ALAN ÜZERİNDE ORTOGONAL POLİNOMLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

UĞUR DEĞER

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH

MERSİN
Temmuz - 2004

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH

Jüri Üyesi	Jüri Üyesi
Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ	Doç.Dr. H. Seferoğlu MUSTAFAYEV

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun 02.../09../2004 tarih ve 2004/22/..301... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ÖZ

$G \subset C$, $L = \partial G$, Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge, $h(z)$, G'de tanımlı negatif olmayan, G'nin alanı üzerinde integrallenebilir ve hemen hemen her yerde sıfırdan farklı bir fonksiyon ve $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$,

$$\iint_G h(z)K_n(z)\overline{K_m(z)}d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

koşulunu sağlayan G bölgesinin alanı üzerinde $h(z)$ ağırlıklı bir ortonormal sistem olsun.

Bu çalışmada ilk olarak yarıkonform eğri ile sınırlı sonlu basit bağlantılı bir bölgenin alanı üzerinde $h(z)$ ağırlık fonksiyonu ile ortonormal olan $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ polinomlarının bazı özellikleri incelenecektir. Daha sonra bölgenin sınırındaki singülerlik ve ağırlık fonksiyonunun singülerliği arasındaki ilişki ile bölgenin kapanışında, ortonormal polinomların modülünün sıfıra gitme hızının etkilenmediği ve bu ilişki ile keyfi polinomlar için de benzer değerlendirmenin yapılabileceği ele alınacaktır.

Anahtar Kelimeler: Ortogonal Polinomlar, Ağırlık Fonksiyonu, Yarıkonform Dönüşüm ve Yarıkonform Eğri

ABSTRACT

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a finite domain bounded by a Jordan curve $L = \partial G$, let $h(z)$ be a nonnegative weight function defined in G, and let $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ be an orthonormal polynomials system over the area of G domain by $h(z)$ weight function that satisfy condition

$$\iint_G h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)} d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

First of all, we are going to investigate polynomials that are orthonormal with $h(z)$ weight function over the area of a finite simple connected domain bounded with quasiconform curve in this work. Second, we obtain some estimates for the rate of tending to zero of modulu of orthonormal polynomials at the closure of domain with connection between the singularity of the bound of domain and singularity of the weight function. At the end, we will see that the similar estimates can be done about the arbitrary polynomials with this connection.

Key Words: Orthogonal Polynomials, Weight Function, Quasiconform Mapping and Quasiconform Curve

TEŞEKKÜR

Akademik hayata atılmamda ve bu çalışmayı hazırlamamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam, Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu çalışma boyunca yardımını esirgemeyen, başta Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ olmak üzere, bölümdeki hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$:=$	Tanım olarak eşittir
$A \Subset G$	A bölgesi kompakt olarak G bölgesinin içerisindedir.
$d\sigma_z$	$dx\,dy$
∂G	G bölgesinin sınırı
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
$mes\gamma$	γ eğrisinin uzunluğu
$mesG$	G bölgesinin alanı
$intG$	G bölgesinin içi
$extG$	G bölgesinin dışı
$U_\delta(z_0)$	$\{z : \lvert z - z_0\rvert < \delta\}$
$D(z,\delta)$	$\{\xi : \lvert \xi - z\rvert < \delta\}$
D	$D(0,1)$
Ω	$extG$
$\Omega(z,\delta)$	$\Omega \cap D(z,\delta)$
$\Delta(z,\delta)$	$extD(z,\delta)$
Δ	$extD$
$C([a,b])$	$[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar sınıfı
C^1	Kendisi ve türevi sürekli fonksiyonlar sınıfı
$a \preceq b$	$a \le cb$, c sabit
$a \asymp b$	$a \preceq b$ ve $b \preceq a$
$d(z_0, L)$	$\inf\{\lvert z - z_0\rvert : z \in L\}$
$\delta(z_0)$	$d(z_0, L)$

$k=\overline{1,m}$	$k=1,2,...,m \quad (m\geq 1,\ m\in\mathbb{N})$
$A(G)$	G bölgesinde analitik fonksiyonların kümesi
$A(\overline{G})$	G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ 'da sürekli fonksiyonların kümesi
$L^p(h,G)$	$\left\{f:\iint\limits_G h(z)\lvert f(z)\rvert^p d\sigma_z<\infty\right\}$
$A_2(G)$	$\{f:f\in A(G)\cap L^2(1,G)\}$
$A_2(h,G)$	$\{f:f\in A(G)\cap L^2(h,G)\}$
$\omega(f,u)$	$\sup\limits_{\substack{0\leq h\leq u \\ x,x+h\in[a,b] \\ (a\leq x\leq b-h)}} \lvert f(x+h)-f(x)\rvert$

1. GİRİŞ

Klasik ortogonal polinomlar olarak bilinen Tschebyscheff-Hermit, Tschebyscheff-Laguerre, Jacobi ve onların özel halleri olan 1. ve 2. tür Tschebyscheff, Legendre polinomları Analizin, Fiziğin ve Mekaniğin Çeşitli dallarında kullanılan önemli bir materyaldir.

Ortogonal polinomlar teorisi ilk defa P.L. Chebyshev'in çalışmaları ile başlamıştır [Chebyshev, 1947]. Daha sonra S.N. Bernstein [Bernstein, 1954], G. Szegö [Szegö, 1939], Y.L. Geronimus [Geronimus, 1950], P.K. Suetin [Suetin, 1974], F.G.Abdullayev, V.V.Andriewskii [1983], F.G. Abdullayev [1986,2000,2001] v.b., devam ettirilmiştir. Daha fazla bilgi P.K. Suetin[1974] ve H. Stahl, V. Totik [1992]'de bulunabilir.

1921 yılında Szegö, reel eksenin alt kümelerinden kompleks düzleme geçerek keyfi ölçülebilir L Jordan eğrisi ve bu eğri üzerinde tanımlı h ağırlık fonksiyonuna göre

$$Q_n(z) := Q_n(z,h,L),\ n = 0,1,2,...,$$

ortogonal polinomlarını tanımlamıştır. Görüldüğü gibi $Q_n(z)$ polinomları yalnız h ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak değil, aynı zamanda L eğrisinin özelliklerine bağlı olarak tanımlanmaktadır. Bu polinomların bu şekilde tanımlanması bir çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Daha sonra Ortogonal polinomlar teorisi V.I. Smirnov, M.V. Keldych, P.P. Korovkin, P.C. Rosembloom ve S.E. Warshawski, Y.L. Geronimus, P.K. Suetin, G. Fauth, v.b. tarafından geliştirilmiştir.

$G \subset C$, $L = \partial G$, jordan eğrisi ile sınırlı sonlu basit bağlantılı bir bölge, $h(z)$, G'de tanımlı negatif olmayan, G'nin alanı üzeri integrallenebilir ve hemen hemen her yerde sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun. $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg K_n = n$ polinomlar sistemi için

$$\iint_G h(z)K_n(z)\overline{K_m(z)}d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

sağlanıyorsa bu sisteme G bölgesinin alanı üzerinde $h(z)$ ağırlıklı bir ortonormal polinomlar sistemi denir.

Bölge ve ağırlık fonksiyonu verildiğinde bu polinomların bölgenin içinde ve sınırında modülünün artışı bakılan bölgenin ve ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak değişir. Bu bağımlılığın bulunması polinomlar teorisinde çok önemli problemlerden biridir. $h(z)$ ağırlık fonksiyonu ve L'nin yarıkonform eğri olduğunu kabul ederek bölgenin sınırında $|K_n(z)|$'nin artışı bir α_n, $\alpha_n \to \infty$, $n \to \infty$, şeklinde gösterilsin. Eğer L yarıkonform eğri ve $h(z)$ fonksiyonu da L'nin üzerinde singüler noktalara sahip ise, bölgenin sınırında $|K_n(z)|$'nin artışı doğal olarak değişecektir. Bu değişim nasıl olacaktır? Keyfi polinomlar için bu değerlendirme nasıl olacaktır? Bunu aşağıdaki 4 maddeyle açıklayalım.

(1) Sınır ve ağırlık fonksiyonu singüler noktalara sahip olmadığında: Bu durumda keyfi polinomların modülünün değerlendirilmesi belli yöntemlerle elde edilir. Bu değerlendirmelerde ağırlık fonksiyonu ve sınırın geometrik özellikleri belirgin bir rol oynamaz.

(2) Sınır eğrisi ve ağırlık fonksiyonu singüler noktalara sahip olduğunda: Bu durumda, sınır eğrisi ve ağırlık fonksiyonu arasındaki bağıntı (interference koşulu altında) ile , ele alınan keyfi polinomların, sınır eğrisinin ve bölgenin özelliğine bağlı olarak modülünün değerlendirilmesinde, bu bağıntı sayesinde (1)'de elde edilen değerlendirmenin aynısı elde edilir.

(3) Sınır eğrisinin singüler noktası var iken ağırlık fonksiyonunun singüler noktası olmadığında: Bu durumda sınır eğrisi üzerindeki singüler noktaların durumuna göre keyfi polinomların modülü değerlendirilir.

(4) Ağırlık fonksiyonu singüler noktaya sahipken, sınır eğrisi'nin singüler noktası olmadığında: Bu durumda ağırlık fonksiyonu üzerindeki singüler noktaların durumuna göre keyfi polinomların modülü değerlendirilir.

Bu çalışmada, yukarıda belirtilen dört duruma göre $|K_n(z)|$'nin ve keyfi polinomların modülünün değerlendirilmesinde, "α_n hızının sabit kalması için L eğrisi ve $h(z)$ fonksiyonu karşılıklı hangi koşulları sağlamalıdır? " sorusuna yanıt verilecektir.

Bu bağlamda, materyal ve metot bölümünde gerekli tanımlar, lemmalar ve teoremler verilecek, bulgular ve tartışma bölümünde ise daha önceden incelenmiş olan çalışmaların bir derlemesi olarak; bölgenin kapanışında sınır eğrisi ve ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak ortogonal polinomların modülünün değerlendirilmesi, daha sonra da keyfi polinomların ağırlık fonksiyonu ve sınır eğrisinin interference koşulu altında modülünün değerlendirilmesi ele alınacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

$G \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge; $h(z) \geq 0$, G'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. $K_n(z) := a_n z^n + \ldots + a_0$, $a_n > 0$, biçiminde verilen $\{K_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinomlar sistemine

$$\iint_G h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)}\, d\sigma_z = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

koşulu altında (G, h) çifti için **ortonormal polinomlar** sistemi denir.

$A_2(h, G)$ ile G'de analitik ve

$$\|f\|^2_{A_2(h,G)} := \iint_G h(z) |f(z)|^2\, d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı gösterilsin. Ayrıca $A_2(1, G) \equiv A_2(G)$ dir.

Alan üzerinde ortogonal polinomların eğri veya bir aralık üzerinde ortogonal polinomlardan önemli farklılıklarının olmasına rağmen eğri veya aralık üzerinde ortogonal polinomlar teorisinde incelenen problemler benzer şekilde alan üzerinde ortogonal polinomlar için de ele alınır.

$\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ polinomlar sistemi bölge ve ağırlık fonksiyonuna göre tek türlü tanımlandığından bu polinomlar ile oluşturulan Fourier serilerininde herhangi bir fonksiyona yakınsaması bölgenin ve ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlıdır.

Konu bir çok matematikçi tarafından çeşitli bölgeler için incelenmiştir. T. Carleman [1],G. Szegö [2], P.P. Korovkin [3], Y.L. Geronimus [4], , P.C. Rosembloom ve S.E. Warshawskii [5], P.K. Suetin [7], F.G. Abdullayev ve V.V. Andrievskii [8], D. Gaier [9], F.G. Abdullayev [10], [11], v.b. tarafından incelenmiştir.

Ortogonal polinomlar Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgeler için benzerlerini bulmak amacı ile ilk defa T. Carleman [1] tarafından kullanılmıştır.

A.L.Kuzmina [6] parçalı bir analitik eğri boyunca ortogonal polinomların asimptotik gösteriminin nasıl olacağını incelemiş. P.K.Suetin [7], [8] ise bunu daha da genişleterek, bir daire boyunca ortogonal polinomların temel özelliklerini ele alarak geliştirmiştir. P.K.Suetin [9] daha sonraki çalışmasında ise bir bölge üzerinde ortogonal polinomları incelemiştir.

V.I.Belyi [10] yarıkonform eğri ile sınırlı bölgelerde analitik fonksiyonlar için integral gösterimi elde etmiş ve buna dayanarak, F.G.Abdullayev, V.V.Andrievskii [11] ise K-yarıkonform eğri ile sınırlı olan bölgelerde ortogonal polinomları incelemiştir.

V.V.Andrievskii, V.I.Belyi, V.K.Dzyadyk [15] kompleks düzlemin fonksiyonlarının inşası teorisinde konform sabitler ile ilgili önemli bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmadan bir süre sonra F.G.Abdullayev [17],[18],[19],[20] kompleks düzlemdeki bölgeler üzerinde ortogonal polinomların bazı özellikleri ile ilgili sonuçlar bulmuştur.

$\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonal polinomlar sisteminin özellikleri ile ilgili çalışmalar sırasıyla;

P.K. Suetin (1974),

1. $\Gamma \in C(1,\alpha)$ ve $h(z) \geq c > 0$ olmak üzere,

$$|K_n(z)| \leq cn$$

2. $\Gamma \in C(1,\alpha)$ ve $h(z) = h_0(z)|z-z_1|^{\gamma}$, $\gamma \geq -2$ olmak üzere,

$$|K_n(z)| \leq cn^{1+\frac{\gamma}{2}}$$

3. $\Gamma \in C(1,\alpha,\nu)$ ve $h(z) = h_0(z)|z-z_1|^{\gamma}$, $\gamma \geq -2$, $1 < \nu < 2$ olmak üzere, sınır eğrisi ve h ağırlık fonksiyonu,

$$1 + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\nu}$$

koşulunu sağlamak üzere,

$$|K_n(z)| \leq cn \qquad , z \in \overline{G}$$

değerlendirmelerini elde etmiştir.

Bu üç değerlendirmede dikkat edilecek olursa, Ortogonal polinomların modülünün artışının değerlendirilmesi sınır eğrisi ve h ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak değişmektedir.

Sonuç 2.1 (Suetin, 1974) **:** $G \in C(p+1,\alpha), p \geq 0, 0 < \alpha \leq 1,$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu $\forall z \in \overline{G}$ için $D(z) \neq 0$ ve $D \in A(\overline{G})$ olmak üzere $h(z) = |D(z)|^2$ şeklinde tanımlansın ve $D \in W^{(p)}H^{(\alpha)}(\overline{G}),\ 0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu taktirde

$$|K_n(z_0)| \leq c\,\delta^{-(p+3)}(F)\,n^{-(p+\alpha)}, \quad z_0 \in F \Subset G,$$

dir.

Eğer G bölgesi ne iç, ne de dış sıfır açıya sahip değil ise böyle bölgelere $K-$yarıkonform eğri ile sınırlı bölge denir.

Sonuç 2.2 (Abdullayev, Andrievskii, 1983) **:** G, $K-$yarıkonform eğri ile sınırlı bir bölge, $h(z)$ ağırlık fonksiyonu $\forall z \in \overline{G}$ için $D(z) \neq 0$ ve $D \in A(\overline{G})$ olmak üzere $h(z) = |D(z)|^2$ şeklinde tanımlansın ve $D \in Lip\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu taktirde her $z_0 \in G$ için

$$|K_n(z_0)| \leq c\,\delta^{-\frac{5}{2}}(z_0)\begin{cases} n^{-\frac{1}{2K^2}}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2K^2}, \\ n^{-\frac{\alpha}{K^2}}, & \alpha < \dfrac{1}{2K^2}, \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.1: Eğer, $\theta(s) \in C([0, mes\gamma])$ ise γ eğrisine **düzgün eğri** denir ve böyle eğriler sınıfı C_θ ile gösterilir.

Tanım 2.2: Eğer $L = \partial G$ sonlu sayıda C_θ yaylarının $z_1,\ldots, z_m$ köşe noktalarında birleşiminden oluşur ve her bir $z_j,\ j = 1,2,\ldots,m$ köşe noktasında birleşen iki yay G'ye göre $\lambda_j\pi,\ 0 < \lambda_j < 2,\ j = 1,2,\ldots,m,\ \min\limits_{1\leq j\leq m}\{\lambda_j\} =: \lambda$, dış açı oluşturursa $G \in C_\theta(\lambda),\ 0 < \lambda < 2$, dır denir

Sonuç 2.3 (Gaier, 1988) **:** $G \in C_\theta(\lambda), 0 < \lambda < 2,$ ve $h(z) \equiv 1$ olsun. Bu taktirde $0 < \mu < \min\left\{\dfrac{\lambda}{2-\lambda}; \dfrac{1}{2}\right\}$ koşulunu sağlayan her μ için

$$|K_n(z_0)| \leq c(z_0)n^{-\mu}, \quad z_0 \in G,$$

dir. Burada $c(z_0)$, z_0'ın sınıra olan uzaklığına bağlı sabittir.

Sonuç 2.4 (Abdullayev, 1997) : $G \in C_\theta(\lambda), 0 < \lambda < 2$, $h(z)$ ağırlık fonksiyonu $\forall z \in \overline{G}$ için $D(z) \neq 0$ ve $D \in A(\overline{G})$ olmak üzere $h(z) = |D(z)|^2$ şeklinde tanımlansın ve $D \in Lip\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu taktirde $\alpha > \vartheta(\lambda; 0)$ olduğunda $0 < \mu < \min\left\{\frac{\lambda}{2-\lambda}; \frac{1}{2}\right\}$ koşulunu sağlayan her μ ve $\alpha \leq \vartheta(\lambda; 0)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha \min\{1; \lambda\}$ koşulunu sağlayan her μ için,

$$|K_n(z_0)| \leq c\delta^{-\frac{9-4\lambda}{2(2-\lambda)}}(z_0)\, n^{-\mu}, \quad z_0 \in G,$$

dir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde daha sonra kullanılacak kavramlar tanıtılarak, temel teoremler verilecektir.

$G \subset \mathbb{C}$, sonlu bir bölge (açık ve bağlantılı), $z_0 \in G$ keyfi bir nokta ve $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklinde tanımlı olsun.

3.1.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

3.1.1.Tanım: Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının ε- **komşuluğu,** $D(z_0,\varepsilon) := \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ ile tanımlanan kümedir. Buradaki z_0 noktasına komşuluğun merkezi, ε sayısına ise komşuluğun yarıçapı denir. $D(z_0,\varepsilon)$ 'a bazen açık disk de denir.

