YAKLAŞIM TEORİSİNDE WHITNEY SABİTLERİ ÜZERİNE

TUNCAY TUNÇ

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH

MERSİN
Temmuz - 2004

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH

Jüri Üyesi
Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ

Jüri Üyesi
Doç.Dr. H. Seferoğlu MUSTAFAYEV

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun 02.../09.../2004.tarih ve 2004.20/...300.. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ÖZ

Bu çalışmada, Whitney sabitleri, Whitney interpolasyon sabitleri ve Kryakin sabitleri hakkında detaylı bilgiler verildi. Whitney interpolasyon sabitlerinin 3 ile, Whitney ve Kryakin sabitlerinin ise 2.14 ile üstten sınırlı olduğu gösterildi.

Anahtar kelimeler: Whitney sabitleri, interpolasyon, polinomsal yaklaşım.

ABSTRACT

In this work, it was given detailed information about Whitney constants, Whitney interpolation constants and Kryakin constants. It was shown that Whitney interpolation constants are bounded by 3, Whitney and Kryakin constants are bounded by 2.14.

Key words: Whitney constants, interpolation, polynomial approximation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında desteğini esirgemeyen, başta tez danışmanım Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH ve Prof.Dr Igor A. SHEVCHUK'a teşekkürlerimi sunarım. Bir diğer teşekkür ise konu ile ilgili bazı makalelerin bana ulaşmasını sağlayan Ahmet ALTÜRK'e ve bilgilerinden yararlandığım değerli hocalarıma...

İÇİNDEKİLER

SAYFA

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\coloneqq$	Tanım olarak eşittir
$k=\overline{1,n}$	$k=1,2,3,\ldots,n$
I	$[0,1]$
$\mathbb{T}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\}$
$\lVert\cdot\rVert$	Düzgün norm (sf. 12)
$\wp_n$	Derecesi n'i aşmayan polinomlar kümesi
W_n	Whitney sabiti (sf. 37)
W_n'	Whitney interpolasyon sabiti (sf. 37)
$\widetilde{W}_n$	Kryakin sabiti (sf. 37)
$C[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f, [a,b]$ aralığında süreklidir$\}$
$C^{(k)}[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: [a,b]$ aralığında f in, k.türevi süreklidir$\}$
$L^p(I)$	$\left\{f:I\to\mathbb{R}:\ \int_0^1 \lvert f(x)\rvert^p\,dx<\infty\right\}$
$B_N(f,x)$	f fonksiyonunun N inci Bernstein polinomu (sf. 24)
$\Delta_h^k f(x)$	f fonksiyonunun h adımlı k ıncı sonlu farkı (sf. 19)
$\omega(f,u)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü (sf. 13)
$\omega_k(f,u)$	f fonksiyonunun k ıncı süreklilik modülü (sf. 21)
$L_k(f,x)$	Lagrange polinomu (sf. 15)
$\ell_j(x)$	Temel Lagrange polinomu (sf. 15)
$Q_{k-1}(f,x)$	Ortalama yaklaşım polinomu (sf. 37)
$\sum_{j=0}^{n} a_j$	$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$

$\prod_{i=0}^{k} a_i$	$a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
$E_n(x)$	en iyi yaklaşım sayısı (sf. 11)
sup	üst sınırların en küçüğü (supremum)
inf	alt sınırların en büyüğü (infimum)
sgn x	$\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$
$\binom{k}{m}$	$\frac{k!}{(k-m)!m!}$
σ_m	$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}$
σ_0	$:= 0$

1. GİRİŞ

1.1. Reel eksenin bir sonlu alt aralığında sürekli olan bir fonksiyona cebirsel polinomlarla yaklaşıldığı zaman, en iyi yaklaşan polinomun bulunması ve bu polinomun verilen fonksiyondan sapmasının en küçük olarak belirlenmesi yaklaşım teorisinin temel problemidir. En küçük sapma sayısının açık olarak bulunması her zaman mümkün ve kolay olmadığından bu sayının, mümkün olduğu kadar, üstten en küçük ve alttan en büyük sayılarla değerlendirilmesi söz konusudur. 1957 yılında H. Whitney tarafından, bir kapalı aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun, ona en iyi yaklaşan cebirsel polinom ile sapmasının bu fonksiyonun k ıncı süreklilik modülü ile bir sabitin (bu sabite Whitney Sabiti denir) çarpımı şeklinde üstten değerlendirilmesi yapılmıştır. Dolayısıyla en iyi sapma sayısının küçüklüğünün Whitney Sabitinin küçüklüğüne bağlı olduğu görülür. Bu sabitin küçültülmesi ile ilgili birçok çalışma vardır. Bl. Sendov, Whitney Sabitinin 1'den küçük olduğunu ileri sürmüştür.

1.2. $I := [0,1]$ üzerinde sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların kümesi $C[0,1]$ olsun. $C[0,1]$ kümesi bir reel lineer uzay ve

$$\|f\| := \max_{x\in I} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır.

$f \in C[0,1]$ ve k, 1'den büyük bir doğal sayı olsun.

f fonksiyonu için, h adımlı k ıncı sonlu fark

$$\Delta_h^k f(x) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh)$$

şeklinde ve $1/k$ noktasındaki süreklilik modülü de

$$\omega_k(f,1/k) := \sup_{x,x+kh\in I} \left|\Delta_h^k f(x)\right|$$

şeklinde tanımlanır.

f fonksiyonunu eşit aralıklı $x_m := m/(k-1)$, $m = 0,1,2,...,k-1$, düğüm noktalarında interpole eden Lagrange polinomu $L_{k-1}(f,x)$ ile; her bir $m = 1,2,...,k$ için

$$\int_0^{m/k}\left(f(x)-Q_{k-1}(f;x)\right)dx=0$$

eşitliğini sağlayan ortalama yaklaşım polinomu $Q_{k-1}(f;x)$ ile gösterilsin. Bu tanımlar kullanılarak, $\wp_{k-1}$ derecesi $k-1$'i aşmayan cebirsel polinomlar uzayı olmak üzere Whitney sabitleri

$$W(k):=\sup_{f\in C[0,1]\setminus\wp_{k-1}}\ \inf_{P\in\wp_{k-1}}\frac{\|f-P\|}{\omega_k(f,1/k)}$$

şeklinde, Whitney interpolasyon sabitleri

$$W'(k):=\sup_{f\in C[0,1]\setminus\wp_{k-1}}\frac{\|f-L_{k-1}(f,.)\|}{\omega_k(f,1/k)}$$

olarak; Kryakin sabitleri ise

$$\widetilde{W}(k):=\sup_{f\in C[0,1]\setminus\wp_{k-1}}\frac{\|f-Q_{k-1}(f,\bullet)\|}{\omega_k(f,1/k)}$$

olarak tanımlanırlar.

Aşağıdaki sonuçlar tanımlardan açıkça görülebilir:

$$W(k)\le W'(k),\qquad W(k)\le\widetilde{W}(k).\tag{1.1}$$

1.3. Bu tezde, Whitney, Whitney interpolasyon ve Kryakin sabitlerinin üstten sınırlandırılması konusunda önceden yapılan çalışmalar araştırılıp elde edilen sonuçlar derlenmiştir. Bu konu hakkında yayımlanan son çalışmalardaki teoremler ve ispatlarına, tezin "Bulgular ve Tartışması" kısmında, bu sonuçlara temel olan ve ışık tutan tanım ve teoremlere ise "Materyal ve Metot" kısmında yer verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan bir f fonksiyonuna, derecesi k'i aşmayan cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında en iyi yaklaşım polinomunun bulunması problemi yaklaşım teorisinin önemli problemlerinden biridir. Bu konu hakkında en önemli adımı 1854 yılında P.L. Chebyshev [1] atmıştır. Chebyshev, derecesi k'i aşmayan bir P_k polinomunun f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olması için gerek ve yeter koşul bulmuştur. Fakat o yıllarda henüz, her hangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için genel olarak polinomlarla yaklaşımın mümkün olup olmadığı kesin olarak bilinmiyordu. 1885 yılında K. Weierstrass [2] bu problemi çözdü. Weierstrass, her bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonuna polinomlarla yaklaşımın mümkün olduğunu ispatlamıştır. 1905 yılında ise E. Borel [3] her hangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için $\wp_k$ polinomlar uzayı içinde en iyi yaklaşan polinomun mevcut olduğunu göstermiştir.

Daha sonraki yıllarda verilen bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için $\wp_k$ uzayına göre en iyi yaklaşım sayısının bulunması problemi üzerinde durulmuştur.

1952 yılında H. Burkill [4], iyi bilinen

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| f(x) - P_{k-1}(x) \right| \le \frac{1}{k!} \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(k)}(x) \right| \tag{2.1}$$

eşitsizliğinde $f^{(k)}$ yerine f fonksiyonunun k ıncı sonlu farkı yazıldığında benzer sonucun elde edilip edilemeyeceğini araştırdı. $k = 1,2$ için (2.1) eşitsizliğine benzer bir eşitsizliğin olduğunu gösterebildi. 1957 yılında H. Whitney [5] Burkill'in öne sürdüğü problemi bütün k doğal sayıları için ispatladı:

Whitney Teoremi : Her bir $k \ge 1$ doğal sayısı ve $f \in C[a,b]$ için

$$\left| f(x) - P_{k-1}(x) \right| \le W_k \sup_{h,y} \left| \Delta_h^k f(y) \right|, \qquad x \in [a,b],\ y, y+kh \in [a,b]$$

olacak şekilde W_k sayısı ve derecesi $k-1$'i aşmayan P_{k-1} polinomu vardır.

Whitney, problemi çözmüştü, fakat k doğal sayıları büyüdükçe W_k Whitney sabitlerinin k'ye bağlı olarak büyüdüğü dikkatleri çekmişti. Ayrıca, W_k' Whitney interpolasyon sabitini kullanarak aşağıda verilen sonuçları elde etmiştir:

$$1 \leq W_k', \quad \frac{1}{2} \leq W_k \leq W_k' < \infty$$

ve

k	1	2	3	4	5
W_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{8}{15}; \frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 3.25\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 10.4\right)$
W_k'	1	1	$\left(\frac{16}{15}; \frac{14}{9}\right)$	$(1; 3.25)$	$(1; 10.4)$

(Tek yazılanlar kesin sonuç, ikili yazılanlar ise sırasıyla alt ve üst sınırlardır.)

Whitney Teoremi sonraki yıllarda yaklaşım teorisinde geniş yer aldı. Yu.A. Brudnyi [6] 1977 yılında Whitney Teoremini $1 \leq p < \infty$ için $L^p\left(\mathbb{R}^k\right)$ uzayına taşıdı ve bulduğu yeni bir metotla

$$W_k \leq \left(c.k^2\right)^k \qquad c = sbt. \tag{2.1}$$

sonucunu elde etti (burada ve aşağıda geçen c'ler, k doğal sayısından bağımsız farklı sabitleri göstermektedir). E.A. Storozhenko [7] ise 1979 yılında aynı problemi $0 < p < 1$ gibi daha zor olan bir durum için ispatladı. Ayrıca Whitney Teoremini $0 < p < 1$ için $L^p(I)$ ve $L^p(\mathbb{T})$ uzaylarına genişletti.

Seksenli yıllarda problemin orijinal haline dönüş başladı. Bunun öncüsü Bl. Sendov oldu. 1982 yılında Sendov [8] Whitney sabitleri ile Whitney interpolasyon sabitleri için oldukça iddialı bir tahmin öne sürdü:

$$W_k \leq 1, \qquad W_k' \leq 2.$$

Brudnyi'nin sonucu göz önünde bulundurulduğunda bu tahminin doğru olması yeteri kadar büyük k doğal sayıları için imkansız gibi görünüyordu.

1985 yılında K. Ivanov ve M. Takev [9], (2.1)'den daha iyi bir sonuç elde ettiler:

$$W_k \le c \cdot k \cdot \ln k$$

Aynı yıl içinde P.G. Binev [10]

$$W_k \le c \cdot k$$

ve Sendov [11]

$$W_k \le c$$

sonuçlarını buldular. Bir yıl sonra Sendov [12]

$$W_k \le 6$$

sonucunu elde etti. Daha sonra Yu.V. Kryakin [13] 1989 yılında

$$W_k \le 3$$

eşitsizliğini ispatlayarak Sendov'un imkansız gibi görünen tahminine oldukça yaklaştı.

Sonraki çalışmalarda Kryakin sabitleri olarak bilinen sabitlerin değerlendirilmesi üzerinde durulmuştur. 1992 yılında L.G. Kovalenko [14] $L^1(I)$ uzayında Kryakin sabitlerinin 6.5'tan daha büyük olamayacağını ispatlamıştır. 1994 yılında Kryakin [15] aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

$$1 \le \widetilde{W}_k \le 2.$$

1997 yılında I. A. Shevchuk [16] her bir k doğal sayısı için W_k' Whitney interpolasyon sabitlerinin π ile, 1998 yılında I. G. Danilenko [17] $k=4$ ve 2003 yılında O.D. Zhelnov [18] $k=5,6,7$ için 2 ile üstten sınırlı olduğunu göstermişlerdir. Whitney interpolasyon sabitinin her bir k doğal sayısı için üstten değerlendirilmesi ile ilgili son çalışma 2002 yılında J. Gilewicz, Yu. V. Kryakin ve I. A. Shevchuk'a [19] aittir: $W_k' \le 3$.

3. MATERYAL ve METOT

3.1. ÖN BİLGİLER

3.1.1. GİRİŞ

3.1.1.1. Tanım [25] f, (a,b) açık aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Her hangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı bulunabilirse f *fonksiyonu* x_0 *noktasında süreklidir* denir.

3.1.1.2. Tanım [25] f, (a,b) açık aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu (a,b) aralığının her bir noktasında sürekli ise f *fonksiyonu* (a,b) *aralığında süreklidir* denir.

3.1.1.3. Tanım [25] f, (a,b) açık aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 \le x - x_0 < \delta$ $(\delta < x - x_0 \le 0)$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilirse f *fonksiyonu* x_0 *noktasında sağdan (soldan) süreklidir* denir.

3.1.1.4. Tanım [25] f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f, (a,b) açık aralığında sürekli, $x = a$ noktasında sağdan ve $x = b$ noktasında soldan sürekli ise f *fonksiyonu* $[a,b]$ *kapalı aralığında süreklidir* denir.

$[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bütün fonksiyonların sınıfı $C[a,b]$ ile gösterilir.

3.1.1.5. Tanım [25] f, (a,b) açık aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Her hangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x' - x''| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x', x'' \in (a,b)$

için $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabilirse f *fonksiyonu* (a,b) *aralığında düzgün süreklidir* denir.

3.1.1.6. Teorem [25]

Kapalı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyon o aralıkta düzgün süreklidir.

3.1.1.7. Teorem [25] (Ara Değer Teoremi)

$f\in C[a,b]$ olsun. $[a,b]$ de $x_1<x_2$ ve $f(x_1)\neq f(x_2)$ olacak şekilde herhangi iki x_1,x_2 noktası verildiğinde f fonksiyonu (x_1,x_2) aralığında, $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.

3.1.1.8. Tanım [26] f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0\in(a,b)$ olsun. Eğer

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti varsa f *fonksiyonu* x_0 *noktasında türevlenebilir* denir.

3.1.1.9. Teorem [26] (Rolle Teoremi)

f, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve $f(a)=f(b)$ olsun. Bu durumda $f'(c)=0$ olacak biçimde en az bir $c\in(a,b)$ vardır.

3.1.1.10. Teorem [26] (Diferansiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi)

f, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

3.1.1.11. Tanım [25] f, bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı fonksiyon ve $M > 0$ olsun. $\forall x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ oluyorsa f, A *kümesi üzerinde sınırlıdır* denir.

3.1.1.12. Tanım [25] Eğer $A \subset \mathbb{R}$ üstten (alttan) sınırlı bir küme ise üst sınırların en küçüğüne (alt sınırların en büyüğüne) A *'nın supremumu (infimumu)* denir ve $\sup A$ ($\inf A$) ile gösterilir.

3.1.1.13. Önerme [25]

$A \subset \mathbb{R}$ için $\inf A = m$ ve $\sup A = M$ olsun. Bu durumda

i) $\forall x \in A$ için $x \leq M$ dir.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $x > M - \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır.

iii) $\forall x \in A$ için $x \geq m$ dir.

iv) $\forall \varepsilon > 0$ için $x < m + \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır.

