

**BAZI EVREN MODELLERİ İÇİN MAXWELL ve FOTON
DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ve BU ÇÖZÜMLERİN
EŞDEĞERLİLİĞİNİN TARTIŞILMASI**

OKTAY AYDOĞDU

**Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü**

Fizik Ana Bilim Dalı

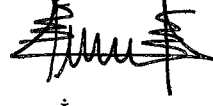
YÜKSEK LİSANS TEZİ

155013

**Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Ali HAVARE**

**MERSİN
OCAK - 2004**

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi ~~gerekli~~ (oy birliği) ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.



İmza

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Ali HAVARE



İmza

Jüri Üyesi
Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK



İmza

Jüri Üyesi
Yrd. Doç. Dr. Serbüent YILDIRIM

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun 04./08./2004.. tarih ve 2004.18./280.. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TÜRHAN
Enstitü Müdürü



Not: Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu Hükümlerine tabidir.

ÖZ

Uzay-zaman geometrisinin parçacığın dinamiğini nasıl etkilediğini incelemek için, eğri uzay-zamanda skaler ve vektör parçacıkların görelî dalga denklemleri çözüldü. Bu bağlamda, kütleli spin-1 parçacıkları için, eğri uzay-zamana genelleştirilmiş dalga denklemi son yıllarda yazılmış ve bu denklemin araştırılmasıyla da açık bir araştırma alanı oluşturulmuştur.

Bu çalışmada; durağan Kantowski-Sachs, sabit hızla genişleyen Robertson-Walker ve sabit hızla dönen Som-Raychaudhuri, Hoenselaers-Vishveshwara ve Rebouças evrenleri için foton (mDKP) denklemiyle Maxwell denklemlerinin eşdeğerliliği gösterilmiş ve bu denklemler çözülmüştür. Ayrıca elde edilen her bir çözüm için harmonik davranış aralıkları bulunmuştur. Son olarak, çözümlerin sonlu olabilmeleri için gerekli olan koşul kullanılarak, her bir evren modeli için fotonun enerji spektrumunu veren bağıntı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Spin-1, kütleli parçacık denklemi; durağan, genişleyen ve dönen evren modelleri

ABSTRACT

In order to understand how the geometry of space-time effects the dynamics of relativistic particles one has to solve the corresponding wave equations for scalar and vector particles in curved space-time. The wave equation of photon in curved space-time is recently proposed and it is an active area of investigation.

In this work the exact solutions of photon equation are obtained for stationary Kantowski-Sachs universe, for Robertson-Walker universe which is expanded with constant velocity, for Som-Raychaudhuri, Hoenselaers-Vishveshwara and Rebouças universes which are rotated with constant velocity. The equivalence of these solutions with solutions of Maxwell equations are also shown. In addition, for each solution the harmonic behavior region is found. Finally the energy spectrum is obtained for each universe model using the necessary boundary conditions.

Key Words: Spin-1 massless particle equation, stationary, expanding and rotating universe models.

TEŞEKKÜR

Tez çalıŐmasının bazı aŐamalarında önerilerinden ve tartıŐmalarından yararlandığım Sayın Taylan YETKİN, Sayın Kenan SÖĐÖT, Sayın Murat KORUNUR ve Sayın Mustafa SALTI'ya ve tez konusunun belirlenmesinde ve bu çalışmanın her aŐamasında bana yardım eden ve özveride bulunan değerli hocam ve danıŐmanım Yrd. Doç. Dr. Ali HAVARE'ye ve ayrıca Fizik Bölümünün tüm öğretim elemanlarına teşekkür etmeyi kendime bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI.....	5
2.1 BAZI DÖNEN EVREN MODELLERİNDE KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜ.....	7
2.1.1 Eğri Uzay-Zamanda Klein-Gordon Denklemi.....	7
2.1.2 Som-Raychaudhuri Evreninde Klein-Gordon Denklemine Tam Çözümü.....	7
2.1.3 Hoenselaers-Vishveshwara Evreninde Klein-Gordon Denkleminin Tam Çözümü.....	11
2.1.4 Rebouças Evreninde Klein-Gordon Denklemine Tam Çözümü....	14
2.2 EĞRİ UZAY-ZAMANDA WEYL DENKLEMİ.....	17
2.2.1 Som-Raychaudhuri Evreninde Weyl Denklemine Tam Çözümü...18	
2.2.2 Hoenselaers-Vishveshwara Evreninde Weyl Denklemine Tam Çözümü.....	21
2.2.3 Rebouças Evreninde Weyl Denklemine Tam Çözümü.....	24

3. MATERYAL VE METOT.....	28
3.1 BIANCHI III TİPİ UZAY-ZAMANLARDA mDKP DENKLEMİ VE MAXWELL DENKLEMLERİ.....	28
3.1.1 mDKP Denkleminin Çözümü.....	31
3.1.2 Maxwell Denklemlerinin Çözümü.....	35
4. BULGULAR VE TARTIŞMASI.....	40
4.1 BAZI EVREN MODELLERİ İÇİN mDKP DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	40
4.1.1 Robertson-Walker Evreninde mDKP denkleminin Çözümü.....	40
4.1.2 Kantowski-Sachs Evreninde mDKP Denkleminin Çözümü.....	43
4.1.3 Som-Raychaudhuri Evreninde mDKP Denkleminin Tam Çözümü.....	47
4.1.4 Hoenselaers-Vishveshwara Evreninde Foton Denkleminin Tam Çözümü.....	51
4.1.5 Rebouças Evreninde mDKP Denkleminin Tam Çözümleri.....	55
4.2 BAZI DÖNEN EVRENLERDE MAXWELL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.....	60
4.2.1 Robertson-Walker Evreninde Maxwell Denklemlerinin Çözümü...60	
4.2.2 Kantowski-Sachs Evreninde Maxwell Denklemlerinin Çözümü...63	
4.2.3 Som-Raychaudhuri Evreninde Maxwell Denklemlerinin Çözümü.66	
4.2.4 Hoenselaers-Vishveshwara Evreninde Maxwell Denklemlerinin Çözümü.....	69
4.2.5 Rebouças Evreninde Maxwell Denklemlerinin Tam Çözümü.....72	

4.3 TARTIŞMALAR.....	75
4.3.1 Robertson-Walker Evreni İçin Çözümün İncelenmesi.....	75
4.3.2 Kantowski-Sachs Evreni İçin Çözümün İncelenmesi.....	76
4.3.3 Som-Raychaudhuri Evreni İçin Çözümün İncelenmesi.....	79
4.3.4 Hoenselaers-Vishveshwara Evreni İçin Çözümün İncelenmesi.....	81
4.3.5 Rebouças Evreni İçin Çözümün İncelenmesi.....	84
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	87
KAYNAKLAR.....	89
ÖZGEÇMİŞ.....	94

ÇİZELGELER DİZİNİ

ÇİZELGE	Sayfa
Çizelge 1. RW evreninde çözümlerin frekans aralığının gösterimi.....	76
Çizelge 2. KS evreninde $\sin x \rightarrow \pm 1$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi.....	77
Çizelge 3. KS evreninde $-1 < \sin x < 1$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi.....	78
Çizelge 4. SR evreninde $0 < u < \infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi.....	80
Çizelge 5. HV evreninde $\sinh r \rightarrow \pm\infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi.....	82
Çizelge 6. HV evreninde $-\infty < r < \infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi.....	83
Çizelge 7. R evreninde $\sinh r \rightarrow \pm\infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi.....	85
Çizelge 8. R evreninde $-\infty < r < \infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi.....	86

SİMGELER VE KISALTMALAR

$R_{\mu\nu}$: Riemann tensörü
R	: Ricci skaleri
$g_{\mu\nu}$: Metric tensör
$T_{\mu\nu}$: Enerji-momentum tensörü
θ^i	: Temel 1-formlar
w^i_j	: 1-formlar
Ω^i_j	: 2-formlar
Ψ	: Dalga fonksiyonu
$F^{\mu\nu}$: Kontravaryant alan tensörü
$F_{\mu\nu}$: Kovaryant alan tensörü
γ^α	: 4×4 Eğri uzay-zaman Dirac matrisleri
$\tilde{\gamma}^{(i)}$: 4×4 Düz uzay-zaman Dirac matrisleri
β^μ	: 16×16 Eğri uzay-zaman Kemmer matrisleri
$\tilde{\beta}^{(i)}$: 16×16 Düz uzay-zaman Kemmer matrisleri
σ^μ	: 2×2 Eğri uzay-zaman Pauli matrisleri
$\tilde{\sigma}^{(i)}$: 2×2 Düz uzay-zaman Pauli matrisleri
$e_{(i)}^\alpha$: Tetratlar
Γ_μ	: Spin bağlantı katsayıları
$\Gamma_{\nu\mu}^\alpha$: Christoffel sembolleri
χ	: Evrensel sabit
RW	: Robertson-Walker
KS	: Kantowski-Sachs
SR	: Som-Raychaudhuri
HV	: Hoenselaers-Visveshwara
R	: Rebouças
mDKP	: Kütleli Duffin-Kemmer-Petiau

1. GİRİŞ

20. yüzyılın başına kadar Newton yasalarının desteklediği güneş merkezli evren modeli tamamen benimsenmişken, Einstein'ın 1905-1920 yılları arasında ortaya koyduğu Özel ve Genel görelilik kuramlarıyla birlikte bu model ciddi anlamda sorgulanmış ve en kısa zamanda terk edilmiştir. Genel görelilik kuramının varlığıyla Evrenbilim de tamamen yön değiştirmek durumunda kalmıştır. Güneş merkezli ve durağan kabul edilen evren için artık yeni bir tanımlama gerekmektedir. Çünkü, evren ne güneş merkezliydi ne de durağandı.

Evrenbilim, önceleri sadece evrendeki madde dağılımı ve bu dağılımın yapısıyla ilgilenmekteydi. Einstein'ın genel görelilik kuramı ve alan denklemlerinin ortaya çıkmasıyla birlikte, evrenin geometrik yapısı ve boyutlarının araştırılması söz konusu olmuştur. Bu bağlamda genel görelilik ve Evrenbilim ortak alanda varlıklarını devam ettirmek durumunda kalmışlardır.

Einstein alan denklemleri

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

biçiminde verilir. Burada $R_{\mu\nu}$, Riemann tensörü; R , Ricci skaleri; $g_{\mu\nu}$, metrik tensörü; $T_{\mu\nu}$, enerji-momentum tensörü ve χ , evrensel sabit ($\chi = \frac{8\pi G}{c^4} = 2.073 \times 10^{-48}$ (c.g.s)) dir. Denklem(1)'in sol tarafı evrenin geometrik yapısını, sağ tarafı ise madde dağılımını betimler.

Evrenin ilk, şimdiki ve gelecek anlarını anlamak için çok sayıda evren modelleri önerilmiştir. Günümüzde, klasik evren modelleri ve görelî evren modelleri olmak üzere iki tür evren modeli tanımlanmaktadır. Klasik evren modelleri, Newton yasalarına göre yazılmış olup türdeş ve durağan bir evreni betimlerler. Evrenin türdeş ve durağan olması bizi iki sonuca götürür: Birincisi, uzay'ın sonlu olması

durumunda, evrenin tüm maddesinin uzayın merkezinde birikmesidir. İkincisi ise, uzayın sonsuz olması durumunda, evren sonsuz olup durağan ve uzaya türdeş olarak yayılan yıldızlardan oluşmasıdır. Yapılan gözlemler sonucunda her iki durumun doğru olmadığı anlaşılmıştır.

Görelî evren modelleri ise durağan ve durağan olmayan modelleri içermektedir. Bu tür modellerde evren genellikle kusursuz bir akışkan (etkileşmelerin yok sayıldığı) veya tozsu (zerre) parçacık yada ışınımca baskın veya boş olduğu varsayılır. Bu alanda bir çok evren modeli yazılmıştır [1-11]. Einstein, de Sitter, Robertson-Walker-Friedmann, Schwarzschild ve Gödel evren modelleri, görelî evren modellerinin ilk örnekleridir. Bu evren modellerini, genel olarak, türdeş ve genişleyen Friedmann evrenleri ve kararlı ve karasız dönen Gödel evrenleri olmak üzere iki grupta toplamak mümkündür.

Tarihsel gelişmede, kozmik dönme içeren evren modellerine karşı yapılan tartışmalarda bir çok zorluklar ortaya çıkmıştır. Sorunlu olanlardan biri kararlı Gödel modelidir. Evrenin gözlemlenebilir genişlemesi, genellikle uzak galaksilerin spektrumlarındaki kırmızıya kaymayla ilişkilidir ve bu nedenle bütün standart evren modelleri kararlı olmamalıdır. Süper akışkan gibi basit fiziksel bir madde kaynağı için, genel görelî alan denklemlerinde, dönme ve genişlemenin birlikte var olabileceği gösterilmesi, gerçek Evrenbilime doğru atılmış önemli bir adım olmuştur [12-14].

Eğri uzay-zamanlarda kuantum etkilerini incelemek için tek parçacık durumlarının dikkatli bir şekilde incelenmesi gerekir. Bunun için eğri uzay-zamanlarda görelî dalga denkleminin tam çözümleri bulunarak, parçacığı kuantum mekaniksel olarak betimleyen dalga fonksiyonu bulunmalıdır.

1946'da Gamov, galaksilerin oluşum kuramında dönen galaksilerin genişlemesi için kozmik dönmenin önemini ortaya koymuştur [15]. 1949 yılında Kurt Gödel, Einstein denklemlerini evren sabitini ihmal etmeden tekrar çözmüştür [16]. Bu çözüm, o zamana kadar yapılan çalışmalardan daha karmaşık çözümler

içermektedir. Gödel evreninde dönmenin etkilerini incelemek için, önce parçacıkların dalga fonksiyonları bulunur, sonra bu dalga fonksiyonlarına kuantum mekaniğinde bilinen yöntemlerle fiziksel anlam kazandırılır ve parçacığı betimleyen fiziksel niceliklere kuantum etkilerinden gelen katkılar hesaplanarak yapılır. Bu model, çok uzun yıllar, dönen evren modellerini çalışmak için kuramsal bir laboratuvar oluşturmuştur [17-20].

Bu çalışmada dinamiği tartışılan spin-1 parçacığını betimleyen Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi,

$$(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\Psi(x, t) = 0 \quad (1.2)$$

biçiminde verilir. Denklem(2)'teki 16×16 lık olan β^μ matrisleri

$$\beta^\mu(x) = \gamma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \gamma^\mu(x) \quad (1.3)$$

şeklinde 4×4 'lük Dirac gamma matrislerinin 4×4 'lük birim matrisleriyle doğrudan çarpımıyla elde edilir. Eğri uzay-zamandan gelen katkılarla birlikte türev,

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Omega_\mu \quad (1.4)$$

biçimindedir. Denklem(2) kütleinin sıfır olması durumunda,

$$\beta^\mu \nabla_\mu \Psi(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

4×4 'lük bir denkleme indirgenir. Bu denklemdeki β^μ denklem(3)'den farklı olarak, $\sigma^\mu = (I, \vec{\sigma})$ olmak üzere

$$\beta^\mu(x) = \sigma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \sigma^\mu(x) \quad (1.6)$$

biçiminde 2×2 'lik Pauli matrisleri cinsinden yazılan 4×4 'lük bir matristir. Denklem(5)'deki ∇_μ ise

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Sigma_\mu \quad (1.7)$$

olarak verilen kovaryant türevdir. Denklem(4) ile Denklem(7)'deki Ω_μ ile Σ_μ terimleri, parçacığın spiniyle uzay-zamanın etkileşmesini betimlemektedir.

Bu çalışmanın amacı, kütesiz, spin-1 parçacığı(foton) için önerilen ve eğri uzay-zamana genişletilmiş olan kütesiz Duffin-Kemmer-Petiau (mDKP) denkleminin Robertson-Walker (RW), Kantowski-Sachs (KS), Som-Raychaudhuri (SR), Hoenselaers-Vishveshwara (HV) ve Rebouças (R) evren modelleri için çözümlerini yapmak ve bu çözümleri aynı evren modelleri için çözülen Maxwell denklemlerinin çözümleriyle eşdeğer olduğunu göstermektir.

Bu çalışmanın içeriği şu şekilde düzenlenmiştir: Kaynak araştırması kısmında spin-0 ve spin-1/2 parçacıkları için, Som-Raychaudhuri, Hoenselaers-Vishveshwara ve Rebouças metrikleri için Klein-Gordon ve Weyl denklemlerinin çözümleri verilmiştir; Materyal ve Metot kısmında Bianchi III tipi metrik için mDKP denklemi ile Maxwell denklemlerinin eşdeğerliliği gösterilmiştir; Bulgular ve Tartışmalar kısmında Kantowski-Sachs (yöndeş olmayan, türdeş ve durağan), Robertson-Walker (yöndeş, türdeş ve genişleyen), Som-Raychaudhuri (yöndeş olmayan, türdeş ve dönen), Hoenselaers-Vishveshwara (yöndeş olmayan, türdeş ve dönen) ve Rebouças (yöndeş olmayan, türdeş ve dönen) evren modelleri için mDKP denklemi ve Maxwell denklemlerinin eşdeğerliliklerinin gösterilmesinin yanı sıra çözümleri de yapılmıştır ve son olarak Sonuçlar ve Öneriler kısmında ise elde edilen sonuçlar tartışılmış ve daha sonraki çalışmalara ışık tutacak öneriler sunulmuştur.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Eğri uzay-zamanda Kuantum Alan Kuramı, mikro parçacıklar dünyasında kütle çekiminin etkilerini araştırmak için önemli bir rol oynadığından beri, kuramsal fiziğin en ilginç alanlarından biri olmuştur. Gerçek fiziksel evreni anlayabilmek ve evren içindeki parçacıkların dinamiğini tartışabilmek için hem Einstein hem de kuantum alan denklemlerinin çözümlerinin yorumlanması gereksinimi ortaya çıkmıştır. Düz uzay-zamanda görelilik kuantum mekaniğinin alan denklemlerinden, genel görelilik kuantum alan denklemlerine kovaryans ilkesi ve tetrad formalizmi kullanılarak geçilir [21-30]. Kütle çekimsel etkilerin atomik boyutta zayıf olmasından dolayı bu etkilerin genel görelilik dalga denklemlerinde yazılması gerekmeyebilir fakat, birçok astrofiziksel durumlarda kütle çekimsel etkiler önemli rol oynar. Bu nedenle bu etkiler genel görelilik dalga denklemlerinin içinde yer almalıdır. Kütle çekimsel etkilerin en çok büyüyen yönlerinden biri de parçacık yaratma sürecindeki rolüdür [31-33]. Buna örnek olarak kara deliklerin parçacık yaratması verilebilir [34,35]. Eğri uzay-zamanda Kuantum Alan Kuramının tutarlı bir kuram olabilmesi için tek parçacık durumlarının çözümlenmesi ve anlaşılması gerekir. Bu nedenle bu alanda yapılan çalışmalar verilen bir ardalana için yarı-klasik denklem olan Hamilton-Jakobi, kuantum mekaniksel olarak kütleli spin-0 parçacığını betimleyen Klein-Gordon, kütleli spin-1/2 parçacığını betimleyen Weyl, kütleli ve spin-1/2 parçacığı betimleyen Dirac denklemlerinin, özel metrikler için çözümleri üzerinde yoğunlaşmaktadır [36-50]. Ayrıca klasik elektromanyetik dalgaları ifade eden Maxwell denklemlerinin yine bu özel metrikler için çözümleri üzerinde çalışmalar söz konusu olmuştur [51-53]. Son birkaç yıldır, kütleli spin-1 parçacığı tanımlayan Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin kütleli limitinde yazılan ve kütleli spin-1 parçacık olan fotonu betimleyen denklem üzerinde çalışmalar yapılmaktadır [54,55].

Duffin, Kemmer ve Petiau, kütleli spin-1 parçacıklar için dalga denklemini formüle etmişlerdir [56]. Duffin, Kemmer ve Petiau, ilk önce Klein-Gordon ve Proca alanlarının Dirac alanları gibi matris biçiminde temsil edilebileceklerini göstermişlerdir. Dört boyutlu düz uzayda betimlenen $[i\beta^{(j)}\partial_{(j)} - m]\Psi = 0$

($j = 0,1,2,3$) denklemi, bozonlar için, diğer görelî dalga denklemlerinin tersine, spin-0 ve spin-1 bozonlarını temsil eden birinci mertebeden denklemdir. Son zamanlarda, Kuantum Renk Dinamiği için Duffin, Kemmer ve Petiau kuramının uygulamaları Gribov tarafından göz önüne alınmıştır [57]. Genel görelî Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin (DKP) çalışma çerçevesi Red'kov ve Lunardi tarafından eğri uzay-zamana uygun hale getirilmiştir [58,59]. DKP denkleminin eğri uzay-zamana genelleştirilmesiyle eğri ardalanlarda bozonların davranışını incelemek önemli duruma gelmiştir.

