birim belirlerken genellik ve kullanışlılık özelliğini (Erişti, 2011) göz önüne almazken, Mete’ nin ölçüde standart bir birim arayışında olmasıdır. Daha detaylı ele alındığında Sema uzunluk ölçü birimi kavramına sahip olmadığından bir nesnenin uzunluğunu sadece onunla eşit uzunluktaki başka bir nesne ile ölçülebileceğini düşünmüştür. Bu durum Sema’ ya birbiri ile yan yana getirerek karşılaştırılabilecek ebatlarda çeşitli uzunluklarda çubukların ve kablo parçalarının sunulmasından kaynaklanmış olabilir. Nitekim Sema bir bahçe çitinin uzunluğunu belirlemesi gerektiğinde metre uzunluk ölçü birimine ihtiyaç duymuştur. Verilen bir kablo parçasının uzunluğunu belirlerken birim kavramının gerekliliğini açıklayabilen Sema, genellik özelliğine göre ölçü birimi kullanarak kablo satın alabileceğini fark etmiştir. Böylece belirlediği diğer çubuklara göre kısa bir birim uzunluktaki çubukla kablonun uzunluğunu ölçmüştür. Ancak çubuklar küçüldükçe uç uca eklemekte güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Mete ise ölçü birimi kavramını bildiği için standart bir ölçüm için metre birimini kullanmayı tercih ettiğinden, Mete’ nin birim kavramının genellik ve kullanışlılık özelliklerinin farkında olduğunu söyleyebiliriz. Birim kavramını terim olarak ifade etmese de her ölçümde aynı ölçü biriminin kullanılması gerektiğini ifade etmiş ve metre ile cm arasındaki ilişkiyi açıklamaya çalışmıştır. Dolayısı ile Mete, farklı ölçümlerde ölçüm sonucunun değişmemesinin ölçü birimi ile ilgili olduğunun farkındadır. Mete birim olarak belirlenen kısa çubuğu, ‘birim’ şeklinde ifade edemese de, ‘uzunluğu belirlemek için araçlar’ şeklinde açıklamıştır. Ayrıca kablonun uzunluğunu ifade ederken ‘5 kısa çubuk uzunluğunda’ olduğunu ifade etmesi, birim kavramını kavradığını ortaya koymaktadır. Farklı uzunluktaki başka bir çubuk birim seçilerek aynı kablonun uzunluğunu belirleyen Mete, bu iki birim ile ölçmeyi açıklarken arşın ve endaze gibi uzunluk ölçü birimlerine benzetmiştir. Böylece birim kavramının öğrenilmesinde önbilgilerinde yer alan uzunluk ölçü birimlerinin önemli olduğunu söyleyebiliriz.

Destek eğitim araçlarının cebirsel düşünmede rolü ayrıntılı incelendiğinde birim kavramının tartışılmasında iğneli sayfa materyalinin önemi dikkat çekmektedir. İğneli sayfa materyalinde doğru parçası temsili olan aparatların uzunlukları belirlenirken, her iki katılımcı da birimi belirlemekte güçlük yaşamış ve iğneler arasındaki mesafeyi birim olarak kabul etmeyi düşünememişlerdir. Bunun yerine iğneleri sayarak iğne sayısını doğru parçasının uzunluğu olarak kabul etmişlerdir. Katılımcıların böyle düşünmelerine cetvel üzerinde tamsayıları işaretleyen uzun çizgiler neden olmuş olabilir. Ancak burada onların başlangıç noktası 0’ ı göz ardı ettiklerini söyleyebiliriz. Belki burada iğneli sayfa materyalinin bir birim uzunluğundaki çubuk aparatı kullanılarak birim kavramı vurgulanabilirdi. İğneli sayfa materyalinde birim belirledikten sonra uzunluk belirlemenin daha kolay ve anlaşılır olduğunu söyleyebiliriz. İğneli sayfa materyalinde doğru parçası temsillerinin uzunluğunun belirlenmesinin ardından doğru üzerindeki noktalar ile tamsayılar kümesinin bir altkümesinde tamsayıların eşlenmesi fikri ele alınmıştır. İğneli sayfadaki doğru aparatı, doğru parçası aparatı ile benzer olduğundan Sema' nın belirlediği birime göre doğrunun uzunluğunu ölçmeye çalıştığı tespit edilmiştir. Sema' yı doğrunun uzunluğu yanılgısına sürükleyen değişkenler, materyaldeki doğru ve doğru parçası aparatların farklılık göstermemesi ve öncelikle doğru parçası aparatının incelenip ardından doğru aparatının incelenmesi olabilir. Ayrıca Sema' nın kabartma yazı ile yazılan tamsayılar etiketlerini okumakta zorlandığı belirlenmiştir. Sema' nın rakam işareti yardımı ile etiketlerin doğru konumunu belirlediği ve sayıları okuyabildiği gözlenmiştir. Burada iğneli sayfa materyalinin kabartma yazı ile etiketlenmiş aparatlarının olmaması önemli bir güçlük oluşturmuştur.

Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri ve destek eğitim materyalleri arasındaki ilişkiyi güçlendiren değişkenlerden biri önbilgidir. Bu sonuç kavramlar arasındaki ilişkinin yanı sıra temsil türleri tercihlerinin de önemini vurgulamaktadır. Çünkü iğneli sayfa materyalinde doğru temsili üzerindeki noktalar ile iğnelerin eşlendiği, daha sonra bu noktalar ile sayıların eşlendiği fikrini algılamada ve buradaki kümeleri tespit etmede her iki katılımcı da güçlük yaşamamıştır. Bu kümeler arasındaki eşlemeyi yaparken katılımcılar arasında önemli farklılıklar ortaya çıkmıştır. Örneğin; Sema gelişigüzel eşleme yaparken, Mete' nin birim belirlemeye çalıştığı dikkat çekmektedir. Bu farkın Sema' nın birim kavramına dair önbilgilerindeki eksikliklerden kaynaklandığını söyleyebiliriz. Çünkü Sema doğru üzerindeki noktalar ile tamsayıların bir altkümesinin elemanlarını eşlerken tamsayılarda sıralamaya ve -4 ile 0 ve 0 ile +4 noktaları arasındaki uzaklığa dikkat etmediği belirlenmiştir. Burada Sema' nın tamsayılarda sıralama kavramına dair önbilgisinde eksiklikten söz etmek mümkündür. Fakat bu tartışmanın ardından köpük üzerine ip yardımıyla sayı doğrusu temsili oluştururken, Sema' nın doğru üzerindeki noktalar ile tamsayıları eşlemede benzer yanılgısını sürdürmesi bu yanılgının sebebinin incelenmesini gerektirmektedir. Burada Sema' nın birim belirlememesinin nedeni köpük üzerinde birim belirlemesini sağlayacak iğneler gibi aparatların olmaması olabilir. Çünkü Sema 0 başlangıç noktası kabulünün belirtilmesinden sonra parmakları ile birim belirlemeye çalışmış, bu şekilde birim belirmenin uygun olmadığını ifade ederek cetvel kullanmak istemiştir. Sema ilk olarak 0 tamsayısını köpük üzerindeki temsiline göre ipin en sağında yer alan nokta ile eşlemiştir. Bu eşlemede

Sema’ nın cetvel örneğinden etkilenmiş olabileceği düşünülmektedir. Fakat elde edilen bulgularda Sema’ nın pozitif ve negatif tamsayıları da eşleyeceğini fark ettiğinde, 0’ ın ne pozitif ne de negatif tamsayı olduğunu bilmediği belirlenmiştir. Dolayısı ile Sema’ nın tamsayılar ile doğru üzerindeki noktaları eşlemedeki yanılgısının devam etmediği, tamsayılara dair bilgi eksikliğinden dolayı eşlemeyi kuramadığı belirlenmiştir. Oysaki önbilgilerin belirlenmesinde Sema, tamsayılar kümesi üzerinden küme örnekleri sunmuş ve pozitif tek tamsayılar kümesinin elemanlarının sıralamasından bahsetmiştir. Bu sonuçlar Sema’ nın önbilgileri ile yeni öğrendiği bilgileri ilişkilendirmede güçlük yaşadığını ortaya koymaktadır. Bu ilişkinin kurulmasında günlük hayattan sıcaklık ya da asansör gibi bir örneğin tartışılması Sema’ nın temsiller arasında ilişkisel bir anlayış geliştirmesine (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010) ve ayrıca sayı doğrusunda sayıların eşlenmesine yardımcı olabilirdi (Beswick, 2011; Heeffer, 2011). Öyle ki Mete termometre örneği incelendiğinden, pozitif ve negatif sayıların eşlenmesinde tamsayıların konumlarına ilişkin bilgi sahibi olmuş ve önbilgilerini hatırlamıştır. Dolayısı ile Sema ile de bu örnek ele alınmış olsaydı sayı doğrusunda tamsayıların eşlenmesini daha kolay kavrayabilirdi.

Sayı doğrusu temsilinde Shanty’ nin (2016, s.70) de belirtiği gibi 0 referans noktasının belirlenmesi öğrenci düşünmesinde önemli ipuçların ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Şimdiki araştırmada ise 0 referans noktasının belirlenmesi, birim uzunluk kavramının sorgulanmasından ziyade doğru kavramının sorgulanmasına neden olmuştur. Çünkü Sema sayı doğrusu temsilinde her ne kadar keyfi olarak belirlediği noktalar ile tamsayıları eşlese de, 0’ ı eşlerken iğneli sayfa materyali üzerindeki iğneleri sayarak ortadaki iğne ile eşlemeyi tercih etmiştir. Yu vd.’ nin (2009) belirtiği gibi içgüdüsel ilk temsilin prototip oluşturduğu göz önüne alındığında, aşina olunan sayı doğrusu temsilinin de benzer içgüdüsel temsiller ile ortaya çıktığı düşünülebilir. Fakat 0 referans noktasını dilediği nokta ile eşleyebileceği ve doğrunun dilediği kadar sündürülebileceği belirtilmesine rağmen, Sema sonraki sayı doğrusu temsilinde de ip temsilinin uzunluğunu cetvel ile ölçüp orta nokta ile 0 tamsayısını eşlemiştir. Burada Sema’ nın doğrunun uzunluğunu belirlemek gibi bir yanılgısından söz edemeyiz. Çünkü Sema ip temsilinde -9’ dan +9’ a her tamsayıyı doğru temsili üzerinde noktalar ile eşlemek istemiştir. Bu nedenle Sema köpüğün uzunluğuna göre birim belirlemeye çalışmıştır. Sema’ nın bir diğer farkında olmadığı önbilgisi veya prototipine dayalı düşünmesi, gerekçesini açıklayamamasına rağmen sayı doğrusunda pozitif sayıları 0 referans noktasına göre sağ tarafa yerleştirmesidir.

Doğru üzerindeki noktalar ile reel sayıların eşlenmesi sorgulandığında, katılımcılar reel sayılar ile cetvellemenin yapılabilmesi için doğrunun istenildiği kadar sündürülebileceği fikrini ileri sürmüştür. Mete ayrıca reel sayılar ile doğrunun cetvellenmesinde belirlenecek birimin önemli olduğunu belirtmiştir. Mete örnek vermek için birim belirlemiş ve ½ reel sayısını sayı doğrusu üzerinde işaretlemiştir. Böylece katılımcıların doğru ve sayı doğrusu kavramlarının yanı sıra sonsuz küme kavramını kavradığını söylemek mümkündür. Doğru parçasının noktalar kümesi olarak tanımlanması için farklı uzunluklarda iki doğru parçası üzerindeki noktaları ışın ile eşlemeleri beklenmiştir. Tall' un (1980) çalışmasında elde edilen sonuçların aksine bu araştırmada katılımcılar doğru parçaları üzerindeki noktaları eşlemede güçlük yaşamamıştır. Çalışmalar arasındaki bu farklılık iki nedene bağlı olabilir. Birincisi Tall (1980) çalışmasında biri diğerinin iki katı uzunluğunda iki doğru parçası verdiğini katılımcılara belirtmiştir. Bu durum katılımcıların uzunluğa odaklanmasına neden olmuştur. İkinci neden ise şimdiki araştırmada katılımcıların doğru parçası kavramını yapılandırırken noktalar kümesi olarak yapılandırması ve sayı doğrusu kavramından noktalar ile reel sayıları eşlemenin mümkün olduğunu anlamaları olabilir. Sema sadece başlangıçta doğru parçası üzerindeki noktalar sorgulandığında iki noktanın yer aldığını belirtmiştir. Bu durum daha önceki uygulamada uç noktalara yerleştirilen raptiyelerin noktayı temsil etmesinden kaynaklanmıştır. Çünkü doğru parçalarını köpük üzerinde ip ile temsil etmek için ip parçaları raptiyeler yardımı ile gergin olarak sabitlenmiştir. Raptiyelerin uç noktaları temsil ettiği hatırlatıldığında Sema bu uç noktalar arasındaki noktaların kümesinin sonsuz küme olduğunu ifade etmiştir. Doğru parçalarının uzunluklarının farklı olduğu hatırlatıldığında ise Sema doğru parçası üzerindeki noktalar kümesinin sonsuz küme olduğunu belirtmiş ve birebir eşlemenin yapılacağını ifade etmiştir. Mete ise iki doğru parçasının üzerindeki noktaları eşlerken, ışın ile eşlediğini ifade etmiş ve doğru parçası üzerinde sonsuz nokta olduğunu ve her bir noktanın eşlenmesinin mümkün olduğunu belirtmiştir.

Koordinat sisteminin yapılandırılmasında sayı doğrusu ve sayı doğrularının temsil ettiği kümeler arasında eşleme kavramlarının ele alınması temel oluşturmaktadır. Gerçekleştirilen öğretim oturumları sonucunda, katılımcılar sayı doğrusunun bir küme temsili olduğunu, kümelerin elemanlarının doğruların üzerindeki noktalar ve bu noktalar ile eşlenen sayılar olduğunu ifade etmişlerdir. Katılımcılar sayı doğrularını temsil etmesi için kullanılan iğneli sayfa aparatlarının üzerinde yer alan delikleri nokta temsili olarak kabul etmiştir. Mete sayı doğruları üzerindeki noktaları eşlerken ilk olarak ip ve çubuk yardımı ile noktaları eşlemeyi denemiştir. Ardından iğneli sayfa materyalinde doğru temsillerini birbirine paralel olarak yerleştirmiştir. Sema’ nın ise tercih ettiği tek strateji iğneli sayfa materyalinin üzerinde çalışmak olmuştur. Her iki katılımcı da sayı doğrularını adlandırmıştır. Adlandırdıkları bu kümelerin elemanlarını tıpkı kümelerde eşlemeyi temsil ettikleri gibi bant ve çubuklar yardımı ile eşlemişlerdir. Bu sonuç katılımcıların sayı doğrusunun bir küme olduğunu kavradıklarının bir göstergesidir. Nihayetinde Venn şeması ile küme temsilinde olduğu gibi sayı doğruları arasındaki eşlemeyi de temsil etmeye çabalamışlardır. Ancak bu temsil ile yapılan eşlemenin karmaşık olduğunu fark ettiklerinde, her iki katılımcı da doğruları dik kesiştirme fikrini ileri sürmüştür. Sema doğruları neden dik kesiştirdiğini açıklayamazken, Mete koordinat sistemini daha önce incelediği için önbilgilerinden hareketle sayı doğrularını referans noktası 0 noktasında kesiştirmesi gerektiğini ifade etmiştir. Ancak başlangıçta Mete’ nin koordinat sistemini düşünmeden doğru temsillerinin üzerinde yer alan delikleri eşlemeye çabalaması, kullanılan materyalin yapısından kaynaklanabilir. Mete’ nin iğneli sayfa materyalinin üzerinde de doğruları öncelikle paralel konumlandırması, daha önce koordinat sistemini sayı doğruları ile yapılandırmamasının sonucu olduğu düşünülmektedir. Sema’ nın koordinat sistemini kavramsal olarak bilmese de önbilgilerinde yer alan bir yapının var olduğu söylenebilir. Çünkü Sema doğruların kesiştiği noktanın orijin noktası olduğunu ifade etmiştir.

Katılımcıların koordinat sistemine dair orijin, apsis, ordinat ve sıralı ikili kavramlarını öğrenmelerinin yanı sıra önceki öğretim oturumlarında edindikleri hedefleri göz önüne alarak eşlemeler yaptıkları belirlenmiştir. Bunun en önemli kanıtları katılımcıların orijini belirledikten sonra, birimi belirlemeleri ve eksenlere bu birimle cetvelledikten sonra tamsayıları noktalarla eşlemeleri ve tamsayıların sıralanmasına dikkat etmeleridir. Her iki katılımcı da *x*-ekseni için sağ-sol ve *y*-ekseni için yukarı-aşağı ifadeleri ile pozitif ve negatif sayıların konumlarını betimlemiştir. Sıralı ikililerin koordinat sisteminde işaretlenmesinde Mete önbilgileri ile hareket ederek, iğneli sayfa materyalinde doğru parçası temsili olan aparatları kullanmıştır. Mete sadece bu aparatların uzunluklarının eksen ile sıralı ikilinin belirttiği nokta arasındaki uzunluk ile eşit olmamasını eleştirmiştir. Sema’ nın önbilgilerinde sıralı ikili kavramına ilişkin kavram bilgisi olmadığından ilk örnek eşlemede başarılı olamamıştır. Araştırmalar somut materyaller ile tecrübenin artması sonucunda kavramların öğrenilmesi ve algılanmasının geliştiğini ortaya koymaktadır. Cowan (2011) görme engelli bireylerin kullanılan somut materyalleri incelemelerinden ve kullanımına aşina olmalarından sonra kavramlara ilişkin uygulamalarda daha başarılı olduklarını vurgulamıştır. Nihayetinde Sema’ nın da ilk uygulamadan sonra koordinat sisteminde başarılı bir şekilde çalıştığını söyleyebiliriz. Benzer şekilde Toennies vd.' nin (2011) görme engelli öğrenciler için tasarladığı gridli yapıyı, bireylerin öncelikle incelediğinde noktaların koordinatlarını belirlemede ve noktaları işaretlemede başarılı olduklarını ortaya koymuştur. Sema ve Mete de kullanılan destek eğitim aracına göre, doğru parçası temsillerine ihtiyaç duymadan belirledikleri stratejilere göre eksenlerin temsil ettiği kümeler arasındaki eşlemeleri belirlemiş ve noktaları işaretlemiştir.

Koordinat sisteminin yapılandırılmasında görme engelli bireyler için önem arz hususlar materyal seçimi, dokunma duyusu ile sezgisel hareketlere fırsat sunulması ve akılda tutmayı kolaylaştıracak stratejilere veya not tutmaya yer verme olarak sıralanabilir. Nitekim koordinat sisteminde sıralı ikilileri işaretlerken iğneli sayfa materyalinin de rolü ile katılımcıların farklı stratejiler kullandıkları belirlenmiştir. Sema' nın sıralı ikilileri belirlerken kullandığı ilk strateji, eşleyeceği noktanın belirlediği apsisi ve ordinatı için eksenlere boncuk takmak olmuştur. Sema bu stratejiyi sıralı ikilinin temsil ettiği noktayı iki eli ile belirlediği için tercih etmiştir. Böylece *x*- ve *y*-eksenleri üzerinde eşleyeceği sayıyı tekrar belirlemesi gerekmeden sadece noktalara dokunarak hissetmesi kolay olmuştur. Sema koordinat sistemi üzerinde eşleyeceği nokta sayısının artması sonucu ve iğneli sayfa materyalinde koordinat sistemi temsili ile çalışmaya aşina olması ile apsis ve ordinata boncuk takma stratejisinden vazgeçmiştir. Sema' nın bir sonraki stratejisi ise önce *x*-ekseninde apsisi belirleyerek, daha sonra *y*-ekseninde ordinatı belirleyip *x*-ekseninde apsis ile belirli doğru boyunca ordinata kadar parmağı ile takip ederek eşlemeyi işaretlemek olmuştur. Dolayısı ile görme engelli bireyin dokunsal materyale aşina olana kadar farklı stratejiler ve uzun incelemeler ile tekrar dokunmaları gerekebilir. Sema sıralı ikilileri koordinat sisteminde işaretlerken bazen tek eli ile noktaları belirlemeye çalışmıştır. Bu tercih, Sema' nın noktaları belirlemede hata yapmasına neden olmuştur. Bazı örneklerde ise sıralı ikilinin koordinatlarını akılda tutmakta güçlük yaşamıştır. Sema' nın yaşadığı bu güçlük apsis ve ordinatın eksenlerdeki temsilini karıştırdığını düşündürmüştür. Ancak daha sonra koordinatları tekrar sorması ya da kağıttan kontrol etmesi, Sema' nın sadece akılda tutmakta güçlük yaşadığını göstermiştir. Gerçekten, görme engelli bireyler için hafızada tutamamak en sık karşılaşılan sorunlardan olduğu bilinmektedir (Cahill vd., 1996). Sema bazen sezgisel olarak *x*- ve *y*-ekseninde noktaları belirledikten sonra bir doğru boyunca takip etmeden ve iğneleri saymadan sezgisel olarak sıralı ikiliyi işaretlemeye çalışmıştır. Ama sıklıkla hata yapmıştır. Bu nedenle tekrar iğneleri sayarak noktaları belirlemiştir. Bu durum Sema' nın daha fazla pratik yaptığında, tıpkı görme yetersizliğine sahip olmayan akranlarında olduğu gibi kolayca noktaları işaretleyebileceğini ortaya koymaktadır. Nitekim Mete öğretim oturumunun sonuna doğru sezgisel olarak orijin yakınlarındaki noktaları iğneleri saymadan işaretlemeyi başarmıştır.

Görme engelli bireyler için destek eğitim aracı olarak somut materyal seçiminde dokunma duyusu ile hissetmenin önemini işaret eden örneklerden diğeri iğneli sayfa materyali ile koordinat sistemi temsilinde ortaya çıkmıştır. Katılımcıların grafik oluştururken veya sıralı ikilileri temsil eden noktayı belirlerken orijini belirlemekte güçlük yaşadıkları gözlenmiştir. Dahası Sema' nın (0, 0) sıralı ikilisini koordinat sisteminde belirlemekte de zorlandığı tespit edilmiştir. Sema' nın bu güçlüğü sayı doğrularını 0 başlangıç noktasında eşlediği fikrini algılayamamasından kaynaklanabilir. Çünkü Mete, koordinat sistemini yapılandırırken sayı doğrularının 0 referans noktalarından kesiştiklerinin farkında olduğundan (0, 0) noktasını belirlemekte de güçlük yaşamamıştır. Zira Capraro vd. (2005) öğrencilerin orijin kavramına dair yaşadığı güçlükleri onların önbilgilerindeki eksiklikler ile ilişkilendirmektedir. Ancak Sema bu noktanın orijin noktası olduğunu ifade ettiğinden, Sema' nın sadece orijinin sıralı ikili ile temsilini algılayamadığını söyleyebiliriz. Bu durum 0 referans notasında sayı doğrularının kesişmesinden ve Sema' nın sayı doğrularının referans noktalarının eşlendiği fikrini kavrayamadığından kaynaklanmış olabilir. Sema' nın orijin noktası için yaşadığı bir diğer güçlük, kullanılan destek eğitim aracında doğru temsillerinin kesiştiği noktayı hissedememesidir. Sema' nın orijin noktasını belirlemesini kolaylaştırmak için orijin noktasına iğneli sayfa materyalinin boncuk aparatı takılmıştır. Ancak Sema orijine takılan boncuğu diğer sıralı ikili temsilleri ile karıştırdığı için tekrar orijini belirlemekte zorlanmıştır. Orijinin belirlenmesinde yaşanılan bu güçlük, işaretli noktaların koordinatlarını belirlemede hata yapılmasına neden olmuştur. Sema benzer güçlüğü birden fazla işaretli noktanın olduğu koordinat sisteminde, işaretlenen bu noktaların koordinatlarını belirlerken yaşamıştır. Sema işaretli noktadan eksenlere doğru iki elini kullanarak hareket ettiğinden, eksenlerde koordinatları belirlerken tekrar sıralı ikili nokta temsiline dokunmak istediğinde işaretli noktaları birbiri ile karıştırmaktadır. Mete' nin Sema' ya göre daha başarılı olduğu uygulamalar arasında, işaretli noktaların koordinatlarını sezgisel olarak belirleyebilmesi ve koordinat sisteminde birden fazla işaretli nokta varken noktaları karıştırmadan koordinatlarını belirleyebilmesi yer almaktadır. Mete' nin sezgisel olarak koordinatları belirlerken parmaklarını doğru parçası temsili gibi kullandığı gözlenmiştir. Mete bir elinin işaret parmağı sıralı ikili temsili noktanın üzerinde iken, aynı elinin başparmağı ile eksenleri kesen doğru parçasını temsil ettiği belirlenmiştir Mete diğer eli ile de orijin noktasından birim uzunlukları sayarak işaretli noktanın koordinatlarını belirlemiştir. Dolayısı ile sıralı ikilileri belirlerken görme engelli bireyin kullandığı stratejinin, koordinat sisteminde başarısında önemli rol oynadığını söyleyebiliriz.

İğneli sayfa materyalinde koordinat sisteminin temsiline ilişkin katılımcıların zorlandığı noktalardan bir diğeri katılımcıların eksenlerin kesiştiği orijin noktasını hissedememeleridir. Eksenlerin kesiştiği noktada materyalin yapısı gereği oluşan kabarıklık katılımcıların kesişme noktasını hissetmelerine yardımcı olmuştur. Bu nedenle Sema sayı doğrusu temsillerini konumlandırırken önce *x*-eksenini ve ardından *y*-eksenini konumlandırmayı tercih etmiştir. Sema doğruların yerleştirilmesinde sıralamanın önemini merak etmiştir. Bu sıralamanın önemli olmadığı ve aparatlardan kaynaklanan üst üste yapının doğrunun çizgi temsilinde olmadığı açıklanmıştır. Her ne kadar koordinat sisteminin inşasında eksenlerin yapılandırılmasında sıralama önemli olmasa da görme engelli bireylerin kullandığı materyallerde orijini ayırt etmeleri için önemli olduğu belirlenmiştir. Böylece *y*-ekseninin *x*-ekseni üzerinde oluşturduğu kabarıklık görme engelli bireylerin orijini belirlemesini kolaylaştırmaktadır.

Sema' nın koordinat sisteminde işaretlemekte güçlük çektiği diğer husus Tekay ve Doğan' ın da önemli öğrenci güçlüklerinden biri olarak vurguladığı, bileşenlerinden biri 0 olan sıralı ikilileri koordinat sisteminde işaretlemektir. İlk olarak (0, 3) noktasını işaretlemesi gerektiğinde, Sema sol eli ile orijini işaretlerken sağ eli ile *y*-ekseninde 3 birim ilerlemiştir. Ancak Sema noktayı işaretleyeceğinde (0, 3) noktası olarak orijini göstermiştir. Sıralı ikilinin bileşenleri için *x*- ve *y*-ekseninde eşlediği noktaları düşünmesi istendiğinde (0, 3) noktasını işaretleyebilmiştir. Bu adımdan sonraki benzer uygulamalarda kolaylıkla sıralı ikilileri işaretlemiştir. Mete apsisi ya da ordinatı sıfır olan sıralı ikiliyi işaretlemekte güçlük yaşamamıştır. Koordinatları belirlerken Mete, iğneli sayfa materyalindeki doğru parçası aparatlarını düşündüğünü ve hayali olarak doğru parçalarını zihninde canlandırdığını ifade etmiştir. Apsis ya da ordinat 0 ise doğru parçasının orijin noktası ile kesiştiğini belirtmiştir. Bu nedenle Mete bileşenlerinden biri 0 olan sıralı ikiliyi koordinat sisteminde işaretlemekte güçlük yaşamamıştır. Sonuç olarak Sema' nın belirlediği koordinatları tespit etme stratejilerinin, apsis ya da ordinatı 0 olan noktalara ilişkin kavrayışında rol aldığını söyleyebiliriz. Katılımcıların $(x, 0)$ ya da $(0, y)$ biçimindeki eksenler üzerindeki noktaların koordinatlarını belirlemede yaşadığı güçlüklerin temel nedeni ise sayı doğrusu kavramına dair öğretim oturumunda noktaların koordinatlarının tanıtılmamasıdır. Dolayısı ile öğretim etkinliklerinde sayı doğrusu üzerindeki noktaların düzlemde yatay eksende $(x, 0)$ ve düşey eksende $(0, y)$ olarak belirli olduğu vurgulanması gerekmektedir. Böylece bireylerin referans noktasını, birimi ve sayıların sıralanmasını kavradığı gibi noktaların işaretlenmesini de kolaylıkla anlamaları mümkün olacaktır.

Öğrencinin önbilgilerinin ve kavram temsilleri için prototiplerin cebirsel düşünme üzerindeki rolünü vurgulayan örneklerden biri ilişkili iki kavram olan doğru ve say doğrusu kavramlarının incelenmesinde ortaya çıkmıştır. Mete' nin doğru ve sayı doğrusu kavramlarının tartışıldığı öğretim oturumlarında karşılaşılmayan bazı yanılgıları, koordinat sistemine dair önbilgileri üzerine düşünmeye başlaması sonucunda ortaya çıkmıştır. Bu yanılgıları görünür kılan ilk fikir, sayı doğruları üzerindeki noktaları eşlemesi istendiğinde Mete' nin doğruları 0 referans noktalarından kesiştirerek eşlemeye karar vermesi olmuştur. Mete bu eşleme için doğru temsili aparatların orta noktasını belirlemeyi düşünmüştür. Bu sonuç Sema' nın da ileri sürdüğü prototip fikrine (Yu vd., 2009) dayanmaktadır. Ancak Mete sayı doğrusu kavramına değil, koordinat sistemi kavramına ilişkin bir prototipe sahiptir. Başka bir ifade ile Mete' nin önbilgilerinde koordinat sisteminde eksenlerin eşit uzunlukta iki çubuğun orta noktasından kesiştirerek orijini elde etme fikri yer almaktadır. Ancak Mete' nin orta nokta belirleme çabası doğrunun uzunluğu yanılgısına neden olabileceği için bu durum öğretim oturumunda tartışılmıştır. Mete her ne kadar doğrunun uzunluğu olmadığını belirtse de koordinat sistemini oluştururken doğru aparatlarını orta noktalarından kesiştirmiştir. Mete' nin akıl yürütmekte güçlük yaşadığı bir diğer kavram, sayı doğrusu temsillerini kesiştirirken, doğruların tamsayılar ile eşlenmiş olmasıdır. Mete orta noktadan eşleme fikrine odaklandığı için doğruların sündürülebileceği ya da doğrular kesiştirildikten sonra sayılar ile eşlenebileceği fikirlerini düşünmemiştir. Bu sonuçlar sayı doğrusu ve koordinat sistemi prototipine sadık kalma düşüncesine dayanmaktadır. Dolayısı ile önbilgilerin öğrenci düşünmelerine etkisi sonucunda öğrenme yol haritasının da şekillenmesinde rol aldığı (Li, 2006; Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004) fikri desteklenmektedir. İlerleyen öğretim oturumlarında Mete iki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil etmesi gereken uygulamada, sporcunun yaktığı kalori miktarlarını y-ekseni ile temsil ederken, koordinatları yeniden konumlandırmak için doğru temsillerini uç noktalarından kesiştirmiştir.

Cowan (2011) görme engelli bireyler ile yürüttüğü çalışmanın sonuçlarının aksine, Sema ve Mete koordinat sisteminde noktaları işaretlemede ve işaretli noktaların koordinatları belirlemede başarılı olmuştur. Katılımcıların bu başarıları kavramların yapılandırılmasına dair öğretim uygulamalarının yanı sıra iğneli sayfa materyalinin tercih edilen öğretim uygulamaları için kullanışlı olmasına dayanmaktadır. Bu başarıdan dolayı Mete ile reel sayılar kümesi ele alınarak koordinat sisteminde eşlemelerin temsili tartışılmıştır. Bu tartışmada Mete (1/2, 0) noktasını işaretlerken ½ rasyonel sayısını 'tamın yarısı' olarak ifade etmiş ve belirlediği birimi değiştirerek koordinat sisteminde işaretleyebilmiştir. Ancak 3/2 rasyonel sayısını eksen üzerinde belirlerken Mete' nin ondalıklı ifadeyi sıralı ikili gösterimi ile karıştırmasının yanı sıra rasyonel sayıların onluk tabanda açılımı ve rasyonel sayılarda sıralama kavramlarına ilişkin bilgi eksikleri tespit edilmiştir. Bu bağlamda matematiksel kavramları öğrenmede başarılı olmalarına rağmen katılımcıların kavram bilgilerindeki eksikliklerin okulda ve özel eğitim kurumlarında aldıkları eğitimin yetersiz olduğu sonucunu işaret etmektedir.

5.4.3. Değişken Kavramı ve İki Küme Arasındaki İlişkinin Cebirsel ve Grafik Temsili İçin Cebirsel Düşünme Süreçlerine İlişkin Sonuçlar

Koordinat sisteminin sayı doğruları ile yapılandırılması, eksenlerin sayı kümelerini temsil ettiği fikrinin oluşmasına zemin hazırlamıştır. Bu nedenle katılımcılar öğretim oturumunda yer alan her uygulamada kümeleri belirleyerek eksenler ile kolaylıkla temsil etmiştir. Mete' nin her örnekte iğneli sayfa materyalinde kümenin eleman sayısını dikkate alarak öncelikle eksenleri konumlandırması, ardından orijin ve birimi belirleyerek kümelerin elemanları ile eksenler üzerindeki noktaları eşlemesi dikkat çekmektedir. Leinhardt vd.' nin (1990) ve Cowan' nın (2011) araştırma sonuçlarının aksini örneklendiren bu sonuç, öğretim oturumlarında tasarlanan eğitim uygulamalarının başarılı olduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca bu sonuç Mete' nin sayı doğrusu ve koordinat sistemi kavramlarını kavradığını göstermesinin yanı sıra, eksenlerin kümeleri temsil ettiğini ve bu kümeler arasındaki eşleme yoluyla ilişkinin temsil edilebileceğini anlamasını güçlendirmekte ve kolaylaştırmaktadır. Dolayısıyla Friedlander ve Tabach' ın (2001) görsel temsiller için dezavantaj olarak değerlendirdiği cetvelleme kriterlerinin, aslında ilişkilerin grafik ile temsil edilmesinde anlamayı güçlendiren alt kavramlar olduğunu söyleyebiliriz.

Katılımcılar kümeleri eksenler ile temsil etmede, eksenlerde birim belirlemede, kümelerin elemanlarını bu birime göre eksenler üzerindeki noktalar ile eşlemede güçlük yaşamamışlardır. Burada belirlenen kümelerin elemanlarını eksenlere yerleştirirken, iğneli sayfa materyalinin bir sınırlılığı olarak *x*-ekseninde birim (iki iğne arasındaki uzaklık) 1 birim olarak alınırken, *y*-ekseninde 5 birim olarak alınmıştır. Dunham ve Osborne' nin (1991) ortaya koyduğu grafik incelemelerinde farklı birimlere ayrılmış eksenleri fark etmeme güçlüğünün aksine, katılımcıların eksenlerin aynı birim ile cetvellenmesinin gerekliliğini kendilerinin fark edip belirtmesi materyalden doğabilecek bir yanılgının önüne geçmiştir. Ayrıca katılımcıların eksenler için belirlediği birimleri unutmaması ve sıralı ikilileri işaretlerken noktaları belirlemede güçlük yaşamamaları dikkat çekmektedir. Katılımcıların bu becerileri kullanılan materyalin amaca hizmet ediyor olmasının yanı sıra bireylerin materyal ile uygulama sıklığına dayandırılabilir. Benzer durum ile görme yetersizliği olmayan bireylerin koordinat sistemleri temsillerine dair çizimlerinde de karşılaşmak mümkündür. Dolayısı ile eksenlerin cetvellenmesine dair dikkat gerektiren uygulamalar arasında birimin belirlenmesi yer almaktadır.

İki küme arasındaki ilişkinin fark edilmesi için öncelikle 'ilişki' kavramının ele alınması veya bireyin önbilgilerinde yer alması önem arz etmektedir. Gerçekten, katılımcılardan günlük hayattan sunulan örneklerde kümeleri belirlemeleri ve bu kümeleri eksenler ile temsil etmeleri beklenmiştir. Ancak katılımcılar, bu adımları başarılı bir şekilde gerçekleştirmesine rağmen 'bu kümelerin arasındaki ilişki' fikrine anlam yüklemekte zorlanmıştır. Katılımcıların kümeler arasındaki ilişkiyi ifade etmek yerine 'kümeler arasındaki eşlemeyi' ve sadece bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiye odaklandıklarını söyleyebiliriz. Örneğin, saatlik bisiklet turu fiyatlarının incelendiği uygulamada, katılımcıların saat kümesinin elemanlarının birer birer arttığına ya da ücret kümesinin elemanlarının arasındaki farka odaklandıkları belirlenmiştir. Ancak burada katılımcılar saatlik ücretteki değişimi ifade etmekte zorlanmışlardır. Dolayısıyla bu eşlemeyi meydana getiren ilişkinin fark edilmesi ve bu ilişkinin grafik ile temsil edilebilmesi için ek öğretim oturumun tasarlanması gerekmiştir. Nihayetinde katılımcıların iki küme arasındaki ilişkiyi belirlemelerine rağmen cebirsel olarak ifade edemedikleri, ancak öncelikle grafik temsili olmak üzere tablo ve Venn şeması gibi temsillerden yararlanarak eşlemeyi göstermeyi tercih ettikleri belirlenmiştir. Tablo yapmak için Sema küptaş kasa materyalini tercih ederken, Mete tablet kalem ile kabartma yazıda tablo oluşturmuştur. Katılımcıların tablo temsillerinde kullandıkları destek eğitim aracına göre tablo oluşturma düzenlerinin de değiştiğini söyleyebiliriz. Küptaş kasa materyalinde yatay bir tablo oluşturmak, kabartma yazının doğasından dolayı karakterlerin fazla olmasından ve hücre sayısının yetersizliğinden etkilenmektedir. Bu nedenle Sema dikey tablo oluştururken, Mete ise kabartma yazı tabletinde hücreleri karakter sayısına göre ayarlayarak yatay bir tablo oluşturmuştur. Sonuç olarak, her iki katılımcı da kabartma yazı ile tasarlanan tabloları yorumlamada başarılı olmuştur.