$\overline{D}(z_0,\varepsilon) = \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesine kapalı disk denir. $D(\infty,\rho) = \{z : |z| > \rho\} \cup \{\infty\}$ kümesine ∞ noktasının komşuluğu denir.

Bir $D(z_0,\varepsilon)$ komşuluğu verildiğinde, $D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\} = D'(z_0,\varepsilon)$ kümesine z_0'ın **delinmiş komşuluğu** denir.

3.1.2.Tanım: f, z_0'ın delinmiş bir komşuluğunda tanımlı olsun ve bir l karmaşık sayısı verilsin. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta := \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonunun z_0 noktasındaki **limiti** l'dir denir ve $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$ şeklinde gösterilir.

3.1.3.Tanım: $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **süreklidir** denir. Eğer her $z_0 \in G$ için f sürekli ise o zaman f fonksiyonuna G'de **süreklidir** denir ve G bölgesinde tanımlı, böyle fonksiyonların sınıfı $C(G)$ ile gösterilir.

3.1.4.Tanım: $w=f(z)$ bir E kümesinden F kümesine bire-bir sürekli bir dönüşüm olsun. $f(z)$ E üzerinde sürekli ve onun tersi $f^{-1}(w)$ F kümesi üzerinde sürekli ise, o zaman bu dönüşüme bir **Homeomorfizm** denir [28].

3.1.5.Tanım: Bir $\alpha \in [0,2\pi]$ sayısı için,

$$\partial_\alpha f(z_0) := \lim_{r\to 0^+} \frac{f(z_0+re^{i\alpha})-f(z_0)}{re^{i\alpha}}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonuna z_0 noktasında α**-yönlü türevlenebilir** denir.

3.1.5. Tanım'dan, z_0 noktasında α-yönlü tüm türevler var ve birbirine eşit ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **türevlenebilirdir** denir ve

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

ile gösterilir.Ayrıca

f fonksiyonu her $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilirse o zaman f fonksiyonuna G'de **türevlenebilirdir** denir.

3.1.1.Teorem: f fonksiyonunun $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $z_0 \in G$ noktasında sürekli ve $\forall z \in G$ için $f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f^*(z)$ olacak şekilde bir tek $f^*: G \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun olmasıdır. Bu durumda $f'(z_0)=f^*(z_0)$ dır [35].

3.1.2.Teorem: f fonksiyonu $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilirse

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

kısmi türevleri mevcut olup bu kısmi türevler

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

koşulunu sağlar [31].

3.1.6.Tanım: f fonksiyonunun $z_0 \in G$ noktasında $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ kısmi türevleri mevcut ise $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ ve $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) =: f_z(z_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) =: f_{\bar{z}}(z_0).$$

Özel halde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklinde ise

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y),$$

dir [31].

3.1.3.Teorem: f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilirse

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

dır [31].

3.1.7.Tanım: Eğer, f fonksiyonu belli bir $B(z_0;r) \subset G$ dairesinin her noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **analitiktir** denir [28].

3.1.7. Tanım'dan, f fonksiyonu her $z \in G$ noktasında analitik ise, f fonksiyonuna G'de analitiktir denir. G'de analitik tüm fonksiyonların kümesi $A(G)$ ile, G'de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli olan fonksiyonların kümesi $A(\overline{G})$ ile gösterilir.

3.1.8.Tanım: Bir f fonksiyonu, z_0 noktasının her komşuluğundaki noktalarda analitik fakat z_0'da analitik değilse f'nin z_0'da **aykırılığı (singüleritesi)** var denir [28].

Bir f fonksiyonu, z_0 noktasının bir $D'(z_0,\varepsilon)$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0'da analitik değilse f, z_0'da bir **ayrık singüler noktaya** sahiptir denir [28].

Ayrıca, f bir $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>r\}$ kümesi üzerinde analitik fakat $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z=0$'da ayrık singülerliğe sahipse, f'nin $z=\infty$**'da bir ayrık singülerliği** vardır denir [28].

3.1.9.Tanım: z_0, f'nin bir ayrık singüler noktası olsun.

a) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A\neq\infty$ ise, z_0, f'nin **Aradan Kaldırılabilir** noktasıdır denir.

b) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ ise, z_0, f'nin **Kutup** noktasıdır denir.

c) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcut değil ise, z_0, f'nin **Esaslı Singüler** noktasıdır denir [28].

3.1.10.Tanım: Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n : G\to\mathbb{C}$ tanımlı fonksiyonların oluşturduğu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine fonksiyonlar dizisi denir.

3.1.11.Tanım: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D$ bölgesinde analitik olan fonksiyonlar ailesi olsun. $\forall z\in D$ ve $\forall f\in\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ için $|f(z)|\leq M$ olacak şekilde $\exists\, M=M(K)$ sayısı varsa, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar ailesine D'nin içinde **düzgün sınırlıdır** denir.

3.1.12.Tanım: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım bölgesi G olan fonksiyonlar dizisi ve $z_0\in G$ olsun. $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsak ise $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine $z_0\in G$ noktasında **yakınsaktır** denir.

3.1.12.Tanım'dan, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi G bölgesinin her noktasında yakınsak ise, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine G bölgesinde **noktasal yakınsaktır** denir. Ayrıca,

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, G bölgesinde noktasal yakınsak fonksiyonlar dizisi ve $f:G\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $\forall z\in G$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ ise f fonksiyonuna $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin **limiti** denir.

3.1.13.Tanım: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, G bölgesi üzerinde tanımlı ve $f:G\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $\forall\varepsilon>0$ için bir $n_0:=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa ve $\forall n\geq n_0(\varepsilon)$ ve $\forall z\in G$ için $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ sağlanıyorsa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine G bölgesinde f fonksiyonuna **düzgün yakınsaktır** denir.

3.1.14.Tanım: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım bölgesi $G\subset\mathbb{C}$ olan fonksiyon dizisi olsun. $\forall\varepsilon>0$ için bir $n_0:=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa ve $\forall n,m>n_0$, $\forall z\in G$ için $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$ sağlanıyorsa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine $G\subset\mathbb{C}$ bölgesinde bir **Cauchy dizisi** denir [28].

3.1.4.Teorem: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım bölgesi G olan fonksiyonlar dizisi olsun. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin G'de düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul onun Cauchy dizisi olmasıdır [32].

3.1.15.Tanım: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, sınırlı bir fonksiyon olsun. $\forall\varepsilon>0$ için bir $\delta>0$ sayısı varsa ve $[a,b]$ aralığının $\sum_{k=0}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ koşulunu sağlayan her bir ayrık $\{(a_k,b_k)\}_{k=0}^{n}$ parçalanışı için $\sum_{k=0}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$ oluyorsa, f fonksiyonuna $[a,b]$'de **mutlak sürekli fonksiyon** denir [24].

3.1.16.Tanım: Kompleks değişkenli reel değerli $u:G\to\mathbb{R}$, fonksiyonu verilsin. u fonksiyonu kenarları OX ve OY eksenlerine paralel olan her $R\Subset G$ kapalı dikdörtgeninin sonlu sayıdaki aralıkları hariç geriye kalan tüm yatay ve tüm dikey aralıklarında mutlak sürekli ise u fonksiyonuna G'de **mutlak süreklidir** denir [24].

3.1.17.Tanım: $G \subset \mathbb{C}$; $f: G \to \mathbb{C}$, bir fonksiyon olsun. $\operatorname{Re} f(z)$ ve $\operatorname{Im} f(z): G \to \mathbb{R}$ fonksiyonları G'de mutlak sürekli fonksiyonlar ise, f fonksiyonu G'de **mutlak süreklidir** denir. Böyle f fonksiyonlarının sınıfı $ACL(G)$ ile gösterilir [24].

3.1.5.Teorem: $f \in ACL(G)$ ise, f fonksiyonunun sonlu sayıdaki noktalar hariç geriye kalan tüm noktalarda $z \in G$ için

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}$$

kısmi türevleri vardır [30].

3.1.6.Teorem (Lagrange) **:** $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilen $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

olacak şekilde bir $\xi \in (a,b)$'noktası vardır [27].

3.1.18.Tanım: $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in A(D)$ olsun. $z_0 \in D$ noktasının öyle küçük δ komşuluğunda, $\forall z \in U_\delta(z_0)$ için $|f(z)| \le |f(z_0)|$ $\left(|f(z)| \ge |f(z_0)|\right)$ ise, z_0 noktasına f fonksiyonunun D'de **yerel maksimum (yerel minumum)** noktası denir [28]. (Burada kesişmeyen komşuluklar alınacaktır.)

3.1.7.Teorem: f fonksiyonu bir G bölgesinde analitik olsun. Eğer $|f|$, G'de maksimum değer alıyorsa, f sabittir [28].

3.1.1.Sonuç: Her $f \in A(\overline{G}), f \not\equiv sabit$ fonksiyonu kendi minumum değerini sınırda alır [28].

3.1.19.Tanım (Süreklilik Modülü): $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için, $[0,b-a]$ aralığında

$$\omega(u) = (f,u) = \sup_{\substack{0 \le h \le u \\ x, x+h \in [a,b] \\ (a \le x \le b-h)}} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \le u \\ x_1, x_2 \in [a,b]}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun **Birinci Mertebeden Süreklilik Modülü** denir [26].

Özellikler:

1. $\omega(0)=0$

2. $\omega(u)$ azalmayan

3. $\omega(u)\in C[0,b-a]$

4. $\omega(u)$ yarı toplamsaldır. Yani $u_1,u_2\in[0,b-a]$ için,

$$\omega(u_1+u_2)\leq\omega(u_1)+\omega(u_2)$$

dir.

5. $\omega(u_1)-\omega(u_2)\leq\omega(u_1-u_2)$

3.1.8.Teorem (Blaschke Fonksiyonu) : $\{\alpha_n\}$, $U:=\{z:\ z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$ bölgesinde $\alpha_n\neq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty$ koşullarını sağlayan bir dizi, k negatif olmayan bir tamsayı ve $z\in U$ için,

$$B(z)=z^k\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n-z}{1-\overline{\alpha_n}z}\cdot\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

ise $\|f_r\|_p:=\sup_{\theta}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$ ile tanımlanmak üzere $B\in H^{\infty}:=\sup\left\{\|f_r\|_p:0\leq r<1\right\}$ ve B, α_n dışında sıfır içermez. ($k>0$ ise orijin dahil.)

Bu B fonksiyonuna "**Blaschke Fonksiyonu**" denir. Dikkat edilmelidir ki, α_n'lerin bazıları tekrarlanabilir. Bu durumda bu noktalarda çarpım sıfırlarına sahiptir. Blaschke çarpımında çarpan yoksa $B(z)=1$'dir [26].

3.1.9.Teorem (LaurentTeoremi):

$f\in A(V)$, $V:=\{z:s_1<|z-z_0|<s_2\ ,\ 0\leq s_1<s_2<\infty\}$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında ayrık singülerliği varsa, f fonksiyonunun V halkasında

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

açılımı vardır. Burada,

$$\gamma=\{z:|z-z_0|=r,\ s_1<r<s_2\}$$

olmak üzere,

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

dir [28].

3.1.20.Tanım: G üzerinde tanımlı tek değerli bir analitik $f(z)$ fonksiyonu ve $G\subset\overline{\mathbb{C}}$ bölgesinden meydana gelen bir $\{G,f(z)\}$ kümesine bir **(fonksiyon) eleman** denir ve G 'ye de elemanın bir bölgesi denir [24].

3.1.21.Tanım: $G\cap D\neq\{0\}$ olsun. $\forall z\in g$ için $f(z)=\varphi(z)$ olacak şekilde bir $g\subset G\cap D$ bölgesi varsa $\{G,f(z)\}$ ve $\{D,\varphi(z)\}$ elemanlarının her birine diğerinin **doğrudan analitik devamıdır** denir [24].

3.1.22.Tanım: G, $|z-z_0|<r$ ya da $|z|>r$ formunda olan bir bölge olsun. Bu durumda $\{G,f\}$ elemanına **dairesel bir eleman** denir.

3.1.22. Tanım'a göre, G'de analitik $f(z)$ fonksiyonu $|z-z_0|<r$ bölgesinde,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{3.1.1}$$

yakınsak bir kuvvet serisine ya da $|z|>r$ 'de

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n} \tag{3.1.2}$$

yakınsak bir Laurent serisine açılabilir.

Böylece dairesel bir e elemanı (3.1.1) ve (3.1.2) ile teklikle karekterize edilir. Buradan, bir e elemanı, K, $|z-z_0|<r$ ya da $|z|>r$ kümeleri olmak üzere kısaca, $e=\{K,f(z)\}$ notasyonu ile

$$e:\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{3.1.3}$$

ya da

$$e:\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \tag{3.1.4}$$

biçiminde gösterilir [24].

3.1.23.Tanım: (3.1.3) formundaki dairesel bir eleman, z_0 merkezli, r yarıçaplı bir $|z-z_0|<r$ diskte

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

serisine sahiptir denir. (3.1.4) formundaki dairesel bir eleman, ∞ merkezli, r yarıçaplı bir $|z|>r$ diskte,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

serisine sahiptir denir [24].

3.1.24.Tanım: $L: z=\lambda(t), \quad \alpha \le t \le \beta$ denklemi ile sürekli bir eğri ve $\alpha \le \alpha' < \beta' \le \beta$ olsun.

$z=\lambda(t), \quad \alpha' \le t \le \beta'$ doğal denklemi ile verilen $L[\alpha',\beta']$ ile gösterilen L yayına kapalı yay denir.

Benzer şekilde, $z=\lambda(t), \quad \alpha' \le t < \beta'$ doğal denklemi ile verilen $L[\alpha',\beta')$ yayına yarı-açık yay denir [24].

3.1.25.Tanım: $L: z=\lambda(t), \quad \alpha \le t \le \beta$ bir eğri, $e=\{K, f(z)\}$, L'nin $z_0=\lambda(\alpha)$ başlangıç noktasındaki merkezi ile dairesel bir eleman ve $J=\overline{0,n}$, $e_j=\{K_j, f_j(z)\}$ dairesel elemanların sonlu bir kümesi olsun.

a) Her bir K_j diski, $\alpha=t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n=\beta$ olmak üzere, bir $z_j=\lambda(t_j)\in L$ noktasında onun merkezine sahiptir.

b) $J=\overline{1,n}$ olmak üzere, $L_j=L[t_{j-1},t_j]\subset K_{j-1}\subset K_j$

c) $e_0=e$ ve e_j her $j=\overline{1,n}$ için e_{j-1}'in bir doğrudan devamıdır.

Bu durumda e elemanına $e = e_0, e_1, e_2, ..., e_n$ zinciri ile L boyunca analitik devam ettirilebilir denir ve e_n elemanına L boyunca e devamından meydana gelir denir.

$e = e_0, e_1, e_2, ..., e_n$ zincirine de L boyunca e'yi, e_n'e birleştirir denir [24].

3.1.10.Teorem (Monodromy Teoremi) **:** Basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin ve e_0, z_0 merkezli $K \subset G$ diskinin bir elemanı olsun. e_0, G'deki her sürekli eğri boyunca devam ettirilebilirse, G'nin her noktasında bir $f(z)$ fonksiyonu tanımlamak mümkündür ve $f(z)$, G üzerinde tek değerlidir [24].

3.1.1 Harmonik Fonksiyon, Alt Harmonik Fonksiyon:

f analitik fonksiyonu verilsin. $\ln|f(z)|$ 'ye bakacak olursak, $f(z) \neq 0$ olmalıdır. Eğer $f(z) = 0$ ise $\ln|f(z)| = -\infty$ olacaktır. f'nin sıfır noktalarında $\ln|f(z)|$ harmonikliğini kaybeder. Fakat bu noktaların komşuluğunda fonksiyonun bazı özellikleri incelenebilir. Bunun için önce harmonik fonksiyon, daha sonra da alt harmonik fonksiyon kavramı verilecektir.

3.1.1.1.Tanım:

(a) $B, \mathbb{R}^2$'de bir bölge ve $u : B \to R$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer;

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oluyorsa, u'ya B'de bir **harmonik fonksiyon** denir. Burada Δ operatörüne **Laplace operatörü** $\Delta^2 u = 0$ denklemine de, **Laplace denklemi** denir.

(b) $B, \mathbb{C}$'de bir bölge ve $f : B \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f = u + iv$ fonksiyonunun gerçel ve sanal kısmı harmonik ise, f'ye **karmaşık harmonik fonksiyon** denir [28].

3.1.1.2.Tanım: $-\infty \leq u < \infty$ olmak üzere $u(z), z_0$ noktasının belli bir $U_r(z_0)$ komşuluğunda tanımlı reel değişkenli bir fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ sayısı vardır ki, $|z - z_0| < \delta$ iken

$$\begin{cases} u(z) - u(z_0) < \varepsilon, & u(z_0) \neq -\infty \\ u(z) \quad , & u(z_0) = -\infty \end{cases} \qquad \left(\Leftrightarrow \overline{\lim_{z \to z_0}}\, u(z) \leq u(z_0)\right)$$

sağlanırsa u fonksiyonuna **üst yarı süreklidir** denir [26].

3.1.1.2.Tanım'a göre, D bir bölge ve $u : D \to [-\infty, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $\forall z \in D$ için u üst yarı sürekli ise, u'ya, D'de üst yarı süreklidir denir.

Ayrıca, $K = \{z \in D : u(z) < \alpha\}$ kümesinde üst yarı süreklilik kavramı da bölgedeki gibidir. Fakat K kompakt ise buradaki üst yarı sürekli fonksiyon her zaman üstten sınırlı olduğundan, K kompaktında maksimum değerini alır.

3.1.1.3.Tanım: $u : D \to [-\infty, \infty)$ fonksiyonu, aşağıdaki iki koşulu sağlarsa D'de **alt harmonik fonksiyon** denir [26].

(1) D'de üst yarı sürekli

(2) Keyfi, yeterince küçük $U \subset D$ dairesi verilsin. U'da harmonik $\overline{U}$'da sürekli olan keyfi h fonksiyonu için, ∂U'da $h \geq u$ ise U'da da $h \geq u$' dur.

3.1.1.1.Teorem (Alt Harmonik Fonksiyonlar için Maksimum Prensibi) **:**

D'de alt harmonik olan u fonksiyonu herhangi bir $z_0 \in D$'de yerel maksimum alıyorsa, o zaman u, z_0'ın belli bir komşuluğunda sabittir [26].