Genel görelî kuantum mekaniğinde Maxwell denklemlerinin karşılığı Elektromanyetik alan kuvvetleri ile DKP'nin bileşenleri, uygun tanımlama ile DKP'nin sıfır kütle limiti olarak elde edilmektedir. Son yıllarda düz uzay-zamanda kütesiz spin-1 parçacığın dalga denklemi ile serbest uzaydaki Maxwell denklemlerinin eşdeğerliliği gösterilmiştir [60]. Bunu izleyen çalışmalarda, küresel koordinatlarda yazılan Robertson-Walker uzay-zamanında genel görelî kütesiz DKP denklemi çözülmüştür [61]. Aynı teknik kullanılarak mDKP denkleminin, kararlı Gödel ve Gödel tipi uzay-zamanlar için çözümleri elde edilmiştir [62]. Bu teknikte Kemmer matrisleri, Pauli spin matrisleri ile birim matrisin dolaysız çarpımının sonucu olan 4×4 'lük matrislerdir. Bu gösterim, elektrik ve manyetik alanların karmal(kompleks) birleşimiyle ilişkili spinörün tanımlanmasına ortam oluşturur. mDKP denkleminin kullanılmasındaki en önemli avantajlarından biri 4×4 'lük matris biçimindeki denklemleri çözme işlemi, Maxwell denklemlerini çözme işlemiyle karşılaştırıldığında daha basit olmasıdır. Bunun yanında kuantum mekaniksel çözüm, elektromanyetik alanların dalga-parçacık ikilisini tartışmak için önemli rol oynamaktadır. Çünkü elektromanyetik alanda doğal parçacık sadece kuantum mekaniksel denklemlerle betimlenebilir.

Bu kısımda, yapılan araştırmalar sonucunda tez konusuyla doğrudan bağlantılı olan çalışmaların bir özeti verilmektedir. Bu özet şu şekilde düzenlenmiştir: birinci kesimde SR, HV ve R dönen evren modelleri için Klein-Gordon denklemlerinin tam çözümleri elde edilmektedir. İkinci kesimde ise aynı evren modelleri için Weyl denklemlerinin tam çözümleri verilmektedir.

2.1 BAZI DÖNEN EVREN MODELLERİNDE KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜ

2.1.1 Eğri Uzay-Zamanda Klein-Gordon Denklemi

Klein-Gordon denklemi kuantum mekaniksel anlamda, görelî ve spinsiz parçacıkları betimler. Bu denklemin, dört boyutlu düz (Minkowski) uzay-zamanda, hem serbest hem de bazı potansiyeller altındaki çözümleri yarı klasik parçacığın davranışını verir. Eğri uzay-zamana genelleştirilmiş Klein-Gordon denkleminin çözümleri ise dört boyutlu eğrisel (Riemann) uzay-zaman içindeki yarı klasik parçacığın hareketi için bazı sonuçlar verir. Bu denklem

$$(-\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha} + \xi R + m^2)\Psi = 0 \quad (2.1)$$

biçiminde olup, burada ξ , gerçel boyutsuz çiftlenim sabiti; m , parçacığın kütlesi ve $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, Riemann skaleridir ($R_{\mu\nu}$, Riemann tensörüdür).

2.1.2 Som-Raychaudhuri Evreninde Klein-Gordon Denkleminin Tam Çözümü

SR evren modeli

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2r^2 d\phi dt - r^2(1-r^2)d\phi^2 \quad (2.2)$$

metriği ile betimlenir. Buradaki işaret anlaşması

$$g_{ij} = \text{diag}\{-1,-1,-1,+1\} \quad (2.3)$$

şeklindedir. Ricci skalerini hesaplamak için gerekli olan temel 1-formlar

$$\theta^1 = dr \quad \theta^2 = rd\phi \quad \theta^3 = dz \quad \theta^0 = dt + r^2 d\phi \quad (2.4)$$

ile verilir. Denklem(2.4)'de verilen temel 1-formların dış türevleri alınarak ve birinci yapı denklemi olan

$$d\theta^i = -w_j^i \wedge \theta^j \quad (2.5)$$

ifadesi kullanılarak 1-formlar için aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$w_{12}^1 = \theta^0 - \left(\frac{1}{r}\right)\theta^2 = -w_{21}^1 \quad (2.6a)$$

$$w_{01}^0 = \theta^2 = w_{10}^0 \quad (2.6b)$$

$$w_{02}^0 = -\theta^1 = -w_{20}^0 \quad (2.6c)$$

İkinci yapı denklemi olarak bilinen

$$\Omega^i_j = dw^i_j + w^i_k \wedge w^k_j \quad (2.7)$$

ifade kullanılarak 2-formlar

$$\Omega^1_2 = 3\theta^1 \wedge \theta^2 = -\Omega^{12} \quad (2.8a)$$

$$\Omega^0_1 = \theta^1 \wedge \theta^0 = -\Omega^{01} \quad (2.8b)$$

$$\Omega^0_2 = \theta^2 \wedge \theta^0 = -\Omega^{02} \quad (2.8c)$$

biçiminde bulunur. İkinci yapı bağıntısının Riemann tensörü cinsinden

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l \quad (2.9)$$

şeklinde verilen ifadesi kullanılarak Riemann tensörlerinin sıfırdan farklı bileşenleri

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = 2 \quad (2.10)$$

olarak elde edilir ve bu bileşenler kullanılarak Ricci skaleri için

$$R = -2 \quad (2.11)$$

değeri bulunur.

Denklem(2.8a)-(2.8c), denklem(2.10) ve denklem(2.11) kullanılarak (2.1) denklemi

$$\left[(1-r^2)\partial_u^2 - \partial_{rr}^2 - \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi}^2 - \partial_{zz}^2 + 2\partial_{\phi z}^2 - \frac{1}{r}\partial_r - p^2 \right] \Psi = 0 \quad (2.12)$$

biçimine dönüştür. Burada $p^2 = m^2 - 2\xi$ dir. Dalga fonksiyonu

$$\Psi = e^{i(wt+l\phi+kz)} R(r) \quad (l, w \text{ ve } k \text{ sabit}) \quad (2.13)$$

olarak tanımlanırsa denklem(2.13),

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left[-\frac{l^2}{r^2} - r^2w^2 + \lambda^2 \right] R(r) = 0 \quad (2.14)$$

biçimini alır. Burada $\lambda^2 = w^2 - k^2 + 2wl + m^2 - 2\xi$ dir. Denklem(2.15) için, sırasıyla

$$R(r) = y^{l/2} e^{-y/2} F(y) \quad (2.15)$$

$$y = wr^2 \quad (2.16)$$

dönüşümleri yapılır ve biraz cebirsel işlemten sonra

$$yF'' + [(l+1) - y]F' - \left[\frac{1+l}{2} - \frac{\lambda^2}{4w} \right] F = 0 \quad (2.17)$$

denklemini elde edilir. Denklem(2.17), yapı olarak hipergeometrik(dejenere) denkleme benzediğinden dolayı, bu denklemin aşağıda verilen iki bağımsız çözümü olur:

$$F_1 = {}_1F_1(b, c, y) \quad (2.18a)$$

$$F_2 = y^{1-c} {}_1F_1[(1+b-c), 2-c, y] \quad (2.18b)$$

Burada

$$b = \frac{1+l}{2} - \frac{\lambda^2}{4w} \quad (2.19a)$$

ve

$$c = 1+l \quad (2.19b)$$

dir. Denklem(2.17)'nin asimptotik davranışını veren kapalı biçimdeki tam çözümü $r \rightarrow \pm \infty$ (veya $y \rightarrow \infty$)'da

$$U(b, c, y) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+b-c)} {}_1F_1(b, c, y) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(b)} {}_1F_1[(1+b-c), 2-c, y] \quad (2.20)$$

biçimindedir.

2.1.3 Hoenselaers-Vishveshwara Evreninde Klein-Gordon Denkleminin Tam Çözümü

Hoenselaers-Vishveshwara(HV) evren modeli

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + \frac{1}{2}(c-1)(c-3)d\phi^2 + 2(c-1)d\phi dt \quad (2.21)$$

şeklinde verilen metrik ile betimlenir. Burada $c = \cosh r$ dir. Ricci skalerini hesaplamak için aşağıdaki temel 1-formları göz önüne alınmıştır:

$$\theta^1 = dr \quad \theta^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r d\phi \quad \theta^3 = dz \quad \theta^0 = dt + (\cosh r - 1)d\phi \quad (2.22)$$

2.1.1 kesiminde verilen teknik kullanılarak, 1-formlar

$$w^1_2 = (\sqrt{2}/2)\theta^0 - \coth r \theta^2 = -w^2_1 \quad (2.23a)$$

$$w^0_1 = (\sqrt{2}/2)\theta^2 = w^1_0 \quad (2.23b)$$

$$w^0_2 = -(\sqrt{2}/2)\theta^1 = w^2_0 \quad (2.23c)$$

2-formlar

$$\Omega^1_2 = (1/2)\theta^1 \wedge \theta^2 = -\Omega^{12} \quad (2.24a)$$

$$\Omega^0_1 = (1/2)\theta^1 \wedge \theta^0 = -\Omega^{01} \quad (2.24b)$$

$$\Omega^0_2 = (1/2)\theta^2 \wedge \theta^0 = -\Omega^{02} \quad (2.24c)$$

Riemann tensörünün sıfırdan farklı bileşeni

$$R_{00} = 1 \quad (2.25)$$

ve Ricci skaleri

$$R = 1 \quad (2.26)$$

biçiminde elde edilir.

Denklem(2.23a)-(2.23c), denklem(2.24a)-(2.24c) ve denklem(2.26)'da verilen bağıntılar denklem(2.1)'de yerine konularak

$$\left[\frac{\cosh r - 3}{\cosh r + 1} \partial_u^2 + \partial_{rr}^2 + \frac{2}{\sinh^2 r} \partial_{\phi\phi}^2 + \partial_{zz}^2 - \frac{4}{\cosh r + 1} \partial_{\phi t}^2 - \left(\frac{1}{\sinh r} + (\cosh r + 1)^{1/2} \right) \partial_r + \mu^2 \right] \Psi = 0 \quad (2.27)$$

denklemini elde edilir. Burada $\mu^2 = m^2 + \xi$ dir. Dalga fonksiyonu

$$\Psi = e^{i(wt+l\phi+kz)} R(r) \quad (l, w \text{ ve } k \text{ sabit}) \quad (2.28)$$

olarak tanımlanırsa, denklem(2.27)

$$R''(r) + \coth r R'(r) + [A_1 + A_2 \coth r \csc hr + A_3 \csc h^2 r] R(r) = 0 \quad (2.29)$$

biçimini alır. Burada

$$A_1 = m^2 + \xi - w^2 - k^2 \quad (2.30a)$$

$$A_2 = 4w(w + l) \quad (2.30b)$$

ve

$$A_3 = -4\left(\frac{l^2}{2} + wl + w^2\right) \quad (2.30c)$$

dir. Denklem(2.29) için, sırasıyla

$$R(r) = y^{m+n} (1-y)^n U(y) \quad (2.31)$$

$$y = (1 + \cosh r)/2 \quad m = -l/\sqrt{2} \quad n = -\sqrt{2}w \quad (2.32)$$

biçiminde tanımlanan dönüşümler kullanılır ve sonra biraz cebir yapılırsa Gauss hipergeometrik denklemi olarak bilinen aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} y(1-y)U''(y) + \left[(1 + \sqrt{2}l - 2\sqrt{2}w) - (2 - 2\sqrt{2}l - 2\sqrt{2}w)y \right] U'(y) \\ - \left[2l^2 + w^2 + 4wl - \sqrt{2}l - \sqrt{2}w - k^2 + m^2 + \xi \right] U(y) = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Denklem(2.33)'ün

$$U_1 = {}_2F_1(a', b'; a' + b' - c' + 1; 1-y) \quad (2.34a)$$

$$U_2 = (1-y)^{-a'-b'+c'} {}_2F_1(c' - a', c' - b'; c' - a' - b' + 1; 1-y) \quad (2.34b)$$

biçiminde iki bağımsız çözümü vardır. Burada

$$a' = \frac{1}{2} \left[1 - 2\sqrt{2}l - 2\sqrt{2}w + \sqrt{1 + 4w^2 + 4k^2 - 4\mu^2} \right] \quad (2.35a)$$

$$b' = \frac{1}{2} \left[1 - 2\sqrt{2}l - 2\sqrt{2}w - \sqrt{1 + 4w^2 + 4k^2 - 4\mu^2} \right] \quad (2.35b)$$

ve

$$c' = 1 - 2\sqrt{2}l - 2\sqrt{2}w \quad (2.35c)$$

dır. Denklem(2.33)'ün $r \rightarrow \pm\infty$ (veya $y \rightarrow \infty$)'daki kapalı biçimdeki tam çözümü

$$\begin{aligned} F(a', b', c', y) &= \frac{\Gamma(c')\Gamma(c' - a' - b')}{\Gamma(c' - a')\Gamma(c' - b')} F(a', b', a' + b' - c' + 1; 1 - y) \\ &+ (1 - y)^{c' - a' - b'} \frac{\Gamma(c')\Gamma(a' + b' - c')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} F(c' - a', c' - b', c' - a' - b' + 1; 1 - y) \end{aligned} \quad (2.36)$$

ile verilir.

2.1.4 Rebouças Evreninde Klein-Gordon Denkleminin Tam Çözümü

Rebouças(R) evren modeli

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + (3 \cosh^2 2r + 1)d\phi^2 + 4 \cosh 2rd\phi dt \quad (2.37)$$

şeklinde verilen metrik ile betimlenir. Ricci skalerini hesaplamak için aşağıdaki temel 1-formları göz önüne alınmıştır.

$$\theta^1 = dr \quad \theta^2 = \sinh 2rd\phi \quad \theta^3 = dz \quad \theta^0 = dt + 2 \cosh 2rd\phi \quad (2.38)$$

2.1.1 kesiminde verilen teknik kullanılarak 1-formlar

$$w^1_2 = 2\theta^0 - 2 \coth 2r\theta^2 = -w^2_1 \quad (2.39a)$$

$$w^0_1 = 2\theta^2 = w^1_0 \quad (2.39b)$$

$$w^0_2 = -2\theta^1 = w^2_0 \quad (2.39c)$$

2-formlar

$$\Omega^1_2 = 8\theta^1 \wedge \theta^2 = -\Omega^{12} \quad (2.40a)$$

$$\Omega^0_1 = 4\theta^1 \wedge \theta^0 = -\Omega^{01} \quad (2.40b)$$

$$\Omega^0_2 = 4\theta^2 \wedge \theta^0 = -\Omega^{02} \quad (2.40c)$$

Riemann tensörleri,

$$R_{00} = 8 \quad R_{11} = 4 \quad R_{22} = 4 \quad (2.41)$$

ve Ricci skaleri

$$R = 0 \quad (2.42)$$

bulunur.

Denklem(2.39a)-(2.39c), denklem(2.40a)-(2.40c) ve denklem(2.42)'de verilen bağıntılar kullanılarak denklem(2.1)

$$\left[\frac{3 \cosh^2 2r + 1}{\sinh^2 2r} \partial_u^2 + \partial_r^2 + \frac{1}{\sinh^2 2r} \partial_{\phi\phi}^2 + \partial_{zz}^2 - \frac{4 \cosh 2r}{\sinh^2 2r} \partial_{\phi t}^2 + 2 \coth 2r \partial_r + m^2 \right] \Psi = 0 \quad (2.43)$$

biçimine dönüşür. Dalga fonksiyonu

$$\Psi = e^{i(wt+l\phi+kz)} R(r) \quad (l, w \text{ ve } k \text{ sabit}) \quad (2.44)$$

olarak tanımlanırsa, denklem(2.43),

$$R''(r) + 2 \coth 2r R'(r) + [A_1 + A_2 \coth 2r \csc h 2r + A_3 \csc h^2 2r] R(r) = 0 \quad (2.45)$$

biçimini alır. Burada

$$A_1 = m^2 - 3w^2 - k^2 \quad (2.46a)$$

$$A_2 = 4wl \quad (2.46b)$$

ve

$$A_3 = -4\left(\frac{l^2}{4} + w^2\right) \quad (2.46c)$$

dir. Denklem(2.45) için, sırasıyla

$$R(r) = y^p (1-y)^q U(y) \quad (2.47a)$$

$$y = (1 + \cosh 2r)/2 \quad p = -\frac{w}{2} - \frac{l}{4} \quad q = -\frac{w}{2} + \frac{l}{4} \quad (2.47b)$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler kullanılarak ve biraz cebir yapılarak aşağıda verilen Gauss hipergeometrik denklemi elde edilir:

$$y(1-y)U''(y) + [(1-l/2-w) - (2-2w)y]U'(y) \quad (2.48)$$

$$-\frac{1}{4}[w^2 - 4w - k^2 + m^2]U(y) = 0$$

Denklem(2.48)'in

$$U_1 = {}_2F_1(b, c; b + c - d + 1; 1 - y) \quad (2.49a)$$

$$U_2 = (1 - y)^{d-b-c} {}_2F_1(d - b, d - c, d - c - b + 1; 1 - y) \quad (2.49b)$$

biçiminde verilen iki bağımsız çözümü vardır. Burada

$$b = \frac{1}{2} \left[1 - 2w + \sqrt{1 + 3w^2 + k^2 - m^2} \right] \quad (2.50a)$$

$$c = \frac{1}{2} \left[1 - 2w - \sqrt{1 + 3w^2 + k^2 - m^2} \right] \quad (2.50b)$$

ve

$$d = 1 - w - l/2 \quad (2.50c)$$

dir. Denklem(2.48)'in $r \rightarrow \pm\infty$ (veya $y \rightarrow \infty$)'daki kapalı biçimdeki tam çözümü

$$F(b, c, d, y) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(d-b-c)}{\Gamma(d-c)\Gamma(d-b)} {}_2F_1(b, c; b + c - d + 1; 1 - y) \quad (2.51)$$

$$+ \frac{\Gamma(d)\Gamma(b+c-d)}{\Gamma(c)\Gamma(b)} (1-y)^{d-b-c} {}_2F_1(d-b, d-c, d-c-b+1; 1-y)$$

ile verilir.

2.2 EĞRİ UZAY-ZAMANDA WEYL DENKLEMİ

Dirac denkleminde kütle limit durumunda sifıra gitmesiyle elde edilen Weyl denklemi kütlelessiz, spin-1/2 parçacıkları temsil eder. Eğri uzay-zamanda Weyl denklemi, $(1 + \gamma^5)\Psi = 0$ Chirality koşulu ile birlikte

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \Psi = 0 \quad (2.52)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ve $\nabla_\alpha = \partial_\alpha + \frac{1}{4} \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} e_{(a)\nu}{}^\alpha e_{(b)\nu}{}^\alpha$ dır. Genelleştirilmiş Dirac matrislerinin (γ^α) düz uzay-zamandaki Dirac matrisleriyle ($\gamma^{(a)}$) ilişkisi

$$\gamma^\alpha = e_{(a)}{}^\alpha \gamma^{(a)} \quad (2.53a)$$

ve buradaki tetratlar ($e_{(a)}{}^\alpha$)

$$e_{(a)}{}^\alpha e_{(b)}{}^\beta \eta^{(a)(b)} = g^{\alpha\beta} \quad (2.53b)$$

ile verilir.

2.2.1 Som-Raychaudhuri Evreninde Weyl Denkleminin Tam Çözümü

SR metriği için denklem(2.53b) kullanılarak tetratlar

$$e_{(1)}{}^\alpha = \delta^\alpha_1 \quad (2.54a)$$

$$e_{(2)}{}^\alpha = r [\delta^\alpha_0 - (1/r^2) \delta^\alpha_2] \quad (2.54b)$$

$$e_{(3)}{}^\alpha = \delta^\alpha_3 \quad (2.54c)$$

$$e_{(0)}{}^\alpha = \delta^\alpha_0 \quad (2.54d)$$

olarak bulunur. Spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{4}\gamma^{(a)}\gamma^{(b)}e_{(a)}^\nu e_{(b)\nu,\alpha} \quad (2.55)$$

bağıntısı ile verilir ve tetratların eğri uzay zamandaki türevleri ise

$$e_{(b)\nu,\alpha} = \partial_\alpha e_{(b)\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda e_{(b)\lambda} \quad (2.56)$$

denklemleri ile ifade edilirler. Denklem (2.55) ve Denklem(2.56) kullanılarak, spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2}\gamma^{(0)}\gamma^{(2)}; \quad (2.57a)$$

$$\Gamma_2 = \frac{r}{2}\gamma^{(1)}\gamma^{(0)} + \frac{1}{2}(r^2 - 1)\gamma^{(2)}\gamma^{(1)}; \quad (2.57b)$$

$$\Gamma_3 = 0; \quad (2.57c)$$

ve

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}\gamma^{(2)}\gamma^{(1)} \quad (2.57d)$$

şeklinde bulunur.