3.1.1.14. Teorem [25]

$f \in C[a,b]$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlıdır.

3.1.1.15. Teorem [25]

$f \in C[a,b]$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında en büyük ve en küçük değerini alır.

3.1.1.16. Tanım [25] Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyona *dizi* denir. f bir dizi ise her bir n doğal sayısına bir a_n sayısı karşılık geleceğinden f dizisi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklinde gösterilir.

3.1.1.17. Tanım[25] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verildiğinde $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq N$ iken $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, a) \in \mathbb{N}$ bulunabilirse $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi a 'ya yakınsıyor* denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ şeklinde gösterilir.

3.1.1.18. Tanım [25] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verilsin. Bir artan $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ doğal sayı dizisi için elde edilen $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir *altdizisi* denir.

3.1.1.19. Tanım [25] $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bütün fonksiyonların kümesi olsun. Doğal sayılar kümesi üzerinden $F(A)$ kümesine tanımlı fonksiyona bir *fonksiyonel dizi* denir.

3.1.1.20. Tanım [27] $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ sayıları için en az bir $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilirse ve her $n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi* f *fonksiyonuna noktasal yakınsaktır* denir.

3.1.1.21. Tanım [27] $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ sayıları için en az bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilirse ve her $n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi* f *fonksiyonuna düzgün yakınsaktır* denir.

3.1.1.22. Teorem [27]

$A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlardan oluşan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi verilsin. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir.

3.1.1.23. Tanım [31] $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı fonksiyon dizisi ve $M \in \mathbb{R}^+$ olsun. $\forall x \in A$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq M$ oluyorsa $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine A kümesi üzerinde *düzgün sınırlıdır* denir.

3.1.1.24. Teorem [26] (İlkelin Varlığı Teoremi)

Eğer f, $[a,b]$ aralığında sürekli ise her bir $x \in (a,b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde (a,b) aralığında türevlenebilir bir F fonksiyonu vardır.

3.1.1.25. Tanım [31] $X \neq \varnothing$ bir küme ve T bir cisim olmak üzere

$$\begin{array}{c} + : X \times X \to X \\ (x,x') \to x + x' \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{c} \bullet : T \times X \to X \\ (k,x) \to kx \end{array}$$

fonksiyonları verilsin. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa X kümesine T *cismi üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı)* denir. "+" ya toplama "•" ya da skalerle çarpma işlemleri denir.

i) $\forall x,y,z \in X$ için $x + (y+z) = (x+y) + z$,

ii) $\forall x,y \in X$ için $x + y = y + x$,

iii) $\forall x \in X$ ve $\Theta \in X$ için $x + \Theta = x$,(Θ'a toplamaya göre etkisiz eleman denir.)

iv) $\forall x \in X$ için $\exists x' \in X$ öyle ki $x + x' = \Theta$, (x''ne toplamaya göre x'in tersi denir ve $x' = -x$ ile gösterilir.)

v) $\forall x,y \in X$ ve $\forall \lambda \in T$ için $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$,

vi) $\forall x \in X$ ve $\forall \lambda, \beta \in T$ için $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$,

vii) $\forall x \in X$ ve $1 \in T$ için $1 \cdot x = x$,

viii) $\forall x \in X$ ve $\forall \lambda, \beta \in T$ için $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$.

3.1.1.26. Tanım [31] X, T cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu

i) $\forall x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$,

ii) $\forall x \in X$ ve $\alpha \in T$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, (3.1)

iii) $\forall x,y \in X$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği),

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna *X üzerinde bir norm* denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir *normlu lineer uzay* adı verilir.

3.1.1.27. Tanım [28] X bir normlu lineer uzay ve $x, y \in X$ olsun. $x+(-y)=x-y$ farkının normuna x *ile* y *arasındaki uzaklık* adı verilir.

3.1.1.28. Tanım [28] M, bir X normlu lineer uzayının alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda

$$\inf_{y \in M} \|x-y\|$$

sayısına x *noktasının* M *kümesine uzaklığı (sapması)* denir.

Açıktır ki, eğer $x \in M$ ise x noktasının M kümesine uzaklığı sıfırdır.

3.1.1.29. Tanım [28] M kümesi X normlu lineer uzayının alt lineer uzayı ise

$$\inf_{y \in M} \|x-y\|$$

sayısına x *noktasının* M *üzerinde en iyi yaklaşım sayısı* denir ve bu sayı $E_n(x)$ ile gösterilir. Eğer bir $y^* \in M$ için

$$E_n(x) = \inf_{y \in M} \|x-y\| = \|x-y^*\|$$

eşitliği sağlanıyorsa $y^* \in M$ elemanına x *'e en iyi yaklaşan eleman* denir.

3.1.1.30. Tanım [21] S, bir X normlu lineer uzayının alt kümesi olsun. S kümesinden alınan her dizinin S kümesindeki bir elemana yakınsayan bir alt dizisi varsa S *kümesi kompaktır* denir.

3.1.2. $C[a,b]$ UZAYI

Daha önce, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olan tüm fonksiyonların kümesinin $C[a,b]$ ile gösterildiği söylenmişti.

$f, g \in C[a,b]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

ile tanımlı işlemlere göre $C[a,b]$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. [27]

$C[a,b]$ üzerinde

$$\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlı $\|\bullet\|$ fonksiyonu (3.1) koşullarını sağladığından $C[a,b]$ üzerinde bir normdur. (3.2) ile tanımlı norma *düzgün norm* adı verilir.

$C[a,b]$, (3.2) normu ile bir normlu lineer uzayıdır. [27]

3.1.3. POLİNOMLAR

3.1.3.1. Tanım $i=\overline{0,m}$ için $a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere,

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

şeklinde tanımlı fonksiyona n *dereceli polinom* adı verilir.

P_n polinomuna, $i=\overline{0,n}$ için $a_i \in \mathbb{R}$ ise reel katsayılı, $a_i \in \mathbb{C}$ ise kompleks katsayılı polinom adı verilir. Bu çalışmada reel katsayılı polinomlar ele alınacaktır.

Bu çalışmada derecesi n'i aşmayan polinomların kümesi $\wp_n$ ile gösterilecektir.

3.1.3.2. Teorem [24] (Cebrin Temel Teoremi)

$n \geq 1$ için n dereceli bir polinomun n tane reel veya kompleks kökü vardır.

3.1.3.3. Teorem [24] (Faktorizasyon teoremi)

n dereceli bir P_n polinomu için

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

yazılacak şekilde n tane $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (reel veya kompleks) sayıları bulunabilir.

3.1.3.4. Teorem [24]

Eğer $P_n \in \wp_n$ ve P_n'in n'den fazla sıfır noktası varsa $P_n \equiv 0$ dır.

3.1.4. SÜREKLİLİK MODÜLÜ

3.1.4.1. Tanım [23] f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. $[0,b-a]$ aralığında tanımlı

$$\omega(f,u)=\sup_{\substack{a\le x\le b-h\\0\le h\le u}}|f(x+h)-f(x)|$$

veya ona denk olan

$$\omega(f,u)=\sup_{\substack{|x_2-x_1|\le u\\x_1,x_2\in[a,b]}}|f(x_2)-f(x_1)|$$

ile tanımlı $\omega(f,u):=\omega(u)$ fonksiyonuna f *fonksiyonu için süreklilik modülü* denir.

Bu tanıma göre, $\omega(f,u)$ süreklilik modülü, bir $u\in[0,b-a]$ için $[a,b]$ nin u uzunluğunda herhangi bir alt aralığındaki f fonksiyonunun maksimum salınımını verir. Buradan

$$|f(x+h)-f(x)|\le\omega(h),\qquad x,x+h\in[a,b]$$

$$|f(x_2)-f(x_1)|\le\omega(|x_2-x_1|),\qquad x_1,x_2\in[a,b]$$

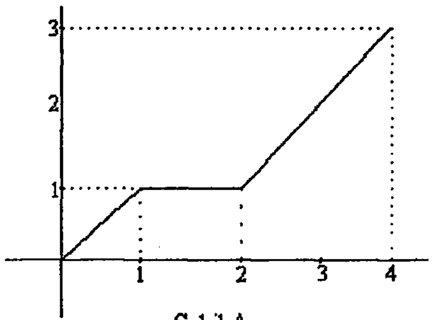
elde edilir.

Bu tanım, fonksiyonun düzgün sürekli olması koşulu ile $(-\infty,\infty)$ aralığında da geçerlidir.

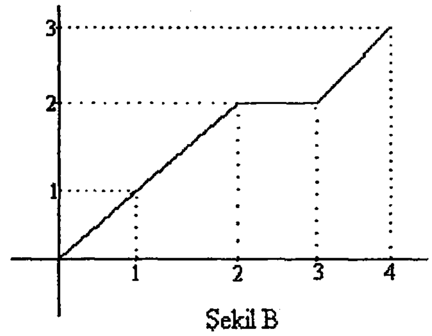
3.1.4.2. Örnek $x\in(-\infty,\infty)$ için $f(x)=Ax+B$ olsun. Bu durumda herhangi bir $u\ge 0$ için

$$\omega(u)=\sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\0\le h\le u}}|A(x+h)+B-Ax-B|=\sup_{0\le h\le u}|Ah|=|A|u\,.$$

3.1.4.3. Örnek [23] f fonksiyonunun grafiği Şekil A'daki gibi ise bu fonksiyonun süreklilik modülünün grafiği Şekil B deki gibi olur.



Şekil A



Şekil B

3.1.4.4. Örnek [23] $x \in (-\infty, \infty)$ için $f(x) = \sin x$ olsun. Bu durumda herhangi bir $u \geq 0$ için

$$\omega(u) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leq h \leq u}} \left| \sin(x+h) - \sin x \right| = 2 \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leq h \leq u}} \left| \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} \right|$$

$$= 2 \sup_{0 \leq h \leq u} \left| \sin \frac{h}{2} \right|$$

bulunur. Buradan

$$\omega(u) = \begin{cases} 2\sin\dfrac{u}{2}, & u \leq \pi \\ 2, & u \geq \pi \end{cases}$$

elde edilir.

3.1.4.5. Süreklilik modülünün özellikleri

i) $\omega(0) = 0$,

ii) $\omega(u)$ azalmayan bir fonksiyondur,

iii) $\omega(u) \in C[0, b-a]$,

iv) $\omega(u)$ yarı-toplamsaldır; yani, her $u_1, u_2 \geq 0$ sayıları için

$$\omega(u_1 + u_2) \leq \omega(u_1) + \omega(u_2).$$

iv) özelliğinden

$$\omega(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \leq \omega(u_1) + \omega(u_2) + \ldots + \omega(u_n)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca bu eşitsizlikte $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$ yazılırsa

$$\omega(nu) \leq n\omega(u)$$

bulunur. Benzer bir eşitsizlik tamsayı olmayan bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ çarpanı için de yazılabilir:

$$\omega(\lambda u) \leq (\lambda + 1)\omega(u).$$

Gerçekten, $n < \lambda < n+1$ olacak şekilde bir n tamsayısı için

$$\omega(\lambda u) \le \omega((n+1)u) \le (n+1)\omega(u) \le (\lambda+1)\omega(u)$$

elde edilir.

3.1.5. LAGRANGE POLİNOMLARI

$m \in \mathbb{N}$ ve $i = \overline{0,m}$ için birbirinden farklı $x_i \in \mathbb{R}$ noktaları ve bu noktalarda tanımlı olan bir f fonksiyonu verilsin.

3.1.5.1. Tanım [23] f fonksiyonunu $x_0, x_1, ..., x_m$ düğüm noktalarında interpole eden

$$L(x;f) := L(x;f;x_0,x_1,...,x_m)$$

Lagrange polinomu, verilen bu noktalarda f fonksiyonu ile aynı değerleri alan ve derecesi m'i aşmayan cebirsel polinom olarak tanımlanır. Yani, her bir $i = \overline{0,m}$ için

$$L(x_i;f) = f(x_i).$$

Örneğin, $m = 1$ için Lagrange polinomu

$$\begin{aligned} L(x;f;x_0,x_1) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) \end{aligned}$$

şeklinde olur.

3.1.5.2. Tanım [23] (Temel Lagrange Polinomları) Her bir $j = \overline{0,m}$ için

$$\ell_j(x) := \ell_j(x;x_0,x_1,...,x_m) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne j}}^{m} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

ile tanımlanan polinomlara *temel Lagrange polinomları* denir.

$p(x) := (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_m)$ olsun. Bu durumda

$$p'(x_j) = \lim_{x \to x_j} \frac{p(x)-p(x_j)}{x-x_j} = \lim_{x \to x_j} \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne j}}^{m} (x-x_i) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne j}}^{m} (x_j-x_i)$$

bulunur. Buradan her bir $j=\overline{0,m}$ için Temel Lagrange polinomları

$$\ell_j(x)=\frac{p(x)}{(x-x_j)p'(x_j)}, \qquad x\neq x_j$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

Kronecker sembolü olmak üzere her bir $i,j=\overline{0,m}$ için $\ell_j(x_i)=\delta_{i,j}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bu nedenle Lagrange polinomu

$$L(x;f)=\sum_{j=0}^{m} f(x_j)\ell_j(x)$$

formülü ile gösterilebilir. Bir cebirsel polinomun sıfırlarının sayısı üzerine olan cebrin temel teoremi kullanılarak Lagrange polinomunun tekliği ve P_m, $\deg P_m\leq m$ olan polinom olmak üzere

$$L(x;P_m;x_0,x_1,...,x_m)=P_m(x)$$

olduğu gösterilebilir [23]. Ayrıca bir operatör olarak düşünüldüğünde Lagrange polinomu lineerdir. Gerçekten, $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ noktalarında tanımlı f ve g fonksiyonları ve $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}L(x;af+bg)&=\sum_{j=0}^{m}\ell_j(x)\big(af(x_j)+bg(x_j)\big)\\&=a\sum_{j=0}^{m}\ell_j(x)f(x_j)+b\sum_{j=0}^{m}\ell_j(x)g(x_j)\\&=aL(x;f)+bL(x;g)\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.6. BÖLÜNMÜŞ FARKLAR

$f(x)-L(x;f;x_0,x_1,...,x_{m-1})$ farkı $(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{m-1})$ ile bölünür ve $x=x_m$ noktasındaki değeri incelenirse

$$\frac{f(x_m)-L(x_m;f;x_0,x_1,\ldots,x_{m-1})}{\prod_{j=0}^{m-1}(x_m-x_j)}=\sum_{j=0}^{m}\frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m}(x_j-x_j)} \tag{3.3}$$
$$=:[x_0,x_1,\ldots,x_m;f]$$

elde edilir.

3.1.6.1. Tanım [23] (3.3)'de tanımlı $[x_0,x_1,\ldots,x_m;f]$ ifadesine f fonksiyonunun $x_0,x_1,\ldots,x_m$ noktalarında *m. mertebeden bölünmüş farkı* denir.

Örneğin,

$$[x_0,x_1;f]=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1},$$

$$[x_0,x_1,x_2;f]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

$$[x_0;f]:=f(x_0).$$

Bölünmüş fark x_i noktalarına göre simetriktir [23]. Örneğin,

$$[x_0,x_1;f]=[x_1,x_0;f],$$

$$[x_0,x_1,x_2;f]=[x_0,x_2,x_1;f]=[x_1,x_0,x_2;f]$$
$$=[x_1,x_2,x_0;f]=[x_2,x_0,x_1;f]=[x_2,x_1,x_0;f]$$

3.1.6.2. Teorem [23]

Lagrange polinomu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$L(x;f;x_0,x_1,\ldots,x_m)=[x_0;f]+[x_0,x_1;f](x-x_0)+$$
$$+\ldots+[x_0,x_1,\ldots,x_m;f](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1}) \tag{3.4}$$

3.1.6.3. Tanım (3.4) formülüne *Newton Formülü* denir.

3.1.6.4. Sonuç

$i=\overline{0,m}$ için $x_i\in[a,b]$ ve f fonksiyonu (a,b) açık aralığında $m.$ türeve sahip olsun. Bu durumda

$$[x_0,x_1,\dots,x_m;f]=\frac{1}{m!}f^{(m)}(\theta)$$

olacak biçimde en az bir $\theta\in(a,b)$ vardır.

3.1.6.5. Sonuç

P_{m-1}, $\deg P_{m-1}\le m-1$ olan polinom ise

$$[x_0,x_1,\dots,x_m;P_{m-1}]=0,$$

eğer $f(x)=ax^m$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ise

$$[x_0,x_1,\dots,x_m;f]=a$$

dır.