3.1.1.1.Sonuç: f fonksiyonu D'de analitik ise, $u = \ln|f|$ D'de alt harmoniktir [26].

3.1.2. Dirichlet Problemi

$$\Delta u = 0$$

probleminin çözümü olan u fonksiyonunu arıyoruz. Diğer bir ifade ile,

D' de harmonik ve $\overline{D}$'da sürekli olan öyle bir $u(z)$ fonksiyonu bulunmalıdır ki, bunun sınır değerleri önceden verilmiş $u(\xi)$'ye eşit olsun. Yani $u(\xi) \in C(\partial D)$ olmak üzere, $u(z)|_{\partial D} = u(\xi)$ sağlansın.

3.1.2.1 Tanım: $u(z)$ karmaşık fonksiyonu verilsin. Bir $\xi \in \mathbb{C}$ noktasında,

I) $u(z)$ fonksiyonunun sağ ve sol limitler var, fakat eşit değilse $u(z)$ fonksiyonu $\xi \in \mathbb{C}$ noktasında **I. tür süreksizliğe** sahiptir denir [24].

II) $u(z)$ fonksiyonunun sağ ve sol limitleri ∞'luk ise $u(z)$ fonksiyonu $\xi \in \mathbb{C}$ noktasında **II. tür süreksizliğe** sahiptir denir [24].

3.1.2.1 Tanım'a göre $u(\xi)$ fonksiyonunun sınırda sürekliliğini; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ noktaları dışında sürekli ve bu noktalar dışında da I. Tür Süreksizliğe sahip olmasıyla ifade edeceğiz.

3.1.3. Genelleştirilmiş Dirichlet Problemi

$u(\xi)$, D bölgesinin sınırında sonlu sayıda I. Tür süreksizliğe sahip noktalar dışında sürekli olan bir fonksiyon olsun. D'de harmonik ve sınırlı $k = \overline{1,n}$ $\xi \neq \xi_k$ için $u(z)|_{\partial D} = u(\xi)$ koşulunu sağlayan $u(\xi)$ harmonik fonksiyonunun bulunması problemine *Genelleştirilmiş Dirichlet Problemi* denir [24].

3.1.3.1.Teorem: Verilmiş bir bölgedeki bir $u(\xi)$ sınır fonksiyonu ile Genelleştirilmiş Dirichlet Problemi'nin tek çözümü vardır [24].

3.2. KOMPLEKS DÜZLEMDE EĞRİ VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

3.2.1.Tanım

(i) $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olsun. $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyon olmak üzere kompleks düzlemde $\gamma := \{z(t) : t \in [a,b]\}$ kümesine başlangıç noktası $z(a)$, bitim noktası $z(b)$ olan bir **eğri**,

(ii) $z(a) = z(b)$ ise γ eğrisine **kapalı eğri**,

(iii) $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için $t_1 \neq t_2$ olduğunda $z(t_1) \neq z(t_2)$ ise γ eğrisine **Jordan yayı**, eğer $z(a) = z(b)$ ise γ eğrisine **Jordan eğrisi**,

(iv) $P := \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı olmak üzere $\forall k \in \{1,2,...,n\}$ için $z = z(t)$ fonksiyonu her (t_{k-1}, t_k) aralığında sürekli türevlenebilir ve $\lim\limits_{t \to t_{k-1}^+} z(t), \lim\limits_{t \to t_k^-} z(t)$ limitleri mevcut ise γ eğrisine **parçalı düzgün eğri** denir [32].

3.2.1.Teorem (Jordan Eğri Teoremi) **:** γ, $\overline{\mathbb{C}}$'da bir Jordan eğrisi olsun. Bu taktirde γ, kompleks düzlemi ortak sınırları γ eğrisi olan biri sonlu, diğeri sonsuzluğu içeren, sonsuz ayrık iki bölgeye ayırır [32].

3.2.1.Teorem'den, bu bölgelerden sonlu olanına γ **eğrisinin içi,** sonsuz olanına γ**'nın dışı** denir ve bunlar sırasıyla $Int\gamma$ ve $ext\gamma$ ile gösterilir.

3.2.2.Tanım: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. G bölgesinde alınan her γ eğrisi için $Int\gamma \subset G$ ise G bölgesine **basit bağlantılı bölge** denir.

$[a,b]$ aralığının $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ şeklindeki tüm parçalanışlarının ailesi $\wp$ ile gösterilsin ve $\ell_n(P) := \sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})|$ olsun. Bunlara göre;

3.2.3.Tanım:

$$\limsup_{n \to \infty} \{\ell_n(P) : P \in \wp\} < \infty$$

ise γ eğrisine **ölçülebilir eğri** denir.

3.2.2.Teorem: γ parçalı düzgün eğri ise γ eğrisi ölçülebilir ve

$$mes\gamma := \int_a^b |z'(t)|\,dt$$

dir [32].

3.2.4.Tanım: Farzedelim ki L düzgün eğri ve $f : L \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $\forall t_1, t_2 \in L$ için, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\alpha, \quad A = sabit > 0$$

sağlanırsa f fonksiyonuna **Hölder (Lipshitz)** α **sınıfı**'ndandır denir ve $f \in H^\alpha$ ($f \in lip\alpha$) ile gösterilir.

Aşağıdaki özellikleri verebiliriz:

1) $f \in H(L) \Rightarrow f \in C(L)$

2) $\beta \leq \alpha$ olmak üzere, $f \in H^\alpha \Rightarrow f \in H^\beta$. Yani, $H^\alpha \subseteq H^\beta$ dır.

3) $f \in H(L)$, $g \in H(L)$ olmak üzere,

$$f + g \in H(L), \quad f.g \in H(L), \quad \frac{f}{g} \in H(L) \quad (g \neq 0)$$

4) $j = \overline{1,m}$ için L_j'ler geri dönme noktasına sahip olmayan eğriler, $L = \bigcup_{J=1}^{m} L_J$ olmak üzere;

$$f \in H^\alpha(L_j) \Rightarrow f \in H^\alpha(L)$$

dir [26].

3.2.5.Tanım: Bir L yayı verilsin. L yayının her bir noktasında $\theta(s)$, $0 \leq s \leq mesL$, s'nin bir fonksiyonu olmak üzere, $\theta(s) \in C([0, mesL])$ ise L yayına sürekli teğete sahip **düzgün eğri** denir ve böyle eğriler sınıfı C_θ ile gösterilir.

3.2.6.Tanım: Γ bir düzgün eğri $p \in \mathbb{Z}^+$, $0 < \alpha < 1$, $s \in [0, mes\Gamma]$ ve $z = z(s)$ eğrinin denklemi olmak üzere, $z(s)$ fonksiyonu $p-inci$ mertebeye kadar sürekli diferansiyellenebilir ve $z^{(p)}(s) \in Lip\alpha$ ise Γ eğrisine $C(p, \alpha)$ **sınıfındandır** denir [9].

3.2.7.Tanım: γ, denklemi $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ olan ölçülebilir eğri ve f fonksiyonu γ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise,

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_{a}^{b} f(z(t))\, z'(t)\, dt,$$

integraline f nin γ eğrisi üzerindeki integrali denir.

3.2.3.Teorem (Cauchy Teoremi) **:** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. γ, $int\gamma$ ile G 'de yerleşen ölçülebilir Jordan eğrisi ise

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

dır [38].

3.2.4.Teorem (Cauchy İntegral Formülü) **:** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. γ, $Int\gamma$ ile G 'de yerleşen ölçülebilir Jordan eğrisi ise $\forall z \in Int\gamma$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

dir [38].

Şimdi $G \subset \mathbb{C}$, $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge; $h(z) \geq 0$, G 'de tanımlı integrallenebilir ve

$$\iint_{G} h(z)\, d\sigma_z > 0$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun.

Burada $d\sigma_z$ iki boyutlu Lebesque ölçümünü göstermektedir.

3.2.8.Tanım: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $p > 0$ olsun. G 'de ölçülebilir ve

$$\iint_{G} h(z) |f(z)|^p \, d\sigma_z < +\infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $L^p(h,G)$ ile gösterilir.

Eğer $h(z) \equiv 1$ ise $L^p(1,G) \equiv L^p(G)$ dir.

3.2.5.Teorem: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $f \in L^p(G)$ $p>1$ ve $g \in L^q(G)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise,

$$\text{(i)} \left| \iint_G f(z)g(z)d\sigma_z \right| \le \left(\iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_G |g(z)|^q \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\text{(ii)} \left(\iint_G |f(z)+g(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\iint_G |g(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir [36].

Bu eşitsizliklere sırasıyla **Hölder Eşitsizliği** ve **Minkowski Eşitsizliği** adı verilir.

3.2.6.Teorem: X bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $\forall x,y \in X$ için

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\ \sqrt{\langle y,y\rangle} \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe **Cauchy-Buniakowski** eşitsizliği denir.

3.2.9.Tanım: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $p \ge 1$ olsun.

(i) $f \in ACL(G)$,

(ii) $\forall B \Subset G$ kompakt kümesi için $f_x, f_y \in L^p(B)$,

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna G 'de L^p – **türevlenebilirdir** denir.

3.2.7.Teorem: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: G \to \mathbb{C}$, L^1 – türevlenebilir bir fonksiyon ise $D \subset G$ ölçülebilir sınırlı Jordan bölgesi için

$$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = 2i \iint_D f_{\bar{\xi}}(\xi) d\sigma_\xi$$

dir [36].

3.2.8.Teorem (Cauchy Pompeiu Formülü) **:** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: G \to \mathbb{C}$, L^1 – türevlenebilir bir fonksiyon, $D \subset G$ ölçülebilir sınırlı Jordan bölgesi ve $z \in D$ ise

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f_{\bar{\xi}}(\xi)}{\xi - z} d\sigma_\xi$$

dir [36].

İspat: $B(z,\varepsilon)$, z merkezli ε yarı çaplı daire olmak üzere $\dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ fonksiyonuna $D\backslash B(z,\varepsilon)$ bölgesinde 3.2.6. Teorem uygulanırsa;

$$\int_{\partial(D\backslash B(z,\varepsilon))} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2i \iint_{D\backslash B(z,\varepsilon)} \frac{f_{\bar{\xi}}(\xi)}{\xi - z} d\sigma_{\xi},$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci integral

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi,$$

şeklinde yazılabilir ve

$$\left| \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \le \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi| \le \varepsilon$$

olduğu göz önünde tutulursa,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi \right] = 2\pi i\, f(z)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

3.3. $A_2(G)$ UZAYININ TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, ileride kullanılacak olan, G'de analitik ve $L^p(G)$, $p > 0$ sınıfından olan fonksiyonlar sınıfı ele alınarak, $p = 2$ için bu sınıfın Hilbert uzayı olduğu gösterilecektir.

3.3.1.Tanım: $G \subset \mathbb{C}$, keyfi bir bölge ve $p > 0$ olmak üzere, G'de analitik ve $L^p(G)$ sınıfından olan fonksiyonlar sınıfı

$$A_p(G) := \{ f : f \in A(G) \cap L^p(G) \}$$

ile gösterilir.

3.3.1.Teorem: Lebesque anlamındaki

$$I[f] := \iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma_z$$

integrali Riemann anlamındaki integrallerin limiti olarak ifade edilebilir [33].

İspat: $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ bölgeler dizisi ele alınsın ve

i) Her bir G_n 'nin sınırı ∂G_n sonlu sayıda Jordan yaylarının birleşiminden oluşsun,

ii) Her n için $\overline{G}_n \subset G_{n+1} \subset G$,

iii) $\forall z \in G$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $z \in G_n$,

sağlansın. Buna göre

$$\varphi_n(z) := \begin{cases} |f(z)|^2, & z \in \overline{G}_n; \\ 0, & z \in G \backslash G_n, \end{cases}$$

olacak şekilde seçilirse, $z \in G$ için $\varphi_n \uparrow |f|^2$ olduğundan Lebesque (İntegral altında limite geçme) Teoremine göre

$$\iint_G \varphi_n(z) d\sigma_z \to \iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z, \quad (n \to \infty),$$

sağlanır.

Yani;

$$\iint_{G_n} |f(z)|^2 d\sigma_z \to I[f] = \iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma_z, \quad (n \to \infty)$$

dir. $\iint_{G_n} |f(z)|^2 \, d\sigma_z$ integrallerinin her biri Riemann integrallenebilir olduğundan $I[f]$'ye Riemann integrallerinin limiti gibi bakılabilir.

Özel olarak;

$G := \{z : r < |z - z_0| < R\}$, $0 \leq r < R < \infty$, olarak seçelim. $f \in A_2(G)$ fonksiyonu her $z \in G$ noktasında

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

şeklinde seriye açılabilir. Bu durumda $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ değişken değişmesi yapılarak

$$I[f]=\int_r^R\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\rho^n e^{in\theta}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\overline{a}_m\rho^m e^{-im\theta}\rho\, d\rho\, d\theta$$

elde edilir. $r<\rho<R$ için yukarıdaki seriler mutlak ve θ'ya göre düzgün yakınsak olduklarından,

$$I[f]=2\pi\int_r^R\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^2\rho^{2n+1}d\rho$$

dır. İntegralin içindeki seri negatif terimli olmadığından

$$I[f]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^2\int_r^R\rho^{2n+1}d\rho$$

elde edilir. $r=0$ durumunda $f\in A(0<|z-z_0|<R)$ ve $I[f]<+\infty$ olduğundan $n<0$ için $a_n=0$ dır. Bu durumda $z=z_0$ aradan kaldırılabilir singüler noktadır ve

$$I[f]=\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}R^{2n+2} \tag{3.3.1}$$

elde edilir. (3.3.1), $I[f]$'nin f'nin katsayıları yardımıyla hesaplanabileceğini gösterir.

Lebesque integralinin özellikleri ve $|f+g|^2\leq(|f|+|g|)^2\leq 2(|f|^2+|g|^2)$ eşitsizliği kullanılarak

i) $f\in A_2(G)$ ve $\forall c\in\mathbb{C}$ için $cf\in A_2(G)$

ii) $f,g\in A_2(G)$ için $f+g\in A_2(G)$

sağlandığı kolayca görülür.

(i) ve (ii) den $A_2(G)$ uzayı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

O halde $A_2(G)$ uzayı bir lineer uzaydır.

3.3.2.Teorem: $f\in A_2(G)$, $\delta(z_0):=dist(z_0,\partial G)=\inf_{\xi\in\partial G}|\xi-z_0|$ olmak üzere

$$|f(z_0)|^2\leq\frac{1}{\pi\,\delta^2(z_0)}I[f]$$

dir [33].

İspat: $B(z_0,\delta(z_0)):=\{z:|z-z_0|<\delta(z_0)\}$ olsun. Bu durumda

$$I[f]=\iint_G |f(z)|^2\, d\sigma_z \geq \iint_{B(z_0,\delta(z_0))} |f(z)|^2\, d\sigma_z$$

(3.3.1) göz önüne alınırsa

$$I[f]\geq \pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}\,\delta^{2n+2}(z_0)\geq \pi\,\delta^2(z_0)|a_0|^2$$

elde edilir. $a_0=f(z_0)$ olduğu dikkate alınırsa 3.3.2. Teorem ispatlanmış olur.

$f,g\in A_2(G)$ için

$$f\,\overline{g}=\frac{1}{2}|f+g|^2+\frac{i}{2}|f+ig|-\frac{1+i}{2}|f|^2-\frac{1+i}{2}|g|^2$$

özdeşliğinden yararlanarak

$$\left|\iint_G f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma_z\right|<+\infty$$

olduğu kolayca görülür. O halde aşağıdaki tanım verilebilir.

3.3.2.Tanım: $f,g\in A_2(G)$ için

$$(f,g):=\iint_G f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma_z \tag{3.3.2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f ile g nin **iç çarpımı** denir.

3.3.3.Teorem: $A_2(G)$ uzayı (3.3.2)'de tanımlanan iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır [39].

3.3.4.Teorem: $A_2(G)$ uzayı (3.3.2) ile tanımlanan iç çarpımın meydana getirdiği

$$\|f\|_{A_2(G)}:=\sqrt{(f,f)} \tag{3.3.3}$$

normuna göre bir normlu uzaydır [39].

3.3.5.Teorem: $A_2(G)$ uzayı (3.3.3) normuna göre tamdır [39].

İspat: $\{f_n\}\in A_2(G)$ bir Cauchy dizisi olsun. $f_n(z)-f_m(z)$ fonksiyonuna 3.3.2. Teorem uygulanırsa,

$$|f_n(z)-f_m(z)|^2<\frac{\varepsilon}{\pi\delta^2},\quad z\in B\Subset G,\ \delta:=dist(B,\partial G)$$

elde edilir. 3.1.4. Teorem'e göre $\{f_n\}$ analitik fonksiyonlar dizisi $B \Subset G$ kompaktında bir $F \in A(G)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır yani;

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = F(z), \quad z \in B \Subset G .$$

Öte yandan $n, m \geq n_0$ için

$$\iint_B |f_n(z) - f_m(z)|^2 \, d\sigma_z \leq I[f_n - f_m] < \varepsilon$$

sağlanır. $m \to \infty$ limite geçilirse her $n \geq n_0$, $\forall B \Subset G$ için

$$\iint_B |f_n(z) - F(z)|^2 \, d\sigma_z < \varepsilon$$

bulunur. $B \Subset G$ keyfi kompakt olduğundan $\forall n \geq n_0$ için $I[f_n - F] \leq \varepsilon$ yani $F \in A(G)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - F\|_{A_2(G)} = 0$$

dır.

Dolayısıyla $A_2(G)$ uzayından her Cauchy dizisi yakınsaktır ve limit fonksiyonu uzayın elemanıdır. Yani $A_2(G)$ uzayı tamdır.

Yukarıda verilen 3.3.3. Teorem, 3.3.4. Teorem ve 3.3.5. Teorem'in sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.6.Teorem: $A_2(G)$ lineer uzayı (3.3.2) iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır [39].

3.3.1 $A_2(h,G)$ Uzayı ve Ortonormal Sistemler

Bu bölümde ağırlık fonksiyonu ile $A_2(G)$ uzayı ele alınacaktır.

3.3.1.1.Tanım: G sonlu bir bölge, $h: G \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve hemen hemen her yerde $h(z) \geq 0$ olmak üzere,

$$0 < \iint_G h(z) \, d\sigma_z < +\infty \tag{3.3.4}$$

ise h fonksiyonuna G üzerinde tanımlı **ağırlık fonksiyonu** denir.