$\eta_1(r)$ ve $\eta_2(r)$ her biri iki-bileşenli spinör olmak üzere, dalga fonksiyonu

$$\Psi = e^{-i(\omega t + l\phi + kz)} \begin{pmatrix} \eta_1(r) \\ \eta_2(r) \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanım ve Gama matrislerinin standart biçimi kullanılarak Chirality koşulunu veren denklem

$$\eta_1(r) = \eta_2(r) = \begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

biçimine indirgenir. Denklem(2.57a)-(2.57d), denklem(2.58) ve denklem(2.59) kullanılarak, denklem(2.52)

$$\left[\partial_r + \frac{l}{r} - wr - \frac{1}{2r} \right] R_2 = i \left[k + w + \frac{1}{2} \right] R_1 \quad (2.60a)$$

$$\left[\partial_r - \frac{l}{r} + wr - \frac{1}{2r} \right] R_1 = i \left[w - k - \frac{1}{2} \right] R_2 \quad (2.60b)$$

denklemlerine indirgenir. Denklem(2.60a) ve denklem(2.60b)'den R_1 elenerek R_2 için

$$r^2 R_2''(r) - r R_2'(r) + \left[\left(\frac{3}{4} - l - l^2 \right) - r^4 w^2 + \lambda^2 r^2 \right] R_2(r) = 0 \quad (2.61)$$

denklemini elde edilir. Burada $\lambda^2 = 2wl - w + w^2 - k^2 + k - \frac{1}{4}$ dür. Denklem(2.61)

için, k_1 sabit olmak üzere, sırasıyla

$$R_2(r) = y^{k_1} e^{-y/2} F(y) \quad (2.62a)$$

$$y = wr^2 \quad (2.62b)$$

dönüşümleri kullanılarak ve biraz cebir yapıldıktan sonra

$$yF'' + (2k_1 - y)F' - \left(k_1 - \frac{\lambda^2}{4w} \right) F = 0 \quad (2.63)$$

denklemini elde edilir. Denklem(2.63) yapı olarak hipergeometrik(dejenere) denkleme benzemektedir. Bu nedenle, bu denklemin aşağıda verilen iki bağımsız çözümü olur:

$$F_1 = {}_1F_1\left(k_1 - \frac{\lambda^2}{4w}, 2k_1, y\right) \quad (2.64a)$$

$$F_2 = y^{1-2k_1} {}_1F_1\left[1 - k_1 - \frac{\lambda^2}{4w}, 2 - 2k_1, y\right] \quad (2.64b)$$

Denklem(2.63)'ün $r \rightarrow \pm\infty$ (veya $y \rightarrow \infty$)'daki kapalı biçimdeki tam çözümü

$$\begin{aligned} F\left(k_1 - \frac{\lambda^2}{4w}, 2k_1, y\right) &= \frac{\Gamma(1 - 2k_1)}{\Gamma\left(1 - k_1 - \frac{\lambda^2}{4w}\right)} {}_1F_1\left(k_1 - \frac{\lambda^2}{4w}, 2k_1, y\right) \\ &+ \frac{\Gamma(2k_1 - 1)}{\Gamma\left(k_1 - \frac{\lambda^2}{4w}\right)} y^{1-2k_1} {}_1F_1\left[1 - k_1 - \frac{\lambda^2}{4w}, 2 - 2k_1, y\right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

ile verilir.

2.2.2 Hoenselaers-Vishveshwara Evreninde Weyl Denkleminin Tam Çözümü

HV metriği için denklem(2.53b) ve denklem(2.55) kullanılarak, tetratlar

$$e_{(1)}^\alpha = \delta^\alpha_1 \quad (2.66a)$$

$$e_{(2)}^\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} \left[(\cosh r - 1) \delta^\alpha_0 - \delta^\alpha_2 \right] \quad (2.66b)$$

$$e_{(3)}^\alpha = \delta^\alpha_3 \quad (2.66c)$$

$$e_{(0)}^\alpha = \delta^\alpha_0 \quad (2.66d)$$

ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \gamma^{(0)} \gamma^{(2)} \quad (2.67a)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\sinh r}{4} \gamma^{(1)} \gamma^{(0)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \gamma^{(2)} \gamma^{(1)} \quad (2.67b)$$

$$\Gamma_3 = 0 \quad (2.67c)$$

$$\Gamma_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \gamma^{(2)} \gamma^{(1)} \quad (2.67d)$$

şeklinde bulunur. Denklem(2.58) ve denklem(2.59) ile birlikte yukarıda elde edilen tetratlar ve spin bağlantı kat sayıları kullanılarak denklem(2.52)

$$\left[\partial_r + \frac{\sqrt{2}l}{\sinh r} - \frac{\sqrt{2}(\cosh r - 1)}{\sinh r} w - \frac{\cosh r}{2 \sinh r} \right] R_2 = i \left[k + w + \frac{\sqrt{2}}{4} \right] R_1 \quad (2.68a)$$

$$\left[\partial_r - \frac{\sqrt{2}l}{\sinh r} + \frac{\sqrt{2}(\cosh r - 1)}{\sinh r} w - \frac{\cosh r}{2 \sinh r} \right] R_1 = i \left[w - k - \frac{\sqrt{2}}{4} \right] R_2 \quad (2.68b)$$

şeklinde verilen iki denkleme indirgenir. Bu denklemlerden R_2 elenerek R_1 için

$$R_1''(r) - \coth r R_1'(r) + [A + B \coth r \csc hr + D \csc h^2 r] R_1(r) = 0 \quad (2.69)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$A = -w^2 - k^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}k + \frac{1}{8} \quad (2.70a)$$

$$B = 4w^2 + 4wl + \sqrt{2}w + \sqrt{2}l \quad (2.70b)$$

ve

$$D = -4w^2 - 4wl - 2l^2 - \sqrt{2}w + \frac{3}{4} \quad (2.70c)$$

dür. Denklem(2.69) için, sırasıyla

$$R_1(r) = y^{m+n}(1-y)^m U(y) \quad (2.71a)$$

$$y = \frac{1}{2}(\cosh r + 1) \quad m = -\frac{1}{\sqrt{2}l} + \frac{3}{4} \quad n = -\sqrt{2}w - \frac{1}{2} \quad (2.71b)$$

dönüşümleri kullanılarak ve biraz cebir yapılarak

$$y(1-y)U''(y) + [c - (a+b+1)y]U' - abU = 0 \quad (2.72)$$

denklemini bulunur. Denklem(2.72) yapı bakımından hipergeometrik(dejenere) denkleme benzemektedir. Bu nedenle, bu denklemin aşağıda verilen iki bağımsız çözümü olur:

$$U_1 = {}_1F_1(a, b; a+b-c+1; 1-y) \quad (2.73a)$$

$$U_2 = (1-y)^{c-a-b} {}_1F_1[c-a, c-b, c-a-b+1; 1-y] \quad (2.73b)$$

Denklem(2.72)'nin $r \rightarrow \pm\infty$ (veya $y \rightarrow \infty$)'daki kapalı biçimdeki tam çözümü

$$F(a, b; c; y) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_1F_1(a, a; a+b-c+1; 1-y) \quad (2.74)$$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(c)} (1-y)^{c-a-b} {}_1F_1[c-a, c-b; c-a-b+1; 1-y]$$

ile verilir. Burada

$$a = \frac{1}{2} \left[1 - 2\sqrt{2}l - 2\sqrt{2}w + \sqrt{4w^2 + 4k^2 + 2\sqrt{2}k + \frac{1}{2}} \right] \quad (2.75a)$$

$$b = \frac{1}{2} \left[1 - 2\sqrt{2}l - 2\sqrt{2}w - \sqrt{4w^2 + 4k^2 + 2\sqrt{2}k + \frac{1}{2}} \right] \quad (2.75b)$$

ve

$$c = \frac{1}{2} - \sqrt{2}l - 2\sqrt{2}w \quad (2.75c)$$

dir.

2.2.3 Rebouças Evreninde Weyl Denklemine Tam Çözümü

R metriği için denklem(2.53b) ve denklem(2.55) kullanılarak, tetratlar

$$e_{(1)}^\alpha = \delta^\alpha_1 \quad (2.76a)$$

$$e_{(2)}^\alpha = \frac{1}{\sinh 2r} [2 \cosh 2r \delta^\alpha_0 - \delta^\alpha_2] \quad (2.76b)$$

$$e_{(3)}^\alpha = \delta^\alpha_3 \quad (2.76c)$$

$$e_{(0)}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_0 \quad (2.76d)$$

ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_1 = -\gamma^{(0)}\gamma^{(2)} \quad (2.77a)$$

$$\Gamma_2 = \sinh 2r\gamma^{(1)}\gamma^{(0)} + 2 \cosh 2r\gamma^{(2)}\gamma^{(1)} \quad (2.77b)$$

$$\Gamma_3 = 0 \quad (2.77c)$$

$$\Gamma_0 = \gamma^{(2)}\gamma^{(1)} \quad (2.77d)$$

elde edilir. Denklem(2.58) ve denklem(2.59) ile birlikte denklem(2.76a)-(2.76d) ve denklem(2.77a)-(2.77d) kullanılarak denklem(2.52)

$$\left[\partial_r + \frac{l}{\sinh 2r} - \frac{2w \cosh 2r}{\sinh 2r} - \frac{\cosh 2r}{\sinh 2r} \right] R_2 = i[k + w + 1]R_1 \quad (2.78a)$$

$$\left[\partial_r - \frac{l}{\sinh 2r} + \frac{2w \cosh 2r}{\sinh 2r} - \frac{\cosh 2r}{2 \sinh 2r} \right] R_1 = i[w - k - 1]R_2 \quad (2.78b)$$

şeklinde iki denkleme indirgenir. Denklem(2.78a) ve denklem(2.78b)'den R_2 elenerek R_1 için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$R_1''(r) - 2 \coth 2r R_1'(r) + [A + B \coth 2r \csc h 2r + D \csc h^2 2r] R_1(r) = 0 \quad (2.79)$$

Burada

$$A = -3w^2 - k^2 - 2k ; \quad (2.80a)$$

$$B = 4wl + 2l; \quad (2.80b)$$

ve

$$D = 3 - 4w^2 - 4w - l^2; \quad (2.80c)$$

dir. Denklem(2.79) için, sırasıyla

$$R_1(r) = y^p (1-y)^q U(y) \quad (2.81a)$$

$$y = \frac{1}{2}(\cosh 2r + 1) \quad p = -\frac{w}{2} - \frac{l}{4} + \frac{1}{4} \quad q = -\frac{w}{2} + \frac{l}{4} + \frac{1}{4} \quad (2.87b)$$

dönüşümleri kullanılarak ve biraz cebir yapılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$y(1-y)U''(y) + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2} - w \right) - (1-2w)y \right] U'(y) - \left[\frac{w^2}{4} - \frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} - \frac{1}{4} \right] U(y) = 0 \quad (2.88)$$

Denklem(2.88), yapı olarak hipergeometrik(dejenere) denkleminde benzerdir. Bu nedenle bu denklemin aşağıda verilen iki bağımsız çözümü olur:

$$U_1 = {}_1F_1(a', b'; a' + b' - c' + 1; 1-y) \quad (2.89a)$$

$$U_2 = (1-y)^{c'-a'-b'} {}_1F_1[c' - a', c' - b', c' - a' - b' + 1; 1-y] \quad (2.89b)$$

Denklem(2.88)'in $r \rightarrow \pm \infty$ (veya $y \rightarrow \infty$)'daki kapalı formdaki tam çözümü

$$\begin{aligned}
F(a', b'; c'; y) &= \frac{\Gamma(c')\Gamma(c' - a' - b')}{\Gamma(c' - a')\Gamma(c' - b')} {}_1F_1(a', b'; a' + b' - c' + 1; 1 - y) \\
&+ \frac{\Gamma(c')\Gamma(a' + b' - c')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} (1 - y)^{c' - a' - b'} {}_1F_1[c' - a', c' - b'; c' - a' - b' + 1; 1 - y]
\end{aligned} \tag{2.90}$$

ile verilir. Burada

$$a' = -w + \frac{1}{2}\sqrt{3w^2 + k^2 + 2k + 1} \tag{2.91a}$$

$$b' = -w - \frac{1}{2}\sqrt{3w^2 + k^2 + 2k + 1} \tag{2.91b}$$

ve

$$c' = -w + \frac{1}{2} - \frac{l}{2} \tag{2.91c}$$

dir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1 BIANCHI III TİPİ UZAY-ZAMANLARDA mDKP DENKLEMİ VE MAXWELL DENKLEMLERİ

Bianchi III tipi uzay-zamanın metriği,

$$ds^2 = -(dx^0 + RHdx^2)^2 + R^2[(dx^1)^2 + D^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2] \quad (3.1)$$

ile verilir. Burada D ve H x^1 'in R ise x^0 'ın fonksiyonlarıdır. Bu metrik genişleme ve dönmeyle birlikte uzaysal olarak türdeş bir evreni tanımlar. Metrik tensörü ($g_{\mu\nu}$) ve onun tersi ($g^{\mu\nu}$) sırasıyla

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -RH & 0 \\ 0 & R^2 & 0 & 0 \\ -RH & 0 & R^2\Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\Delta^2 D^{-2} & 0 & -\frac{H}{RD^2} & 0 \\ 0 & R^{-2} & 0 & 0 \\ -\frac{H}{RD^2} & 0 & R^{-2}\Delta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{-2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

dır. Burada $\Delta^2 = D^2 - H^2$ dir. Denklem(3.1)'de verilen metrik, belirli koşullar altında, aşağıda verilen uzay-zamanlara indirgenebilir:

(1) Silindiriksel koordinatlarda Gödel uzay-zamanı;
koşullar:

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = z \quad (3.3a)$$

$$R(t) = 1, H(r) = e^{ar}, D(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ar} \quad (3.3b)$$

metrik:

$$ds^2 = -(dt + e^{ar} d\theta)^2 + dr^2 + \frac{1}{2}(e^{ar} d\theta)^2 + dz^2 \quad (3.3c)$$

(2) Kartezyen koordinatlarda genişleyen Gödel uzay-zamanı;
koşullar:

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (3.4a)$$

$$R(t) = ct, H(x) = e^{mx}, D(x) = \sqrt{\lambda + 1}e^{mx} \quad (3.4b)$$

metrik:

$$ds^2 = -dt^2 - 2cte^{mx} dydt + c^2t^2(dx^2 + \lambda e^{2mx} dy^2 + dz^2) \quad (3.4c)$$

(3) Som-Raychaudhuri uzay-zamanı;
koşullar:

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = z \quad (3.5a)$$

$$R(t) = 1, H(r) = r^2, D(r) = r \quad (3.5b)$$

metrik:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 - 2r^2 d\phi dt + r^2(1 - r^2)d\phi^2 + dz^2 \quad (3.5c)$$

(4) Hoenselaers-Vishveshwara uzay-zamanı;
koşullar:

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = z \quad (3.6a)$$

$$R(t) = 1, H(r) = (c-1), D(r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c-1) \quad (3.6b)$$

metrik:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 - 2(c-1)d\phi dt - \frac{1}{2}(c-1)(c-3)d\phi^2 + dz^2 \quad (3.6c)$$

(5) Rebouças uzay-zamanı;

koşullar:

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = z \quad (3.7a)$$

$$R(t) = 1, H(r) = 2 \cosh 2r, D(r) = \sinh 2r \quad (3.7b)$$

metrik:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + 4 \cosh 2r d\phi dt - (3 \cosh^2 2r + 1)d\phi^2 + dz^2 \quad (3.7c)$$

(6) Robertson-Walker uzay-zamanı;

koşullar:

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (3.8a)$$

$$R(t) = a(t), H(x) = 0, D(x) = 1 \quad (3.8b)$$

metrik:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.8c)$$

(7) Minkowski uzay-zamanı,

koşullar:

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (3.9a)$$

$$R(t) = 1, H(x) = 0, D(x) = 1 \quad (3.9b)$$

metrik:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.9c)$$

3.1.1 mDKP Denkleminin Çözümü

Denklemler(3.1) ile verilen metrik için denklemler(2.53a), denklemler(2.53b) ve denklemler(2.55) kullanılarak, tetratlar

$$e_{(0)}^\mu = \delta_{(0)}^\mu \quad (3.10a)$$

$$e_{(1)}^\mu = \frac{1}{R} \delta_{(1)}^\mu \quad (3.10b)$$

$$e_{(2)}^\mu = \frac{1}{D} \left(\frac{1}{R} \delta_{(2)}^\mu - H \delta_{(0)}^\mu \right) \quad (3.10c)$$

$$e_{(3)}^\mu = \delta_{(3)}^\mu \quad (3.10d)$$

Dirac matrisleri

$$\gamma^0 = \tilde{\gamma}^{(0)} - \frac{H}{D} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (3.11a)$$

$$\gamma^1 = \frac{1}{R} \tilde{\gamma}^{(1)} \quad (3.11b)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{RD} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (3.11c)$$

$$\gamma^3 = \frac{1}{R} \tilde{\gamma}^3 \quad (3.11d)$$

ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_{(0)} = \frac{H'}{4RD} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} - \frac{H \dot{R}}{2DR} \tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(0)} \quad (3.12a)$$

$$\Gamma_{(1)} = -\frac{H'}{4D} \tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(0)} - \frac{H \dot{R}}{2D} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} + \frac{\dot{R}}{2} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(0)} \quad (3.12b)$$

$$\Gamma_{(2)} = \frac{H'}{4} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(0)} + \frac{\Delta^2 \dot{R}}{2D} \tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(0)} - \frac{2\Delta\Delta' + HH'}{4D} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (3.12c)$$

$$\Gamma_{(3)} = \frac{\dot{R}}{2} \tilde{\gamma}^{(3)} \tilde{\gamma}^{(0)} + \frac{H \dot{R}}{2D} \tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(3)} \quad (3.12d)$$

biçiminde bulunur. Burada nokta ve çizgi sırasıyla x^0 ve x^1 'e göre türevdir. Dirac matrislerinin standart biçimleri kullanılarak mDKP denkleminin açık ifadesi, $\beta^\mu = \sigma^\mu \otimes I + I \otimes \sigma^\mu$ olmak üzere,

$$\left\{ \left(\tilde{\beta}^{(0)} - \frac{H}{D} \tilde{\beta}^{(2)} \right) \partial_{x^0} + \frac{1}{R} \tilde{\beta}^{(1)} \partial_{x^1} + \frac{1}{RD} \tilde{\beta}^{(2)} \partial_{x^2} + \frac{1}{R} \tilde{\beta}^{(3)} \left(\partial_{x^3} + \frac{iH'}{2D} \right) \right. \\ \left. + \frac{\dot{R}}{2R} \left[\left(\tilde{\beta}^{(1)} \right)^2 + \left(\tilde{\beta}^{(2)} \right)^2 + \left(\tilde{\beta}^{(3)} \right)^2 \right] - \frac{iRH}{2DR} \left(\tilde{\beta}^{(1)} \tilde{\beta}^{(3)} - \tilde{\beta}^{(3)} \tilde{\beta}^{(1)} \right) \right\}$$

$$-\frac{H'}{4DR}(\tilde{\beta}^{(1)}\tilde{\beta}^{(2)} - \tilde{\beta}^{(2)}\tilde{\beta}^{(1)}) - \frac{iD'}{2DR}\tilde{\beta}^{(2)}\tilde{\beta}^{(3)} + \frac{\dot{R}H}{RD}\tilde{\beta}^{(2)} \left. \right\} \Psi = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır. Yeni zaman parametresi ve spinör, sırasıyla

$$\bar{x}^0 = \int \frac{1}{R(\bar{x}^0)} dx^0, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlar Denklem(3.13)'de yerine konularak

$$\left[\frac{iH}{D} \left(\partial_{\bar{x}^0} + \frac{2\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} \right) + \partial_{x^1} - \frac{i}{D} \partial_{x^2} \right] (\Psi_2 + \Psi_3) \quad (3.15a)$$

$$+ 2 \left(\partial_{\bar{x}^0} + \frac{2\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} + \partial_{x^3} \right) \Psi_1 = 0$$

$$\left(\partial_{x^1} + \frac{D'}{D} \right) (\Psi_1 + \Psi_4) - \frac{i}{D} \left[H \left(\partial_{\bar{x}^0} + \frac{2\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} \right) - \partial_{x^2} \right] (\Psi_1 - \Psi_4) \quad (3.15b)$$

$$+ 2 \left(\partial_{\bar{x}^0} + \frac{\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} \right) \Psi_2 + \frac{2\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} \Psi_3 = 0$$

$$\left(\partial_{x^1} + \frac{D'}{D} \right) (\Psi_1 + \Psi_4) - \frac{i}{D} \left[H \left(\partial_{\bar{x}^0} + \frac{2\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} \right) - \partial_{x^2} \right] (\Psi_1 - \Psi_4) \quad (3.15c)$$

$$+ 2 \left(\partial_{\bar{x}^0} + \frac{\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} \right) \Psi_3 + \frac{2\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} \Psi_2 = 0$$

$$\left[-\frac{iH}{D} \left(\partial_{\bar{x}^0} + \frac{2\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} \right) + \partial_{x^1} + \frac{i}{D} \partial_{x^2} \right] (\Psi_2 + \Psi_3) + 2 \left(\partial_{\bar{x}^0} + \frac{2\dot{R}(\bar{x}^0)}{R(\bar{x}^0)} + \partial_{x^3} \right) \Psi_4 = 0 \quad (3.15d)$$

biçiminde dört denklem elde edilir. Denklem(3.15b) ve denklem(3.15c)'ye bakıldığında $\Psi_2 = \Psi_3$ olduğu kolayca görülür. Spinör bileşenleri

$$\Psi_j = R^{-2}(\bar{x}^0) \exp[i(-w\bar{x}^0 + k_2 x^2 + k_3 x^3)] \varphi_j \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanırsa, denklem(3.15a), denklem(3.15b) ve denklem(3.15d) aşağıdaki denklemlere indirgenir:

$$\left[\partial_{x^1} + \frac{1}{D} (k_2 + wH) \right] \varphi_3 - i(w - k_3) \varphi_1 = 0 \quad (3.17a)$$

$$\left[\partial_{x^1} - \frac{1}{D} (k_2 + wH) \right] \varphi_3 - i(w + k_3) \varphi_4 = 0 \quad (3.17b)$$

$$\left(\partial_{x^1} + \frac{D'}{D} \right) (\varphi_1 + \varphi_4) - \frac{1}{D} (k_2 + wH) (\varphi_1 - \varphi_4) - 2iw \varphi_3 = 0 \quad (3.17c)$$

Denklem(3.17a) ve denklem(3.17b)'den φ_1 ve φ_4 çekilerek denklem(3.17c)'de yerine yazılırsa φ_3 için

$$\partial_{x^1}^2 \varphi_3 + \frac{D'}{D} \partial_{x^1} \varphi_3 + \left[w^2 - k_3^2 + \frac{k_3}{D} H' - \left(\frac{k_2 + wH}{D} \right)^2 \right] \varphi_3 = 0 \quad (3.18)$$

denklemini elde edilir. Denklem(3.18)'in kapalı biçimindeki tam çözümü kullanılarak spinörün üçüncü bileşeni için tam çözüm

$$\Psi_3 = R^{-2} e^{-\left(\dot{R}^2(x^0)\right) \int R^{-1}(x^0) dx^0} e^{i(k_2 x^2 + k_3 x_3 - w \int R^{-1}(x^0) dx^0)} \varphi_3(x^1) \quad (3.19)$$

şeklinde olur. Denklem(3.19), denklem(3.17a) ve denklem(3.17b)'de yerine konularak spinörün diğer bileşenleri bulunur.