$x_0,x_1\in[a,b]$ ve $f\in C^{(1)}[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$f(x_1)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}f'(t)\,dt$$

olur. $t=x_0+(x_1-x_0)t_1$ değişken değişimi yapılırsa

$$[x_0,x_1;f]=\frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1}f'(t)\,dt=\int_0^1 f'(x_0+(x_1-x_0)t_1)\,dt_1$$

elde edilir. Aşağıda verilen teorem bu formülün genelleştirilmişidir.

3.1.6.6. Teorem [23]

$i=\overline{0,m}$ için $x_i\in[a,b]$ ve $f\in C^{(m)}[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$[x_0,x_1,\dots,x_m;f]=\int_0^1\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{m-1}}f^{(m)}(x_0+(x_1-x_0)t_1+\dots+(x_m-x_{m-1})t_m)\,dt_m\dots dt_1$$

eşitliği vardır.

3.1.6.7. Sonuç

3.1.6.6. Teorem'in koşulları dahilinde $\forall x\in[a,b]$ için $\left|f^{(m)}(x)\right|\le 1$ ise

$$[x_0,x_1,\dots,x_m;f]\le\frac{1}{m!},$$

$$\left|f(x)-L(x;f;x_0,x_1,\dots,x_{m-1})\right|\le\frac{1}{m!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})\right|$$

eşitsizlikleri doğrudur.

3.1.6.8. Teorem [23]

i) $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için $[x_0,x_1,\dots,x_m;\alpha f+\beta g]=\alpha[x_0,x_1,\dots,x_m;f]+\beta[x_0,x_1,\dots,x_m;g]$

ii) $[x_0,x_1,\dots,x_m;fg]=\sum_{i=0}^{m}[x_0,x_1,\dots,x_i;f][x_i,\dots,x_m;g]$

3.1.7. SONLU FARKLAR

$i=\overline{0,m}$ için x_i noktaları eş aralıklı olsun, yani, her bir $i=\overline{0,m}$ için

$$x_i=x_0+ih,\qquad h\in\mathbb{R},\ h\neq 0.$$

$$L(x):=L(x;f;x_0,x_1,\dots,x_{m-1})=\sum_{j=0}^{m-1}f(x_j)\ell_j(x;x_0,x_1,\dots,x_{m-1})$$

Lagrange polinomu için, ℓ_j temel Lagrange polinomlarının $x=x_m$ noktasındaki değerleri incelenirse

$$\ell_j(x_m;x_0,x_1,\dots,x_{m-1})=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{m-1}\frac{x_m-x_i}{x_j-x_i}=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{m-1}\frac{m-i}{j-i}=-(-1)^{m-j}\binom{m}{j}.$$

$$\begin{aligned}f(x_m)-L(x_m)&=f(x_m)-\sum_{j=0}^{m-1}f(x_j)\ell_j(x_m;x_0,x_1,\dots,x_{m-1})\\&=(-1)^{m-m}f(x_m)\binom{m}{m}+\sum_{j=0}^{m-1}f(x_j)(-1)^{m-j}\binom{m}{j}\\&=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}f(x_0+jh)\end{aligned}\tag{3.5}$$

elde edilir.

3.1.7.1. Tanım [23]

$$\Delta_h^m(f;x_0)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}f(x_0+jh)$$

ifadesine f *fonksiyonunun* x_0 *noktasındaki* h *adımlı* m *inci sonlu farkı* denir.

Örneğin,

$$\Delta_h^1(f;x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$$

$$\Delta_h^2(f;x_0)=f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)$$

$$\Delta_h^0(f;x_0):=f(x_0) \text{ ve } \Delta_0^m(f;x_0):=0.$$

Aşağıdaki eşitlikler tümevarım yöntemi ile gösterilebilir. [23]

$$\Delta_h^m(f;x_0)=\sum_{i=0}^{m-j}(-1)^{m-j-i}\binom{m-j}{i}\Delta_h^i(f;x_0+ih),\quad j=\overline{0,m-1};$$

$$\Delta_{nh}^m(f;x_0)=\sum_{i_1=0}^{n-1}\dots\sum_{i_m=0}^{n-1}\Delta_h^m\left(f;x_0+h(i_1+\dots+i_m)\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$

$h>0$ olsun. (3.3) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}\Delta_h^m(f;x_0)&=f(x_m)-L(x_m)\\&=\left(\prod_{j=0}^{m-1}(x_0+mh-x_0-jh)\right)[x_0,x_0+h,\dots,x_0+mh;f]\\&=m!h^m[x_0,x_0+h,\dots,x_0+mh;f]\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuç ile bölünmüş farkların tüm özellikleri sonlu farklara taşınabilir.

i) Newton formülü:

$$L(x;f;x_0,x_1,\dots,x_{m-1})=\Delta_h^0(f;x_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta_h^j(f;x_0)}{j!h^j}\prod_{i=0}^{j-1}(x-x_0-ih)$$

ii) f fonksiyonu (x_0,x_0+mh) aralığında m inci türeve sahip ise

$$\Delta_h^m(f;x_0)=h^m f^{(m)}(\theta),\qquad \theta\in(x_0,x_0+mh)$$

dır. Eğer $f(x)=x^m$ ise,

$$\Delta_h^m(f;x_0)=h^m m!.$$

Eğer $f(x)=P_{m-1}(x)$ ise,

$$\Delta_h^m(P_{m-1};x_0)=0.$$

iii) $j=\overline{0,m}$ için f, (x_0,x_0+mh) aralığında j inci türeve sahip ise,

$$\Delta_h^m(f;x_0)=h^j\Delta_h^{m-j}\left(f^{(j)};\theta\right),\qquad \theta\in\left(x_0,x_0+(m-j)h\right).$$

iv) $$\Delta_h^{m-1}(f;x_0+h)-\Delta_h^{m-1}(f;x_0)=\Delta_h^m(f;x_0).$$

$p \in \mathbb{N}$ için,

$$\Delta_h^{m-1}(f;x_0+ph)-\Delta_h^{m-1}(f;x_0)=\sum_{i=0}^{p-1}\Delta_h^m(f;x_0+ih).$$

v) $j=\overline{0,m}$ için x_0+jh noktalarında tanımlı, f den farklı bir g fonksiyonunu ele alalım.

$$\Delta_h^m(af+bg;x_0)=a\Delta_h^m(f;x_0)+b\Delta_h^m(g;x_0), \quad a,b=sbt.$$

$$\Delta_h^m(fg;x_0)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\Delta_h^i(f;x_0)\Delta_h^{m-i}(f;x_0+ih).$$

vi) $j=\overline{0,m}$ için $g(x)=(x-x_j)(x-x_{j+1})...(x-x_m)$ ise,

$$\Delta_h^m(fg;x_0)=h^{m+1-j}\frac{m!}{(j-1)!}\Delta_h^{j-1}(f;x_0).$$

Özel olarak, $g(x)=(x-x_0)$ ise,

$$\Delta_h^m(fg;x_0)=mh\Delta_h^{m-1}(f;x_0+h).$$

vii) f fonksiyonunun m inci türevi $[x_0,x_m]$ aralığında sürekli ise,

$$\Delta_h^m(f;x_0)=h^m m!\int_0^1\int_0^{t_1}...\int_0^{t_{m-1}}f^{(m)}(x_0+h(t_1+...+t_m))dt_m...dt_1$$

dır. Bir başka kullanışlı gösterim de

$$\Delta_h^m(f;x_0)=\int_0^h\int_0^h...\int_0^h f^{(m)}(x_0+t_1+...+t_m)dt_m...dt_1$$

şeklinde yazılabilir.

3.1.8. *k*. SÜREKLİLİK MODÜLÜ

3.1.8.1. Tanım [23] Bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonunun *k mertebeli süreklilik modülü* (k ıncı süreklilik modülü), $t\in[0,(b-a)/k]$ için

$$\omega_k(t):=\omega_k(t;f;[a,b]):=\sup_{h\in[0,t]}\left\|\Delta_h^k(f;.)\right\|_{[a,b-kh]}$$

ve $t>(b-a)/k$ için

$$\omega_k(t) := \omega_k\left(\frac{(b-a)}{k}\right)$$

ile tanımlanır.

3.1.8.2. Örnek [23] (a,b) aralığı üzerinde k ıncı türeve sahip olan bir f fonksiyonu her bir $x \in (a,b)$ için $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq 1$ koşulunu sağlıyorsa

$$\omega_k(t; f; [a,b]) \leq t^k$$

dır. Gerçekten, bir $\theta \in (a,b)$ için $\Delta_h^k(f;x) = h^k f^{(k)}(\theta)$ olduğundan $\left\|\Delta_h^k(f;.)\right\|_{[a,b-kh]} \leq h^k$ elde edilir. Son olarak, $[0,t]$ aralığında h üzerinden supremum alınırsa istenen elde edilir.

Aynı şekilde eğer $f(x) = P_{k-1}(x)$ derecesi $k-1$ i aşmayan bir polinom ise

$$\omega_k(t; f; [a,b]) = 0,$$

ve eğer $f(x) = x^k$ ise

$$\omega_k(t; f; [a,b]) = k!\min\left\{t^k, \left(\frac{b-a}{k}\right)^k\right\}$$

dır.

3.1.8.3. Örnek [23] $f(x) = \sin x$ ise

$$\omega_k\left(t; f; \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = 2^k \sin^k \frac{t}{2} \sin \frac{kt}{2}, \qquad t \leq \frac{\pi}{2k},$$

$$\omega_k(t; f; [0,\pi]) = 2^k \sin^k \frac{t}{2}, \qquad t \leq \frac{\pi}{k}.$$

Dikkat edilirse $\omega(t; f; [a,b]) = \omega_1(t; f; [a,b])$ dır, yani, bir fonksiyonun süreklilik modülü ile 1 mertebeli süreklilik modülü aynıdır.

$$\omega_0(t; f; [a,b]) := \|f\|.$$

3.1.8.4. Teorem [23]

k ıncı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega_k(t;\alpha f) = |\alpha|\omega_k(t;f)$ dir.

ii) $\omega_k(t;f+g) \le \omega_k(t;f) + \omega_k(t;g)$

iii) $\omega_k(t;fg) \le \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \omega_i(t;f)\omega_{k-i}(t;g)$

iv) $f \in C^{(k)}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $|f^{(k)}(x)| \le 1$ ise $\omega_k(t;f) \le t^k$ dir.

v) $\omega_k(0;f) = 0$

vi) $\omega_k(t;f)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında azalmayandır.

vii) $\omega_k(\cdot;f) \in C([0,\infty))$

viii) $f^{(k)} \in C[a,b]$ ise $\omega_k(t;f) \le t^k \|f\|$

ix) Bir $t_0 \ne 0$ için $\omega_k(t_0;f) = 0$ ise $\omega_k(\cdot;f) \equiv 0$ tir.

x) P_{k-1}, derecesi $k-1$'i aşmayan bir polinom ise $\omega_k(t;P_{k-1}) \equiv 0$ tir.

Aritmetik ortalama ile geometrik ortalama arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır.

3.1.9. Teorem [22]

$i = \overline{1,n}$ için $x_i \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

eşitsizliği doğrudur.

3.2. WEIERSTRASS YAKLAŞIM TEOREMİ

3.2.1. Teorem [2] (Weierstrass, 1885)

Her $f \in C[a,b]$ ve $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|f - P\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır.

Bu teoremin birçok ispatı vardır. Burada verilecek olan ispat 1912 yılında S.N. Bernstein [30] tarafından verilmiştir. Bernstein, 3.2.5. Teoremde varlığı istenen polinomu açıkça vermiştir.

3.2.2. Tanım [21] (Bernstein Polinomları) f, $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı fonksiyon ve $N \in \mathbb{N}$ olsun.

$$B_N(f,x)=\sum_{n=0}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\binom{N}{n}x^n(1-x)^{N-n}$$

polinomuna f *'e bağlı* N. *Bernstein polinomu* denir.

3.2.3. Örnekler [21]

$$B_N(1,x)=1,$$

$$B_N(x,x)=x,$$

$$B_N(x^2,x)=\frac{N-1}{N}x^2+\frac{x}{N}.$$

3.2.4. Lemma

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{n}{N}-x\right)^2\binom{N}{n}x^n(1-x)^{N-n}=\frac{x(1-x)}{N}.$$

İspat.

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{n}{N}-x\right)^2\binom{N}{n}x^n(1-x)^{N-n}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{n}{N}\right)^2\binom{N}{n}x^n(1-x)^{N-n}-$$

$$-2x\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{n}{N}\right)\binom{N}{n}x^n(1-x)^{N-n}+x^2\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}x^n(1-x)^{N-n}$$

eşitliğinin sağ tarafı

$$B_N(x^2,x)-2xB_N(x,x)+x^2B_N(1,x)$$

ifadesine eşittir. 3.2.2. Örnek'teki sonuçlar kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa istenen elde edilir.

3.2.5. Teorem [21]

$f \in C[0,1]$ olsun. $B_N(f,x)$ polinomları f fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır.

İspat. $M>0$ sayısı ve $x \in [0,1]$ için $|f(x)| \le M$ olsun. $x_0 \in [0,1]$ için $S_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{n}{N} - x_0 \right| \le \frac{1}{N^{1/4}} \right\}$ ve $S_2 := \mathbb{N} \setminus S_1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_N(f,x_0) - f(x_0) &= \sum_{n=0}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} - f(x_0) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \left[f\left(\frac{n}{N}\right) - f(x_0) \right]\binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} \\ &= \sum_{n \in S_1} \left[f\left(\frac{n}{N}\right) - f(x_0) \right]\binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} + \\ &\quad + \sum_{n \in S_2} \left[f\left(\frac{n}{N}\right) - f(x_0) \right]\binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \in S_2} \left[f\left(\frac{n}{N}\right) - f(x_0) \right]\binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} \right| &\le 2M \sum_{n \in S_2} \binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} \\ &= 2M \sum_{n \in S_1} \left(\frac{n - Nx_0}{n - Nx_0} \right)^2 \binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} \\ &\le 2M \sum_{n \in S_1} \frac{(n-Nx_0)^2}{N^{3/2}} \binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} \\ &\le 2MN^{1/2} \sum_{n \in S_1} \left(\frac{n}{N} - x_0 \right)^2 \binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} \\ &\le 2MN^{1/2} \frac{x_0(1-x_0)}{N} \\ &\le \frac{M}{2\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

$\varepsilon_N(x_0) := \max_{n \in S_1} |f(x_0) - f(n/N)|$ olsun. Bu durumda

$$\left| \sum_{n \in S_1} \left[f\left(\frac{n}{N}\right) - f(x_0) \right]\binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n} \right| \le \varepsilon_N(x_0) \sum_{n \in S_1} \binom{N}{n} x_0^n (1-x_0)^{N-n}$$

$$\leq \varepsilon_N(x_0)\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}x_0^n(1-x_0)^{N-n}$$
$$=\varepsilon_N(x_0)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler kullanılarak

$$|B_N(f,x_0)-f(x_0)|\leq \frac{M}{2\sqrt{N}}+\varepsilon_N(x_0)$$

bulunur. $f\in C[0,1]$ olduğundan düzgün süreklidir ve $N\to\infty$ iken $\varepsilon_N(x_0)$, 0'a düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla $B_N(f,x)$ polinomları f fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır.

3.3. CHEBYSHEV TEOREMLERİ

$C[a,b]$ uzayındaki bir f elemanına $\wp_n$ uzayı içinde en iyi yaklaşım elemanının varlığı 1905 yılında Borel tarafından verilmiştir.

3.3.1. Teorem [28] (Borel, 1905)

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan bir f fonksiyonuna, her bir $n\in\mathbb{N}$ için derecesi n'i aşmayan cebirsel polinomlar uzayı içinde en iyi yaklaşan polinom vardır.