3.3.1.2.Tanım: $G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $h(z)$ ise G'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $\forall p>0$ sayısı için, G'de analitik ve $L^p(h,G)$ sınıfından olan fonksiyonlar sınıfı

$$A_p(h,G):=\{f: f\in A(G)\cap L^p(h,G)\}$$

ile gösterilir.

3.3.1.1.Teorem: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $h(z)$ ise G'de tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall B\Subset G$ kompakt kümesi verildiğinde parçalı düzgün $\ell\subset G$ eğrisi ve $\delta>0$ sayısı

a) $\min\{d(\ell,B);d(\ell,\partial G)\}\geq\delta,$

b) $h(z)\geq\varepsilon_0>0,\ \forall z\in\overline{F}:=\left\{z:d(z,\ell)\leq\dfrac{\delta}{2}\right\},$

koşulları sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa $h(z)$ bir ağırlık fonksiyonudur [33].

İspat: $\forall\varsigma\in\ell$ ve $f\in A_2(h,G)$ için $m_\ell=\inf\limits_{z\in\overline{F}}h(z)>0$ olmak üzere

$$\iint\limits_G h(z)|f(z)|^2\,d\sigma_z\geq\iint\limits_{|z-\varsigma|\leq\frac{\delta}{2}}h(z)|f(z)|^2\,d\sigma_z\geq m_\ell\iint\limits_{|z-\varsigma|\leq\frac{\delta}{2}}|f(z)|^2\,d\sigma_z$$

olur ve 3.3.2. Teorem'den

$$\iint\limits_G h(z)|f(z)|^2\,d\sigma_z\geq\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 m_\ell|f(\varsigma)|^2$$

bulunur. Ayrıca $M:=\max\limits_{\varsigma\in\ell}|f(\varsigma)|$ olmak üzere

$$\iint\limits_G h(z)|f(z)|^2\,d\sigma_z\geq\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 m_\ell M^2 \tag{3.3.5}$$

elde edilir. $\forall z_0\in B$ için 3.2.4. Teorem'den

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\ell\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z_0}d\varsigma$$

dir. Buradan

$$|f(z_0)|\leq\frac{M\,mes\ell}{\pi\delta}$$

elde edilir. (3.3.5) eşitsizliği kullanılırsa

$$\iint_G h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \frac{1}{4}\frac{\pi^3\delta^4}{(mes\ell)^2} m_\ell |f(z_0)|^2, \quad z_0 \in B$$

olduğu bulunur. $B \Subset G$ ve $f \in A_2(h,G)$ keyfi olduğundan $h(z)$ bir ağırlık fonksiyonudur. Bu da teoremi ispatlar.

3.3.1.3.Tanım: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $\forall n = 0,1,2,3,...,$ için $\varphi_n : G \to \mathbb{C}$, $\varphi_n \in A_2(G)$ olmak üzere $\{\varphi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemine

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \iint_G \varphi_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\,d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

koşulunu sağlıyorsa **ortonormal sistem** denir.

3.3.1.4.Tanım: $\mathbb{C}$ - kompleks düzlem, $G \subset \mathbb{C}$ sonlu $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı basit bağlantılı bir bölge; $h(z) \in L^1(G, d\sigma)$, $h(z) \geq 0$, G-de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Derecesi n-yi aşmayan ve

$$\iint_G h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)} d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

koşulunu sağlayan $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ polinomlar sistemine G bölgesinin alanı üzerinde ağırlık fonksiyonuna göre **ortonormal polinomlar sistemi** denir [9].

3.4. RİEMANN DÖNÜŞÜMÜ

3.4.1.Tanım: $G, H \subset \mathbb{C}$ sınırlarında en az iki nokta içeren basit bağlantılı bölgeler ve $f : G \to H$ bir fonksiyon olsun. f, 1-1 ve analitik ise f'ye **konform dönüşüm** denir [24].

3.4.1.Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi): $G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ tespit edilmiş bir nokta olsun. G bölgesini $D := \{w : |w| < 1\}$ birim dairesine dönüştüren ve $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır [32].

3.4.2.Teorem: $\Omega := \mathbb{C} - \overline{G}$ ve $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ olmak üzere

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır.

İspat: $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ keyfi sabit bir nokta olsun.

$$\zeta(z) := \zeta_0 + \frac{1}{z}$$

dönüşümü basit bağlantılı Ω bölgesini $\mathbb{C}$'de basit bağlantılı bir $G_1 := \zeta(G)$ bölgesine resmeden ve $\zeta(\infty) = \zeta_0$, $\zeta^{-1}(\zeta_0) = \infty$ koşullarını sağlayan bir konform dönüşümdür. 3.4.1. Teorem'den $\varphi(\zeta_0) = 0$ ve $\varphi'(\zeta_0) > 0$ koşulunu sağlayan bir tek $\varphi : G_1 \to D$ konform dönüşümü vardır. $\mu(w) := \frac{1}{w}$ dönüşümü ise D birim dairesinden Δ bölgesine $\mu(0) := \infty, \mu^{-1}(\infty) = 0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümdür.

$$\Phi := \mu \circ \varphi \circ \zeta : \Omega \to \Delta, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\varphi(\frac{1}{z} + \zeta_0)}$$

dönüşümü konformdur ve

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

sağlanır.

$\varphi(z)$, konform dönüşümünün tersi $z=\psi(w)$, $\Phi(z)$ konform dönüşümünün tersi ise $z=\Psi(w)$ ile gösterilir.

3.4.2.Tanım: $0<r<1<R<+\infty$ olsun.

$$L_r := \{z \in G : |\varphi(z)| = r\},\; L_R := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = R\},\; L_1 \equiv L$$

eğrilerine sırasıyla **iç** ve **dış seviye eğrileri** denir.

3.4.3.Tanım: $G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge $\Phi:\Omega \to \Delta$ bir konform dönüşüm olsun. $0<u<1$ için

$$L_u := \{z : |\Phi(z)| = 1+u\}$$

seviye eğrisini göz önünde tutalım. Buna göre $\Phi_u : \mathbb{C} \big| \overline{G_u} \to \{w : |w| > 1+u\}$ tanımlı bir konform dönüşümdür.

3.4.1.Lemma : $\forall u \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ için,

$$\forall z \in L_u : |\Phi_u(z)| \le 1 + c_9 u \tag{3.4.1}$$

koşulunu sağlayan bir $c_9 > 0$ sabiti vardır. Dikkat edilirse, c_9, u'ya bağlı değildir [23,s-21].

3.5. YARIKONFORM DÖNÜŞÜMLER VE YARIKONFORM EĞRİLER

3.5.1.Tanım: $G, H \subset \mathbb{C}$ herhangi iki bölge; $f : G \to H$ fonksiyonu $\forall z \in G$ için $J_f(z) := |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0$ koşulunu sağlayan ve C^1 sınıfından olan bir homeomorfizm olsun. Eğer,

$$\sup_{z \in G} \frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2} \le K < \infty \tag{3.5.1}$$

ise f fonksiyonuna G bölgesi üzerinde tanımlı bir $K-$**yarıkonform dönüşüm**, $K \ge 1$ sayısına da f dönüşümünün **yarıkonformluk katsayısı** denir [15].

3.5.1.Tanım'dan görülür ki f, G bölgesi üzerinde $K-$yarıkonform dönüşüm ve $k := \dfrac{K-1}{K+1}$ ise $\forall z \in G$ için $\left|\dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}\right| \le k < 1$ dir.

Yarıkonform dönüşümün özelliklerinden bazıları aşağıdaki gibi verilebilir:

i) 1-yarıkonform dönüşüm konform dönüşümdür.

ii) f_1, K_1-yarıkonform ve f_2, K_2-yarıkonform dönüşümleri verilsin. $f_1 \circ f_2$ dönüşümü $K_1 \cdot K_2-$yarıkonform dönüşümdür.

iii) f dönüşümü $K-$yarıkonform ise f^{-1} de $K-$yarıkonform dönüşümdür.

3.5.2.Tanım: $f : D \supset L \to D'$, $K-$yarıkonform dönüşümü altında $f(L)$ çember (doğru parçası) ise L eğrisine K **−yarıkonform eğri** (K **−yarıkonform yay**) denir [15].

3.5.2.Tanım'a bağlı olarak, $F(L)$, L'yi çember veya aralığa resmeden $f : D \supset L \to D'$ tüm homeomorfizmaların kümesi ve

$$K_L := \inf_{f \in F(L)} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olsun. Eğer,

$$K_L < +\infty \tag{3.5.2}$$

ise L eğrisine **yarıkonform eğri** denir. Eğer L, K-yarıkonform eğri ise, o zaman $K_L \le K$ dır.

Herhangi bir $K \ge 1$ sayısı için L, K-yarıkonform eğri ise, L eğrisine yarıkonform eğri denir.

3.5.2. Tanım'da $D = \mathbb{C}$ ve $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

$D = \mathbb{C}$ durumuna $K-$yarıkonform eğrinin **global tanımı** denir ve yarıkonformluk katsayısı (3.5.1) yardımıyla hesaplanır.

$D \subset \mathbb{C}$ durumuna da $K-$yarıkonform eğrinin **lokal tanımı** denir ve yarıkonformluk katsayısı (3.5.2) yardımıyla hesaplanır.

3.5.1.Teorem: L bir Jordan eğrisi, $z_1, z_2 \in L, z_1 \neq z_2$ keyfi noktalar ve $\ell(z_1, z_2) \subset L$, z_1 ile z_2 noktasına birleştiren küçük çaplı alt yay olsun. L eğrisinin yarıkonform eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{z_1, z_2 \in L, z_3 \in \ell(z_1, z_2)} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

olmasıdır [30].

3.5.2.Teorem : L, analitik yay veya eğri ise $K = 1$ dir [12].

3.5.3.Teorem: $L \in C_\theta$ eğrisi her $\varepsilon > 0$ için $(1+\varepsilon)$-yarıkonformdur [37].

3.5.3.Tanım: L, $\mathbb{C}$ de bir Jordan eğrisi; $y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü altında $y(intL) = extL$, $y(extL) = intL$ ve $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ olsun. Eğer $\overline{y} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yarıkonform ise y dönüşümüne L eğrisine göre **yarıkonform yansıma** denir [15].

3.5.4.Teorem: L, $\mathbb{C}$ de bir Jordan eğrisi olsun. L eğrisine göre yarıkonform yansımanın olması için gerek ve yeter şart L eğrisinin yarıkonform eğri olmasıdır [15].

3.5.5.Teorem: L eğrisi K-yarıkonform eğri olsun. O zaman L eğrisinin belli bir sonlu komşuluğunda sınırlı kısmi türevlere sahip ve C^1 sınıfından olan bir yarıkonform yansıma vardır [15].

Özel olarak, L eğrisinin sonlu komşuluğundaki her bir z için, $z' \in L$ olmak üzere

$$|y(z) - z'| \asymp |z - z'| \tag{3.5.3}$$

sağlanır.

3.5.1.Sonuç: L eğrisi K-yarıkonform eğri, $\infty \notin L$, $G = int\, L, \Omega = ext\, L$ olsun. Bu durumda L'ye göre $c_1(K)-$yarıkonform $y(z)$ yansıması vardır ve bu yansıma aşağıdaki üç özelliğe sahiptir [15].

i) $a \in G, \infty = y(a)$ olmak üzere $\mathbb{C} - (L \cup \{a\})$ bölgesinde sürekli türevlenebilir.

ii) Yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı için $B(a, \delta) := \{z : |z - a| < \delta\}$ ve $\widetilde{B}(a, \delta) := y(B(a, \delta))$ olsun.

$$\mathbb{C}_\delta := \mathbb{C} \setminus \left(B(a,\delta) \cup \widetilde{B}(a,\delta) \right)$$

bölgesinde (3.5.3) sağlanır.

iii) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus L$ için $|y_z| \le c(K,\delta)$, $c(K,\delta)^{-1} \le |y_{\tilde{z}}| \le c(K,\delta)$ ve $z \notin \mathbb{C} \setminus L$ için

$$|y_z| \preceq \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in B(a,\delta), \\ |z-a|^{-2}, & z \in \widetilde{B}(a,\delta), \end{cases}$$

ve

$$|y_{\tilde{z}}| \asymp \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in B(a,\delta), \\ |z-a|^{-2}, & z \in \widetilde{B}(a,\delta), \end{cases}$$

3.5.1. Sonuç'tan, L eğrisi, lokal anlamda $K-$yarıkonform eğri olsun. φ, Φ, f dönüşümleri yardımıyla bir $1 < R_0 \le 2$ ve $r_0 = R_0^{-1}$ sayısı için 3.5.2. Tanım'daki D bölgesi, [12]'de olduğu gibi $D := G_{R_0} - G_{r_0}$ olarak seçilebilir. Burada $G_R := int\, L_R$ dir.

Bu durumda gösterilebilir ki $\alpha(\cdot) = f^{-1}\left\{\overline{(f(\cdot))^{-1}}\right\}$ dönüşümü L eğrisine göre K^2 $-$yarıkonform yansımadır [12].

Yani, $\alpha(\cdot)$ dönüşümü, L eğrisinin üzerindeki noktaları değiştirmeyen ve belli bir $1 < \widetilde{R} < R_0$, $r_0 < \tilde{r} < 1$ sayıları için

$$\alpha(G_{\widetilde{R}} \setminus \overline{G}) \subset G \setminus \overline{G}_{r_0}, \quad \alpha(G \setminus G_{\tilde{r}}) \subset G_{R_0} \setminus \overline{G}$$

sağlayan bir K^2 $-$yarıkonform dönüşümdür.

Bu durumda da 3.5.1. Sonuç'a benzer şekilde, L'ye göre,

$$|\alpha^*(z) - z_1| \asymp |z - z_1|, \quad z_1 \in L,\ z \in D \tag{3.5.4}$$

koşulunu sağlayan $\alpha^*(\cdot)$, $c(K)-$yarıkonform dönüşüm vardır

Böylece [36]'dan yararlanarak genelliği kaybetmeksizin 3.5.2. Tanım'daki D bölgesinde

$$\alpha(z) = \alpha^*(z), \quad z \in D$$

olduğu kabul edilebilir.

3.5.4.Tanım: Eğer, her $\psi:\{w:|w|<1\}\to G$ konform ve yalınkat dönüşümü $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$'a K-yarıkonform ($K=\dfrac{1+k}{1-k}$) dönüşümüne kadar genişletilebilirse G bölgesine **k-yarıdaire** ($0\le k<1$) denir. Bu durumda $L=\partial G$'ye **k-yarıçember** denir. Eğer, herhangi bir $0\le k<1$ için G bölgesi (L eğrisi) **k-yarıdaire** (**k-yarıçember**) ise G bölgesine (L eğrisine) **yarıdaire (yarıçember)** denir.

3.5.1.Lemma: L, K-yarıkonform eğri,

$z_1\in L$ ve $z_2,z_3\in G\cap\{z:|z-z_1|\le cd(z_1,L_{R_0})\}$, $w_j=\varphi(z_j), j=1,2,3$,

$$\left(z_2,z_3\in\Omega\cap\{z:|z-z_1|\le cd(z_1,L_{r_0})\},\ w_j=\Phi(z_j), j=1,2,3\right)$$

olsun.

$|z_1-z_2|\preceq|z_1-z_3|$ ise,

i) $|w_1-w_2|\preceq|w_1-w_3|$

ii) $\left|\dfrac{w_1-w_3}{w_1-w_2}\right|^{K^{-2}}\preceq\left|\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right|\preceq\left|\dfrac{w_1-w_3}{w_1-w_2}\right|^{K^2}$

sağlanır [11].

3.5.2.Lemma: L, K-yarıkonform eğri olsun. Her $z\in L$ ve $z_0\in G$ için z_0 noktasını z noktası ile birleştiren bir $\beta(z_0,z)\subset G$ yayı varsa, aşağıdaki koşulları sağlar:

i) $\forall\varsigma\in\beta(z_0,z)$ için $d(\varsigma,L)\asymp|\varsigma-z|$

ii) $\forall\varsigma_1,\varsigma_2\in\beta(z_0,z)$ için ς_1 noktasını ς_2 notasına birleştiren $\tilde{\beta}(\varsigma_1,\varsigma_2)\subset\beta(z_0,z)$ alt yayı için $mes\tilde{\beta}(\varsigma_1,\varsigma_2)\preceq|\varsigma_1-\varsigma_2|$ sağlanır [16], [29].

3.5.3.Lemma: L, K-yarıkonform eğri olsun. Ölçülebilir herhangi bir $\gamma\subset G$ yayı ve onun $\alpha^*(\gamma)$ yansıması için

$$mes\gamma\asymp mes\alpha^*(\gamma)$$

sağlanır [29].

3.5.4.Lemma: L, $K-$yarıkonform eğri olsun. Her u, $0<u<R_0-1$ ve $z_0\in G$ için $\zeta=\varphi^{-1}(\tau)$, $|\tau|=\min\{|w|: w\in(\varphi\circ\alpha)(L_{1+u},z_0)\}$ olmak üzere,

$$mes(\varphi\circ\alpha)(G_{1+u}\backslash G,z_0)\preceq\delta^{-1}(z_0)\delta^{K^{-2}}(\zeta)$$

sağlanır [16].

3.5.5. Lemma: $G\subset\mathbb{C}$, bir bölge ve $\varphi: G\to\mathbb{C}$, $K-$yarıkonform dönüşümü olsun. Her $E\Subset G$ kompakt alt kümesi ve $\forall\kappa\in(0,\frac{1}{K})$ sayısı için,

$$mes\,\varphi(E)\preceq(mesE)^{\kappa}$$

dır [34].

3.5.6.Lemma: $G\subset\mathbb{C}$ keyfi bir Jordan bölgesi; $\gamma\in\Omega$, $z'\in L$ noktasından başlayan ölçülebilir ve

i) $mes\gamma(\varsigma_1,\varsigma_2)\preceq|\varsigma_1-\varsigma_2|$, $\forall\varsigma_1,\varsigma_2\in\gamma$

ii) $k(t)$ monoton artan fonksiyon olmak üzere $\forall\varsigma\in\gamma$ için

$$d(\varsigma,L)\succeq k(|\varsigma-z'|)$$

koşullarını sağlayan bir yay, $f(z)$ ise γ yayı üzerinde ölçülebilir ve monoton artan $\vartheta(t)$, $\vartheta(0)=0$ fonksiyonu için

$$|f(\varsigma)|\preceq\vartheta(|\varsigma-z'|),\ \forall\varsigma\in\gamma,$$

koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$F_\gamma(z):=\int_\gamma\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma,\ z\notin\gamma \tag{3.5.5}$$

olmak üzere,

$$\|F_\gamma'\|_{A^2}^2\preceq\ell^{-2}\left[\int_0^\ell\vartheta(t)dt\right]^2+\int_0^{c\ell}\vartheta^2(t)\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\int_0^t\frac{r\,dr}{k(r)}+\int_0^t\frac{dr}{rk(r)}\right]dt,\ \ell:=mes\gamma$$

sağlanır [20].