Tablo incelemelerinde katılımcıların farklı stratejiler kullandığı ve bu stratejilerin iki küme arasındaki ilişkiyi ifade etme becerilerinde rol aldığı belirlenmiştir. Örneğin Sema, tablo incelerken tabloda yer alan kümeleri belirledikten sonra kümelerin her biri için ayrı ayrı elemanları incelemiş ve tabloda kümelerin eşlenen elemanlarını fark etse de, bu elemanlar arasındaki ilişkiyi sorgulamadığı belirlenmiştir. Dolayısı ile Sema' nın başlangıçta tablo temsillerinde kümeler arasında ilişki kurma fikrine sahip olmadığını söyleyebiliriz. Sema' ya sunulan günlük hayattan örnekler üzerine tablo temsillerinde kümeler arasındaki ilişkiye odaklandığı belirlenmiştir. Bu örneklerde Sema' nın deneyimlerine dayanan, örneğin bir sporcunun saatte yaktığı kalori miktarı gibi, senaryolara yer verilmesi eşlemelerin dayandığı ilişkiyi belirlemesine zemin hazırlamıştır. Mete ise ilk önce bütünü anlamak için tablodaki kümeleri ve her bir kümenin elemanlarını incelemiştir. Daha sonra Mete' nin eşlemeleri gösteren hücrelere aynı anda dokunduğu ve '1 saatte 300 kalori tüketmiş' gibi ilişkiyi yorumlayarak incelediği belirlenmiştir. Mete' nin tabloları ikinci kez incelemesinde hem kümelerin kendi içinde elemanları arasında, hem de kendi elemanları ile başka kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemeye odaklandığını söyleyebiliriz.

Literatürde yer alan öğrenci güçlüklerinin aksine (Dunham & Osborne, 1991; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990), katılımcıların tablo ve Venn şeması ile temsil edilen kümeler arasındaki eşlemeleri grafik temsiline aktarmada başarılı olduğu tespit edilmiştir. Bu başarı öncelikle tasarlanan öğretim oturumlarındaki uygulamaların hedefleri gerçekleştirmede yeterli olması ve uygun destek eğitim materyalleri ile donatılması ile ilişkilendirilebilir. Ayrıntılı incelendiğinde ise görme engelli bireylerin temsil türlerini yapılandırma ve yorumlama sürecinde bireyin düşünmelerini etkileyen en önemli rolü destek eğitim araçlarının üstlendiği dikkat çekmektedir. Görme engelli bireylerin kabartma yazının doğasında ve sıklıkla kullandıkları küptaş kasa materyalinin tasarımında satırların kullanımının, tablo ve Venn şeması temsilleri ile benzerliğinden söz etmek mümkündür. Dikey tablo temsiline benzer not tutma uygulamaları ve bu notların ip ve benzeri araçlarla Venn şeması temsiline uyarlanabilir olması bu benzerlikleri içermektedir.

Görme engelli öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinde somut materyalin rolünü ortaya koyan bir diğer örnek grafik temsilden yararlanarak cebirsel temsili ifade etme hedefinde tespit edilmiştir. Katılımcılar sıralı ikilileri koordinat sisteminde işaretlerken kümeler arasındaki ilişkiyi belirleyemeseler de noktaları işaretlerken iğneler aracılığı ile örüntü belirleyebilmiştir. Katılımcıların belirledikleri örüntüye göre diğer sıralı ikili temsili noktaları pratik şekilde işaretledikleri gözlenmiştir. Dolayısı ile katılımcılar kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemede ya da cebirsel ifade etmede güçlük yaşasa da iğneli sayfa materyalindeki iğnelerden yararlanarak noktalar arasındaki örüntüye göre eşlemeleri belirleyebilmiştir. Örneğin $y = x - 1$ grafiğinde Sema sıralı ikilileri işaretlerken ordinatlara odaklanarak, y-ekseni üzerinde bir önceki noktaya göre iğneleri sayarak noktaları ardışık olarak işaretlemiştir. Burada elbette doğrusal bir ilişkinin yer alması da sıralı ikililerin işaretlenmesini kolaylaştırmaktadır. Bu nedenle ilerleyen adımlarda lineer (doğrusal) olmayan grafiklere yer verilmiştir.

Katılımcıların grafik temsillerini yorumlarken Shah ve Hoeffner' in (2002) de belirttiği gibi deneyimlerine dayanan senaryolar bağlamında grafik okumada ve yorumlamada daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Reel sayılar kümesinin altkümesi olan iki kümenin elemanları arasındaki eşlemelerden sunulan birkaç sıralı ikiliyi işaretleyen katılımcılardan, bu ilişkiyi grafikle temsil etmeleri istenmiştir. Ancak katılımcıların bu temsilde bazı kritik noktaları dikkate almadıkları belirlenmiştir. Örneğin bir sporcunun zamana bağlı yaktığı kalori miktarının incelendiği örnekte, katılımcıların başlangıç anından ilk bir saate kadar olan zaman dilimini göz önüne almadığı ve (1, 300) sıralı ikilisinden sonrası için grafiği oluşturduğu gözlenmiştir. Burada katılımcıların kalori tüketiminin bir saat içerisindeki değişimi düşünerek başlangıç noktasından (1, 300) noktasına kadar eşlemeleri ve ilişkiyi düşünmeleri sağlanmıştır. Böylece katılımcılar grafiği tamamlayabilmişlerdir.

Katılımcıların her ikisi de grafik temsilinde sıralı ikilileri temsil eden herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçalarını lastik yardımı ile oluşturabilmiştir. Ancak burada katılımcıların noktaların bir araya gelerek doğru parçalarını ve sonuç olarak grafiği oluşturduğu bilgisini genelledikleri belirlenmiştir. Bu genellemeden dolayı katılımcılar grafiği oluştururken işaretli noktaların her birini doğru parçaları ile birleştirmiştir. Bu şekilde kapalı eğriler oluşturmalarının temel nedeni, katılımcıların iki küme arasındaki ilişkiyi yorumlayamamalarıdır. Katılımcılar genel olarak x- ve y-eksenlerinin temsil ettiği kümelerin elemanları arasındaki ilişkileri belirleyebilmiştir. Hatta Mete 'x-leri, x-lerin 2 fazlası olan y-ler ile eşlemiş' ifadesi ile genellemeyi cebirsel söylem ile ifade edebilmiştir. Ancak her iki katılımcı da grafiğin işaretli noktalardan farklı bir noktada nasıl devam edeceğini sorgulamamıştır. Dolayısı ile kümeler arasındaki ilişkiyi yorumlama ve grafiği reel sayılar kümesi üzerinde oluşturma hedeflerine dair ek öğretim oturumu tasarlanmıştır. Katılımcıların grafik kavramını sadece 'bilinen işaretli noktaları birleştiren eğri' olarak algılama yanılgısını gidermede en etkili uygulama, onların çizdiği grafik üzerindeki hatalı çizimleri tartışmak olmuştur. Bu tartışmada ilişkinin grafiğinde olmayan, ancak birey tarafından genelleme sonucunda çizilen doğru parçası üzerindeki noktaların ilişkiyi sağlamadığı kanıtlanmıştır. Örneğin, $y = x^2$ grafiğinde $(-3, 9)$ ve $(3, 9)$ noktasını lastikle birleştirerek grafiği çizen Mete ile öncelikle grafiğin üzerinde yer alan her noktanın bu kümeler arasındaki ilişkiye dayalı olduğu fikri tartışılmıştır. Mete grafiğin kümeler arasındaki ilişkiyi temsil ettiği fikrine sahip olduğundan, sadece Mete' nin çizdiği grafik üzerinde yer alan $(0, 9)$ noktasının belirlenen ilişkiyi sağlamadığını fark etmesi sağlanmıştır. Bunun için Mete' nin ifade ettiği 'apsisin karesi ordinata eşit' genellemesinin $(0, 9)$ noktası için doğru olmadığını belirlemesi yeterli olmuştur. Sema ise iki küme arasındaki ilişkiyi cebirsel dil ile ifade edememesine rağmen özellikle doğrusal ilişkileri grafik ile temsil etmede daha başarılı olmuştur. Nihayetinde grafikler kelimeler ile anlatmakta zorlandığımız ilişkileri görsel olarak özetlenmiş şekilde sunmaya yarayan görsel temsillerdir. Görme engelli bireyler için bu durum cebirsel ifade etmek yerine, dokunsal grafikler ile ilişkileri temsil etmenin yolu olarak ele alınabilir. Katılımcıların grafiğin nasıl devam edeceğine dair fikir yürütmeleri ise belirlenen ilişkiye göre işaretli noktaların dışında başka bir sıralı ikilinin belirlenmesi ile sağlanmıştır. Böylece artırılan benzer uygulamalar ile katılımcılar kümeler arasındaki ilişkinin grafik temsilini oluşturmada yeterli becerileri edinmesi için fırsatlar sunulmuştur. Dolayısı ile katılımcıların güçlüklerine ve bu güçlükler için gerçekleştirilen uygulamalara dair sonuçların matematiksel kavram bilgisi olarak cebirsel temsil ile grafik inceleme ve tasarlama arasındaki ilişkinin önemini (Capraro, Kulm & Capraro, 2005; Kieran, 1992) vurguladığını söyleyebliriz.

Katılımcılar sıralı ikililer olarak sunulan iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi yorumlarken, buradaki kümelerin elemanlarını kolaylıkla belirleyebilmişlerdir. Ayrıca grafik temsilini oluşturmada ve kümelerin arasındaki ilişkiyi belirlemede de güçlük yaşamamışlardır. Çünkü, katılımcılar sıralı ikili kavramını öğrenirken kümeler arasındaki eşleme fikri üzerine yapılandırmıştır. Ayrıca öğrencilerin çözümlerde en 'doğru' yolun sembolik temsiller yardımıyla olduğuna inandığını ortaya koyan araştırmaların (Eisenberg & Dreyfus, 1991; Friedlander & Tabach, 2001; Huntley & Davis, 2008; Knuth, 2000; Senk & Thompson, 2006) aksine, katılımcıların kümeler arasındaki ilişkileri temsil etmede her zaman grafik temsilini öncelikle tercih ettiği belirlenmiştir. Özellikle sıralı ikilileri temsil eden noktaları koordinat sisteminde işaretlemede pratik stratejiler geliştirdikleri dikkat çekmektedir. Bu nedenle kümelerin elemanları arasındaki eşlemelerin verildiği örnek uygulamalarda da bu eşlemeleri not tutmak için koordinat sistemi üzerinde noktaları işaretlemeyi tercih ettikleri belirlenmiştir. Bireylerin bu tercihinde hem materyal tercihi, hem de grafik ile temsil etme süreci rol oynamaktadır. İğneli sayfa materyali görme engelli bireyler için kullanımı kolay ve hissedilebilir bir materyal olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca katılımcılar bu materyal ile çalışmaktan keyif almıştır. Grafik ile temsil etme sürecinin ise görme engelli bireylerin grafiği tasarlaması, eşlemeleri belirlemesi ve yorumlaması bağlamında algılama ve anlamada daha pratik bir temsil türü olduğu söylenebilir. Bu sonuç Friedlander ve Tabach' ın (2001) grafik temsilinin kümelerin elemanları arasındaki ilişkinin resmini hızlı ve verimli bir şekilde sunduğu yorumu ile desteklenebilir. Katılımcıların grafikle temsil türünü tercih etme nedenlerinden bir diğeri ise cebirsel temsildeki kavram bilgisi eksiklikleri ve bu nedenle yaşadıkları güçlüklerdir. Cebirsel temsile dair önbilgilerindeki eksiklikler katılımcıların grafik üzerindeki işaretli noktalardan başka bir noktayı belirlemeleri gerektiğinde, materyali kullanarak çözüm aramalarına neden olmuştur. Örneğin, cebirsel olarak ifade edemediği $y = x - 3$ grafiğinde verilen eşlemelerden başka bir x için y-nin belirlenmesi gerektiğinde, apsisi işaretleyerek grafik üzerinde takip ederek ordinatı belirlemişlerdir. Cebirsel temsilde başarısız olan katılımcılar için grafikle temsil türü hem daha anlaşılabilir olmaktadır, hem de destek eğitim aracından dolayı eğlenceli bir uygulamaya dönüşmektedir. Ayrıca katılımcıların cebirsel söylemler ile ifade etmekte zorlandığı sabit ve birim bağıntıları, grafik ile temsilde 'sabit' ya da 'düz' devam etme söylemleri ile açıkladıkları ve elleri ile dokunarak gösterdikleri belirlenmiştir. Dolayısı ile matematiksel iletişim sürecinde grafik temsilinin görme engeli bireyler için düşünmelerini ifade etmede etkili olduğunu söyleyebiliriz.

İki kümenin elemanları arasındaki eşlemenin Venn şeması ile temsilinde, Sema doğru parçaları ile temsil edilen okları takip etmekte zorlanmıştır. Sema' nın yaşadığı bu güçlük ilk birkaç eşlemede doğru parçaları paralel olacak şekilde görsel olarak doğru parçaları ile elemanların eşlenmesinden kaynaklanmıştır. Sema bir eli ile bir kümenin elemanlarını ve diğer eli ile de diğer kümenin elemanlarını okuyarak hızlı bir şekilde eşlemeleri takip etmeye başladığından hata yapmıştır. Daha sonra doğru parçalarını takip ettiğinde doğru eşlemeleri tespit edebilmiştir. Mete ise başlangıçta önündeki materyali bütün olarak inceleme eğilimde olduğundan, doğru parçaları ile eşlemelerin temsil edildiğini algılamıştır. Dolayısı ile eşlemeleri belirlerken doğru parçalarını iki eli ile takip etmiştir. Sema çapraz eşlemelerde kesişen doğru parçalarını hissetmekte de güçlük yaşamıştır. Mete ise 'doğru parçası düz bir çizgi parçasıdır' fikri ile hareket ederek kırılmanın olmayacağını düşünmüş ve doğru eşlemeleri belirlemiştir. Bu sonuçlar görme engelli bireylerin görsel içeriklerde öncelikle bütünü dokunarak algılamasının kavram öğrenmede önemini ortaya koymaktadır. Ayrıca eşlemelerin doğru parçaları ile temsil edilmesi, katılımcıların ilişkiyi belirlemede ve grafik ile temsil etmede farklı fikirleri incelemelerine fırsat sunmuştur. Sema ve Mete iki küme arasındaki olası eşlemeleri düşünmüş, böylece 2 fazlası ve 2 eksiği gibi farklı genellemeler belirlemiştir. Dahası birebir eşleme olmayan bu uygulamada, katılımcıların bir kümedeki iki elemanın diğer kümede aynı elemana karşılık gelmesini algılamakta güçlük çekmediği ve bu eşlemenin birebir eşleme olmadığını kolaylıkla ifade ettiği belirlenmiştir. Ayrıca katılımcılar farklı kümeleri farklı eksenler ile temsil etmişlerdir. Bu uygulamanın ters bağıntı fikri için önemli bir önbilgi oluşturacağı düşünülmektedir. Bu yorumu destekleyen diğer sonuçlar Sema' nın bağımsız değişkenin temsil ettiği kümeyi y-ekseni ile temsil etmesi ve Mete' nin her iki eksen ile her iki kümeyi de temsil edebileceğini belirtmesidir. Dahası Mete tercih ettiği eksene göre grafiği yorumlamanın değişeceğini ifade etmiştir. Bu fikrini Mete '1 saati 20 lira' ve '20 lira için 1 saat' bisiklet turu yorumları ile açıklamıştır.

Öğretim oturumlarında kullanılan destek eğitim araçları değerlendirildiğinde kabartma yazıya dair dikkat çeken sonuçlar elde edilmiştir. Tablo ve grafik temsillerinde kabartma yazıların silindiği ve görme engelli bireyin yazıları okumakta güçlük çektiği belirlenmiştir. Bu nedenle kabartma yazılı kağıt materyalleri birden fazla kullanmanın ve not alarak saklamanın mümkün olmadığını belirtebiliriz. Bir diğer örnek ise kabartma yazı ile tasarlanmış koordinat sisteminde, 3D kalemle çizilmiş grafik uygulamalarıdır. Bu araçlar, bu araştırmanın ihtiyaç ve sorunların belirlendiği ilk kısmında elde edilen sonuçlara göre tasarlanmıştı. İlk tur görüşmelerde gridli yapı bazı görme engelli bireylerin gridleri grafik ile karıştırmasına neden olmuştu. Bu nedenle öğretim oturumları tasarlanırken gridlerin olmadığı grafikler hazırlanmıştır. Fakat katılımcıların grafiği takip etmekte ve grafik üzerindeki noktaları belirlemekte güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Katılımcılar sadece eksenler üzerindeki noktaların koordinatlarını belirleyebilmiştir. Bu sonuç Cowan' ın (2011) araştırma sonuçlarını destekler nitelikte, gridli yapı üzerinde kabartma grafiklerin ya da iğneli sayfa gibi farklı materyallerin kullanılmasının görme engelli bireylerin kavrayışları için daha uygun olacağını ortaya koymuştur. Nitekim iğneli sayfa materyalinde kablo ile temsil edilen grafiklerde, grafik üzerindeki noktalar boncuk ile işaretlenmediğinde de katılımcılar tarafından kolaylıkla koordinatlarının belirlendiği tespit edilmiştir. Bu uygulamalarda katılımcıların öncelikle grafiğin eksenleri kestiği noktaların koordinatlarını belirlediği dikkat çekmektedir. Bu tercih bireylerin, bu noktaları dokunduğunda hissetmelerinin ve koordinatlarını belirlemenin daha kolay olması ile ilişkilendirilebilir. Ayrıca katılımcıların boncuk ile temsil edilmeyen noktalar için grafiğin üzerinde yer alan iğneyi belirlemeye dair tereddütlerinin olması da etkilemiş olabilir. Bu sonuçlara ek olarak, katılımcıların grafik temsillerini incelerken her zaman üçüncü bölgeden incelemeye başladığı belirlenmiştir. Bu inceleme metinleri okuma yönüne göre olduğu düşünülmektedir. Çünkü görme yetersizliği yaşayan bireyler bütünü algılamada güçlük yaşamaktadır (Thinus-Blanc & Gaunet, 1997; Roth & Lee, 2004). Bu nedenle, görme engelli bireylerin öncelikle bütünü hissetmeleri daha sonra parçaları tekrar incelemeleri gerekmektedir. Örneğin, katılımcıların belirledikleri ilişkiye göre işaretledikleri noktaları lastikler yoluyla doğru parçaları yardımı ile çizerken bazı noktaları birleştirmeyi atladıkları belirlenmiştir. Bu durum görme yetersizliği olan bireylerin bütünü algılayamadıkları ve hissedemedikleri için meydana gelmektedir. Dolayısı ile tekrar grafiği incelemeleri gerekmektedir. Ayrıca doğru paçalarının lastik ile temsilinde kırılma noktaları olmamasına rağmen grafikte kırılma noktaları gibi keskin çizgilerin oluşmasına neden olduğu belirlenmiştir. $y = x^2$ grafiğinin lastikler ile temsilinde V-şeklinde hissedilmesi keskin çizgilere örnek olarak sunulabilir. Bu iki sonuç grafiği ip ile temsil etmenin hem grafiğin bütününe dair algıyı oluşturmayı, hem de kırılma noktaları gibi hatalara yer vermeden grafik temsillerini oluşturmayı mümkün kılmıştır. Grafiklerin kablo ile temsilinde ise katılımcıların kabloya şekil vermekte ve iğneli sayfa materyalinde iğnelerin arasına yerleştirmekte zorlandıkları belirlenmiştir. Ancak Mete' nin ip ile grafik temsilinde de güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Mete doğru temsili için ip kullanırken ipi gergin bir şekilde materyalin üzerinde tutmak yerine, iğnelerin arasından geçirmeye çalışmıştır. Bu durum Mete' nin doğru temsilini zig zag şeklinde çizmesine neden olmuştur. İlerleyen adımlarda Mete' nin bu uygulamasının boncukların üzerinden ip geçirirken ipin gergin durması için iğnelere zig zaglar yaparak sabitlemeye çalışmasının sonucu olduğu anlaşılmıştır. İpin gergin bir şekilde uzatıldığında düz bir çizgi olarak iğnelerin arasına yerleştiğini hisseden Mete, daha sonraki grafik temsillerinde ipi kolaylıkla kullanabilmiştir.

Katılımcılar grafik çiziminde sıralı ikilileri temsil eden işaretli noktaları doğru parçaları ile birleştirirken, ilk önce hangi nokta ikilisi ile başlamaları gerektiğine dikkat etmişlerdir. Her iki katılımcı da doğru parçalarının çizilme sırasının önemli olmadığını ifade etse de, bu sıralamanın görme engelli bireyin grafiği bütün olarak algılamasında önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü katılımcıların rastgele seçimlerine göre doğru parçalarını inşa ettiğinde birleştirmeyi atladığı noktaların olduğu, dahası grafiği zihinlerinde tasarlarken grafiğin bütününü algılamakta güçlük çektikleri belirlenmiştir. Görme engelli bireylerin parçaları inceleyerek bütünü algıladıkları düşünüldüğünde (Thinus-Blanc & Gaunet, 1997), belirli bir sıralamaya göre noktaları birleştirerek grafiği inşa etmeleri ilişkiyi temsil eden grafiği kavrayışlarını kolaylaştıracaktır.

Katılımcılar iki küme arasındaki ilişkiyi sözel olarak da olsa cebirsel temsil etmeyi kavramalarının ardından, her uygulama örneğinde kümeler arasındaki ilişkiyi artma (2 fazlası gibi) ve azalma (3 eksiği gibi) ilişkisi ile belirlemeye çalışmışlardır. Bu sonuç öğrencilerin doğrusal ilişkileri temsil eden grafiği çizme eğiliminde olduğu yaygın kavram yanılgısına dayandırılabilir (Leinhardt vd., 1990). Ancak sebep her ne olursa olsun bu odaklanma, kümeler arasındaki ilişkiyi belirlemelerinde katılımcıların düşünmelerini engellemektedir. İnceledikleri örneklerde kuvvet ve kat gibi ilişkileri fark eden katılımcıların sonraki uygulamalarda sıralı ikililer arasında farklı ilişkileri de göz önüne aldıkları belirlenmiştir. Burada uygulamada tercih edilen örnek çeşitliliğinin önemli olduğunu söyleyebiliriz. Bu çeşitlilik arasında doğrusal (lineer) ilişkilerde $y = x + 3$ veya $y = x - 1$ gibi örneklere yer vermek, $y = x^2$ veya $y = x^2 - 4$ gibi ortak terimleri olan örneklere yer vermek öğrenci düşünmelerinin gelişimi açısından önem arz ettiğini söyleyebiliriz. Ayrıca cebirsel ilişkilerde genelemeye ulaşırken Mete' nin sadece bir sıralı ikiliyi göz önüne aldığı belirlenmiştir. Örneğin, Mete grafik üzerinde $(3, 1)$ noktasını belirledi ise 'ordinat apsisin iki eksiği' ilişkisini grafik üzerindeki her noktaya genellemiştir. Burada Mete' den grafik üzerindeki başka bir noktayı belirlediği ilişkiye göre incelemesi istendiğinde, Mete genellemenin doğru olmadığını fark etmiştir. Fakat benzer durum ile birkaç uygulama örneğinde de karşılaşıldığı için Mete' nin cebirsel ifadelerde genelleme kavramına dair bilgi eksikliğinden söz etmek mümkündür. Benzer şekilde Aktaş ve Argün (baskıda) görme engelli bireylerin örüntüyü belirlemelerine rağmen genellemeyi cebirsel olarak ifade edemediklerini ve sözel olarak ifade etme eğiliminde olduklarını ortaya koymuştur.

Öğretim oturumlarında soyut matematiksel kavramlardan biri olan değişken kavramını katılımcıların kavraması için günlük hayatta yer alan sürekli ve süreksiz değişken örnekleri ele alınmıştır. Katılımcıların 'cinsiyet', 'yaş' ve 'sıcaklık' kelimelerinin temsil ettiği kümelerin elemanlarını belirlemekte güçlük yaşamadığı tespit edilmiştir. Buna ek olarak, katılımcılar bu kelimelerin kendilerinin belirledikleri kümelerin elemanlarını temsil ettiğini anlamışlardır. Ancak kelimelerin temsil ettiği kümeleri belirlerken, Mete 'yaş' kelimesinin 'genç ve yaşlı' kelimelerini temsil ettiğini düşünmüştür. Mete' nin 'yaş' kelimesi için gruplar arama fikri, 'cinsiyet' kelimesinin erkek ve kadın cinsiyet gruplarını temsil ettiği fikrinden etkilenmesi sonucu olabilir. Çünkü öğretim oturumunda öncelikle cinsiyet kelimesi incelenmiştir. Mete' nin dikkatini tamsayılar kümesinin elemanlarına çekmek için Mete' ye yaşı sorulmuştur. Böylece Mete, 'yaş' kelimesinin 17 tamsayısını ve nihayetinde pozitif tamsayılar kümesini temsil ettiğini ifade edebilmiştir. Bu akıl yürütme sonucunda Mete, 'sıcaklık' kelimesinin temsil ettiği kümeyi düşünürken termometre örneği ile pozitif ve negatif tamsayılar kümesini kolaylıkla belirtmiştir.

Değişken kavramının 'bir kümenin elemanlarının her birini temsil eden bir sembol' olduğunun kavranması için katılımcılar ile iğneli sayfa materyalinde sayı doğrusu temsili incelenmiştir. Katılımcılar ile nokta aparatından farklı bir boncuğun sayı doğrusu üzerindeki tamsayıları temsil etme rolü tartışılmıştır. Katılımcılar öncelikle sayı doğrusu üzerinde çeşitli noktaları bu boncuk ile işaretlemişlerdir. Daha sonra boncuk katılımcıların elinde iken sayı doğrusu üzerindeki tamsayılardan herhangi biri işaretlendiğinde ve işaretlemeden önce sayıları temsil etme fikri tartışılmıştır. Sema 'sabit' olarak ifade edemese de boncuk ile sayı doğrusu üzerinde herhangi bir tamsayı eşlendiğinde, boncuğun işaretlediği o tamsayıya eşit olduğunu belirtmiştir. Boncuğun sayı doğrusu üzerindeki bir nokta ile eşlenmediğinde ise Sema boncuğun sayı doğrusu üzerindeki herhangi bir tamsayı ile eşlenebileceğini ifade etmiştir. Sema' nın bu fikri 'temsil etme' kavramını algılamasına temel olmuştur. Mete ise boncuk takılı iken boncuğun sadece bir tamsayıyı temsil edeceğini ifade ederek 'sabit' kavramını algıladığı belirlenmiştir. Böylece Mete boncuğu sayı doğrusundaki nokta ile eşlemeyi açıklarken 'hamle' ifadesi ile 'sabit' kavramını ele almıştır. Ayrıca Mete sayı doğrusunun üzerinde olmayan düzlemdeki bir noktayı işaretleyerek değişkenin o noktayı da temsil edip etmediğini sorgulamıştır. Burada iğneli sayfa materyalinin düzlem temsili oluşturması, değişken kavramının evrensel kümeyi temsil etme gücünün sorgulanmasına katkı sunmuştur. Sonuç olarak, belirlenen değişkenin ele alınan kümenin elemanlarını temsil ettiği açıklanmıştır. Bu sonuçlar katılımcıların değişken temsili olan boncuğun sayı doğrusu üzerindeki bir nokta ile eşlenmediğinde her tamsayı ile eşlenebilme ihtimali olduğunu düşündüklerini ve böylece değişkenin bir kümenin her elemanını temsil ettiğini kavradıklarını ortaya koymaktadır. Buna ek olarak boncuk sayı doğrusu üzerindeki bir nokta ile eşlenirse, yani sayı doğrusu üzerindeki bir nokta boncuk ile işaretlenirse, boncuğun sabit bir sayıya eşit olduğunun algılandığı belirlenmiştir.

Bir kümenin elemanlarının değişken ile temsil edilmesi ve diğer bir küme ile olan ilişkinin bu değişken ile ifade edilmesi için balina örneği ele alınmıştır. Katılımcıların her ikisi de örnek durumdaki kümeleri belirleyebilmiş ve bu kümelerin her birinin elemanları arasındaki ilişkiyi tespit edebilmiştir. Belirlenen bu kümeler arasında yer alan 'gün kümesini' her iki katılımcı da x değişkeni ile temsil etmeyi düşünmüştür. İki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi de belirleyen katılımcıların x-değişkenine göre ilişkinin cebirsel temsilini ifade etmelerine rağmen bu temsili yorumlayamamaları dikkat çekmiştir. Örneğin Sema, sadece bilinmeyen bir günde balinanın $4x$ ton yemek yediğini yorumlayabilmiştir. Sema yiyecek miktarının gün sayısının 4 katı olduğunu ifade edememiştir. Mete ise beklenmedik şekilde bu uygulamada bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarını belirlemesine rağmen $y = 4x$ cebirsel ifadesini yazamamıştır. Ancak Mete' nin bu güçlüğü yaşamasındaki temel nedenin denklem kurma ve eşitlik kavramlarına ilişkin önbilgisindeki eksiklikleri olduğunu söyleyebiliriz. Zira Mete bağımlı ve bağımsız değişken temsillerini belirtmekte güçlük yaşamamıştır. Mete' nin söz konusu önbilgilerine dair bilgi eksikliğinin belirlendiği bir diğer uygulama, zaman ve yol arasındaki ilişkinin incelendiği örnek durumdur. Mete iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemesine rağmen, 'kat, fazla, artış miktarı' gibi kavramları hem söylem olarak hem de cebirsel ifade olarak belirlemekte güçlük yaşamıştır. Bu örnekte de Mete $50x$ ve $y = 50x$ cebirsel temsillerini ifade edememiştir. Mete değişkenlerin temsil ettiği kümelerin elemanlarını ve saatte gidilen yolu düşünerek cebirsel ilişkiyi ifade edebilmiştir. Mete burada saat ve yol kümelerinin elemanları arasındaki eşlemeleri temsil eden sıralı ikilileri belirleyerek genellemeye ulaşmaya çalışmıştır. Ancak $50y = x$ olarak belirlediği cebirsel temsil Mete' nin önbilgilerindeki eksiklikler için önemli ipuçları vermiştir. Mete ile sıralı ikilileri düşünerek $50y = x$ genellemesinin doğru olmadığı tartışılmıştır. Nihayetinde çizdiği grafiğin $50x = y$ cebirsel temsiline ait olduğunu belirleyebilmiştir. Benzer bir diğer yanılgı 'A kümesinin elemanlarının 3 eksiği olan B kümesinin elemanı ile eşleme' örneğinde Mete '$-3x$ ve x-3' cebirsel temsillerini ayırt edememiştir. Ayrıca Mete 3 sabit sayısını ifade etmek için $3x$ ve $x \in \mathbb{R}$ ifadesini açıklarken $x = \mathbb{R}$ gibi ifadelere yer vermiştir. Burada x-in bir sembol olduğu ve reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$' ye eşit olamayacağı belirtilmiştir. Bu sonuç Mete' nin eşitlik ve elemanı olma sembollerinin yanı sıra değişkeni temsil eden x sembolü için sembol kullanımına dair yanılgılarını ortaya koymaktadır. Mete' nin x değişkeninin reel sayılar kümesindeki her elemanı temsil etmesi ile $x = 5$ gibi sabit bir sayıya eşit olması fikirlerini genellediğini söyleyebiliriz. Sema ise yol ve saat kümeleri arasındaki ilişkiyi belirlerken yol kümesinin elemanları arasındaki artış miktarına odaklanmıştır. Bu nedenle cebirsel temsili ifade ederken saat kümesini temsil eden x değişkeni ile ilişkiyi '$x + 50$' olarak yorumlamıştır. Dolayısı ile Sema' nın da '50 katı ve 50 fazlası' gibi cebirsel söylemleri cebirsel ifade olarak temsil etmekte güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Sema bu uygulamadan sonra cebirsel ifadelere dair deneyimi sonucunda Venn şeması ile temsil edilen iki küme arasındaki ilişkiyi cebirsel ifade etmede nispeten daha az güçlük yaşamıştır. Sema A ve B olarak adlandırdığı kümelerin elemanları arasındaki eşlemeyi 'A' nın elemanlarının 3 eksiği olan B' nin elemanı ile eşleme' şeklinde ifade etmiştir. Böylece Sema bu kümelerin elemanlarını temsil eden değişkenleri düşünerek $y = x - 3$ cebirsel temsilini oluşturabilmiştir. Bu sonuçlar görme engelli bireylerin cebirsel ifadelere dair öğretim uygulamalarına ihtiyaç duyduğunu ortaya koymaktadır. Benzer şekilde Aktaş ve Argün (baskıda) görme engelli bireylerin örüntü kavramı için genellemelere ulaşmada, cebirsel söylemleri harfli ifadeler ile temsil etmekte ve işlemler yapmakta güçlük çektiğini vurgulamıştır. Dolayısı ile görme engelli bireyler için tasarlanan bireysel öğretim programlarında cebirsel ifadeler, cebirsel söylemler ve harfli ifadeler kavramlarına dair hedeflere yetersiz düzeyde yer verildiğini söyleyebiliriz. Halbuki bu kavramlara dair kazanımlar öğretim programında ortaokul ve 9.sınıf düzeylerinde yer almaktadır (MEB, 2018a; 2018b). Katılımcıların doğru genellemeye ulaşmalarını sağlayan en etkili yol ise belirledikleri hatalı cebirsel ifadeleri kümeler arasındaki eşlemelerden biri ile teyit etmelerini istemektir. Böylece katılımcıların doğru cebirsel ifadeyi belirleyebildikleri tespit edilmiştir. Katılımcıların küme temsili veya tablo temsili verilen eşlemelerin ya da Venn şeması ile temsil edilen iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi grafik ile temsil etmede başarılı olduğu Bölüm 5.4.6' dan bilinmektedir. Son iki öğretim oturumunda ise değişken kavramının tartışılmasına dayanarak grafik temsili ile cebirsel temsil arasında geçişler ele alınmıştır. Katılımcıların önbilgilerinde grafik üzerindeki noktaların koordinatlarını belirleme ve sıralı ikililer arasındaki ilişkiyi belirleme hedefleri yer almaktaydı. Bu nedenle ilk olarak katılımcılardan grafik temsili verilen iki küme arasındaki ilişkinin cebirsel temsilini elde etmeleri beklenmiştir. Sema $y = x^3$ grafiği üzerindeki işaretli noktaları incelediğinde sıralı ikililerin temsil ettiği eşlemeyi oluşturan ilişkiyi belirlerken 'artma ve azalma' fikirlerine odaklanmıştır. Bu sonuç, artış miktarına odaklanma öğrenenin genellemeye ulaşmada başvurduğu ilk stratejiler arasında yer aldığından (Aktaş & Argün, baskıda; Lannin vd., 2006) şaşırtıcı değildir. Daha sonra Sema iğneli sayfa üzerinde koordinatlarını belirlediği sıralı ikililer yardımıyla iki küme arasındaki ilişkiyi belirlemeye çalışmıştır. İlk olarak Sema, $(2, 8)$ sıralı ikilisi için bağımsız değişkenin '4 katı' ilişkisini kontrol etmiş ve sonra kuvvet ilişkisini düşünerek 'apsisin küpü' şeklinde ilişkiyi betimlemiştir. Sema' nın bu uygulamada yaşadığı güçlük iki kümenin elemanları arasındaki eşleme, ilişki ya da bu ilişkinin temsili kavramlarına dair olmadığını söyleyebiliriz. Burada

Sema’ nın aritmetik bilgisinden ve cebire geçiş kazanımlarına dair önbilgisindeki eksikliklerden kaynaklanan bir güçlük söz konusudur.

Cebirsel temsili verilen iki küme arasındaki ilişkinin grafik temsilini inşa ederken, sadece Sema’ nın cebirsel temsilden yararlanarak ilk sıralı ikilinin koordinatlarını belirlemekte güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Örneğin, $y = x$ cebirsel ifadesinin grafik temsilini inşa ederken Sema ilk olarak $(-2, -3)$ noktasını işaretlemek istemiştir. Benzer şekilde $y = x + 3$ cebirsel temsilinin grafik temsilini inşa ederken Sema, ilk sıralı ikiliyi belirlemekte güçlük yaşamıştır. Bu uygulamalarda Sema’ dan $y = x$ ve $y = x + 3$ cebirsel ifadelerini yorumlaması istenmiş ve seçtiği sıralı ikililerin bu yoruma göre doğru olup olmadığını kontrol etmesi beklenmiştir. Böylece Sema’ nın daha sonraki sıralı ikilileri kolaylıkla işaretleyerek ip yardımı ile grafiği çizdiği belirlenmiştir. Sema’ nın yaşadığı bu güçlük, $y = x + 3$ ifadesi üzerinden örneklendirilecek olursa, ‘apsisin üç fazlası olan ordinat ile eşleme’ fikrini başlangıçta kavrayamamasına dayanmaktadır. Mete ise ilk olarak x ve y değişkenlerinin apsis ve ordinat ile belirlenen kümeleri temsil eden değişkenler olduğunu teyit etmiştir. Bu nedenle güçlük yaşamadan sıralı ikilileri belirlemiş ve grafiği inşa etmiştir. Mete’ nin başarısına etki eden en önemli faktör değişkenlerin temsil ettiği kümeleri belirlemesidir. Dolayısı ile Sema’ nın apsis ve ordinat arasındaki ilişkiyi fark edememesindeki temel gerekçenin, değişkenlerin temsil ettiği kümeleri başlangıçta göz önüne almaması olduğunu söyleyebiliriz.