İspat. İnfimum özelliğinden her hangi bir N pozitif tam sayısı için

$$\|f-P_N\|<E_n(f)+\frac{1}{N}$$

olacak şekilde bir $P_N\in\wp_n$ elemanı vardır. Bu eşitsizlik ile birlikte

$$E_n(f)\leq\|f-0\|=\|f\|$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\|P_N\|\leq\|P_N-f\|+\|f\|$$
$$<E_n(f)+\frac{1}{N}+\|f\|$$
$$\leq 2\|f\|+\frac{1}{N}\leq 2\|f\|+1=sbt.$$

elde edilir. Yani; $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ dizisi düzgün sınırlıdır. Buradan, $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ dizisi $\wp_n$ uzayının bir kapalı topunun alt kümesidir. $\wp_n$ uzayının her bir kapalı ve sınırlı altkümesi kompakt olduğundan $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ dizisinin bu küme içinde yakınsak olan bir $\{P_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi seçilebilir. Yakınsadığı polinom P_n^* ile gösterilsin. Bu durumda

$$\left\|f-P_{N_k}\right\|<E_n(f)+\frac{1}{N_k}$$

olduğu hesaba katılarak $k\to\infty$ iken limite geçilirse

$$\left\|f-P_n^*\right\|\le E_n(f)$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$E_n(f)\le\left\|f-P_n^*\right\|$$

olduğundan f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinomun P_n^* olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan bir reel fonksiyona derecesi n'i aşmayan cebirsel polinomlar içinde en iyi yaklaşan P_n^* polinomunun belirlenmesindeki gerek ve yeter koşul Chebyshev tarafından 1854 yılında verilmiştir. Bu teoreme Chebyshev alternans teoremi denir.

3.3.2. Teorem [28] (Chebyshev, 1854)

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan bir f reel fonksiyonu verilsin. f fonksiyonuna derecesi n'i aşmayan cebirsel polinomlar içinde en iyi yaklaşan polinomun P_n^* olması için gerek ve yeter koşul $[a,b]$ aralığında $a\le x_1<x_2<\ldots<x_{n+2}\le b$ olmak üzere $r_n(x):=f(x)-P_n^*(x)$ farkı için,

i. $\quad r_n(x_1)=-r_n(x_2)=r_n(x_3)=\ldots=(-1)^{n+1}r_n(x_{n+2}),$ (3.6)

ii. $\quad \forall i=\overline{1,n+2}$ için $\left|r_n(x_i)\right|=\left\|r_n\right\|$

koşullarını sağlayan $n+2$ elemanlı $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ noktalar sisteminin olmasıdır.

Yukarıdaki koşulları sağlayan $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ noktalar sistemine *Chebyshev Alternansı* denir.

İspat. ***Gereklilik.*** Eğer f fonksiyonu derecesi n'i aşmayan cebirsel polinom ise ispat açıktır. Bu nedenle, f fonksiyonu polinomdan farklı alınacaktır. İspata başlamadan önce yardımcı birkaç tanım verilecektir.

$$|r_n(x_0)| = \max_{a \le x \le b} |r_n(x)| = \|r_n\|$$

eşitliğini sağlayan her bir $x_0 \in [a,b]$ noktasına *e-nokta* denir. Özel olarak, eğer x_0 noktası $r_n(x_0) = \|r_n\|$ koşulunu sağlıyorsa bu noktaya *pozitif e-nokta,* $r_n(x_0) = -\|r_n\|$ koşulunu sağlıyorsa *negatif e-nokta* denir.

f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom P_n^* olsun.

r_n fonksiyonu sürekli olduğundan $[a,b]$ aralığında en az bir e-nokta vardır. Şimdi $[a,b]$ üzerinde hem pozitif hem de negatif e-noktalarının varlığı gösterilecektir. Gerçekten, eğer negatif e-noktalar olmasaydı r_n sürekli fonksiyonunun bütün değerleri $-\|r_n\|$ den kesin büyük olurdu. Bu nedenle $0 < h < \|r_n\|$ olacak şekilde bir h sayısı olacaktır öyle ki her bir $x \in [a,b]$ için

$$-\|r_n\| + h \le r_n(x) = f(x) - P_n^*(x) \le \|r_n\| \tag{3.7}$$

dir. $Q_n(x) := P_n^*(x) + h/2$ polinomu göz önünde bulundurulursa (3.7) eşitsizliği

$$-\|r_n\| + \frac{h}{2} \le f(x) - Q_n(x) \le \|r_n\| - \frac{h}{2}$$

şeklinde olur; yani,

$$\|f(x) - Q_n(x)\| \le \|r_n\| - \frac{h}{2} = \|f(x) - P_n^*(x)\| - \frac{h}{2}$$

olur ki bu P_n^* polinomunun en iyi yaklaşan polinom olması ile çelişir. Dolayısıyla $[a,b]$ üzerinde hem pozitif hem de negatif e-noktalar mevcuttur. Şimdi ise (3.6) koşullarını sağlayan $(n+2)$ tane e-noktalar sisteminin varlığı gösterilecektir. Bunun için $[a,b]$ aralığı $m+1$ tane

$$[a, z_1], [z_1, z_2], \ldots, [z_{m-1}, z_m], [z_m, b] \tag{3.8}$$

alt aralıklara parçalansın öyle ki her biri değişmeli olarak sırasıyla pozitif ve negatif e-nokta içersin. r_n sürekli olduğundan bu aralıkların sayısının sonlu olduğu açıktır. Yukarıdaki parçalanış aşağıda belirtildiği gibi elde edilebilir.

a noktasından b noktasına hareket edildiğinde ilk e-nokta pozitif olsun. Bu durumda z_1 noktası, a noktası ile ilk negatif e-nokta arasında kalan ve r_n fonksiyonunu sıfır yapan bir nokta olarak seçilebilir. z_2 ise, z_1 ile ondan sonra gelen ilk pozitif e-nokta arasında kalan ve r_n fonksiyonunu sıfır yapan bir nokta olarak seçilebilir. Eğer $[z_1, b]$ aralığında pozitif e-nokta yoksa $z_2 = b$ alınır. Benzer şekilde devam edilir. Son z_m noktası, b 'den farklı olacak şekilde ve yukarıda belirtildiği gibi elde edilsin. Oluşturulan her bir aralık değişmeli olarak pozitif ve negatif nokta içereceğinden ispatın gereklilik kısmının çözülmesi için $m+1 \geq n+2$ eşitsizliğinin gösterilmesi yeterli olacaktır.

$m+1 < n+2$ olsun. Bu durumda $m \leq n$ olur. $[a, z_1]$ aralığında negatif e-nokta olmadığından $[z_1, z_2]$ aralığında pozitif e-nokta bulunmaz. Benzer şekilde diğer aralıklarda da sırasıyla negatif ve pozitif e-noktalar bulunmaz. r_n fonksiyonunun sürekli ve söz konusu aralıkların sayısının sonlu olmasından dolayı $0 < h < \|r_n\|$ olacak şekilde bir h sayısı vardır öyle ki

$$\begin{aligned} -\|r_n\| + h \leq r_n(x) \leq \|r_n\|, \qquad & x \in [a, z_1] \\ -\|r_n\| \leq r_n(x) \leq \|r_n\| - h, \qquad & x \in [z_1, z_2] \\ \vdots \qquad & \end{aligned} \tag{3.9}$$

olur.

$$p_m(x) := \delta (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_m)$$

polinomunda δ sayısı öyle seçilsin ki

a) $\|p_m\| \leq \dfrac{h}{2}$,

b) $x \in [a, z_1]$ için $\operatorname{sgn} p_m(x) = 1$

olsun. p_m polinomu z_j, $j=\overline{1,m}$, noktalarından geçerken işareti değişir ve bütün e-noktalarda r_n fonksiyonu ile aynı işareti alır. Q_n polinomu

$$Q_n(x) := P_m^*(x) + p_m(x)$$

olarak tanımlanırsa derecesi n'i aşmayan bir polinom elde edilir öyle ki $x \in [a, z_1]$ için

$$f(x) - Q_n(x) < \|r_n\|$$

olur. Ayrıca (3.9)'den herhangi bir $x \in [a, z_1]$ için

$$f(x) - Q_n(x) = r_n(x) - p_m(x) \geq -\|r_n\| + h - \|p_m\| \geq -\|r_n\| + \frac{h}{2}$$

olduğundan $x \in [a, z_1]$ için

$$|f(x) - Q_n(x)| < \|r_n\|$$

elde edilir. Benzer tartışma yapılarak $x \in [z_1, z_2]$ için

$$f(x) - Q_n(x) = r_n(x) - p_m(x) \geq -\|r_n\| + \frac{h}{2}$$

ve

$$f(x) - Q_n(x) \leq \|r_n\| - h - \|p_m\| \leq \|r_n\| - \frac{h}{2}$$

elde edilir. Buradan $x \in [z_1, z_2]$ için

$$|f(x) - Q_n(x)| < \|r_n\|$$

sonucu ortaya çıkar. Aynı şekilde (3.8) sistemindeki tüm aralıklar için aynı eşitsizlik bulunabilir. Bu ise Q_n polinomunun f fonksiyonuna P_n^* polinomundan daha iyi yaklaştığını gösterir ki bu bir çelişkidir. O halde $m+1 \geq n+2$ dir.

Yeterlilik. $P_n^*(x)$ polinomu $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \leq b$ noktaları için

$$\begin{aligned} f(x_1) - P_n^*(x_1) = -[f(x_2) - P_n^*(x_2)] = \ldots = (-1)^{n+1}[f(x_{n+2}) - P_n^*(x_{n+2})] \\ = \|f - P_n^*\| \end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. P_n^* polinomunun f fonksiyonu için en iyi yaklaşan polinom olduğu gösterilecektir. Varsayılsın ki Q_n polinomu f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olsun. Bu durumda

$$\|f - Q_n\| \le \|f - P_n^*\|$$

olur. Özel olarak her bir $j = \overline{1, n+2}$ için

$$\|f(x_j) - Q_n(x_j)\| \le \|f(x_j) - P_n^*(x_j)\| = \|f - P_n^*\|$$

eşitsizliği doğrudur. Buradan her bir $j = \overline{1, n+2}$ için x_j noktalarında

$$Q_n(x_j) - P_n^*(x_j) = [f(x_j) - P_n^*(x_j)] - [f(x_j) - Q_n(x_j)]$$

farkı ile $f(x_j) - P_n^*(x_j)$ farkının işareti aynıdır. Dolayısıyla $Q_n(x) - P_n^*(x)$ polinomunun $[a,b]$ aralığında en azından $n+1$ tane sıfır noktası vardır. O halde $Q_n = P_n^*$ dir.

3.3.3. Teorem [24]

$f \in C[a,b]$ fonksiyonuna, $\wp_n$ uzayında en iyi yaklaşan eleman tektir.

İspat. Kabul edilsin ki $f \in C[a,b]$ fonksiyonuna $\wp_n$ uzayında en iyi yaklaşan iki tane $\widetilde{P_n^*}$ ve $\widetilde{\widetilde{P_n^*}}$ polinomları bulunsun. Bu durumda,

$$\left\|f - \widetilde{\widetilde{P_n^*}}\right\| = \left\|f - \widetilde{P_n^*}\right\|$$

olur. Chebyshev Alternans Teoremindeki $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ noktalar sistemi için

$$\left|f(x_i) - \widetilde{\widetilde{P_n^*}}(x_i)\right| \le \left|f(x_i) - \widetilde{P_n^*}(x_i)\right| \tag{3.10}$$

eşitsizliği doğrudur.

$$K_n(x) := \widetilde{\widetilde{P_n^*}}(x) - \widetilde{P_n^*}(x)$$

polinomu tanımlanırsa her bir $i = \overline{1, n+2}$ için

$$K_n(x_i) = \widetilde{\widetilde{P_n^*}}(x_i) - \widetilde{P_n^*}(x_i) = \left[f(x_i) - \widetilde{P_n^*}(x_i)\right] - \left[f(x_i) - \widetilde{\widetilde{P_n^*}}(x_i)\right]$$

elde edilir. (3.10)'den dolayı her bir $i = \overline{1, n+2}$ için

$$\operatorname*{sgn}_{[x_{i-1}, x_i]} K_n(x) = \operatorname*{sgn}_{[x_{i-1}, x_i]} \left(f(x) - \widetilde{P_n^*}(x)\right)$$

bulunur. Buradan $K_n(x)$ işareti en azından $n+1$ kez değişir. O halde $K_n \equiv 0$ dır.

3.4. WHITNEY TEOREMİ

3.4.1. Teorem [29] (H. Whitney, 1957)

Eğer $f \in C[a,b]$ ise

$$E_{k-1}(f) \le W_k \omega_k(h)$$

olur. Burada, $h = \dfrac{b-a}{k}$ dır ve W_k sadece k ye bağlı bir sabittir.

Whitney Teoreminin ispatına geçmeden birkaç lemma verilecektir.

$f \in C[a,b]$ olsun. $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

şeklinde tanımlanır ve her bir $x_1, x_2 \in [a,b]$ için $t = x_1 + (x_2 - x_1)u$ değişken değişimi yapılırsa

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_0^{x_2} f(t)\,dt - \int_0^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(x_1 + (x_2 - x_1)u)(x_2 - x_1)\,du$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^1 f(x_1 + (x_2 - x_1)u)\,du = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$$

eşitliği yazılır.

3.4.2. Lemma

$x \in [a,b]$, $k \in \mathbb{N}$, ve $m = \overline{0,k}$ olsun ve $\delta \neq 0$ sayısı

$$[x - m\delta, x + (k-m)\delta] \subset [a,b]$$

koşulunu sağlayacak şekilde verilsin. Bu durumda

$$\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k f(x-m\delta t)\,dt=(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(x)+ \\ +\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{F\left(x+(j-m)\delta\right)-F(x)}{j-m} \tag{3.11}$$

eşitliği doğrudur.

İspat.

$$\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k f(x-mt\delta)\,dt-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(x)=$$

$$=\int_0^1\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(x-mt\delta+jt\delta)dt-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(x)$$

$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\int_0^1 f\left(x+(j-m)t\delta\right)dt-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\int_0^1 f(x)\,dt$$

$$=\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\int_0^1 f\left(x+(j-m)t\delta\right)dt$$

son eşitlikte $u=x+(j-m)t$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k f(x-mt\delta)\,dt-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(x)=\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{(j-m)\delta}\int_x^{x+(j-m)\delta} f(u)\,du$$

$$=\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{(j-m)\delta}\left\{F\left(x+(j-m)\delta\right)-F(x)\right\}$$

$$=-\frac{1}{\delta}F(x)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{(j-m)}+\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{F\left(x+(j-m)\delta\right)}{(j-m)}$$

elde edilir ki bu lemmanın ispatını verir.

Whitney teoreminin benzerini diferansiyellenebilir fonksiyonlar için veren 3.4.3. Lemma ve 3.4.4. Teorem aşağıda verilmiştir.

3.4.3. Lemma

$x_0\in[a,b]$, $h>0$, $j=0,1,\dots,k$ için $x_j=x_0+jh$ ve $x_j\in[a,b]$ olsun. Eğer $F\in C^{(1)}[a,b]$ ise $\forall x\in[a,b]$ için,

$$\left|F(x)-L(x;F;x_0,x_1,\dots x_k)\right|\le\frac{\left|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)\right|}{k!h^k}\omega_k(h) \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,

$$\omega_k(t):=\omega_k(t;F';[a,b])$$

dir.

İspat. $q(x):=\dfrac{1}{k!h^k}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)$

olsun. Bu durumda, temel Lagrange polinomları

$$\ell_j(x)=\frac{q(x)}{(x-x_j)q'(x_j)}=(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{q(x)}{x-x_j}$$

formunda yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}F(x)-L(x;F;x_0,x_1,..x_k)&=\sum_{j=0}^{k}F(x)\ell_j(x)-\sum_{j=0}^{k}F(x_j)\ell_j(x)\\&=\sum_{j=0}^{k}\left(F(x)-F(x_j)\right)\ell_j(x)\\&=q(x)\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{F(x)-F(x_j)}{x-x_j}\end{aligned}$$

elde edilir. $f(x)=F'(x)$ olsun. O halde,

$$\int_0^1 f\left(x+(x_j-x)t\right)dt=\frac{F(x)-F(x_j)}{x-x_j}$$

olur. Bu eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|F(x)-L(x;F;x_0,x_1,\dots x_k)\right|&=\left|q(x)\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\int_0^1 f\left(x+(x_j-x)t\right)dt\right|\\&=\left|q(x)\right|\left|\int_0^1\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f\left(x+(x_0-x)t+jht\right)dt\right|\\&\le\left|q(x)\right|\int_0^1\left|\Delta_{ht}^k f\left(x+(x_0-x)t\right)\right|dt\\&\le\left|q(x)\right|\omega_k(h).\end{aligned}$$

3.4.3. Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

3.4.4. Teorem

Eğer $F \in C^{(1)}[a,b]$ ise

$$E_k(F) \leq \frac{b-a}{k}\omega_k(h) \tag{3.13}$$

olur. Burada, $h = \dfrac{b-a}{k}$ dır.