3.5.7.Lemma (Belyi) **:** $f \in A(\overline{G})$ ve y, $L = \partial G$'ye göre 3.5.1. Sonuç'daki özellikleri sağlayan yarıkonform yansıma olmak üzere, $\forall z \in G$ için

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\xi)\, y_{\bar{\xi}}}{\left(y(\xi)-z\right)^2}\, d\sigma(\xi) \qquad (3.5.6)$$

dir [15, s. 107].

Sonuçlar kısmında kullanılacak bazı notasyonları verelim:

3.5.5.Tanım: G sonlu basit bağlantılı bir bölge, $h \in L^1(G, d\sigma)$ ağırlık fonksiyonu ve $\forall z \in G$ için $h(z) > 0$ olsun. $p \geq 1$ ve $f \in L^p(G, h, d\sigma)$ olmak üzere f'nin, p'ye göre h ağırlıklı normu,

$$\|f\|_{p,h} = \|f\|_p := \left(\iint_G |f(z)|^p\, h(z)\, d\sigma_z\right)^p$$

ile gösterilir.

π_n, derecesi n yi aşmayan polinomların lineer uzayı olsun. 3.5.5.Tanım'a göre, $L^p(G, h, d\sigma)$'daki norm ile derecesi n yi aşmayan polinomların lineer uzayı $\pi^p_{n,h,G} = \pi^p_{n,h} = \pi^p_n$ ile gösterilir.

3.5.6.Tanım: $S \subseteq \mathbb{C}$ ve S üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için, düzgün norm

$$\|f\|_{\infty,S} = \|f\|_\infty := \sup\left\{|f(z)| : z \in S\right\}$$

ile gösterilir.

Bu norm ile ele alınan fonksiyonların normlu uzayı, $\pi^\infty_{n,S} = \pi^\infty_n$ şeklinde gösterilir.

3.5.7.Tanım: $I_{n,h} : \pi^2_{n,h} \to \pi^\infty_{n,L}$, $\forall p \in \pi_n$ için $I_{n,h}(p) = p$ olmak üzere lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu operatörler üzerinde tanımlanan norm,

$$\|I_{n,h}\| := \sup\left\{\|p\|_{\infty,L} : p \in \pi_n, \|p\|_{2,h} \leq 1\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Diğer yandan $B_{n,\sigma} := \left\{ P \in \pi_{n,\sigma}^2 \ : \ \|P\|_{2,\sigma} = 1 \right\}$ dir.

G, $L = \partial G$ yarıkonform bir eğri ile sınırlı basit bağlantılı bir bölge, $\{z_i\}_{i=1}^m$ L üzerindeki noktaların sabit bir koleksiyonu ve $i = \overline{1,m}$ için $\gamma_i > -2$ olmak üzere,

$$h(z) = h_0(z) \prod_{i=1}^{m} |z - z_i|^{\gamma_i} \tag{3.5.7}$$

ağırlık fonksiyonu olsun. Burada $h_0(z)$, G de sıfırdan düzgün olarak ayrılsın. Yani, $\exists c_0 > 0$ vardır öyle ki, $\forall z \in G$ için,

$$h_0(z) \geq c_0 \tag{3.5.8}$$

dir.

3.5.8.Tanım: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

i) L yarıçember

ii) $\Phi \in Lip\alpha$

koşulları sağlanırsa $G \in Q_\alpha$ sınıfındandır denir.

3.5.9.Tanım: $i = 1,2,...,m$ için $0 \leq \beta_i \leq \alpha \leq 1$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $G \in Q_{\alpha,\beta_1,...,\beta_m}$ sınıfındandır denir.

(i) Herhangi bir $\{D(z_i,\delta_i)\}_{i=1}^m$ ayrık disklerinin sonlu bir dizisi için Φ fonksiyonunun $\Omega(z_i,\delta_i)$'ye kısıtlanışı $Lip\beta_i$ den ve

$$\left(\Phi \middle| \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \Omega(z_i,\delta_i) \right) \in Lip\alpha \tag{3.5.9}$$

(ii) $\{D(z_i,\delta_i^*)\}_{i=1}^m$ ayrık disklerin sonlu bir dizisi olsun. $\forall i = \overline{1,m}$ için herhangi bir ξ, $z \in \Omega(z_i,\delta_i^*)$ ve $z \neq z_i \neq \xi$ ile,

$$k_i(\xi,z) = k \max\left(|\xi - z|^{\beta_i - \alpha}, |z - z_i|^{\beta_i - \alpha} \right) \tag{3.5.10}$$

olmak üzere,

$$\left|\Phi(z)-\Phi(\xi)\right|\le k_i(\xi,z)\left|\xi-z\right|^{\alpha} \tag{3.5.11}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada k , i, ξ ve z den bağımsız pozitif bir sabittir.

Buna göre , $i=\overline{1,m}$ için,

$$\beta_i=\alpha \Rightarrow Q_{\alpha,\beta_1,\ldots\beta_m}=Q_\alpha$$

dir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde ele alınan teorem, lemma ve sonuçlar [17], [18] ve [19]'da yapılan çalışmaların bir derlemesidir.

4.1. ORTOGONAL POLİNOMLARIN BÖLGENİN KAPANIŞINDA DEĞERLENDİRİLMESİ

4.1.1.Teorem: $G \in Q_\alpha, \frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ ve (3.5.7)'deki bütün γ_i'ler sıfıra eşit olsun. Bu durumda $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün $n \in N$ için,

$$|K_n(z)| \le c_1 n^{1/\alpha}$$

dir.

4.1.2.Teorem: $G \in Q_{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m}, \frac{1}{2} \le \beta_i \le \alpha \le 1$ ve $i = \overline{1,m}$ için

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} = \frac{\beta_i}{\alpha} \tag{4.1.1}$$

olsun. O zaman $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün $n \in N$ için,

$$|K_n(z)| \le c_2 n^{1/\alpha}$$

dir.

4.1.1. Teorem ve 4.1.2. Teorem'deki c_1 ve c_2 sabitleri h_0 fonksiyonu ve G'ye bağlıdır.

4.1.3.Teorem: $\forall i = \overline{1,m}$ için $\frac{1}{2} \le \beta_i \le \alpha \le 1$ ve

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} = \frac{\beta_i}{\alpha}$$

olmak üzere, $G \in Q_{\alpha,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m}$ olsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\|I_{n,h}\| \le c_2 n^{1/\alpha} \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde $\exists c_2 > 0$ vardır.

4.1.1.Sonuç: 4.1.3. Teorem'in koşulları sağlanırsa, $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\|K_n\|_{\infty,L} \leq c_3 n^{1/\alpha} \tag{4.1.3}$$

olacak şekilde $\exists c_3 > 0$ vardır.

Özel olarak $\alpha = 1$ için (4.1.2) ve (4.1.3) den, $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\|I_{n,h}\| \leq c_4 n \tag{4.1.4}$$

ve

$$\|K_n\|_{\infty,L} \leq c_5 n \tag{4.1.5}$$

olacak şekilde $\exists c_4 > 0$ ve $\exists c_5 > 0$ vardır.

4.1.1.Önerme: G=D ve $h(z) \equiv 1$ olsun. O zaman,

$$\|I_{n,h}\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(n+1)(n+2)} \tag{4.1.6}$$

dir.

4.1.1.Önerme'den, $\|I_{n,h}\| \asymp n$ olduğu kolayca ortaya çıkar ve buradan da görülür ki, (4.1.2) ve (4.1.4) eşitsizlikleri genel durumda geliştirilemez. Ancak $G = D$ ve $h(z) \equiv 1$ için

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \qquad \text{ve} \qquad \|K_n\|_\infty = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \asymp n^{1/2}$$

elde edilir. Yani model durumda, üs $\frac{1}{2}$ ile (4.1.5) değerlendirmesinden daha küçüktür:

$$\|K_n\|_\infty \asymp n^{-1/2} \|I_n\| \tag{4.1.7}$$

dir. Buradan da belirli durumlarda (4.1.3) ve (4.1.5) eşitsizlikleri sırayla

$$\|K_n\|_\infty \preceq n^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}} \qquad \text{ve} \qquad \|K_n\|_\infty \preceq n^{\frac{1}{2}} \tag{4.1.8}$$

ile yer değiştirebilir.

Genel durumda acaba bu yer değiştirme mümkünmüdür? Buna göre, yukarıdaki gibi $K_{n,\sigma}$ polinomlarının ve $I_{n,\sigma}$ operatörlerinin bir dizisini tanımlayalım. Bu genel koşullar altında aşağıdaki durumlar doğrudur.

4.1.2.Önerme: Belirli bir $\beta \geq 0$ sayısı için $\|K_{n,\sigma}\|_{\infty,\overline{G}} \preceq n^{\beta}$ eşitsizliği doğru ise,

$$\|I_{n,\sigma}\| \leq n^{\beta+1/2}$$

dir.

4.1.4.Teorem:

$$\|K_{n,\sigma}\|_{\infty,\overline{G}} \asymp |K_{n,\sigma}(\xi)| \tag{4.1.9}$$

olacak şekilde $\exists\ \xi \in \overline{G}$ vardır ve belirli bir $\beta \geq 0$ sayısı için,

$$\|K_{n,\sigma}\|_{\infty,\overline{G}} \asymp n^{\beta} \tag{4.1.10}$$

olsun. Bu durumda,

$$\|I_{n,\sigma}\|_{\infty,\overline{G}} \asymp n^{\beta+1/2} \tag{4.1.11}$$

elde edilir.

4.1.2.Sonuç: (4.1.9) ve (4.1.10) koşulları sağlanırsa ve belirli bir α sayısı için $\|I_{n,\sigma}\| \preceq n^{\alpha}$ ise, o zaman $\alpha \geq \beta + 1/2$ dir. Yani α, $\beta + 1/2$'den küçük olamaz.

4.1.2.Sonuç'dan, (4.1.9) ve (4.1.10) koşulları sağlanırsa (4.1.3) ve (4.1.5) bağıntıları (4.1.8) ile değiştirilebilir. Maalesef genel durumda bölgeler için sağlanıp sağlanmadığı bilinemez. Örneğin (3.5.7) formundaki ağırlık fonksiyonu ve keyfi yarıçemberler için, ancak basit durumlarda bu koşullar sağlanır. Varsayalım ki, $\alpha > 1/2$ olmak üzere, $L \in C(1,\alpha)$ eğrisi ile sınırlı G bölgesini ele alalım. [9,p.23]'de iyi bilinen asimptotik formül ile $\forall z \in L$ için,

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\Phi'(z)\Phi^n(z)\left[1 + O\left(n^{1-2\alpha}\right)\right]$$

dir.

(4.1.9)'daki $\max\limits_{z \in L}|\Phi'(z)|$ sağlayan herhangi bir nokta ξ noktası gibi alınarak (4.1.9) ve (4.1.10) koşullarını sağladığı açıktır.

(4.1.9), h ağırlık fonksiyonunun singüler z_i noktalarından biri yeteri derecede yüksek mertebeden bir sıfırı olduğunda sağlansın. Model bir örneği ele alalım.

4.1.3.Önerme: $G=D$ ve $h(z)=|z-1|^2$ olsun. O zaman $\exists\xi\in\overline{G}$ için $\|K_n\|_\infty \asymp |K_n(\xi)|$ olduğundan,

$$K_n(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi(n+1)(n+2)(n+3)}}\sum_{j=0}^{n}(j+1)z^j\left(1+z+\ldots+z^{n-j}\right) \tag{4.1.12}$$

dir. Ayrıca,

$$\|K_n\|_\infty=\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \tag{4.1.13}$$

$$\|I_n\|=\frac{1}{6\sqrt{\pi}}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \tag{4.1.14}$$

Böylece (4.1.7) bağıntısı da doğrudur.

4.1.5.Teorem: $G\in Q_{\alpha,\beta_1}, 0<\beta_1\le\alpha\le 1$ ve $h(z)$ (3.5.7)'deki gibi tanımlı olsun.

$$1+\frac{\gamma_1}{2}<\frac{\beta_1}{\alpha} \tag{4.1.15}$$

ise $\forall z\in\overline{G}$ ve $n=1,2,\ldots$ için

$$|K_n(z)|\le c_1 n^{s_1}+c_2|z-z_1|^{\sigma_1}n^{1/\alpha} \tag{4.1.16}$$

sağlanır. Burada,

$$s_1=\frac{2+\gamma_1}{2\beta_1}, \sigma_1=\frac{\beta_1}{\alpha}-\frac{2+\gamma_1}{2} \tag{4.1.17}$$

dir.

4.1.5.Teorem'den, (4.1.15) bağıntısı $-2<\gamma_1<0$ için sağlanır. Bu ve (4.1.16) gösterir ki K_n'nin artışının oranı, $h(z)\to\infty$ ve L eğrisi singülerliğe sahip olmadığında, $z\ne z_1$ için z_1 noktası ve $z\in L$ noktasında aynıdır.

(4.1.15) koşuluna $\lambda_1=1-\frac{\alpha}{\beta_1}\left(1+\frac{\gamma_1}{2}\right)$ mertebeden *Cebirsel Kutup Koşulu* denir.

Bu teorem L ve $h(z)$ birkaç singüler noktaya sahip olduğu durum için de genişletilebilir. Mesela, iki singüler nokta durumunda; $z \in \overline{G}$, s_i, σ_i, $i = 1,2$ olmak üzere,

$$\left|K_n(z)\right| \leq c_1 \left|z - z_1\right|^{\sigma_1} n^{s_2} + c_2 \left|z - z_2\right|^{\sigma_2} n^{s_1} + c_3 \left|z - z_1\right|^{\sigma_1} \left|z - z_2\right|^{\sigma_2} n^{1/\alpha} \qquad (4.1.18)$$

(4.1.17)'e benzer olarak değerlendirilir.

4.1.5. Teorem L eğrisi (4.1.1) interference koşulunu sağlayan, z_1 noktasında cebirsel bir kutup yerine ve $k \geq 2$ için $\{z_k\}$ noktalarında singülerliğe sahip olduğu durumda da doğrudur.

4.2. KEYFİ POLİNOMLARIN, SINIR EĞRİSİNİN VE AĞIRLIK FONKSİYONUNUN İNTERFERENCE KOŞULU ALTINDAKİ DEĞERLENDİRMESİ

$P_n(z)$ en çok n-inci dereceden keyfi bir polinom p pozitif bir reel sayı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$M_{n,p} := \left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)} = \left(\iint_G \left|P_n(z)\right|^p h(z)\, d\sigma_z \right)^{1/p}$$

olsun.

4.2.1.Teorem: 4.1.1. Teorem ve 4.1.2. Teorem'in koşulları altında herhangi bir $p > 1$, $n \in N$ ve $P_n, \deg P_n \leq n$ polinomu için,

$$\left\|P_n\right\|_L \leq c_6 n^{\frac{2}{\alpha p}} M_{n,p} \qquad (4.2.1)$$

değerlendirmesi doğrudur. $c_6 = c_6(G, h, p)$ dir.

Şimdi bir quasidisk'e karşılık gelen formülü elde edelim.

4.2.2.Teorem: $G \in Q_\alpha$ $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere her bir singüler z_i noktasının, $h(z)$ ağırlık fonksiyonun bir sıfırı olduğunu varsayalım. (Yani bütün γ_i ler pozitiftir.) Bu durumda $P_n \in \pi_n$ ve $\left\|P_n\right\|_{2,h} \leq 1$ olmak üzere, polinomların her $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için,

$$\max_{z\in\overline{G}}\left(|P_n(z)|\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\gamma_i/2}\right)\leq c_6 n^{1/\alpha} \tag{4.2.2}$$

ve her bir z_i noktasında, $1\leq i\leq m$ için,

$$S_i=\frac{2+\gamma_i}{2\alpha} \tag{4.2.3}$$

olmak üzere,

$$|P_n(z_i)|\leq c_6 n^{S_i} \tag{4.2.4}$$

olacak şekilde bir $c_6>0$ sabiti vardır.

4.2.1.Sonuç: (4.1.9) ve (4.1.10) koşulları z_{i_0} singüler noktalarının biri ξ olarak seçildiğinde sağlansın. Bu durumda,

$$\delta=\min\left(\frac{1}{\alpha}\ ;S_{i_0}-\frac{1}{2}\right) \tag{4.2.5}$$

olmak üzere,

$$\|K_n\|_{\infty,L}\preceq n^{S_{i_0}-1/2} \tag{4.2.6}$$

ve

$$\max_{z\in\overline{G}}\left[|K_n(z)|\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\gamma_i/2}\right]\preceq n^{\delta} \tag{4.2.7}$$

dir.

4.1.3. Önerme'de, (4.2.4) ve (4.2.6) eşitsizliklerindeki S_i ve $S_{i_0}-\frac{1}{2}$ kuvvetlerinin daha küçük sayılarla yer değiştiremediği gösterildi.

4.2.3.Teorem: $p>1$, $G\in Q_{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m}$, $\frac{1}{2}\leq\beta_i\leq\alpha\leq 1, i=\overline{1,m}$ ve $h(z)$, (3.5.7), (3.5.8) koşullarını sağlasın ve her bir $z_i\in L$ singüler noktasında,

$$1+\frac{\gamma_i}{2}>\frac{\beta_i}{\alpha} \tag{4.2.8}$$

olsun. $P_n\in\pi_n$ ve $\|P_n\|_{p,h,G}\leq 1$ koşulları altında $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ polinomlarının herhangi bir dizisi için,

$$\mu_i=\frac{2+\gamma_i}{p}-\frac{2}{p}\frac{\beta_i}{\alpha} \tag{4.2.9}$$

olmak üzere,

$$\max_{z\in\overline{G}}\left(|P_n(z)|\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right)\leq c_{11}n^{2/\alpha p} \tag{4.2.10}$$

olacak şekilde bir $c_{11}>0$ sayısı vardır. Bunun yanı sıra $z_i, i=1,...,m$ noktalarında,

$$S_i=\frac{2+\gamma_i}{p\beta_i} \tag{4.2.11}$$

olmak üzere,

$$|P_n(z_i)|\leq c_{11}n^{S_i} \tag{4.2.12}$$

dir.