3.1.2 Maxwell Denklemlerinin Çözümü

Güçlü elektromanyetik ve kütle çekim alanların etkileşmesini içeren bir çok astrofiziksel (Kütle çekimsel lenslerde ışığın sapması, kuasarlar, kara delikler) durum vardır. Elektromanyetik ve kütle çekimsel alanların etkileşmesi eğri ardalanda kaynaklı Maxwell denklemleri tarafından betimlenir. Bu denklemler ve kontravaryant ve kovaryant alan tensörleri, elektromanyetik kaynağın yokluğunda

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} F^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0 \quad (3.20a)$$

$$F_{\mu\nu;\sigma} + F_{\sigma\mu;\nu} + F_{\nu\sigma;\mu} = 0 \quad (3.20b)$$

$$F^{\mu\nu} = e^{\mu}_{(i)} \partial^{(i)} \left[e^{\nu}_{(j)} A^{(j)} \right] - e^{\nu}_{(j)} \partial^{(j)} \left[e^{\mu}_{(i)} A^{(i)} \right] \quad (i = j = 0,1,2,3) \quad (3.20c)$$

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \quad (3.20d)$$

biçiminde verilirler. Maxwell denklemleri ve mDKP denklemi arasındaki benzerliği görmek amacıyla denklem(3.1)'de verilen metrik için, Maxwell denklemleri çözülür. Bu metrik için, kontravaryant ve kovaryant alan tensörleri ($F^{\mu\nu}$ ve $F_{\mu\nu}$) genel koordinatlarda denklem(3.20c) ve denklem(3.20d)'den

$$F^{01} = \frac{1}{R} \left(E^{(1)} + \frac{H}{D} B^{(3)} \right) \quad F_{01} = -RE^{(1)} \quad (3.21a)$$

$$F^{02} = \frac{1}{DR} E^{(2)} \quad F_{02} = -RDE^{(2)} \quad (3.21b)$$

$$F^{03} = \frac{1}{R} \left(E^{(3)} - \frac{H}{D} B^{(1)} \right) \quad F_{03} = -RE^{(3)} \quad (3.21c)$$

$$F^{12} = \frac{1}{DR^2} B^{(3)} \quad F_{12} = R^2 [HE^{(1)} + DB^{(3)}] \quad (3.21d)$$

$$F^{13} = -\frac{1}{R^2} B^{(2)} \quad F_{13} = -R^2 B^{(2)} \quad (3.21e)$$

$$F^{23} = \frac{1}{R^2 D} B^{(1)} \quad F_{23} = R^2 [-HE^{(3)} + DB^{(1)}] \quad (3.21f)$$

ve

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0 \quad (3.21g)$$

biçiminde elde edilir. Burada $E^{(i)}$ ve $B^{(i)}$ 'ler yerel Lorentz çerçevesinde sırasıyla elektrik ve manyetik alanların bileşenleridir. Denklem(3.20a) ve denklem(3.20b)'de verilen Maxwell denklemleri, alan tensörünün bileşenleri cinsinden aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_{x^1} + \frac{D'}{D} \right) \begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{D} \partial_{x^2} \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} - \left(\frac{H}{D} \partial_{x^1} + \frac{H'}{D} \right) \begin{pmatrix} -B^{(3)} \\ E^{(3)} \end{pmatrix} \\ & + \partial_{x^3} \begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} + \frac{H}{D} \partial_{x^3} \begin{pmatrix} -B^{(1)} \\ E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\left(\partial_{x^0} + \frac{2\dot{R}}{R}\right)\begin{pmatrix} -B^{(1)} \\ E^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{R}\partial_{x^3}\begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{DR}\partial_{x^2} - \frac{H}{DR}\partial_{x^0}\right)\begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.22b)$$

$$-\left(\partial_{x^0} + \frac{2\dot{R}}{R}\right)\begin{pmatrix} -B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{1}{R}\partial_{x^3}\begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} - \frac{1}{R}\partial_{x^1}\begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.22c)$$

$$\begin{aligned} &-\left(\partial_{x^0} + \frac{2\dot{R}}{R}\right)\begin{pmatrix} -B^{(3)} \\ E^{(3)} \end{pmatrix} + \frac{1}{DR}(H\partial_{x^0} - \partial_{x^2})\begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{R}\left(\partial_{x^1} + \frac{D'}{D}\right)\begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.22d)$$

Yeni bir zaman parametresi ve karmal (kompleks) spinör, sırasıyla

$$\bar{x}^0 = \int \frac{1}{R(x^0)} dx^0 \quad (3.23a)$$

$$G = \frac{1}{R^2(\bar{x}^0)} \begin{pmatrix} G^{(1)} \\ G^{(2)} \\ G^{(3)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E^{(1)} + iB^{(1)} \\ E^{(2)} + iB^{(2)} \\ E^{(3)} + iB^{(3)} \end{pmatrix} \quad (3.23b)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlar kullanılarak Maxwell denklemleri spinörün bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned} &\left(\partial_{x^1} + \frac{D'}{D} + \frac{iH}{D}\partial_{x^3}\right)G^{(1)} + \frac{1}{D}\partial_{x^2}G^{(2)} \\ &-\frac{iH}{D}\left(\partial_{x^1} + \frac{D'}{D} + \frac{H'}{H} + \frac{iD}{H}\partial_{x^3}\right)G^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (3.24a)$$

$$\partial_{\bar{x}^0} G^{(1)} - i\partial_{x^3} G^{(2)} + \frac{i}{D} (\partial_{x^2} - H\partial_{\bar{x}^0}) G^{(3)} = 0 \quad (3.24b)$$

$$\partial_{x^3} G^{(1)} - i\partial_{\bar{x}^0} G^{(2)} - \partial_{x^1} G^{(3)} = 0 \quad (3.24c)$$

ve

$$\frac{1}{D} (H\partial_{\bar{x}^0} - \partial_{x^2}) G^{(1)} + \left(\partial_{x^1} + \frac{D'}{D} \right) G^{(2)} + i\partial_{\bar{x}^0} G^{(3)} = 0 \quad (3.24d)$$

biçiminde yazılırlar. Spinör yeniden

$$G^{(k)}(x^1) = \exp[i(-w\bar{x}^0 + k_2 x^2 + k_3 x^3)] U^{(k)}(x^1), \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.25)$$

şeklinde tanımlanırsa, $U^{(1)}$ ve $U^{(2)}$ 'nin $U^{(3)}$ cinsinden ifadeleri aşağıdaki biçimde olur:

$$U^{(1)} = \frac{i}{(w^2 - k_3^2)} \left(k_3 \partial_{x^1} + \frac{w(k_2 + wH)}{D} \right) U^{(3)} \quad (3.26a)$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{(k_3^2 - w^2)} \left(w \partial_{x^1} + \frac{k_3(k_2 + wH)}{D} \right) U^{(3)} \quad (3.26b)$$

Denklemler(3.26a) ve denklemler(3.26b), denklemler(3.25) ve denklemler(3.24a)-(3.24d)'de yerine konulursa $U^{(3)}$ için,

$$\partial_{x^1}^2 U^{(3)} + \frac{D'}{D} \partial_{x^1} U^{(3)} + \left(w^2 - k_3^2 + \frac{k_3}{D} H' - \left(\frac{k_2 + wH}{D} \right)^2 \right) U^{(3)} = 0 \quad (3.27)$$

denklemini elde edilir. Denklem(3.27), denklem(3.1)'de verilen metrik için yazılan foton denkleminin indirgenmiş biçimi olan denklem(3.18) ile aynıdır. Bu nedenle denklem(3.27)'nin çözümü de denklem(3.18)'in çözümüyle aynı olacaktır.

mDKP spinörünün bileşenleri ile Maxwell spinörünün bileşenleri arasında

$$\varphi_1 = -U^{(1)} + iU^{(2)} \quad (3.28a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = U^{(3)} \quad (3.28b)$$

$$\varphi_4 = U^{(1)} + iU^{(2)} \quad (3.28c)$$

şeklinde bir ilişki olduğu kolayca görülür. Elektrik ve manyetik alanların Maxwell alanları cinsinden ifadeleri aşağıdaki biçimde verilir:

$$E^{(i)} = e_{\mu}^{(0)} e_{\nu}^{(i)} F^{\mu\nu} \quad B^{(i)} = e_{\mu}^{(i)} e_{\nu}^{(0)} * F^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} e_{\mu}^{(i)} e_{\nu}^{(0)} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (3.29)$$

Denklem(3.29) ve denklem(3.28a)-(3.28c) kullanılarak mDKP denklemleri ile Maxwell denklemlerinin spinör bileşenleri arasındaki ilişki

$$\varphi_1 = iRD(F^{02} + i*F^{20}) - R(F^{01} + i*F^{10}) - R^2 H(F^{21} + i*F^{12}) \quad (3.30a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = R(F^{03} + i*F^{30}) + R^2 H(F^{23} + i*F^{32}) \quad (3.31b)$$

ve

$$\varphi_4 = iRD(F^{02} + i*F^{20}) + R(F^{01} + i*F^{10}) + R^2 H(F^{21} + i*F^{12}) \quad (3.30c)$$

şeklinde kurulur.

4. BULGULAR ve TARTIŞMASI

4.1 BAZI EVREN MODELLERİ İÇİN mDKP DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

4.1.1 Robertson-Walker Evreninde mDKP denkleminin Çözümü

Denklem(3.8c)'de verilen metrikle betimlenen Robertson-Walker(RW) uzay-zamanı, türdeş ve genişleyen bir evren modeli verir.

RW metriği için denklem(2.53b) ve denklem(2.55) kullanılarak, tetratlar

$$e_{(0)}^{\mu} = \delta_{(0)}^{\mu} \quad (4.1a)$$

$$e_{(i)}^{\mu} = \frac{1}{a(t)} \delta_{(i)}^{\mu} \quad (i = 1,2,3) \quad (4.1b)$$

ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_{(0)} = 0 \quad (4.2a)$$

$$\Gamma_{(i)} = \frac{\dot{a}(t)}{2} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^{(i)} \quad i = 1,2,3 \quad (4.2b)$$

biçiminde bulunur. Dirac matrislerinin standart biçimleri ve denklem(4.1a)-(4.1b) ile denklem(4.2a)-(4.2b) kullanılarak, mDKP denkleminin açık ifadesi aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\left\{ 2(I \otimes I) \partial_t + \frac{1}{a(t)} \left[(\tilde{\sigma}^1 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^1) \partial_x + (\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2) \partial_y \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a(t)} (\tilde{\sigma}^3 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^3) \partial_z + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)} (\tilde{\sigma}^1 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^1)^2 \\
& + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)} \left[(\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2)^2 + (\tilde{\sigma}^3 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^3)^2 \right] \Psi = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Spinör

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

olmak üzere denklem(4.3)'ün matris biçimi

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_t + \frac{1}{a(t)} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \partial_y \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{a(t)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_z + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde olur. Yeni bir zaman parametresi $\eta = \int \frac{1}{a(t)} dt$ tanımlanır ve denklem(4.5),

spinörün bileşenleri cinsinden

$$2 \left(\partial_\eta + \frac{2\dot{a}(\eta)}{a(\eta)} \right) \Psi_A + \frac{1}{a(\eta)} (\partial_x - i\partial_y) (\Psi_B + \Psi_C) + 2 \frac{1}{a(\eta)} \partial_z \Psi_A = 0 \tag{4.6a}$$

$$2\left(\partial_\eta + \frac{2\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\right)\Psi_B + \frac{1}{a(\eta)}\partial_x(\Psi_A + \Psi_D) + \frac{1}{a(\eta)}i\partial_y(\Psi_A - \Psi_D) = 0 \quad (4.6b)$$

$$2\left(\partial_\eta + \frac{2\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\right)\Psi_C + \frac{1}{a(\eta)}\partial_x(\Psi_A + \Psi_D) + \frac{1}{a(\eta)}i\partial_y(\Psi_A - \Psi_D) = 0 \quad (4.6c)$$

$$2\left(\partial_\eta + \frac{2\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\right)\Psi_D + (\partial_x + i\partial_y)(\Psi_B + \Psi_C) - \frac{2}{a(\eta)}\partial_z\Psi_D = 0 \quad (4.6d)$$

biçiminde dört denklem olarak yazılır. Denklem(4.6b) ve denklem(4.6c)'ye bakıldığında $\Psi_2 = \Psi_3$ olduğu kolayca görülür. Spinör $\Psi_j = \frac{1}{a^2(\eta)}\Phi_j$ ($j = A, B, C, D$) şeklinde tanımlanırsa denklem(4.6a), denklem(4.6b) ve denklem(4.6d) aşağıdaki denklemlere indirgenir:

$$\partial_\eta\Phi_A + (\partial_x - i\partial_y)\Phi_C + \partial_z\Phi_A = 0 \quad (4.7a)$$

$$2\partial_\eta\Phi_C + \partial_x(\Phi_A + \Phi_D) + i\partial_y(\Phi_A - \Phi_D) = 0 \quad (4.7b)$$

$$\partial_\eta\Phi_D + (\partial_x + i\partial_y)\Phi_C - \partial_z\Phi_D = 0 \quad (4.7c)$$

Spinörün bileşenleri yeniden

$$\Phi_j = \exp[i(-w\eta + k_2y + k_3z)]f_j(x) \quad (4.8)$$

biçiminde tanımlanır ve bu ifade denklem(4.7a), denklem(4.7b) ve denklem(4.7c)'de yerine konulduğunda aşağıda verilen üç denklem elde edilir:

$$(\partial_x + k_2)f_C - i(w - k_3)f_A = 0 \quad (4.9a)$$

$$(\partial_x - k_2)f_C - i(w + k_3)f_D = 0 \quad (4.9b)$$

$$\partial_x(f_A + f_D) - k_2(f_A - f_D) - 2iwf_C = 0 \quad (4.9c)$$

Denklem(4.9a) ve denklem(4.9b)'den f_A ve f_D çekilerek denklem(4.9c)'de yerine yazılırsa f_C için

$$\partial_x^2 f_C + (k_2^2 + k_3^2 - w^2) f_C = 0 \quad (4.10)$$

denklemini bulunur. Denklem(4.10)'nun çözümünün aşağıdaki biçimde olduğu kolayca görülür:

$$f_C = A e^{\pm i \sqrt{k_2^2 + k_3^2 - w^2} x} \quad (A, \text{ boylandırma sabiti}) \quad (4.11)$$

Böylece spinörün üçüncü bileşeni için kapalı biçimdeki ifade

$$\Psi_C = A \frac{1}{a^2(t)} e^{i \left[\sqrt{k_2^2 + k_3^2 - w^2} x + k_2 y + k_3 z - w \int \frac{1}{a(t)} dt \right]} \quad (4.12)$$

biçiminde olur. Denklem(4.12) kullanılarak spinörün diğer bileşenleri de kolayca yazılabilir.

4.1.2 Kantowski-Sachs Evreninde mDKP Denkleminin Çözümü

KS uzay-zamanı, türdeş olan fakat yöndeş olmayan bir evren modeli verir. Bu uzay-zaman

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + \sin^2 x dy^2 + dz^2 \quad (4.13)$$

metriği ile betimlenir.

KS metriği için denklem(2.53b) ve denklem(2.55) kullanılarak, tetratlar

$$e_{(0)}^\mu = \delta_{(0)}^\mu \quad (4.14a)$$

$$e_{(1)}^\mu = \delta_{(1)}^\mu \quad (4.14b)$$

$$e_{(2)}^\mu = \frac{1}{\sin x} \delta_{(2)}^\mu \quad (4.14c)$$

$$e_{(3)}^\mu = \delta_{(3)}^\mu \quad (4.14d)$$

ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_{(0)} = \Gamma_{(1)} = \Gamma_{(3)} = 0 \quad (4.15a)$$

$$\Gamma_{(2)} = -\frac{1}{2} \cos x \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (4.15b)$$

biçiminde bulunur. Dirac matrislerinin standart biçimleri, denklem(4.14a)-(4.14d) ve denklem(4.15a)-(4.15b) kullanılarak mDKP denkleminin açık ifadesi aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\left\{ 2(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \partial_t + (\tilde{\sigma}^1 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^1) \partial_x + \frac{1}{\sin x} (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) \partial_y + \right. \quad (4.16)$$

$$\left. (\tilde{\sigma}^3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^3) \partial_z - \frac{i \cos x}{2 \sin x} (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) (\tilde{\sigma}^3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^3) \right\} \Psi = 0$$

Denklem(4.4)'de verilen spinör kullanılırsa denklem(4.16)'nın matris biçimi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \frac{1}{\sin x} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \partial_y \right.$$

$$+ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_z - \frac{i \cos x}{2 \sin x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & -2i \\ 2i & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{pmatrix} = 0 \quad (4.17)$$

olur. Denklem(4.17), spinörün bileşenleri cinsinden

$$2(\partial_t + \partial_z)\Psi_A + \left(\partial_x - \frac{i}{\sin x} \partial_y\right)(\Psi_B + \Psi_C) = 0 \quad (4.18a)$$

$$2\partial_t \Psi_B + \left(\partial_x + \frac{\cos x}{\sin x}\right)(\Psi_A + \Psi_D) + \frac{i}{\sin x} \partial_y (\Psi_A - \Psi_D) = 0 \quad (4.18b)$$

$$2\partial_t \Psi_C + \left(\partial_x + \frac{\cos x}{\sin x}\right)(\Psi_A + \Psi_D) + \frac{i}{\sin x} \partial_y (\Psi_A - \Psi_D) = 0 \quad (4.18c)$$

$$2(\partial_t - \partial_z)\Psi_D + \left(\partial_x + \frac{i}{\sin x} \partial_y\right)(\Psi_B + \Psi_C) = 0 \quad (4.18d)$$

şeklinde dört denkleme indirgenir. Denklem(4.18b) ve denklem(4.18c)'ye bakıldığında $\Psi_2 = \Psi_3$ olduğu kolayca görülür. Spinör

$$\Psi_j = \exp[i(-wt + k_2 y + k_3 z)] f_j(x) \quad (4.19)$$

biçiminde tanımlanır ve bu tanım, denklem(4.18a), denklem(4.18b) ve denklem(4.18d)'de yerine konulursa

$$\left(\partial_x + \frac{k_2}{\sin x}\right) f_C - i(w - k_3) f_A = 0 \quad (4.20a)$$

$$\left(\partial_x - \frac{k_2}{\sin x}\right)f_C - i(w + k_3)f_D = 0 \quad (4.20b)$$

$$\left(\partial_x + \frac{\cos x}{\sin x}\right)(f_A + f_D) - \frac{k_2}{\sin x}(f_A - f_D) - 2iwf_C = 0 \quad (4.20c)$$

denklemleri elde edilir. Denklem(4.20a) ve denklem(4.20b)'den f_A ve f_D çekilerek denklem(4.20c)'de yerine yazıldığında f_C için,

$$\partial_x^2 f_C + \cot x \partial_x f_C + \left[w^2 - \frac{k_2^2}{\sin^2 x} - k_3^2 \right] f_C = 0 \quad (4.21)$$

denklemini bulunur. Denklem(4.21)'in çözümü için sırasıyla,

$$y = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (4.22)$$

$$f_C = y^p (1-y)^q \Phi_C, \quad p = \frac{k_2}{2}, \quad q = -\frac{k_2}{2} \quad (4.23)$$

dönüşümleri yapılırsa denklem,

$$y(1-y)\partial_y^2 \Phi_C + [c - (a+b+1)y]\partial_y \Phi_C - ab\Phi_C = 0 \quad (4.24)$$

biçimine dönüşür. Burada

$$a = \frac{1}{2} + \sqrt{w^2 - k_3^2 + \frac{1}{4}} \quad (4.25a)$$

$$b = \frac{1}{2} - \sqrt{w^2 - k_3^2 + \frac{1}{4}} \quad (4.25b)$$

ve

$$c = k_2 + 1 \quad (4.25c)$$

dir. Denklem(4.24) yapı olarak Gauss hipergeometrik denklemiyle aynı olduğundan, bu denklemin çözümleri Gauss hipergeometrik fonksiyonlarıdır (${}_2F_1$). Bu nedenle denklem(4.24)'ün çözümleri de göz önüne alınarak spinörün üçüncü bileşeni için, kapalı biçimdeki ifadesi

$$\begin{aligned} \Psi_C = e^{i(-wt+k_2y+k_3z)} y^{k_2/2} (1-y)^{-k_2/2} [A {}_2F_1(a, b, c; y) \\ + B y^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; y)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

şeklinde olur. Denklem(4.26) kullanılarak spinörün diğer bileşenleri de kolayca yazılabilir.