Öğretim oturumlarında doğrusal olmayan ilişkiler için temsiller arası geçişlerin inşa edilmesine dair uygulamalara da yer verilmiştir. İlk olarak $y = x^2$ cebirsel ifadesinin grafik temsilini oluşturmaları istenmiştir. Katılımcıların her ikisi de sıralı ikilileri kolaylıkla belirlemiş ve işaretlemiştir. Ancak katılımcılar grafiği tamamlamak için ip yardımı ile işaretledikleri noktaları birleştirirken güçlük yaşamışlardır. Sema bir süre düşündükten sonra orijin noktasına kadar ikinci bölgedeki noktaları birleştirerek ipi orijin noktasından kıvırarak grafiği tamamlayabilmiştir. Ayrıca reel sayılar kümesi üzerinde grafiğin kollarının yukarı doğru devam edeceğini de belirtmiştir. Ancak Mete cebirsel temsilin $x^2 = y$ olarak ifade edildiğinde ilişkinin değişip değişmediğini sorgulamıştır. Bu tartışma Mete’ nin eşitlik kavramında değişme özelliğini bilmediğini veya sıralı ikiliyi belirlemeye dair bilgi eksiklilerinin olduğunu düşündürmektedir. Fakat Mete’ nin bu tercihinin gerekçesi sorgulandığında, koordinat sisteminde ilk apsisi incelediği/belirlediği için cebirsel temsilde eşitliğin değişme özelliğini kullanarak bu temsile odaklandığı belirlenmiştir. Bu sonuç Mete’ nin zihin alışkanlıklarının cebirsel temsil süreçlerindeki rolünü vurgulamaktadır. Mete grafiği tamamladığında ip temsilinin işaretlediği her noktadan geçmesi gerektiğini belirterek tekrar noktaları kontrol etmiştir. Bu durum görme engelli bireylerin parçaları inceleyerek bütünü hissetme çabası olarak yorumlanabilir (Thinus-Blanc & Gaunet, 1997). Ayrıca görme engelli bireylerin not tutmada yaşadığı önemli sorunlardan birine işaret etmektedir. Problem çözme sürecinde olduğu gibi grafik inşa ederken de görme engelli bireylerin yazdıklarını tekrar kontrol etme veya hatırlama ihtiyacı duyduğu belirlenmiştir. Bu sonucu destekleyen bir diğer örnek ise Mete' nin grafik üzerinde belirlediği sıralı ikililerin koordinatlarını not tutmadığı için unutarak, araştırmacıdan sıralı ikilileri söylemesini istemesidir. Dolayısı ile grafik temsilinden cebirsel temsili elde etmede görme engelli bireylerin not tutma ihtiyacının ortaya çıktığını söyleyebiliriz.

5.5. Görme Engelli Öğrencilerin Öğrenme Yol Haritalarına İlişkin Sonuçlar

Öğrenme yol haritasının müfredat geliştirme (Barret vd., 2012; Clements & Sarama, 2008), değerlendirme araçları (Battista, 2004) ve destek eğitim araçları (Bardsley, 2006; Simon & Tzur, 2004) geliştirme için kilit rol oynadığı dikkate alındığında, Sema' nın ve Mete' nin öğrenme yol haritalarındaki farklılıkları, ve dolayısı ile benzerlikleri, önem arz etmektedir (bkz. Bölüm 4.4.1.3 ve 4.4.2.3). Sayı doğrusu, koordinat sistemi, grafik ve cebirsel temsil kavramlarına ilişkin tasarlanan öğretim oturumlarında yer alan hedef sıralamalarında farklılıkların olmaması dikkat çekmektedir. Bu araştırma kapsamında tasarlanan tahmini öğrenme yol haritasının bu kavramlara dair hedefler (bkz. Tablo 12) için görme engelli ortaöğretim öğrencilerine genellenebilir olduğundan söz etmek iki katılımcıdan elde edilen sonuçlar için iddialı olacaktır. Bunun yerine katılımcıların hedef sıralamasında farklılıklarının olduğu küme, doğru ve doğru parçası kavramlarını ele almakta yarar vardır. Sonuçlar incelendiğinde (bkz. Bölüm 5.4.1., 5.4.2 ve 5.4.3) katılımcıların küme, doğru ve doğru parçası kavramlarına dair önbilgilerinin farklı olduğu ve buna bağlı olarak gerçekleştirdikleri hedef sıralamalarında farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Örneğin; kümenin sezgisel tanımını yapabilen Mete ile küme kavramını günlük hayat örnekleri ile tartışarak fark eden Sema' nın öğrenme yol haritalarında farklılıklar vardır. Bir diğer örnek; Mete' nin öğretim oturumundan önce doğru ve ışın kavramına dair yanılgısının olması ve doğru parçası kavramına hakim olması, böylece Sema' dan farklı olarak öncelikle doğru parçasına ilişkin hedefleri gerçekleştirmesidir. Dolayısı ile katılımcıların öğrenme yol haritalarının, hem birbirlerine ve hem de tasarlanan tahmini öğrenme yol haritasına göre farklılıklar içermesinin temel nedeni olarak onların hazır bulunuşluk düzeylerini işaret edebiliriz.

Literatürü destekler nitelikte (Li, 2006; Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004) önbilginin öğrenme yol haritasında etkili olduğunu kanıtlayan bir diğer sonuç ise iki küme arasındaki ilişkinin cebirsel temsili ve diğer temsil türlerinin ele alındığı hedeflerde karşımıza çıkmaktadır. Katılımcıların cebirsel ifadeler, cebirsel ifadelerle işlemler ve değişken kavramlarına ilişkin önbilgilerindeki yetersizlikler, tahmini öğrenme yol haritasına göre hedefler sıralamasında farklılıkları ortaya çıkarmıştır. Dahası, öğretim deneyinde katılımcıların çeşitli temsiller ile sunulan iki küme arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmede yaşadığı güçlükleri ortadan kaldırmak için ek öğretim oturumu tasarlanması gerekmiştir. Böylece öğrenme yol haritalarına 'iki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilme', 'grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiye ait noktaları tespit edebilme' ve 'grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleri ile ifade edebilme' hedefleri eklenmiştir. Bu hedefler için tasarlanan etkinlik adımlarında (bkz. EK3, Protokol VI-Ek) grafik temsili ve cebirsel temsil kavramlarına ilişkin deneyimlerin artırılması mümkün olmuştur. Benzer şekilde kavram odaklı olarak düşünüldüğüne görme yetersizliği olmayan öğrenciler için de söz konusu hedeflere yer verilmesi öğrencilerin grafik kavramına dair tecrübelerini artıracaktır.

Araştırmada ortaya konulan tahmini öğrenme yol haritasına göre katılımcıların öğrenme yol haritalarındaki farklılıkların diğer kaynağı, öğretim oturumlarında kullanılan destek eğitim araçlarıdır. Özellikle kullanılan somut materyaller, hedef sıralamalarındaki farklılıkların yanı sıra kavramsal anlamada cebirsel düşünmelerin şekillenmesinde rol almaktadır. Mete' nin anten materyali ile doğru kavramı yerine doğru parçasını temsil etmesi, nihayetinde doğru parçasına ilişkin hedefleri öncelikli gerçekleştirmesi ve doğru parçasını noktalar kümesi olarak tanımlaması bu sonuca verilebilecek etkili bir örnektir. Simon ve Tzur (2004) kesir kavramına dair öğrenme yol haritasını yapılandırdığı 'bar' materyali yerine, şimdiki araştırmada ortaya konulan öğrenme yol haritasında da tabla, anten ve iğneli sayfa gibi somut materyaller rol almıştır. Bu somut materyallerin öğretim oturumunda sebep olduğu güçlükler araştırmanın bir sınırlılığını oluşturduğunu söyleyemeyiz. Nihayetinde kullanılan somut materyaller, tahmini öğrenme yol haritasında yer alan hedefleri katılımcıların gerçekleştirmesi için zemin hazırlamıştır. Bu sonuca anten materyalinin doğru ve doğru parçası kavramlarının tanımlanmasını mümkün kılması bir emsal teşkil etmektedir. Benzer şekilde iğneli sayfa materyalinde koordinat sistemini konumlandırırken iğne sayısının kümelerin eleman sayısı için yetersiz olması bir sınırlılık gibi görünürken, bu durum katılımcıların her uygulamada birim ve iki küme arasındaki eşleme kavramlarına dair hedefleri tekrar etmesine imkan sunmuştur.

Görme engelli bireyler için öğrenme yol haritalarında ele alınması gereken hedefler arasında kabartma yazıda ve Latin yazıda olmak üzere, görme yetersizliği olan ve olmayan bireyler için kavramlara ilişkin sembolik temsillere, gösterimlere ve matematiksel dile yer vermek gerekmektedir. Örneğin, katılımcıların 'elemanı olma' sembolü ya da doğrunun grafik temsili gibi görsel ve sembolik temsiller için ayrı ayrı incelemelere ihtiyaç duyduğu belirlenmiştir. Dolayısı ile görme engelli bireyler için tasarlanan tahmini öğrenme yol haritalarında kavramlara dair bu nitelikler için ayrı hedeflere yer verilmesi gerekmektedir.

Bu araştırmada tasarlanan tahmini öğrenme yol haritasının, literatür (Arieli-Attali vd., 2012; Maulana 2019; Moss vd., 2019; Panorkou vd., 2013; Weber & Thompson, 2014) ve katılımcılara ait öğrenme yol haritaları karşılaştırılarak kavram odaklı olarak tartışılması, görme engelli bireylerin cebir kavramlarına dair öğrenme yol haritasının incelenmesine katkı sunacaktır. Öğrenme yol haritasının başladığı küme kavramı için katılımcıların önbilgilerinden kaynaklanan farklılıklar ortaya çıkmıştır. Örneğin, Mete önbilgilerine dayanarak 'küme kavramının sezgisel tanımını yapabilme' hedefini gerçekleştirirken, Sema 'küme kavramına ilişkin örnekler sunabilme' hedefine dair uygulamalar ile başlamıştır. Benzer şekilde katılımcıların küme kavramı için sundukları örnekler de önbilgilerine bağlı olduğundan, sayı kümeleri örnekleri ile 'sonlu ve sonsuz küme kavramlarını açıklayabilme' hedefine ulaşmalarındaki sıralamaları da farklılık arz etmiştir. Bu temel etkenler üzerine, katılımcıların küme kavramına dair hedef sıralaması oldukça farklı ilerlemiştir. Ancak her iki katılımcının da 'küme, kümenin adı, kümenin elemanları, kümenin 'elemanı olma' sembollerini bilme' hedefine dair önbilgileri olmadığından, öğrenme yol haritalarının hedef sıralamasında benzerlik gösterdiği belirlenmiştir. Bu benzerlik katılımcıların önbilgilerinden ziyade, görme engelli bireylerin matematiksel kavramlar için sembolik temsillere dair öğretim uygulamalarına maruz kalmadığı şeklinde yorumlanabilir. Çünkü katılımcıların kümenin liste yöntemiyle temsili veya 'kümenin elemanı olma' sembolünün kullanılması gibi uygulamalarla ilk defa karşılaştığı belirlenmiştir. Fakat, kümenin liste yöntemiyle temsilini ifade etmeye çabalarken katılımcıların sembol kullanma gerekliliği duyması, onların sembolik dil kullanmaya yatkınlığını ortaya koymaktadır. Nitekim görme engelli bireylerin kabartma yazı kodları sembolik dil üzerine kurulmaktadır (Dick & Kubiak, 1997).

Küme kavramında dikkat çeken bir diğer sonuç ‘evrensel küme ve altküme kavramlarını açıklayabilme’ hedefinde ortaya çıkmıştır. Öğretim etkinliklerinde kullanılan tabla ile evrensel küme ve altküme kavramlarının temsili, küme kavramını örneklendirme ve tartışma üzerine fırsat sunmuş olmasının yanında, katılımcıların bu kümeleri tanımlama ve kümelerin elemanlarını belirleme gibi çeşitli güçlükler yaşamasına da neden olmuştur. Buna dayanarak tasarlanan ek öğretim oturumunda (bkz. EK3, Protokol I-Ek) ‘evrensel küme kavramını açıklayabilme’ ve ‘altküme kavramını açıklayabilme’ hedeflerine yer verilmiştir. Bu öğretim oturumunda kullanılan günlük hayattan örnekler ve poşet materyali ise katılımcıların altkümenin evrensel kümenin bir elemanı değil, altkümesi olduğunu anlamalarına katkı sunmuştur. Dolayısı ile evrensel küme ve altküme kavramlarının bağlama göre ilişkilendirilerek incelenmesinin gerekliliği ortaya çıkmıştır. Ayrıca katılımcıların söz konusu hedefler için öğretim oturumlarında öğrenmelerindeki ilerlemeler incelendiğinde:

- altküme ve evrensel küme için örnekler sunabilme
- verilen bir altküme ve evrensel küme örneklerinde bu kümelerin elemanlarını belirleyebilme
- altkümenin her elemanının evrensel kümenin elemanı olduğu, ancak evrensel kümenin her elemanının bir altkümenin elemanı olması gerekmediği fikrini açıklayabilme
- altküme ve evrensel kümeyi tanımlayabilme hedeflerinden söz etmek mümkündür.

İki kümenin elemanları arasındaki eşleme ve ilişki kurma kavramlarına dair hedefler için katılımcıların kümelerin elemanlarını eşleme temsillerinde farklı temsil türleri kullanmaları, öncelikle kümenin kendi elemanları arasındaki ilişkiyi belirleyebilmeleri ve iki küme arasındaki ilişkiyi ifade etmekte güçlük yaşamaları onların önbilgilerine dayandığını söyleyebiliriz. Çünkü katılımcıların liste yöntemi ile küme temsiline aşina olmaları, onların öncelikle bu temsil türünü tercih etmelerine zemin hazırlamıştır. Ayrıca cebirsel ifadelere dair önbilgilerindeki eksiklikler iki küme arasındaki ilişkiyi sözlü ya da yazılı olarak ifade etmelerinde güçlük yaşamalarına neden olmuştur. Dolayısı ile öğrenme yol haritasında nicelikler arasındaki ilişkinin cebirsel ifadelerle temsil edilmesine dair hedeflerin öncelikle ele alınmasının gerektiğini belirtebiliriz. Dahası katılımcıların ‘iki kümenin elemanları arasında birebir eşleme kurabilme’ hedefini gerçekleştirmeleri, tasarlanan tahmini öğrenme yol haritasına göre çok daha sonra meydana gelmiştir. Bu farklılıkta katılımcıların daha önce eşleme kurma fikrine sahip olmamaları ve ‘birebir eşleme’ terimi ile ilk defa öğretim oturumunda karşılaşmaları etkili olmuştur. Buna rağmen katılımcıların incelenen örneklerde, özellikle okulda öğrenci numaraları örneğinde, birebir eşlemeyi açıklayabildikleri, ancak sadece bu eşlemeyi adlandıramadıkları belirlenmiştir.

Doğru ve doğru parçası kavramları için katılımcıların ilköğretim düzeyinde edindiği kavram bilgisine dayanarak, tahmini öğrenme yol haritasında 'düz çizgi ile doğruyu ilişkilendirebilme' hedefine başlangıçta yer verilmemiştir. Ancak katılımcılar öğrenme yol haritalarında önce 'düz çizgi kavramını bilme' ve 'düz çizgi ile doğruyu ilişkilendirebilme' hedeflerine yer vermişlerdir. Çünkü katılımcıların yol, ip, kablo ya da anten gibi görsel temsiller ile doğru kavramını ifade etmeleri güç olmuştur. İlginçtir ki katılımcıların her ikisi de 'düz çizgi' kavramını hayal etmekte ve parmakları ile çizmekte başarılı olmuştur. Bu sonucun da önbilgiler ile ilişkili olduğunu ifade etmek şaşırtıcı değildir. Doğru ve doğru parçası kavramları için katılımcıların önbilgileri ve kullanılan somut materyalleri yorumlama becerilerine göre öğrenme yol haritalarında farklılıklardan bahsedilmişti. Mete' nin doğru kavramına ait hedefleri gerçekleştirirken anten materyalinden yola çıkarak, doğru parçası kavramına ve dolayısı ile bu kavramların temsil türlerine ait hedefleri Sema' ya göre daha önce gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Ancak bu kavramlar için katılımcıların öğrenme yol haritaları öğrenci düşünmeleri bağlamında ele alındığında Sema' nın kavramları açıklama, temsil etme ve özelliklerini fark etmede daha başarılı olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısı ile doğru ve doğru parçası kavramlarına ilişkin hedeflerin birbiri ile iç içe ve kapsamlı olmasından ziyade, önce doğru kavramına ve ardından doğru parçası kavramına dair hedeflere yer verilmesi öğrencinin anlamasına katkı sunduğunu söyleyebiliriz. Nitekim öğretim programlarında da doğru kavramına ait kazanımlara, doğru parçasına ait kazanımlardan önce yer verilmektedir (MEB, 2017a; 2018b). Ayrıca tahmini öğrenme yol haritasında yer alan hedefler:

- doğru parçasını düz çizgi ile ilişkilendirme
- doğru ve doğru parçası kavramlarının görme yetersizliğine sahip olmayan bireyler için gösterimlerini bilme
- doğru ve doğru parçası kavramlarını ilişkilendirebilme
- doğru kavramını tanımlayabilme gibi hedefler ile daha ayrıntılı olarak öğrenme yol haritalarında yer almıştır.

Doğru ve doğru parçası kavramlarına dair kazanımlar öğretim programlarında küme kavramından daha önce ele alınmaktadır (MEB, 2017a; 2018a). Şimdiki araştırmada ise doğru kavramının 'düz çizgi' temsilinin yanı sıra, 'noktalar kümesi' olarak da düşünülmesi önem arz etmektedir. Bununla birlikte doğru üzerindeki noktaların sayı kümelerinin elemanları ile eşlenmesi ve sonuçta cetvelleme kavramının yapılandırılması, koordinat sistemi için önbilgi niteliği taşımaktadır. Dolayısıyla doğru kavramı tahmini öğrenme yol haritasında da küme kavramından sonra ele alınmıştır. Dahası öğretim deneyinde doğru kavramı için katılımcıların kendilerinin 'doğrultu' fikrini tartışmaya açması, doğru kavramı için doğrultunun incelenmesine dair bir hedefe ilişkin ihtiyacı ortaya çıkarmıştır. Öğretim programlarında ise doğrultu kavramı, yatay ve düşey gibi doğrultuları farklı doğru temsilleri ele alınmaktadır. Doğru ve doğru parçası kavramlarına dair öğretim programlarında yer alan kazanımlar ile bu araştırmada elde edilen öğrenme yol haritalarındaki hedefler arasında benzerlik gösteren bir diğer husus, bu kavramların sembol gösterimlerine ait hedeflerin ve kazanımların sıralanmasıdır. Her iki sıralamada da bu kavramların sembol gösterimlerine, kavram tanımları ve temsil türlerinden sonra yer verildiği gözlenmektedir. Arieli-Attali vd. (2012) de 'öğrenme ilerlemeleri' olarak ortaya koyduğu hedef silsilesinde, kavramın temsil türlerinin ve sembol gösterimlerinin kavrama ait diğer hedeflerden sonra yer verilmesinin gerekliliğini vurgulamıştır. Çünkü kavrama ait temsilleri ve sembol gösterimlerini yorumlamak, ancak kavram tanımına hakim olmak ile mümkün olacaktır.

Öğrenme yol haritalarında sayı doğrusu (cetvelleme) kavramına dair hedefler ve sıralamaları tahmini öğrenme yol haritasındakiler ile paralel gerçekleşmiştir. Ancak öğretim oturumlarında katılımcılardan uzunluk ölçü birimlerine dair fikir yürütmeleri 'uzunluk niteliği için birim kavramını açıklayabilme' hedefini meydana getirmiştir. Ayrıca bir doğruyu cetvellerken sayı kümesinin tamsayılar ya da reel sayılar kümesinin altkümesi olması önem arz etmektedir. Nitekim katılımcılar reel sayılar ile iğneli sayfa materyalinde doğruyu cetvellemede birim belirlerken bir süre düşünme ihtiyacı duymuştur. Dolayısı ile öğrenme yol haritalarında 'doğru üzerindeki noktaları reel sayılar ve/veya tamsayılar ile eşleyebilme' hedefi yer almıştır.

Koordinat sistemi ve grafik temsili üzerine katılımcıların öğrenme yol haritaları paralellik gösterirken, sadece 'sıralı ikilileri açıklayabilme' ve 'koordinatları verilen noktayı işaretleyebilme' hedeflerinin sırası farklılık göstermektedir. Bu farklılık Mete' nin öğretim oturumlarında not tutma ve eşlemeleri sembolik olarak temsil etme isteğinden meydana gelmiştir. Mete eşlemeleri göstermek için tablette not alırken sıralı ikilileri temsil etme gereksinimi duymuş ve böylece sıralı ikili kavramını daha önce fark etmiştir. Ancak tahmini öğrenme yol haritasından ve Mete' den farklı olarak Sema, önce koordinat sisteminde noktaları işaretleme hedefine erişmiştir. Çünkü, Sema iğneli sayfa materyali ile çalışmaktan ve not tutmaktan keyif almış, dahası bu materyalin kullanışlı olduğunu düşünmüştür. Buna ek olarak Sema not alarak eşlemelerin ve ilişkilerin temsil edilmesinden ziyade koordinat sisteminde çalışmayı tercih etmiştir.

İki küme arasındaki ilişkinin temsil edilmesine ve koordinat sisteminde grafik temsiline ait hedefler katılımcıların öğrenme yol haritalarında aynı sıralamada devam ederken, tahmini öğrenme yol haritasına göre küçük farklılıklar içermektedir. Katılımcılar iki küme arasındaki ilişkiyi temsil ederken, kümeler arasındaki eşlemeleri tablo temsili ile sunma ya da tablo ile sunulan eşlemelerde kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi belirleme eğiliminde olmuştur. Burada görme engelli bireylerin kullandığı küptaş kasa materyali ile not tutma ihtiyacı ve bu materyalin kullanımının tablo temsiline benzerliği rol oynamaktadır. Dolayısı ile öğrenme yol haritalarına 'tablo ile sunulan eşlemeler yoluyla iki küme arasındaki ilişkiyi belirleyebilme' hedefi eklenmiştir. Tahmini öğrenme yol haritasına göre farklılık arz eden diğer husus, 'iki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilme' ve 'noktaları doğru parçaları ile birleştirerek ilişkiyi grafik ile temsil edebilme' hedeflerinin sıralamalarının yer değiştirmesidir. Bu farklılık görme engelli bireylerin söylem ile ifade etme becerilerinin gelişmiş olmasının (Dick & Kubiak, 1997) ve katılımcıların iki küme arasındaki ilişkiyi cebirsel ve grafik temsil türlerinde önbilgilerine dayalı eksikliklerin olmasının sonucudur. Nihayetinde iki küme arasındaki ilişkinin grafik temsiline dair ek öğretim oturumun tasarlanması gerekmiş, böylece tahmini öğrenme yol haritasından farklı olarak öğrenme yol haritasına 'grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiye ait noktaları tespit edebilme' ve 'grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleri ile ifade edebilme' hedefleri eklenmiştir. Bu hedefler ile katılımcıların tablo ya da Venn şeması temsilleri ile sunulan kümeler arasındaki ilişkileri grafik ile temsil edebildiği belirlenmiştir. Ayrıca katılımcıların cebirsel temsile ilişkin deneyim kazanmaları mümkün olmuştur. Bu öğretim oturumunda katılımcıların lineer (doğrusal) olan ve olmayan ilişkileri belirlerken ve temsil ederken doğruyu iple temsil etmede ya da parabolde işaretli noktaları içeren grafiği çizmede farklı güçlükler veya düşünme süreçleri içerinde oldukları belirlenmiştir. Bu sonuçlar doğrusal grafikler ve paraboller için farklı hedeflerin ele alınmasını gerekli kılmaktadır.

İlk ve orta okul düzeylerinde öğretim programlarında (MEB, 2017a; 2018a) istatistik kavramları ile karşımıza çıkan grafik, ortaöğretim programında (MEB, 2017b; 2018b) ise fonksiyon kavramının temsil türleri ile karşımıza çıkmaktadır. Ancak her iki düzey programlarda da koordinat sistemi ve grafik temsili kavramlarının şimdiki araştırmada olduğu gibi sayı doğrusu, birim, eşleme gibi fikirler üzerine kurulmadığı dikkat çekmektedir. Ayrıca grafik temsilinde kümeler arasındaki eşlemeleri temsil eden sıralı ikili kavramı ve bu noktaları birleştiren doğru parçaları ile grafik temsilini oluşturma fikirleri de öğretim programlarında yer bulamamıştır. Ancak sonuçlar görme engelli öğrencilerin tasarlanan etkinliklerde, yanı sıra görme yetersizliği olmayan öğrenciler için de yorumlanabilir (Panorkou vd., 2013), koordinat sistemi ve grafik temsili için tahmini öğrenme yol haritasında yer alan hedeflerin takip edilmesi kavramsal anlamalarını sağladığını söyleyebiliriz.

Değişken kavramının tartışıldığı öğretim oturumunda, iki küme arasındaki ilişkinin belirlenen değişkenler yardımıyla cebirsel olarak ifade edilmesinde katılımcıların güçlükler yaşadığı belirlenmiştir. Bu güçlükler arasında en dikkat çekeni katılımcıların bağımlı ve bağımsız değişkenleri ve kümeler arasındaki ilişkiyi belirlemelerine rağmen cebirsel temsili ifade edememeleridir. Bu sonuç katılımcıların önbilgilerine dayalı olarak cebirsel ifadeler ile işlem yapma ve 'artma, azalma, kat' gibi söylemleri cebirsel olarak ifade edememe ve benzeri kavram bilgisindeki eksikliklerini işaret etmektedir. Arieli-Attali vd. (2012) söz konusu doğrusal ilişkinin öğrenen tarafından öncelikle kavrandığını vurgulamaktadır. Dolayısı ile öğretim oturumlarında değişken kavramı ile iki küme arasındaki ilişkinin cebirsel temsili de ele alınmıştır. Bu durum Weber ve Thompson' ın (2014) hedef sıralamasına benzer şekilde şimdiki araştırmada ortaya konulan tahmini öğrenme yol haritasına:

- bağımlı ve bağımsız değişkenleri farklı harflerle temsil edebilme
- iki küme arasındaki eşlemeye dayanarak bağımlı ve bağımsız değişkenler ile ilişkiyi ifade edebilme
- cebirsel temsil ile grafik temsili arasında geçişleri yapabilme hedeflerinin eklenerek öğrenme yol haritalarının şekillenmesi ile sonuçlanmıştır.

Elde edilen sonuçlar katılımcıların ortaokul düzeyinde kazanımlara (MEB, 2017a; 2018a) dair eksikliklerini ortaya koymaktadır. Her iki katılımcı da sözel ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazmada ve cebirsel genellemeleri kurmada güçlükler yaşamıştır. Maulana (2019) da görme engelli öğrenciler ile yürüttüğü çalışmasında, öğrencilerin cebirsel ifadeler ile çalışmada yetersizliklerini tespit etmiştir. Dolayısı ile görme engelli öğrencilerin bireyselleştirilmiş eğitim programlarının ileri cebir kavramlarını yapılandırmayı mümkün kılacak şekilde tasarlanmadığını söyleyebiliriz. Ayrıca öğretim programlarında değişken kavramının 'bir kümenin elemanlarını temsil eden sembol' fikri ile ele alınmadığını da vurgulamak gerekmektedir. Öğretim programlarının yanı sıra literatürde yer alan öğrenme yol haritalarında da (Moss vd., 2019; Panorkou vd., 2013) değişken kavramının harfli ifadeler ile veya bilinmeyenin temsilcisi olarak ele alındığı belirlenmiştir. Bu durum öğretim oturumlarında karşılaşılan öğrenci yanılgılarının gerekçesi olarak gösterilebilir. Dolayısı ile bu araştırmada ortaya konulan hedef sıralamalarının cebirsel ifadelere ilişkin hedefler ile zenginleştirilmesinin gerektiğini belirtebiliriz.

BÖLÜM VI

ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmanın sonuçları göz önüne alınarak görme engelli öğrencilerle matematik öğretimi uygulamalarına, uygulamalarda rol alan öğreticilere ve bu bağlamda matematik eğitimi araştırmalarına ilişkin önerilere yer verilmektedir.

6.1. Görme Engelli Bireyler İçin Matematik Öğretimi Uygulamalarındaki ihtiyaçlara ve Sorunlara İlişkin Öneriler

Araştırmanın ilk aşamasında görme engelli bireylerin ihtiyaçları ve sorunlarına dair elde edilen sonuçların her biri eğitim-öğretim uygulamaları düzenleyenlere, öğretmenlere, araştırmacılara birer öneri niteliği taşımaktadır. Çünkü elde edilen ihtiyaçlar, çözüm bekleyen sorunlara kaynak teşkil etmektedir. Sorunlar ise görme engelli bireylerin eğitim-öğretim uygulamalarındaki beklentilerini ortaya koymaktadır. Söz konusu beklentiler araştırmacılar için gerekçelendirilerek, düzenleme veya geliştirme yapılması mümkün olan araştırma başlıklarını işaret etmektedir. Bu bağlamda sonuçlarda ele alınan kategoriler öneri niteliğinde sunulacaktır.

6.1.1. Matematik Eğitimi Araştırmalarına İlişkin Öneriler

Görme engelli bireylerin özellikle matematiksel işlemlerdeki takibini kolaylaştıran ve pratik şekilde not tutmalarını sağlayan, ergonomik bir not tutma materyalinin tasarlanmasını önermek şaşırtıcı değildir. Ancak bu ihtiyacın karşılaması sonucunda yazılı materyal ve öğrendiklerini tekrar etme ihtiyaçlarının da karşılanacak olması önemlidir. Dahası, bu amaçla ortaya konulan bir materyal ile görme engelli bireyin matematikte işlem takibi yapabileceği, böylece işlemlerde hataların ve okuyucu bireye bağımlılığın azalacağı da eklenmelidir. Ayrıca kabartma yazıda not tutmanın güç olması görme engelli bireyleri kendilerine özgü kısaltmalar kullanmaya yöneltmektedir. Dolayısı ile geliştirilecek olan destek eğitim aracı, bireye özgü kısaltmaların kullanılması sonucunda matematiksel dilde oluşabilecek farklılıkların bir derece önlenebileceği düşünülmektedir.

Yazılı materyal ihtiyacını artıran bir diğer sorun ise ekran okuyucu programların matematiksel sembolleri ve şekil, grafik gibi görsel içerikleri seslendirmekte yetersiz kalmasıdır. Matematiksel sembolleri ve denklemleri, şekil ve grafikleri okuyabilen programların yaygınlaştırılması da teknolojik materyal tasarlayıcıları için öneri niteliği taşımaktadır. Elbette somut materyaller için de önerilerde bulunmak mümkündür. Ancak bu önerileri kavram odaklı olarak detaylı araştırmaların sonucunda ortaya koymak mümkün olacaktır. Dolayısı ile görme engelli öğrencilerin matematik kavramları için somut materyal ihtiyaçlarının, öğrenci düşünmeleri üzerine gerçekleştirilecek araştırmaların sonucunda tasarlanarak karşılanmasına ihtiyaç vardır. Bu materyaller, konu odaklı olarak tasarlanabileceği gibi grafik çizimi, geometrik problem çözümü, cebirsel işlem yapma gibi öğrenme alanlarında yer alan kavram dizisine de uygun tasarlanabilir.

Sonuçlara göre soyut matematiksel içeriklerin, görme engelli bireyin deneyimlerine dayanan günlük hayat örneklerinden dramaya veya dokunsal iletişime dayanan bireylerin avuç içlerine çizim yapmaktan kabartma şekillere kadar çeşitli uygulamalar ile somutlaştırılması gerekmektedir. Ayrıca somutlaştırma için merak uyandırıcı örneklerden ya da görme yetersizliğine sahip bireylerin somut nesnelere ilişkin tecrübelerinden yararlanmak önemli stratejiler arasındadır. Bu önerileri ayrıntılı ele alabilmek için kavram odaklı olarak araştırmaların gerekliliği açıktır (Brazier, Parry & Fischbach, 2000; Budayasa & Juniati, 2018; Bülbül & Eryılmaz, 2012; Kızılaslan, 2016; Li, 2006). Böylece gerçekleştirilen araştırmalar sonucunda söz konusu stratejilerin nasıl tasarlanması gerektiği veya etkililiği incelenebilecektir.

Temel cebir kavramlarına ilişkin sonuçlar incelendiğinde; görme engelli bireylerin değişken, bilinmeyen ve eşitlik kavramlarına dair yanılgıları, fonksiyon, cebirsel ifadeler ve genellemeye ulaşma kavramlarına dair bilgi eksiklikleri belirlenmiştir. Bu nedenle bu kavramlara dair öğrenci kavramalarının incelenmesi ve yanılgıların gerekçelerinin ortaya konulması, daha genel olarak öğrenme yol haritalarının elde edilmesinin gerektiğini söyleyebiliriz. Böylece bireyselleştirişmiş eğitim programlarının tasarlanması ile öğrencilerin söz konusu kavramları öğrenmesi mümkün olacaktır.

6.1.2. Matematik Öğretimine İlişkin Öneriler

Öğretim uygulamalarında yaşanan dikkat çeken sorunlardan bir diğeri görme engelli bireyler ile görme yetersizliğine sahip olmayan öğreticiler ve okuyucu bireyler arasındaki matematiksel iletişim üzerinedir. Bu sorunlar; öğretmenlerin kaynaştırma öğrencisine öğretim yapma tecrübesinin yetersizliği, görme engelli öğrencinin Latin sembolleri bilmemesi, bunların sonucunda ise sözlü anlatımda betimlemeye dayalı iletişim güçlüklerinin yaşanması olarak sıralanabilir. Dolayısıyla öğretmenlerin Braille yazı bilmese bile görsel şekilleri ve sembolleri ayrıntılı betimlemesi, somut örneklere dayalı uygulamalara yer vermesi, görsel içerikleri destekleyen yazılı materyallerin söylemler ile eş zamanlı desteklenmesi önem arz etmektedir.

Araştırma sonuçlarında görme engelli öğrencilerin matematiksel problem çözümlerinde sıklıkla sınama (tahmin et-uygula) stratejisine yer verdiği ve denklem kurmada yetersizliklerinin olduğu belirlenmiştir. Dolayısı ile görme engelli öğrenciler için tasarlanacak öğretim uygulamalarında denklem kurma becerisini geliştiren ve sınama stratejisinden farklı cebirsel ifadelerle işlem yapmaya teşvik edecek çözüm stratejileri gerektiren uygulamalara yer verilmelidir. Ayrıca görme engelli bireylerin ileri matematiksel kavramlara ait Braille kodlara hakim olmadığı ve bunun sonucunda kendilerine ait semboller kullanmayı tercih ettikleri belirlenmiştir. Bu durum evrensel bir dil olan matematik için bireysel matematiksel dil kullanımını meydana getirmektedir. Dolayısı ile öğrenciye ait bireysel işaret ve semboller varsa dikkate alınması ve kavramı algılamalarında yanılgılara sebebiyet vermeyecekse dikkatli kullanılması, hatta mümkünse Braille yazıda kodlarının öğretilmesi uygun olacaktır. Ancak Latin ve Braille alfabelerde matematiksel dil farklılıkları ve farklı alfabelerde matematiksel iletişim kurmanın güçlüğü göz önüne alındığında, bu iletişim problemine çözüm önerisi sunabilecek araştırmalara ihtiyaç olduğunu belirtebiliriz. Görme engelli bireylerin kendilerine özgü sembol kullanmalarının yanında kendilerine ait kullandıkları bireysel kısaltmalar ve söylemlerden bahsetmekte yarar vardır. Görme engelli bireylerin bu söylemleri kavram tanımlarına dair bilgi eksikliklerinin ve matematiksel dil kullanımına dikkat edilmemesinin bir sonucudur. Bu araştırmanın sonuçları, söz konusu söylemlerin kavram yanılgılarına sebep olabildiğini ortaya koymuştur. Dolayısı ile görme engelli öğrenciler ile gerçekleştirilen öğretim uygulamalarında kavram tanımları ele alındıktan sonra, kabartma yazıda ve Latin semboller ile kavrama ilişkin sembol gösterimleri ve bu gösterimlerin betimlemelerine yer vermekte yarar vardır. Ayrıca fonksiyon kavramında tanım ve değer kümesini açıklamak gibi alt kavramların tanıtılması da söylemleri yönlendirme de fayda sağlayacaktır.

Araştırma sonuçlarına göre görme engelli bireylerin temel cebir kavramlarına dair bilgi eksiklikleri ve yanılgıları düşünüldüğünde, onlar için tasarlanacak olan bireyselleştirilmiş eğitim programlarında yer verilen kazanımlara/hedeflere ilişkin öneriler sunmak yerinde olacaktır. Bu hedefler sıralanırken görme engelli öğrencilerin görsel içeriklerden muaf tutularak, genellikle cebirsel işlemlere maruz kalması sonucunda: *(i)* fonksiyon kavramı için sadece elemanların görüntülerini belirleyebildikleri, *(ii)* değişken ve bilinmeyen kavramlarını ayırt edemedikleri, *(iii)* bağımlı ve bağımsız değişkene dair bilgi sahibi olmadıkları, *(iv)* cebirsel temsilleri belirleyemedikleri ve *(v)* kavram tanımlarında yetersiz oldukları dikkate alınmalıdır. Dahası sonuçlar göstermektedir ki, değişken ve iki küme arasındaki ilişkinin cebirsel temsili için etkin rol oynayan cebirsel ifadeler ile işlem yapabilme kavramına dair görme engelli bireylerin güçlük yaşadığı ortaya konulmuştur. Görme engelli bireylerin öncelikle bu kavrama ilişkin 'sözel bir problemin cebirsel temsil edilmesi' kazanımında güçlük yaşadıkları ve yanılgıları olduğu belirlenmiştir. Dolayısı ile ortaöğretim düzeyinde temel cebir kavramlarına dair tasarlanacak öğretim uygulamalarındaki cebirsel işlemlerin veya temsillerin ele alınmasında, öncelikle cebirsel ifadelere dair hedeflere yer vermekte yarar vardır.

Görme engelli bireyler için mevcut var olan destek eğitim araçlarının kullanımına dair dikkat edilmesi gereken hususlar vardır. Örneğin; küptaş kasa materyali görme engelli bireylerin not tutma ve işlem takibini sağlama amacıyla sıklıkla kullandığı materyallerdendir. Görme engelli bireylerin küptaş kasa materyalini kullanırken bu materyalde yazılabilecek karakter sayısının sınırlı olmasından dolayı kendilerine özgü semboller kullanmaları gerekebilmektedir. Matematiksel dil kullanımı dikkate alınarak, değişken ya da cebirsel ifadeler kavramlarına dair tasarlanacak öğretim uygulamalarında küptaş kasa materyalini kullanmak yarar sağlayacaktır. Ancak burada kavram yanılgısına sebep olacak değişken ve bilinmeyen kavramları için aynı sembollerin kullanımı (Argün vd., 2014) gibi durumlara dikkat edilmesi önerilmektedir. Bu temsillerde öğrencilerin Braille yazı kodlarından kaynaklanarak 'bir harfin bir kümeyi temsil etmesini' algılamada güçlük yaşayabilecekleri de göz önüne alınmalıdır. Bunun için önce 'bir kümenin elemanlarını temsil etme' fikrini somutlaştıran örneklere yer vermek olası güçlüğü önlemeye yardımcı olacaktır. Küptaş kasa materyalinde 'eşit' sembolü için görme engelli bireylerin farklı semboller veya boşluk kullanmasının önlenmesi veya bu durumlarda eşitlik ifadesinin farkında olunmasına özen gösterilmelidir. Eşitliğin denge anlamına dair görme engelli bireylerin kavram bilgisi eksiklikleri göz önüne alındığında, bu kavrama ait öğretim uygulamalarına ve materyallerin seçimine önem verilmesi gerekmektedir. Sonuçların görme engelli bireylerdeki yetersizlikler arasında işaret ettiği eşitliğin korunumu ve yansıma özelliği gibi eşitliğin denklik bağıntısı olduğuna dair bilgilere yer verilmesi de diğer gerekliliklerdendir.