İspat. $E_k(F) = \inf\limits_{p \in P_k} \|F-p\| \leq \|F - L(\bullet; F; x_0, x_1, \dots x_k)\|$

3.4.3. Lemma kullanılarak,

$$\begin{aligned}\|F - L(\bullet; F; x_0, x_1, \dots x_k)\| &= \max_{x\in[a,b]} |F(x) - L(x; F; x_0, x_1, \dots x_k)| \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} |q(x)|\,\omega_k(h)\end{aligned}$$

elde edilir. Bir $j \in \{0,1,2,\dots,k-1\}$ için $x \in [x_j, x_{j+1}]$ olsun. Dikkat edilirse $h = \dfrac{b-a}{k}$ olduğundan $x_0 = a$ ve $x_k = b$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}|q(x)| &= \frac{1}{k!h^k}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_j)(x_{j+1}-x)\dots(x_k-x) \\ &= \frac{1}{k!h^k}(x-x_0)(x-x_0-h)\dots(x-x_0-jh)((j+1)h-(x-x_0))\dots(kh-(x-x_0)) \\ &= \frac{h}{k!}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left(\frac{x-x_0}{h}-j\right)\left((j+1)-\frac{x-x_0}{h}\right)\dots\left(k-\frac{x-x_0}{h}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $j \leq \dfrac{x-x_0}{h} \leq j+1$ olduğundan

$$\begin{aligned}|q(x)| &\leq \frac{h}{k!}(j+1)(j)\dots(1)(1)\dots(k-j) \\ &\leq h\frac{1}{1}\frac{2}{2}\dots\frac{j+1}{j+1}\frac{2}{j+2}\frac{3}{j+3}\dots\frac{k-j}{k} \\ &\leq h = \frac{b-a}{k}\end{aligned} \tag{3.14}$$

bulunur ki bu da istenen sonuçtur.

Şimdi Whitney Teoreminin ispatı verilecektir.

İspat (3.4.1. Teorem'in İspatı) $x_0 = a$, $h = \dfrac{b-a}{k}$, $j = 0,1,\ldots,k$ için $x_j = x_0 + jh$, $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$, $G(x) = F(x) - L(x;F;x_0,x_1,\ldots,x_k)$, $g(x) = G'(x)$ ve $\omega_k(t) := \omega_k(t;f;[a,b])$ olsun. Bir $x \in [a,b]$ için (3.11) eşitliğinde $m = 0$, $x + k\delta \in [a,b]$ koşulunu sağlayan δ ve F yerine G fonksiyonu alınırsa,

$$\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k g(x)\,dt = (-1)^k g(x) + \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{G(x+j\delta) - G(x)}{j}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \int_0^1 \left|\Delta_{t\delta}^k g(x)\right| dt + \frac{2}{|\delta|} \|G\| \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{k} \binom{k}{j} \frac{1}{j} \\ &\leq \omega_k(|\delta|) + \frac{2^{k+1}}{|\delta|} \|G\| \end{aligned}$$

elde edilir. 3.4.3. Lemma'dan $\|G\| \leq h\omega_k(h)$ olduğu biliniyor. Buradan δ nın $\dfrac{h}{2} \leq |\delta| \leq h$ koşulunu sağlayan herhangi bir seçimi ile

$$E_{k-1}(f) \leq \|g\| \leq \omega_k(|\delta|) + \frac{2^{k+1}}{|\delta|} h\omega_k(h) \leq \left(1 + \frac{2^{k+1}h}{|\delta|}\right) \omega_k(h)$$

elde edilir ki bu Whitney Teoreminin ispatını tamamlar.

4. BULGULAR VE TARTIŞMASI

4.1. WHITNEY İNTERPOLASYON SABİTLERİ

$f \in C[0,1]$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. f fonksiyonunun $1/k$ noktasındaki k. süreklilik modülü $\omega_k(f,1/k)$ ile, düğüm noktaları, $m=0,1,2,...,k-1$ için $x_m := m/(k-1)$ noktaları olan Lagrange polinomu ise $L_{k-1}(f,x)$ ile gösterilsin.

4.1.1. Tanım (Whitney Sabiti)

$$W(k) := \sup_{f \in C[0,1] \setminus \wp_{k-1}} \inf_{P \in \wp_{k-1}} \frac{\|f-P\|}{\omega_k(f,1/k)}$$

sayısına *Whitney sabiti* denir.

4.1.2. Tanım (Whitney İnterpolasyon Sabiti)

$$W'(k) := \sup_{f \in C[0,1] \setminus \wp_{k-1}} \frac{\|f - L_{k-1}(f,.)\|}{\omega_k(f,1/k)}$$

sayısına *Whitney interpolasyon sabiti* denir.

4.1.3. Tanım (Kryakin Sabiti)

Her bir $m = 1,2,...,k$ için

$$\int_0^{m/k} \left(f(x) - Q_{k-1}(f;x)\right) dx = 0$$

eşitliğini sağlayan $Q_{k-1}(f;\bullet)$ polinomuna göre tanımlanan

$$\widetilde{W}(k) := \sup_{f \in C[0,1] \setminus \wp_{k-1}} \frac{\|f - Q_{k-1}(f,\bullet)\|}{\omega_k(f,1/k)}$$

sayısına *Kryakin sabiti* denir.

Tanımlanan bu üç sabit arasında

$$W(k) \le W'(k) \text{ ve } W(k) \le \widetilde{W}(k)$$

bağıntılarının olduğu tanımlarından görülür.

4.1.4. Teorem

$f \in C[0,1]$ olsun. $k > 1$ için,

$$W'(k) \leq 3.$$

$x \in [1/k, 1-1/k]$ için

$$\left|f(x) - L_{k-1}(f;x)\right| \leq \omega_k\left(f, \frac{1}{k}\right)$$

eşitsizliği iyi bilindiğinden (bkz. [29]) burada sadece $x \in [0,1/k)$ için

$$\left|f(x) - L_{k-1}(f;x)\right| \leq 3\omega_k\left(f, \frac{1}{k}\right) \tag{4.1}$$

eşitsizliği ispatlanacaktır. (4.1) i elde etmek için Yu. V. Kriakin'e ait olan yöntem uygulanacaktır [20]: Q_{k-1}, her bir $i = 1,2,...,k$ için

$$\int_0^{i/k} \left(f(t) - Q_{k-1}(f;t)\right) dt = 0 \tag{4.2}$$

koşulunu sağlayan polinom olmak üzere $g(x) := f(x) - Q_{k-1}(f;x)$ olsun. Bu gösterimden faydalanılarak,

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - L_{k-1}(f;x)\right| &= \left|f(x) - Q_{k-1}(f;x) - L_{k-1}(f;x) + Q_{k-1}(f;x)\right| \\
&\leq \left|f(x) - Q_{k-1}(f;x)\right| + \left|L_{k-1}(f;x) - L_{k-1}(Q_{k-1};x)\right| \\
&= \left|f(x) - Q_{k-1}(f;x)\right| + \left|L_{k-1}(f - Q_{k-1};x)\right| \\
&= \left|g(x)\right| + \left|\sum_{m=0}^{k-1} g(x_m)\ell_m(x)\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece problem $\left|g(x)\right|$ in $x \in [0,1/k)$ aralığında ve $m = 0,1,2,...,k-1$ için x_m noktalarında değerlendirilmesine indirgenmiş oldu. Bu değerlendirme için 4.1.5. Lemma kullanılacaktır

.

4.1.5. Lemma

$m < \frac{k}{2}$, $x \in \left[\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}\right]$, $\delta = \frac{1-x}{k-m}$ ve $\omega_k\left(f, \frac{1}{k}\right) \leq 1$ ise

$$\binom{k}{m}|f(x)| \le 1+(k\delta)^k-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}A_k'(x)$$
$$+\frac{2}{\delta}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{k}{j}\frac{1}{m-j}\left|A_k\left(x+\delta(j-m)\right)\right|,$$

dır. Burada

$$A_k(x):=\frac{k^k}{k!}x\left(x-\frac{1}{k}\right)\left(x-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{k}{k}\right)=x(-1)^k\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{kx}{j}\right)$$

olup $A_k'(x)$, $A_k(x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevidir.

4.1.5. Lemma'nın ispatı için 4.1.6. Lemma ve 4.1.7. Lemma'ya ihtiyaç vardır.

4.1.6. Lemma

$m\in\{0,1,\ldots,k\}$, $x\in I:=[0,1]$ ve $\delta>0$ olsun öyle ki $[x-m\delta,\ x+(k-m)\delta]\subset I$ ise aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(x)=\int_0^1\Delta_{t\delta}^k f(x-mt\delta)\,dt-(-1)^{k-m}\frac{1}{\delta}\binom{k}{m}(\sigma_{k-m}-\sigma_m)F(x)$$
$$-\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\ne m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{j-m}F\left(x+(j-m)\delta\right), \tag{4.3}$$

burada, $\sigma_0:=0$, $\sigma_m:=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}$, $m=1,2,\ldots$ ve $F(x):=\int_0^x f(t)dt$ dir.

4.1.6. Lemma'nın ispatı için 4.1.6.1. Lemma'ya ihtiyaç vardır.

4.1.6.1. Lemma

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{j+x}=\frac{(-1)^k k!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k)} \tag{4.4}$$

$$\sum_{\substack{j=0\\ j\ne m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{j-m}=(-1)^{k-m}\binom{k}{m}(\sigma_m-\sigma_{k-m}) \tag{4.5}$$

İspat. k dereceli bir polinomun $k+1$ tane farklı noktada aynı değeri aldığında özdeş olarak sabit olduğu bilinmektedir. (4.4) eşitliğini ispatlamak için bu bilgi kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} Q_k(x) &:= \prod_{i=0}^{k}(x+i)\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{j+x} \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x+i) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Q_k polinomu k dereceli bir polinomdur. Her bir $n\in\{0,-1,-2,\dots,-k\}$ için,

$$\begin{aligned} Q_k(n) &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(n+i) \\ &= (-1)^{k+n}\binom{k}{-n}n(n+1)\dots(n+(-n-1))(n+(-n+1))\dots(n+k) \\ &= (-1)^{k+n}\frac{k!}{(-n)!(k+n)!}(-1)^{-n}(-n)!(k+n)! \\ &= (-1)^k k! \end{aligned}$$

olduğundan $Q_k(x)=(-1)^k k!$ olur. Bu ise (4.4) eşitliğini ispatlar.

(4.5) ün ispatında (4.4) eşitliği kullanılacaktır.

$$H_{k,m}(x):=\binom{k}{m-x}=\frac{k!}{(m-x)(m-1-x)\dots(1-x)(1+x)\dots(k-m+x)}$$

ile tanımlanan bu fonksiyon $x=0$ noktasında türevlenebilirdir. (4.4) eşitliğinde x yerine $-m+x$ yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{j-m+x}=\frac{(-1)^k k!}{(-m+x)(-m+x+1)\dots(-1+x)x(1+x)\dots(-m+k+x)}$$

$$\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{j-m+x}=(-1)^{k-m}\frac{1}{x}\left[H_{k,m}(x)-H_{k,m}(0)\right]$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafında $x\to 0$ iken

$$\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{j-m}=(-1)^{k-m}H'_{k,m}(0) \tag{4.6}$$

elde edilir. Ayrıca $H_{k,m}(x)$ fonksiyonunun logaritması alınırsa,

$$\log H_{k,m}(x)=\log\left(\frac{k!}{(m-x)(m-1-x)\ldots(1-x)(1+x)\ldots(k-m+x)}\right)$$
$$=\log(k!)-\log(m-x)-\ldots-\log(1-x)-\log(1+x)-\ldots-\log(k-m+x)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının $x=0$ noktasındaki türevi alınırsa,

$$\frac{H'_{k,m}(0)}{H_{k,m}(0)}=\sigma_m-\sigma_{k-m}$$

bulunur. Buradan,

$$H'_{k,m}(0)=\binom{k}{m}(\sigma_m-\sigma_{k-m})$$

elde edilir. Bu sonuç (4,6) eşitliğinde yerine yazılırsa (4,5) ispatlanmış olur.

İspat (4.1.6. Lemma'nın İspatı). 3.4.2. Lemma'daki (3.11) eşitliğinde (4.5) eşitliği kullanılırsa istenen elde edilir.

4.1.7. Lemma

$i=1,2,\ldots,k$ için $F\left(\frac{i}{k}\right)=0$ ise

$$F(x)=A_k(x)\int_0^1\Delta^k_{1/k}f(x(1-t))dt,\qquad x\in I.$$

İspat.

$$F(x).1=F(x)L_k(1,x)=F(x)\sum_{i=0}^{k}\ell_i(x) \tag{4.7}$$

$\ell_i(x)$ ifadesinin açılımı yazılırsa,

$$\ell_i(x)=\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{k}\right)\left(x-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{i-1}{k}\right)\left(x-\frac{i+1}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{k}{k}\right)}{\left(\frac{i}{k}-0\right)\left(\frac{i}{k}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{i}{k}-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(\frac{i}{k}-\frac{i-1}{k}\right)\left(\frac{i}{k}-\frac{i+1}{k}\right)\ldots\left(\frac{i}{k}-\frac{k}{k}\right)}$$
$$=\frac{k^kx\left(x-\frac{1}{k}\right)\left(x-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{i-1}{k}\right)\left(x-\frac{i+1}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{k}{k}\right)}{i(i-1)(i-2)\ldots(1)(-1)\ldots(i-k)}$$

$$=(-1)^{k-i}\frac{(k!)}{i!(k-i)!}\frac{1}{\left(x-\frac{i}{k}\right)}\frac{k^k}{(k!)}x\left(x-\frac{1}{k}\right)\left(x-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{i}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{k}{k}\right)$$

$$=(-1)^{k-i}\frac{(k!)}{i!(k-i)!}\frac{1}{\left(x-\frac{i}{k}\right)}A_k(x)$$

bulunur. Elde edilen bu sonuç (4.7) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}F(x)&=F(x)\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\frac{(k!)}{i!(k-i)!}\frac{1}{\left(x-\frac{i}{k}\right)}A_k(x)\\&=A_k(x)\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\frac{(k!)}{i!(k-i)!}\frac{F(x)-F\left(\frac{i}{k}\right)}{\left(x-\frac{i}{k}\right)}\end{aligned}\tag{4.8}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F\left(\frac{i}{k}\right)}{\left(x-\frac{i}{k}\right)}&=\frac{1}{\left(x-\frac{i}{k}\right)}\left\{\int_0^x f(u)du-\int_0^{i/k} f(u)du\right\}\\&=\frac{1}{\left(x-\frac{i}{k}\right)}\int_{i/k}^{x} f(u)du\\&=\int_0^1 f\left(x+\left(i/k-x\right)t\right)dt.\end{aligned}$$

(4.8) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}F(x)&=A_k(x)\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\frac{(k!)}{i!(k-i)!}\int_0^1 f\left(x+\left(i/k-x\right)t\right)dt\\&=A_k(x)\int_0^1\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f\left(x(1-t)+i\,t/k\right)dt\\&=A_k(x)\int_0^1\Delta_{t/k}^{k}f\left(x(1-t)\right)dt\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi 4.1.5. Lemmanın ispatı verilecektir.