4.1.3 Som-Raychaudhuri Evreninde mDKP Denkleminin Tam Çözümü

Denklem(2.2)'de verilen metrikle betimlenen SR uzay-zamanı türdeş olan fakat yöndeş olmayan bir evren modeli verir.

SR metriği için denklem(2.53b) ve denklem(2.55) kullanılarak, tetratlar

$$e_{(0)}^\mu = \delta_{(0)}^\mu \quad (4.27a)$$

$$e_{(1)}^\mu = \delta_{(1)}^\mu \quad (4.27b)$$

$$e_{(2)}^\mu = \frac{1}{r} (\delta_{(2)}^\mu - r^2 \delta_{(0)}^\mu) \quad (4.27c)$$

$$e_{(3)}^\mu = \delta_{(3)}^\mu \quad (4.27d)$$

ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_{(0)} = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (4.28a)$$

$$\Gamma_{(1)} = -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(0)} \quad (4.28b)$$

$$\Gamma_{(2)} = \frac{1}{2} r \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(0)} - \frac{1}{2} (1-r^2) \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (4.28c)$$

$$\Gamma_{(3)} = 0 \quad (4.28d)$$

şeklinde elde edilir. Dirac matrislerinin standart biçimleri, denklem(4.27a)-(4.27d) ve denklem(4.28a)-(4.28d) kullanılarak mDKP denkleminin açık ifadesi aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\begin{aligned} & \left\{ [2(I \otimes I) - r(\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2)] \partial_t + (\tilde{\sigma}^1 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^1) \partial_r \right. \\ & + \frac{1}{r} (\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2) \partial_\phi + (\tilde{\sigma}^3 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^3) \partial_z + i(I \otimes I) \\ & \times (\tilde{\sigma}^3 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^3) - \frac{i}{2r} (\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2) (\tilde{\sigma}^3 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^3) \\ & + \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2) (\tilde{\sigma}^1 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^1) \\ & \left. - \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}^1 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^1) (\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2) \right\} \Psi = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Denklem(4.4)'de verilen spinör denklem(4.29)'da yerine konularak

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{pmatrix} 2 & ir & ir & 0 \\ -ir & 2 & 0 & ir \\ -ir & 0 & 2 & ir \\ 0 & -ir & -ir & 2 \end{pmatrix} \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_r + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \partial_\phi \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_z + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{pmatrix} = 0 \right. \\
& \tag{4.30}
\end{aligned}$$

biçiminde verilen matris denklemi yazılabilir. Denklem(4.30) açık olarak

$$2(\partial_t + \partial_z)\Psi_A + \left(ir\partial_t + \partial_r - \frac{i}{r}\partial_\phi\right)(\Psi_B + \Psi_C) = 0 \tag{4.31a}$$

$$2\partial_t\Psi_B + \left(\partial_r + \frac{1}{r}\partial_t\right)(\Psi_A + \Psi_D) - \left(ir\partial_t - \frac{i}{r}\partial_\phi\right)(\Psi_A - \Psi_D) = 0 \tag{4.31b}$$

$$2\partial_t\Psi_C + \left(\partial_r + \frac{1}{r}\partial_t\right)(\Psi_A + \Psi_D) - \left(ir\partial_t - \frac{i}{r}\partial_\phi\right)(\Psi_A - \Psi_D) = 0 \tag{4.31c}$$

$$2(\partial_t - \partial_z)\Psi_D + \left(-ir\partial_t + \partial_r + \frac{i}{r}\partial_\phi\right)(\Psi_B + \Psi_C) = 0 \tag{4.31d}$$

şeklinde dört denkleme dönüştürülür. Denklem(4.31b) ve denklem(4.31c)'ye bakıldığında $\Psi_2 = \Psi_3$ olduğu kolayca görülür.

$$\Psi_j = \exp[i(-wt + k_2\phi + k_3z)]f_j(r) \tag{4.32}$$

biçiminde verilen spinör tanımı kullanılarak, denklem(4.31a), denklem(4.31b) ve denklem(4.31d) aşağıdaki denklemlere indirgenirler:

$$(\partial_r + wr + \frac{k_2}{r})f_C - i(w - k_3)f_A = 0 \quad (4.33a)$$

$$(\partial_r - wr - \frac{k_2}{r})f_C - i(w + k_3)f_D = 0 \quad (4.33b)$$

$$\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)(f_A + f_D) - \left(wr + \frac{k_2}{r}\right)(f_A - f_D) - 2iwf_C = 0 \quad (4.33c)$$

Denklem(4.33a) ve denklem(4.33b)'den f_A ve f_D çekilerek denklem(4.33c)'de yerine yazılırsa f_C için,

$$\partial_r^2 f_C + \frac{1}{r} \partial_r f_C + \left[w^2 - \frac{k_2^2}{r^2} - k_3^2 - w^2 r^2 + 2k_3 - 2k_2 w \right] f_C = 0 \quad (4.34)$$

denklemini elde edilir. Denklem(4.34)'ün çözümü için, sırasıyla

$$u = wr^2 \quad (4.35a)$$

$$f_C = u^{-1/2} \Phi_C \quad (4.35b)$$

dönüşümleri yapılırsa denklem

$$4u^2 \partial_u^2 \Phi_C + [-u^2 + 4\kappa u + (1 - 4\mu^2)] \Phi_C = 0 \quad (4.36)$$

biçimine dönüşür. Burada

$$\kappa = \frac{1}{4} \left(\frac{2k_3 - k_3^2}{w} - 2k_2 + w \right) \quad (4.37a)$$

ve

$$\mu = \frac{k_2}{2} \quad (4.37b)$$

dir. Denklem(4.36) yapı olarak Whittaker denklemiyle aynı olduğundan bu denklemin çözümleri Whittaker hipergeometrik fonksiyonları olur. Bu nedenle spinörün üçüncü bileşeni

$$\Psi_c = e^{i(-w_1 + k_2\phi + k_3z)} \frac{e^{-\frac{wr^2}{2}}}{\sqrt{wr}} \left\{ C_1 M \left(\frac{5k_2}{2} - w - \frac{2k_3 - k_3^2}{4w}, k_2 + 1, wr^2 \right) + C_2 U \left(\frac{5k_2}{2} - w - \frac{2k_3 - k_3^2}{4w}, k_2 + 1, wr^2 \right) \right\} \quad (4.38)$$

şeklinde yazılır. Denklem(4.38) kullanılarak spinörün diğer bileşenleri de kolayca yazılabilir.

4.1.4 Hoenselaers-Vishveshwara Evreninde Foton Denkleminin Tam Çözümü

Denklem(2.21)'de verilen metrikle betimlenen HV uzay-zamanı türdeş olan fakat yöndeş olmayan bir evren modeli verir.

HV metriği için denklem(2.53b) ve denklem(2.55) kullanılırsa, tetratlar

$$e_{(0)}^\mu = \delta_{(0)}^\mu \quad (4.39a)$$

$$e_{(1)}^\mu = \delta_{(1)}^\mu \quad (4.39b)$$

$$e_{(2)}^\mu = \left(\sqrt{2} \csc hr \delta_{(2)}^\mu - \frac{\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} \delta_{(0)}^\mu \right) \quad (4.39c)$$

$$e_{(3)}^\mu = \delta_{(3)}^\mu \quad (4.39d)$$

ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (4.40a)$$

$$\Gamma_{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(0)} \quad (4.40b)$$

$$\Gamma_{(2)} = \frac{\sinh r}{4} r \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(0)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (4.40c)$$

$$\Gamma_{(3)} = 0 \quad (4.40d)$$

şeklinde bulunur. Dirac matrislerinin standart biçimleri, denklem(4.39a)-(4.39d) ve denklem(4.40a)-(4.40d) kullanılarak mDKP denkleminin açık ifadesi aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\left\{ \left[2(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - \frac{\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) \right] \partial_t + (\tilde{\sigma}^1 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^1) \partial_r + \right. \\ \left. \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) \partial_\phi - \frac{i \cosh r}{2 \sinh r} (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) (\tilde{\sigma}^3 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^3) \right. \\ \left. + (\tilde{\sigma}^3 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^3) \left(\partial_z + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) (\tilde{\sigma}^1 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^1) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}}{4} (\tilde{\sigma}^1 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^1) (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) \right\} \Psi = 0 \quad (4.41)$$

Denklem(4.4)'de verilen spinör, denklem(4.41)'da yerine konularak

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \right] \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_r \\
& \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \partial_\phi + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_z \\
& + \frac{\cosh r}{\sinh r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

şeklinde verilen bir matris denklemi yazılabilir. Denklem(4.42) açık olarak, spinör bileşenleri cinsinden

$$2(\partial_t + \partial_z)\Psi_A + \left(\frac{i\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} \partial_t + \partial_r - \frac{i\sqrt{2}}{\sinh r} \partial_\phi \right) (\Psi_B + \Psi_C) = 0 \tag{4.43a}$$

$$2\partial_t \Psi_B + \left(\partial_r + \frac{\cosh r}{\sinh r} \right) (\Psi_A + \Psi_D) - \left(\frac{i\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} \partial_t - \frac{i\sqrt{2}}{\sinh r} \partial_\phi \right) (\Psi_A - \Psi_D) = 0 \tag{4.43b}$$

$$2\partial_t \Psi_C + \left(\partial_r + \frac{\cosh r}{\sinh r} \right) (\Psi_A + \Psi_D) - \left(\frac{i\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} \partial_t - \frac{i\sqrt{2}}{\sinh r} \partial_\phi \right) (\Psi_A - \Psi_D) = 0 \tag{4.43c}$$

$$2(\partial_t - \partial_z)\Psi_D - \left(\frac{i\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} \partial_t - \partial_r - \frac{i\sqrt{2}}{\sinh r} \partial_\phi \right) (\Psi_B + \Psi_C) = 0 \quad (4.43d)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem(4.43b) ve denklem(4.43c)'ye bakıldığında $\Psi_2 = \Psi_3$ olduğu kolayca görülür. Denklem(4.32)'de verilen spinör tanımı kullanılarak, denklem(4.43a), denklem(4.43b) ve denklem(4.43d)

$$\left[\partial_r + \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} (k_2 + w \cosh r - w) \right] f_C - i(w - k_3) f_A = 0 \quad (4.44a)$$

$$\left[\partial_r - \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} (k_2 + w \cosh r - w) \right] f_C - i(w + k_3) f_D = 0 \quad (4.44b)$$

$$(\partial_r + \coth r)(f_A + f_D) - \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} (k_2 + w \cosh r - w)(f_A - f_D) - 2iwf_C = 0 \quad (4.44c)$$

denklemlerine indirgenirler. Denklem(4.44a) ve denklem(4.44b)'den f_A ve f_D çekilerek denklem(4.44d)'de yerine yazılırsa f_C için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\partial_r^2 f_C + \coth r \partial_r f_C + \left[w^2 - k_3^2 + \sqrt{2} k_3 - \left(\sqrt{2} \frac{k_2 + w \cosh r - w}{\sinh r} \right)^2 \right] f_C = 0 \quad (4.45)$$

Denklem(4.45), sırasıyla

$$y = \frac{1 + \cosh r}{2} \quad (4.46a)$$

$$f_C = y^p (1 - y)^q \Phi_C, \quad p = \frac{\sqrt{2}}{2} k_2 - \sqrt{2} w, \quad q = \frac{\sqrt{2}}{2} k_2 \quad (4.46b)$$

dönüşümleri yapılarak,

$$y(1-y)\partial_y^2\Phi_C + [c' - (a' + b' + 1)y]\partial_y\Phi_C - a'b'\Phi_C = 0 \quad (4.47)$$

biçimine dönüştür. Burada

$$a' = \sqrt{2}k_2 - \sqrt{2}w + \frac{1}{2} + \sqrt{w^2 + 2wk_2 - \sqrt{2}k_3 + k_3^2 + \frac{1}{4}} \quad (4.48a)$$

$$b' = \sqrt{2}k_2 - \sqrt{2}w + \frac{1}{2} - \sqrt{w^2 + 2wk_2 - \sqrt{2}k_3 + k_3^2 + \frac{1}{4}} \quad (4.48b)$$

ve

$$c' = 1 + \sqrt{2}k_2 - 2\sqrt{2}w \quad (4.48c)$$

dır. Denklem(4.47) Gauss hipergeometrik denklemiyle aynı olduğundan bu denklemin çözümleri Gauss hipergeometrik fonksiyonlarıdır(${}_2F_1$). Bu nedenle spinörün üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned} \Psi_C = e^{i(-wt+k_2\phi+k_3z)} y^p (1-y)^q & [A {}_2F_1(a', b', c'; y) \\ & + B y^{1-c'} {}_2F_1(a' - c' + 1, b' - c' + 1, 2 - c'; y)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

şeklinde yazılır. Denklem(4.49) kullanılarak spinörün diğer bileşenleri de kolayca yazılabilir.

4.1.5 Rebouças(R) Evreninde mDKP Denkleminin Tam Çözümleri

Denklem(2.37)'de verilen metrik ile betimlenen R uzay-zamanı türdeş fakat yöndeş olmayan bir evren modeli verir.

R metriği için denklem(2.53b) ve denklem(2.55) kullanılarak, tetratlar

$$e_{(0)}^\mu = \delta_{(0)}^\mu \quad (4.50a)$$

$$e_{(1)}^\mu = \delta_{(1)}^\mu \quad (4.50b)$$

$$e_{(2)}^\mu = \frac{1}{\sinh 2r} (\delta_{(2)}^\mu - 2 \cosh 2r \delta_{(0)}^\mu) \quad (4.50c)$$

$$e_{(3)}^\mu = \delta_{(3)}^\mu \quad (4.50d)$$

ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_{(0)} = \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (4.51a)$$

$$\Gamma_{(1)} = -\tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(0)} \quad (4.51b)$$

$$\Gamma_{(2)} = \sinh 2r \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(0)} + \cosh 2r \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(2)} \quad (4.51c)$$

$$\Gamma_{(3)} = 0 \quad (4.51d)$$

elde edilir. Dirac matrislerinin standart biçimleri, denklem(4.50a)-(4.50d) ve denklem(4.51a)-(4.51d) kullanılarak mDKP denklemi aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} & \{ [2(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) - 2 \coth 2r (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^2)] \partial_t + (\tilde{\sigma}^1 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^1) \partial_r \\ & + \frac{1}{\sinh 2r} (\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) \partial_\phi + (\tilde{\sigma}^3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^3) (\partial_z + 2i) \\ & - i \coth 2r [(\tilde{\sigma}^2 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^2) (\tilde{\sigma}^3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}^3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2)(\tilde{\sigma}^1 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^1) \\
& -(\tilde{\sigma}^1 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^1)(\tilde{\sigma}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{\sigma}^2)\Psi = 0
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Denklem(4.4)'de verilen spinör kullanılarak denklem(4.52)'nin matris biçimi

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \coth 2r \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \right\} \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_r \\
& + \frac{1}{\sinh r} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \partial_\phi + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_z \tag{4.53} \\
& + 2 \coth 2r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Denklem(4.53), spinörün bileşenleri cinsinden

$$2(\partial_t + \partial_z)\Psi_A + \left(2i \coth 2r \partial_t + \partial_r - \frac{i}{\sinh 2r} \partial_\phi \right) (\Psi_B + \Psi_C) = 0 \tag{4.54a}$$

$$2\partial_t \Psi_B + (\partial_r + 2 \coth 2r) (\Psi_A + \Psi_D) \tag{4.54b}$$

$$-\left(2i \coth 2r \partial_t - \frac{i}{\sinh 2r} \partial_\phi \right) (\Psi_A - \Psi_D) = 0$$

$$2\partial_t \Psi_C + (\partial_r + 2 \coth 2r)(\Psi_A + \Psi_D) \quad (4.54c)$$

$$-\left(2i \coth 2r \partial_t - \frac{i}{\sinh 2r} \partial_\phi\right)(\Psi_A - \Psi_D) = 0$$

$$2(\partial_t - \partial_z)\Psi_D - \left(2i \coth 2r \partial_t - \partial_r - \frac{i}{\sinh 2r} \partial_\phi\right)(\Psi_B + \Psi_C) = 0 \quad (4.54d)$$

olarak dört denklem şeklinde yazılır. Denklem(4.54b) ve denklem(4.54c)'ye bakıldığında $\Psi_2 = \Psi_3$ olduğu kolayca görülür.

Spinörün denklem(4.32)'de verilen tanımı kullanılarak, denklem(4.54a), denklem(4.54b) ve denklem(4.54d)

$$\left[\partial_r + \frac{1}{\sinh 2r}(k_2 + 2w \cosh 2r)\right]f_C - i(w - k_3)f_A = 0 \quad (4.55a)$$

$$\left[\partial_r - \frac{1}{\sinh 2r}(k_2 + 2w \cosh 2r)\right]f_C - i(w + k_3)f_D = 0 \quad (4.55b)$$

$$(\partial_r + 2 \coth 2r)(f_A + f_D) - \frac{1}{\sinh r}(k_2 + 2w \cosh 2r)(f_A - f_D) - 2iwf_C = 0 \quad (4.55c)$$

biçimine dönüşür. Denklem(4.55a) ve denklem(4.55b)'den f_A ve f_D çekilerek denklem(4.55c)'de yerine yazılırsa f_C için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\partial_r^2 f_C + 2 \coth 2r \partial_r f_C + \left[w^2 - k_3^2 + 4k_3 - \left(\frac{k_2 + 2w \cosh 2r}{\sinh 2r}\right)^2\right]f_C = 0 \quad (4.56)$$

Denklem(4.56), sırasıyla

$$y = \frac{1 + \cosh 2r}{2} \quad (4.57a)$$

$$f_c = y^p (1-y)^q \Phi_c, \quad p = \frac{k_2}{4} - \frac{w}{2}, \quad q = -\frac{k_2}{4} - \frac{w}{2} \quad (4.57b)$$

dönüşümleri yapılarak

$$y(1-y)\partial_y^2 \Phi_c + [d - (e+f+1)y]\partial_y \Phi_c - ef\Phi_c = 0 \quad (4.58)$$

şekline indirgenir. Burada

$$d = \frac{1}{2} \left[1 - 2w + \sqrt{3w^2 - 4k_3 + k_3^2 + 1} \right] \quad (4.59a)$$

$$e = \frac{1}{2} \left[1 - 2w - \sqrt{3w^2 - 4k_3 + k_3^2 + 1} \right] \quad (4.59b)$$

ve

$$f = 1 + \frac{k_2}{2} - w \quad (4.59c)$$

dır. Denklem(4.58) yapı olarak Gauss Hipergeometrik denklemiyle aynı olduğundan bu denklemin çözümleri Gauss hipergeometrik fonksiyonlarıdır. Bu nedenle spinörün üçüncü bileşeni için

$$\begin{aligned} \Psi_c = e^{i(-wt+k_2\phi+k_3z)} y^p (1-y)^q & \left[A {}_2F_1(d, e, f; y) \right. \\ & \left. + B y^{1-c} {}_2F_1(d-f+1, e-f+1, 2-f; y) \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

ifadesi yazılır. Denklem(4.60) kullanılarak spinörün diğer bileşenleri de kolayca yazılabilir.