4.2.2.Sonuç: $p=2, G\in Q_\alpha$ ve $i=\overline{1,m}$ için $\gamma_i>0$ ise (4.2.2) ve (4.2.4) eşitsizlikleri doğrudur.

$\frac{1}{2}\leq\beta_i\leq\alpha\leq 1, i=\overline{1,m}$ koşulundan, (4.2.8) bağıntısının $\gamma_i>0$, $i=\overline{1,m}$ için daima doğru olduğu anlaşılır. Diğer yandan $0\geq\gamma_i>-1$ ise (4.2.8) bağıntısı uygun α ve β_i'ler için doğru olur. $\gamma_i\leq -1$ durumu için ise (4.2.8) bağıntısı doğru değildir.

(4.2.8) eşitsizliğine ağırlık fonksiyonunun "*Cebirsel Sıfır*" koşulu denir.

4.2.4.Teorem: $p>1$, $G\in Q_{\alpha,\beta_1}$, $\frac{1}{2}\leq\beta_1\leq\alpha\leq 1$, ve $h(z)$, (3.5.7) ile tanımlansın.

$$1+\frac{\gamma_1}{2}<\frac{\beta_1}{\alpha}$$

ise, $\forall z\in\overline{G}$ ve $n=1,2,...$ için

$$s^1=\frac{(2+\gamma_1)}{p\beta_1} \text{ ve } \sigma^1=\frac{2\beta_1}{p\alpha}-\frac{2+\gamma_1}{p} \tag{4.2.13}$$

olmak üzere,

$$|P_n(z)|\leq\left(c_1n^{s_1}+c_2|z-z_1|^{\sigma^1}n^{2/\alpha p}\right)M_{n,p} \tag{4.2.14}$$

dir.

4.3. YARDIMCI SONUÇLAR

Bu bölümde 4.1 ve 4.2 de verilmiş olan Teoremlerin ispatı için gerekli olan lemmalar ve onların ispatları verilecektir.

4.3.1.Lemma: Herhangi bir $\xi \in \mathbb{C}$ için, $B_{n,\sigma} := \left\{ P \in \pi^2_{n,\sigma} \ : \ \|P\|_{2,\sigma} = 1 \right\}$ olmak üzere,

$$|P(\xi)| \to \max \ , \ P \in B_{n,\sigma}$$

ekstramal problemi

$$P_0(z) := \frac{Q_{n,\sigma}(\xi, z)}{\left(Q_{n,\sigma}(\xi,\xi)\right)^{1/2}} \tag{4.3.1}$$

eşitliği altında $e^{i\alpha}, \operatorname{Im}\alpha = 0$ çarpan evresi yakınlığında tek çözüme sahiptir. Ayrıca;

$$\max\left\{ |p(\xi)| \ : p \in B_{n,\sigma} \right\} = p_0(\xi) = \left(Q_{n,\sigma}(\xi,\xi)\right)^{1/2} = \left[\sum_{l=0}^{n} |K_{l,\sigma}(\xi)|^2 \right]^{1/2} \tag{4.3.2}$$

dir.

İspat: $P \in B_{n,\sigma}$ ve ξ, $\mathbb{C}$'nin sabit bir noktası olsun. (4.4.18)'in sağ tarafındaki skaler çarpıma Cauchy-Buniakowski eşitsizliği uygulanırsa,

$$|P(\xi)| \le \|P\|_{2,\sigma} \|Q_{n,\sigma}(\xi,\cdot)\|_{2,\sigma} = \|Q_{n,\sigma}(\xi,\cdot)\|_{2,\sigma} \tag{4.3.3}$$

Parseval ve (4.3.1) eşitsizliğine göre,

$$\|Q_{n,\sigma}(\xi,.)\|_{2,\sigma} = \left(\sum_{l=0}^{n} |K_{l,\sigma}(\xi)|^2 \right)^{1/2} = |P_0(\xi)| \tag{4.3.4}$$

dir. Buradan,

$\forall\, P \in B_{n,\sigma}, \forall\, \xi \in \mathbb{C}$ ve (4.3.3)'den,

$$|P(\xi)| \le |P_0(\xi)|$$

elde edilir.

Geriye $P_0 \in B_{n,\sigma}$ olduğunu göstermek kalır. Gerçekten (4.3.1) ve (4.3.4) den,

$$\|P_0\|_{2,\sigma} = \frac{1}{\left(Q_{n,\sigma}(\xi,\xi)\right)^{1/2}} \|Q_{n,\sigma}(\xi,\cdot)\|_{2,\sigma} = 1$$

dir. Böylece (4.3.2) eşitsizliği kanıtlanır.

Ekstremal problemin çözümünün tekliği (4.3.3)'de $[25, p.168]$ denklemin gerçekleşme olanağını analiz ederek kolayca ortaya çıkarılabilir.

[17] ile benzer olarak Φ, $\mathbb{C}$ den $\mathbb{C}$'ye bir yarıkonform homeomorfizme genişletilsin. Bu durumda $\Phi(G)=D$ ve $0<u<1$ için

$$\begin{aligned} L_u^* &:= \{z : |\Phi(z)| = 1-u\} \\ L_u &:= \{z : |\Phi(z)| = 1+u\} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

seviye eğrilerini göz önünde tutalım.

$\{z_i\}_{i=1}^m$'nin, $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun singüler noktaları olduğunu varsayalım ve $\{v_i\}_{i=1}^m$ negatif olmayan reel sayıların sabit bir koleksiyonu olsun. $o<u<1$ için $G_u := \operatorname{int} L_u$ olmak üzere,

$$\chi(z) := \prod_{i=1}^m |z-z_i|^{v_i}$$

secelim.

4.3.2.Lemma: $n \geq 2$, herhangi bir $M \subseteq \overline{G}_{1/n}$ kümesi ve $P \in \pi_n$ için,

$$\sup_{z\in M} |\chi(z)P(z)| \leq c_8 \max_{z\in L_{1/n}^*} |\chi(z)P(z)| \tag{4.3.6}$$

sağlanacak şekilde bir $c_8 > 0$ sabiti vardır.

Burada c_8 sabiti M ve p den bağımsızdır. Ayrıca $G_{1/n}$ bölgesi, $L_{1/n}$ sınırı ile sonlu bir bölgedir.

4.3.2. Lemma'nın ispatından önce, $k \in \mathbb{N}$, θ_i ve b_i negatif olmayan reel sayılar ve $b \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$P(z) = b\prod_{i=1}^k |z-b_i|^{\theta_i} \tag{4.3.7}$$

formundaki alt harmonik fonksiyonlar için Bernstein-Walsh lemmasının $[41, p.77]$ bir benzerini ortaya koyalım. $\theta_p := \sum_{i=1}^k \theta_i$ seçelim

Varsayalım ki, O regüler bir bölge (Dirichlet problemi için), $\infty \in O$, $E := \mathbb{C} \setminus O$ kompakt bir küme ve $G(z)$ sonsuzda kutup yeri ile O bölgesinin Green fonksiyonu olsun.

4.3.3.Lemma: (4.3.7) formundaki herhangi bir $P(z)$ altharmonik fonksiyonu için bütün $z \in O \setminus \{\infty\}$ ve herhangi bir $d \geq \theta_p$ ele alındığında,

$$P(z) \leq \left(\max_{\xi \in E} P(\xi)\right) \exp(dG(z)) \tag{4.3.8}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: İspat için $d = \theta_p$ olmak üzere (4.3.8)'deki eşitsizliği kanıtlamak yeterlidir.

$$f(z) := \ln P(z) - \ln\left(\max_{\xi \in E} P(\xi)\right) - \theta_p G(z)$$

fonksiyonu $R > \max_{1 \leq i \leq k} |b_i|$ için $O \cap \Delta(O, R)$'de harmonik ve $O \setminus \{\infty\}$ da altharmoniktir. $(G(z) - \ln|z|)$ fonksiyonu $z \to \infty$ iken sınırlı olduğundan [42, p.267] $f(z)$ fonksiyonu sonsuzdaki noktanın bir komşuluğunda sınırlıdır. $f(z)$'nin O'da bir altharmonik fonksiyona devam ettirilebilmesi, harmonik fonksiyonların [43, p.54] kaldırılabilir singülerliği üzerine verilen teoremden ortaya çıkar. O, ∂O üzerinde regüler olduğundan $G(z) \equiv 0$ ve buradan $f(z) \leq 0$ dır. Maksimum prensibinden (4.3.8)'e denk olarak O üzerinde her yerde $f(z) \leq 0$ dır.

(4.3.5) formülüne dönülürse, $u \in (0, 1/2]$ için Φ_u, $\Phi_u(\infty) = \infty$ ve $\Phi_u'(\infty) > 0$ koşulları ile tek türlü belirlenen ve $extL_u^*$ kümesinden Δ üzerine tek değerli bir konform dönüşüm olsun.

Green fonksiyonu tanımından: $G(z) = \log|\Phi(z)|$ olmak üzere, $z \to \partial O$ iken $|\Phi(z)| \to 1$ olduğundan O regülerdir. Buradan da, $G(z) \equiv 0$ olduğu ortaya çıkar.

Şimdi 4.3.2. Lemma'yı kanıtlayalım.

4.3.2.Lemma'nın ispatı

Altharmonik fonksiyonlar için maksimum prensibinden $M = L_{1/n} = \partial G_{1/n}$ için (4.3.6)'yı elde etmek yeterlidir.

$$P_n \in \pi_n,\ \ n \geq 2$$

ve

$$P(z) := \chi(z)\left|P_n(z)\right|$$

olsun. O zaman $P(z)$, (4.3.7) formunda bir fonksiyon ve

$$\theta_p = \deg P_n + \sum_{i=1}^{m} v_i$$

dir. $\deg P_n = n$ olsun. Bu durumda $c_{10} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} v_i$ olmak üzere,

$$\theta_p = n\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} v_i\right] \leq c_{10} n \tag{4.3.9}$$

dir. 4.3.3. Lemma'da $O = extL^{*}_{1/n}$ ve $d = \theta_p$ seçelim. O bölgesi için sonsuzda kutup yeri ile Green fonksiyonu,

$$G(z) = \ln\left|\Phi_{1/n}(z)\right|$$

formuna sahiptir.

(3.4.1)'den ve (4.3.9)'dan ve

$$P(z) \leq \left(\max_{\xi \in E} P(\xi)\right)\exp\left(dG(z)\right)$$

olmasından, $\forall\, z \in L_{1/n}$ için,

$$\exp\left(dG(z)\right) = \exp\left(\theta_p \ln\left|\Phi_{1/2}(z)\right|\right) \leq \left(1 + c_9\frac{1}{n}\right)^{\theta_p} \leq \left(1 + c_9\frac{1}{n}\right)^{c_{10}n}$$

elde edilir.

Son özdeşlik belirli bir sabit ile, c_8 gibi, düzgün sınırlıdır. Buradan yukarıda yapılan varsayım altında (4.3.8) bağıntısından (4.3.6) elde edilir.

$\{P_n \in \pi_n : \deg P_n = n\}$ kümesi π_n'deki herhangi bir norm için her yerde yoğundur. Varsayımları doğrulayan $\deg \pi_n = n$ için (4.3.6)'nın doğruluğunu göstermek yeterlidir.

4.3.4.Lemma: $p>0$ ve f, $|z|>1$ de, $z=\infty$ için $(n\geq 1)$ en çok n-inci mertebeden kutupyerine sahip olan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $1<R_1<R_2$ koşulunu sağlayan bütün R_1 ve R_2 için,

$$\|f\|_{A_p(R_1<|z|<R_2)} \leq \left(\frac{R_2-R_1}{R_1-1}\right)^{1/p} (R_2)^{n+1/p} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

dir.

İspat : Riesz teoremine göre[44, p. 443], $R_1 \leq \rho < R_2, 1 < s \leq R_1$ koşullarını sağlayan her ρ ve s için,

$$\int_{|z|=\rho} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \leq \int_{|z|=R_1} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \tag{4.3.10}$$

ve

$$\int_{|z|=R_1} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \leq \int_{|z|=s} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \tag{4.3.11}$$

yazılır.

(4.3.10) ρ'ya göre R_1 den R_2 ye ve (4.3.11) s'ye göre 1 den R_1 e integrallenirse,

$$\iint_{R_1<|z|<R_2} |f(z)|^p d\sigma_z \leq \frac{R_2^{np+2}-R_1^{np+2}}{R_1^{np+2}-1} \iint_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p d\sigma_z \tag{4.3.12}$$

elde edilir.

$$S := \frac{R_2^{np+2}-R_1^{np+2}}{R_1^{np+2}-1} \tag{4.3.13}$$

seçelim.

Kesrin pay ve paydasına Lagrange teoremi [27] uygulanırsa, bazı r_1, $1<r_1<R_1$ ve r_2, $R_1<r_2<R_2$ için,

$$S = \frac{(np+2)r_2^{np+2}(R_2-R_1)}{(np+2)r_1^{np+2}(R_1-1)}$$

elde edilir. Buradan, $\frac{1}{r_1}<1$ ve $r_2<R_2$ olmasından,

$$S < \frac{R_2-R_1}{R_1-1} R_2^{np+1} \tag{4.3.14}$$

dir. (4.3.12) ve (4.3.14) kullanılarak

$$\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)} = \iint\limits_{R_1<|z|<R_2} |f(z)|^p d\sigma_z \le S \iint\limits_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p d\sigma_z = S\|f\|^p_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

$$\left(\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)}\right)^{1/p} \le \left(\frac{R_2-R_1}{R_1-1}\right)^{1/p} \left(R_2^{np+1}\right)^{1/p} \left(\iint\limits_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p d\sigma_z\right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{A_p(R_1<|z|<R_2)} \le \left(\frac{R_2-R_1}{R_1-1}\right)^{1/p} R_2^{n+1/p} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

4.3.5.Lemma: G bir yarıdisk, $P_n(z)$, $\deg P_n \le n$, $n=1,2,...$ keyfi bir polinom ve $h(z)$, (3.5.7) koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda herhangi bir $R>1, p>0$ ve $n=1,2,...$ için

$$\|P_n\|_{A_p\left(h,G_{1+c(R-1)}\right)} \le c_1 R^{n+1/p} \|f\|_{A_p(h,G)} \tag{4.3.15}$$

dir. Burada c ve c_1, n ve R'den bağımsızdır.

İspat: (4.3.15) bir kaç adımda kanıtlanacaktır. İlk olarak, aşağıdaki değerlendirmenin bazı $c>0$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\|P_n\|_{A_p(h,G_R\setminus G)} \preceq \left[1+c(R-1)\right]^{n+1/p} \|P_n\|_{A_p\left(h,G\setminus G^*\right)} \tag{4.3.16}$$

Bunun için $\rho_1<\rho_2$ olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 sayılarını seçelim, öyle ki;

$$G^*_{\rho_1} \subset G \tag{4.3.17}$$

$$G_R \subset G^*_{\rho_2} \tag{4.3.18}$$

olsun.

Şimdi ρ_1 ve ρ_2 sayıları için,

$$\rho_1 - 1 \asymp R-1 \tag{4.3.19}$$

$$\rho_2 - 1 \asymp R-1 \tag{4.3.20}$$

sağlandığını gösterelim.

$z \in L^*$, $\tilde{z}=y(z)$ olmak üzere, ρ_1 ve ρ_2 (4.3.17) ve (4.3.18)'i sağlayan keyfi sayılar olsun. Sırayla

$$d\left(z,L^*_{\rho_1}\right)=|z-z_1|,\ d(z,L)=|z-z_2| \text{ ve } d\left(z,L^*_{\rho_2}\right)=|z-z_3|$$

formüllerine göre $z_1 \in L^*_{\rho_1}$, $z_2 \in L$ ve $z_3 \in L^*_{\rho_2}$ noktaları tanımlansın. Her $z \in L^*$ ve $t \in L$ için $|z-t| = d(z, L_R)$ olmak üzere $d(z,L) \asymp d(t,L_R) \asymp d(z,L_R)$ bağıntısından,

$$c_3 d(z_2, L_R) \le d(z,L) \asymp c_4 d(z_2, L_R) \tag{4.3.21}$$

olacak şekilde z ve R'den bağımsız c_3 ve c_4 sabitleri vardır

L^* yarıçember olduğundan Φ_R fonksiyonuna 3.5.1. Lemma uygulanırsa,

$$\left|\frac{z-z_2}{z-z_1}\right| \ge c_5 \left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)}{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_1)}\right|^{\varepsilon_1} \ge c_6 \left(\frac{|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)|}{\rho_1 - 1}\right)^{\varepsilon_1}$$

elde edilir. Buradan da,

$$|z-z_1| \le c_6^{-1} \left(\frac{\rho_1 - 1}{|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)|}\right)^{\varepsilon_1} |z-z_2| \tag{4.3.22}$$

dir.

$y(z)$ dönüşümü D-özelliğine sahip olduğundan,

$$|z-z_2| \ge c_3 d(z_2, L_R) \ge c_7 |\tilde{z} - z_2|$$

yazılır. 3.5.1. Lemma'dan,

$$|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)| \ge c_8 |\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)| \ge c_8 (R-1)$$

vardır. Buna bağlı olarak (4.3.22)'den,

$$|z-z_1| \le c_6^{-1} \left(\frac{\rho_1 - 1}{c_8(R-1)}\right)^{\varepsilon_1} |z-z_2|$$

elde edilir. Böylece, $c_9 = \dfrac{c_8 c_6^{-\varepsilon_1^{-1}}}{2}$ olmak üzere, (4.3.17) ve (4.3.19)'a uygun olarak,

$$\rho_1 = 1 + c_9 (R-1) \tag{4.3.23}$$

yazılabilir.

Şimdi ρ_2'yi tanımlayalım. Φ_R'ye 3.5.1. Lemma uygulanarak,

$$\left|\frac{z-\tilde{z}}{z-z_3}\right| \le c_{10} \left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})}{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_3)}\right|^{c}$$

elde edilir. $|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_3)| \succeq \rho_2 - 1$ olmasından,

$$|z-z_3| \geq c_{11}\left(\frac{\rho_2-1}{|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})|}\right)^c |z-\tilde{z}| \tag{4.3.24}$$

dir.

$$|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)| \leq c_{12}|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)|$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})| &\leq |\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)|+|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)| \\ &\leq (c_{12}+1)|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)| \leq c_{13}(R-1)\end{aligned} \qquad \text{(Şekil 1)}$$

dir. (4.3.24)'ü kullanarak,

$$|z-z_3| \geq c_{11}\left(\frac{\rho_2-1}{|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})|}\right)^c |z-\tilde{z}| \geq c_{11}\left(\frac{\rho_2-1}{c_{13}(R-1)}\right)^c |z-\tilde{z}|$$

elde edilir. $c_{14} = c_8 c_6^{\varepsilon_1^{-1}} + c_{13} c_{11}^{c^{-1}}$ olmak üzere,

$$\rho_2 = 1 + c_{14}(R-1) \tag{4.3.25}$$

seçerek, (4.3.18) ve (4.3.20) koşulunu sağlayan ρ_2 elde edilmiş olur.