İspat (4.1.5. Lemma'nın İspatı). 4.1.6. Lemma kullanılarak,

$$\binom{k}{m}|f(x)| \le \int_0^1 \left|\Delta_{t\delta}^k f(x-mt\delta)\right| dt + \frac{1}{\delta}\binom{k}{m}(\sigma_{k-m}-\sigma_m)|F(x)| +$$
$$+\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\ne m}}^{k}\binom{k}{j}\frac{1}{|j-m|}\left|F(x+(j-m)\delta)\right|,$$

elde edilir. $x+(j-m)\delta \le 1$ olduğundan 4.1.7. Lemma kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\binom{k}{m}|f(x)| &\le \int_0^1 \left|\Delta_{t\delta}^k f(x-mt\delta)\right| dt +\\ &+\frac{1}{\delta}\binom{k}{m}(\sigma_{k-m}-\sigma_m)|A_k(x)|\int_0^1\left|\Delta_{1/k}^k f(x(1-t))\right|dt+\\ &+\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\ne m}}^{k}\binom{k}{j}\frac{|A_k(x+(j-m)\delta)|}{|j-m|}\int_0^1\left|\Delta_{1/k}^k f(x+(j-m)\delta(1-t))\right|dt\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. $x-mt\delta$, $x-mt\delta+t\delta$, $x(1-t)$ ve $x(1-t)+t/k$ sayıları I aralığında olduğundan $0\le t\le 1$ için

$$\left|\Delta_{t\delta}^k f(x-mt\delta)\right| \le \omega\left(f,\frac{1}{k}\right)\le 1$$

$$\left|\Delta_{1/k}^k f(x(1-t))\right| \le \omega\left(f,\frac{1}{k}\right)\le 1$$

$$\left|\Delta_{1/k}^k f(x+(j-m)\delta(1-t))\right| \le \omega\left(f,\frac{1}{k}\right)\le 1$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler (4.9) de yerlerine yazılırsa,

$$\binom{k}{m}|f(x)| \le 1+\frac{1}{\delta}\binom{k}{m}(\sigma_{k-m}-\sigma_m)|A_k(x)|+\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\ne m}}^{k}\binom{k}{j}\frac{|A_k(x+(j-m)\delta)|}{|j-m|} \tag{4.10}$$

elde edilir. $|A_k(x)|=(-1)^{k-m}A_k(x)$ olduğundan,

$$\frac{1}{\delta}\binom{k}{m}(\sigma_{k-m}-\sigma_m)|A_k(x)| = (-1)^{k-m}\frac{1}{\delta}\binom{k}{m}(\sigma_{k-m}-\sigma_m)A_k(x)$$

şeklinde yazılabilir. 4.1.6. Lemma, F in yerine A_k fonksiyonu yazılarak uygulanırsa,

$$(-1)^{k-m}\frac{1}{\delta}\binom{k}{m}(\sigma_{k-m}-\sigma_m)A_k(x)=\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k A_k'(x-mt\delta)dt-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}A_k'(x)-$$
$$-\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{j-m}A_k(x+(j-m)\delta), \tag{4.11}$$

elde edilir.

$$A_k'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{k^k}{k!}x\left(x-\frac{1}{k}\right)\left(x-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{k}{k}\right)\right\}$$
$$=\frac{k^k}{k!}\left\{\left(x-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{k}{k}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}x\left(x-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{j-1}{k}\right)\left(x-\frac{j+1}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{k}{k}\right)+\right.$$
$$\left.+x\left(x-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(x-\frac{k-1}{k}\right)\right\}$$

eşitliğinin solundaki her bir terim baş katsayısı $\frac{k^k}{k!}$, derecesi k olan cebirsel polinomdur. Sonlu farkların özelliğinden,

$$\Delta_{t\delta}^k A_k'(x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{k^k}{k!}(t\delta)^k k!=(k+1)(k\delta t)^k$$

bulunur. O halde,

$$\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k A_k'(x-m\delta t)\,dt=(k+1)(k\delta)^k\int_0^1 t^k dt=(k\delta)^k$$

elde edilir. Bu sonuç (4.11) de yerine yazılıp elde edilen ifade (4.10) de yerine yazılırsa,

$$\binom{k}{m}|f(x)|\le 1+(k\delta)^k-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}A_k'(x)+$$
$$+\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}\binom{k}{j}\left\{\frac{|A_k(x+(j-m)\delta)|}{|m-j|}+(-1)^{k-j}\frac{A_k(x+(j-m)\delta)}{m-j}\right\} \tag{4.12}$$

elde edilir. İspatın tamamlanması için (4.12) eşitsizliğindeki toplamda $j>m$ olan terimlerin sıfır olduğu gösterilmelidir. Gerçekten, $j>m$ ve $m/k\le x\le (m+1)/k$ ise

$$x+(j-m)\delta-\frac{j}{k}=x+(j-m)\frac{1-x}{k-m}-\frac{j}{k}\ge\frac{m}{k}+(j-m)\frac{1-m/k}{k-m}-\frac{j}{k}=0$$

ve

$$x+(j-m)\delta-\frac{j+1}{k}\le\frac{m+1}{k}+(j-m)\frac{1-(m+1)/k}{k-m}-\frac{j+1}{k}=\frac{m-j}{k(k-m)}<0$$

elde edilir. Dolayısıyla $x+(j-m)\delta\in\left[j/k,(j+1)/k\right]$. Buradan $j>m$ için

$$\left|A_k\left(x+(j-m)\delta\right)\right|=(-1)^{k-j}A_k\left(x+(j-m)\delta\right)$$

eşitliği yazılabilir. Bu sonuç (4.12) da yerine yazılırsa 4.1.5. Lemma ispatlanmış olur.

İspat (4.1.4. Teorem'in İspatı).

Genelliği bozmayacağından $\omega_{k-1}(f,1/k)\le 1$ olarak varsayılabilir. Teoremin ispatı birkaç lemmaya ayrılarak yapılacaktır.

4.1.8. Lemma, 4.1.5. Lemma'nın bir sonucudur.

4.1.8. Lemma

$x\in[0,1/k)$ olsun. Bu durumda

$$\left|f(x)-Q_{k-1}(f;x)\right|=\left|g(x)\right|\le 1+(1-x)^k-(-1)^k A_k'(x).$$

$x_m=\dfrac{m}{k-1}$ olmak üzere $\left|\sum_{m=0}^{k-1}g(x_m)\ell_m(x)\right|$ nin değerlendirilmesi için 4.1.9. Lemma'ya ihtiyaç vardır.

4.1.9. Lemma

Her bir $m=0,1,\dots,k-1$ için,

$$\left|g(x_m)\right|\le\binom{k-1}{m}^{-1}+2(k-1)\sigma_{k-1}\left|A_k(x_m)\right|$$

eşitsizliği doğrudur.

4.1.10. Lemma'nın gösterilmesi için 4.1.9. Lemma kullanılacaktır.

4.1.10. Lemma

$x\in[0,1/k)$ için

$$\left|L_{k-1}(g;x)\right|\le\left(\frac{1}{x}+C_{k-1}(x)\right)\left|A_{k-1}(x)\right|+$$
$$+2(k-1)\sigma_{k-1}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}\left(\left|A_{k-1}(x)\right|\left(\frac{1}{2}-x\right)-\left|A_k(x)\right|\right),$$

burada

$$C_{k-1}(x) := \frac{k-1}{1-(k-1)x} + \ldots + \frac{k-1}{k-1-(k-1)x} = -\sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{x-x_m}$$

dır.

4.1.11. Lemma

$x \in [0,1/k)$ ve $k > 6$ olsun. Bu durumda

$$\left|f(x) - L_{k-1}(f;x)\right| \le 2 + \mathrm{e}(k-1)\sigma_{k-1}\left|A_{k-1}(x)\right|.$$

4.1.12. Lemma

$x \in [0,1/k)$ için

$$\mathrm{e}(k-1)\sigma_{k-1}\left|A_{k-1}(x)\right| \le 1.$$

4.1.12. Lemma, $t \ge 0$ için $1-t \le \exp(-t)$ ve $t\exp(-t) \le 1$ eşitsizliklerinden görülür.

Sonuç olarak 4.1.4. Teorem, 4.1.11. Lemma ve 4.1.12. Lemma'larından kolayca görülür.

İspat (4.1.8. Lemma'nın İspatı).

4.1.5. Lemma f yerine g için uygulanır ve $m = 0$ yazılırsa

$$\left|g(x)\right| \le 1 + (1-x)^k - (-1)^k A_k'(x)$$

elde edilir.

İspat (4.1.9. Lemma'nın İspatı).

İspatın yazımını kolaylaştırması amacıyla bazı yeni gösterimler aşağıda verilmiştir.

$$B_k(y) := kA_k(y/k) = \frac{1}{k!}y(y-1)\ldots(y-k)$$

$$y_m := m + x_m = kx_m$$

$$z_m := \frac{k-y_m}{k-m}$$

$$s_m := \frac{1}{z_m}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{k}{j}\frac{1}{m-j}\left|B_k\left(y_m+(j-m)z_m\right)\right|$$
$$b_m(x) := \left(1-\frac{x}{k-m}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{m}\right)$$
$$c_m(x) := \frac{1}{k-m-x}+\ldots+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\ldots-\frac{1}{m+x}$$

Genelliği kaybetmeden $x_m \le \frac{1}{2}$ kabul edilebilir. 4.1.5. Lemma'nın bir uygulaması 4.1.9. Lemma'yı aşağıdaki eşitsizliğe indirger:

$$1+z_m^k-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}B_k'(y_m)+2s_m \le \frac{k}{k-m}+2\sigma_{k-1}\frac{k-1}{k}\binom{k}{m}\left|B_k(y_m)\right|. \quad (4.13)$$

$y = m + x$ olmak üzere

$$\begin{aligned}-(-1)^{k-m}\binom{k}{m}B_k'(y) &= -(-1)^{k-m}\binom{k}{m}B_k'(m+x)\\ &= -(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x+m-i)\\ &= -(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k}(x+m-i)\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{x+m-j}\\ &= -xb_m(x)\left[-c_m(x)+\frac{1}{x}\right]\\ &= -b_m(x)+xb_m(x)c_m(x)\end{aligned}$$

eşitliği (4.13) de yerine yazılırsa gösterilmesi gereken eşitsizlik aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}z_m^k+b_m(0)-b_m(x_m)+x_m b_m(x_m)c_m(x_m)+2s_m &\le\\ \le \frac{k}{k-m}+2\sigma_{k-1}\frac{k-1}{k}x_m b_m(x_m).\end{aligned}$$

Bu isteği gerçekleştirmek için aşağıdaki eşitsizlikler kullanılacaktır:

$$z_m^k \le \exp\frac{x_m}{x_m-1}+\frac{4.8}{k}-\frac{x_m}{1-x_m}-1+\frac{k}{k-m}, \quad (4.14)$$

$$s_m \le \frac{k-1}{k}\sigma_m x_m b_m(x_m)+\frac{2\sigma_m}{k}x_m b_m(x_m). \quad (4.15)$$

(4.14) ve (4.15) den (4.13) ü ispatlamak için aşağıdaki eşitsizliği göstermek yeterli olacaktır:

$$\frac{4\sigma_m b_m(x_m)+4.8}{k}-\frac{1}{1-x_m}+\frac{\exp\frac{x_m}{x_m-1}-1}{x_m}+\frac{b_m(0)-b_m(x_m)}{x_m}+$$
$$+b_m(x_m)c_m(x_m)\le 2(\sigma_{k-1}-\sigma_m)\frac{k-1}{k}b_m(x_m).$$

Bu eşitsizlik yeniden düzenlenirse gösterilmesi gereken eşitsizlik

$$\begin{aligned}&\frac{4\sigma_{k-1}+4.8}{k}-\frac{1}{1-x_m}+\frac{1}{x_m}\left(\exp\frac{x_m}{x_m-1}-1\right)+\\&+\left(\frac{b_m(0)-b_m(x_m)}{x_m}-(\sigma_{k-1}-\sigma_m)b_m(x_m)\right)+b_m(x_m)\left(c_m(x_m)-\sigma_{k-1}+\sigma_m\right)\le 0\end{aligned}\tag{4.16}$$

olur.

(4.14) ün İspatı.

$$\begin{aligned}z_m^k-\exp\frac{x_m}{x_m-1}&=\left(1-\frac{x_m}{k-m}\right)^k-\exp\frac{x_m}{x_m-1}\\&=\left(1+\frac{\left(\frac{kx_m}{m-k}\right)}{k}\right)^k-\exp\frac{x_m}{x_m-1}\\&\le\exp\frac{kx_m}{m-k}-\exp\frac{x_m}{x_m-1}\\&=\exp\frac{kx_m}{m-k}\left(1-\exp\left(\frac{x_m}{x_m-1}-\frac{kx_m}{m-k}\right)\right)\end{aligned}$$

$1+x\le\exp x$ eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}z_m^k-\exp\frac{x_m}{x_m-1}&\le\exp\frac{kx_m}{m-k}\left(-\left(\frac{x_m}{x_m-1}-\frac{kx_m}{m-k}\right)\right)\\&=\frac{x_m}{k(1-x_m)}\frac{kx_m}{k-m}\exp\left(-\frac{kx_m}{k-m}\right)\end{aligned}\tag{4.17}$$

elde edilir. Yine $1+x\le\exp x$ eşitsizliğinde x yerine $x-1$ yazılırsa $x\exp(-x)\le e^{-1}$ bulunur. Bu eşitsizlik (4.17) kullanılır ve $x_m\le 1/2$ olduğu dikkate alınırsa,

$$z_m^k-\exp\frac{x_m}{x_m-1}\le\frac{x_m}{1-x_m}\frac{1}{ek}\le\frac{2}{ek}x_m<\frac{0.8}{k}x_m$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{x_m}{1-x_m}-\frac{k}{k-m}+1\le\frac{4}{k}x_m$$

olduğundan istenen elde edilir.

(4.15) in İspatı.

(4.15) i ispatlamak için aşağıdaki eşitsizlikten faydalanılacaktır. $j=0,1,\dots,m-1$ için

$$\binom{k}{j}\left|B_k\left(y_m+(j-m)z_m\right)\right|\le\binom{k}{j+1}\left|B_k\left(y_m+(j+1-m)z_m\right)\right|. \qquad (4.18)$$

$u_j := y_m+(j-m)z_m-j=\dfrac{(k-j)m}{(k-1)(k-m)}$ olsun. Dikkat edilirse $u_j\ge u_{j+1}$ dir.

Buradan,

$$\frac{\binom{k}{j}\left|B_k\left(j+u_j\right)\right|}{\binom{k}{j+1}\left|B_k\left(j+1+u_{j+1}\right)\right|}=\frac{\left(1+\frac{u_j}{j}\right)\dots\left(1+\frac{u_j}{1}\right)u_j\left(1-\frac{u_j}{1}\right)\dots\left(1-\frac{u_j}{k-j}\right)}{\left(1+\frac{u_{j+1}}{j+1}\right)\dots\left(1+\frac{u_{j+1}}{1}\right)u_{j+1}\left(1-\frac{u_{j+1}}{1}\right)\dots\left(1-\frac{u_{j+1}}{k-j-1}\right)}$$

$$=\frac{u_j\left(1-\left(\frac{u_j}{1}\right)^2\right)\dots\left(1-\left(\frac{u_j}{j}\right)^2\right)\left(1-\frac{u_j}{j+1}\right)\dots\left(1-\frac{u_j}{k-j-1}\right)\left(1-\frac{u_j}{k-j}\right)}{\left(1+\frac{u_{j+1}}{j+1}\right)u_{j+1}\left(1-\left(\frac{u_{j+1}}{1}\right)^2\right)\dots\left(1-\left(\frac{u_{j+1}}{j}\right)^2\right)\left(1-\frac{u_{j+1}}{j+1}\right)\dots\left(1-\frac{u_{j+1}}{k-j-1}\right)}$$

$$\le\frac{u_j\left(1-\frac{u_j}{k-j}\right)}{\left(1+\frac{u_{j+1}}{j+1}\right)u_{j+1}}=\frac{k-j}{k-j-1}\,\frac{k-m-1}{k-m-1+\frac{m}{j+1}}<1$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.18) ispatlanmış olur. (4.18) den

$$\begin{aligned}
s_m&=\frac{1}{z_m}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{k}{j}\frac{1}{m-j}\left|B_k\left(y_m+(j-m)z_m\right)\right|\\
&\le\frac{1}{z_m}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{k}{j+1}\frac{1}{m-j}\left|B_k\left(y_m+(j+1-m)z_m\right)\right|\\
&\le\frac{1}{z_m}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{k}{m}\frac{1}{m-j}\left|B_k\left(y_m+(m-m)z_m\right)\right|
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{z_m}\binom{k}{m}\left|B_k(y_m)\right|\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m-j}=\frac{1}{z_m}\sigma_m x_m b_m(x_m)$$

bulunur. Aşağıdaki eşitsizlik (4.15) in ispatını tamamlar:

$$\frac{1}{z_m}=\frac{k-m}{k-m-1}\frac{k-1}{k}=\frac{k-1}{k}+\frac{k-1}{k(k-m-1)}$$
$$=\frac{k-1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{m}{k(k-m-1)}$$
$$\leq\frac{k-1}{k}+\frac{2}{k}.$$

(4.16) nın İspatı.

(4.16) nın ispatı üç kısma ayrılarak yapılacaktır.

I. Kısım.

İlk önce aşağıdaki eşitsizlik ispatlanacaktır: $0\leq x\leq x_m$ için

$$b_m(x)\left(c_m(x)-\sigma_{k-1}+\sigma_m\right)\leq\frac{1.2}{k-1}+d(x) \tag{4.19}$$

burada $d(x):=\frac{23}{10}x-\frac{26}{20}x^3$ tür.