4.2 BAZI EVREN MODELLERİ İÇİN MAXWELL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

4.2.1 Robertson-Walker Evreninde Maxwell Denklemlerinin Çözümü

Denklem(3.8c)'de verilen metrik için denklem(3.20c) ve denklem(3.20d) kullanılarak, kontravaryant ve kovaryant alan tensörleri

$$F^{01} = \frac{1}{a(t)} E^{(1)} \quad F_{01} = -a(t)E^{(1)} \quad (4.61a)$$

$$F^{02} = \frac{1}{a(t)} E^{(2)} \quad F_{02} = -a(t)E^{(2)} \quad (4.61b)$$

$$F^{03} = \frac{1}{a(t)} E^{(3)} \quad F_{03} = -a(t)E^{(3)} \quad (4.61c)$$

$$F^{12} = \frac{1}{a^2(t)} B^{(3)} \quad F_{12} = a^2(t)B^{(3)} \quad (4.61d)$$

$$F^{13} = -\frac{1}{a^2(t)} B^{(2)} \quad F_{13} = -a^2(t)B^{(2)} \quad (4.61e)$$

$$F^{23} = \frac{1}{a^2(t)} B^{(1)} \quad F_{23} = a^2(t)B^{(1)} \quad (4.61f)$$

ve

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0 \quad (4.61g)$$

biçiminde elde edilir. Denklem(3.20a) ve denklem(3.20b)'de verilen Maxwell denklemleri, alan tensörünün bileşenleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\partial_x \begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.62a)$$

$$\left(\partial_t + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \right) \begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{a(t)} \partial_y \begin{pmatrix} -B^{(3)} \\ E^{(3)} \end{pmatrix} + \frac{1}{a(t)} \partial_z \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ -E^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.62b)$$

$$\left(\partial_t + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \right) \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{1}{a(t)} \partial_x \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ -E^{(3)} \end{pmatrix} + \frac{1}{a(t)} \partial_z \begin{pmatrix} -B^{(1)} \\ E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.62c)$$

$$\left(\partial_t + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \right) \begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} + \frac{1}{a(t)} \partial_x \begin{pmatrix} -B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{1}{a(t)} \partial_y \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.62d)$$

Denklem(3.23b)'de verilen karmal spinör kullanılarak, Maxwell denklemleri spinörün bileşenleri cinsinden

$$\partial_x G^{(1)} + \partial_y G^{(2)} + \partial_z G^{(3)} = 0 \quad (4.63a)$$

$$\left(\partial_t + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \right) G^{(1)} + \frac{1}{a(t)} i \partial_y G^{(3)} - \frac{1}{a(t)} i \partial_z G^{(2)} = 0 \quad (4.63b)$$

$$\left(\partial_t + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \right) G^{(2)} - \frac{1}{a(t)} i \partial_x G^{(3)} + \frac{1}{a(t)} i \partial_z G^{(1)} = 0 \quad (4.63c)$$

$$\left(\partial_t + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \right) G^{(3)} + \frac{1}{a(t)} i \partial_x G^{(2)} - \frac{1}{a(t)} i \partial_y G^{(1)} = 0 \quad (4.63d)$$

biçiminde bulunur. Yukarıda verilen denklemlerde $a(t)$ 'nin elenmesi için spinör bileşenleri $G^{(j)} = \frac{1}{a^2(t)} U^{(j)}$ ($j=1,2,3$) biçiminde seçilir ve yeni zaman parametresi

$$\eta = \int \frac{1}{a(t)} dt \text{ şeklinde tanımlanırsa, yukarıdaki denklemler}$$

$$\partial_x U^{(1)} + \partial_y U^{(2)} + \partial_z U^{(3)} = 0 \quad (4.64a)$$

$$\partial_\eta U^{(1)} + i\partial_y U^{(3)} - i\partial_z U^{(2)} = 0 \quad (4.64b)$$

$$\partial_\eta U^{(2)} - i\partial_x U^{(3)} + i\partial_z U^{(1)} = 0 \quad (4.64c)$$

$$\partial_\eta U^{(3)} + i\partial_x U^{(2)} - i\partial_y U^{(1)} = 0 \quad (4.64d)$$

biçimine dönuşürler. η , y ve z değişkenlerine bağlılığın elenmesi için spinör bileşenleri, yeniden

$$U^{(k)} = \exp[i(-w\eta + k_2 y + k_3 z)] \chi^{(k)}(x), \quad k = 1,2,3 \quad (4.65)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre $\chi^{(1)}$ ve $\chi^{(2)}$ 'nin $\chi^{(3)}$ cinsinden ifadeleri aşağıdaki biçimde olur:

$$\chi^{(1)} = \frac{1}{(w^2 - k_3^2)} i(k_3 \partial_x + w k_2) \chi^{(3)} \quad (4.66a)$$

$$\chi^{(2)} = \frac{1}{(-w^2 + k_3^2)} (w \partial_x + k_3 k_2) \chi^{(3)} \quad (4.66b)$$

Denklem(4.66a) ve denklem(4.66b), denklem(4.65) ve denklem(4.64a)-(4.64d)'de yerine konulursa $\chi^{(3)}$ için,

$$\partial_x^2 \chi^{(3)} + (k_2^2 + k_3^2 - w^2) \chi^{(3)} = 0 \quad (4.67)$$

denklemini elde edilir. Denklem(4.67), denklem(3.8c)'de verilen metrik için yazılan mDKP denkleminin indirgenmiş biçimi olan denklem(4.10) ile aynı olduğundan bu denklemlerin çözümleri de aynı olur.

Denklem(3.28a)-(3.28c) ve denklem(3.29) kullanılarak mDKP denklemi ile Maxwell denklemlerinin spinör bileşenleri arasındaki ilişki aşağıdaki biçimde kurulur:

$$\varphi_1 = a(t) \left[- (F^{01} + i^* F^{10}) + i (F^{02} + i^* F^{20}) \right] \quad (4.68a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = a(t) (F^{03} + i^* F^{30}) \quad (4.68b)$$

$$\varphi_4 = a(t) \left[(F^{01} + i^* F^{10}) + i (F^{02} + i^* F^{20}) \right] \quad (4.68c)$$

4.2.2 Kantowski-Sachs Evreninde Maxwell Denklemlerinin Çözümü

Denklem(4.13)'de verilen metrik için, denklem(3.20c) ve denklem(3.20d) kullanılarak, kontravaryant ve kovaryant alan tensörleri

$$F^{01} = E^{(1)} \quad F_{01} = -E^{(1)} \quad (4.69a)$$

$$F^{02} = \frac{1}{\sin x} E^{(2)} \quad F_{02} = -\sin x E^{(2)} \quad (4.69b)$$

$$F^{03} = E^{(3)} \quad F_{03} = -E^{(3)} \quad (4.69c)$$

$$F^{12} = \frac{1}{\sin x} B^{(3)} \quad F_{12} = \sin x B^{(3)} \quad (4.69d)$$

$$F^{13} = -B^{(2)} \quad F_{13} = -B^{(2)} \quad (4.69e)$$

$$F^{23} = \frac{1}{\sin x} B^{(1)} \quad F_{23} = \sin x B^{(1)} \quad (4.69f)$$

ve

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0 \quad (4.69g)$$

biçiminde yazılır. Denklem(3.20a) ve denklem(3.20b)'de verilen Maxwell denklemleri, alan tensörünün bileşenleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$(\sin x \partial_x + \cos x) \begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} + \sin x \partial_z \begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.70a)$$

$$\sin x \partial_t \begin{pmatrix} -E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ E^{(3)} \end{pmatrix} - \sin x \partial_z \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.70b)$$

$$-\partial_t \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} - \partial_x \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ -E^{(3)} \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.70c)$$

$$\sin x \partial_t \begin{pmatrix} -E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} + (\sin x \partial_x + \cos x) \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} - \partial_y \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.70d)$$

Denklem(3.23b)'de verilen karmal spinör kullanılarak, Maxwell denklemleri spinörün bileşenleri cinsinden

$$(\sin x \partial_x + \cos x) G^{(1)} + \partial_y G^{(2)} + \sin x \partial_z G^{(3)} = 0 \quad (4.71a)$$

$$-i \sin x \partial_t G^{(1)} + \partial_y G^{(3)} - \sin x \partial_z G^{(2)} = 0 \quad (4.71b)$$

$$-\partial_t G^{(2)} + i \partial_x G^{(3)} - i \partial_z G^{(1)} = 0 \quad (4.71c)$$

ve

$$-i \sin x \partial_t G^{(3)} + (\sin x \partial_x + \cos x) G^{(2)} - \partial_y G^{(1)} = 0 \quad (4.71d)$$

biçiminde yazılırlar. Spinör yeniden

$$G^{(k)} = \exp[i(-wt + k_2y + k_3z)]\chi^{(k)}(x), \quad k = 1,2,3 \quad (4.72)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre $\chi^{(1)}$ ve $\chi^{(2)}$ 'nin $\chi^{(3)}$ cinsinden ifadeleri aşağıdaki biçimde olur:

$$\chi^{(1)} = \frac{1}{(w^2 - k_3^2)} i \left(k_3 \partial_x + \frac{wk_2}{\sin x} \right) \chi^{(3)} \quad (4.73a)$$

$$\chi^{(2)} = \frac{1}{(k_3^2 - w^2)} \left(w \partial_x + \frac{k_3 k_2}{\sin x} \right) \chi^{(3)} \quad (4.73b)$$

Denklem(4.73a) ve denklem(4.73b), denklem(4.72) ve denklem(4.71a)-(4.71d)'de yerine konulursa $\chi^{(3)}$ için,

$$\partial_x^2 \chi^{(3)} + \cot x \partial_x \chi^{(3)} + \left(-\frac{k_2^2}{\sin^2 x} - k_3^2 + w^2 \right) \chi^{(3)} = 0 \quad (4.74)$$

denklemini elde edilir. Denklem(4.74), denklem(4.13)'de verilen metrik için yazılan mDKP denkleminin indirgenmiş biçimi olan denklem(4.21) ile aynı olduğundan bu denklemlerin çözümleri de aynı olur.

Denklem(3.28a)-(3.28c) ve denklem(3.29) kullanılarak mDKP denklemi ile Maxwell denklemlerinin spinör bileşenleri arasındaki ilişki

$$\varphi_1 = -(F^{01} + i^* F^{10}) + i \sin x (F^{02} + i^* F^{20}) \quad (4.75a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = (F^{03} + i^* F^{30}) \quad (4.75b)$$

ve

$$\varphi_4 = (F^{01} + i^* F^{10}) + i \sin x (F^{02} + i^* F^{20}) \quad (4.75c)$$

biçiminde kurulur.

4.2.3 Som-Raychaudhuri Evreninde Maxwell Denklemlerinin Çözümü

Denk.(2.2)'de verilen metrik için, denklem(3.20c) ve denklem(3.20d) kullanılarak, kontravaryant ve kovaryant alan tensörleri

$$F^{01} = E^{(1)} + rB^{(3)} \quad F_{01} = -E^{(1)} \quad (4.76a)$$

$$F^{02} = \frac{1}{r} E^{(2)} \quad F_{02} = -rE^{(2)} \quad (4.76b)$$

$$F^{03} = E^{(3)} - rB^{(1)} \quad F_{03} = -E^{(3)} \quad (4.76c)$$

$$F^{12} = \frac{1}{r} B^{(3)} \quad F_{12} = r[rE^{(1)} + B^{(3)}] \quad (4.76d)$$

$$F^{13} = -B^{(2)} \quad F_{13} = -B^{(2)} \quad (4.76e)$$

$$F^{23} = \frac{1}{r} B^{(1)} \quad F_{23} = r[-rE^{(3)} + B^{(1)}] \quad (4.76f)$$

ve

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0 \quad (4.76g)$$

şeklinde bulunur. Denklem(3.20a) ve denklem(3.20b)'de verilen Maxwell denklemleri, alan tensörünün bileşenleri cinsinden aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
& (r\partial_r + 1) \begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} + (r^2\partial_r + 2r) \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ -E^{(3)} \end{pmatrix} + \partial_\phi \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} \\
& + r\partial_z \begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} - r^2\partial_z \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{4.77a}$$

$$r\partial_t \begin{pmatrix} -E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} - (r^2\partial_t - \partial_\phi) \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ E^{(3)} \end{pmatrix} - r\partial_z \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.77b}$$

$$-\partial_t \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} + \partial_r \begin{pmatrix} -B^{(3)} \\ E^{(3)} \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.77c}$$

$$r\partial_t \begin{pmatrix} -E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} + (r^2\partial_t - \partial_\phi) \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ E^{(1)} \end{pmatrix} + (r\partial_r + 1) \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.77d}$$

Denklemler(3.23b)'de verilen spinör kullanılarak, Maxwell denklemleri spinörün bileşenleri cinsinden

$$(r\partial_r + ir^2\partial_z + 1)G^{(1)} - i(r^2\partial_r + ir\partial_z + 2r)G^{(3)} + \partial_\phi G^{(2)} = 0 \tag{4.78a}$$

$$-ir\partial_t G^{(1)} - (r^2\partial_t - \partial_\phi)G^{(3)} - r\partial_z G^{(2)} = 0 \tag{4.78b}$$

$$-\partial_t G^{(2)} + i\partial_r G^{(3)} - i\partial_z G^{(1)} = 0 \tag{4.78c}$$

ve

$$-ir\partial_t G^{(3)} + (r^2\partial_t - \partial_\phi)G^{(1)} + (r\partial_r + 1)G^{(2)} = 0 \tag{4.78d}$$

biçiminde yazılırlar.

$$G^{(k)} = \exp[i(-wt + k_2\phi + k_3z)]\chi^{(k)}(r), \quad k = 1,2,3 \quad (4.79)$$

biçiminde verilen spinör tanımı kullanılarak, $\chi^{(1)}$ ve $\chi^{(2)}$ 'nin $\chi^{(3)}$ cinsinden ifadeleri aşağıdaki biçimde olur:

$$\chi^{(1)} = \frac{1}{(w^2 - k_3^2)} i \left(k_3 \partial_r + w^2 r + \frac{wk_2}{r} \right) \chi^{(3)} \quad (4.80a)$$

$$\chi^{(2)} = \frac{1}{(k_3^2 - w^2)} \left(w \partial_r + wrk_3 + \frac{k_3 k_2}{r} \right) \chi^{(3)} \quad (4.80b)$$

Denklem(4.80a) ve denklem(4.80b), denklem(4.79) ve denklem(4.78a)-(4.78d)'de yerine konulursa $\chi^{(3)}$ için,

$$\partial_x^2 \chi^{(3)} + \frac{1}{r} \partial_r \chi^{(3)} + \left(2k_3 - 2k_2 w - w^2 r^2 - \frac{k_2^2}{r^2} - k_3^2 + w^2 \right) \chi^{(3)} = 0 \quad (4.81)$$

denklemini elde edilir. Denklem(4.81), denklem(2.2)'de verilen metrik için yazılan mDKP denkleminin indirgenmiş biçimi olan denklem(4.34) ile aynı olduğundan bu denklemlerin çözümleri de aynı olur.

Denklem(3.28a)-(3.28c) ve denklem(3.29) kullanılarak mDKP denklemini ile Maxwell denklemlerinin spinör bileşenleri arasındaki ilişki

$$\varphi_1 = -(F^{01} + i^* F^{10}) - r^2 (F^{21} + i^* F^{12}) + r(iF^{02} - * F^{20}) \quad (4.82a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = (F^{03} + i^* F^{30}) + r^2 (F^{23} + i^* F^{32}) \quad (4.82b)$$

$$\varphi_4 = (F^{01} + i^* F^{10}) + r^2 (F^{21} + i^* F^{12}) + r(iF^{02} - * F^{20}) \quad (4.82c)$$

şeklinde kurulur.

4.2.4 Hoenselaers-Vishveshwara Evreninde Maxwell Denklemlerinin Çözümü

Denklem(2.21)'de verilen metrik için, denklem(3.20c) ve denklem(3.20d) kullanılarak, kontravaryant ve kovaryant alan tensörleri

$$F^{01} = E^{(1)} + \frac{\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} B^{(3)} \quad F_{01} = -E^{(1)} \quad (4.83a)$$

$$F^{02} = \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} E^{(2)} \quad F_{02} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r E^{(2)} \quad (4.83b)$$

$$F^{03} = E^{(3)} - \frac{\sqrt{2} \sinh r}{\cosh r + 1} B^{(1)} \quad F_{03} = -E^{(3)} \quad (4.83c)$$

$$F^{12} = \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} B^{(3)} \quad F_{12} = (\cosh r - 1)E^{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r B^{(3)} \quad (4.83d)$$

$$F^{13} = -B^{(2)} \quad F_{13} = -B^{(2)} \quad (4.83e)$$

$$F^{23} = \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} B^{(1)} \quad F_{23} = -(\cosh r - 1)E^{(3)} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r B^{(1)} \quad (4.83f)$$

ve

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0 \quad (4.83g)$$

şeklinde yazılır. Denklem(3.20a) ve Denklem(3.20b)'de verilen Maxwell denklemleri, alan tensörünün bileşenleri cinsinden aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} (\sinh r \partial_r + \cosh r) \begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} + [(\cosh r - 1) \partial_r + \sinh r] \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ -E^{(3)} \end{pmatrix} \\ & + \partial_\phi \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r \partial_z \begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} - (\cosh r - 1) \partial_z \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.84a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r \partial_t \begin{pmatrix} -E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} - [(\cosh r - 1) \partial_t - \partial_\phi] \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ E^{(3)} \end{pmatrix} \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r \partial_z \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.84b)$$

$$-\partial_t \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} - \partial_r \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ -E^{(3)} \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.84c)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r \partial_t \begin{pmatrix} -E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} + [(\cosh r - 1) \partial_t - \partial_\phi] \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ E^{(1)} \end{pmatrix} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sinh r \partial_r + \cosh r) \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.84d)$$

Denklem(3.23b)'de verilen spinör kullanılarak, Maxwell denklemleri

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} (\sinh r \partial_r + \cosh r) G^{(1)} - i [(\cosh r - 1) \partial_r + \sinh r] G^{(3)} + \partial_\phi G^{(2)} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r \partial_z G^{(3)} + i (\cosh r - 1) \partial_z G^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (4.85a)$$

$$-\frac{i\sqrt{2}}{2} \sinh r \partial_t G^{(1)} - [(\cosh r - 1) \partial_t - \partial_\phi] G^{(3)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh r \partial_z G^{(2)} = 0 \quad (4.85b)$$

$$-\partial_t G^{(2)} + i\partial_r G^{(3)} - i\partial_z G^{(1)} = 0 \quad (4.85c)$$

$$-\frac{i\sqrt{2}}{2} \sinh r \partial_t G^{(3)} + [(\cosh r - 1)\partial_t - \partial_\phi] G^{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sinh r \partial_r + \cosh r) G^{(2)} = 0 \quad (4.85d)$$

olarak yazılırlar. Spinörün denklem(4.79)'da verilen tanımı kullanılarak, $\chi^{(1)}$ ve $\chi^{(2)}$ 'nin $\chi^{(3)}$ cinsinden ifadeleri aşağıdaki biçimde ifade edilirler:

$$\chi^{(1)} = \frac{1}{(w^2 - k_3^2)} i \left[k_3 \partial_r + \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} (w^2 \cosh r + w k_2 - w^2) \right] \chi^{(3)} \quad (4.86a)$$

$$\chi^{(2)} = \frac{1}{(k_3^2 - w^2)} \left[w \partial_r + \frac{\sqrt{2}}{\sinh r} (w k_3 \cosh r - w k_3 + k_2 k_3) \right] \chi^{(3)} \quad (4.86b)$$

Denklem(4.86a) ve denklem(4.86b), denklem(4.79) ve denklem(4.85a)-(4.85d)'de yerine konulursa $\chi^{(3)}$ için,

$$\partial_r^2 \chi^{(3)} + \coth r \partial_r \chi^{(3)} + \left[w^2 - k_3^2 + \sqrt{2} k_3 - \left(\sqrt{2} \frac{k_2 + w \cosh r - w}{\sinh r} \right)^2 \right] \chi^{(3)} = 0 \quad (4.87)$$

denklemini elde edilir. Denklem(4.87), denklem(2.21)'de verilen metrik için yazılan mDKP denkleminin indirgenmiş biçimi olan denklem(4.45) ile aynı olduğundan bu denklemlerin çözümleri de aynı olur.