Şimdi (4.3.16)'yı kanıtlayalım. $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun singüler noktalarına göre Blaschke fonksiyonlarını tanımlayalım: $z \in \Omega^*$ için

$$B_R(z) = \prod_{i=1}^{m} B_R^i(z) := \prod_{i=1}^{m} \frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{1-\overline{\Phi_R(z_i)}\Phi_R(z)} \tag{4.3.26}$$

olsun. $B_R(z_i)=0$ ve $z \in L^*$ için $|B_R(z)| \equiv 1$ olduğu kolayca görülür. $p>0$ ve $R>1$ için $w=\Phi_R(z)$ olmak üzere,

$$f_R(w) := h_0(\Psi_R(w)) \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\Psi_R(w)-\Psi_R(w_i)}{w B_R^i(\Psi_R(w))}\right]^{\gamma_i/p} P_n(\Psi_R(w))[\Psi_R'(w)]^{2/p}$$

seçelim. f_R fonksiyonu $z=\infty$'da n-inci mertebeden kutup yerine sahip, Δ'da analitik bir fonksiyondur. Bu durumda 4.3.4. Lemma'ya göre,

$$\|f_R\|_{A_p(\rho_1<|w|<\rho_2)} \leq \left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\right)^c \rho_2^{n+1/p} \|f_R\|_{A_p(1<|w|<\rho_1)}$$

veya

$$H(z) := h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}|P_n(z)|^p$$

olmak üzere,

$$f_R(w) = h_0(\Psi_R(w))\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\Psi_R(w)-\Psi_R(w_i)}{wB_R^i(\Psi_R(w))}\right]^{\gamma_i/p}P_n(\Psi_R(w))\left[\Psi_R'(w)\right]^{2/p}$$

$$\iint_{G_R\setminus G}|f_R(z)|^p d\sigma_z = \iint_{G_R\setminus G}h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}|P_n(z)|^p d\sigma_z \leq \iint_{G_{\rho_2}^*\setminus G_{\rho_1}^*}H(z)d\sigma_z$$

$$\leq \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\rho_2^{np+1}\iint_{G_{\rho_2}^*\setminus G^*}H(z)d\sigma_z$$

$$\leq \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\rho_2^{np+1}\iint_{G\setminus G^*}H(z)d\sigma_z$$

yazılır. (4.3.23) ve (4.3.25) bağıntılarından,

$$\iint_{G_R\setminus G}h_0(z)|P_n(z)|^p d\sigma_z \preceq$$

$$\preceq \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\max\limits_{z\in\overline{G_R\setminus G}}\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|}{\max\limits_{z\in\overline{G\setminus G^*}}\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|}\right]^{\gamma_i}\rho_2^{np+1}\iint_{G\setminus G^*}h(z)|P_n(z)|^p d\sigma_z \tag{4.3.27}$$

elde edilir.

$$\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right| = \left|\Phi_R(z)\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{\left(\overline{\Phi_R(z_i)}\right)^{-1}-\Phi_R(z)}\frac{1}{\overline{\Phi_R(z_i)}}\right|$$

$$= \left|\frac{\Phi_R(z)}{\overline{\Phi_R(z_i)}}\right|\left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{\Phi_R(z_i)-\Phi_R(z)}\right| = \left|\frac{\Phi_R(z)}{\Phi_R(z_i)}\right|$$

olduğundan (4.3.27) bağıntısı

$$\iint_{G_R\setminus G}h_0(z)|P_n(z)|^p d\sigma_z \preceq \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\max\limits_{z\in\overline{G_R\setminus G}}\left|\Phi_R(z)\right|}{\max\limits_{z\in\overline{G\setminus G^*}}\left|\Phi_R(z)\right|}\right]^{\gamma_i}\rho_2^{np+1}\iint_{G\setminus G^*}h(z)|P_n(z)|^p d\sigma_z$$

$$\preceq \rho_2^{np+1}\iint_{G\setminus G^*}h(z)|P_n(z)|^p d\sigma_z$$

şekline dönüşür. ρ_2 ve R simetrik olduğundan ispat tamamlanır.

4.4. TEOREMLERİN İSPATI

4.2.1.Teorem'in İspatı : $P_n(z)$ G'de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli olduğundan Belyi'nin integral gösteriminden $\forall z \in G$ için,

$$P_n(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{P_n(\xi)Y_{\bar{\xi}}}{\left(Y(\xi)-z\right)^2} d\sigma_\xi$$

dir. Her iki tarafın modülü alınırsa;

$$|P_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{|P_n(\xi)||Y_{\bar{\xi}}|}{|Y(\xi)-z|^2} d\sigma_\xi$$

bulunur. Sağ tarafta integral içi $h^{1/p}(\xi)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$|P_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{|P_n(\xi)|h^{1/p}(\xi)|Y_{\bar{\xi}}|}{|Y(\xi)-z|^2 h^{1/p}(\xi)} d\sigma_\xi$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğinden $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$|P_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\iint_G \left(|P_n(\xi)|h^{1/p}(\xi)\right)^p d\sigma_\xi\right]^{1/p}}_{M_{n,p}} \left[\iint_G \left(\frac{|Y_{\bar{\xi}}|}{|Y(\xi)-z|^2 h^{1/p}(\xi)}\right)^q d\sigma_\xi\right]^{1/q}$$

dir. Buradan,

$$|P_n(z)| \le \frac{1}{\pi}M_{n,p}\left[\iint_G \frac{|Y_{\bar{\xi}}|^q}{|Y(\xi)-z|^{2q} h^{q/p}(\xi)} d\sigma_\xi\right]^{1/q}$$

ve $\frac{q}{p}=q-1$ olduğundan,

$$|P_n(z)| \le \frac{1}{\pi}M_{n,p}\left[\iint_G \frac{|Y_{\bar{\xi}}|^q h^{1-q}(\xi)}{|Y(\xi)-z|^{2q}} d\sigma_\xi\right]^{1/q}$$

elde edilir.

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$f(\xi,z):=\frac{\left|Y_{\bar{\xi}}\right|h^{\frac{1-q}{q}}(\xi)}{\left|Y(\xi)-z\right|^{2}}$$

gösterilsin. (4.2.1)'i kanıtlamak için $z\in L^{*}_{1/n}$ için

$$\left(\iint_{G} f^{q}(\xi,z)d\sigma_{\xi}\right)^{1/q}\preceq n^{\frac{2}{\alpha p}}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$\varepsilon>0$ olsun öyle ki, $\forall n\geq 2$ için

$$L^{*}_{1/n}\subset G\big|\overline{D(0,\varepsilon)}$$

dir.

$$\left(\iint_{G} f^{q}(\xi,z)d\sigma_{\xi}\right)^{1/q}=\left(\iint_{D(0,\varepsilon)} f^{q}(\xi,z)d\sigma_{\xi}+\iint_{G|D(0,\varepsilon)} f^{q}(\xi,z)d\sigma_{\xi}\right)^{1/q}$$ olmak üzere

$k\leq 1$ için $(x+y)^{k}\leq x^{k}+y^{k}$ eşitsizliğinden,

$$\left(\iint_{G} f^{q}(\xi,z)d\sigma_{\xi}\right)^{1/q}\leq\left(\iint_{D(0,\varepsilon)} f^{q}(\xi,z)d\sigma_{\xi}\right)^{1/q}+\left(\iint_{G|D(0,\varepsilon)} f^{q}(\xi,z)d\sigma_{\xi}\right)^{1/q}:=I_{1}+I_{2}$$

elde edilir.

I_{1}'i değerlendirelim. Y yansımasının özelliğinden, $D(0,\varepsilon)$'da $\left|Y_{\bar{\xi}}\right|\asymp\left|Y(\xi)\right|^{2}$ dir. $z\in L^{*}_{1/n}$ ve $\xi\in D(0,\varepsilon)$ için,

$$\left|Y(\xi)-z\right|=\left|Y(\xi)\right|\left|1-\frac{z}{Y(\xi)}\right|\asymp\left|Y(\xi)\right|\succeq 1$$

(3.5.7) ve (3.5.8)'den $D(0,\varepsilon)$'da $h^{-1}(\xi)\preceq 1$ dir. Şimdi bunu gösterelim:

$$h(z)=h_{0}(z)\left|z-z_{1}\right|^{\gamma_{1}}\ldots\left|z-z_{m}\right|^{\gamma_{m}}$$

$\{z_{i}\}_{i=1}^{m}$, L üzerinde sabit noktalar, $\gamma_{i}>-2$ ve $h_{0},\exists c_{0}>0:h_{0}(z)\geq c_{0}$ olduğundan $D(0,\varepsilon)$'da $\xi\in D(0,\varepsilon)$ için

$$h^{-1}(\xi)\preceq 1$$

dir.

$$h(\xi)=h_0(\xi)|\xi-z_1|^{\gamma_1}\ldots|\xi-z_m|^{\gamma_m}\Rightarrow h^{-1}(\xi)=h_0^{-1}(\xi)|\xi-z_1|^{-\gamma_1}\ldots|\xi-z_m|^{-\gamma_m}$$

$-2<\gamma\le 0$ ve $\forall\ i=\overline{1,m}$ için $|\xi-z_i|\preceq 1$ olduğundan

$$h^{-1}(\xi)\le\frac{1}{c_0}$$

dır. Buradan

$$h^{-1}(\xi)\preceq 1$$

dir.

Sonuç olarak

$$I_1=\left(\iint_{D(0,\varepsilon)}f^q(\xi,z)d\sigma_\xi\right)^{1/q}=\left(\iint_{D(0,\varepsilon)}\frac{|Y(\xi)|^q h(\xi)^{1-q}}{|Y(\xi)-z|^{2q}}d\sigma_\xi\right)^{1/q}\preceq 1$$

elde edilir.

I_2'yi değerlendirelim, $J_{Y(\xi)}$, ξ noktasında Y dönüşümünün jakobiyanı olsun. 3.5.1. Sonuç (iii) özelliğinden $J_{Y(\xi)}\preceq 1$ ve $J_{Y(\xi_1)}\preceq 1$ dir. Bunu gösterelim:

$J_{Y(\xi)}, \xi$ noktasında Y dönüşümünün jakobiyanı ve 3.5.1. Sonuç (iii)'den,

$\forall\varepsilon>0, \forall\xi\in\left\{\xi:\varepsilon<|\xi|<\frac{1}{\varepsilon}\right\}\backslash L$ ve $\forall z\in L$ için $|Y(\xi)-z|\asymp|\xi-z|$; $|Y_{\bar{\xi}}|\asymp 1$; $|Y_\xi|\preceq 1$

olmak üzere, $\forall\xi_1,\xi\in\left(G\backslash D(0,\varepsilon)\cup Y\left(G\backslash D(0,\varepsilon)\right)\right)$ için $Y(\xi),\overline{C}$'ın antiquasi konform homeomorfizmi olduğundan ve yarıkonformluğun bir bölge için genel tanımından, $0<k<1$ olmak üzere $|Y_{\bar{\xi}}|^2\le k|Y_\xi|^2$ koşulundan dolayı,

$$J_{Y(\xi)}=|Y_\xi|^2-|Y_{\bar{\xi}}|^2\le|Y_\xi|^2-k|Y_\xi|^2=|Y_\xi|^2(1-k)\preceq(1-k)\preceq 1$$

dir.

Benzer yolla,

$$J_{Y(\xi_1)}=|Y_{\xi_1}|^2-|Y_{\bar{\xi}_1}|^2\le|Y_{\xi_1}|^2-k|Y_{\xi_1}|^2=|Y_{\xi_1}|^2(1-k)\preceq(1-k)\preceq 1.$$

$\xi_1,\xi\in\left(G\backslash D(0,\varepsilon)\cup Y\left(G\backslash D(0,\varepsilon)\right)\right)$ ve $\xi_1=Y(\xi)$ olsun. Bu durumda 3.5.1. Sonuç (ii) özelliğinden, $J_{Y(\xi)}J_{Y(\xi_1)}=1\Rightarrow J_{Y(\xi_1)}=\dfrac{1}{J_{Y(\xi)}}$ ve $J_{Y(\xi_1)}\preceq 1$ olduğundan

$J_{Y(\xi)}\succeq 1$ dir.

$J_{Y(\xi)} \preceq 1$ eşitsizliğinden de,

$$J_{Y(\xi)} \asymp 1$$

bulunur. 3.5.1. Sonuç (iii)'den $\left|Y_{\bar{\xi}}\right| \asymp 1$ olduğunu göz önünde tutup, bu değişikliklerden sonra ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\iint\limits_{G \setminus D(0,\varepsilon)} f^q(\xi,z)\, d\sigma_\xi \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\iint\limits_{G \setminus D(0,\varepsilon)} \frac{\left|Y_{\bar{\xi}}\right|^q h^{1-q}(\xi)}{\left|Y(\xi)-z\right|^{2q}} d\sigma_\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\iint\limits_{G \setminus D(0,\varepsilon)} \frac{J_{Y(\xi)} h^{1-q}(\xi)}{\left|Y(\xi)-z\right|^{2q}} d\sigma_\xi \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\iint\limits_{Y(G \setminus D(0,\varepsilon))} \frac{h^{1-q}(Y(\xi))}{\left|\xi-z\right|^{2q}} d\sigma_\xi \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

elde edilir.

Basitlik için $m=0$ durumuna bakalım. Bu durumda ağırlık fonksiyonunun singüler noktası yoktur. $m=1$ için ise ağırlık fonksiyonu $z_1 \in L$ singüler noktaya sahiptir. $m=1$ durumu için, değerlendirme yaparken $\gamma := \gamma_1$ ve $\beta := \beta_1$ notasyonları kullanılacaktır.

Şimdi $m=0$ için bakalım. (3.5.8) bağlantısı ile,

$$h(Y(\xi)) = h_0(Y(\xi)) \geq c_0 \text{ ve } q>1$$

olmasından,

$$h^{1-q}(Y(\xi)) = h_0^{1-q}(Y(\xi)) \leq (c_0)^{1-q} \preceq 1$$

dir.

Sonuç olarak $m=0$ için

$$I_2 \asymp \left(\iint\limits_{Y(G \setminus D(0,\varepsilon))} \frac{h^{1-q}(Y(\xi))}{\left|\xi-z\right|^{2q}} d\sigma_\xi \right)^{\frac{1}{q}} \preceq \left(\iint\limits_{Y(G \setminus D(0,\varepsilon))} \frac{d\sigma_\xi}{\left|\xi-z\right|^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.4.2}$$

vardır.

Sağ taraftaki integrali değerlendirmek için, $z \in L^*_{1/n}$ ve $\xi \in Y(G \setminus D(0,\varepsilon))$ noktaları arasındaki uzaklığa bakalım. $m=0$ için $(\Phi \setminus \Omega) \in lip\alpha$ ve 3.5.1. Sonuç (i), (ii) koşullarından, $D(0,\varepsilon)$ dışında $z \in \Omega$ için, $\overline{\Phi(Y(z))}\Phi(z)=1$ olduğundan genişletilmiş $\Phi(z)$ fonksiyonunun süreklilik modülünün en çok sonlu bir çarpan ile artabileceği ortaya çıkar. Buradan da bu genişleme üzerine $\Phi(z) \in lip\alpha$ 'dır.

$z \in L^{*}_{1/n}$ ve $\xi \in Y(G \setminus D(0,\varepsilon))$ olsun. Bu durumda biliyoruz ki,

$$|\Phi(z)| = 1 - \frac{1}{n}$$

dir. Bir üçgende kenar uzunluk bağıntılarından,

$$|\Phi(\xi)| - |\Phi(z)| \le |\Phi(\xi) - \Phi(z)| \text{ ve } |\Phi(\xi)| \ge 1$$

olduğundan

$$\frac{1}{n} \le |\Phi(\xi)| - |\Phi(z)| \le |\Phi(\xi) - \Phi(z)| \preceq |\xi - z|^{\alpha} \tag{4.4.3}$$

bulunur. Buradan da,

$$d(z,\xi) = |\xi - z| \ge |\Phi(\xi) - \Phi(z)|^{1/\alpha} \succeq \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha} = n^{-1/\alpha}$$

elde edilir. Bu veriler ışığında I_2 'yi değerlendirelim:

$$I_2 \preceq \left(\iint\limits_{Y(G \setminus D(0,\varepsilon))} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow I_2^q \preceq \left(\iint\limits_{Y(G \setminus D(0,\varepsilon))} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|^{2q}} \right) \preceq \iint\limits_{|\xi - z| \ge n^{-1/\alpha}} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|^{2q}}$$

dir. Buradan $\xi - z = re^{i\varphi}$ dönüşümü ile kutupsal koordinatlara geçilirse;

$$\iint\limits_{|\xi - z| \ge n^{-1/\alpha}} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|^{2q}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_{d(z,\xi)}^{\infty} r^{1-2q} dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{(q-1)} \left(d(z,\xi)\right)^{2(1-q)} \le \left(\frac{\pi}{(q-1)} n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}} \right)$$

$$I_2^q \le \left(\frac{\pi}{(q-1)} n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}} \right) \Rightarrow I_2 \le \left(\frac{\pi}{(q-1)} n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}} \right)^{1/q} \preceq n^{\frac{2}{\alpha p}} \tag{4.4.4}$$

bulunur.

Böylece $m = 0$ için (4.4.4) bağıntısı ve $I_1 \preceq 1$ eşitsizliği ile, $\forall z \in G$ için,

$$|P_n(z)| \le \frac{1}{\pi} M_{n,p} (I_1 + I_2) \preceq \frac{1}{\pi} M_{n,p} \left(1 + n^{2/\alpha p}\right) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^{2/\alpha p}} + 1 \right)}_{c_6^{(1)}} M_{n,p} n^{2/\alpha p} = c_6^{(1)} M_{n,p} n^{2/\alpha p}$$

dir. z 'ye göre her iki tarafın supremum'u alınırsa,

$$\|P_n\| \le c_6^{(1)} M_{n,p} n^{2/\alpha p}$$

elde edilir. Burada $c_6^{(1)} = c_6^{(1)}(G,h,p)$ dir.