6.2. Görme Engelli Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçleri ve Öğrenme Yol Haritaları Bağlamında Öneriler

Bu çalışmanın sonucunda ortaya konulan tahmini öğrenme yol haritası, ele alınan cebir kavramlarına dair öğretim oturumları için tasarlanan etkinlikler ve öğrenme yol haritalarının görme engelli öğrenciler için müfredat geliştirme (Barret vd., 2012; Clements, 2007), bireyselleştirilmiş eğitim programları tasarlama, değerlendirme araçları (Battista, 2004; Confrey & Maloney, 2010) ve destek eğitim araçları geliştirme, nihayetinde öğrenmeye dair standartlar geliştirmeye (Sarama & Clements, 2009; Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004) ve tüm bunlar için araştırmalar tasarlamaya kılavuz olacağı düşünülmektedir. Bu nedenle öneriler bu doğrultuda öğrenme yol haritaları, destek eğitim araçları, müfredat tasarıları ve ileriki araştırmalara fikir sunacak bağlamda kavram odaklı olarak kaleme alınmıştır. Öğrenme yol haritaları, öğretim oturumlarında sunulan etkinlik adımları ve kullanılan destek eğitim araçlarından etkilenmektedir (Simon, 1995). Bu nedenle sadece bu araştırmada tasarlanan etkinlikler ya da kullanılan destek eğitim araçları odaklı değil, öğretim oturumu dizisi sonucunda elde edilen öğrenci düşünmeleri üzerinden öneriler sunulacaktır. Ancak görme engelli öğrencilerin öğretim oturumları sonucunda kavramsal anlamalarının gerçekleşmiş olması göz önüne alındığında, tasarlanan öğretim oturumlarının program tasarlayanlara, öğretmenlere ve materyal geliştirenlere destekleyici fikirler sunacağı düşünülmektedir.

Öğretim programlarında küme, sayı doğrusu, doğru, doğru parçası kavramlarına ait kazanımların dizilişi, öğrenme yol haritalarından farklılık göstermektedir. Ancak bu farklılığın ele alınan kavramların ulaşılmak istenen temel kavram olan ilişki kurma ve temsil etme ile ilgili olmasına dayandığını söyleyebiliriz. Dolayısı ile öğretim uygulamaları tasarlanırken öğrenenin önbilgileri ve sınıf düzeyinin yanı sıra, ele alınacak olan kavramların ilişkisine de odaklanmak gerekmektedir. Bu bağlamda görme engelli 9 ve 10. sınıf öğrencileri için bu araştırmada ele alınan cebir kavramlarına ait ortaya konulan öğrenme yol haritasının takibi, kavramları öğrenmeyi, tanımlarını yapılandırmayı ve kavramlar arasındaki ilişki kurmayı mümkün kılacağı düşünülebilir. Öğretim programlarının (MEB, 2017a; 2017b; 2018a; 2018b) öğretmenlere ve destek eğitim materyali tasarlayanlara yol göstermede yetersiz kaldığı diğer kavramlar ise sayı doğrusu, koordinat sistemi ve sıralı ikilidir. Bu kavramlar arasında kavramsal yapıyı ortaya koyan kazanımlara yer verilmemiştir. Bu nedenle araştırmada tahmini öğrenme yol haritasında ortaya konulan hedefler, program tasarlayanlara, bireyselleştirilmiş eğitim programlarının tasarlanmasına ve destek eğitim materyalleri hazırlayacaklara rehber olacağı düşünülmektedir. Benzer şekilde eşleme, ilişki kurma, cebirsel ve grafik temsillerine dair kazanımlar dizisinin de öğrenme yol haritasında benzer şekilde ele alınmasında yarar vardır.

Genel olarak sözel betimlemenin görme engelli öğrenciler için önemi ve cebirsel kavramların sembolik yapısı dikkate alındığında, cebir öğretiminde 'cebirsel söylemlerin' öneminden bahsetmek gerekmektedir. Sonuçlar görme engelli öğrencilerin cebirsel temsillerde sözel betimlemeyi tercih ederek, harf ve sembol kullanarak ilişki kurma gibi cebirsel temsillerden kaçındıklarını ortaya koymuştur. Dolayısıyla görme engelli bireyler için bireyselleştirilmiş eğitim programlarında 'cebirsel söylem' odaklı hedeflere yer verilmesinde de yarar vardır. Bu hedeflerde ise önce kavram tanımının incelenmesi, bunu takiben temsil türleri ile sembol gösterimlerinin ele alınması, ardından bu gösterimlerin söylemlerine yer verilmesi matematiksel iletişim için önem arz etmektedir.

Küme kavramının öğretiminde, kavram tanımını 'bir araya gelmiş nesnelerin topluluğu' olarak ele almanın küme örneklerini inceleme ve küme kavramına ait özellikleri keşfetme hedefleri için zemin hazırladığı belirlenmiştir. Küme kavramına ait tasarlanacak etkinliklerde dokunduğunda kolaylıkla algılayabileceği nesneler sunmak, görme engelli öğrencinin küme kavramını algılaması mümkün olacaktır. Ayrıca sayı kümeleri incelenirken, bulgularda öğretim oturumlarında katılımcıların sunduğu cetvel üzerindeki tamsayıların bir altkümesi örneği gibi, örneklere yer vermek görme engelli öğrencinin küme kavramını somutlamasına katkı sunacaktır.

Görme engelli öğrencilerin görsel içeriklerde güçlük yaşayacağını düşünerek küme temsilinde liste yöntemi ile temsil türüne odaklanmak ve öğretim uygulamalarında Venn şeması temsiline yer vermemek, onların ilerleyen kavramlarda cebirsel düşünme süreçlerini kısıtlayacaktır. Özellikle araştırma sonuçları küptaş kasa materyalinin, Venn şeması ile küme temsilini ve iki küme arasındaki eşlemenin tablo temsilini oluşturmaya uygun olmasına dayanarak, görme engelli öğrencilerin küme kavramı üzerine inşa edilecek olan cebir kavramlarını öğrenmesine destek olacağını işaret etmektedir. Dolayısıyla küme kavramının temsil türlerine ait hedeflerin destek eğitim materyalleri ile ele alınması, görme engelli öğrenciler için öğretim uygulamalarını verimli kılacaktır. Ancak liste yöntemi ile küme temsili de sembol kullanımı için önem arz etmektedir. Bu temsilde yer alan 'kümenin adı' ve 'kümenin elemanları' gibi sembollerin kullanılması, görme engelli öğrencide cebirsel düşünmenin gelişimi için önem arz etmektedir. Ayrıca öğrenme yol haritasında liste yöntemi ve Venn şeması ile küme temsilleri için ayrı hedeflerin sunulması, görme engelli bireyler ile ayrıntılı görsel temsilleri çalışmayı mümkün kılacağı düşünülmektedir.

Kümelerin temsili için tabla, elemanların temsili için cetvel, telefon gibi nesneler kullanmak görme engelli bireyin küme kavramını anlamasını, somutlaştırmasını ve örneklendirmesini sağlamaktadır. Ancak bu temsillere öğretim uygulamalarında yer verirken, tablanın bir temsil olduğu ve sınırlandırılmış bir bölge olduğunun vurgulanmasında yarar vardır. Özellikle altküme kavramı için tabla temsili kullanılırken, altküme için sınır bölgesinin belirtilmesi gerekmektedir. Ayrıca altküme ve bu kümeyi kapsayan küme temsili için bölgelerin önce incelemesi için fırsat sunulması, görme engelli bireyin elemanları konumlandırırken kümeleri algılamasını kolaylaştıracaktır. Bununla birlikte öğrenciye altkümeyi temsil eden tablanın bir nesne olarak düşünülmemesi vurgulanmalıdır. Çünkü bu hata her zaman için altkümenin evrensel kümenin bir elemanı olduğu yanılgısını oluşturacaktır. Evrensel küme ve altküme kavramlarının öğretiminde günlük hayat örneklerinden yararlanılması da 'altkümenin her elemanının evrensel kümenin de elemanı olduğu' fikrinin ele alınması için olanak sunmaktadır. Bu fikri destekleyen bir diğer uygulama örneği olarak, altküme kavramının poşet ile temsili de sunulabilir. Öğretim uygulamalarında kümeleri oluştururken öğrencilerin nesneleri belirli ortak özelliklerine göre bir araya getirmesi de mümkün olmaktadır. Her ne kadar küme kavramı önce 'nesneler topluluğu' olarak ele alınacak olsa da, küme kavramının aksiyomatik tanımının incelenmesi gereken hedeflerde bu materyallerin kullanılması önerilebilir. Böylece kümenin elemanı olan nesnelerin sahip olduğu ortak özellikler birer önerme ile temsil edilebilecektir.

Bu araştırmanın sınırlılığı, tasarlanan tahmini öğrenme yol haritasında yer alan kavramlara ait her alt kavrama ve kavramların özelliklerine ya da bu kavramlar ile işlem özelliklerine dair hedeflere yer verilmemesidir. Ancak sınırlılığı oluşturan bu hedeflerden bazıları, görme engelli öğrencilerden elde edilen öğrenme yol haritalarında ortaya çıkmıştır. Evrensel küme ve altküme kavramları için elde edilen hedefler göz önüne alındığında, ilerleyen araştırmalarda ya da tasarlanacak olan öğretim uygulamalarında ve destek eğitim araçlarında bu hedeflere yer vermede yarar vardır. Örneğin; 'altküme ve evrensel küme için örnekler sunabilme' ve 'verilen bir altküme ve evrensel küme örneklerinde bu kümelerin elemanlarını belirleyebilme' hedefleri görme engelli öğrencilerin söz konusu kavramları kavrayışlarını güçlendirecektir. Ayrıca evrensel küme ve altküme kavramları arasındaki ilişkiye dayanarak kavram tanımları incelendiğinde 'altkümenin her elemanının evrensel kümenin elemanı olduğu, ancak evrensel kümenin her elemanının bir altkümenin elemanı olması gerekmediği fikrini açıklayabilme' hedefine yer verilmesinde yarar vardır. Böylece altküme ve kapsama kavramlarına ilişkin öğrenmenin gerçekleşmesi mümkün olacaktır.

Görme engelli öğrencilerin küme kavramında yer alan küme parantezi gibi sembolleri incelemesi gerektiğinde, iğneli sayfa materyalinin yetersiz kaldığı durumlar belirlenmiştir. İğneli sayfa materyalinin sınırlılıkları arasında görme engelli bireyler için kabartma karakterlerin olmaması ve az gören bireylerin kullandığı sembolleri gösteren aparatların görme engelli bireylerin dokunarak incelemesi için uygun olmaması bulunmaktadır. Dolayısı ile görme engelli bireylerin Latin alfabede sembolleri incelemesi için iğneli sayfa materyalinin uyarlanması veya alternatif yolların aranması gerekmektedir. Bu araştırmada olduğu gibi kabartma yazıda sembolleri oluşturmak bir alternatif uygulama olarak sunulabilir.

İki küme arasındaki eşleme kavramına ait hedeflerin, kazanımların ya da bunlara dair tasarlanacak olan etkinliklerin günlük hayat örneklerine dayandırılması, görme engelli öğrencilerin eşleme kurmayı somutlaştırması adına önemlidir. Ayrıca bu örneklerde yer alan kümelerin öncelikle tespit edilmesi ve bu kümelerin elemanlarının belirlenmesi de, kümeler arasında elemanların eşlenmesi fikrini destekleyecektir. Ancak önce küme kavramının tanımının ve kümenin elemanı olma kavramının ele alınmasında yarar vardır. Ardından öğrencinin 'eşleme kurma' fikrini fark edebileceği çikolata barkodu veya öğrenci numarası benzeri örneklerin incelenmesi kavramsal anlama için önem arz etmektedir. Böylece eşleme kurma için kümenin gerekliliği ve elemanlar arasındaki eşleme fikri ele alınmış olacaktır. Sayı kümeleri arasındaki eşlemeleri kurması için görme engelli öğrencilere sunulacak örneklerde ise not alırken kabartma yazıda kullanılan karakterlerin fazla olmasının (Bitter, 2013; Edwards vd., 1995) ve kümeler için eşlemeleri göstermenin güç olacağının göz önüne alınması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Böylece öğrencilerin kabartma yazı tablette kümeleri ve eşlemeyi temsil ederken güçlük yaşamasının önüne geçilmiş olacaktır. Bu nedenle uygulamada öğrencilerin liste yöntemi ile küme temsilinin yanı sıra Venn şeması ile küme temsilini ya da tablo ile eşleme temsilini yapabilecekleri somut materyallere yer vermek, kavramsal anlama ve farklı örneklerin kolaylıkla incelenmesi için fırsat sunacaktır.

Kümelerin elemanlarını eşleme fikrini temsil etmesi için görme engelli öğrencilerin sembol seçiminde ‘=’, ‘<’, ‘>’ gibi sıklıkla kullanılan sembolleri tercih etmeleri, öğrencilerin söz konusu işlemler ve eşitlik kavramına dair bilgi eksikliklerinin olduğunu işaret etmektedir. Dolayısı ile görme engelli bireyler için eşitlik kavramına ve temel matematiksel işlemlerin sembolik temsillerine ilişkin yanılgılarından söz etmek mümkündür. ‘=’ sembol gösterimi için görme engelli bireylerin kullandığı destek eğitim materyallerinde, ‘boşluk’ ile eşitlik kavramını temsil etmeleri gibi kavram yanılgılarına sebep olan uygulamaların olabileceği göz önüne alınmalıdır. Bu gerekçelere dayanarak özellikle eşitlik kavramı ve temel cebir sembolleri için kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinin ve kullanılan destek eğitim araçlarına sınıf uygulamalarında dikkatli yer verilmesinin önemli olduğunu söyleyebiliriz.

Görme engelli öğrencilerin aşina oldukları somut materyalleri yorumlama, anlama ve farklı amaçlar için kullanma becerilerinin ileri düzeyde olması şaşırtıcı değildir. Ancak öğrencilerin bu becerilerinden yararlanarak kullanılan somut materyalleri, yeni öğrendikleri kavramları anlamalarına ve kavrayışlarına yansıtmaları kayda değerdir. Bu durumu araştırmanın sonuçlarından örneklendirmek gerekirse, görme engelli öğrencilerin yatay tabloları dikey tablolara göre daha kolay anlamlandırmaları ve yorumlamalarının gerekçesi, dikey tablonun aşina oldukları küptaş kasa materyalinin kullanımına benzerliğidir. Dolayısı ile görme engelli öğrencilere iki kümenin elemanları arasındaki eşlemenin temsili için tablo öğretiminde, öncelikle dikey olarak konumlandırılmış tabloya yer vermekte fayda vardır. Hatta tablo temsili incelenmeden önce, iki küme arasındaki eşlemeyi örneklendiren uygulamalarda öğrencinin küptaş kasayı kullanarak eşlemeyi temsil etmesi istenebilir. Böylece öğrencinin tablo temsilini yorumlaması ve öğrenmesi kolaylıkla mümkün olacaktır.

Görme engelli öğrencilerin sıklıkla güçlük yaşadığı ve yanılgılarının olduğu kavramlardan biri bir kümenin veya kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi belirlemek ve bu ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmektir. Bu sonuç, görme engelli öğrencilerin iki küme arasındaki ‘artma’ veya ‘azalma’ gibi doğrusal ilişkilere odaklandıkların cebirsel temsilleri yazmaları için yetersiz olduğunu işaret etmektedir. Bu nedenle görme engelli öğrencilerin bireyselleştirilmiş eğitim programları yapılandırılırken, özellikle ortaokul düzeyinde, ilişki türleri ve ilişki kurmanın yanı sıra cebirsel ifadelerde aritmetik işlemlere dair kazanımlara yer verilmelisi cebirsel temsilleri ifade edebilmelerine katkı sağlacaktır. Bu kazanımlardan önce ‘ilişki kurma’ fikrinin açıklanmasına dair kazanıma, ardından ‘üçer artış veya ikişer azalma’ gibi ifadelerin cebirsel temsillerine dair kazanımlara yer vermek iki küme arasındaki ilişkiye ait öğrenme süreçleri için önbilgi sunacaktır.

Doğru ve doğru parçası kavramları ele alınırken kavram tanımları dikkate alınarak, öncelikle doğru kavramının incelenmesi kavram öğrenmenin gelişimi için önemli görülmektedir. Görme engelli öğrencilerin öğrenme yol haritaları incelendiğinde de doğru kavramının doğru parçasından önce öğrenilmesinin, öğrencilerin kavramsal anlamalarındaki ilerlemenin ve akıl yürütmelerinin zenginleştiğini ortaya koymuştur. Doğru kavramı ele alındığında görme engelli öğrencilerin somutlaştırması için yol ve benzeri temsillerden yararlanmaktan ziyade, düz çizgi temsiline yer verilmesi öğrencilerin kavramı algılamalarını ve temsilleri incelemelerini kolaylaştırmaktadır. Bu nedenle önce öğrencilerin zihinlerinde düz çizgi kavramını yapılandımak gerekmektedir. Doğru temsillerinde ise öğrencilerin prototip kabul ettikleri doğrultularda doğru temsilleri ele alarak öğretim uygulamalarının sürdürülmesi, öğrencilerin akıl yürütme ve fikir ileri sürme düzeylerini artırmaktadır. Fakat bu öneri, farklı doğrultularda doğru temsillerinin incelenmemesi anlamına gelmemelidir. Sadece, öğrencileri derin düşünmeye zorlayan uygulamalarda istedikleri doğrultularda doğru temsillerini ele almalarına imkan verilmesi önerilmektedir.
Doğru kavramı temsilinde kullanılan somut materyaller için alt kavramlara ve kavram tanımına götüren söylemlere dikkat etmekte yarar vardır. Nitekim ip temsilinde ipin bir ucundan sündürmeye başlanıldığında, doğru parçası ve ışın kavramlarında yer alan 'uç' fikrinin oluşmamasına dikkat edilmesi önemlidir. Bu nedenle, doğru temsili için her iki ucundan da sündürülebilecek şekilde ip materyalinin kullanılması söz konusu yanılgıları önleyecektir. Benzer şekilde doğru temsili olarak anten materyali kullanılırken, sündürme eyleminin istenildiği kadar devam ettiğinin hayal edilmesi önemlidir. Ayrıca mevcut durumda antenin sündürme eyleminin kısıtlı olmasına dayanarak, doğru paçası temsili olarak da düşünülebileceği göz önüne alınmalıdır. Bu açıklamanın yapılması ve bu durum fırsata dönüştürülerek, doğru ve doğru parçası kavramlarının noktalar kümesi olarak ele alınması önerilebilir. Üstelik doğru ve doğru parçası kavramlarını kabartma yazıda temsil ederken çizilen düz çizgi ve düz çizgi parçasının önemli olduğunu belirtebiliriz. Bu temsiller ile öğrenci düşünmelerinde 'doğrunun uzunluğu' gibi kavram yanılgılarının ortaya çıkmamasına dikkat edilmesinde yarar vardır. Doğru parçasının temsil edilmesinde ip parçası ve bu öğrencilerin yanlarında bulundurdukları beyaz bastonun kullanılması, görme engelli öğrencilerin bu kavramı somutlaştırmasına katkı sağlayacaktır. Bu destek eğitim araçları ile uç nokta ve sonlu tane doğru parçasının birleşiminin yine bir doğru parçası oluşturduğu tartışılabilir. Ayrıca görme engelli öğrencilerin rulet ve cetvel ile doğru veya doğru parçası çizmeleri de doğrunun doğrultusu fikrini kavramalarının yanı sıra, bu

kavramları temsil etme gücünü artıracaktır. Bununla birlikte, kabartma yazıda çizilen doğru ve doğru parçası temsilleri, bu kavramların noktalar kümesi olarak düşünülmesine katkı sunacaktır.

Söylemin önemine, doğru ve doğru parçası kavramları için de işaret edilmelidir. Öğretim uygulamalarında uç noktalar için 'başlangıç veya son' terimlerini kullanmak, öğrenci düşünmesini doğru kavramını 'başlangıcı ve sonu belli olmayan' şeklinde bir açıklamaya sevk edebilir. Bu nedenle bu kavramları incelerken 'uç nokta' teriminin vurgulanmasında yarar vardır. Ayrıca doğrultusu farklı doğrular için yamuk veya eğri gibi terimleri kullanmaktan kaçınılmalıdır. Bu terimler ilerleyen kavramlarda yanılgılara neden olabilecektir. Bunun yerine 'doğrultu' kavramını vurgulamak ve eksenlere göre açı fikrine dikkat çekmek yararlı olacaktır.

Uzunluk niteliğini ölçmede kullanılacak 'birim uzunluk' üzerine tasarlanacak etkinliklerde, görme engelli öğrencilere sunulacak tahta çubukların ve uzunluğu belirlenecek nesnelerin ebatlarına (boyutlarına) dikkat etmek gerekmektedir. Her ne kadar bu araştırmada görme engelli öğrenciler sunulan küçük tahta çubuklar aracılığı ile verilen kablonun uzunluğunu belirlemiş olsalar da, öğrencilerin hassas bir ölçüm yapmaya çabaladığı ve bu nedenle çubukları uç uca birleştirmekte güçlük yaşadığı gözlenmiştir. Bu nedenle, birim uzunluk olarak bir işaret parmağından daha uzun tahta çubukları belirlemekte fayda vardır. Böylece, görme engelli öğrenci kolaylıkla birim uzunluktaki çubuk cinsinden uzunluk ölçümü yapabilecektir. Ayrıca birim uzunluk olarak belirlenen çubuk ile uzunluk kavramı tartışılmadan önce günlük hayat örneklerinin incelenmesi ve özellikle standart ölçü birimlerinin tartışılması, öğrencilerin 'ölçümü yapılacak niteliğin birimi' kavramını kavrayışlarını güçlendirmektedir. Burada görme engelli öğrencilerin kabartma yazılı cetveli incelemesi ve cetvel ile ölçümler yapması, onların uzunluk niteliğini ve uzunluk niteliğinin standart bir birimle belirlemenin gerekliliğini anlamalarını güçlendirmesi beklenmektedir. İğneli sayfa materyali ile birime göre uzunluk belirleme uygulamalarında ise, önce öğrencilerin iki iğne arasındaki uzunluğun birim olduğunu anlamaları için bu uzunlukta çubuk aparatları kullanılabilir. Böylece, öğrenciler bir birimden daha uzun çubuk aparatlarının uzunluğunu birim uzunluk cinsinden belirleyebileceklerdir. Uzunluk kavramı iğneli sayfa materyali ile çalışılırken, öğrencilerin doğrunun uzunluğu yanılgısına sahip olmasının önlenmesi gerekmektedir. Sonuçlara göre doğru parçasının uzunluğunu belirleyen öğrenciler, ardından doğru temsili için kullanılan aparatın da uzunluğunu belirlemeye çabalamıştır. Bu nedenle mevcut aparatlar ile doğru ve doğru parçası temsil edilecekse, öğrencinin doğru temsili olan aparatın istenildiği kadar sündürülebileceğini hayal etmesinin vurgulanması önemlidir. Ayrıca öğrencilerin önce doğru aparatını incelemeleri, ardından doğru parçaları aparatlarını inceleyerek doğru parçalarının uzunluklarını belirlemeleri yararlı olacaktır. Bir diğer öneri ise iğneli sayfa materyalinde doğru aparatı için okları temsil edecek bant gibi bir malzemenin kullanılması olabilir. Söz konusu yanılgıya sebep olacak diğer bir uygulama da doğru üzerinde tamsayılara karşılık gelen noktaları işaretlerken ortaya çıkmaktadır. 0 referans noktasını (orijini) belirlerken doğru temsilinde orta noktayı işaretleme çabası, öğrencilerin doğrunun uzunluğu yanılgısına sahip olmasına zemin hazırlamaktadır. Bu nedenle, bu uygulamada da doğrunun istenildiği kadar sündürülebildiği ve 0 noktasının istenilen nokta ile eşlemenin mümkün olduğunun vurgulanması, öğrenci yanılgılarının önüne geçilmesine katkı sağlayacaktır.

Doğru ve doğru parçası kavramlarına ait bu araştırmada tasarlanan tahmini öğrenme yol haritasında yer almayan, ancak görme engelli öğrencilerin öğrenme yol haritalarında yer bulan bazı hedeflerden bahsetmek mümkündür. Bu hedefler arasında en dikkat çekeni görme engelli öğrencilerin bu kavramlara ait görme yetisine sahip olan bireylerin kullandığı gösterimleri bilmesi yer almaktadır. Böylece, görme yetisine sahip olan bireyler ile iletişim süreçleri kolaylaşacaktır. Ayrıca, doğru ve doğru parçası kavramları arasındaki ilişkiyi anlamayı da güçlendirmekte fayda vardır. Ancak o zaman doğru, uç nokta ve doğru parçası kavramları sağlıklı bir şekilde incelenebilecektir.

Sayı doğrusu kavramı ele alındığında, küme ve iki kümenin elemanlarını eşleme kavramlarına dair önbilgilerin üzerine kurulmasına rağmen, öğrencilerin tamsayıların sıralaması gibi, bilgi eksikliğinden kaynaklanan öğrenme güçlükleri ile karşılaşmak olasıdır. Bu nedenle, öncelikle termometre gibi günlük hayattan model örneklerinin incelenmesi, hem önbilgilerin hatırlanmasını sağlayacak, hem de cetvelleme kavramının öğrenilmesini kolaylaştıracaktır (Beswick, 2011; Heeffer, 2011; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010). Reel sayılar ile cetvelleme yapılırken kullanılacak destek eğitim araçlarının, birim belirlerken rasyonel sayıları da eşlemeye uygun olması gerekmektedir. Nitekim sonuçlarda öğrenciler, 1/2 ve 2/3 gibi rasyonel sayıları doğru üzerindeki noktalar ile eşlerken yeniden birim belirlemeye ihtiyaç duymuşlardır. Ancak, daha öncesinde rasyonel sayılar ve rasyonel sayılarda sıralama kazanımlarına yer vermek yararlı olacaktır. Çünkü bu araştırmada öğrencilerin rasyonel sayılarda sıralamaya dair güçlükleri tespit edilmiştir.

Öğretim oturumlarında herhangi bir destek eğitim aracı ile uygulamaya başlamadan önce görme engelli öğrencilerin öğretim materyali olarak kullanılan aracı incelemesi, onların uygulamalara katılımını artırmasının yanı sıra kavrayışlarını da desteklemektedir (Cowan, 2011; Toennies vd., 2011). Koordinat sitemini temsil eden somut materyallerin de görme engelli öğrenciler tarafından önce incelenmesi, orijini ve sıralı ikilileri belirlemede başarılı olmalarına zemin hazırlayacaktır. Ayrıca öğrencilerin koordinat sistemi temsili için kullanılan iğneli sayfa materyalinde, orijini belirlemekte güçlük yaşamaları olasıdır. Bu güçlük öğrencilerin, sayı doğrularının 0 referans noktalarından kesiştiği fikrini kavrayamamalarından veya iğneli sayfa materyalinin orijinde üst üste gelen doğru temsilerini parmakları ile dokunarak hissedememelerinden kaynaklanabilir. Bu nedenle, koordinat sistemini yapılandırırken, sayı doğrularının 0 referans noktasında kesiştiğinin vurgulanması önemlidir. Ayrıca koordinat sistemi inşa edilirken önce x-ekseni, daha sonra y-ekseni konumlandırılırsa, görme engelli öğrencilerin orijinde oluşan kabarıklıktan (0, 0) noktasını parmakları ile dokunarak daha kolay hissetmesi muhtemeldir. Bir başka öneri ise materyalin boncuk aparatından farklı bir boncuk ile orijinin işaretlenmesidir. Böylece, sıralı ikililerin koordinatlarını belirlerken, öğrencilerin orijini parmakları ile dokunarak belirlemeleri kolaylaşacaktır. Sıralı ikilileri belirlerken başlangıçta doğru parçası aparatlarını kullanmak, eşlemeleri temsil etmede öğrencilerin anlamasını güçlendirecektir. Ayrıca, sıralı ikililerin apsisi ve ordinatı belirlenerek iğneli sayfa materyalinin nokta temsil için kullanılan boncuk aparatından farklı bir boncuk ile işaretlenmesi, görme engelli öğrencilerin sıralı ikilileri işaretlemesini kolaylaştıracaktır. İlerleyen uygulama örneklerinde bu boncukları kullanmadan öğrencinin noktaları belirlediği fark etmesi beklenmektedir. Ancak nokta temsili için kullanılan boncukların apsisini ve ordinatını belirlerken de kullanılması, öğrencinin işaretli noktaları karıştırmasına neden olacaktır. Dahası, görme engelli öğrencilerin sıralı ikilileri belirlerken parmaklarını doğru parçası temsili gibi kullanması, sezgisel olarak noktaların koordinatlarını belirlemelerine katkı sunacaktır.

Araştırmanın sonuçlarından biri, görme engelli öğrencilerin koordinat sisteminde eksenler üzerindeki (x, 0) ve (0, y) gibi bir bileşeni 0 olan noktaları işaretlemekte güçlük yaşamalarıdır. Bu nedenle, öğretim oturumları tasarlanırken sayı doğruları üzerindeki noktaların koordinatlarından bahsetmekte yarar vardır. Koordinat sistemi inşa edilirken sıralı ikili kavramın tanıtımı esnasında eksenler üzerindeki noktaların koordinatları vurgulanmalıdır. İğneli sayfa materyalinin diğer sınırlığı, tahta üzerindeki iğnelerin sayısının yetersiz olması sonucunda eksenler ile kümeleri eşlerken birim belirlemenin güç olmasıdır. Bu nedenle, koordinat sisteminde eksenleri cetvellerken birimlerin aynı olması gerektiği, ancak materyalin sınırlılığı olarak eksenlerde farklı birimlerin kullanıldığı öğrencilere açıklanmalıdır.

Görme engelli öğrencilerin cebirsel temsillere dair yaşadığı güçlükler, grafik temsilini oluşturmalarına da yansımaktadır. Bu güçlüğü azaltan iğneli sayfa materyalinde, öğrencilerin ilişkiyi belirleyemese de iğneleri sayarak belirledikleri ilişkiye göre noktaları işaretledikleri tespit edilmiştir. Bu nedenle, öğretim uygulamalarında grafik temsili için sunulan örneklerde, doğrusal ilişkilerin yanı sıra öğrencilerin görsel olarak ilişkiyi belirleyemeyecekleri grafiklere yer vermek yararlı olacaktır. Böylece öğrenci cebirsel ilişkiyi keşfetmesi gerektiğini fark edecektir. Ayrıca, öğrencilerin deneyimlerine dayanan günlük hayat durumları ile sunulan ilişkilerin grafiklerini yorumlamada ve tasarlamada daha verimli sonuç elde dileceği söylenebilir. Böylece başlangıç noktasında kümeler arasındaki ilişkiyi belirlemek gibi kritik noktalarda öğrencilerin akıl yürütmesi mümkün olacaktır. Grafik temsilini oluştururken öğrencilerin iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi yorumlamaları, koordinat sisteminde işaretli noktalardan farklı noktalarda grafiğin nasıl devam edeceğini belirlemelerinde etkili olacaktır. Çünkü öğrencilerin işaretledikleri noktalardan geçen grafiği çizerken, tüm noktaları birbiri ile eşleyen doğru parçaları çizerek yanılgıya düşebilirler. Bu durumda belirlenen cebirsel temsile göre, grafik üzerinde olması gereken işaretli noktalardan farklı bir nokta için ilişkinin sorgulanması istenebilir. Bir başka öneri olarak öğrencinin hatalı çizdiği doğru parçası üzerindeki bir noktanın koordinatları belirlenerek, bu noktanın cebirsel temsil ile belirlenen ilişkiyi sağlamadığı tartışılabilir.

Venn şeması ile temsil edilen kümeler arasındaki eşlemeyi gösteren diyagramlarda ya da grafik temsillerinde kullanılan destek eğitim araçlarında farklı dokuda malzemeler kullanmak önem arz etmektedir. Kümeyi silikonla oluşturmak, eksenleri ve grafiği farklı malzemeler ile çizmek gibi her bir farklı ögeyi farklı malzemeler ile tasarlamak görme engelli öğrencinin şekli anlamasını ve bu araç ile çalışmasını kolaylaştıracaktır. Dahası grafik çizimlerinde gridli yapının tercih edilmesi, öğrencinin birim ve grafik üzerindeki noktaları belirlemesi için kolaylık sağlayacaktır. Ayrıca iğneli sayfa materyali ile grafik temsili oluştururken, başlangıçta noktaları doğru parçaları ile birleştirme fikri için paket lastiklerinin kullanılması dokunarak algılamayı kuvvetlendirirken, grafik temsilinde ise kablo yerine ip kullanmak daha faydalı olacaktır. Çünkü kabloya şekil vermenin güç olmasının yanı sıra grafik üzerinde kırılma noktaları gibi keskin çizgilere neden olmaktadır. Grafiği oluştururken işaretli noktaları belirli bir sıraya göre birleştirerek çizmek, görme engelli öğrencinin bazı işaretli noktaları atlamasının önüne geçecektir. Böylece öğrencinin hem ilişkiyi daha iyi algılaması mümkün olacak, hem de parçaları inceleyerek bütünü zihninde şekillendirmesine imkan sunulmuş olacaktır.

Öğrencilerin cebirsel ilişkileri genelleyebilmeleri için öncelikle genelleme fikrine dair yanılgılarının giderilmesi gerekmektedir. Çünkü sonuçlarda, öğrencilerin sadece bir eşlemeyi dikkate alarak kurdukları ilişkinin kümeler arasındaki ilişki olduğunu iddia ettikleri belirlenmiştir. Bu istenmeyen düşüncenin zihinlerde oluşmaması için, cebirsel temsil ile ilişkilerin belirlendiği örneklerde doğrusal ilişkilerin yanı sıra farklı ilişki örneklerine yer verilmesinde fayda vardır. Bu çeşitlilik arasında $y = x + 3$ ve $y = x - 1$ veya $y = x^2$ ve $y = x^2 - 4$ gibi örneklere yer vermek, öğrenci düşünmelerinin gelişimi açısından önem arz ettiğini söyleyebiliriz. Böylece, daha önce grafik inlememiş olan öğrencilerin tahmin etme ve yorumlama becerisinin güçleneceği düşünülmektedir. Grafikler incelenirken sıralı ikililerin ifade edilmesi, grafiğin tepe noktasının vurgulanması ya da grafiğin eksenleri kestiği noktaların işaret edilmesi gibi betimlemelere ihtiyaç duyulursa, görme engelli öğrenci parmakları ile bu kritik noktalara dokunurken eş zamanlı olarak söylemlere yer verilmesinde yarar vardır. Zira grafik algılamada sözlü ifadeler ve görsel unsurlar bir bütünü oluşturan eş zamanlı bileşenlerdir (Roth & Lee, 2004). Böylece, görme engelli öğrencinin kritik noktalara ait terimleri, yorumları ya da cebirsel ilişkileri algılaması mümkün olacaktır.

Değişken kavramı için öncelikle günlük hayattan sürekli ve süreksiz değişken örneklerinin sunulması, öğrencilerin kümenin elemanlarını temsil etme fikrini algılamalarına zemin hazırlamaktadır. Ayrıca, sayı doğrusu üzerindeki tamsayıları temsil eden boncuk etkinliği öğrencinin değişkenin bir sembol olduğunu ve kümenin her elemanını temsil ettiğini kavramalarına katkı sunması beklenmektedir. Dahası, boncuğun sayı doğrusu üzerindeki bir nokta ile eşlenmesi 'sabit terim' fikrinin tartışılmasına imkan verecektir. Bu nedenle, değişken kavramının öğretilmesinde, bu bağlamda tasarlanan öğretim oturumunun etkili olabileceğini söyleyebiliriz. Bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarının ise yine günlük hayat örnekleri üzerinden tartışılması, bu kavramların temsil ettiği kümelerin elemanlarının 'birbirine göre değişimi' fikrini kazanmalarına imkan sağlayacaktır. Ayrıca cebirsel temsilleri ifade etmede öncelikle bağımlı ve bağımsız değişkenlerin belirlenmesi, öğrencinin ilişkiyi belirlemesini ve ifade etmesini kolaylaştıracaktır.

Öneriler kısmını sonlandırmadan önce, yukarıda tartışılan kavramlar için araştırmada ele alınan tahmini öğrenme yol haritasına eklenebilecek kazanımlardan bahsetmekte yarar vardır. Örneğin, öğrencilerin iki ayrı kümeyi temsil eden bağımlı ve bağımsız değişkenleri farklı harflerle temsil edildiğinin farkına varması önemlidir. Ayrıca sonuçlarda görme engelli öğrencilerin cebirsel temsilini ifade etmede yaşadığı güçlükler göz önüne alındığında, ‘iki küme arasındaki eşlemeye dayanarak bağımlı ve bağımsız değişkenler ile ilişkiyi ifade edebilme’ kazanımı eklenirse tasarlanacak öğretim uygulamasının bu güçlüğün giderilmesine katkı sunacağı düşünülmektedir. Ayrıca, iki küme arasındaki ilişkinin cebirsel temsili elde edilmeden tasarlanan grafik temsillerinde öğrencilerin hata yapma riskinin arttığını söyleyebiliriz. Dahası, kavramların temsilleri arasındaki geçişlerin öğrenci düşünmelerindeki önemi göz önüne alındığında, öğrenme yol haritalarında ve bu doğrultuda tasarlanacak uygulamalarda ‘cebirsel temsil ile grafik temsili arasında geçişleri yapabilme’ kazanımını ilave etme gerekliliği vardır. İki küme arasındaki ilişkinin tablo ile temsili için tahmini öğrenme yol haritasına eklenen bir diğer kazanım ‘tablo ile sunulan eşlemeler yoluyla iki küme arasındaki ilişkiyi belirleyebilme’ şeklinde elde edilmiştir. Bu kazanıma ait öğretim uygulamalarında görme engelli öğrencilerin deneyimlerine dayanan günlük hayat durumları ile verilen örneklerle, onların ilişkileri yorumlama ve keşfetme becerilerinin desteklendiği söylenebilir.

KAYNAKLAR

Agrawal, S. (2004). Teaching mathematics to blind students through programmed learning strategies. Delhi: Abhijeet Publications.