Denklem(3.28a)-(3.28c) ve denklem(3.29) kullanılarak, mDKP denklemini ile

Maxwell denklemlerinin spinör bileşenleri arasındaki ilişki aşağıdaki biçimde kurulur:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -(F^{01} + i^* F^{10}) + \frac{i\sqrt{2}}{2} \sinh r (F^{02} + i^* F^{20}) \\ & - (\cosh r - 1)(F^{21} + i^* F^{12}) \end{aligned} \quad (4.88a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = (F^{03} + i^* F^{30}) + (\cosh r - 1)(F^{23} + i^* F^{32}) \quad (4.88b)$$

$$\begin{aligned} \varphi_4 = & (F^{01} + i^* F^{10}) + \frac{i\sqrt{2}}{2} \sinh r (F^{02} + i^* F^{20}) \\ & + (\cosh r - 1)(F^{21} - i^* F^{12}) \end{aligned} \quad (4.88c)$$

4.2.5 Rebouças Evreninde Maxwell Denklemlerinin Tam Çözümü

Denklem(3.37)'de verilen metrik için, denklem(3.20c) ve denklem(3.20d) kullanılarak, kontravaryant ve kovaryant alan tensörleri

$$F^{01} = E^{(1)} + 2 \coth 2r B^{(3)} \quad F_{01} = -E^{(1)} \quad (4.89a)$$

$$F^{02} = \frac{1}{\sinh 2r} E^{(2)} \quad F_{02} = -\sinh 2r E^{(2)} \quad (4.89b)$$

$$F^{03} = E^{(3)} - 2 \coth 2r B^{(1)} \quad F_{03} = -E^{(3)} \quad (4.89c)$$

$$F^{12} = \frac{1}{\sinh 2r} B^{(3)} \quad F_{12} = 2 \cosh 2r E^{(1)} + \sinh 2r B^{(3)} \quad (4.89d)$$

$$F^{13} = -B^{(2)} \quad F_{13} = -B^{(2)} \quad (4.89e)$$

$$F^{23} = \frac{1}{\sinh 2r} B^{(1)} \quad F_{23} = -\cosh 2r E^{(3)} + \sinh 2r B^{(1)} \quad (4.89f)$$

ve

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0 \quad (4.89g)$$

şeklinde yazılır. Denklem(3.20a) ve denklem(3.20b)'de verilen Maxwell denklemleri, alan tensörünün bileşenleri cinsinden aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\left(\sinh 2r \partial_r + 2 \cosh 2r \right) \begin{pmatrix} E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} + 2 \left[\cosh 2r \partial_r + 2 \sinh 2r \right] \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ -E^{(3)} \end{pmatrix} \quad (4.90a)$$

$$+ \partial_\phi \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} + \sinh 2r \partial_z \begin{pmatrix} E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} - 2 \cosh 2r \partial_z \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\sinh 2r \partial_t \begin{pmatrix} -E^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} - \left[2 \cosh 2r \partial_t - \partial_\phi \right] \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ E^{(3)} \end{pmatrix} - \sinh 2r \partial_z \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.90b)$$

$$- \partial_t \begin{pmatrix} E^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} - \partial_r \begin{pmatrix} B^{(3)} \\ -E^{(3)} \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.90c)$$

$$\sinh 2r \partial_t \begin{pmatrix} -E^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} + \left[2 \cosh 2r \partial_t - \partial_\phi \right] \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ E^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.90d)$$

$$+ \left(\sinh 2r \partial_r + 2 \cosh 2r \right) \begin{pmatrix} B^{(2)} \\ E^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

Denklem(3.23b)'de verilen karmal spinör kullanılarak, Maxwell denklemleri

$$\left(\sinh 2r \partial_r + 2 \cosh 2r \right) G^{(1)} - 2i \left[\cosh 2r \partial_r + 2 \sinh 2r \right] G^{(3)} \quad (4.91a)$$

$$+ \partial_\phi G^{(2)} + \sinh 2r \partial_z G^{(3)} + 2i \cosh 2r \partial_z G^{(1)} = 0$$

$$-i \sinh 2r \partial_t G^{(1)} - [2 \cosh 2r \partial_t - \partial_\phi] G^{(3)} - \sinh 2r \partial_z G^{(2)} = 0 \quad (4.91b)$$

$$-\partial_t G^{(2)} + i \partial_r G^{(3)} - i \partial_z G^{(1)} = 0 \quad (4.91c)$$

$$\begin{aligned} & -i \sinh 2r \partial_t G^{(3)} + [2 \cosh 2r \partial_t - \partial_\phi] G^{(1)} \\ & + (\sinh 2r \partial_r + 2 \cosh 2r) G^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (4.91d)$$

biçiminde yazılır. Spinörün denklem(4.79)'daki tanım kullanılarak, $\chi^{(1)}$ ve $\chi^{(2)}$ 'nin $\chi^{(3)}$ cinsinden ifadeleri aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\chi^{(1)} = \frac{1}{(w^2 - k_3^2)} i \left[k_3 \partial_r + \frac{1}{\sinh 2r} (2w^2 \cosh 2r + wk_2) \right] \chi^{(3)} \quad (4.92a)$$

$$\chi^{(2)} = \frac{1}{(k_3^2 - w^2)} \left[w \partial_r + \frac{1}{\sinh 2r} (2wk_3 \cosh 2r + k_2 k_3) \right] \chi^{(3)} \quad (4.92b)$$

Denklem(4.92a) ve denklem(4.92b), denklem(4.79) ve denklem(4.91a)-(4.91d)'de yerine konulursa $\chi^{(3)}$ için,

$$\partial_r^2 \chi^{(3)} + 2 \coth 2r \partial_r \chi^{(3)} + \left[w^2 - k_3^2 + 4k_3 - \left(\frac{k_2 + 2w \cosh 2r}{\sinh 2r} \right)^2 \right] \chi^{(3)} = 0 \quad (4.93)$$

denklemini elde edilir. Denklem(4.93), denklem(2.37)'de verilen metrik için yazılan mDKP denkleminin indirgenmiş biçimi olan denklem(4.56) ile aynı olduğundan bu denklemlerin çözümleri de aynı olur.

Denklem(3.28a)-(3.28c) ve denklem(3.29) kullanılarak mDKP denklemi ile Maxwell denklemlerinin spinör bileşenleri arasındaki ilişki aşağıdaki biçimde verilir:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -(F^{01} + i * F^{10}) + i \sinh 2r(F^{02} + i * F^{20}) \\ & - 2 \cosh 2r(F^{21} + i * F^{12}) \end{aligned} \quad (4.94a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = (F^{03} + i * F^{30}) + 2 \cosh 2r(F^{23} + i * F^{32}) \quad (4.94b)$$

$$\varphi_4 = (F^{01} + i * F^{10}) + i \sinh 2r(F^{02} + i * F^{20}) + 2 \cosh 2r(F^{21} + i * F^{12}) \quad (4.94c)$$

4.3 TARTIŞMALAR

Bulunan matematiksel sonuçlar üzerinde fiziksel sınırlamalar incelenebilir. Bunun için çözümlerin davranışının iyi bilinmesi gerekir. Bu kesimde, çalışılan beş evren modeli için bulunan çözümler incelenmiştir.

4.3.1 Robertson-Walker Evreni İçin Çözümün İncelenmesi

Bu evren modeli için mDKP denkleminin ikinci dereceden ifadesi denklem(4.11)'de

$$\partial_x^2 f_C = -(k_2^2 + k_3^2 - w^2) f_C \quad (4.95)$$

biçiminde verilmişti. Denklem(4.95)'den

$$\beta^2 = k_{\perp}^2 - w^2 \quad (k_{\perp}^2 = k_2^2 + k_3^2) \quad (4.96)$$

olmak üzere, $\beta^2 > 0$, $\beta^2 < 0$ ve $\beta^2 = 0$ koşulları için w ile momentumun bileşenleri arasında ilişki kurulur. Bu sonuçlar çizelge(4.1)'de gösterilmektedir.

RW evren modelinde üçüncü bileşen için yazılan genel çözümden, fotonun enerji spektrumunun sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Çizelge 4.1: RW evreninde çözümlerin frekans aralığının gösterimi: w 'nın gerçel olabilmesi için $k_{\perp} \geq 0$ olmalıdır

Denklem Çözümü	Frekans Koşulu	Frekans Aralığı	Yorum
$\Psi_C \approx \frac{e^{i(-w\eta+k_2y+k_3z)}}{a^2(\eta)} e^{\pm i\beta x}$	$w^2 < k_{\perp}^2$	$-k_{\perp} < w < k_{\perp}$	Harmonik salıncı davranışı gösterir.
$\Psi_C \approx \frac{e^{i(-w\eta+k_2y+k_3z)}}{a^2(\eta)} (ax+b)$	$w^2 = k_{\perp}^2$	$w = k_{\perp}$	Çizgisel davranış gösterir.
$\Psi_C \approx \frac{e^{i(-w\eta+k_2y+k_3z)}}{a^2(\eta)} e^{\pm i\beta x}$	$w^2 > k_{\perp}^2$	$w > k_{\perp}$ ve $w < -k_{\perp}$	Hiperbolik davranış gösterir.

4.3.2 Kantowski-Sachs Evreni İçin Çözümün İncelenmesi

KS evren modeli için mDKP denkleminin ikinci dereceden ifadesi

$$\partial_x^2 f_C + \cot x \partial_x f_C + \left[w^2 - \frac{k_2^2}{\sin^2 x} - k_3^2 \right] f_C = 0 \quad (4.97)$$

biçiminde verilen bu denklemde, birinci türevi içeren terimi yok etmek için $f_C = \sin^{\frac{1}{2}} x \Phi_C$ şeklinde dönüşüm tanımlanır. Burada amaç harmonik salıncı denkleminin biçimsel ifadesini elde edebilmektir. İşlem sonucunda

$$\partial_x^2 \Phi_C + \left[\frac{1}{2} + w^2 + \frac{1-4k_2^2}{4\sin^2 x} - k_3^2 \right] \Phi_C = 0 \quad (4.98)$$

denklemini bulunur. Denklem(4.98)'in asimptotik davranışını veren çözümü bulabilmek için $\sin x \rightarrow \pm 1$ koşulu altında denklem yeniden değerlendirilir. Bu koşul kullanılarak denklem(4.98)

$$\partial_x^2 \Phi_C + \left[\frac{3}{4} + w^2 - k_2^2 - k_3^2 \right] \Phi_C = 0 \quad (4.99)$$

biçimine indirgenir. Burada

$$\beta^2 = \frac{3}{4} + w^2 - k_{\perp}^2 \quad (k_{\perp}^2 = k_2^2 + k_3^2) \quad (4.100)$$

tanımı kullanılarak, $\beta^2 > 0$, $\beta^2 < 0$ ve $\beta^2 = 0$ koşulları için w ile momentum bileşenleri arasında ilişki kurulur. Bu sonuçlar çizelge(4.2)'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.2: KS evreninde $\sin x \rightarrow \pm 1$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi: w 'nın gerçel olabilmesi için üç durumda da $k_{\perp} \geq 0.87$ olmalıdır.

Denklem Çözümü	Frekans Koşulu	Frekans Aralığı	Yorum
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2y+k_3z)}}{\sqrt{\sin x}} e^{\pm i\beta x}$	$w^2 > k_{\perp}^2 - \frac{3}{4}$	$w > \sqrt{k_{\perp}^2 - \frac{3}{4}}$ ve $w < -\sqrt{k_{\perp}^2 - \frac{3}{4}}$	Harmonik salıncı davranışı gösterir.
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2y+k_3z)}}{\sqrt{\sin x}} (ax + b)$	$w^2 = k_{\perp}^2 - \frac{3}{4}$	$w = \pm \sqrt{k_{\perp}^2 - \frac{3}{4}}$	Çizgisel davranış gösterir.
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2y+k_3z)}}{\sqrt{\sin x}} e^{\pm \beta x}$	$w^2 < k_{\perp}^2 - \frac{3}{4}$	$-\sqrt{k_{\perp}^2 - \frac{3}{4}} < w < \sqrt{k_{\perp}^2 - \frac{3}{4}}$	Hiperbolik davranış gösterir.

$-1 < \sin x < 1$ aralığı için denklem(4.98) yeniden değerlendirilerek frekans koşulları belirlenir. Bunun için, önce değişkene bağlı olarak

$$\beta^2(x) = \frac{1}{2} + w^2 + \frac{1-4k_2^2}{4\sin^2 x} - k_3^2 \quad (4.101)$$

şeklinde bir nicelik tanımlanır. Sonra, $\beta^2(x) > 0$, $\beta^2(x) = 0$ ve $\beta^2(x) < 0$ olma koşulları belirlenerek $\sin x$ ile w ve k_{\perp} arasındaki ilişki kurulur. Bu ilişki çözümlerin davranış biçimlerini veren aralıkları belirler. Bu aralıklar çizelge(4.3)'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.3: KS evreninde $-1 < \sin x < 1$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi: w 'nın gerçel olabilmesi için üç durumda da $k_{\perp} \geq 0.5$ olmalıdır.

Frekans Koşulu	Frekans Aralığı	Yorum
$\sin^2 x > \frac{4k_2^2 - 1}{4w^2 - 4k_3^2 + 2}$	$\sin x > \sqrt{\frac{4k_2^2 - 1}{4w^2 - 4k_3^2 + 2}}$ ve $\sin x < -\sqrt{\frac{4k_2^2 - 1}{4w^2 - 4k_3^2 + 2}}$	Harmonik salıncı davranışı gösterir.
$\sin^2 x = \frac{4k_2^2 - 1}{4w^2 - 4k_3^2 + 2}$	$\sin x = \pm \sqrt{\frac{4k_2^2 - 1}{4w^2 - 4k_3^2 + 2}}$	Çizgisel davranış gösterir.
$\sin^2 x < \frac{4k_2^2 - 1}{4w^2 - 4k_3^2 + 2}$	$-\sqrt{\frac{4k_2^2 - 1}{4w^2 - 4k_3^2 + 2}} < \sin x < \sqrt{\frac{4k_2^2 - 1}{4w^2 - 4k_3^2 + 2}}$	Hiperbolik davranış gösterir.

Denklemler(4.26)'da verilen genel çözümün sonlu olabilmesi için

$$c - a = -n \quad (4.102)$$

olmalıdır. Bu koşul için

$$n = -\frac{1}{2}(1 + k_2) + \sqrt{w^2 - k_3^2 + \frac{1}{4}} \quad (4.103)$$

olmak üzere, fotonun KS evren modelindeki enerji spektrumu

$$w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{N^2 - 1}{4} + k_2 N + k_{\perp}^2} \quad (4.104)$$

ifadesi ile verilir. Burada $N = 2n + 1$ dir.

4.3.3 Som-Raychaudhuri Evreni İçin Çözümün İncelenmesi

Kesim 4.1.3'de SR evren modeli için foton denkleminin üçüncü bileşeninin sağladığı denklem

$$\partial_u^2 \Phi_C + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{u} + \frac{(1-4\mu^2)}{4u^2} \right] \Phi_C = 0 \quad (4.105)$$

olarak bulunmuştu. Bu denklemin asimptotik davranışı incelenerek bazı sonuçlar çıkartılabilir. u 'nun büyük değerleri için parantez içindeki son iki terim ihmal edilebilir ve denklem

$$\partial_u^2 \Phi_C - \frac{1}{4} \Phi_C = 0 \quad (4.106)$$

durumunu alır. Bu denklemin çözümü

$$\Phi_C \approx e^{\pm \frac{1}{2}u} \quad (4.107)$$

biçimindedir ve bu durumda genel çözüm

$$\Psi_C \rightarrow e^{i(-wt+k_2\phi+k_2z)} \frac{1}{\sqrt{wr}} e^{\pm \frac{1}{2}wr^2} \quad (w > 0) \quad (4.108)$$

olur.

Denklem(4.105)'den

$$\beta^2(u) = -\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{u} + \frac{(1-4\mu^2)}{4u^2} \quad (4.109)$$

olmak üzere, $\beta^2(wr^2) > 0$, $\beta^2(wr^2) = 0$ ve $\beta^2(wr^2) < 0$ olma koşulları belirlenerek wr^2 ile momentum ve enerji arasındaki ilişki kurulur. Bu ilişki çözümlerin davranış biçimlerini veren aralıkları belirler. Bu aralıklar çizelge(4.4)'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.4: SR evreninde $0 < u < \infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi: u 'nun gerçel olabilmesi için üç durumda da $\kappa \geq \sqrt{\mu^2 - 1/4}$ olmalıdır.

Frekans Koşulu	Frekans Aralığı	Yorum
$u^2 - 4\kappa u + 4\mu^2 - 1 < 0$	$2\kappa - \sqrt{4\kappa^2 - 4\mu^2 + 1} < u$ $< 2\kappa + \sqrt{4\kappa^2 - 4\mu^2 + 1}$	Harmonik salıncı davranışı gösterir.
$u^2 - 4\kappa u + 4\mu^2 - 1 = 0$	$u = 2\kappa \pm \sqrt{4\kappa^2 - 4\mu^2 + 1}$	Çizgisel davranış gösterir.
$u^2 - 4\kappa u + 4\mu^2 - 1 > 0$	$u < 2\kappa - \sqrt{4\kappa^2 - 4\mu^2 + 1}$ ve $u > 2\kappa + \sqrt{4\kappa^2 - 4\mu^2 + 1}$	Hiperbolik davranış gösterir.

mDKP denkleminin üçüncü bileşeni için yazılan genel çözüm denklem(4.38)'de verilmişti. Bu denklemin sonlu olabilmesi için

$$\mu - \kappa + \frac{1}{2} = -n \quad (4.110)$$

olmalıdır. Bu koşul için

$$n = \frac{w}{4} + \frac{2k_3 - k_3^2}{4w} - k_2 - \frac{1}{2} \quad (4.111)$$

olmak üzere, fotonun SR evrenindeki enerji spektrumu

$$w_{1,2} = N + 2k_2 \pm \sqrt{(N + 2k_2)^2 + k_3(k_3 - 2)} \quad (4.112)$$

ifadesi ile verilir. Burada $N = 2n + 1$ dir.

4.3.4 Hoenselaers-Vishveshwara Evreni İçin Çözümün İncelenmesi

Kesim 4.1.4’de HV evren modeli için mDKP denkleminin üçüncü bileşeninin sağladığı denklem

$$\partial_r^2 f_C + \coth r \partial_r f_C + \left[w^2 - k_3^2 + \sqrt{2} k_3 - \left(\frac{k_2 + w \cosh r - w}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh r} \right)^2 \right] f_C = 0 \quad (4.113)$$

olarak bulunmuştu. Bu denklemde $f_C = \sinh^{\frac{1}{2}} r \Phi_C$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$\partial_r^2 \Phi_C + \left[A + \frac{B + C \cosh r}{\sinh^2 r} \right] \Phi_C = 0 \quad (4.114)$$

elde edilir. Burada

$$A = \sqrt{2} k_3 - k_3^2 - w^2 - \frac{1}{4} \quad (4.115a)$$

$$B = 4k_2 w - 4w^2 - 2k_2^2 + \frac{1}{4} \quad (4.115b)$$

$$C = 4w^2 - 4k_2 w \quad (4.115c)$$

olmak üzere, $\sinh r$ ’nin büyük değerleri için parantez içindeki son terim ihmal edilerek, denklem(4.114)

$$\partial_r^2 \Phi_C + \left(\sqrt{2} k_3 - k_3^2 - w^2 - \frac{1}{4} \right) \Phi_C = 0 \quad (4.116)$$

biçimini alır. Denklem(4.116)’dan

$$\beta^2 = \sqrt{2k_3 - k_3^2} - w^2 - \frac{1}{4} \quad (4.117)$$

tanımı yapılarak, $\beta^2 > 0$, $\beta^2 = 0$ ve $\beta^2 < 0$ olma koşulları belirlenerek w ile momentum bileşenleri arasındaki ilişki bulunur. Bu aralıklar çizelge(4.5)'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.5: HV evreninde $\sinh r \rightarrow \pm\infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi: w 'nın gerçel olabilmesi için üç durumda da $0.37 \leq k_3 \leq 1.37$ olmalıdır.

Denklem Çözümü	Frekans Koşulu	Frekans Aralığı	Yorum
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2\phi+k_3z)}}{\sqrt{\sinh r}} e^{\pm i\beta r}$	$w^2 < \sqrt{2k_3} - k_3^2 - \frac{1}{4}$	$-\sqrt{\sqrt{2k_3} - k_3^2} - \frac{1}{4} < w < \sqrt{\sqrt{2k_3} - k_3^2} - \frac{1}{4}$	Harmonik salınıcı davranışı gösterir.
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2\phi+k_3z)}}{\sqrt{\sinh r}} (ar + b)$	$w^2 = \sqrt{2k_3} - k_3^2 - \frac{1}{4}$	$w = \pm \sqrt{\sqrt{2k_3} - k_3^2} - \frac{1}{4}$	Çizgisel davranış gösterir.
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2\phi+k_3z)}}{\sqrt{\sinh r}} e^{\pm\beta r}$	$w^2 > \sqrt{2k_3} - k_3^2 - \frac{1}{4}$	$w < -\sqrt{\sqrt{2k_3} - k_3^2} - \frac{1}{4}$ ve $w > \sqrt{\sqrt{2k_3} - k_3^2} - \frac{1}{4}$	Hiperbolik davranış gösterir.

$-\infty < r < \infty$ aralığı için, denklem(4.114)'den

$$\beta^2(r) = A + \frac{B + C \cosh r}{\sinh^2 r} \quad (4.118)$$

tanımı yapılarak $\beta^2(r) > 0$, $\beta^2(r) = 0$ ve $\beta^2(r) < 0$ olma koşulları belirlenir ve r ile momentum ve enerji arasındaki ilişki kurulur. Bu ilişkiler çizelge(4.6)'da gösterilmektedir.

Çizelge 4.6: HV evreninde $-\infty < r < \infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi: r 'nin gerçel olabilmesi için üç durumda da $(C/2A)^2 - (B/A) + 1 \geq 0$ olmalıdır.

Frekans Koşulu	Frekans Aralığı	Yorum
$\beta^2(r) > 0$	$\cosh r > -\frac{C}{2A} + \sqrt{\left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{B}{A} + 1}$ <p style="text-align: center;">ve</p> $\cosh r < -\frac{C}{2A} - \sqrt{\left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{B}{A} + 1}$	Harmonik salınıcı davranışı gösterir.
$\beta^2(r) = 0$	$\cosh r = -\frac{C}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{B}{A} + 1}$	Çizgisel davranış gösterir.
$\beta^2(r) < 0$	$-\frac{C}{2A} - \sqrt{\left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{B}{A} + 1} < \cosh r$ $< -\frac{C}{2A} + \sqrt{\left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{B}{A} + 1}$	Hiperbolik davranış gösterir.

Denklem(4.49)'da verilen, mDKP denkleminin HV evreninde yapılan çözümünün üçüncü bileşeninin sonlu olabilmesi için

$$c' - a' = -n \quad (4.119)$$

olmalıdır. Bu koşul için

$$n = \left(\sqrt{2}w - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{w^2 + 2wk_2 - \sqrt{2}k_3 + k_3^2 + \frac{1}{4}} \quad (4.120)$$

olmak üzere, fotonun HV evrenindeki enerji spektrumları

$$w_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}N + k_2 \pm \sqrt{\frac{(N^2 - 1)}{4} + \sqrt{2}k_2N + k_3^2 - \sqrt{2}k_3} \quad (4.121)$$

ifadeleri ile verilir. Burada $N = 2n + 1$ dir.