$m>2$ ve $\sigma:=\sigma_{k-1}-\sigma_m$ olsun.

$$\sigma_{k-m}-\sigma_m-\sigma=\sigma_{k-m}-\sigma_{k-1}$$
$$=-\frac{1}{k-(m-1)}-\ldots-\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+x_m-x_m$$
$$=-\frac{1}{k-(m-1)}-\ldots-\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{m}{k-1}-x_m$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k-(m-1)}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right\}+\frac{1}{k}-x_m$$

parantez içindeki ifade negatif olduğundan

$$\sigma_{k-m}-\sigma_m-\sigma\leq-x_m+\frac{1}{k}\leq-x+\frac{1}{k}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$c_m(x)-\sigma\leq\frac{1}{k-m-x}+\ldots+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\ldots-\frac{1}{m+x}-x+\frac{1}{k}+\sigma_m-\sigma_{k-1}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{2x}{1-x^2}+\ldots+\frac{2x}{m^2-x^2}+\frac{1}{m+1-x}+..+\frac{1}{k-m-x}-x+\frac{1}{k}+\sigma_m-\sigma_{k-1}\\
&=\frac{1}{k}+\left(\frac{2x}{1-x^2}-x\right)+\frac{2x}{2^2-x^2}+\ldots+\frac{2x}{m^2-x^2}+\\
&+\frac{x}{(m+1)(m+1-x)}+\ldots+\frac{x}{(k-m)(k-m-x)}.
\end{aligned}
$$

$a:=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$ olsun. İlk önce geometrik ortalama ile aritmetik ortalama arasındaki bağıntı, ardından $(1-t)^k\le 1-kt+\frac{(kt)^2}{2}$, $t\ge 0$, eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)&\le\left(1-\frac{x^2}{m-2}\left(\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}\right)\right)^{m-2}\\
&\le 1-ax^2+\frac{a^2}{2}x^4+x^2\left(\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\ldots\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\ldots\le\int_m^\infty\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{m}$ olduğundan

$$
\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)\le 1-ax^2+\frac{a^2}{2}x^4+\frac{xx_m}{m}=\frac{x}{k-1}+1-ax^2+\frac{a^2}{2}x^4
$$

bulunur. Bu nedenle

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{k}+\frac{2x}{1-x^2}-x+\frac{2x}{2^2-x^2}\right)b_m(x)&\le\frac{1.2}{k-1}+\left(\frac{2x}{1-x^2}-x+\frac{2x}{2^2-x^2}\right).\\
&.\left(1-x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-ax^2+\frac{a^2}{2}x^4\right)
\end{aligned}
$$

olur. $j=3,\ldots,m$ için $b_m(x)\le\left(1-x^2\right)\left(1-x^2/4\right)\left(j^2-x^2\right)/j^2$ ve $j=m+1,\ldots,k-m$ için $b_m(x)\le\left(1-x^2\right)\left(1-x^2/4\right)(j-x)/j$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2x}{3^2-x^2}+\ldots+\frac{2x}{m^2-x^2}+\frac{x}{(m+1)(m+1-x)}+\ldots+\frac{x}{(k-m)(k-m-x)}\right)b_m(x)\le\\
&\le 2x\left(1-x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(\frac{1}{3^2}\ldots+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{2(m+1)^2}+\ldots+\frac{1}{2(k-m)^2}\right)\\
&\le 2ax\left(1-x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak elde edilen bu eşitsizlikler birleştirilerek

$$
\begin{aligned}
b_m(x)\left(c_m(x)-\sigma\right) &\le \frac{1.2}{k-1}+\left(2a+\frac{3}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}-4a\right)x^3+\left(\frac{a}{4}+\frac{3a^2}{4}-\frac{1}{4}\right)x^5+\\
&\quad+\left(\frac{a}{4}+\frac{a^2}{8}\right)x^7-\frac{a^2}{8}x^9\\
&\le \frac{1.2}{k-1}+\left(2a+\frac{3}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}-4a\right)x^3\\
&\le \frac{1.2}{k-1}+d(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$m=1$ durumu için $b_m(x)\le\left(1-x^2\right)$ ve $j=2,\ldots,k-1$ için $b_m(x)\le(j-x)/j$ eşitsizlikleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$
\begin{aligned}
b_m(x)\left(c_m(x)-\sigma\right) &= \left(\frac{2x}{1-x^2}+\sum_{i=2}^{k-1}\frac{x}{i(i-x)}\right)b_m(x)\\
&\le x\left(2+\sum_{i=2}^{k-1}\frac{1}{i^2}\right)\le x\left(2+a+\frac{1}{4}\right)=x\left(a+\frac{9}{4}\right).
\end{aligned}
$$

$0\le x\le 1/k-1$ olduğundan (4.19) ispatlanmış olur. Aynı şekilde $m=2$ durumunda $j=1,2$ için $b_m(x)\le\left(1-\dfrac{x^2}{j^2}\right)$ ve $j=3,\ldots,k-2$ için $b_m(x)\le(j-x)/j$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
b_m(x)\left(c_m(x)-\sigma\right) &= \left(\frac{1}{k-1}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{2^2-x^2}+\sum_{i=3}^{k-2}\frac{x}{i(i-x)}\right)b_m(x)\\
&\le \frac{b_m(x)}{k-1}+x\left(2+\frac{1}{2}+\sum_{i=3}^{k-2}\frac{1}{i^2}\right)\\
&\le \frac{1}{k-1}+x\left(\frac{3}{2}+a\right)\le\frac{1.2}{k-1}+d(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son sonuçla beraber ispatın birinci kısmı ispatlanmış olur.

II. Kısım.

Burada

$$
\frac{b_m(0)-b_m(x_m)}{x_m}-\sigma b_m(x_m)\le\frac{1.6}{k-1}+d(x_m)\left(1-x_m\ln x_m\right)+x_m\ln^2 x_m \qquad (4.20)
$$

eşitsizliği ispatlanacaktır. b_m fonksiyonu için $[0, x_m]$ aralığında ortalama değer teoremi kullanılırsa,

$$\frac{b_m(0)-b_m(x_m)}{x_m} = -b_m'(\theta) = b_m(\theta)\big(c_m(\theta)-\sigma\big)+\sigma b_m(\theta)$$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{1.2}{k-1}+d(\theta)+\sigma \\
&\le \frac{1.2}{k-1}+d(x_m)+\sigma \\
&= \frac{1.2}{k-1}+d(x_m)+\sigma b_m(x_m)+\sigma\big(b_m(0)-b_m(x_m)\big) \\
&\le \frac{1.2}{k-1}+d(x_m)+\sigma b_m(x_m)+\sigma x_m\left(\frac{1.2}{k-1}+d(x_m)+\sigma\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{b_m(0)-b_m(x_m)}{x_m}-\sigma b_m(x_m) \le \frac{1.2}{k-1}(1+x_m\sigma)+d(x_m)(1+x_m\sigma)+x_m\sigma^2$$

elde edilir. Ayrıca $\sigma < \ln\frac{k-1}{m} = -\ln x_m$ eşitsizliği göz önüne alınırsa (4.20) ispatlanmış olur.

III. Kısım.

Bu son kısımda ilk iki kısımda elde edilen sonuçları birleştirerek (4.16) ispatlanacaktır. (4.19) ve (4.17) den

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b_m(0)-b_m(x_m)}{x_m}-\sigma b_m(x_m)\right)+b_m(x_m)\big(c_m(x_m)-\sigma\big)+\frac{4\sigma_{k-1}+4.8}{k}-\frac{1}{1-x_m}+ \\
&+\frac{1}{x_m}\left(\exp\frac{x_m}{x_m-1}-1\right) \le d(x_m)(2-x_m\ln x_m)+x_m\ln^2 x_m+\frac{2.8}{k-1}+ \\
&\qquad +\frac{4\sigma_{k-1}+4.8}{k}-\frac{1}{1-x_m}+\frac{1}{x_m}\left(\exp\frac{x_m}{x_m-1}-1\right) \\
&\le \max_{x\in(0,1/2]}\left(d(x)(2-x\ln x)+x\ln^2 x-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\left(\exp\frac{x}{x-1}-1\right)\right)+ \\
&\quad +\frac{4\sigma_{k-1}+4.8}{k}+\frac{2.8}{k-1} \\
&\le \frac{4\sigma_{k-1}+4.8}{k}+\frac{2.8}{k-1}-0.56873
\end{aligned}$$

elde edilir. $k > 72$ için (4.16) yukarıdaki eşitsizlikten görülür. $k \leq 72$ için ise (4.13) ün doğruluğu direkt hesaplamalarla görülebilir. Bu durumda 4.1.9. Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

İspat: (4.1.10. Lemma'nın İspatı)

$$\begin{aligned} \ell_m(x) &= \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\ldots(x-x_{k-1})}{(x_m-x_0)\ldots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})(x_m-x_{k-1})} \\ &= (-1)^{k-m-1}\binom{k-1}{m}\frac{A_{k-1}(x)}{x-x_m} \end{aligned}$$

ve $x \in [0,1,/k-1)$ olduğundan,

$$\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}^{-1}|\ell_m(x)| = \sum_{m=0}^{k-1}\frac{|A_{k-1}(x)|}{|x-x_m|} = |A_{k-1}(x)|\left(\frac{1}{x}+C_{k-1}(x)\right)$$

elde edilir. Böylece ispatın tamamlanması için aşağıdaki özdeşliğin gösterilmesi yeterli olacaktır:

$$\sum_{m=0}^{k-1}|A_k(x_m)||\ell_m(x)| = \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}\left(|A_{k-1}(x)|\left(\frac{1}{2}-x\right)-|A_k(x)|\right). \tag{4.21}$$

$a_k(x) := \dfrac{k!}{k^k}A_k(x) = x\left(x-\dfrac{1}{k}\right)\ldots\left(x-\dfrac{k}{k}\right)$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{a}_k(x) := x a_{k-1}(x) = x^{k+1} - \frac{k}{2}x^k + \ldots$$

ve

$$a_k(x) = x^{k+1} - \frac{k+1}{2}x^k + \ldots$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} a_k(x) - \tilde{a}_k(x) - L_{k-1}(a_k;x) &= a_k(x) - \tilde{a}_k(x) - L_{k-1}(a_k - \tilde{a}_k;x) \\ &= -\frac{1}{2}a_{k-1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda $a_k(x) - \tilde{a}_k(x) - L_{k-1}(a_k - \tilde{a}_k;x)$ nin baş katsayısı $\dfrac{-1}{2}$, derecesi k ve $0, \dfrac{1}{k-1}, \ldots, \dfrac{k-1}{k-1}$ noktalarında sıfır olan bir polinomdur. Dolayısıyla bu polinom $-\frac{1}{2}a_{k-1}(x)$ polinomu ile çakışık olur..

$a_k(0)=a_k(1)=0$ ve her $m=1,2,\ldots,k-3$ için

$$\operatorname{sgn}\ell_m(x)a_k\left(\frac{m}{k-1}\right)=\operatorname{sgn}\ell_{m+1}(x)a_k\left(\frac{m+1}{k-1}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{k-1}\left|\ell_m(x)a_k\left(\frac{m}{k-1}\right)\right| &= \left|L_{k-1}(a_k,x)\right| \\ &= \left|\left(\frac{1}{2}-x\right)a_{k-1}(x)+a_k(x)\right| \\ &= \left|a_{k-1}(x)\right|\left(\frac{1}{2}-x\right)-\left|a_k(x)\right|\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. Yukarıda, son eşitlik $a_k(x)a_{k-1}(x)\le 0$ ve $\left|a_{k-1}(1/k)\right|>0=a_k(1/k)$ bağıntıları kullanılarak elde edilmiştir. Son olarak (4.22) eşitliğinin her iki tarafı $k^k/k!$ ile çarpılırsa (4.21) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İspat: (4.1.11. Lemma'nın İspatı)

$$\left|f(x)-L_{k-1}(f,x)\right|\le\left|g(x)\right|+\left|L_{k-1}(g,x)\right|$$

eşitsizliğine 4.1.8. Lemma ve 4.1.10. Lemma uygulanırsa

$$\begin{aligned}\left|f(x)-L_{k-1}(f,x)\right| \le\ & 1+(1-x)^k-(-1)^k A_k'(x)+\left(\frac{1}{x}+C_{k-1}(x)\right)\left|A_{k-1}(x)\right|+ \\ & +2(k-1)\sigma_{k-1}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}\left(\left|A_{k-1}(x)\right|\left(\frac{1}{2}-x\right)-\left|A_k(x)\right|\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$-(-1)^k A_k'(x)=C_k(x)\left|A_k(x)\right|-\frac{1}{x}\left|A_k(x)\right|$$

eşitliği kullanılırsa son eşitsizlik

$$\begin{aligned}\left|f(x)-L_{k-1}(f,x)\right| \le\ & 1+(1-x)^k+C_k(x)\left|A_k(x)\right|-\frac{1}{x}\left|A_k(x)\right|+\frac{1}{x}\left|A_{k-1}(x)\right|+ \\ & +\left|A_{k-1}(x)\right|C_{k-1}(x)-2(k-1)\sigma_{k-1}ex\left|A_{k-1}(x)\right|+ \\ & +(k-1)\sigma_{k-1}e\left|A_{k-1}(x)\right|-2(k-1)\sigma_{k-1}\left|A_k(x)\right|\end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer

$$h(x) := (1-x)^k + C_k(x)|A_k(x)| - \frac{1}{x}|A_k(x)| + \frac{1}{x}|A_{k-1}(x)| + |A_{k-1}(x)|C_{k-1}(x) -$$
$$-2(k-1)\sigma_{k-1}ex|A_{k-1}(x)| - 2(k-1)\sigma_{k-1}|A_k(x)| \le 1$$

olduğu gösterilirse

$$|f(x) - L_{k-1}(f,x)| \le 2 + (k-1)\sigma_{k-1}e|A_{k-1}(x)|$$

bulunur ki bu 4.1.11. Lemma'yı verir.

Şimdi $h(x) \le 1$ olduğu gösterilecektir.

$6 < k \le 31$ için $h(x) \le 1$ olduğu direkt hesaplanır. İspatın geri kalan kısmında $k > 31$ varsayılacaktır.

4.1.11.1. Lemma

$x \in [0, 1/k)$ için

$$|A_{k-1}(x)| - |A_k(x)| \le (1 + \sigma_{k-2})x|A_{k-1}(x)| + \frac{x}{1-kx}|A_k(x)|$$

dır.

İspat.

$$\frac{|A_{k-1}(x)|}{|A_k(x)|} = \frac{(1-x)\frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!}x\left(\frac{1}{k-1}-x\right)\left(\frac{2}{k-1}-x\right)...(1-x)}{\frac{k^k}{k!}x\left(\frac{1}{k}-x\right)\left(\frac{2}{k}-x\right)...(1-x)}$$

$$= \frac{k!(1-x)(1-(k-1)x)(2-(k-1)x)...(k-1-(k-1)x)}{(k-1)!(1-kx)(2-kx)...(k-kx)}$$

$$= \frac{(1-(k-1)x)(2-(k-1)x)...(k-1-(k-1)x)}{(1-kx)(2-kx)...(k-1-kx)}$$

$$= \left(1+\frac{x}{1-kx}\right)\left(1+\frac{x}{2-kx}\right)...\left(1+\frac{x}{k-1-kx}\right)$$

$x \in [0, 1/k)$, $t \ge 0$ için $1 + t \le e^t$ ve $e^t(1-t) \le 1$ olduğundan

$$\le \left(1+\frac{x}{1-kx}\right)\left(1+\frac{x}{1}\right)...\left(1+\frac{x}{k-2}\right)$$

$$\le \left(1+\frac{x}{1-kx}\right)e^{\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+...+\frac{x}{k-2}}$$

$$=\left(1+\frac{x}{1-kx}\right)e^{x\sigma_{k-2}}$$
$$\leq\left(1+\frac{x}{1-kx}\right)\frac{1}{1-x\sigma_{k-2}}$$

elde edilir. Buradan

$$(1-x)\left|A_{k-1}(x)\right|(1-x\sigma_{k-2})\leq\left(1+\frac{x}{1-kx}\right)\left|A_k(x)\right|$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left|A_{k-1}(x)\right|-\left|A_k(x)\right|\leq\left(x+x\sigma_{k-2}-x^2\sigma_{k-2}\right)\left|A_{k-1}(x)\right|+\frac{x}{1-kx}\left|A_k(x)\right|$$
$$\leq x\left(1+\sigma_{k-2}\right)\left|A_{k-1}(x)\right|+\frac{x}{1-kx}\left|A_k(x)\right|$$

elde edilir ki bu 4.1.11.1. Lemma'yı verir.