Akgün, L. (2006). Cebir ve değişken kavramı üzerine. *Journal of Qafqaz University, 17*(1).

Akkan, Y. (2016). Cebirsel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan & İ., Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitim Teorileri* içinde (ss. 43-64). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Akkan, Y., Baki, A., Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online, 10*(3), 812-823.

Akkaya, R., Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 31*, 1-12.

Aktaş, F. N. & Argün, Z. (Baskıda). Görme engelli öğrencilerin sayı ve şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*.

Akyuz, D., Stephan, M., & Dixon, J. (2012). The role of the teacher in supporting imagery in understanding integers. *Education and Science, 37*(163), 268-282.

Alary, F., Duquette, M., Goldstein, R., Elaine C.C., Voss, P., La Buissonniere-Ariza, V., & Lepore, F. (2009). Tactile acuity in the blind: A closer look reveals superiority over the sighted in some but not all cutaneous tasks. *Neuropsychologia, 47*(10), 2037–2043.

Altunay-Aeslantekin, B., & Şener-Akın, U. (2017). Effectiveness of direct instruction model in acquisition and maintenance of geometric shape concepts for students with vısual impairment. *The Online Journal of New Horizons in Education, 7*(1), 77-85.

Andersen, E. S., Dunlea, A., & Kekelis, L. S. (1984). Blind children’s language: Resolving some differences. *Journal of Child Language, 11*, 645-664.

Arıkan, A., Halıcıoğlu, S. (2013). *Soyut matematik* (İkinci Baskı). Ankara: Palme Yayıncılık.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramların künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.

Argyropoulos, V. S. (2002). Tactual shape perception in relation to the understanding of geometrical concepts by blind students. *British Journal of Visual Impairment*, *20*(1), 7-16.

Arieli-Attali, M., Wylie, E. C., & Bauer, M. I. (2012). *The use of three learning progressions in supporting formative assessment in middle school mathematics*. In annual meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada.

Arslan, A. (2018). *Görme engelli öğrencilerin uzamsal stratejilerinin belirlenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Ataman, A. (2012). Özel eğitime muhtaç olmanın nedenleri anlamı ve amaçları. A. Ataman (Ed.), *Temel eğitim öğretmenleri için kaynaştırma uygulamaları ve özel eğitim* içinde (ss. 3-53). Ankara: Vize Yayıncılık.

Avcıoğlu, H. (2015). *A' dan z' ye BEP Bireyselleştirilmiş eğitim programlarının geliştirilmesi*. Ankara: Vize Yayıncılık.

Bagni, G. T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics, 62*(3), 259-280.

Ball, D.L., Hill, H., & Bass, H., (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?.*American Educator*, *29*(3), 14-46.

Barcellos, A. (2005). *Mathematics misconceptions of college-age algebra students*. Doctoral Dissertation, University of California, Davis.

Bardsley, M. E. (2006). *Pre-kindergarten teachers' use and understanding of hypothetical learning trajectories in mathematics education*. Doctoral Dissertation, State University of New York, Buffalo, NY.

Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 28-54.

Barry, W. A., Gardner, J. A., & Raman, T. V. (1994). *Accessibility to scientific information by the blind: Dotsplus and ASTER could make it easy*. In Proceedings of the 1994 CSUN conference on technology and persons with disabilities, Los Angeles, CA.

Başkurt, B. (2015). *Görme engelli ilkokul öğrencileri için yeni ürün geliştirme sürecinde tasarım: Yenilenebilir Braille ekranlı elektronik okuyucu örneği*. Doktora tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 185-204.

Battista, M. T. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories, and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 507-570.

Batu, E. S. (2012). *Kaynaştırma ve destek özel eğitim hizmetleri, özel eğitime gereksinimi olan öğrenciler ve özel eğitim*. Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Batu, S., & Kırcaali-İftar, G. (2005). *Kaynaştırma*. Ankara: Kök Yayıncılık.

Bayazıt, İ. (2015). Fonksiyonlar konusunun öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri (4. Baskı). M.F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Eds), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (ss. 91-119). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Bayazıt, I. & Aksoy, Y. (2013). Fonksiyon kavramının matematiksel manası ve tarihsel gelişimi, I. O. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, ve A. Delice (Editörler), *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* içinde (ss. 339-352). Pegem Yayıncılık: Ankara.

Bayram, G. İ. (2014). *Exploring the academic and social challenges of visually impaired students in learning high school mathematics*. Master Thesis, Bilkent University The Program of Curriculum and Instruction, Ankara.

Beatty, R., & Bruce, C. D. (2012). Supporting students with learning disabilities to explore linear relationships using online learning objects. *PNA, 7*(1), 19-37.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How the children view the equals sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-15.

Beswick, K. (2011). Positive experiences with negative numbers. *Australian Association of Math Teachers, 67*(2), 31–41.

Bingölbali, E., & Bingölbali F. (2013). Sezgisel ve aksiyomatik açıdan küme kavramı: Nedir? Tarihsel olarak nasıl gelişmiştir?. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (ss. 35-58). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Bitter, M. (2013). *Braille in mathematics education*. Masters Thesis, Radboud University Nijmegen. Retrived from http://www.ru.nl.

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-13). Berlin Heidelberg: Springer.

Bossé, M. J. (2003). The beauty of "and" and "or": Connections within mathematics for students with learning differences. *Mathematics and Computer Education, 37*(1), 105.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, England: NFER-Nelson.

Bourbaki, N. (1939). *Éléments de mathématique: première partie, les structures fondamentales de l'analyse* (Vol. 934). Hermann.

Boz, N. (2013). Matematiğin temel yapı taşlarından "değişken". Zembat, İ. Ö., Özmantar, M. F., Bingölbali, E., Şandır, H., Delice, A. (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (ss. 329-338). Ankara: Pegem Akademi.

Braille Matematik Kılavuzu. (2017). Özel Eğitim ve Rehberlik Hizmetleri Genel Müdürlüğü. Ankara. Editör: Turgut Bağrıaçık. Yazarlar: G. Tutkun, MK Yakın, ŞC Öztürk. http://orgm.meb.gov.tr/dosyalar/00001/braille_mat_kilavuzu.pdf adresinden alınmıştır.

Bramald, R. (2000). Introducing the empty number line. *Education, 28*(3), 5-12.

Brawand, A., & Johnson, N. (2016). Effective methods for delivering mathematics instruction to students with visual impairments. *Journal of Blindness Innovation and Research, 6*(1).

Brown, A. L., & Campione, J. C. (1996). Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems. In L. Schauble & R. Glaser (Eds.), *Innovations in learning: New environments for education* (p. 289-325). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Brazier, M., Parry, M., & Fischbach, E. (2000). Blind students: Facing challenges in a college physics course. *Journal of College Science Teaching, 30*(2), 114-116.

Brenner, M. E. (1994). Acommunication framework for mathematics: Exemplary instruction for culturally and linguistically different students. In B. McLeod (Ed.), *Language and Learning: Educating Linguistically Diverse Students* (pp. 233-267). Albany: SUNY Press.

Brown, C. S., Sarama, J., & Clements, D. H. (2007). Thinking about learning trajectories in preschool. *Teaching Children Mathematics, 14*(3), 178-181.

Budayasa, I. K., & Juniati, D. (2018). *The blind student's interpretation of two-dimensional shapes in geometry*. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 947, No. 1, p. 012055). IOP Publishing.

Buhagiar, M. A., & Tanti, M. B. (2013). Working toward the inclusion of blind students in Malta: The case of mathematics classrooms. *Eğitimde Kuram ve Uygulama, 7*(1), 59-78.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* Doctoral Dissertation, Faculty of Education-Simon Fraser University.

Bülbül, M. Ş. (2013). Görme engelli öğrenciler ile grafik çalışırken nasıl bir materyal kullanılmalıdır. *Fen Eğitimi ve Araştırmaları Derneği Fen Bilimleri Öğretimi Dergisi, 1*(1), 1-11.

Bülbül, M. Ş., Demirtaş, D., Cansu, Ü., Oktay, Ö., & Garip, B. (2012). *Views and recommendations about 9th grade force and motion unit from physics teachers who studied with visually impaired students*. Applied Education Congress. Ankara: METU Faculty of Education.

Bülbül, M. Ş., & Eryılmaz, A. (2012). *Görme engelli öğrenciler için fizik ders araçları*. Ankara: Murat Kitapevi.

Bülbül, M. Ş., Garip, B., Cansu, Ü., & Demirtaş, D. (2012). Görme engelliler için matematik öğretim materyali tasarımı: İğneli sayfa. *İlköğretim Online, 11*(4).

Cahill, H., & McCarthy, J. (1994). Ensuring usability in interface design: a workstation to provide usable access to mathematics for visually disabled users. *Information Technology and Disabilities, 1*(4).

Cahill, H., Linehan, C., McCarthy, J., Bormans, G., & Engelen, J. (1996). Blind and partially sighted students' access to mathematics and computer technology in Ireland and Belgium. *Journal of Visual Impairment & Blindness, 90*(4), 105-114.

Cansu, Ü. (2014). *Perception of visually ımpaired students equal sign and equality*. In Conference proceedings International Conference New Perspectives in Science Education, 20-21 March, Italy, libreriauniversitaria. it Edizioni (3rd Edition, p. 143). Retrieved from https://books.google.com.tr/books.

Cansu Kurt, Ü. (2015). Görme engelliler ve matematik eğitimi. *Sürdürülebilir ve Engelsiz Bilim Eğitimi, 1*(1), 21-28. Retrieved from http://fizikli.com/journal/3.pdf.

Capraro, M. M., Kulm, G., & Capraro, R. M. (2005). Middle grades: Misconceptions in statistical thinking. *School Science and Mathematics, 105*(4), 165-174.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Issues In Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education III, 7*, 114-162.

Carney, S., Engbretson, C., Scammell, K., & Sheppard, V. (2003). *Teaching students with visual impairments*. http://www.education.gov.sk.ca/vision.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carvalho Vita, A. I. D. A., & Kataoka, V. Y. (2014). Blind students'learning of probability through the use of a tactile model. *Statistics Education Research Journal, 13*(2).

Case, R., & Griffin, S. (1990). Child cognitive development: The role of central conceptual structures in the development of scientific and social thought. *Advances in Psychology, 64*, 193-230.

Catley, K., Lehrer, R., & Reiser, B. (2005). Tracing a prospective learning progression for developing understanding of evolution. *Paper Commissioned by the National Academies Committee on test design for K-12 Science achievement*, 67.

Cattaneo, Z., & Vecchi, T. (2011). *Blind vision: the neuroscience of visual impairment*. London: MIT Press.

Cavkaytar, A. (2012). Özel eğitim. İ. Diken (Ed.), *Özel eğitime gereksinim duyan çocuklar ve özel eğitim* içinde (ss. 3-27). Ankara: Pegem Akademi.

Chew, Y. C., Tomlinson, B. J., & Walker, B. N. (2014). *Graph and number line input and exploration (GNIE) tool technical report.* Geo rgia Institute of Technology. Retrieved from https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/51943/GNIETechnical Report.pdf?sequence=1&isAllowed=y on Agus 2019.

Chiu, M. M., Kessel, C., Moschkovich, J., & Munoz-Nunez, A. (2001). Learning to graph linear functions: A case study of conceptual change. *Cognition and Instruction, 19*(2), 215-252.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 16-30.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547–590). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Clement, L. (2001). What do students really know about functions?. *The Mathematics Teacher, 94*(9), 745-748.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2008). Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal, 45*(2), 443-494.

Clements, D., & Stephan, M. (2004). Measurement in PreK-2 mathematics. In D. Clements, J. Sarama, A. M. Di-Biase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, (pp. 299-321). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 163-184.

Cobb P. & Steffe L. P. (1983) The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2): 83–94.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1990). Classrooms as learning environments for teachers and researchers. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 4*, 125-210.

Cohen, L. W., & Ehrlich, G. (1963). *The structure of the real number system*. Canada: D. Van Nostrand Company.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-151). Cambridge University Press.

Confrey, J., & Maloney, A.P. (2010). *A next generation of mathematics assessments based on learning trajectories.* East Lansing, MI.

Confrey, J., Maloney, A. P., & Corley, A. K. (2014). Learning trajectories: a framework for connecting standards with curriculum. *ZDM, 46*(5), 719-733.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Wilson, P.H., & Mojica, G. (2008). *Synthesizing research on rational number reasoning*. Working Session at the Research Pre-session of the National Council of Teachers of Mathematics, Salt Lake City, UT.

Confrey, J., & Smith, E. (1991). *A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations*. Paper presented at the 13th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education, Blacksburg, VA.

Cooper, M., Lowe, T., & Taylor, M. (2008). Access to mathematics in web resources for people with a visual impairment. In K. Miesenberger et al. (Eds.), *International conference on computers for handicapped persons* (pp. 926-933). Springer, Berlin, Heidelberg.

Corcoran, T., Mosher, F.A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence-based approach to reform*. New York: Center on Continuous Instructional Improvement Teachers College–Columbia University.

Corn, A., & Koenig, A. J. (2007). *Foundations of low vision: Clinical and functional perspectives*. New York: AFB Press.

Cornoldi, C., Cortesi, A., & Preti, D. (1991). Individual differences in the capicity limitations of visuo-spatial short-term memory; research on sighted and totally congenitally blind people. *Memory & Cognition, 19*(5), 459–468.

Cowan, H. (2011). *Knowledge and Understanding of Function held by Students with Visual Impairments*. Doctoral Dissertation, The Ohio State University.

Cox, P. R., & Dykes, M. K. (2001). Effective classroom adaptations for students with visual impairments. *Teaching Exceptional Children, 33*(6), 68–74.

Coxford, A. F. (1995). The case for connections. In P.A. House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-12). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Czarnocha, B. (2016). Learning trajectory: Linear equations. In B. Czarnocha, W. Baker, O. Dias and V. Prabhu (Eds.), *The Creative Enterprise of Mathematics Teaching Research Elements of Methodology and Practice – From Teachers to Teachers* (pp. 373-393) The Netherlands: Sense Publishers.

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çelik, D., Güneş, G. (2013). Farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerin harfli sembolleri kullanma ve yorumlama seviyeleri. *Kuram ve Uygulama Eğitim Bilimleri, 13*(2), 1115-1175.

Çitil, M. (2017). *Türkiye' de özel eğitim: Tarihsel, politik ve yasal gelişmeler*. Ankara: Vize Yayıncılık.

Daro, P., Mosher, F.A., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. Consortium for Policy Research in Education Report. Philadelphia, PA: Consortium for Policy Research in Education. Retrieved from http://repository.upenn.edu/cpre_researchreports/60.

Dede, Y. (2004). The concept of variable and ıdentification its learning difficulties. *Educational Sciences: Theory & Practice, 4*(1).

Dede, Y. (2005).Değişken kavramı üzerine. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 13*(1), 139-148.

Dede, Y., Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*(24).

Demirel, Ö. (2009). *Kuramdan uygulamaya eğitimde program geliştirme*. Ankara: Pegem Akademi.

Dick, T., & Kubiak, E. (1997). Issues and aids for teaching mathematics to the blind. *The Mathematics Teacher*, *90*(5), 344-349.

Doğan, M. (2013). Nokta, doğru, doğru parçası, ışın, düzlem ve uzay kavramları. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (ss.197-220). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Dreyfus, S. E. (2004). The five-stage model of adult skill acquisition. *Bulletin of Science, Technology & Society*, *24*(3), 177-181.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Duncan, R.G., Rogat, A.D., & Yarden, A. (2009). A learning progression for deepening students’ understanding of modern genetics across the 5th-10th grades. *Journal of Research in Science Teaching, 46*(6), 655-674.

Dunham, P. H., & Osborne, A. (1991). Learning How to See: Students Graphing Difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13*(4), 35-49.

Dünya Sağlık Örgütü [World Health Organization]. (2009). Visual impairment and blindness (Fact sheet no. 282). Retrieved March 11, 2010, from http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs282/en/index.html.

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning sciences, 11*(1), 105-121.

Edgington, C. P. (2012). *Teachers' uses of a learning trajectory to support attention to students' mathematical thinking*. Doctorial Disertation. North Carolina State University, Raleigh.

Edwards, A. D., & Stevens, R. D. (1994). *A multimodal interface for blind mathematics students*. INSERM'94, 97-104.

Edwards, A. D., Stevens, R. D., & Pitt, I. J. (1995). *Non-visual representation of mathematical information*. York, University of York.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann and S. Cunningham S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Eli, J. A. (2009). An exploratory mıxed methods study of prospectıve mıddle grades teachers'mathematıcal connectıons whıle completıng ınvestıgatıve tasks ın geometry. Doctoral Dissertation, University of Kentucky Educational Sciences, Kentucky.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297.

Ely, R., Emerson, R. W., Maggiore, T., Rothberg, M., O'connell, T., & Hudson, L. (2006). Increased content knowledge of students with visual impairments as a result of extended descriptions. *Journal of Special Education Technology, 21*(3), 31-43.

Enç, M. (2005). *Görme özürlüler gelişim, uyum ve eğitimleri*. Ankara: Gündüz Eğitim ve Yayıncılık.

Erişti, S.D.B (2011). Eğitimde ölçme ve değerlendirme. A. A. Kurt (Ed.). *Ölçme ve değerlendirme* içinde (ss. 3-24). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Web-Ofset.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children’s understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*, 232-236.

Ferrell, K. A., Buettel, M., Sebald, A. M., & Pearson, R. (2006). *Mathematics research analysis*. Louisville, KY: American Printing House for the Blind.

Fischbein, E., & Baltsan, M. (1998). The mathematical concept of set and the'collection'model. *Educational Studies In Mathematics, 37*(1), 1-22.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gardner, J. (2003). *DotsPlus Braille tutorial, simplifying communication between sighted and blind people*. In Proceedings of the 2003 CSUN International Conference on Technology and Persons with Disabilities, Los Angeles, CA.

Gardner, J. A., Ungier, L., & Boyer, J. J. (2006). Braille math made easy with the Tiger formatter. In International Conference on Computers for Handicapped Persons (pp. 1215-1222). Springer, Berlin, Heidelberg.

Gibson, W., & Darron, C. (1999) Teaching statistics to a student who is blind. *Teaching Psychology*, *26*(2), 130–131.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics*, *1*(3), 4-11.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Routledge.

Goldreich D. & Kanics I. M. (2003). Tactile acuity is enhanced in blindness. *Journal of Neuroscience*, *23*(8), 3439-3445.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*, 443–471.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105-128.

Groenveld, M. (1993). Effects of visual disability on behaviour and the family. In A.R. Fielder, A.B., Best, & M.C. Bax, (Eds.), The management of visual impairment in childhood (pp. 64-77). London: Cambridge University Press.

Gürgür, H., Şafak, P. (2017). *İşitme ve görme yetersizliği*. Ankara: Pegem Akademi.

Gürbüz, R., Akkan, Y. (2008). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş düzeylerinin karşılaştırılması: Denklem örneği. *Eğitim ve Bilim, 33*(148), 64-76.

Gürel Selimoğlu, Ö. (2017). Görme yetersizliği olan bireylerin gelişim özellikleri. H. Gürgür & P. Şafak, *İşitme ve görme yetersizliği* içinde (ss. 151-184). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Haber, R. N., Haber, L. R., Levin, C. A., & Hollyfield, R. (1993). Properties of spatial representations: Data from sighted and blind subjects. *Perception & Psychophysics, 54*(1), 1-13.

Harper, E. (1979). *The child's interpretation of a numerical variable*. Doctoral Dissertation, University of Bath, England.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics*: *11–16*. London: John Murray.

Hatısaru, V., & Erbaş, A. K. (2013). Endüstri meslek lisesi öğrencilerinin fonksiyon kavramını anlama düzeylerinin incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 21*(3), 865-882.

Healy, L., Fernandes, S. H. A. A., & do Rosário, C. N. S. (2008). *The role of gestures in the mathematical practices of blind learners*. In Proceedings of the 32nd conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 3, pp. 137-144).

Hedrick, E.R. (1938). The function concept in elementary teaching and in advanced mathematics. *The American Mathematical Monthly, 45*(7), 448-455.

Heeffer, A. (2011). Historical objections against the number line. *Science & Education, 20*(9), 863–880.

Heller, M.A., Melissa, M.C., & Clark, A. (2005). Pattern perception and pictures for the blind. *Psicológica, 26*, 161-171.

Herbert, K. & Brown, R., (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3*, 340-344.

Herman, M. (2007). What students choose to do and have to say about use of multiple representations in college algebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *26*(1), 27-54.

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Hertrich, I., Dietrich S., Moos A., Trouvain J., & Ackermann H. (2009). Enhanced speech perception capabilities in a blind listener are associated with activation of fusiform gyrus and primary visual cortex. *Neurocase, 15*, 163–170.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (ss. 65-97). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Holliday, B. (2004). *Advanced mathematical concepts: Precalculus with applications*. Glencoe/McGraw-Hill.

Holliday, B., Cyevas, G. J., Moore-Harris, B., Carter, J. A., Marks, D., Casey, R. M., Day, R. & Hayek, L. M. (2001). *Algebra 1*. McGraw-Hill.

Horzum, T. (2013). *Görme engelli öğrencilerin bazı matematiksel kavramlardaki kavram imajları ve temsilleri*. Doctoral Dissertation, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Horzum, T. (2016). Total görme engelli öğrencilerin perspektifinden üçgen kavramı. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(2), 275-295.

Horzum, T. & Arikan, A. (2019). Understanding the polygon with the eyes of blinds. *International Journal of Progressive Education, 15*(1), 116-134. doi: 10.29329/ijpe.2019.184.8.

Horzum, T. & Bülbül, M. Ş. (2017). Görme engelliler için bir geometri öğretim materyali: Geometri kafesi. *Sürdürülebilir ve Engelsiz Bilim Eğitimi, 3*(1), 1-15. Retrieved from http://fizikli.com/journal.

Huebner, K.M., Merk-Adam, B., Stryker, D., & Wolffe, K. (2004). *The national agenda for the education of children and youths with visual impairments, including those with multiple disabilities*. New York: AFB Press.

Hunt, B., Hiscox, S., Morimitsu, K., & Paulsoni, L. (1982). *Conducting a student needs assessment*. Washington, DC: National Inst. of Education.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

Huntley, M. A., & Davis, J. D. (2008). High-school students' approaches to solving algebra problems that are posed symbolically: Results from an interview study. *School Science and Mathematics*, *108*(8), 380-388.

Izsak, A. (2000). Inscribing the Winch: Mechanisms by which students develop knowledge structures for representing the physical world with algebra. *Journal of the Learning Sciences, 9*(1), 31-74.

Jafri, R., Aljuhani, A. M., & Ali, S. A. (2015). A tangible interface-based application for teaching tactual shape perception and spatial awareness sub-concepts to visually impaired children. *Procedia Manufacturing, 3*, 5562-5569.

Julesz, B. (1981). Textons, the elements of texture perception, and their interactions. *Nature, 290*(5802), 91-97. https://doi.org/10.1038/290091a0.

Kabael, T. U. (2016). Fonksiyonlar. A. N. Elçi, E. Bukova Güzel, B. Cantürk Günhan, E. Ev Çimen (Eds.), *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları öğrenenler ve öğretenler için* içinde (ss. 179-188). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Kabael, T. U. (2017). *Genel matematiksel kavramlar öğrenme süreçleri ve öğretim yaklaşımları* (3. Baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Kaput, J. (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. In The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium (pp. 25-26). National Research Council, National Academy Press Washington, DC.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kargın, T. (2010). Özel gereksinimi olan öğrencilerin yetiştirilmesi ve BEP. G. Akçamete (Ed.), *Özel eğitim* içinde (ss. 77-112). Ankara: Kök Yayıncılık.

Karlığa, B. (2002). *Düzlem analitik geometri*. Ankara: Gazi Üniversitesi.

Karshmer, A. & Farsi, D. (2007). *Access to mathematics by blind students: A global problem*. Business Analytics and Information Systems. Paper 13. Retrieved from http://repository.usfca.edu/at/13.

Karshmer, A.I., Gupta, G., Pontelli, E. (2007). *Mathematics and accessibility: A survey*. In Proc. 9th International Conference on Computers Helping People with Special Needs (Vol. 3118, pp. 664-669). Retrieved from http://www.utdallas.edu/~gupta/mathaccsurvey.pdf.

Kay, D. C. (2001). *College geometry: A discovery approach* (2nd Edit.). USA: Adison Wesley.

Kaya, R. (2002). *Analitik geometri* (7. Baskı). İstanbul: Bilim Teknik Yayınevi.

Keene, K. A. (2007). A characterization of dynamic reasoning: Reasoning with time as parameter. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 230-246.

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 1-17.

Kelly, S. M., & Clark-Bischke, C. (2011). *History of visual impairments*. In History of Special Education (pp. 213-236). Emerald Group Publishing Limited.

Kırcaali-İftar, G. (1992). Özel eğitimde kaynaştırma. *Eğitim ve Bilim, 16*(86), 45-50.

Kılıç, A., Aydın, M., Ökmen, B. & Şahin, Ş. (2019). *Kuramdan uygulamaya ihtiyaç belirleme*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Kızılaslan, A. (2016). *İlköğretim 8. sınıf görme engelli öğrencilere "Maddenin halleri ve ısı" ünitesi ile ilgili kavramların öğretimi*. Doktora Tezi. Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Kızılaslan, A., & Sözbilir, M. (2017). Görme yetersizliği olan öğrencilerin 'maddenin halleri ve ısı' ünitesini öğrenmeye yönelik ihtiyaç analizi. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 35*, 274-290.

Kızılaslan, A., & Sözbilir, M. (2018). Görme yetersizliği olan öğrencilerin bilişsel becerileri ve psikolojik deneyimleri üzerine bir derleme. *Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 31*, 29-43.

Kızıltoprak, A. (2014). *Ortaokul 5. sınıf öğrencilerinde ilişkisel düşünmenin gelişimi: bir öğretim deneyi*. Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Kızıltoprak, A., & Köse, N. Y. (2017). Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10*(1), 131-145.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research Issues in The Learning and Teaching of Algebra, 4,* 33-56.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition*, (pp. 96-112). Cambridge: Cambridge University Pres.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1994). Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 583-607.

Kieran, C. (2004). *The core of algebra: Reflections on its main activities*. In The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study (pp. 21-33). Springer, Dordrecht: Kluwer.

Kieran, C. & Chalouh, L., (1993). Prealgebra: the transition from arithmetic to algebra. In Douglas T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics,* Reston, VA: NCTM.

Kinzel, M. T., (2000). *Charecterizing ways of thinking that underlie college students ınterpretation and use of algebraic notation*. Doctoral Dissertation, The Pennslyvania State University.

Kleene, S. C. (2002). *Mathematical logic*. New York: Courier Dover Publications.

Klingenberg, O. G., (2007). Geometry: Educational implications for children with visual impairment. *Philosophy of Mathematics Education (Special Issue on Social Justice, Part 1), 20,* 1-15. Retrieved from http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome20/index. htm on 10 Now 2011.

Knauff, M., & May, E. (2006). Mental imagery, reasoning, and blindness. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 59*(1), 161-177.

Knauff, M., Strube, G., Jola, C., Rauh, R., & Schlieder, C. (2004). The psychological validity of qualitative spatial reasoning in one dimension. *Spatial Cognition and Computation*, *4*, 167–188.

Knuth, E.J. (2000). Understanding connections between equations and graphs. *The Mathematics Teacher*, *93*(1), 48-53.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76.

Koenig, A., & Holbrook, M. (2000). *Instructional strategies for teaching children and youths with visual impairments*. Foundation of Education (Vol. 2), New York: American Foundation for the Blind.

Kriegler, S. (2004). *Just what is algebraic thinking?*. Retrieved from https://mathandteaching.org/uploads/Articles_PDF/articles-01-kriegler.pdf on Agust 2019.

Krufka, S. E., & Barner K. E. (2005). *Automatic production of tactile graphics from Scalable Vector Graphics*. International Conference on Computers and Accessibility (ASSETS), Baltimore, ACM Press, pp. 166-172.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26.

Küçüközyiğit, M. S., & Özdemir, S. (2017). Görme yetersizliğinden etkilenmiş öğrencilerde matematikte çarpma işlem akıcılığını arttırmada kendini izleme tekniğinin etkililiği. *Hacettepe Eğitim Dergisi, 32*(3), 676-694.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

Larson, R. (2009). *McDougal Littell Pre-Algebra*. McDougal Littell.

Lawrence, A., & Hennessy, C. (2002). *Lessons for algebraic thinking: Grades 6-8.* Sausalito: Math Solutions Publication.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 349-371.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*, 1-64.

Li, X. (2006). *Cognitive analysis of student's errors and misconceptions in variables, equations and functions*. Doctoral Dissertation, Texas A & M University, College Station.

Linchevski, L., & Vinner, S. (1988). The naive concept of sets in elementary teachers. In Proceedings of the 12th international conference, psychology of mathematics education, 11, 471-478.

Linn, M. C., Pulos, S., & Gans, A. (1981). Correlates of formal reasoning: Content and problem effects. *Journal of Research in Science Teaching, 18*(5), 435-447.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78*(3), 307.

Lowenfeld, B. (1948). Effects of blindness on the cognitive functions of children. *Nervous Child, 7*, 45-54.

Lucas, J. F. (1990). *Itroduction to abstract mathematics* (Seconds Ed.). New York: Ardsley House.

Mani, M., Plerchaivanich, A., Ramesh, G., & Campbell, L. (2005). *Mathematics made easy for children with visual impairments*. Retrieved from http://icevi.org/pdf/Mathematics_%20Made_%20Easy%20for%20Children_%20with%20_Visual%20Impairment.pdf.

Maulana, M. (2019). Cubaritme in the trajectory learning of multiplication concept. *In Journal of Physics: Conference Series, 1188*(1).

McCallister, C. J., & Kennedy, R. L. (2001). *Teaching basic statistics to a student who is blind*. Paper presented at The Annual Meeting of the Mid-South Educational Research Association.

McCarthy, C. (2005). Effects of thematic-based, hands-on science teaching versus a textbook approach for students with disabilities. *Journal of Research in Science Teaching, 42*, 245–263.

McClellan, N. (2007). *The MathTalk System*. Retrieved from http://www.metroplexvoice.com/tech_notes.htm.

McCool, J.K. (2009). *Measurement learning trajectories: A tool for professional development*. Illinois State University.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance. *Child Development, 76*, 1-17.

Mechan, A., Hoffert, D., & Hoffert, L. (1993). Strategies and resources for teaching statistics to visually impaired students. *Teaching of Psychology, 20*, 242–244.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. California: Jossey-Bass.

Millar, S. (1985). The perception of complex patterns by touch. *Perception, 14*(3), 293-303.

Millar, S. (1994). *Understanding and representing space: Theory and evidence from studies with blind sighted children*. Oxford: Cladenron Press.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2007). *Çocuk gelişimi ve eğitimi*. Ankara: MEB Yayınevi.

Milli Eğitim Bakanlığı (2013). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) dersi öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (2014). *Özel eğitim mesleki eğitim merkezi eğitim programı (görme engelli için).* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (2017a). *İlköğretim matematik (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) dersi öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (2017b). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) dersi öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (2017c). *MEB istatistikleri*. Retrieved April 11, 2017 from http://sgb.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2016_03/18024009_meb_istatistikleri_org un_egitim_2015_2016.pdf/.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018a). *İlköğretim matematik (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) dersi öğretim programı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018b). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) dersi öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018c). Özel Eğitim Hizmetleri Yönetmeliği. https://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2018_07/09101900_ozel_egitim_hizmetleri_yonetmeligi_07072018.pdf adresinden edinilmiştir.

Mojica, G. F. (2010). *Preparing pre-service elementary teachers to teach mathematics with learning trajectories*. Doctoral Dissertation, North Carolina State University, Raleigh, NC.

Monroe, E. E., & Mikovch, A. K. (1994). Making mathematical connections across the curriculum: Activities to help teachers begin. *School Science and Mathematics, 94*(7), 371-376.

Moss, D. L., Boyce, S., & Lamberg, T. (2019). Representations and conceptions of variables in students' early understandings of functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(2).

Mosvold, R. (2008). Real-life Connections in Japan and the Netherlands: National teaching patterns and cultural beliefs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Plymouth University, UK: Centre for Innovation in Mathematics Teaching, 1-18. Retrieved from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/mosvold.pdf.

Musser, G. L., Burger W. F., & Blake E. P. (2003). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach*. John Wiley & Sons, Inc.

Myers, M. (2014). *The use of learning trajectory based ınstruction (LTBI) in supporting equitable teaching practices in elementary classrooms: A multi-case study*. Doctoral Dissertation, North Carolina State University, North Carolina.

Narlı, S. (2016a). Kümeler. A. N. Elçi, E. Bukova Güzel, B. Cantürk Günhan, E. Ev Çimen (Eds.), *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları öğrenenler ve öğretenler için* içinde (s.1-10). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Narlı, S. (2016b). İlişkilendrime becersi ve muhtevası. E. Bingölbali, S. Arslan, İ.Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (ss. 231-244). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA 20191-9988.

Nemeth, A. (1996). *Teaching mathematics as a Blind person*. Text of a presentation to the Mathematical Association of America, Orlando, Florida. Retrieved from http://www.rit.edu/~easi/easisem/nemeth1.htm.

Nilklad, L. (2004). *College algebra students' understanding and algebraic thinking and reasoning with functions*. Doctoral dissertation, Oregon State University, Oregon.

Nolan, C.Y. & Kederis, C.J. (1969). *Perceptual factors in braille word recognition*. New York : American Foundation for the Blind.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). The visibility of meanings: Modelling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(1), 3-31.

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Okcu, B., Yazıcı, F., & Sözbilir, M.(2016). Ortaokul düzeyindeki görme engelli öğrencilerin okuldaki öğrenim sürecine dair görüşleri. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 5*(1), 51-83.

Ontario Ministry of Education [OME]. (2013). *Paying attention to algebraic reasoning: K12*. Retrived June 2017 from http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/Paying Attention Algebra.pdf.

Osborne, G. A. (1909). *Differential and integral calculus*. Boston: D. C. Heath & Co.

Osterhaus, S.A. (1996). *Teaching math to visually impaired students*. Retrieved from http://www.tsbvi.edu/math.

Öksüz, C. (2010). İlköğretim yedinci sınıf üstün yetenekli öğrencilerin nokta, doğru ve düzlem konularındaki kavram yanılgıları. *İlköğretim Online, 9*(2), 508-525.

Özaltun-Çelik, A. (2018). *İkinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme yollarının ve öğretim dizisinin tasarlanması*. Dokora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüü, İzmir.

Özdemir, A. Ş., & Küpcü, A. R. (2010). The effect of using ınteractive unit for ındividualizing mathematics teaching on mathematics success and attitude. *İlkogretim Online, 9*(1), 66-78.

Özgen, K. (2017). Matematiksel öğrenme etkinliği türlerine yönelik kuramsal bir çalışma: fonksiyon kavramı örneklemesi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(3), 1437-1464.

Özgün-Koca, S. A. (2015). Öğrencilerin grafik okuma, yorumlama ve oluşturma hakkındaki kavram yanılgıları (4. Baskı). M.F. Özmantar, E. Bingölbali, & H. Akkoç (Eds.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (ss. 61-89). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Özyürek, M. (2004). Bireyselleştirilmiş eğitim programı: Temelleri ve geliştirilmesi. Ankara: Kök Yayıncılık.

Panorkou, N., Maloney, A. P., & Confrey, J. (2013). *A learning trajectory for early equations and expressions for the common core standards.* Martinez, M. & Castro Superfne, A (Eds.). Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 417-423), IL: University of Illinois at Chicago.

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (M. Bütün & S. Demir, Çev.). Ankara: Pegem Akademi.

Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child*. New York, NY: Ballantine.

Piaget, J. (1980). *Adaptation and intelligence: Organic selection and phenocopy*. University of Chicago Press.

Philipp, R. A. (1999). The many uses of algebraic variables. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking*, Grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2).

Potter, L. E. (1995). Small-scale versus large-scale spatial reasoning: Educational implications for children who are. *Journal of Visual Impairment & Blindness, 89*, 142.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter (Cilt 1, ss. 2-21).

Roth, W.M. & Lee, Y. J. (2004). Interpreting unfamiliar graphs: A generative, activitytheoretic model. *Educational Studies in Mathematics, 57*(2), 265-290.

Rouzier, S., Hennion, B., Segovia, T. P., & Chêne, D. (2004). *Touching geometry for visually impaired pupils*. EuroHaptics Proceedings, Munich, Germany, 104-109.

Rule, A. C., Stefanich, G. P., Boody, R. M., & Peiffer, B. (2011). Impact of adaptive materials on teachers and their students with visual impairments in secondary science and mathematics classes. *International Journal of Science Education, 33*(6), 865-887.

Schifter, D. (1998). Learning mathematics for teaching: From a teachers' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(1), 55-87.

Scholl, G. (1986). *Foundations of education for blind and visually handicapped children and youth*. New York: American Federation for the Blind, Inc.

Schumacher, C. (2000). *Chapter zero: Fundamental notions of abstract mathematics*. New Jersey: Addison-Wesley Publishing Company.

Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old subjects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics, 29*(3), 259.

Senk, S. L., & Thompson, D. R. (2006). Strategies used by second-year algebra students to solve problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 116-128.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1995). The development of Algebra: Historical and psychological persrectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Shawnee High School (t.y.). Advanced function and relations (chapter 13). Retrieved from https://www.clark-shawnee.k12.oh.us/userfiles/36/Classes/1068/ch13.pdf?id=2769.

Shulman, L. S. (1999). Taking learning seriously. *Change: The Magazine of Higher Learning, 31*(4), 10-17.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teachers: the teacher development experiment. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp.335-359). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Simon, M. (2003). *Logico-mathematical activity versus empirical activity: Examining a pedagogical distinction*. In N. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 4, pp. 183-190). Hawaii: Honolulu.

Simon, M. A. (2006a). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 359-371.

Simon, M. (2006b). *Pedagogical concepts as goals for teacher education: Towards an agenda for research in teacher development*. In S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz& A. Méndez (Eds.), Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol.. 2, pp. 730-735). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Simon, M. A. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 272-275). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Simon, M. A. (2017). *Learning through activity: a developing integrated theory of mathematics learning and teaching*. Presented at the the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Dublin, Ireland.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Simon, M., Tzur, R., Heinz, K. & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 305-329.

Shah, P., & Hoeffner, J. (2002). Review of graph comprehension research: Implications for instruction. *Educational Psychology Review, 14*(1), 47-69.