4.3.5 Rebouças Evreni İçin Çözümün İncelenmesi

Kesim 4.1.5'de R evren modeli için mDKP denkleminin üçüncü bileşeninin sağladığı denklem

$$\partial_r^2 f_C + 2 \coth 2r \partial_r f_C + \left[w^2 - k_3^2 + 4k_3 - \left(\frac{k_2 + 2w \cosh 2r}{\sinh 2r} \right)^2 \right] f_C = 0 \quad (4.122)$$

olarak bulunmuştur. Bu denklemde $f_C = \sinh^{-\frac{1}{2}} 2r \Phi_C$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$\partial_r^2 \Phi_C + \left[D - \frac{(E + F \cosh 2r)}{\sinh^2 2r} \right] \Phi_C = 0 \quad (4.123)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$D = 4k_3 - k_3^2 - 3w^2 - 1 \quad (4.124a)$$

$$E = k_2^2 + 4w^2 - 1 \quad (4.124b)$$

$$F = 4k_2 w \quad (4.124c)$$

olmak üzere, $\sinh 2r$ 'nin büyük değerleri için parantez içindeki son terim ihmal edilerek, denklem(4.123)

$$\partial_r^2 \Phi_C + (4k_3 - k_3^2 - 3w^2 - 1) \Phi_C = 0 \quad (4.125)$$

biçimini alır. Denklem(4.125)'den

$$\beta^2 = 4k_3 - k_3^2 - 3w^2 - 1 \quad (4.126)$$

olmak üzere, $\beta^2 > 0$, $\beta^2 = 0$ ve $\beta^2 < 0$ olma koşulları belirlenerek w ile momentum bileşenleri arasındaki ilişki bulunur. Bu ilişkiler çizelge(4.7)'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.7: R evreninde $\sinh r \rightarrow \pm\infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi: w 'nın gerçel olabilmesi için üç durumda da $0.27 \leq k_3 \leq 3.73$ olmalıdır.

Denklem Çözümü	Frekans Koşulu	Frekans Aralığı	Yorum
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2\phi+k_3z)}}{\sqrt{\sinh 2r}} e^{\pm i\beta r}$	$w^2 < \frac{4}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_3^2 - \frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{4}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_3^2 - \frac{1}{3}} < w < \sqrt{\frac{4}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_3^2 - \frac{1}{3}}$	Harmonik salınıcı davranış gösterir.
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2\phi+k_3z)}}{\sqrt{\sinh 2r}} (ar + b)$	$w^2 = \frac{4}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_3^2 - \frac{1}{3}$	$w = \pm \sqrt{\frac{4}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_3^2 - \frac{1}{3}}$	Çizgisel davranış gösterir.
$\Psi_C \rightarrow \frac{e^{i(-wt+k_2\phi+k_3z)}}{\sqrt{\sinh 2r}} e^{\pm\beta r}$	$w^2 > \frac{4}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_3^2 - \frac{1}{3}$	$w < -\sqrt{\frac{4}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_3^2 - \frac{1}{3}}$ ve $w > \sqrt{\frac{4}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_3^2 - \frac{1}{3}}$	Hiperbolik davranış gösterir.

$-\infty < r < \infty$ aralığı için, denklem(4.123)'den

$$\beta^2(r) = D - \frac{(E + F \cosh 2r)}{\sinh^2 2r} \quad (4.127)$$

tanımı yapılarak, $\beta^2(r) > 0$, $\beta^2(r) = 0$ ve $\beta^2(r) < 0$ olma koşulları belirlenir ve r ile momentum ve enerji arasındaki ilişki kurulur. Bu ilişkiler çizelge(4.8)'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.8: R evreninde $-\infty < r < \infty$ olması durumundaki çözümlerin frekans aralığının gösterimi: r 'nin gerçel olabilmesi için üç durumda da $(F/2D)^2 + (E/D) + 1 \geq 0$ olmalıdır.

Frekans Koşulu	Frekans Aralığı	Yorum
$\beta^2(r) > 0$	$\cosh 2r > \frac{F}{2D} + \sqrt{\left(\frac{F}{2D}\right)^2 + \frac{E}{D} + 1}$ ve $\cosh 2r < \frac{F}{2D} - \sqrt{\left(\frac{F}{2D}\right)^2 + \frac{E}{D} + 1}$	Harmonik salınıcı davranışı gösterir.
$\beta^2(r) = 0$	$\cosh 2r = \frac{F}{2D} \pm \sqrt{\left(\frac{F}{2D}\right)^2 + \frac{E}{D} + 1}$	Çizgisel davranış gösterir.
$\beta^2(r) < 0$	$\frac{F}{2D} - \sqrt{\left(\frac{F}{2D}\right)^2 + \frac{E}{D} + 1} < \cosh 2r$ $< \frac{F}{2D} + \sqrt{\left(\frac{F}{2D}\right)^2 + \frac{E}{D} + 1}$	Hiperbolik davranış gösterir.

Denklemler(4.60)'da verilen, mDKP denkleminin R evreni için elde edilen üçüncü bileşenin sonlu olabilmesi için

$$f - d = -n \quad (4.128)$$

olmalıdır. Bu koşul için

$$n = -\frac{1}{2} \left[(1 + k_2) - \sqrt{3w^2 + k_3^2 - 4k_3 + 1} \right] \quad (4.129)$$

olmak üzere fotonun R evrenindeki enerji spektrumları

$$w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3} (N^2 - 1 + 2k_2 N - k_3^2 + 4k_3)} \quad (4.130)$$

ifadeleri ile verilir. Burada $N = 2n + 1$ dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; Robertson-Walker (yöndeş, türdeş ve genişleyen), Kantowski-Sachs (yöndeş olmayan, türdeş ve durağan), Som-Raychaudhuri (yöndeş olmayan, türdeş ve dönen), Hoenselaers-Vishveshwara (yöndeş olmayan, türdeş ve dönen) ve Rebouças (yöndeş olmayan, türdeş ve dönen) evren modelleri için, mDKP denkleminin Maxwell denklemleriyle eşdeğerliliği ve dolayısıyla bu denklemlerin çözümlerinin de aynı olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmayla, her bir yapıdan en az bir örnek evren modeli seçilerek mDKP denklemiyle Maxwell denklemlerinin eşdeğerliliğinin gösterilmesi, en genel metrikler için bu eşdeğerliliğin gösterilebileceği umudu ortaya konulmaktadır.

Fotonu betimlemenin yolu, klasik elektrodinamiğin temel denklemleri olan Maxwell denklemlerinde yer alan, elektromanyetik alanların kuantumlanmasıdır. Bu şekilde klasik mekanikten kuantum mekaniğine geçilmektedir. Genellemenin yapılabileceğine ışık tutan buradaki eşdeğerlilik ise, kuantum mekaniğinde elektronu betimleyen Dirac denklemi gibi, klasik elektrodinamiğe başvurmaksızın, fotonu betimleyen bir denklemin var olduğuna işaret etmektedir. Bu denklem de mDKP denklemidir.

Bu çalışmada incelenen ikinci konu, bulunan çözümlerin, ele alınan her bir evren modeli için, harmonik davranış bölgelerinin belirlenmesi olmuştur. Bu çözümlere iki aşamalı gerçekleşmiştir: Birincisi, denklemin asimptotik davranışlarında harmonik davranış biçimi aranırken, frekans ile momentum bileşeni arasında ilişkinin kurulması; ikincisi ise, asimptotik bölgenin dışında kalan bölgelerde harmonik davranış biçiminin belirlenebilmesi için değişkenin frekans ve momentum bileşenleri arasındaki bağıntıların bulunmasıdır. Birinci aşamada çözümler yapılırken, w 'nın gerçel olabilmesi için, SR evreninde harmonik davranış gözlenemez iken, RW evreninde $k_{\perp} \geq 0$, KS evreninde $k_{\perp} \geq 0,87$, HV evreninde $0,37 \geq k_3 \geq 1,37$ ve R evreninde $0,27 \geq k_3 \geq 3,73$ olduğu görülmüştür. Burada görüldüğü gibi, HV ve R evrenlerinde harmonik davranışın olabilmesi için momentumun üçüncü bileşeni olan k_3 'e bir sınırlama getirilmiştir. İkinci aşamadaki

çözümlemede ise, değişkenlerin gerçel olabilmeleri için; RW evreninde koşul yok iken, KS evreninde $k_1 \geq 0$, SR evreninde $\kappa \geq \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}$, HV evreninde

$$\left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B}{A}\right) + 1 \geq 0, \text{ ve R evreninde } \left(\frac{F}{2D}\right)^2 + \left(\frac{E}{D}\right) + 1 \geq 0 \text{ olduğu ortaya çıkmıştır.}$$

Yukarıda ifade edildiği gibi, HV ve R evrenlerinde harmonik davranışın olabilmesi için momentumun ikinci ve üçüncü bileşeni olan k_2 ve k_3 'e bir sınırlama getirilmiştir.

Bu çalışmada araştırılan üçüncü konu ise, her bir metrik için, elde edilen çözümlerin sonlu olabilmeleri durumundaki gerekli olan koşullar kullanılarak, enerji bağıntılarının bulunmasıdır. Bu çerçevede RV evreninde enerji sürekli değerler alırken, diğer dört evren modelinde enerjinin kuantumlu değerler almakta olduğu gösterilmiştir. Bu da foton enerjisinin bu evren modellerinde kuantumlu olduğu anlamına gelmektedir.

Bu çalışma; kütlelessiz, spin-1 parçacığı olan fotonun eğri uzay-zamandaki davranışının daha iyi anlaşılabilmesi için, farklı bir yol ve tekniğin var olduğunu ortaya koymakla, bugünden sonra bu alanda yapılacak çalışmalara ışık tutacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Lancsoz, C. "Über eine stationäre Kosmologie im Sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie", Z. Physik **21**: 73, (1924)
- [2] Maitra, S. "Stationary Dust-filled Cosmological Solution with $\Lambda = 0$ and without Closed Timelike Lines", J. Math. Phys., **7**: 1025-1030, (1966)
- [3] Wright, J. P. "Solution of Einstein's Field Equation for a Rotating, Stationary, and Dust-filled Universe", J. Math. Phys., **6**: 103-105, (1965)
- [4] Ozsvath, I., Schücking, E. "Finite Rotating Universe", Ann. Phys., **55**:166,(1969)
- [5] Matzner, R. A. "Closed Rotating cosmologies Containing Matter Described by the Kinetic Theory. A: Formalism", Ann. Phys., **65**:438-481, (1971)
Matzner, R. A. "Closed Rotating cosmologies Containing Matter Described by the Kinetic Theory. B: Small Anisotropy; Application to Observations", Ann. Phys., **65**:482-505, (1971)
- [6] Rebouças, M. J., de Lima, J. A. S. "Time Dependent, Finite, Rotating Universe", J. Math. Phys., **22**: 2699-2703, (1981); Erratum, J. Math. Phys., **23**:1547, (1982)
- [7] Sviestins, E. "Some Rotating, Time-dependent Bianchi Type-IX Cosmologies with Heat Flow", Gen. Rel. Grav. **17**: 521-523, (1985)
- [8] Ruzmaikina, T. V., Ruzmaikin, A. A. "Evolution of Cosmological Model with Rotation", Sov.Phys.JETP, **29**: 934-936, (1969)
- [9] Sviestins, E., Bradley, J. "Some Rotating, Time-dependent Bianchi Type-VIII Cosmologies with Heat Flow", Gen. Rel. Grav. **16**: 1119-1133, (1984)
- [10] Fennely, A. J. "Effects of a Rotation of the Universe on the Number Counts of a Radio Sources: Gödel's Universe" Astrophys. J., **207**: 693-699, (1976)
- [11] Vaidya, P. C., Patel, L. K. "A Rotating Homogeneous Universe with an Electromagnetic Field", Gen. Rel. Grav. **16**: 355-364, (1984)
- [12] Pinheiro, C., Khanna, F.C. "Gödel Type Solution with Rotation, Expansion and Closed Time-Like Curves", arxiv:hep-th/0006125
- [13] Singh, S. "Cosmological Models with Shear and Rotation", J. Astrophys. **20**: 79-88, (1999)
- [14] Carneiro, S. "A Gödel-Friedmann Cosmology?", Phys.Rev. D, **61**: 083506,

(2000)

- [15] Gamov, G. "Rotating Universe?", *Nature*, **158**: 549, (1946)
- [16] Gödel, K. "An Example of New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation", *Rev. Mod. Phys.*, **21**: 447-450, (1949)
- [17] Ray, D. "Gödel-Like Cosmological Solutions", *J. Math. Phys.* **21(12)**: 2797-2798, (1980)
- [18] Obukhov, Y. N., Korotky, V. A., Hehl, F. W. "On the Rotation of the Universe", arxiv: astro-ph/9705243
- [19] Novello, M., Rebouças, M. "The Stability of a Rotating Universe", *Astro. Phys. J.*, **225**: 719-724, (1978)
- [20] Obukhov, Y. N., Korotky, V. A. "On Cosmic Rotation", *Gravity, Particles and Space-Time*, Pronin, P. and Sardanashvily, G., World Scientific: Singapore, 421-439 (1996)
- [21] Tetrode, H. "Allgemein-relativistische Quantentheorie des Elektrons" *Z. Phys.* **50**: 336 (1928)
- [22] Weyl, H. "Electron and Gravitation", *Z. Phys.* **56**: 330 (1929)
- [23] Fock, V. A. "Geometrization of the Dirac electron theory", *Z. Phys.* **57**, 261-277 (1929)
- [24] Fock, V. A., Ivanenko, D. "Quantum Linear Geometry and Parallele Displacement", *Compt. Rend. Acad. Sci.* **188**: 1470-1472, (1929)
- [25] Fock, V. A. "On Dirac Equations in General Relativity", *Compt. Rend. Acad. Sci.* **189**: 25-28 (1929)
- [26] Bade, W. L., Jehle, H. "An Introduction to Spinors", *Rev. Mod. Phys.* **25**, 714 (1953)
- [27] Brill, D., Wheeler, J. "Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields", *Rev. Mod. Phys.* **29**, 465 (1957)
- [28] Birrel, N. D., Davies, P. C. W. "Quantum Fields in Curved Space" Cambridge University, New York, (1982)
- [29] Petiau, G., *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.* **16(2)**, (1936)
- [30] Weinberg, S. "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", Wiley, New York, (1970)

- [31] Villalba, V. M. “Creation of Scalar Particles in the Presence of a Constant Electric Field in an Anisotropic Cosmological Universe”, arxiv:hep-th/99090747, (1999)
- [32] Villalba, V. M., Greiner, W. “Creation of Scalar and Dirac Particles in the Presence of a Time Varying Electric Field in an Anisotropic Bianchi Type I Universe”, Phys. Rev. D, **65**, 025007 (2001)
- [33] Parker, L. “Particle Creation in Expanding Universes”, Phys. Rev. Lett. **21(8)** (1968)
- [34] Hawking, S. W., Ross, S. F. “Pair Production of Black Hole on Cosmic Strings”, Phys. Rev. Lett. **75**:3382-3385, (1995)
- [35] Hawking, S. W., Bousso, R. “Pair Creation of Black Hole During Inflation”, Phys. Rev. D, **54**:6312-6322, (1996)
- [36] Villalba, V. M. “Dirac Spinor in a Nonstationary Gödel-Type Cosmological Universe, Mod. Phys. Lett. A, **8**: 3011-3018, (1993)
- [37] Saha, B. “Dirac Spinor in Bianchi-I Universe with Time Dependent Gravitational and Cosmological Constant, Mod. Phys. Lett. A, **16**: 1287-1296, (2001)
- [38] Villalba, V. M., Mateu, J. “Vacuum Effects in an Asymptotically Uniformly Accelerated Frame with a Constant Magnetic Field”, Phys. Rev. D, **61**: 025007, (2000)
- [39] Pimentel, L. O., Macias, A. “Klein-Gordon and Weyl Equations in the Gödel Universe, Phys. Lett. A, **117** (7)
- [40] Figueiredo, B. D. B., Soares, I. D., Tiommo, J. “Gravitational Coupling of Klein-Gordon and Dirac particles to Matter Vorticity and Spacetime Torsion”, Class. Quant. Grav, **9**: 1593-1617, (1992)
- [41] Kovalyov M., Legare, M. “The Dirac Equation in Robertson-Walker Spaces: A Class of Solutions”, J. Math. Phys., **31** (1), (1990)
- [42] Shishkin, G. V., Cabos, W. D. “Dirac Equation in External Fields: Separation of Variables in Nondiagonal Metrics”, J. Math. Phys., **33** (1), (1992)
- [43] Barut, A. O., Duru, I. H. “Exact Solutions of the Dirac Equation in Spatially Flat Robertson-Walker Space-Time”, Phys. Rev. D, Phys. Rev. D, **36**: 3705-3711 (1987)

- [44] Villalba, V. M., Percoco, U. “Separation of Variables and Exact Solution to Dirac and Weyl Equations in Robertson-Walker Spacetimes”, *J. Math. Phys.*, **31** (3), (1990)
- [45] Krori, K. D., Borgohain P., Kar, P. K., Das, D. “Exact Scalar and Spinor Solutions in Some Rotating Universes”, *J. Math. Phys.*, **29** (7), (1988)
- [46] Rebouças, M. J. “A Rotating Universe with Violation of Causality”, *Phys. Lett.*, **70A** (3)
- [47] Havare, A., Yetkin, T. “Solution of Klein-Gordon and Weyl Equations in Topologically Massive Space-Time”, *Balkan Phys. Lett.*, S. I., (2001)
- [48] Portugal, R. “Dirac Equation in Spatially Homogeneous Cosmological Models”, *Nuovo Cimento*, **112** (12): 1625-1635, (1997)
- [49] Pimentel, L. O. “The Klein-Gordon Equation in Some Anisotropic Cosmologies”, *Gen. Rel. Grav.*, **24**(9):985-989, (1992)
- [50] Villalba, V. M., Catala, E. I. “Separation of Variables and Exact Solution of the Klein-Gordon and Dirac Equations in an Open Universe”, *J. Math. Phys.*, **43** (10): 4909-4920, (2002)
- [51] Dvoeglazov, V. “Generalized Maxwell and Weyl Dirac Equations for Massless Particles”, *Rev. Mex. Fis.*, **49S1**: 99-103, (2003)
- [52] Cohen, J. M., Vishveshwara, C. V, Dhurandhar, S. V. “Electromagnetic Fields in the Gödel Universe”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13**: 933-938, (1980)
- [53] Saibalatov, R. X. “Electromagnetic Field in Causal and Acausal Gödel-Type Space-Times”, *Gen. Rel. Grav.*, **27**: 697-711, (1994)
- [54] Havare, A., Yetkin, T., Aydoğdu, O. “Exact Solution of the Massless DKP Equation in a Nonstationary Gödel-Type Cosmological Universe”, (*Int. J. Mod. Phys. D*'ye gönderildi, 2003)
- [55] Havare, A., Yetkin, T. “The Massless DKP Equation and Maxwell Equations in Bianchi Type III spacetimes, *Chin. J. Phys.*, **41**(10), (2003)
- [56] Duffin, R. J., *Phys. Rev.* **54**:1114 (1938);
 Kemer, N., *Proc. Roy. Soc. (London)* **A173** : 91 (1939);
 Kemmer, N., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **39**, 189{96 (1943);
 Taketani, M., Sakata, S., *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **22**: 757-70 (1940)
 [Reprinted in *Suppl. Progr. Theor. Phys.* **22**: 84 (1955)]

- [57] Gribov V. "QCD at large and short distances", Eur. Phys. J. **C10**:71,(1999)
- [58] Red'kov, V. M. "Generally relativistic Duffin-Kemmer formalism and behaviour of quantum-mechanical particle of spin-1 in the Abelian monopole field" quant-ph/9812007
- [59] Lunardi, J. T., Pimentel, B. M., Teixeira, R. G. "in Geometrical Aspects of Quantum Fields", Proceedings of the 2000 Londrina Workshop, Londrina, Brazil, Bytsenko, A. A., Golcalves, A. E., Pimentel, B. M.(ed), World Scientific, Singapore, **101**,(2001)
- [60] Ünal, N. "A Simple Model of the Classical Zitterbewegung: Photon Wave Function", Found. Phys. **27**: 795 (1997)
- [61] Ünal, N., Sucu, Y. "Solution of Massless Spin One Wave Equation in Robertson-Walker Space-time", Int.J.Mod.Phys. **A17**:1137-1147, (2002)
- [62] Havare, A., Yetkin, T., "Exact Solution of Photon Equation in Stationary Gödel-type and Gödel Space-Times", Class. Quant. Grav. **19**: 2783-2791(2002)

ÖZGEÇMİŞ

1979 Yılında Elazığ'da doğdum. 1990 ve 1993 yıllarında sırasıyla Taşucu İlkokulu ve Taşucu Ortaokulundan mezun oldum. 1996 yılında lise öğrenimimi Elazığ Balak Gazi Lisesinde bitirdikten sonra 1997 yılında öğrenci seçme ve yerleştirme sınavıyla Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümüne başladım. 2001 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl aynı bölümde yüksek lisansa başladım. 2001 yılında aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladım ve hala bu görevi sürdürmekteyim.