4.1.11.1. Lemma'dan yararlanılarak

$$\begin{aligned}h(x)\leq&\frac{1}{2}(1-x)^k+\left(C_k(x)-k\sigma_k\right)\left|A_k(x)\right|+\frac{1+\sigma_{k-1}}{1-kx}\left|A_k(x)\right|+\left|A_k(x)\right|+\\&+\frac{1}{2}(1-x)^k+\left(C_{k-1}(x)-(k-1)\sigma_{k-1}\right)\left|A_{k-1}(x)\right|+\\&+\left(1+\sigma_{k-2}\right)\left|A_{k-1}(x)\right|+x(k-1)\sigma_{k-1}\left(1+\sigma_{k-2}-2e\right)\left|A_{k-1}(x)\right|\end{aligned}\tag{4.23}$$

elde edilir. $0<t<1$ için $1+t<\frac{1}{1-t}$ olduğundan (4.23)'nin son satırındaki ifade

$$\frac{\left(1+\sigma_{k-2}\right)}{1-(k-1)x}\left|A_{k-1}(x)\right|+x(k-1)\sigma_{k-1}\left(\sigma_{k-2}-2e\right)\left|A_{k-1}(x)\right|$$

ifadesinden küçük kalır.

$$g_k(y):=\left(\frac{y}{(1-y)1}+\ldots+\frac{y}{(k-y)k}\right)\left|B_k(y)\right|+\frac{1+\sigma_{k-1}}{k(1-y)}\left|B_k(y)\right|$$

gösterimi kullanılarak (4.23) eşitsizliği, $0<u:=kx<1$ ve $0<v:=(k-1)x<1$ olmak üzere

$$h(x)\leq\frac{1}{2}e^{-u}+g_k(u)+\frac{1}{k}\left|B_k(u)\right|+\frac{1}{2}e^{-v}+g_{k-1}(v)+\frac{\sigma_{k-1}}{k-1}\left(\sigma_{k-2}-2e\right)v\left|B_{k-1}(v)\right|$$

şeklini alır.

4.1.11.2. Lemma

$y \in (0,1)$ için

$$g_k(y) + \frac{1}{k}\left|B_k(y)\right| \le \frac{1}{2} y e^{-y}, \tag{4.24}$$

$$g_{k-1}(y) + \frac{\sigma_{k-1}}{k-1}(\sigma_{k-2} - 2e) y \left|B_{k-1}(y)\right| \le \frac{1}{2} y e^{-y}. \tag{4.25}$$

İspat. İlk olarak (4.24) ispatlanacaktır.

$j = \overline{1,k}$ için $\dfrac{1-y}{j-y} \le \dfrac{1}{j}$ olduğundan

$$\frac{y}{(1-y)1} + \dots + \frac{y}{(k-y)k} = \frac{y}{1-y}\left[\frac{1-y}{(1-y)1} + \dots + \frac{1-y}{(k-y)k}\right]$$
$$\le \frac{y}{1-y}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = \frac{y}{1-y}\frac{\pi^2}{6}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{y}{1-y}\left|B_k(y)\right| = \frac{y}{1-y}\frac{1}{k!} y(1-y)(2-y)\dots(k-y)$$
$$= yy\left(1 - \frac{y}{2}\right)\dots\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$
$$\le yy e^{-y\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right)} = yy e^{-y(\sigma_k - 2)} e^{-y} \le \frac{y e^{-y}}{e(\sigma_k - 2)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler kullanılarak

$$\left(\frac{y}{(1-y)1} + \dots + \frac{y}{(k-y)k}\right)\left|B_k(y)\right| \le \frac{\pi^2}{6e(\sigma_k - 2)} y e^{-y} \le \frac{\pi^2}{12e} y e^{-y}$$

eşitsizliği bulunur. $g_k(y)$ ifadesindeki ikinci terimin değerlendirilmesinde

$$\frac{y}{1-y}\left|B_k(y)\right| \le y e^{-y(\sigma_k - 1)} \le y e^{-y}$$

eşitsizliği kullanılacaktır.

$$\frac{1+\sigma_{k-1}}{k(1-y)}\left|B_k(y)\right| \le \frac{1+\sigma_{k-1}}{k} y e^{-y} \le \frac{5}{31} y e^{-y}$$

Böylece

$$g_k(y) \le \left(\frac{\pi^2}{12e} + \frac{5}{31}\right) y e^{-y}$$

elde edilir. Buradan

$$g_k(y) + \frac{1}{k}|B_k(y)| \le \left(\frac{\pi^2}{12e} + \frac{5}{31} + \frac{1}{31}\right) y e^{-y} \le \frac{1}{2} y e^{-y}$$

bulunur ki bu (4.24)'ü verir.

Şimdi (4.25) ispatlanacaktır.

$$g_{k-1}(y) + \frac{\sigma_{k-1}}{k-1}(\sigma_{k-2} - 2e) y |B_{k-1}(y)| \le \left(\frac{\pi^2}{12e} + \frac{5}{31}\right) y e^{-y} + \frac{\sigma_{k-1}}{k-1}(\sigma_{k-2} - 2e) y |B_{k-1}(y)|$$

eşitsizliğinde $\sigma_{k-2} - 2e < 0$ ise (4.25) sağlanır. Diğer durumda ise yani $k-2 > 62$ ise $\frac{\sigma_{k-1}}{k-1} \le \frac{2e}{62}$ ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{k-1}}{k-1}(\sigma_{k-2} - 2e) y |B_{k-1}(y)| &\le \frac{\sigma_{k-1}}{k-1} \frac{\sigma_{k-2} - 2e}{e(\sigma_{k-1} - 1)} y e^{-y} \\ &\le \frac{\sigma_{k-1}}{k-1} \frac{1}{e} y e^{-y} \le \frac{1}{31} y e^{-y} \end{aligned}$$

olur ki bu (4.25)'ü ispatlar.

Bu sonuçlarla birlikte aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$h(x) \le \frac{1}{2}(1+u)e^{-u} + \frac{1}{2}(1+v)e^{-v} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

4.1.12. Lemma'nın İspatı.

$k > 6$ ve $x \in [0, 1/k)$ için

$$\begin{aligned} e(k-1)\sigma_{k-1}|A_{k-1}(x)| &\le e(k-1)\sigma_{k-1} \frac{k^k}{k!} x \left(\frac{1}{k} - x\right)\left(\frac{2}{k} - x\right) \dots \left(\frac{k}{k} - x\right) \\ &= e(k-1)\sigma_{k-1} x (1 - kx)\left(1 - \frac{kx}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{kx}{k}\right) \\ &\le e(k-1)\sigma_{k-1} x e^{-kx\sigma_{k-1}} e^{-1} \\ &\le (k-1)\sigma_{k-1} x e^{-kx\sigma_{k-1}} \le \frac{k-1}{k} < 1 \end{aligned}$$

4.2. WHITNEY ve KRYAKIN SABİTLERİ

4.2.1. Teorem [19]

f, $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\tilde{W}(k) \le \begin{cases} 2, & k \le 82000 \\ 2+\exp(-2), & k > 82000 \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\left\| f - Q_{k-1}(f,.) \right\| \le \tilde{W}(k)\,\omega_k\left(f, \frac{1}{k}\right)$$

dır.

4.2.1. Teorem'inin ispatı 4.1.8. Lemma ve 4.2.2. Lemma'dan kolayca görülür.

4.2.2. Lemma

$x \in (0, 1/k]$ için

$$(1-x)^k - (-1)^k A_k'(x) \le 1 + \exp(-2) \tag{4.26}$$

ve $k \le 82000$ için

$$(1-x)^k - (-1)^k A_k'(x) \le 1 \tag{4.27}$$

dir.

İspat. $u := kx$ yazılırsa (4.26) eşitsizliği $0 \le u < 1$ için

$$w_k(u) := \left(1 - \frac{u}{k}\right)^k - (-1)^k B_k'(u) \le 1 + \exp(-2)$$

eşitsizliğine denk olur. $k = 2$ için

$$w_2(u) = \frac{5}{4}u\left(\frac{8}{5} - u\right) \le 0.8$$

benzer şekilde $k = 3$ için $w_3(u) \le 0.8$ elde edilir.

$k \ge 4$ olsun. Bu durumda $\sigma_k - 1 > 1$ olur. $c(u) := \dfrac{1}{1-u} + \ldots + \dfrac{1}{k-u}$ olmak üzere

$$-(-1)^k B_k'(u)=|B_k(u)|\left(c(u)-\frac{1}{u}\right)$$

eşitliği,

$$c(u)<\sigma_k+\frac{\pi^2}{6}\frac{u}{1-u}<\sigma_k+\frac{5}{3}\frac{u}{1-u}$$

ve

$$\begin{aligned}|B_k(u)|&=\frac{1}{k!}u(1-u)(2-u)\dots(k-u)\\&=u(1-u)\left(1-\frac{u}{2}\right)\dots\left(1-\frac{u}{k}\right)\\&=ue^{-u\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)}=ue^{-u\sigma_k}\end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}-(-1)^k B_k'(u)&\le\left(\sigma_k-\frac{1}{u}\right)|B_k(u)|+\frac{5}{3}\frac{u}{1-u}|B_k(u)|\\&\le\max\left\{0,e^{-\sigma_k u}(\sigma_k u-1)\right\}+\frac{5}{3}u^2e^{-(\sigma_k-1)u}\end{aligned}$$

bulunur. $xe^{-x}\le\frac{1}{e}$ olduğundan $(\sigma_k u-1)e^{-u\sigma_k+1}e^{-1}\le\frac{1}{e^2}$ dır. Bu nedenle

$$-(-1)^k B_k'(u)\le\exp(-2)+\frac{5}{3}u^2\exp(-u)$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$w_k(u)\le\exp(-2)+\exp(-u)+\frac{5}{3}u^2\exp(-u)\le\exp(-2)+1$$

bulunur ki bu (4.26)'i verir.

4.2.3. Sonuç

$$W(k)\le\begin{cases}2, & k\le 82000\\ 2+\exp(-2), & k>82000.\end{cases}$$

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen, Whitney sabitlerinin üstten 2.14 ile sınırlı olduğu sonucu, Sendov'un 1982'de öne sürdüğü, Whitney sabitlerinin 1 ile üstten sınırlı olduğuna dair tahminine en yakın sonuçtur.

Bu konu ile ilgili çalışmalar günümüzde halen tazeliğini korumaktadır. Zhelnov'un [32] 2002 yılında yayınlanan çalışmasında k = 1,2,...,7 için W_k Whitney sabitlerinin 1 ile üstten sınırlı olduğunu göstermiştir.

1992 yılında Kovalenko ve Kryakin'nin [14] $L^1(I)$ uzayında Whitney sabitlerinin 6.5 ile sınırlılığı sonucu $L^1(I)$ uzayındaki en iyi sonuçtur.

Bu sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda aşağıda verilen problemler, günümüzde bu konu ile ilgili çözülmeyi bekleyen problemler olarak görülebilir.

1) Whitney sabitlerini 2.14'den daha küçük bir sayı ile sınırlandırılması.
2) 7'den büyük bir k sayısı için Whitney sabitinin 1'den küçük olduğunu gösterme.
3) $L^1(I)$ uzayındaki Whitney sabitlerinin 6.5'dan daha küçük bir sayı ile sınırlandırılması.

KAYNAKLAR

[1] Chebyshev, P. L. "Theorie des mecanismes connussous le nom de paralleogrammes", Chelsea Publ. Co. New York, Ouvres **I**, 273-378, (1854).

[2] Weierstrass, K. "Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen", Sitzungsberichete der Akademie zu Berlin 633-639, (1885)

[3] Borel, E. "Leçons sur les Fonctions de Variables Reelles", Gauthier-Villars, Paris, p.160, (1905).

[4] Burkill, H. "Cesaro-Perron Almost Periodic Functions", Proc.London Math. Soc. **2** (3): p.150-174, (1952).

[5] Whitney, H. "On the functions with bounded n-differences", J. Math. Pures Appl. **36**: s.67–95. (1957).

[6] Brudnyi, Yu. V. "Studies in the Theory of Local Approximations", Doctoral Dissertation, Yaroslavi, (1977).

[7] Storozhenko, E.A. "Approximation of Functions and imbedding theorems in L^p and H^p", Doctoral Dissertation, Tbilisi, (1979).

[8] Sendov, Bl. "On the Constants of H. Whitney", C.R. Acad. Bulgare Sci. **35:** p.431-434, (1982).

[9] Ivanov, K.G. Takev, M.D."$O(n \ln n)$-bound for Whitney Constant", C.R. Acad. Bulgare Sci. **38:** p.1129-1131, (1985).

[10] Binev, P.G. "$O(n)$-bound for Whitney Constant", C.R. Acad. Bulgare Sci. **38:** p.1303-1305, (1985).

[11] Sendov, Bl. "The Constants of H. Whitney are Bounded", C.R. Acad. Bulgare Sci. **38:** p.1299-1302, (1985).

[12] Sendov, Bl. "On a Theorem of H. Whitney", Dokl. Akad. Nauk, SSSR, **291:** p.1296-1300, (1986).

[13] Kryakin, Yu. V. "On the Whitney Constants", Mat. Zametki, **46**(2): p.155-157, (1989).

[14] Kryakin, Yu.V. Kovalenko, L.G. "Whitney constants in the Classes L^p, $1 \leq p < \infty$", Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **1** (354): p.69-77, (1992)

[15] Kryakin, Yu. V. "On Whitney's Theorem and Constants", Russian Acad. Sci. Sb. Math. **81**: s.281-295, (1995).

[16] Shevchuk, I.A. "Whitney İnequality and Convex Splines", International Colloquim on Application of Math. Abstracts, Hamburg, p.55, (1997).

[17] Danilenko, I.G. "On the Sendov problem for the Whitney Interpolation Constants", Ukrainian Math. J. **50**: p.831-833, (1998).

[18] Zhelnov, O.D. "Whitney Interpolation Constants are Bounded by 2 for $k = 5,6,7$", Ukrainian Math. J. **55**(4): p.660-664, (2003).

[19] Gilewicz J., Kryakin, Yu. V., Shevchuk I. A. "Boundedness by 3 of the Whitney Interpolation Constant", Journal of App. Th. **119**: s.271-290, (2002)

[20] Kryakin, Yu. V. Takev, M. D. "Whitney Interpolation Constants", Ukrain. Mat. Zh. **47**: s.1038-1043, (1995).

[21] Feinerman, R.P. Newman, D.J. "Polynomial Approximation", Wavely Pres, p.148, (1974)

[22] Hardy, G.H. Littlewood, J.E. Polya, G. "Inequalities", Cambridge University Pres, p.324, (1997).

[23] Shevchuk, I.A. "Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a segment", Naukova Dymka, Kiev, p.324,(1992),

[24] Davis, P.J. "Interpolation and Aproximation", Blaisdell Publishing Company, p.393, (1963).

[25] Balcı, M. "Matematik Analiz", Ertem Matbaası, s.420, (1984)

[26] Thomas, G.B. Finney, R.L. "Calculus and Analytic Geometry", Addison-Wesley Publishing Company, p. 1142, (1984).

[27] Marsden, J.E. "Elemantary Classical Analysis", W.H. Freeman and Company, p.537, (1974).

[28] Dzjadyk, V.K. "Introduction in Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials", Nauka, Moscow, p.511, (1977),

[29] Sendov, Bl. Popov, V. "The Avaraged Moduli of Smoothness" Wiley, Chichester, p.182, 1988.

[30] Bernstein, S.N. "Demonstration du theoreme de Weierstrass Fondee sur le Calcul de Probalities", CKMS, **13**, 1-2, (1912)

[31] Kızmaz, H. "Fonksiyonel Analize Giriş", Karadeniz Teknik Ünv. Basımevi, Trabzon, s.322, (1993).

[32] Zhelnov, O.D. "Whitney Constants are Bounded by 1 for $k=5,6,7$", East Journal on Approximation: p.1-14, (2002).

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında İskenderun'da doğdum. İlk okul, orta okul ve lise eğitimimi aynı şehirde tamamladım. 1996 yılında girdiğim, Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2000 yılında mezun oldum.

2001 yılından itibaren aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.