Shanty, N. O. (2016). Investigating students‟ development of learning integer concept and integer addition, *Journal on Mathematics Education, 7*(2), 57-72.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 259-281.

Smith, C. L., Wiser, M., Anderson, C. W. A., & Krajcik, J. (2006). Implications of research on children's learning for standards and assessment: A proposed learning progression for matter and the atomic-molecular theory. *Measurement: Interdisciplinary Research & Perspective, 14*(1&2), 1–98.

Spindler, R. (2006). Teaching mathematics to a student who is blind. *Teaching Mathematics and Its Applications, 25*(3), 120-126.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher, 90*(2), 110-113.

Stanley, P. (2008). *Assessing the mathematics related communication requirements of the blind in education and career*. In Heidelberg. K. Miesenberger et al. (Eds.). International Conference on Computers for Handicapped Persons (pp. 888-891). Berlin: Springer.

Stanley, P. B., Karshmer, A. I. (2006). *Translating Mathml into Nemeth Braille code*. In Miesenberger, K., Klaus, J., Zagler, W., Karshmer, A.I. (Eds.). International Conference on Computers Helping People (ICCHP), Vol. 4061 (pp. 1175–1182). Heidelberg: Springer.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. V., Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). London: Springer Netherlands.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E., Kelly, & R. A., Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*, (pp. 267-306). London: Routledge.

Stein, M. K., & Bovalino, J.W. (2001). Reflections on practice: Manipulatives: One piece of the puzzle. *Mathematics Teaching in Middle School, 6*(6), 356-359.

Stephens, M. (2004). Researching relational thinking: Technical report of research. Program report by Visiting Foreign Research Fellows, May 31, 2004. University of Tsukuba (Japan): Centre for Research on International Cooperation in Educational Development.

Stevens, R. (1996). *Principles for the design of auditory interfaces to present complex information to blind people*. Doctoral Dissertation, University of York. Retrieved from ftp://ftp.cs.york.ac.uk/pub/alistair/publications/latex/thesis.zip.

Stevens, R. D., & Edwards, A. D. N. (1993). *A sound interface to Algebra*. Proceedings of the IEE Colloquium on Special Needs and the Interface, London.

Stevens, R. D., Edwards, A. D., & Harling, P. A. (1997). Access to mathematics for visually disabled students through multimodal interaction. *Human-Computer Interaction, 12*(1), 47-92.

Stoeger, B., Miesenberger, K., & Batusic, M. (2004). Mathematical working environment for the blind motivation and basic ideas. In Miesenberger, K., Klaus, J., Zagler, W., Burger, D. (Eds.). *ICCHP 2004. LNCS, Vol. 3118* (pp. 656–663). Heidelberg: Springer.

Stoeger, B., Batusic, M., Miesenberger, K., & Haindl, P. (2006). Supporting blind students in navigation and manipulation of mathematical expressions: Basic requirements and strategies. In Miesenberger, K., Klaus, J., Zagler, W., Karshmer, A.I. (Eds.). *ICCHP 2006*. LNCS, Vol. 4061 (pp. 1235–1242). Heidelberg: Springer.

Sözbilir, Ö., Gül, Ş. Okcu, B., Yazıcı, F., Kızılaslan, A., Zorluoğlu, S. L., & Atilla, G. (2015). Görme yetersizliği olan öğrencilere yönelik fen eğitimi araştırmalarında eğilimler. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 15*(1), 218-241.

Şafak, P. (2005). *Birlikte eğitim ortamındaki görme yetersizliğinden etkilenmiş öğrencilere gezici öğretmenlik düzenlemesine göre verilen destek hizmetin etkililiği*. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Şafak, P. (2007). Az gören öğrencilere eldeli toplama öğretiminde uyarlanmış basamaklı öğretim yönteminin etkisi. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, 5*(1), 27-46.

Şafak, P., & Uyar, D. (2019). Matematik öğretiminde farklı yetersizlik grupları için öğretimsel uyarlamalara. İçinde S. Alptekin (Ed.), *Özel eğitimde matematik: Matematik performansı düşük öğrencilere temel matematik becerilerinin öğretimi* (ss. 299-332). Ankara: Eğiten Kitap.

Şenel, S., & Topuzkanamış, E. (2018). Görme yetersizliği olan öğrencilerin dinleme stratejilerinin belirlenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Özel Eğitim Dergisi, 19*(4), 699-722. doi: 10.21565/ozelegitimdergisi.397642.

Tabach, M. & Friedlander, A. (2003). *The role of context in learning beginnig algebra*. Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italia.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 271-284. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980binf-measuring-num.pdf.

Tall, D., & Bakar, M., (1991). *Students' mental prototypes for functions and graphs*. In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. I, pp. 104-111). Assisi, Italy.

Tanti, M. (2006). *Teaching mathematics to a blind student: A case study*. Master' s Thesis, University of Exeter, UK.

Tekay, T., & Doğan, M. (2015). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin doğrusal denklemlerin grafikleri ile ilgili soruları çözme becerilerinin değerlendirilmesi. *MATDER Matematik Eğitimi Dergisi, 2*(1).

Thinus-Blanc, C., & Gaunet, F. (1997). Representation of space in blind persons: Vision as a spatial sense?. *Psychological Bulletin*, *127*(1), 20-42.

Thompson, P. W. (1990). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebra*. Unpublished manuscript, San Diego State University, Center for Research in Mathematics & Science Education, San Diego.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1* (Issues in Mathematics Education, Vol. 4, pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, D. M. (2005). LaTeX2Tri: *Physics and mathematics for the blind or visually impaired. technology,* 3-6. Retrieved from physics.harvard.edu/~mattoon/davidmthompson/latex2tri.pdf

Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tuncer, A. T. (2009). Şemaya dayalı sözlü matematik problemi çözme stratejisinin görme yetersizliği olan öğrencilerin sözlü problem çözme performanslarına etkisi. Eğitim ve Bilim, 34(153).

Toennies, J. L., Burgner, J., Withrow, T. J., & Webster, R. J. (2011). *Toward haptic/aural touchscreen display of graphical mathematics for the education of blind students*. In 2011 IEEE World Haptics Conference (pp. 373-378).

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*(24).

Ural, A. (2006). Fonksiyon öğreniminde kavramsal zorluklar. *Ege Eğitim Dergisi, 7*(2), 75-94.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Valanides, N. C. (1996). Formal reasoning and science teaching. *School Science and Mathematics, 96*(2), 99-107.

Van Scoy, F., McLaughlin, D., & Fullmer, A. (2005). *Auditory augmentation of haptic graphs: Developing a graphic tool for teaching precalculus skill to blind students*. In Proceedings of the 11th Meeting of the International Conference on Auditory Display (Vol. 5).

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. *Readings on the Development of Children, 23*(3), 34-41.

Vygotsky, L. S. (1993). The fundamentals of defectology. In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.). *The collected works of L. S. Vygotsky*, Vol. 2. New York: Plenum Press.

Van de Walle J. A., Karp K. S., & Bay-William, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (7th ed.). United States of America: Pearson Education, Inc.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Learning from “didactikids”: An impetus for revisiting the empty number line. *Mathematics Education Research Journal, 20*(3), 6-31.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Warren, D. H. (1984) *Blindness and early childhood development*. New York: American Foundation for the Blind.

Warren, D. (1994). *Blindness and children: An individual differences approach.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Warren, E. (2006). Comparative mathematical language in the elementary school: A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 169-189. DOI: 10.1007/s10649-006-4627-5.

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students’ images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 67-85.

Wilkie, K. J. (2016). Students’ use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 333-361.

Williams, S., & Molina, D. (1998). Algebra: What all students can learn. In National Research Council (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum* (pp. 41-44). Washington, D.C.: National Academy Press.

Wilson, P.H. (2009). *Teachers’ uses of a learning trajectory for equipartitioning. Unpublished doctoral dissertation*. North Carolina State University. Raleigh, NC. Retrieved from https://repository.lib.ncsu.edu/bitstream/handle/1840.16/2994 on January 2018.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers’ uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 227-244.

Yackel, E., Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatric, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: NCTM.

Yaman, H., Toluk, Z., Olkun, S. (2003). İlköğretim öğrencileri eşit işaretini nasıl algılamaktadırlar?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 142-151.

Yıldırım, A. F. (2003). *Lise-1 öğrencilerinin fonksiyonlar konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Yin, R.K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3. Baskı). California: Sage Publication.

Yu, W., & Brewster, S. (2003). Evaluation of multimodal graphs for blind people. *Universal Access in the Information Society, 2*(2), 105-124.

Yu, P., Barrett, J.,& Presmeg, N. (2009). Prototypes and categorical reasoning: a perspective to explain how children learn about interactive geometry. In Craine, T.V. (Ed.), *Understanding geometry for a changing World* (pp. 109–126). Seventy-first Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Zazkis, R., ve Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: Th e tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.

Zebehazy, K. T., Zigmond, N., & Zimmerman, G. J. (2012). Performance measurement and accommodation: students with visual impairments on Pennsylvania's alternate assessment. *Journal of Visual Impairment & Blindness, 106*(1), 17-30.

Zembat, İ. Ö. (2016). Matematik öğretim döngüsü ve tahmini öğrenme yol haritaları. İçinde E. Bingölbali, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 509-518). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Zorluoğlu, S. & Sözbilir, M. (2017). Görme yetersizliği olan öğrencilerin öğrenmelerini destekleyici ihtiyaçlar. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 7*(2), 659-682.

Zorluoğlu, L., Sözbilir, M. & Kızılaslan A. (2016). Görme yetersizliğini olan bireylerin bilimsel okuryazarlıkları hakkında öğretmen eğitimcilerinin görüşleri. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 45*(2), 209-242.

EKLER

EK 1. İhtiyaç Tespiti ve Görme Engelli Bireyler İçin Mevcut Durum Belirleme Görüşme Soruları

Bu görüşmeyi görme engelli bireylerin cebirsel düşünme ve çeşitli cebirsel kavramları anlama süreçlerini incelemek için yapıyoruz. Böylece görme engelli bireyler için tasarlanacak olan matematik öğretimi üzerine etkinlikler ve materyaller için fikir sahibi olacağız. Öncelikle sizi tanıyabilmek amacıyla kişisel bilgileriniz ve öğrenim hayatınız ile ilgili konuşacağız. Ardından araştırmamıza ışık tutacak sorularımızın üzerine konuşacağız. Matematik öğrenme deneyimleriniz, günlük hayatınızda matematiğin yeri ve bazı kavramlara ilişki genel fikirlerinizi belirlemeye çalışacağız. Bu görüşme video ile kayıt altına alınacaktır ve kayıtlar sadece araştırmacı tarafından izlenecektir. Paylaştığınız düşüncelerin yanlış veya doğru olup olmaması önemli değildir. Önemli olan düşündüğünüz şey veya fikriniz ne ise bunu tereddüt etmeden, rahatlıkla benimle paylaşabilmenizdir.

A. Kişisel Bilgiler

1. Görme yetersizlik düzeyiniz nedir? (Tıbbi ve RAM raporu veya görme oranı)
2. Ne zaman görme yetinizi kaybettiniz?
3. Okulunuz ve sınıf düzeyiniz nedir? (Mezun ise mesleğiniz nedir?)
4. Mevcut eğitim ortamlarınız ve daha önceki eğitim tecrübeleriniz (kaynaştırma sınıfı, özel eğitim merkezleri, görme engelli okulu, BEP desteği, eğitim koçu) neledir?
5. Okulunuzun ya da öğretmenlerinizin özel eğitim anlamında size sağladığı destekler var mı? Varsa bunlar nelerdir/nelerdi?
6. (Kaynaştırma ve bireysel)Varsa eğitim ve öğretim hayatınızda karşılaştığınız güçlükler nelerdir? Paylaşabilir misiniz?
7. Eğitim sürecinde destek aldığınız mateyaller nelerdir/nelerdi? (Braille ya da büyük punto, daktilo ya da yazı tahtası teknolojik araç kullanımı (Zoomtext, JAWS, Braille-note, vb.), okuyucu desteği, ses kaydı, vb.) Okulda ve evde kullandığınız materyaller?
8. Size özel kullandığınız herhangi bir sözlü ifade, işaret ya da model var mı? Neden böyle bir uygulamayı tercih ettiniz?
9. Öğrenme sürecinde (özel olarak matematik derslerinde) teknolojik materyallerin etkililiği hakkında düşünceleriniz nelerdir? Paylaşabilir misiniz?
10. (Braille yazı kullanıyor ise) Ne zamandır matematik derslerinde Braill alfabesi kullanıyorsunuz? Nameth kodlarını hiç duydunuz mu?Paylaşabilir misiniz?
11. Sınıfta tahtada sunulan bilgilere erişmeyi tercih ettiğiniz belirli bir yol var mı/mıydı? (bir öğrencinin size yazılanları okumasını sağlama, sınıfta görme uzmanınız olması, öğretmenin işaret ettiğini veya yazdıklarını tarif etmesini isteme vs.)Varsa bunlar nelerdir? Paylaşabilir misiniz?
12. Derslerinizde sevdiğiniz, başarılı olduğunuz ya da daha iyi anladığınızı düşündüğünüz etkinlikler varsa paylaşır mısınız?

B. Matematik Eğitimine Dair Bilgiler

1. Matematik dersine ya da kavramlarına olan ilginiz hakkında bilgi verir misiniz?
2. Diğer dersler ile matematik dersinde öğrenme süreçlerini sevdiğiniz, ilgi duyduğunuz, anladığınız, başarılı olduğunuz gibi durumlar açısından karşılaştırırsanız neler söylersiniz? Hangi derste daha çok zorlanıyorsunuz/zorlanıyordunuz? Bu durumda en sevdiğiniz ders(ler) hangisidi?
3. Matematik derslerinde sevdiğiniz, başarılı olduğunuz ya da daha iyi anladığınızı düşündüğünüz çalışmalar, uygulamalar ya da etkinlikler varsa paylaşır mısınız?
4. Matematik öğrenirken size faydalı olan araçlar, materyaller, etkinlikler ya da durumlar nelerdir/nelerdi? Uygulama sürecinde daha etkili olduğunu düşündüğünüz etkinlikler oldu mu? Açıklar mısınız?
5. Matematik derslerinizde sevdiğiniz konu ya da kavram var mıydı? Varsa bunlar nelerdir? Bunları sevmenizin gerekçelerini, nedenlerini paylaşabilir misiniz?
6. Hatırladığınız etkili bir matematik dersinizi paylaşabilir misiniz? Sizi etkileyen durumlar nelerdi?
7. Matematikte öğrendiklerinizi günlük hayattınızda karşılaştığınız problemlerin çözümünde kullandığınız durumlar varsa örnek verebilir misiniz? Bu matematiksel kavramın diğer öğrendiğiniz mtematik bilgilerinden farkları nelerdi? Bu kavrama dair okulunuzda tasarlanan dersleriniz nasıldı?
8. Matematik öğrenirken sizi zorlayan durumlar nelerdir? Hangi kavram(lar)ı anlamakta güçlük yaşadınız? Bu zorlayan durumları aşabildiniz mi? Nasıl/Neden?
9. Matematik öğretimde öğretmenlerinizin kullanığı strateji ve teknikler (problem çözme, akran desteği, bireysel çalışmalar, sözlü anlatım, vb) yaşadığınız sorunlar nelerdir/nelerdi?Hatırlıyorsanız paylaşabilir misiniz?
10. Matematikte değerlendirme sürecine (yazılı ve ulusal sınavlar vb) dair yaşadığınız zorluklar nelerdir/nelerdi? Hatırlıyorsanız paylaşabilir misiniz?
11. Matematik sınavlarında soruları seçerek mi çözersiniz? Seçimlerinizi neye göre belirliyorsunuz? (görsel olmayan, kavrama dayalı, işlemsel olarak kısa, kavramsal bilgi odaklı, vb.)
12. Matematikte kendi geliştirdiğiniz sratejiler, teknikler, problem çözme stratejileri vs (problemi çözmek için belirlediğini yol) var mı? Hatırlıyorsanız paylaşabilir misiniz?Nasıl olduğunu açıklar mısnız? Neden bu stratejiyi kullanıyorsunuz?

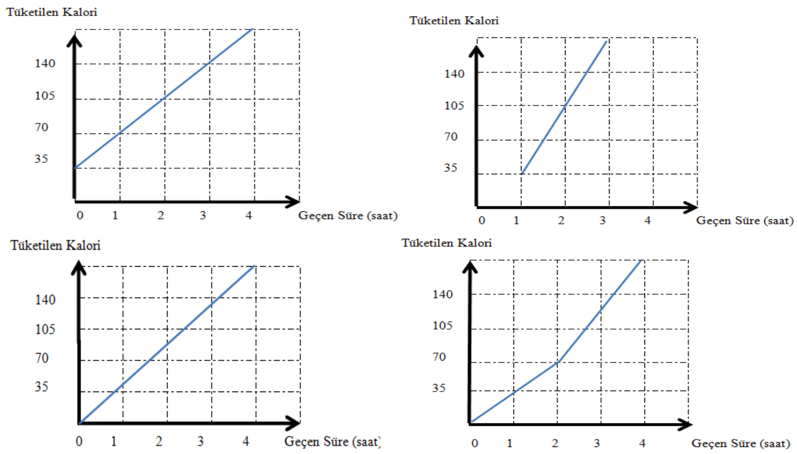
C. Cebirsel Kavramlara Dair Bilgiler

1. Cebir öğrenmede sizi zorlayan durumlar nelerdir? Hangi kavram(lar)ı anlamakta güçlük yaşadınız? Zorlanmanızın sebepleri hakkında bir şeyler söyleyebilir misiniz? Sizi zorlayan bu durumları aşabildiniz mi? Nasıl?
2. Matematiktik dersinde özellikle cebirsel kavramlara dair problemleri çözerken zorlandığınız noktalar nelerdir/nelerdi?Hatırlıyorsanız bunları paylaşabilir misiniz?
3. Özellikle cebir öğrenirken, öğretmenlerinizin kullanığı strateji ve teknikler (problem çözme, akran desteği, bireysel çalışmalar, sözlü anlatım, vb) yaşadığınız sorunlar nelerdir/nelerdi?

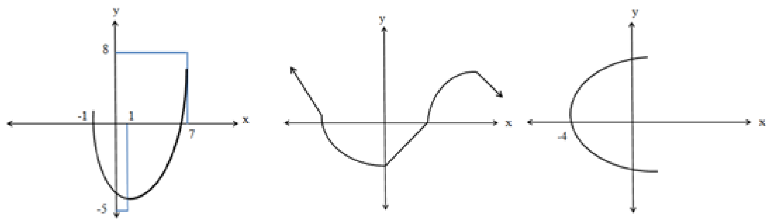
4. Cebir kavramlarına dair değerlendirme sürecine (sınıfta öğretmenininiz sözlü soruları, yazılı ve ulusal sınavlar vb) dair yaşadığınız zorluklar nelerdir/nelerdi? (sınavların uygulanma ve sonuçların değerlendirilmesi, uygulanılan teknikler vb)
5. Cebir kavramları için kendi geliştirdiğiniz sratejiler, teknikler, problem çözme strateji vs (problemleri çözmek için tercih ettiğiniz çözüm yolu vb) var mı? Nasıl olduğunu açıklar mısnız? Hatırlıyorsanız bunları paylaşabilir misiniz?Neden bu stratejiyi kullanıyorsunuz?
6. Cebirsel kavramlar ve fikirleri öğrenirken varsa kullanıdığınız materyaller ve etkililiği hakkında neler düşünüyorsunuz? Diğer ülkelerde kullanılar materyaller hakkında bilginiz var mı? Paylaşabilir misiniz?
7. Eşitlik kavramı için zihninizde neler canlanıyor? Eşitlik kavramını nasıl tanımlarsınız? Herhangi bir araç gereç kullanarak açıklamanız mümkün mü?
8. Değişken ve bilinmeyen kavramları hakkında neler söylersiniz? Tanımlayabilir misiniz?
9. Değişken ve bilinmeyen kavramlarını öğrenirken materyal, bilgisayar programı vb kullandınız mı? Bu kavramların öğretimi için önerileriniz var mıdır? Varsa onları paylaşabilir misiniz?
10. $x = 7$ ifadesinde x ve = sembolü neyi ifade etmektedir? Açıklar mısınız?
11. $x + 5 = 12$ ifadesinde x nedir? Açıklar mısınız?
12. "IR^2 de $2x + 3y = 25$ doğrusunun garfiğini çiziniz."ifadesinki x ve y için neler söylersiniz?Açıklar mısınız?
13. "$a \epsilon Z$ için $18a - 12 > 12a + 30$ifadesini sağlayan a değerlerinin toplamı nedir?" sorusunda a ifadesi ve$>$ sembolü için neler söylersiniz?Açıklar mısınız?
14. Bir tiyatroda 12 yaşından küçük bireyler için 10 TL, 12 yaşından büyük bireyler için ise 20 TL bilet ücreti vardır. Sahnelenen bir oyun için birinci hafta toplam 20.500 TL tutarında bilet satılmıştır. Bu matematiksel durumu modelleyen (açıklayan ve çözüme ulaştıracak) bir cebirsel ifade yazabilir misiniz? Burada değişken, eşitlik ve eşitsizlik kavramları hakkında neler söylersiniz? Paylaşabilir misiniz?
15. İki değişkenin temsil ettiği kümeler arasındaki ilişkiyi (hız-zaman, yıl-nüfus, bağımlı-bağımsız, vb) açıklamak ya da anlamak için neler yapıyorsunuz? Paylaşabilir misiniz?
16. a) Bir sporcunun antrenman süresince tükettiği kalori miktarının zamana bağlı değişimini nasıl belirleyebiliriz? Bunun için nasıl bir materyale ya da desteğe ihtiyaç duyarsınız?Düşüncelerinizi paylaşabilir misiniz?

    b) Bu sporcunun tükettiği kalorinin zamana bağlı değişimi aşağıdaki tabloda verilmiştir. Buna göre aşağıdaki grafiklerden hangisi bu tabloya aittir. Açıklayabilir misiniz?

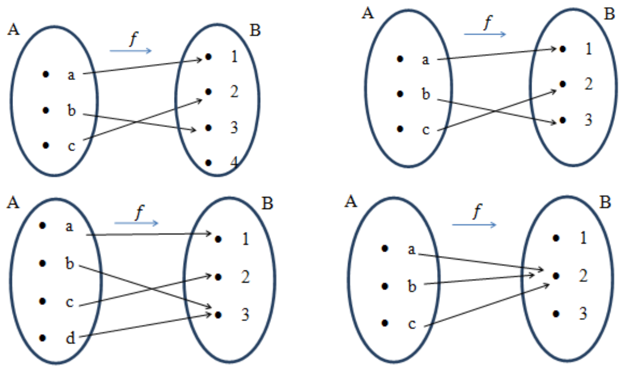
Geçen Süre (saat)	1	2	3	4
Tüketilen kalori	35	70	105	140



17. Fonksiyon kavramı hakkında neler söyleyebilirsin? Fonksiyon kavramını öğrenirken kavramın yapısında geçen ön kavramlar arasında anlamakta zorlandığınız ya da kolay gelenler hangileriydi? Paylaşabilir misiniz?
18. Günlük hayatta kavramlar ya da durumlar arasında ilişkilendirme kurduğunuz örnekler verebilir misin? Özel olarak fonksiyon kavramı için örnekler verebilir misin?
19. Aşağıdaki grafiklerden hangileri veya hangisinin bir fonksiyonu temsil etmektedir? Cevabınızın gerekçelerini açıklayabilir misiniz? Fonksiyonu temsil edenlere odaklanarak, temsil ettiği fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirtebilir misiniz?



20. 20 öğrencilik sınıflara sahip olan bir okulda her bir sınıfa sadece bir öğretmen ders vermektedir. Bu okuldaki öğrenci sayısı (s) ve öğretmen sayısı (T) arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonu ifade ediniz(seçtiğiniz bir temsil yolu ile). Bu fonksiyonun tersinin var olup olmadığı hakkında neler söylersiniz? Varsa bu fonksiyonu bir şekilde ifade ediniz.
21. Aşağıdaki venn şemaları (diyagramların) ile verilen fonksiyonlar (sabit, birim ve sıfır) ve özellikleri(birebir, örten, içine olma) için neler söyleyebilirsiniz? Daha önce size bu fonksiyonlar tanıtıldı mı? Hatırladıklarınızı benimle paylaşabilir misiniz?



22. Fonksiyon kavramını anladığınızı düşünüyor musunuz? Bu kavram size nasıl tanıtılmıştı? Tanıtım biçimini eleştirebilir misiniz? Sizce bu kavram size nasıl anlatılsaydı daha iyi öğrenebilirdiniz?
23. Öğretmeniniz fonksiyon kavramını tanıtırken materyal(ler) kullandı mı? Kullanıldıysa bunlar nasıl materyallerdi? Bu materyaller kavramı anlamanızda ne ölçüde faydalı oldu? Açıklar mısınız? (tactile graphs, iğneli sayfa, teknoloji destekli, vb)
24. Fonksiyon kavramının gösteriminde kullanılan grafikler ya da görsel durumlar için materyal kullandınız mı? Kullandıysanız bunlar nelerdir ve bunlar fonksiyon kavramını anlamanızda ne ölçüde faydalı olduğunu paylaşabilir misiniz? Sizler ne tür materyallere ihtiyaç duydunuz ? Sizler de materyal/ler önerebilir misiniz?
25. Fonksiyonlar; denklem, grafik ya da sembollerle temsil edilebiliyordu. Bu temsiller hakkında neler hatırlıyorsunuz? Hangi temsili kullanmayı tercih ediyorsunuz/ediyordunuz? Neden? Fonksiyonlar ile ilgili bir problem çözerken hengisi daha kullanışlı oluyor? Neden? Fonksiyon kavramının temsillerini iyi anladığınızı düşünüyor musunuz? Paylaşabilir misiniz?
26. Özel olarak fonksiyonlarda grafik ile temsili nasıl yapıyorsunuz? Cebirsel (sembolik, denklem) temsillerde açıklamakta ya da anlamakta zarlandığınız durumlar nelerdir?
27. Trafikte araçların uyması gereken kurallardan biri takip mesafesidir. Aşağıdaki tabloda çeşitli hızlardaki takip mesafesinin alt sınırı belirtilmiştir.

Hız (km/h)	60	70	80	90	100	110
Takip Mesafesi (m)	30	35	40	45	50	55

a) Tabloda belirlediğiniz örüntü/ler var mı? Varsa bunlar nelerdir?

b) Tabloda belirlediğiniz değişkenler neledir? Açıklayabilir misiniz?

c) 66 km/h hızla ilerleyen bir aracın önündeki araç ile takip mesafesi en az kaç olmalıdır?Cevabınızın gerekçesi nedir?

d) 120 km/h hızla ilerleyen bir aracın önündeki araç ile takip mesafesi en az kaç olmalıdır?Cevabınızın gerekçesi nedir?

e) Aracın hızı ile takip mesafesi arasında nasıl bir ilişki vardır? Bu ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilir misiniz?

f) Bir aracın takip mesafesinin en az 65 metre olması için aracın hızı kaç km/h olmalıdır? Bu soruyu cevaplerken cebirsel ifadeyi kullanmaya ihtiyaç duydunuz mu? Nasıl bir yol takip ettiniz?

28. Taksi ücretleri için taksimetrenin açılışı 3 TL ve her 1 km için 2 TL olarak tarife belirlenmiştir.

a) Bu taksi ile 12 km yolculuk yapan bir müşteri kaç TL ödeme yapacaktır?

b) 83 TL ödeme yapan bir müşteri kaç km yolculuk yapmıştır?

EK 2. Ön Görüşme Soruları

1. Görme yetersizlik düzeyin nedir? (Tıbbi ve RAM raporu veya görme oranı)
2. Ne zaman görme yetini kaybettin?
3. Okulunuz ve sınıf düzeyin nedir?
4. Mevcut eğitim ortamların ve daha önceki eğitim tecrübelerin (kaynaştırma sınıfı, özel eğitim merkezleri, görme engelli okulu, BEP desteği, eğitim koçu) nelerdir?
5. Okulunun ya da öğretmenlerinizin özel eğitim anlamında sana sağladığı destekler var mı? Varsa bunlar nelerdir/nelerdi?
6. Eğitim sürecinde destek aldığın mateyaller nelerdir/nelerdi? (Braille ya da büyük punto, daktilo ya da yazı tahtası teknolojik araç kullanımı (JAWS, Braille-note, vb.), okuyucu desteği, ses kaydı, vb.) Okulda ve evde kullandığın materyaller?
7. Ne zamandan beri Braille yazı kullanıyorsun?
8. Küme kavramı hakkında neler söleyebilirsin? Kümeyi nasıl tanımlarsın? Örnek verebilir misin? Söylediğin nesneler için bir özel ad var mı? (Elemanı olma, evrensel küme vb)
9. Nesneleri, sayıları vb eşleme dediğimde zihninde neler canlanıyor? Bir futbol takımında oyuncuların numaraları ve oyuncular için kümeleri belirleyebilir misin? Elemanları nelerdir? Bu iki küme arasındaki eşleme nasıldır? (eşleme, birebir eşleme vb)
10. İki küme arasında ilişki kurulabilir mi? Nasıl? Her sayıyı kendisinin 2 fazlası ile eşlersek buradaki kümeler nelerdir? Bu kümeler arasında nasıl bir ilişki vardır?
11. Doğru ve doğru parçası kavramları hakkında neler söylersin? Örnek verebilir misin?
12. Sayı doğrusu biliyor musun? Nasıl tanımlarsın?
13. Koordinat sistemi hakkında neler söylersin? Orijin ve eksenleri açıklayabilir misin?
14. Matematikte değişken ne demektir? Sabit ne demektir?
15. Hiç grafik ve tablo inceledin mi? Tecrübelerini paylaşır mısın? Bu temsilleri ne amaçla kullanırız?

EK 3. Cebirsel Kavramlar Tahmini Öğrenme Yol Haritasına İlişkin Görüşme Protokolleri

Protokol I: Birinci Öğretim Oturumu

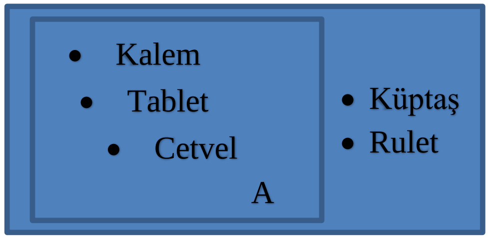
Küme Kavramının İncelenmesi

Hedefler:

- Küme kavramının sezgisel tanımını yapabilme.
- Küme kavramına ilişkin örnekler sunabilme.
- Kümenin elemanı olma ve eleman sayısı kavramlarını açıklayabilme.
- Evrensel küme ve altküme kavramlarını açıklayabilme.
- Küme, küme adı, elemanları, elemanı olma sembollerini bilme.
- Sonlu ve sonsuz küme kavramlarını açıklayabilme.

Kullanılacak Araçlar: Tepsi, kabartma yazı kalemi, yazı tableti, cetvel, rulet, küptaş kasa materyali, iğneli sayfa materyali

Adımlar	**Açıklama**
1. Küme kavramı senin için ne anlam ifade ediyor? Küme denilince aklına neler geliyor? Gündelik hayatımızdan örnekler verebilir misin? Mesela tuttuğun takım ve oyuncuları, okumayı sevdiğin kitap türleri gibi örnekler olabilir mi? Şu an sınıfımızdan örnek verebiliriz belki.	Önce öğrenciden küme örnekleri vermesi istenir. Kümenin nesneler topluluğu olduğu fikri hissettirilir. Örneklerle desteklenir: araba markaları, spor faaliyetleri, mutfak dolaplarında malzemelerin yerleştirilmesi, kütüphanede kitapların yerleştirilmesi, müzik seti, vb. Bu örneklerde nesnelerin bir topluluk oluşturduğu ve bu topluluğun kümeyi oluşturduğu, kümeye ait olduğu ya da elemanı olduğu fikirleri tartışılır.
2. Sana verdiğim nesneleri kullanarak kümeler oluşturmanı istiyorum. Oluşturduğun kümeleri birine tarif etmen gerekse neleri göz önüne alırsın? Kümenin üyeleri nelerdir (oluşturduğu her küme için)? Bu kümeye üye olma ya da olmama deyince ne anlıyorsun? Kümenin eleman sayısı deyince aklına ne geliyor?	Kümeleri oluştururken nesneleri bir tepsinin içine koyması istenir. Kümeyi temsil etmesi için tepsinin kullanıldığı belirtilir. Öğrenciye kabartma yazı kalemi, yazı tableti, cetvel, rulet, küptaş vb nesneler sunulur. Bu malzemeler ile kümeler oluşturması istenir. Her bir nesnenin birer üye olduğu tartışılır. Kümeye ait olma, kümenin elemanı olma kavramları öğrencinin örnekleri üzerinden tartışılır.
3. Şimdi sana yazdığım bu metini inceleyebilir misin? Bu bir küme oluşturur mu? Daha önce oluşturduğunuz küme ile bu küme arasındaki benzerlik ve farklıkları açıklayabilir misin? İkisi aynı küme midir?	2. soruda öğrencinin belirlediği bir kümeyi Braille yazı ile öğrencinin yazması istenebilir. Başlangıçta küme parantezlerini koyup koymaması önemli değildir. Yalnızca nesnelerin adlarını yazması istenir. Braille yazının doğasından kaynaklı olarak öğrenci nesnelerin adlarını yan yana yazması muhtemeldir. Eğer alt alta yazdı ise yan yana listelemesi istenir. Bu nesnelerin belli bir topluğu belirtmesi için neler yapılabileceği tartışılır. Böylece temsil sürecinde kullanılan {} sembolü fark edilir. Bu gösterimin liste yöntemi ile küme temsili olduğu belirtilir. 2.soruda öğrencinin oluşturduğu kümelerden başka örnekler liste gösterimi ile oluşturulur. Bu tür örnekler çoğaltılarak liste yöntemi ile küme temsilinin nasıl yapıldığı ile ilgili deneyimleri zenginleştirilir. Sembollerin hem Braille yazılışlarına yer verilir, hem de latin yazı betimlenir. İğneli tahta materyalindeki {} taşları kullanılabilir. Sembol gösterimi: Küme parantezi – {…} - ⠷⠄ ... ⠠⠾ - Braille kodu: {1,2,3,5,6-3...6-2,3,4,5,6}

4.	Verilen nesneler arasından matematiksel dört işlem yapmaya yarayan nesne hangisi? Yalnızca bu nesne ile bir küme oluşturulabilir mi? Bu kümenin eleman sayısını nedir? Cevabını açıklayabilir misin? Haftanın s harfi ile başlayan günlerini eleman kabul eden bir küme için neler söylersin? Peki 3' ten küçük pozitif tek tamsayılar ile bir küme oluşturursak neler söylersin? Bordo ve mavi renklerini kullanan futbol takımlarını eleman kabul eden kümeyi inceleyelim. Neler söylersin?	Verilen nesnelerden yalnızca küptaş materyali dört işlem yapmak için kullanılmaktadır. Diğer kümeler için de eleman sayısı ve kümenin elemanlarını belirlemeye yarayan şart ifadeleri tartışılır. Tek elemanlı küme kavramı tartışılır. Küme üzerine şart koyarak da kümenin elemanlarının ve dolayısıyla kümelerin belirlenebileceği ifade edilir. Kaç tane elmanı var? Kümenin elemanlarını belirlememiz için yol gösteren ifade nedir? Bu ifadeler kümeyi oluşturan nesne için bir özellik mi belirtiyor?
5.	Tepsilerin içine nesneler koydum, inceleyebilir misin? Buradaki kümeleri belirleyelim. Bu kümeleri adlandıralım mı? Bu kümeler ait olan nesneler hangileri? A ve E kümeleri arasındaki ilişkiyi belirleyebilir misin? Bu nesneler ile başka kümeler oluşturabilir misin (tepsilerin konumu değiştirilmeden)? Peki oluşturduğun bu kümeler arasında nasıl bir ilişki var? Bir yıl içindeki aylar ile oluşturduğumuz bir küme olsun. Yaz aylarını eleman kabul eden küme ile nasıl bir ilişkisi vardır? Futbol takımlarının hepsini düşünelim. Bu takımları eleman kabul eden küme E kümesi olsun. Siyah ve beyaz renklerini kullanan takımları (Aydınspor, Beşiktaş, Altay, Manisaspor, Aksarayspor bir veya birkaçını söyleyebilir) eleman kabul eden kümeyi düşünelim. Bu küme de K kümesi olsun. E ve K kümesi arasında nasıl bir ilişki var?	İç içe konumlandırılmış tepsilere nesneler yerleştirilir. Elemanı olma ve ait olma fikirleri hissettirilir. Kümelerin adlandırıldığı fikri oluşur. Küme isimlendirilirken büyük harflerin kullanıldığı belirtilir. Her bir tepsinin bir küme olduğu ve farklı şekillerde (dikdörtgensel bölge, elips gibi) oluşturulabileceği ifade edilir. Bu gösterimin Venn şeması ile küme gösterimi olduğu söylenir. Bir kümenin diğerinin altkümesi olduğu fikri her örnekte tartışılır. Evrensel küme, bağlama göre tüm nesnelerin ait olduğu küme fikrine ulaşmak amaçtır. Alt küme ve evrensel küme adlandırmaları belirtilir. Evrensel kümenin genellikle E harfi ile gösterildiği belirtilir. Sembol gösterimi: Evrensel küme – E - ⠄⠔ - Braille kodu: {3-3,5} Aşağıdaki örnekte olduğu gibi fon kartona kabartma ile sınırların çizildiği kümeler oluşturularak da görsel olarak fikir desteklenebilir. Burada araba markaları, meslek dalları, kitap türleri, yaz meyveleri gibi nesnelerle kümeler oluşturulabilir. Daha sonra tek tamsayılar ile tamsayılar kümeleri arasındaki ilişki sorgulanabilir. Kabartma çizgiler rulet yardımı ile yapılabilir. 
6.	Daha önce 5.soruda oluşturduğumuz kümeleri liste ile gösterelim. Hem evrensel kümeleri, hem de altkümelerini yazalım.	5.soruda Venn şeması ile gösterilen kümeler bu kez liste ile temsil etmesi istenir. Liste ile temsil için Braille yazı kullanması istenir. Kümenin adlandırıldığını, liste gösteriminde {} küme parantezlerinin kullanıldığı hatırlanılmalıdır. Burada öğrencinin dilediği gibi liste ile temsil etmesine fırsat verilir ve tartışılır. Sonunda liste ile gösterimin uygun formu belirtilir.
7.	Bir iş yerindeki muhasebe birimindeki insanlara bu toplulukta ne isim verilir? Mesela futbol takımındaki oyuncuları düşünelim, oyuncuları nasıl adlandırırız? 5 ve 6.sorularda oluşturduğumuz kümeleri	Elemanı olma, ait olma, üye gibi topluluklar için kullanılan ifadeler tartışılır. Daha önceki sorularda yer alan tartışmalardan fikir sahibi olduğu için sembol ile gösterimlerden bahsedilebilir. A kümesini ve elemanlarını ifade etmesi beklenir. ϵ ve $\notin$ sembolleri hakkında bilgi verilir. Braille gösterimler yanında latin harfleri ile gösterimleri betimlenir (E harfine benzediği belirtilir) ve iğneli sayfa materyali ile sembollere dokunmaları sağlanır. $9 \epsilon A$ ve $12 \notin A$ ifadelerine yer verilir.

	inceleyelim. Haziran ayı yaz aylarının ait olduğu kümeye ait midir? Ocak ayı yaz aylarının ait olduğu kümeye ait midir? Tek tamsayıları sayalım. Tek tamsayılar kümesine A kümesi diyelim mi? 9 sayısı A kümesinin elemanı mıdır? Peki 12 sayısı A kümesine ait midir?	Sembol gösterimi: Eleman - ∈ - ⠄⠑ - (3, 1-5) Elemanı değil - ⠐⠑ - (5, 1-5)
8.	Aşağıda verilen kümeleri oluşturun. Bu kümelerin eleman sayıları hakkında neler söylersin? A; 20 den büyük çift tamsayıların kümesi B; yaz meyvelerinin kümesi C; alfabemizdeki harflerin kümesi D; -50 den küçük tek tamsayıların kümesi T; tek tamsayılar kümesi D; çift tamsayılar kümesi S; 5 in katları olan sayıların kümesi Z; tamsayıların kümesi	Bu kümeleri oluştururken küptaş kasa, iğneli sayfa ve tablet-kalem araçları öğrenciye sunulacaktır. Burada sonlu ve sonsuz küme kavramlarını sezgisel olarak tartışılması amaçlanır. Kümelerin eleman sayıları sorgulanır.
9.	Doğal sayılar kümesi N ve tamsayılar kümesi Z liste gösterimi ile temsil edebilir miyiz? Venn şeması ile temsil edebilir miyiz? Her bir küme için birer altküme belirleyelim ve farklı temsiller ile gösterelim. Örneğin, tek tamsayılar ve negatif tamsayılar kümelerini düşünelim. Altküme olabilir mi?	Liste gösterimi ve Venn şeması gösterimleri tartışılır. Kümelerin elemanlarını bilme, altkümeleri için temsillerden yararlanma fikrini oluşturmak önemlidir. Ayrıca verilen kümelerin bir kabul olarak Z ve N harfleri ile temsil edildiği belirtilmelidir. Sembol gösterimi: Tamsayılar kümesi – Z - ⠰⠠⠵ - Braille kodu: (5,6-6-1,3,5,6) Doğal sayılar kümesi – N - ⠰⠠⠝ - Braille kodu: (5,6-6-1,3,4,5)

Protokol I-Ek: İkinci Öğretim Oturumu

Evrensel Küme ve Altküme İncelenmesi

Hedefler:

- Evrensel küme kavramını açıklayabilme.
- Altküme kavramını açıklayabilme.

Kullanılacak Araçlar: Poşet, cetvel, iletki, gönye, pergel, tablet, kalem, bardak, kaşık, çatal, top, kumanda, telefon, anahtar, pil, düğme vb nesneler.

Adımlar	Açıklama
1. Masanın üzerindeki nesneleri inceleyebilir misin? Masa bir küme belirtir mi? Elemanları nelerdir? Bütün	Masanın Venn şeması ile bir küme gösteri olduğunu ifade etmesi beklenir. Verilen nesnelerin tamamı bu kümeye ait olduğundan veya kümenin elemanı olduğundan bağlama göre evrensel küme olduğunu söylemeleridir. Kümenin elemanlarını sayması veya

	nesneler elemanı olduğuna göre nasıl bir kümedir? Bu kümeyi nasıl adlandıralım?	kısaca her nesnenin kümenin elemanı olduğunu ifade etmesi istenir. Kümeyi E kümesi olarak adlandırması beklenmektedir. Ancak dilerse farklı bir harfle de adlandırabilir.
2.	Sana verdiğim poşet bir nesne olarak düşünmeyip sadece masanın üzerindeki nesneleri gruplandırmaya yaramaktadır. Bu nesnelerden istediklerini poşetin içine koyabilir misin? Şimdi poşeti masanın üzerine koyalım. Poşet kümesini nasıl adlandıralım? (Örneğin A kümesi)	Poşetin şeffaf bir poşet olduğu nesneleri gösterdiği ve yalnızca bir ayırıcı niteliği olduğu ifade edilebilir. Her ne kadar görme yetileri olmasa da poşeti bir sınır ya da ayırıcı olarak düşünebilirler. Nesnelerden dilediklerini poşetin içine koymaları için fırsat verilir. Oluşturulan bu topluluğun bir küme olduğunu ifade etmesi beklenir ve adlandırması istenir.
3.	A kümesinin elemanları nelerdir? E kümesinin elemanları nelerdir? Top (A kümesinde olan bir nesne seçilir) A kümesinin bir elemanı mıdır? Peki top E kümesinin bir elemanı mıdır? Kumanda (A kümesinin elemanı olmayan bir nesne seçilir) E kümesinin br elemanı mıdır? Peki Kumanda A kümesinin bir elemanı mıdır? A kümesindeki her eleman E kümesinin de elemanı mıdır? E kümesinin her elemanı A kümesinin de elemanı mıdır?	A ve E kümesinin elemanlarını belirlemesi, A kümesindeki her elemanın aynı zamanda E kümesinin elemanı olduğunu ifade etmesi, E kümesindeki her elemanın A kümesinin elmanı olmayabileceğini fark etmesi beklenir.
4.	E kümesi ve A kümesi arasında nasıl bir durum vardır? E kümesini nasıl adlandırırız? A kümesini nasıl bir kümedir?	E evrensel kümenin bağlama göre tüm nesneleri eleman kabul eden küme olduğunu ve A altkümesi olduğunu söylemesi beklenir. A altkümenin E evrensel kümenin bazı elemanlarının bir araya geldiği nesneler topluluğu olduğunu ifade etmelidir. A, E kümesinin altkümesidir söylem olarak ifade edilmelidir.

Protokol II: İkinci Öğretim Oturumu

Eşleme ve İlişkilendirme Becerisinin İncelenmesi

Hedefler:

- İki kümenin elemanları arasında eşleme yapabilme.
- İki kümenin elemanları arasında birebir eşleme yapabilme.
- İki kümenin elemanları arasındaki ilişkiye göre eşleme yapabilme.
- Kümenin kendi elemanları arasındaki ilişkiyi farklı yollarla ifade edebilme.
- İki küme arasındaki ilişkiyi ifade edebilme.
- Tablo ile verilen ilişkili elemanları eşleyebilme.

Kullanılacak Araçlar: Braille yazı tablet-kalem-kağıt, rulet, iğneli sayfa materyali, 3D kalem(veya silikon), ip, kablo, bant, zincir

Adımlar	Açıklama

1.	Hiç marketten alışveriş yaptın mı? Kasiyerler ürünlerin barkodlarını okutarak ödeyeceğimizi parayı hesaplıyor. Her bir ürünün bir barkod numarası olduğunu biliyor musun? Bir çikolata firması farklı ürünlerine nasıl barkod oluşturmuş olabilir? Ürünler bir küme oluşturur mu? Peki ürün barkodları bir küme oluşturur mu? Otobüs, tren ya da uçak ile seyahat ettin mi? Seyahat edeceğimiz koltuğun hangisi olduğunu nasıl buluyoruz? Koltuklar ile koltuk numaraları arasında eşleme yapılmış diyebilir miyiz? Nasıl? Her tamsayıyı kendisinin karesi ile eşleyelim. Nasıl bir eşleme yaparız? Tamsayıların kareleri bir küme oluşturur mu? Elemanları nelerdir?	Markette satılan ürünleri eleman kabul eden kümenin ve bu ürünlerin barkod numaralarını eleman kabul eden kümenin oluşturulması beklenir. Burada her bir ürün için bir barkod numarası ile eşleme yapılması gerekmektedir. Aynı ürüne aynı barkod numarası verilmektedir. Buradaki eşlemeler tartışılır. Seyahat aracındaki koltuklardan oluşan küme ile koltuk numaralarından oluşan küme arasında bir eşleme yapıldığı tartışılır. Tamsayılar kümesi ve 0, 1, 4, 9, 16, … elemanlarından oluşan kümeleri belirlemesi beklenir. Bu iki küme arasındaki eşleme tartışılır. İki nesnenin (tamsayının) bir nesne (tamsayı) ile eşlendiği fikrine ulaşması beklenir. Burada kümeler Braille yazı ile oluşturulabilir ve küme temsilleri Venn şeması ile yapılacaksa rulet ile çizilebilir. Temsil türleri ve çizimler öğrencilerin dilediği gibi yapması beklenir.
2.	Oturduğun evinizin daire ya da apartman numarasını biliyor musun? Sokağınızdaki binalar ile bunların bina numaraları arasında nasıl bir eşleme var? Sizin sokakta başka 3 (öğrencinin evinin olduğu binanın bina numarası) numaralı bina var mı? Sokağınızdaki binalar bir küme oluşturur mu? Peki bina numaralarını eleman kabul eden bir küme oluşturabilir miyiz? Okulda öğrenci numaran nedir? Peki sizin okulda başka bu öğrenci numarasına sahip öğrenci var mı? Öğrenciler ile öğrenci numaraları arasında nasıl bir eşleme var? Televizyonda sürekli izlediğin TV kanallarının, erişimi kolay olması için sıralamak istiyorsun. Bu kanallar haber, spor, belgesel, sinema, müzik, yarışma, ekonomi, aşçılık ve çocuk kanallarıdır. Bu TV kanallarını ile kumandadaki kanalları eşleyelim. TV kanalları bir küme oluşturur mu? Kumandanın üzerindeki rakamlar bir küme oluşturur mu?	Braille yazı ile elemanları yazması, küme oluşturması beklenir. Binalar, bina numaraları, öğrenciler ve öğrenci numaralarını eleman kabul eden kümeleri oluşturması beklenir. Kümeler arasındaki eşlemenin birebir eşleme olduğu fikri tartışılır. Benzer şekilde televizyon kanallarının bir kümenin elemanı olduğu, kanal sayılarının bir başka kümenin elemanı olduğu fikrine ulaşılması sağlanır. İki kümenin elemanları arasında birebir eşleme yapıldığı tartışılır. Kümeleri temsil biçimi öğrencinin isteğine bırakılır. Eşlemeler için ip, kablo, bant ya da rulet kullanılabilir. Bu eşlemelerden sonra iki küme arasında her elemanın diğer kümedeki yalnızca bir eleman ile eşlenmesinin birebir eşleme olduğu belirtilir. Örneklere ek vermek gerekirse telefon numaraları ile bireyler arasında eşleme tartışılabilir.
3.	Ülkelerin ekonomik kalkınma oranları belirlenirken işsiz nüfus sayısı önemlidir. 2000 yılında 1 milyon olarak belirlenen işsiz nüfus sayısı her üç yılda bir belirlenmiştir. Sırasıyla işsiz vatandaş sayısı 1 200 000, 1 400 000, 1 600 000, 1 800 000, 2 000 000, 2 200 000 olarak tespit edilmiştir.	Bu tür kavramların gerçek hayattaki bazı durumların modellenmesi olduğu hissettirilir. Hem kümenin kendisine ait elemanları arasındaki ilişki, hem de farklı iki kümenin elemanları arasındaki ilişki tartışılır. A={2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015, 2018} yılların kümesi ile B={1 000 000, 1 200 000, 1 400 000, 1 600 000, 1 800 000, 2 000 000, 2 200 000} işsiz nüfus sayısı kümesi incelenir. A kümesinin üçer arttığı ve B kümesinin 200 bin artış miktarına sahip olduğu belirlenmelidir. Her üç yılda bir 200 bin işsizin daha eklendiği ifade edilmelidir. İki küme arasındaki ilişki eşleme yardımı ile gösterilmelidir.

İşsiz nüfus sayısını yıllara göre incelediğinde neler söylersin? Burada iki küme oluşturmak mümkün mü? Bu kümeler ayrı ayrı incelendiğinde elemanları arasında bir ilişki gözlemledin mi? Bu iki küme arasında eşleme yapmak mümkün mü? Buradaki ilişkiyi nasıl gösterirsin?

Burada öğrencinin eşleme için küme temsillerinin yanı sıra tablo ile ilişkiyi göstermesi muhtemeldir. Ancak tablo ile ilişkiyi temsil etmedi ise aşağıdaki sorudan sonra tekrar bu soruyu düşünmesi istenir. Tablo için iğneli sayfa materyali kullanılabilir veya rulet ile tablo çizilerek kabartma yazı ile tablo doldurulabilir.

Aradaki ilişki için değişken belirleyerek eşitlik yazması muhtemeldir. Bu durumda öğrencinin ifade etmesi beklenir ve sırasıyla yine eşleme ve ilişkilendirme fikirleri sorgulanır.

4. Hiç hava durumunda değişiklik olsun istedin mi? Hava durumunu değiştirebileceğimiz bir yöntem var; bulut tohumlama! Yağmur miktarını artırmak için uçaktan bulutlara ezilmiş kuru buz parçacıkları atılır. Bu buz parçacıkları havayı yağış için gerekli olan soğukluğa ulaştırır. Çiftçiler bulut tohumlama sayısı ile yağış miktarındaki artışı belirlemek istemiştir. Bulut tohumlama sayısı ile tohumlama yapılan alanlardaki yağış miktarları tabloda gösterilmiştir.

Bulut tohumlama sayısı ve yağış miktarları iki ayrı kümeye ait elemanlar olabilir mi? Bu iki kümenin elemanları arasındaki ilişki tablo ile anlaşılabilir mi? Bulut tohumlama sayısı ile yağış miktarları arasındaki ilişkiyi nasıl yorumlarsın?

Yandaki tablo kabartma yazı, iğneli sayfada ve silikon ile çizgilerin oluşturulduğu kartonla üç farklı yolla sunulur. Burada öğrencinin parmakları ile hissetmesi esas olmalıdır. Hücre ve satır-sütun kavramlarını algılaması önemlidir. Satırlar ve sütunların hem kendi içinde hem de birbirleri ile ilişkili olarak oluşturulduğu belirtilir.

Bulut Tohumlama Sayısı	Yağış Miktarı (mm)
2	110
4	135
6	160
8	185
10	210

Bulut tohumlama sayısını oluşturan K={2, 4, 6, 8, 10} kümesi ve yağış miktarını oluşturan M={110, 135, 160, 185, 210} kümesi incelenir. K kümesinin elemanlarının çift sayılardan oluştuğu ve ikişer artış gösterdiği fark edilmelidir. Benzer şekilde M kümesinin elemanları arasındaki 25 fark olduğu belirtilmelidir. Ayrıca öğrencinin her iki atışta 25 mm yağış miktarındaki artışı ifade etmesi beklenir.

Tablonun iki kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi göstermeye yarayan temsil türlerinden biri olduğu belirtilir. Burada dikey olarak sunulan ilişki daha sonra yatay olarak sunulacaktır. Tablonun yatay satırlardan ve dikey sütunlardan oluştuğu ifade edilir. Her bir hücrede bir elemanın yer aldığı belirtilmelidir. Birinci sütunun bulut tohumlama sayısı elemanlarının yer aldığı kümeyi, ikinci sütunun yağış miktarlarını eleman kabul eden kümeyi temsil ettiği belirtilir.

4.sorudaki kümeler arasındaki ilişkiyi tablo ile göstermesi istenir.

5. Yurt dışı seyahatine çıkacak olan Yıldız, uçak bagaj kullanım şartlarını araştırmaktadır. Yanına üç valiz eşya alacak olan Yıldız, bagaj kilo sınırı ve ödemesi gereken ek ücret tablosunu incelemiştir. Tabloda bagajların paketlenmesine göre promosyonlu ücretlendirmelere de yer verilmiştir.
Burada kümeleri ve elemanlarını belirleyin. İki kümenin elemanları arasındaki eşlemeleri gösterin. Bu kümelerin elemanları arasındaki ilişkiyi yorumlayın.

Bagaj (kg)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ücret (TL)	25	20	25	35	35	40	35	40	45	50	50	55	55	60	60	55	55	65

Bagaj ağırlıkları (kg) ve ücretleri (TL) eleman kabul eden kümeleri belirlemesi beklenir. Bu kümelerin elemanları arasındaki ilişkinin doğrusal (lineer) olmadığını fark etmesi beklenir. Artma, azalma ve sabit kalma fikirleri tartışılır.

Protokol III: Üçüncü Öğretim Oturumu

Doğru ve Doğru Parçası Kavramlarının İncelenmesi

Hedefler:

- Doğru kavramını açıklayabilme.
- Doğru parçasını açıklayabilme.
- Düz çizgi ile doğruyu ilişkilendirebilme.
- Doğru ve doğru parçası temsillerini bilme.

Kullanılacak Araçlar: İp, kablo, zincir, radyo anteni, beyaz baston, kağıt, cetvel, rulet, 3D kalem.

Adımlar	Açıklama
1. Arabayla seyahat ederken düz bir yolda yolculuk ettiğini hissedebiliyor musun? Peki, hiç trenle seyahat ettin mi? Yolları ya da demiryolu raylarını nasıl tarif edersin? Sana verdiğim ipi ve kabloyu inceler misin? Yolda seyahat ederken ya da bir kablo satın alırken neye dikkat ederiz? Yolda gittiğimiz mesafe ya da kablo satın alırken kaç metre olduğu önemli midir? Bu iki örnekte ortak olan, dikkatini çeken nedir?	Çeşitli uzunluklarda öğrenciye sunulan ip ve kablo ile demiryolu rayı ve yol örnekleri tartışılır. Burada düz çizgi ve eğri kavramlarına odaklanılarak örnekler tartışılır. Verilen örneklerin birer doğru ve/veya doğru parçası temsili olduğu tartışılır.
2. Bu radyo antenini inceler misin? Anteni biraz daha uzatabilir misin? Bu ipi ve kabloyu düz bir çizgi haline getirebilir misin? İpi biraz daha uzatabilir misin? Peki bu uzatma işlemi hiçbir zaman sona ermese ne söylersin? Beyaz bastonunu uzatabilir misin? Bu da düz bir çizgi parçası olabilir mi?	Düz bir çizgiye model verilmiş ip, kablo ve beyaz baston örnek olarak tartışılır. Radyo anteni ve beyaz baston veya bir ip belli bir noktaya kadar geriliyor ve daha fazla gerilemiyorsa (uzatılamıyorsa) bir doğru parçası temsil ettiği belirtilir. Doğru parçasının uç noktaları olduğu belirtilir. Radyo anteni ve beyaz bastondan örneklendirilir. Kabloyu ya da ipi ne zaman sürdürme gereksinimi duyulsa sündürme eylemini gerçekleştirebiliyorsak o zaman doğruyu temsil ettiği belirtilir. İstediğimiz kadar sündürebildiğimiz için uç noktalarını yakalayamıyoruz (ulaşamıyoruz). Bunu temsil etmek için doğrunun uç kısımları ok işareti ile gösterilir. Sündürme işleminin hiçbir zaman sona ermeyeceği bu ok işaretleri ile ifade edilir. Doğru ve ok işaretlerini temsil etmesi için kullanılabilir. Aksi durumda (uç noktalar varsa) belli bir noktadan sonra sündürülemeyeceği söylenir. Bu temsil kabartma yazıda tartışılır. Braille yazıda aşağıda kullanımlar ele alınacaktır: Sembol gösterimi: Sola doğru ok işareti - $\longleftarrow$ - ⠒⠪ - (2-5, 2-4-6) Sağa doğru ok işareti - $\longrightarrow$ - ⠒⠕ - (2-5, 1-3-5) Doğru işareti - ⠸⠙⠣ - (4-5-6, 1-4-5, 1-2-6) Doğru parçası işareti – […] - ⠸⠯⠄⠄⠸⠽ - (4-5-6, 1-2-3-4-6, 1-3-4-5-6) $\overline{AB}$ - ⠆⠡⠘⠸⠙⠣⠸⠶

3.	Peki buradan evine tek başına gidebilir misin? Yolu nasıl betimlersin? Belirlediğin önemli duraklar ya da belirteçler var mı? Belirlediğin her bir durak arası birer düz çizgi parçası ile belirlenebilir mi?	Ev ile okul arasında mesafeyi doğru parçaları ile temsil etmesi beklenir. Örneğin; okuldan bankaya kadar, duraktan sonraki tümseğe kadar gibi kendine ait belirteçleri ifade etmesi istenir. Her bir belirtecin bir uç nokta olduğu belirtilir ve bu noktaları A, B gibi isimlendirmesi istenir. Kullandığı her bir doğru parçasının AB doğru parçası gibi isimlendirildiği belirtilir. Eğer eve ulaştıktan sonra yol devam ediyorsa yani sündürme işlemi devam ediyorsa bunun bir doğru olacağı (aynı şekilde okuldan sonra da sündürme işlemi devam ediyorsa) ve *l* doğrusu gibi isimlendirildiği belirtilir. Semboller hem braille hem de latin harflerde belirtilir. Burada doğru parçası ve doğru fikirleri yol temsili ile tartışılır. Sembol gösterimi: Doğru parçası işareti – […] - ⠸⠯⠄⠄ ⠸⠽ - (4-5-6, 1-2-3-4-6, 1-3-4-5-6) [AB] - ⠸⠯ ⠠⠁⠃ ⠸⠽
4.	Düz bir çizgi parçası çizebilir misin? Bunun için neler yaparsın? Neden iki nokta belirledin? (Ya da düz çizgi parçasının başlangıç ve bitiş noktaları var mı? Nasıl belirledin?) Bu düz çizgi parçasını nasıl adlandırırsın? Düz bir çizgi çizebilir misin? Nasıl çizersin? Peki bir eğri çizmeni istemesem nasıl yaparsın?	Kağıt, cetvel ve rulet verilen öğrencilerin çeşitli doğru parçaları, doğru ve eğri çizmesi istenir. Bu kavramlar düz çizgi parçası, düz çizgi ve eğri kavramları ile tartışılır. Doğru parçası, doğru ve eğriler isimlendirilmesi tartışılır. Burada 3D kalemle doğru parçası, doğru ve eğri çizmesi de istenebilir. Doğru parçaları için gerekli duyulursa iki nokta uç noktaları olarak işaretlenir ve öğrencilerin istenen çizgileri çizmesi beklenebilir.
5.	Verdiğimiz örneklere göre doğru, doğru parçası ve eğri kavramlarını nasıl açıklarsın?	Öğrencinin doğrunun bir düz çizgi olduğunu ifade etmesi beklenir. Herhangi iki nokta arasındaki en kısa yolu canlandıran hayali çizgi, eğri olarak açıklanır. Doğru parçası iki nokta arasında kalan noktaların kümesi olarak açıklanır. Doğru parçasının doğrunun bir parçası olduğu belirtilir. Doğru parçalarının bir araya gelmesi ile doğrunun başka bütün bir parçasının elde edileceği açıklanır.

Protokol IV: Dördüncü Öğretim Oturumu

Sayı Doğrusu (Cetvelleme) Fikrinin İncelenmesi

Birim kavramının önbilgilerinde yer aldığı fikrine dayanmaktadır.

Hedefler:

- Uzunluğun nesnelerin niteliği olduğunu sezdirme.
- Uzunluk için birim belirleyebilme.
- Standart bir uzunluk birimi belirleyebilme.
- Nokta ile bir reel sayıyı eşleyebilme.
- Bir doğruyu cetvelleyebilme.
- Sayı doğrusunu açıklayabilme.

Kullanılacak Araçlar: Cetvel, farklı uzunlukta çubuklar, farklı uzunlukta kablolar, iğneli sayfa materyali, ip, köpük karton, sayı etiketleri, raptiye/kürdan/toplu iğne.

Adımlar	**Açıklama**

1.	Kumaş, ip, zincir, bahçe çiti gibi malzemeler satın alırken ne kadar alınacağına nasıl karar veririz? Bunu nasıl belirleriz? Bizim belirlediğimiz ölçüm ile satıcının belirlediği aynı mı olur? Aldığımız malzeme bizim belirlediğimizden daha kısa ya da daha uzun olabilir mi? Neden?	Kumaş, ip, naylon, zincir vs. gibi malzemeler satın alınırken ne kadar alınacağının belirlenmesi yolları tartışılır. Burada mezura ve cetvel gibi standart birimli malzemeler söyleyebilecekleri gibi karış veya uzunluk niteliğine sahip başka bir nesne ile de belirleyebileceklerini söyleyebilirler. Bu ihtimaller de uzunluk belirleme, standart bir uzunluk birimin gerekliliği tartışılır.
2.	Sence bu çubuklar neyi temsil eder? Peki bu çubuklar ile bu kablonun uzunluğunu ölçebilir miyiz? (Farklı uzunluklarda kablo ve ip parçaları için tekrarlanır) Kablonun uzunluğu için ne söylersin? Peki ben uzunluğunu şu çubukla (başka bir çubuk gösterilir) ölçsem uzunluğu ne olur? Belirlediğimiz uzunluklar için birim ne oldu?	Doğru parçası temsili olan çubuklarla nesnelerin uzunluklarının belirlenebileceği tartışılır. Burada doğru parçasının bir niteliği olarak uzunluk ve uzunluk için birimin gerekliliği tartışılır. Bunun için farklı uzunluklardaki doğru parçaları ile aynı kablonun uzunluğunun farklı olduğunu belirlemesi ve birime ihtiyaç duyduğunu belirtmesi beklenir. Ölçülen uzunluğun her zaman, her yerde ve herkes tarafından aynı sonucu vermesi için standart bir birime ihtiyaç olduğu tartışılır.
3.	Önündeki cetveli inceleyebilir misin? Şimdi kablonun uzunluğunu cetvel ile belirleyelim mi? (2.soruda verilen kablo) Neler fark ettin? Bu kabloyu elektrik tesisatında kullanmak istiyorsun. Bunun için ısıya dayanıklı boru almak için ne yaparsın?	Kabartma yazılı cetvel ile sıfır ve pozitif tam sayıların belli bir birime göre yerleştirildiği fikri hissettirilir. Cetvelin standart bir birimle oluşturulduğu tartışılır. 2.sorudaki birimler ile belirlediği uzunluk ve cetvel ile belirlediği uzunluğu kıyaslaması beklenir. Standart birimle uzunluğun ölçülmesinin ve cetvellemenin önemini algılaması amaçlanmaktadır. Cetvel, mezura ve termometre örnekleri de verilebilir.
4.	İğneli tahta materyalini incelemeni istiyorum. Bu çubuklar da doğru parçaları olsun. Bu doğru parçalarının uzunluğunu iğneli sayfa yardımı ile belirleyebilir miyiz? Buradaki iğnelerden yararlanabilir miyiz? Bu iğneleri birer nokta gibi düşünebilir miyiz?	İğneli tahta materyalindeki iğneler yardımı ile birim belirlemesi beklenir. Farklı doğru parçaları ile bu fikir üzerine düşüncelerini ifade etmesi beklenir. Ayrıca belirlediği birimler yardımı ile sayılar ile iğneler arasında bir eşleme olduğu fikri tartışılır. İğnelerin doğru üzerindeki noktaları temsil edip edemeyeceği tartışılır.
5.	Bu çubuk doğruyu temsil etsin. Her bir iğne bu doğru üzerindeki bazı özel noktalar olsun. İnceleyebilir misin? Bu iğneleri sayılar ile eşleyebilir miyiz? Nasıl bir eşleme yaparsın? Birim belirledin mi? Başka şekilde eşleme yapılabilir miydi? Nasıl? Reel sayılar ile doğru üzerindeki noktaları eşleyebilir miyiz? Nasıl yaparsın? Bu eşleme birebir midir? Her reel sayı için bu doğru üzerinde eşleyebileceğimiz (farklı) bir nokta var mıdır?	Öğrenci iğneli sayfa materyalinde doğru ve üzerindeki bazı özel noktalar temsillerini inceler. Öğrencinin yan yana ya da belirlediği birime göre sayıları eşlemesi tartışılır. Burada tamsayılar ya da sayma sayıları ile eşlemesi önemli değildir. Öğrenci birim belirlemekte de serbesttir. İğneli tahtanın standart birimle iğnelerinin yerleştirildiği belirtilir. Burada standart birime olan ihtiyaç tekrar belirtilir. (İğneli tahtanın kasasının bir düzlem belirttiği fikrine dikkat çekilebilir.) Reel sayılar ile bu doğru üzerindeki noktaları eşlemesi beklenir. Öğrencinin dilediği nokta ile dilediği sayıyı eşlemesine fırsat verilir. Belirlediği birime göre eşleme yapması beklenir. Burada reel sayılar ile bir doğru üzerindeki noktalar arasında bir eşlemenin nasıl olabileceği tartışılır. Reel sayılardan oluşan küme ve bir doğru üzerindeki noktalardan oluşan iki kümenin varlığı tartışılır. Bir doğruya ait (doğru düzlemin bir alt kümesi) noktalar ile reel sayılar kümesi R arasında birebir bir eşlemenin olduğu ve her noktanın bir reel sayı ile ya da her reel sayının bir nokta ile eşlenebileceği fikrine ulaşması beklenir. Bu durum ipin sürekli istenildiği kadar sündürülebileceği hayal edildiğinde doğru üzerinde reel sayılar ile eşlemeye yetecek kadar noktanın bulunacağı fikri ile tartışılır.
6.	İncelediğin ip bir l doğrusu temsil etsin. Bu köpük plakanın üzerine dümdüz gergin bir şekilde bir çizgi halinde yapıştıralım. Nasıl yapıştırmak istersin? (yatay, dikey veya eğimi olacak şekilde vb)	"Önünde köpük kartona yapıştırılmış düz bir çizgi halindeki ip bir l doğrusunu temsil ediyor. Sana verdiğim sayı etiketlerini bu doğru üzerine yerleştirmeni isteyeceğim (kürdan yardımı ile sabitlenir). Bunun için reel sayılar ile eşleyeceğin doğru üzerindeki noktanın konumunu sen belirleyeceksin. Kabartma yazı ile etiketlere yazılmış reel sayıları bu noktalar ile eşleyeceğiz." açıklaması yapılır. Öğrencinin doğruyu ve etiketleri incelemesi istenir.

	Bu doğru üzerindeki noktalar ile reel sayıları eşleyebilir misin? Nasıl eşlersin? Mesela sıfır reel sayısını hangi nokta ile eşlersin?	l doğrusu üzerinde seçilen bir nokta referans noktası (O ile isimlendirilecek) olarak belirtilir. Bunun 0 ile eşlemesi sağlanır. Bu noktaya "orijin" denildiği belirtilir. Her bir sembol hem Braille hem de Latin olarak öğrenciye açıklanır. Gerekli olursa referans noktasının amaca bağlı olarak belirlenmesi gerektiği ifade edilir. Bunun için örnekler verilebilir; "Ankara' dan İstanbul' a gitmek için referans noktan neresi olur?" sorusuna karşılık Ankara' nın referans noktasını belirttiği tartışılabilir.
7.	l doğrusu üzerinde başka bir nokta belirler misin? Belirlediğin bu noktayı hangi reel sayı ile eşleyebilirsin? Neden? "Orijine olan uzaklık" eşleyeceğin reel sayıyı belirlemene yardımcı olabilir mi? Bu belirleme işini yaparken noktalar arasındaki uzaklıklar nasıl belirlenmelidir? Birim belirledin mi? Nasıl? (Birim belirleyebilmesi için farklı uzunluklarda çubuklar ve cetvel öğrenciye sunulur.)	Öğrenci orijinin sağında bir nokta seçerse pozitif bir sayı ile eşlemesi, solunda bir sayı seçerse negatif bir sayı ile eşlemesi istenir. Bunun bir kabul olduğu belirtilir. Öğrencinin belli bir birime göre nokta belirlemeyeceği muhtemeldir. Bu durumda örneğin; 1 ve 2 reel sayılarını eşlediğinde 0 ile 1 ve 1 ile 2 noktaları arasındaki uzaklıkları tartışılır. Hem uzaklıkların tartışılmasında hem de birim belirlemede kullanması için doğru parçaları ve cetvel öğrenciye sunulmuştur. Eğer 0 ile 1 ve 1 ile 2 noktaları arasındaki uzaklığı dikkate alarak eşlemeyi yaptı ise (birim belirledi ise) negatif reel sayıları doğru üzerindeki noktalar ile eşlemesi için benzer sorularla devam edilir (8.soruya geçilir). Eğer uzaklığı dikkate almadan noktaları reel sayılar ile eşliyorsa "0 ile 1 noktası arasındaki uzaklığı belirleyebilir misin? Uzaklığı belirlemek için çubuk ya da ip kullanabilir miyiz? İki uzaklık arasında nasıl bir ilişki olursa işaretleme (karşılık getirme) düzgün olur?" soruları yöneltilir. Noktaları belirlemede belirlediği birimi kullanması sağlanır. Bunun için bir çubuk, cetvel ya da ip parçası kullanma fikri sunulabilir.
8.	Doğru üzerinde bir nokta işaretlemeni istiyorum. Bu noktanın orijine olan uzaklığını belirleyebilir misin? (Cevap evet ise) Nasıl belirlersin? O zaman bu noktayı hangi reel sayı ile eşlersin? Negatif kısımda (veya pozitif kısımda) orijine eşit uzaklıkta olan noktayı hangi reel sayı ile eşlersin? Başka noktalar için de aynı işlemi yapmanı istesem yapmak ister misin? Eşlemeleri yaparken nelere dikkat edersin?	Bu adımda 7.soruda belirlediği birimi kullanması istenir. Öğrencinin işaretlediği noktanın orijine olan uzaklığını belirlemesi beklenir. Bu nokta ile O noktasını birleştiren doğru parçasının uzunluğu bir pozitif reel sayı ile eşlenir. l doğrusu üzerindeki herhangi başka noktalar için de bu eşlemenin yapılabileceği tartışılır. (Bu bir fonksiyondur ancak burada öğrenciye bir birebir örten eşleme olarak açıklanacaktır.) Reel sayılar eşlenirken pozitif ve negatif olanlar dikkate alınır. Noktaların orijine olan uzaklıkların eşit olması fikri tartışılır. Pozitif reel sayıların orijinin sağında olması "burada seçilen iki reel sayı arasındaki fark pozitif olduğunda orijinin sağında diye kabul ediyoruz" şeklinde açıklanabilir. Benzer şekilde iki reel sayı arasındaki fark negatif ise bu sayıların orijinin solundaki noktalara konumlandırıldığı belirtilir. (Doğrunun konumu dikey ise yukarı ve aşağı olarak belirtlilir.) Eşlemenin birebir olduğu ve her reel sayının bir nokta ile eşlenebileceği (örten) tekrar tartışılabilir. Öğrencinin belirlediği ve etiketlediği her bir noktaya karşılık gelen reel sayıya bu noktanın koordinatı denildiği söylenir. Bir doğrunun bu şekilde koordinatlanmış haline sayı doğrusu olarak adlandırıldığı söylenir (ölçeklendirilmiş cetvel). Eğer 6.soruda l doğrusunun konumu yatay oluşturulmamışsa genellikle sayı doğrusunun yatay konumlandırıldığı belirtilir. Ancak, doğru düzlemde nasıl konumlandırılırsa konumlandırılsın sayı doğrusu olma özelliğinin kaybolmayacağı vurgulanır. Burada odaklanma doğrunun koordinatlandırılmış olmasına yönelik olmalıdır.
9.	Reel sayılar kümesini düşündüğünde cetvelleme işi biter mi? İpi sündürme işlemi biter mi? O zaman reel sayılar kümesi nasıl bir kümedir?	Sonsuz küme fikri burada sezgisel olarak açıklanmalıdır. Reel sayılar kümesinin sonsuz bir küme olduğu ve sayı doğrusunun sonsuz kümeleri temsil etme gücünün olduğu belirtilmelidir.
10.	(9.soruda sonsuz küme kavramı, reel sayıların sonsuz küme olduğu ve sayı doğrusunun sonsuz bir kümeyi temsil ettiği fikirleri yeteri kadar anlaşılmadı ise bu adıma yer verilir.) Önümüzdeki materyalde iki doğru parçası ve bir ucu sabitlenmiş bir ip var. Bu iki doğru parçası üzerindeki noktaları bu ip yardımı ile eşlemeni	Farklı uzunluklarda kesilmiş iki doğru parçası (çubuk) bir plaka üzerine birbirine paralel konumda sabitlenir. Bir ip parçasının (iki doğru parçasını da kesecek uzunlukta olmalı) doğru parçalarının her ikisini de birer noktadan kesebilecek şekilde bir ucu sabitlenir. Bu ipin hareketi ile iki doğru parçası üzerindeki noktaların eşlenmesi sağlanır. İpin doğru parçalarını kestiği noktaların birbiri ile eşlendiği fikri açıklanır.

istiyorum. Neler fark ettin? Bu doğru parçaları üzerindeki noktalar hakkında neler söylersin? Nasıl bir eşleme yaptın? Bu doğru parçalarının üzerindeki noktaları reel sayılar kümesinin elemanları ile eşleyebilir miyim? Nasıl? Bu kümelerin eleman sayıları hakkında ne söylersin?	Burada kısa ve daha uzun olan doğru parçaları üzerindeki noktaların sayısını belirlemek esas olmalıdır. Tartışma bu amaçla yürütülmelidir.

Protokol V: Beşinci Öğretim Oturumu

Koordinat Sistemine Geçiş

Hedefler:

- Sayı doğruları ile koordinat ekseni oluşturabilme.
- Eksen ve orijin fikrinin oluşması
- Sıralı ikilileri açıklayabilme.
- Koordinatları verilen noktayı işaretleyebilme.
- İşaretlenen noktanın koordinatlarını belirleyebilme.

Kullanılacak Araçlar: İğneli tahta materyali, ip, cetvel.

Adımlar		**Açıklama**
1.	Sayı doğrusu bir küme midir? Nasıl? Bu kümenin elemanları nelerdir? Elimizde iki tane sayı doğrusu var. Bu sayı doğruları birer küme olduğuna göre nasıl adlandıralım?	İğneli tahta materyalinde verilen sayı doğrularını birer cetvel gibi düşünmeleri istenir. Her bir cetvelin birer küme ve reel sayıların bu kümelerin elemanları olduğu tartışılır. Kümelerin burada düz bir çizgi ile gösterildiği belirtilir (Venn şeması örnekleri hatırlatılabilir). Öğrenciden bu iki kümeyi adlandırması istenir.
2.	Bu iki küme arasında eşleme yapabilir miyiz? Bu eşlemeyi nasıl yaparsın? Eşlemeyi bir ilişkiye göre yaparsak nasıl olur? O halde bu iki ekseni nasıl konumlandırırsın/yerleştirirsin? Paralel mi olsun? Çakıştıralım mı? Dik mi tutalım? Sayı doğrularını kesiştirmeyi deneyelim mi? Sence hangi noktada kesişmeleri uygun olacaktır? Neden? Peki, bu sayı doğrularını cetvelleyebilir misin? Reel sayılar nasıl yerleşmeli? Pozitif reel sayılar doğruların hangi tarafında olmalıdır? Negatif sayılar ne tarafta olmalı?	İğneli tahta materyalinde iki cetvellenmiş çubuk verilir. İki küme arasındaki ilişkiye bakacağımız için bu iki kümeyi kağıda yerleştirmemiz gerektiği vurgulanır. İki küme arasında belli bir ilişkiye göre eşleme yapılacağına göre nasıl konumlandırılmaları gerektiği tartışılır. Öğrenci kümelerde eşleme fikrine dayanarak muhtemel yatay veya dik konumda paralel yerleştirecektir. Bu durumda birkaç tane reel sayı için eşleme yapması istenir. Eşlemeleri doğru parçası olarak ip veya iğneli sayfa materyalinin çubuklar ile yapması istenir. Daha sonra bu doğru parçalarını incelerken zorlanıp zorlanmadığı sorulur. Daha fazla sayıda eşleme yapıldığında karmaşık bir durum oluşacağı açıklanır. Sayı doğrularını zihnimizde hareket edebilen (yani ötelenebilen) kümeler olduğu belirtilir. Dilediğimizde birinci kümenin ikinci kümenin yerine geçebileceği vurgulanır (birinci ve ikinci küme olarak ifade edilmese de öğrencinin eli dokundurularak işaret edilebilir). Öğrencinin kesişme noktasını “sayı doğrularının ortasından” şeklinde belirtmesi muhtemeldir. Burada sayı doğrusunun orta noktası olmadığı, reel sayıları eşlerken dilediğimiz noktayı seçebildiğimizi hatırlatmalıyız. Bunun için orijin noktasının kesişim noktası olarak kabul edildiği ve her ikisinin sıfırı olarak işaretlendiği belirtilir.

		Yatay olarak konumlandırılan sayı doğrusunda sağa doğru pozitif, sola doğru da negatif işaretli sayıların yerleştirildiği belirtilir. Düşey olarak konumlandırılan cetvelin de yukarı doğru pozitif ve aşağı doğru negatif işaretli sayıların yerleştirilmesi tartıştırılır. Artık bu iki küme arasındaki ilişkiyi eşlemeler yardımı ile ifade edebileceğimiz bir yapının oluştuğu vurgulanır. Bu yapıya “koordinat ekseni” denildiği, yatay eksenin genellikle *x*- ve düşey eksenin genellikle *y*-ekseni olarak adlandırıldığı belirtilir. Burada yeri geldiğinde eksen adlarının değişebileceği de tekrar vurgulanır. *x*-ekseninin apsis ve *y*-ekseninin ordinat ekseni olarak adlandırıldığı belirtilir. Eksenlerin kesişmesi ile oluşan dört belgeden sırasıyla söz edilir ve eli ile dokunması sağlanır.
3.	Bu oluşturduğumuz koordinat ekseninde iki küme arasındaki ilişkiyi nasıl kurmalıyız? Noktalar arasındaki eşlemeyi nasıl yapacağız?	Öğrencinin ortaokul bilgilerinden yararlanarak noktaları eşlemeden bahsetmesi muhtemeldir. Eğer eksenler üzerindeki noktaları doğru parçaları yardımı ile eşlemeyi düşünürse örneğin 1, 2 ve 3 noktalarını birbirleri ile eşlemesi istenir (ip veya iğneli sayfa materyalindeki doğru parçası temsilleri ile eşleme yapılabilir). Elde ettiği eşlemelere dokunması istenir. Eşlemelerin bu şekilde bir ilişkiyi belirtmekte başarılı olup olmadığı sorgulanır. Örneğin; *x*-eksenindeki her tamsayıyı kendisinin iki katı olacak şekilde *y*-eksenindeki elemanlar ile eşlemesi istenir. Bu eşlemenin tablo eşlemesi gibi algılaması kolay olup olmadığı sorgulanır. Bu eşlemeyi nasıl daha görsel ve algılanabilir yapılabileceği sorulur. Tartışmadan sonra birkaç nokta için eşlemenin nasıl yapıldığı gösterilir. Örneğin (1,2) noktasını göstermek için apsiste 1 noktasından bir doğru parçası materyali konulur ve ordinatta 2 noktasından bir doğru parçası materyali konulur. Bu doğru parçalarının kesiştiği noktanın (1, 2) noktası olarak gösterildiği belirtilir. Hem kabartma yazıda hem de latin olarak betimlenir. Bu gösterime sıralı ikili denildiği ve ilk bileşenin apsis kümesinin ve ikinci bileşenin ordinat kümesinin elemanlarından olduğu belirtilir. Bu ikililerin eşlemeleri gösterdiği ve bu eşlemelerin iki küme arasındaki ilişkiye göre olması gerektiği hatırlatılır.
4.	Koordinat ekseninde işaretlenen noktaların koordinatları nelerdir?	(1, 3), (5, 5), (-3, 2), (-4, -1), (2, -3), (0, 0), (0, 3), (-5, 0), (4, 0), (-6, 0) noktaları iğneli sayfa üzerinde taşlarla işaretlenmiştir. Bu noktaların hangi sayılara karşılık geldiği sorulur. Yatay cetvelde/apsiste ve düşey cetvelde/ordinatta bu nokta için karşılık gelen sayı sorgulanır. Bu sayıların koordinatlar olduğu birkaç örnekten sonra tekrar vurgulanır ve diğer noktalar için “koordinatları nelerdir?” şeklinde sorulur.
5.	(2, 6), (0, -4), (0, 0), (-3, -2), (-5, 0), (-1, 3), (4, -5), (0, ½), (3/2, 0), (-2, 3) noktalarını koordinat ekseninde işaretleyiniz.	Verilen noktaları taşlar ile iğneli sayfa üzerindeki koordinat ekseninde işaretlenmesi beklenir. Bu noktaların kaçıncı bölgede olduğu da sorgulanır. Rasyonel ifadeleri işaretlemekte sıkıntı yaşamaları durumunda bir bütünün parçaları fikrinden hareket edilerek verilen bütün bir sayı bloğunu parçalaması istenebilir.

Protokol VI: Altıncı Öğretim Oturumu

Koordinat Düzleminde İki Küme Arasındaki İlişkinin Temsil Edilmesi İncelemesi

Hedefler:

- Eksenlerin düzlemde birer kümeyi temsil ettiğini bilme.
- İlişkiye göre eksenlerin hangi kümeyi temsil ettiğine karar verebilme.
- İlişkiye göre karşılık gelen noktaları belirleyebilme.
- Noktaları doğru parçaları ile birleştirerek ilişkiyi grafik ile temsil edebilme.

- İki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilme.
- İki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleri ile ifade edebilme.

Kullanılacak Araçlar: İğneli tahta materyali, kabartma yazı tablet-kalem-kağıt, rulet, ip, 3D kalem.

Adımlar	Açıklama
1. Eymir gölünün etrafını görmek isteyen turistler için bisiklet ile tur attıran bir şirketin bu hizmete karşı talep ettiği ücret; ilk bir saat için 20 TL, iki saat için 35 TL dir. İki saatten daha fazla bisiklet turu fiyatları fazladan her saat için 10 ar TL artmaktadır. Bir ziyaretçi maksimum 5 saat için hizmet alabilmektedir. Bu bilgilere göre burada belirlediğin küme veya kümeler hangileridir? Bu kümelerin elemanları nelerdir? Hangi kümeden hangisine bir ilişki kurmak istiyorsun? Hangi kümeyi hangi eksen ile temsil edersin? Neden? Bu iki kümenin elemanları arasında nasıl bir eşleme vardır? Bu iki küme arsındaki ilişkiyi grafik üzerinde göstermeseydin nasıl bir gösterim yapardın? Neden?	Öğrencinin A={1, 2, 3, 4, 5} tur saatleri kümesi ile B={20, 35, 45, 55, 65} ücretler kümesinin belirtmesi beklenir. Bu kümeleri apsis ve ordinat ekseni ile temsil etmesi istenir. Burada eksenleri belirlemede öncelikle öğrencinin tercihine bırakılır. Öğrencinin ilişkiyi göstermek için eşleme yardımı ile (sıralı ikilileri) noktaları belirlemesi istenir. Bu soruda amaç yalnızca noktalardan oluşan bir ilişkinin (ilerisi için fonksiyonun) olabileceğini belirtmektir. Öğrenci grafiği oluşturduktan sonra ilişkinin iki küme arasında olacağı hatırlatılır. Ardından önce hangi kümeden hangisine ilişki kurmak istediğini belirlenmesi gerektiği tartışılır. Hangi kümeden ilişki başlatılacaksa o kümenin yatay eksen (apsis) ile temsil edildiği söylenir. Hangi kümeye gitmesi isteniyorsa da o kümenin düşey eksen (ordinat) ile temsil edildiği ifade edilir. Burada eşlemenin yönü duruma göre değişebileceği belirtilir (ileride ters bağıntının anlaşılması için hazırlıktır). Öğrencinin bu ilişkinin tablo yardımı ile de temsil edilebileceği fikrini ileri sürmesi muhtemeldir. Bu düşünceye ulaşması için gerekli olursa yönlendirmeler yapılır ve tablo çizmesi istenir ve beraberce tablo oluşturulur. Dikey konumda tablo oluşturursa “Bu tabloyu yatay olarak da oluşturabilir miyiz?” şeklinde soru yöneltilir. Böylece yatay konumda da tablo oluşturulabildiği belirtilir. Bir ilişkiden bahsedebilmek için en az bir ikilinin olması gerektiği vurgulanır. İlişkinin ikililer, üçlüler, ... , ile ifade edildiği belirtilir.
2. Bir sporcunun antrenman süresinde tükettiği kalori miktarlarının her saat sonundaki ölçüm sonuçları yandaki tabloda verilmiştir. Bu tablodaki bilgilere göre sporcunun kalori tüketimi ile saat arasındaki ilişkiyi koordinat düzleminde gösterin. Burada aralarında ilişkiyi kuracağınız kümeleri belirleyin. Bu iki kümenin elemanları arasında nasıl bir ilişki vardır? Hangi kümeyi hangi eksen ile temsil edeceksin? Sıralı ikililer nelerdir? Bu noktaları koordinat ekseninde gösterebilir misin? Bu iki küme arasındaki ilişki yalnızca bu noktalar ile mi temsil edilir? Belirlediğin ilişki bu noktalardan mı oluşuyor? Orijin noktası bu ilişkiye dahil değil mi? Mesela ilk bir saat boyunca hiç kalori tüketmiyor mu? İlk yarım saatte kaç kalori tüketmiştir? O zaman ilişkiyi göstermek için yalnızca bu noktalar yeterli mi? Noktaların sayısını artırdığımızda doğru parçaları ile temsil edebilir miyiz? Belirlediğin bu noktaların her	<table><tr><td>Saat</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Tüketilen enerjinin kalori cinsinden miktarı</td><td>300</td><td>600</td><td>900</td><td>1200</td></tr></table> Tabloyu incelemesi için zaman verilir. Burada tablo ile eşlemede bu kez yatay konumun tercih edildiği belirtilir. Öğrencinin saat ve kalori kümelerini temsil edecek eksenleri belirlemesi beklenir. Tercihen saate göre tüketilen kalori miktarını belirten grafiği oluşturmaları beklenmektedir. Bu nedenle saat apsis ekseni ve tüketilen kalori ise ordinat ekseni ile temsil edilecektir. Sıralı ikilileri belirleyip koordinat düzleminde bu noktaları işaretlemesi istenir. Öğrencinin saat ve tüketilen kalori miktarı arasındaki ilişkiyi bir eğri yardımı ile temsil edildiği fikrine ulaşması amaçlanır. Bunun için “ilk yarım saatte kalori tüketimi olmuyor mu?, birinci saatten sonra ikinci kalori tüketimi ölçümüne kadar geçen sürede kalori tüketim miktarı artmıyor mu?” gibi öğrenciyi düşündürmeye yönelik sorular sorulur. “Peki bu noktaları da koordinat düzleminde göstermeli miyiz? Nasıl gösteririz? Sadece bu noktalar mı var?” Sonunda sorular ile eğriyi oluşturan sıralı ikililer (noktalar) kümesi fikrine ulaşmaları amaçlanır. Başlangıçta tüketilen kalori miktarının ne olduğu sorgulanarak orijin noktasının da ilişkiye dahil olduğu vurgulanır. İlişkiyi gösteren noktaların doğru parçalarını oluşturduğu belirtilir. Bu doğru parçalarının oluşturulabilmesi için iğneli sayfa materyalin iğnelerine ip veya lastik gererek yapmaları istenir. Öğrencinin düşündüğü ve hissettiği şekilde eğriyi oluşturmasına fırsat verilir. Daha sonra doğru parçalarının birbirine eklenmesi ile oluşan düz çizgi fikri açıklanır. Bu düz çizginin iki küme arasındaki ilişkiyi temsil ettiği belirtilir.

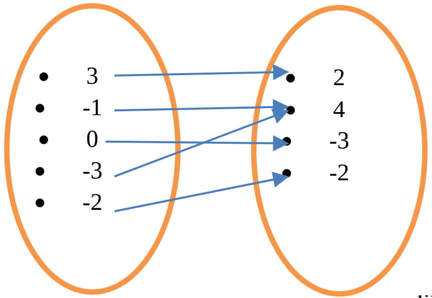
biri bir doğru parçasının uç noktaları olabilir mi? O halde bu iki küme arasındaki ilişkiyi grafikte nasıl temsil ederiz?

Tablo ve grafik ile ilişkinin temsil edildiği belirtilir. Böylece tablo temsilinden grafik temsiline bir ilişki belirtilmiş olur. Ayrıca sıralı ikililerin belirlenmesi istendiğinde bu sıralı ikililerin bir küme belirttiği (bu kümenin grafikteki düz çizgiyi oluşturan noktalar olduğu) açıklanır.
(*Burada esasında tablodaki verilen ilişkinin dışındaki noktalarda durumun nasıl olduğunu bilmediğimizi, belki de bu ilişkinin düz bir çizgi oluşturmadığı öne sürülerek tartışılabilir. Bu durum ileriki sorularda da vurgulanacaktır*.)

3. Verilen sıralı ikilileri inceleyin. Bu sıralı ikililerden oluşan küme neyi temsil etmektedir? Bu ilişkiyi başka nasıl temsil edebiliriz? İlişkiyi gösteren grafiği oluşturun.

(2,4), (1,2), (-1,1), (-2,0), (-3,-1) sıralı ikilileri verilir. Öğrencinin bu sıralı ikililerin iki sayı kümesi arasındaki ilişkiyi belirttiğini ifade etmesi beklenir. Apsis eksenine yerleştirilen elemanların sayı değerinin iki fazlasının, ordinat eksenine yerleştirilen elemanlarının sayı değerine eşit olduğu belirtilir (değişken kavramı için sezgisel fikir belirtmeleri yeterli olacaktır). Öğrencinin bu ilişkinin tablo, venn şeması ve grafik ile temsil edilebileceği fikirlerinden en az birini ifade etmesi beklenir. Öğrencinin tablo veya venn şeması ile temsilini göstermesi istenebilir. Grafik ile temsilinde noktaları koordinat ekseninde işaretlemesi istenir. Noktalar arasındaki ilişkinin nasıl gösterilebileceği sorulur. Öğrencinin düz bir çizgi (doğru) ile belirtmesine müsaade edilir. (Daha sonra bu noktalar dışındaki ilişkinin bilinmediği, bu nedenle bir doğru çizmenin mümkün olmadığı ifade edilir.)

4. Venn şeması ile verilen iki küme arasındaki ilişkiyi inceleyin. İki küme arasında nasıl bir ilişki vardır? Bu ilişkiyi başka nasıl gösterebiliriz? Koordinat düzleminde bu ilişkiyi grafik ile gösterin. Burada ilişki hangi kümeden hangisine kurgulanmış? Koordinat eksenlerinde hangi küme hangi eksen ile temsil edilecek? Grafikte ilişki nasıl bir çizgi (eğri) ile temsil edilebilir?



Venn şeması kabartma yazı ile A4 ebadında bir kağıda sığacak şekilde çizilir. Eşlemeler 3D kalem ile kağıt üzerine yapılır. Öğrencinin kümeleri, elemanlarını hissetmesi ve kümeleri adlandırması beklenir. Kümeleri temsil etmek için farklı geometrik şekiller kullanılabileceği belirtilir. Elemanların belli bir sıraya göre yerleştirilmek zorunda olmadığı ve birden fazla elemanın bir eleman ile eşlenip eşlenemeyeceği tartıştırılır. Bu durumun ilişkinin nasıl olduğuna bağlı olduğu açıklanır. Eşlemeden bahsedebilmek için ilişkinin gerekli olduğu vurgulanır. Koordinat düzlemi için yine iğneli sayfa materyali kullanılır. Burada ilişkinin ilk kümeden ikinciye olduğu, ilk kümenin apsis ekseni ve ikinci kümenin ordinat ekseni ile eşleneceğini ifade etmesi beklenir (burada eğri kablo ile gösterilir). İlişkinin yönünün değişebileceği de belirtilir. İlişkinin bir doğru ile temsil edilemeyeceğini fark ettiklerinde doğru parçaları ile temsil etmelerine engel olunmaz. Burada amaç her zaman ilişkinin düz bir çizgi olmadığını fark ettirmektir. Farklı eğri önerileri geldiğinde başka noktalara ait ilişkinin de bilinmesi gerektiği açıklanır. Bu durum noktalar arasında belirlenen açık bir ilişkinin olmadığı ile vurgulanır.

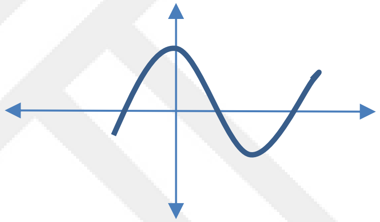
5. Dalgıçlar deniz altından yüzeye çıkarken dakikada 10 metreden daha fazla yükselmemeleri gerekir. Bunun sebebi vurgun denilen deniz suyunun vücuda uyguladığı basıncın değişmesinin beynimize zarar vermesidir. Tabloda dalış mesafesine bağlı deniz suyunun vücuda uyguladığı basınç miktarı yer almaktadır. Bu olayda ilişkiyi oluşturan kümeleri, ilişkiyi, hangi eksenin hangi kümeyi temsil edeceğini belirleyin. Bu ilişkiyi temsil eden grafiği oluşturun.

Derinlik (m)	0	1	2	3	4	5
Su basıncı (atm)	1	3	9	9	27	27

Tabloda verilen noktaları koordinat eksenine yerleştirmesi ve grafiği oluşturması beklenmektedir. Burada aynı sayı ile eşlenen değerler için grafikte yatay bir çizgi ile ilişkinin gösterilebileceği sorgulanır. Ayrıca ilişkiyi temsil eden eğrinin her zaman orijinden başlaması gerekmediği belirtilir.

6. Verilen sıralı ikililerin belirttiği kümeyi yazın. Bu kümenin belirtiği ilişki hakkında neler söylersin? (sayıları karelerine karşılık getiren ilişki) Bu ilişkinin grafikle gösterimi nasıl bir şekil oluşturur? Açıklayın.

(-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9) sıralı ikililerini koordinat düzleminde işaretlettirilir. Kablo yardımı ile parabole benzer bükülmüş basit bir eğri oluşturması beklenmektedir. Ancak burada orijin noktasında (kırılmış) kesişmiş iki doğru oluşturması da muhtemeldir. Bu durumda iğneli sayfa materyalinin doğru parçası temsilleri yerleştirilmeye çalışılır ve noktaların her durumda

	en az birinin doğru üzerinde yer almadığı gösterilir. Ayrıca sadece verilen noktaların eğriyi tahmin etmek için yeterli olmayabileceği tekrar vurgulanır. İki küme arasındaki ilişkinin bir eğri de oluşturabildiği ifade edilir.
7. Sana verdiğim grafiği inceler misin? Neler fark ettin? Bu grafiğin temsi ettiği ilişkiyi oluşturan eşlemeleri belirleyebilir misin? Bu noktaların koordinatlarını belirleyebilir misin? Bu sıralı ikililer ile bu iki küme arasındaki ilişkiyi başka nasıl gösterebiliriz?	 Kabartma yazı ile kağıt üzerine koordinat ekseni ve noktalar çizilebilir. Grafik 3D kalem ile çizilebilir. Koordinatları belirleyebilmesi için doğru parçaları ile noktalar birleştirilebilir. Doğru parçası için ip veya çubuk kullanılabilir. Öğrenci kabartma yazı ile belirlemede güçlük yaşarsa iğneli sayfa materyali kullanılabilir. Grafik üzerinde işaretlenen noktaların koordinatlarını belirlemesi beklenir. (Grafikte her bölgeden noktalar işaretlenir ve eksenleri kestiği notalar işaretlenir. Bu noktalar etiketlenir.) Öğrencinin grafikte verilen noktaların koordinatlarını belirlemesi, sıralı ikilileri yazması ve bu ikililer yardımı ile eşlemelerden yola çıkarak ilişkiyi farklı temsil türlerinde ifade etmesi beklenir.

Protokol VI-Ek: Yedinci Öğretim Oturumu

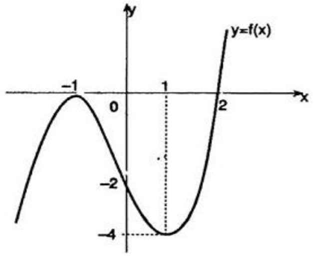
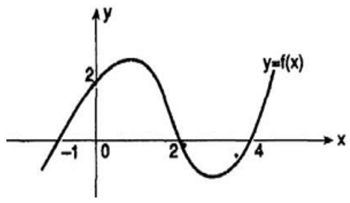
İki Küme Arasındaki İlişkinin Grafik İle Temsilin İncelemesi

Hedefler:

- İki küme arasındaki ilişkiyi grafik ile temsil edebilme.
- Grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiye ait noktaları tespit edebilme.
- Grafik ile verilen iki küme arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleri ile ifade edebilme.

Kullanılacak Araçlar: İğneli tahta materyali, kabartma yazı tablet-kalem-kağıt, rulet, ip, 3D kalem.

Adımlar	Açıklama
1. [y = x+2 doğrusu iğneli sayfa üzerinde ip yardımı ile temsil edilir. (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (-1, 1), (-2, 0), (-3, -1) noktaları boncuklar ile işaretlenir.] Bu grafiğin temsil ettiği ilişkiyi nasıl belirlersin? Verilen sıralı ikilileri belirleyebilir misin? Bu sıralı ikililer hangi iki küme arasındaki eşlemeye ait? Bu sıralı ikililer nasıl bir ilişkiye sahiptir? Buradaki iki küme arasında nasıl bir ilişki var?	Verilen grafiği incelemesi, grafik üzerindeki işaretlenen noktaların koordinatlarını belirlemesi beklenir. Apsis ve ordinatın temsil ettiği kümeleri, bu kümelerin elemanlarını belirlemesi istenir. Bu kümeler arasındaki eşlemeyi belirtmesi ve bu eşleme yardımı ile kümeler arasındaki ilişkiyi belirlemesi beklenir.
2. [y = x^2 + 4 grafiği iğneli sayfa materyali üzerinde ip yardımı ile temsil edilir. (0, 4), (1, -3), (2, 0), (3, 5), (-1, -3), (-2, 0), (-3, 5) noktaları boncuk yardımı ile işaretlenir.] Bu grafiğin temsil ettiği ilişkiyi nasıl	Verilen grafiği incelemesi, grafik üzerindeki işaretlenen noktaların koordinatlarını belirlemesi beklenir. Apsis ve ordinatın temsil ettiği kümeleri, bu kümelerin elemanlarını belirlemesi istenir. Bu kümeler arasındaki eşlemeyi belirtmesi ve bu eşleme yardımı ile kümeler arasındaki ilişkiyi belirlemesi beklenir.

	belirlersin? Verilen sıralı ikilileri belirleyebilir misin? Bu sıralı ikililer hangi iki küme arasındaki eşlemeye ait? Bu sıralı ikililer nasıl bir ilişkiye sahiptir? Buradaki iki küme arasında nasıl bir ilişki var?	Burada öğrencinin $x^2 + 4$ cebirsel ifadeye ulaşması amaçlanmamaktadır. Kümelerin elemanlarının belli bir ilişki ile eşlendiğini sezgisel olarak ifade etmesi beklenmektedir. Yalnızca doğrusal grafikler değil, doğrusal olmayan grafiklerin de bir ilişkiyi temsil edebileceğini kavraması amaçlanmaktadır.
3.	(-3, -4), (-2, -3), (-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2) noktalarını iğneli sayfa üzerinde işaretleyebilir misin? Bu noktalar iki küme arasında nasıl bir ilişkiyi temsil etmektedir? Bu ilişkiyi bir grafik ile temsil etmek istersek grafik nasıl olur?	İşaretlettirilen noktalar yardımı ile iki kümenin Elemanları arasındaki ilişkinin ‘1 eksiği’ olduğu fikrine ulaşması beklenir. $y = x - 1$ doğrusunu ip yardımı ile temsil etmesi beklenmektedir.
4.	(-3, -9), (-2, -4), (-1, -1), (0, 0), (1, -1), (2, -4), (3, -9) noktalarının temsil ettiği ilişkiyi açıklayabilir misin? Bu ilişkiyi nasıl bir grafik temsil eder?	Verilen noktalar yardımı ile $y=-x^2$ grafiğini çizmesi beklenir. Burada (-3, 9) ve (3, 9) noktalarını da bir doğru parçası yardımı ile birleştirmesi muhtemeldir. Burada apsisteki noktaların karesinin negatifi olduğu fikrine daha önce ulaşması beklenir. Bu fikirden yola çıkarak 4 ve -4 noktaları için ordinatları bulması istenebilir. (Başka bir yol olarak (1,9) noktasının çizdiği bu doğru parçası üzerinde olduğu ancak bu durumun ilişkiyi sağlamadığı fikrine ulaştırılır.) Böylece grafiğin devam ettiğini kapalı bir çizgi olmadığını fark etmeleri sağlanır.
5.	İğneli tahta üzerinde verilen grafik üzerinde işaretlenen noktaların koordinatlarını belirleyebilir misin? Peki bu noktalardan başka hangi noktaların koordinatlarını belirleyebilirsin? Nasıl belirledin?	  Her iki grafik iğneli sayfa üzerinde ip, kablo ya da lastik yardımı ile oluşturulur ve verilen noktalar boncuk ile işaretlenir. Bu noktaların koordinatlarını belirlemesi istenir. Grafiğin ilişkiyi oluşturan noktalar kümesi olduğu fikrini ifade etmesi beklenir. Bunun için farklı noktaların koordinatlarını belirlemesi istenir.

Protokol VII: Sekizinci Öğretim Oturumu

Değişken Kavramının İncelenmesi

Hedefler:

- Değişken kavramını kendi ifadeleri ile açıklayabilme.
- Bağımlı, bağımsız değişken kavramlarını bilme.
- Bir ilişkinin verildiği gösterim biçimindeki bağımlı ve bağımsız değişkeni tespit edebilme.
- Bağımlı ve bağımsız değişkenleri farklı harflerle temsil edebilme.
- Bağımlı ve bağımsız değişkenler ile cebirsel bağıntılar yazabilme.

Kullanılacak Araçlar: Boncuklar, iğneli sayfa materyali, kabartma yazı tablet-kalem-kağıt, küptaş kasa materyali, 3D kalem.

1. ‘Cinsiyet’ kelimesi hangi kelimeleri karşılar? ‘Yaş’ (bireyin yaşı) kelimesi neyi temsil etmektedir? ‘Sıcaklık’ kelimesi de benzer bir örnek midir? Bu kelimelerin temsil ettiklerini eleman kabul eden kümelerden bahsedebilir miyiz?

   Önündeki sayı doğrusu üzerinde tamsayılar konumlandırılmış. Sana verdiğim boncuk ile bu sayı doğrusunda hangi tamsayıları işaretleyebilirsin? Bu boncuk işaretleyebildiğin her sayıyı temsil edebilir mi? Bu boncuğu etiketlemek istersen ne dersin?
   Bu boncuk ile orijini işaretlediğim zaman artık boncuğun ne ifade ettiğini biliyor muyuz? Boncuk birden fazla tamsayıya aynı anda eşit olabilir mi?

Öğrencinin cinsiyet kelimesi için kadın ve erkek; yaş kelimesi için 1, 2, … , 18, … gibi pozitif tamsayılar; sıcaklık için de reel sayılar (tamsayılar da diyebilir) kümesinin elemanlarından bahsetmesi beklenir. Her bir kelimenin birer kümenin elemanlarını temsil ettiği ifade edilir; cinsiyet kümesi, pozitif tamsayılar kümesi gibi.
Verilen sayı doğrusu materyalinde boncuk yardımı ile öğrencinin çeşitli sayıları art arda işaretlemesi istenir. Daha sonra boncuk öğrencinin eline tekrar verilerek “artık tamsayıların hepsini bu boncuk ile ifade edebilir miyiz?” ve “ bu boncuk tamsayılar kümesi için bir temsilci midir?” sorularına cevap aranır. Boncukla ilgili tek bilginin bir tamsayı olduğu belirtilir. Tamsayılar kümesinin bir temsilcisi olduğu vurgulanır. Boncuklar harfli ifadeler ile etiketlenir. Burada öğrencinin dilediği harfi seçmesi mümkündür. Daha sonra genelde ‘x’ harfi kullanıldığı söylenir (y, z de söylenebilir). Bu şekilde harfli ifadelere *değişken* denildiği ve değişkenin bir sembol olduğu söylenir.
Değişken hangi küme için kullanılıyorsa o kümenin elemanlarının tamamının gösteriminde kullanıldığı açıklanır. Kümenin her elemanı için ayrı bir sembol kullanılmadığı, tek sembolün her elemanını göstermek için kullanıldığı belirtilir. Nesne (eleman) değiştikçe gösteriminde kullanılan sembolün değişmediği açıklanır. Değişkenin kümenin elemanı olmadığı, o kümenin elemanlarını temsil etmesi için kullanılan sembol olduğu ifade edilir.
Orijinle ve gerekirse başka noktalar ile eşlenen boncuğun artık sabit bir noktayı temsil ettiği açıklanır. (sabitler: 3, 5, 7, a, b, … şeklinde ifade edilir) Sabitin birden fazla sayıya eşit olamadığı ve değişken gibi birden fazla elemanı temsil edemeyeceği fikri açıklanır. Sembol gösterimi: *x* değişken teşmili için ∶∷

2. Bir mavi balinanın yaz döneminde her gün 4 ton yiyecek tükettiği not edilmiştir. Gün sayısı ile balinanın toplamda ton cinsinden tükettiği yiyecek miktarını bir tablo ile ifade edelim. Tabloyu tamamlayın. (Bu tablo ile herhangi bir gün için yiyecek miktarını temsil eden bir ifade yazın.)
   Gün ve yiyecek miktarı arasında nasıl bir ilişki var? Bu ilişkiyi nasıl temsil edebilirsin?

Gün	Yiyecek Miktarı (Ton)
1	4
2	4 * 2
10	4 * 10
⋮	⋮
x	4 * x

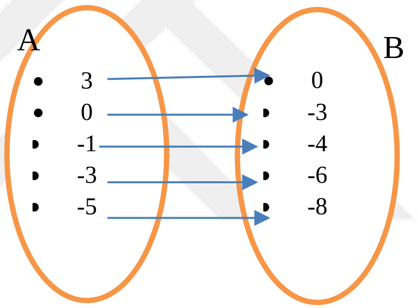
Öğrencinin tablo oluşturması sağlanır. Bunun için rulet kullanılabilir veya küptaş-kasa materyali tercih edilebilir. ‘x’ günleri temsil ederken ‘4x’ yiyecek miktarını temsil ettiği açıklanır. ‘x’ in bir değişken olduğu belirtilir.
Burada öğrencinin gün sayısına bağlı yiyecek miktarındaki değişimi ifade etmesi beklenir. Temsil için tablo veya grafik gibi seçenekler sunması mümkündür. (Bağımlı ve bağımsız değişken kavramları için sezgisel ve sözel ifadeler bu soru için yeterlidir.)

3. Tabloda seyahat eden bir aracın belli saatlerdeki aldığı yol/mesafe km cinsinden verilmiştir. Buradaki olayı grafikleştirmek için gerekli olan kümeleri belirleyin. Bu kümelerin arasındaki ilişkiyi açıklayın. Bu ilişkiyi 2.sorudaki gibi harfli ifade ile yazabilir miyiz? Nasıl? Bu kümelerin elemanlarını farklı birer değişken ile temsil etmek mümkün müdür? Bu kümeler arasındaki ilişkiyi belirlediğin değişkenler ile ifade edebilir miyiz? Nasıl?
   Geçen süre saat ile alınan yol/mesafe arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade edebilir misin? Buradaki

Saat	1	2	3	4	5	6
Yol	50	100	150	200	250	300

Öğrenci tabloyu inceledikten sonra biri saat ve biri yol için iki küme olduğu belirlenir. Bu kümelerin elemanları belirtilir. Kat edilen mesafenin saatin 50 katı olarak arttığını ifade etmesi beklenir. Bu ilişkiyi x ve 50x gibi ifade etmesi muhtemeldir. Bu kümelerin elemanlarını x ve y gibi farklı iki değişken ile temsil etmesi istenir. y nin x in 50 katı olduğu gibi bir ilişkiyi ifade etmesi beklenir. ‘Saate bağlı olarak mesafenin değiştiği’ fikrinin oluşması için sorular sorulur. “Hangi kümenin elemanlarını hangi kümenin elemanları ile ifade ediyoruz?” sorusu yönlendirilir. Burada ifade edilen kümeyi temsil eden değişkene *bağımlı değişken*, ifade etmede kullanılan değişkene ise *bağımsız değişken* denildiği belirtilir. Burada saate bağlı mesafenin değiştiği vurgulanır. İki küme arasındaki ilişkiden yararlanarak y= 50x cebirsel ifadesini yazması için çaba sarf edilir

Ortak bir dil kullanımı için bağımlı değişken olarak x ve bağısız değişken olarak y harfli ifadelerinin tercih edildiği belirtilir.

	ilişki hangi kümeden hangisinedir? Buradaki ilişkiyi bir eşitlik ile ifade edebilir miyiz? Nasıl?		
4.	Verilen iki kümeyi ve aralarındaki eşlemeyi inceleyin. İlişki hakkında neler söyleyebilirsiniz? Bu eşlemeyi belirleyen ilişkiyi nasıl açıklarsınız? Bu kümeleri birer değişken ile temsil edelim. Burada bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirleyelim. Belirlediğin ilişkiyi bu değişkenler ile ifade edebilir misin? Bir eşitlik yazabilir misin?		A ve B kümelerini inceler. A kümesinin elemanlarının 3 eksiğinin B kümesinin elemanları ile eşlendiğini ifade etmesi beklenir. A kümesi için x ve B kümesi için y değişkenleri belirlenebilir. Burada A kümesinin elemanlarına bağlı olarak B kümesinin elemanlarının elde edildiği fikrine dayanarak x' in bağımsız değişken ve y' nin bağımlı değişken olduğu belirtilir. y = x - 3 cebirsel ifadesini yazması için yönlendirmeler yapılır.
5.	Koordinat düzleminde verilen grafiği inceleyiniz. Grafik iki küme arasındaki ilişkiyi temsil etmektedir. Bu kümeleri ve kümelerin aralarındaki ilişkiyi belirleyin. Eksenlerin temsil ettiği kümeler için değişkenler belirleyin. Bu değişkenlerden hangisi bağımlı ve hangisi bağımsız değişkendir? Neden? Bu değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilir miyiz?	Kabartma yazıyla kağıda koordinat ekseni çizilir. y=x^3 grafiği 3D kalemle kabartma çizilir. (0, 0), (1, 1), (-1, -1), (2, 8) ve (-2, -8) noktaları işaretlenir. Öğrencinin *x*-ekseni ve *y*-ekseni ile temsil edilen kümeleri ve kümeler arasında küp alma ilişkisini ifade etmesi beklenir. Burada bağımlı değişkenin apsis ve bağımsız değişkenin ordinat ekseni ile temsil edilmesinin bir kabul olduğu belirtilir. Ayrıca ilişkinin yönüne bağlı olarak bu eksenlerin değişebileceği belirtilir. Cebirsel olarak $y=x^3$ ifadesini yazması beklenir.	

EK 4. Etik Kurul Kararı

Evrak Tarih ve Sayısı: 14/05/2018-E.76241

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Etik Komisyonu

Sayı : 77082166-302.08.01-
Konu : Bilimsel ve Eğitim Amaçlı

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 13/03/2018 tarihli ve 80287700-302.08.01- 42944 sayılı yazı.

İlgi yazınız ile göndermiş olduğunuz, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı **Doktora Öğrencisi Fatma Nur AKTAŞ'ın, Prof.Dr.Ziya ARGÜN'ün** danışmanlığında yürüttüğü ***"Görme Engelli Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi"*** adlı tez çalışması ile ilgili konu Komisyonumuzun **08.05.2018** tarih ve **04** sayılı toplantısında görüşülmüş olup,

İlgilinin çalışmasının, yapılması planlanan yerlerden izin alınması koşuluyla yapılmasında etik açıdan bir sakınca bulunmadığına oy birliği ile karar verilmiş ve karara ilişkin imza listesi ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

e-imzalıdır
Prof. Dr. Alper CEYLAN
Komisyon Başkanı

Araştırma Kod No: 2018-167

Ek:1 Liste

Ankara
Tel 0 (312) 202 20 57 - 0 (312) 2... Faks:0 (312) 202 38 76
İnternet Adresi :http://etikkomisyon.gazi.edu.tr/

Bilgi için :Ayfer Çekmez
Genel Evrak Sorumlusu
Telefon No:202 18 07

Gazili Olmak Ayrıcalıktır…