$m=1$ için duruma bakalım. Yani L üzerinde (4.1.1) interference koşulunu sağlayan bir z_1 noktası vardır. (Teoremin koşullarına göre $\beta \le \alpha$ ve sonuç olarak $\gamma \le 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.) (4.4.1) bağıntısından,

$$I_2 \asymp \left(\iint\limits_{Y(G\setminus D(0,\varepsilon))} \frac{h^{1-q}\left(Y(\xi)\right)}{|\xi - z|^{2q}} d\sigma_\xi \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.4.5}$$

olduğunu biliyoruz. (3.5.7)'den,

$$h(Y(\xi)) = h_0(Y(\xi))(Y(\xi)-z_1)^\gamma$$
$$h^{1-q}(Y(\xi)) = h_0^{1-q}(Y(\xi))(Y(\xi)-z_1)^{(1-q)\gamma}$$

yazarız. (3.5.8)'den,

$$\exists c_0 > 0 : \forall Y(\xi) \in Y\left(G\setminus D\left(0,\varepsilon\right)\right) \text{ için}$$

$$h_0(Y(\xi)) \ge c_0 \Rightarrow h_0^{1-q}(Y(\xi)) \le \left(c_0\right)^{1-q}$$

elde edilir. Bunlar (4.4.5)'de kullanılırsa,

$$I_2 \asymp \left(\iint\limits_{Y(G\setminus D(0,\varepsilon))} \frac{h_0^{1-q}\left(Y(\xi)\right)(Y(\xi)-z_1)^{(1-q)\gamma}}{|\xi - z|^{2q}} d\sigma_\xi \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\preceq \left(\iint\limits_{Y(G\setminus D(0,\varepsilon))} \frac{h_0^{1-q}\left(Y(\xi)\right)}{|\xi - z|^{2q}(Y(\xi)-z_1)^{(q-1)\gamma}} d\sigma_\xi \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\underbrace{\iint\limits_{Y(G\setminus D(0,\varepsilon))} \frac{(\xi - z_1)^{(1-q)\gamma} d\sigma_\xi}{|\xi - z|^{2q}}}_{\tilde{I}_2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $\gamma\left(1-q\right) \ge 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Çünkü $\gamma \le 0$ ve $q>1$'dir. $\tilde{I}_2$'yı z ve z_1'in çeşitli durumları için değerlendirelim. Bunun için sabit bir $\delta > 0$ ve

$$E_1 := \overline{Y(G\setminus D(0,\varepsilon))} \cap \overline{D\left(z_1,\delta\right)} \qquad E_{11} := \left\{\xi \in E_1 : |\xi - z_1| \ge |\xi - z|\right\}$$
$$E_2 := Y(G\setminus D(0,\varepsilon)) \cap \Delta(z_1,\delta) \qquad E_{12} := \left\{\xi \in E_1 : |\xi - z_1| < |\xi - z|\right\}$$
$$E_1 \cup E_2 = Y(G\setminus D(0,\varepsilon))$$

kümelerini ele alalım. Bu kümeleri kullanarak $\tilde{I}_2$ integralini

$$\tilde{I}_2=\iint\limits_{Y(G\setminus D(0,\varepsilon))}\frac{|\xi-z_1|^{(1-q)\gamma}d\sigma_\xi}{|\xi-z|^{2q}}$$
$$=\iint\limits_{E_1}\frac{|\xi-z_1|^{(1-q)\gamma}d\sigma_\xi}{|\xi-z|^{2q}}+\iint\limits_{E_2}\frac{|\xi-z_1|^{(1-q)\gamma}d\sigma_\xi}{|\xi-z|^{2q}}:=I_{21}+I_{22}$$

biçiminde yazalım. Şimdi I_{22}'yi değerlendirelim.

$$R:=\max\{|\xi|:\xi\in Y(G\setminus D(0,\varepsilon))\}$$
$$r:=\max\{|z|:z\in L\}$$

seçilsin. $z_1\in L$ ve $\xi\in E_2$ için $\gamma(1-q)\geq 0$ olduğunu da göz önünde tutarak,

$$\delta^{\gamma(1-q)\geq 0}\leq|\xi-z_1|^{\gamma(1-q)\geq 0}\leq(|\xi|+|z_1|)^{\gamma(1-q)\geq 0}\leq(R+r)^{\gamma(1-q)\geq 0}$$

dır. Buradan,

$$I_{22}=\iint\limits_{E_2}\frac{|\xi-z_1|^{(1-q)\gamma}d\sigma_\xi}{|\xi-z|^{2q}}\preceq\iint\limits_{E_2}|\xi-z|^{-2q}d\sigma_\xi$$

elde edilir. Sağ taraftaki integrali değerlendirelim: $z\in D(z_1,\delta/2)$ olsun,bu durumda $\xi\in E_2$ ve $|z-\xi|\geq\delta/2$ için,

$$\iint\limits_{E_2}|\xi-z|^{-2q}d\sigma_\xi\leq\left(\frac{2}{\delta}\right)^{2q}\sigma(E_2)\qquad(4.4.6)$$

olarak bulunur.

$z\in\Delta(z_1,\delta/2)$ olsun. 4.1.2. Teorem'in koşullarına göre $G\in Q_{\alpha,\beta}$ dır. 3.5.8. Tanım'ın (*i*) koşulu ve 3.5.1. Sonuç'un (iii) koşuluna göre $D(0,\varepsilon)\cup D(z_1,\delta/2)$ bölgesinin dışında genişletilmiş Φ fonksiyonu *lip*α dandır. (4.4.3) ve (4.4.4) eşitsizliklerinin ispatına benzer şekilde $z\in\Delta(z_1,\delta/2)$ için,

$$I_{22}\preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}$$

olduğu görülür.

Buradan (4.4.6) kullanılarak her z için,

$$I_{22}\preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}$$

elde edilir.

I_{21}'i değerlendirelim.

$$I_{21}=\iint_{E_1}\frac{|\xi-z_1|^{(1-q)\gamma}d\sigma_\xi}{|\xi-z|^{2q}}=\iint_{E_{11}}\frac{|\xi-z_1|^{(1-q)\gamma}d\sigma_\xi}{|\xi-z|^{2q}}+\iint_{E_{12}}\frac{|\xi-z_1|^{(1-q)\gamma}d\sigma_\xi}{|\xi-z|^{2q}}:=I_{211}+I_{212}$$

E_{12} üzerinde $|\xi-z_1|<|\xi-z|$ ve $\gamma(1-q)\geq 0$ olduğundan,

$$I_{212}=\iint_{E_{12}}\frac{|\xi-z_1|^{(1-q)\gamma}d\sigma_\xi}{|\xi-z|^{2q}}\leq\iint_{E_{12}}|\xi-z|^{(1-q)\gamma-2q}d\sigma_\xi$$

$\alpha\geq\beta$ olduğundan $\Phi\in lip\alpha$ dır. $D(0,\varepsilon)$ dışında $\Phi\in lip\alpha\Rightarrow\Phi\in lip\beta$ olacağından (4.4.3) ile benzer şekilde $z\in L^*_{1/n}$ ve $\xi\in E_{12}$ için,

$$d(z,\xi)=|\xi-z|\geq|\Phi(\xi)-\Phi(z)|^{1/\beta}\succeq\left(\frac{1}{n}\right)^{1/\beta}=n^{-1/\beta}\Rightarrow|\xi-z|\succeq n^{-1/\beta} \quad (4.4.7)$$

dir. Netice itibariyle,

$$I_{212}\leq\iint_{E_{12}}|\xi-z|^{(1-q)\gamma-2q}d\sigma_\xi\preceq\iint_{|\xi-z|\geq n^{-1/\beta}}|\xi-z|^{(1-q)\gamma-2q}d\sigma_\xi$$

dir. Buradan $\xi-z=re^{i\varphi}$ dönüşümü ile kutupsal koordinatlara geçersek;

$$\iint_{|\xi-z|\geq n^{-1/\beta}}|\xi-z|^{(1-q)\gamma-2q}d\sigma_\xi=\int_0^{2\pi}\left(\int_{d(z,\xi)}^{\infty}r^{(1-q)\gamma-2q+1}dr\right)d\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{(q-1)(\gamma+2)}\left(d(z,\xi)\right)^{(\gamma+2)(1-q)}$$

$$\leq\left(\frac{2\pi}{(q-1)(\gamma+2)}n^{\frac{(q-1)(2+\gamma)}{\beta}}\right)$$

elde edilir. Buradan da,

$$I_{212}\preceq n^{\frac{(2+\gamma)(q-1)}{\beta}} \quad (4.4.8)$$

elde edilir. (4.4.8)'i düzenlersek, $\frac{2}{\alpha}=\frac{2+\gamma}{\beta}$ interference koşulu ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitliğinden yararlanarak,

$$\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}=\frac{q-1}{q}\Rightarrow q-1=\frac{q}{p}$$

ile

$$I_{212}\preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}$$

değerlendirmesi elde edilir.

Son olarak,

$$I_{211} := \iint_{E_{11}} \frac{|\xi - z_1|^{\gamma(1-q)}}{|\xi - z|^{2q}} d\sigma_\xi \preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için z_1, z ve $\xi \in E_{11}$ noktalarının durumunu göz önünde tutalım:

$$\begin{aligned} d_n &:= \min\{|z_1 - \tau| : \tau \in L^*_{1/n}\} \\ r_n &:= \min\{|z_1 - \xi| : \xi \in E_{11}\} \\ \gamma_n &:= \min\{|z - \xi| : \xi \in E_{11}\} \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

olarak seçelim. $2r_n \geq d_n$ olduğu kolayca gösterilebilir. Gerçekten $\xi_1 \in E_{11}$ olduğundan $|z - \xi_1| \leq |z_1 - \xi_1|$ olup,

$$d_n \leq |z - z_1| = |z - \xi_1 + \xi_1 - z_1| \leq |z - \xi_1| + |\xi_1 - z_1| \leq 2|\xi_1 - z_1| = 2r_n$$

elde edilir.

$$r_n := |z_1 - \xi_1|$$

alalım.

Buradan (4.4.3) ve (4.4.7) değerlendirmesinde olduğu gibi,

$$|\Phi(\xi_1)| \geq 1 \text{ ve } \xi_1 \in E_{11} \Rightarrow |\xi_1 - z| \leq |\xi_1 - z_1|$$

olmasından,

$$d(z, \xi_1) = |\xi_1 - z| \succeq |\Phi(\xi_1) - \Phi(z)| \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\beta}$$

yazılır. Buradan da,

$$\begin{aligned} |\xi_1 - z| \succeq n^{-1/\beta} &\Rightarrow |\xi_1 - z_1| \geq |\xi_1 - z| \succeq n^{-1/\beta} \\ &\Rightarrow \underbrace{|\xi_1 - z_1|}_{r_n} \succeq n^{-1/\beta} \Rightarrow r_n \succeq n^{-1/\beta} \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

elde edilir. I_{211}'in değerlendirilmesi için ayrıca aşağıdaki yardımcı kümeleri ele alalım:

$$A := \{\xi : |\xi - z| \geq |z_1 - z|\}, \qquad B := \{\xi : |\xi - z| \leq |z_1 - z|\}$$

$E_{11} \cap A = \{\xi : |z_1 - z| \le |\xi - z| \le |\xi - z_1|\}$ olmak üzere, $\xi \in E_{11} \cap A$ olsun. Bu durumda,

$$|\xi - z| \le |\xi - z_1| \le |z_1 - z| + |z - \xi| \le 2|\xi - z|$$

dir.

Sonuç olarak, $E_{11} \cap A$ kümesi üzerinde;

$$1 \le \frac{|\xi - z_1|}{|\xi - z|} \le 2 \qquad (4.4.11)$$

elde edilir.

$E_{11} \cap B = \{\xi : (|\xi - z| \le |\xi - z_1|) ve (|\xi - z| \le |z - z_1|)\}$ kümesinde de,

$$|\xi - z_1| \le |z_1 - z| + |z - \xi| \le 2|z_1 - z|$$

ve $\gamma(1-q) \ge 0$ olması ile,

$$|\xi - z_1|^{\gamma(1-q)} \le 2^{\gamma(1-q)} |z_1 - z|^{\gamma(1-q)} \qquad (4.4.12)$$

eşitsizliği bulunur. Yukarıda yapılan hesaplamalar ile I_{211}'i değerlendirelim. (4.4.10), (4.4.12) eşitsizliklerini ve (4.4.9) notasyonunundan; $|z - \xi| \ge \gamma_n$ ve $|z_1 - \xi| \ge r_n$ olmasını kullanarak,

$$\begin{aligned}
I_{211} &\le \iint\limits_{E_{11} \cap A} \frac{|\xi - z_1|^{\gamma(1-q)}}{|\xi - z|^{2q}} d\sigma_\xi + \iint\limits_{E_{11} \cap B} \frac{|\xi - z_1|^{\gamma(1-q)}}{|\xi - z|^{2q}} d\sigma_\xi \\
&\le 2^{2q} \iint\limits_{E_{11} \cap A} |\xi - z_1|^{\gamma(1-q)-2q} d\sigma_\xi + 2^{\gamma(1-q)} |z_1 - z|^{\gamma(1-q)} \iint\limits_{E_{11} \cap B} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|^{2q}} \\
&\preceq \iint\limits_{|\xi - z_1| \ge r_n \succeq n^{-1/\beta}} |\xi - z_1|^{\gamma(1-q)-2q} d\sigma_\xi + |z_1 - z|^{\gamma(1-q)} \iint\limits_{|z - \xi| \ge \gamma_n} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|^{2q}} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_{d(z_1,\xi)}^{\infty} r_n^{\gamma(1-q)-2q+1} dr \right) d\varphi + |z_1 - z|^{\gamma(1-q)} \int_0^{2\pi} \left(\int_{d(z,\xi)}^{\infty} (\gamma_n)^{-2q} r_1 dr_1 \right) d\varphi_1 \\
&= \frac{2\pi}{(q-1)(\gamma+2)} r_n^{(\gamma+2)(1-q)} + N |z_1 - z|^{\gamma(1-q)} (\gamma_n)^{-2q+2} \\
&\preceq n^{\frac{(2+\gamma)(q-1)}{\beta}} + |z_1 - z|^{\gamma(1-q)} (\gamma_n)^{-2q+2} = n^{\frac{2q}{\alpha p}} + \left(|z_1 - z|^{-\frac{\gamma}{p}} (\gamma_n)^{-\frac{2}{p}} \right)^q
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teoremin ispatını tamamlamak için geriye kalan,

$$|z_1 - z|^{-\frac{\gamma}{p}} (\gamma_n)^{-\frac{2}{p}} \preceq n^{\frac{2}{\alpha p}} \text{ , ya da } |z_1 - z|^{-\frac{\gamma}{2}} (\gamma_n)^{-1} \preceq n^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.4.13}$$

eşitsizliklerinden birinin sağlandığını göstermekdir. Bunun için 3.5.9.Tanım'ın (ii) koşulunu kullanacağız. Varsayalım ki, $E_1, E_2, E_3, \ldots$ kümelerinin tanımındaki δ sabiti (ii) koşulundaki $\frac{\delta_1^*}{2}$ ile çakışsın öyle ki, (ii)-(3.5.10) ve (ii)-(3.5.11) bağıntıları $\Omega(z_1, 2\delta)$'da sağlansın. O zaman $D(z_1, 2\delta)$'da Y dönüşümünün genişlemesi ile elde edilen Φ fonksiyonu için (ii)-(3.5.10) ve (ii)-(3.5.11) bağıntıları bazı $\tilde{t}_1$ sabitleri için doğrudur. ($\tilde{t}_1 \neq t_1$)

O zaman $|z_1 - z|^{-\frac{\gamma}{2}} (\gamma_n)^{-1} \preceq n^{\frac{1}{\alpha}}$ değerlendirmek için $z \in D(z_1, 2\delta)$ durumunu göz önünde tutmak yeterlidir. Diğer yandan $\gamma_n \geq \delta$ olmasından,

$$(\gamma_n)^{-1} |z_1 - z|^{-\frac{\gamma}{2}} \preceq \delta^{-1} (diamG)^{-\gamma/2}$$

dir.

$\xi_1 \in E_{11}$ ve $|z - \xi_1| = \gamma_n$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \leq |\Phi(z) - \Phi(\xi_1)| &\leq \tilde{t}_1 \max\left(|\xi_1 - z_1|^{\beta-\alpha}; |z - z_1|^{\beta-\alpha}\right) |z - \xi_1|^{\alpha} \\ &= \tilde{t}_1 \max\left(|\xi_1 - z_1|^{\beta-\alpha}; |z - z_1|^{\beta-\alpha}\right) \gamma_n^{\alpha} \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak,

$$(\gamma_n)^{-1} \preceq n^{1/\alpha} \max\left(|\xi_1 - z_1|^{\frac{\beta}{\alpha}-1}; |z - z_1|^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\right)$$

elde ederiz. (4.1.1)'e göre, $\frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{\alpha} - 1$ olduğundan,

$$\frac{(\gamma_n)^{-1}}{|z_1 - z|^{\gamma/2}} \preceq n^{1/\alpha} \max\left(\left|\frac{z_1 - z}{\xi_1 - z_1}\right|^{-\gamma/2}; 1\right) \tag{4.4.14}$$

dir. $\xi_1 \in E_{11}$ için,

$$|z_1 - z| \leq |z - \xi_1| + |z_1 - \xi_1| \leq 2|\xi_1 - z_1|$$

olduğuna dikkat edilmelidir. $\gamma \leq 0$ olduğundan (4.4.14)'den,

$$\frac{(\gamma_n)^{-1}}{|z_1-z|^{\gamma/2}} \preceq n^{1/\alpha}\max\left(2^{-\gamma/2};1\right)=n^{1/\alpha}2^{-\gamma/2}\preceq n^{1/\alpha}$$

olması ile $|z_1-z|^{-\frac{\gamma}{2}}(\gamma_n)^{-1}\preceq n^{\frac{1}{\alpha}}$ ifadesi elde edilir. Böylece I_{211} için,

$$I_{211}\preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}+\left(|z_1-z|^{-\frac{\gamma}{p}}(\gamma_n)^{-\frac{2}{p}}\right)^q\preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}+n^{\frac{2q}{\alpha p}}\preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}$$

elde edilir. Bu da 4.2.1. Teorem'i ispatlar. Yani,

$$\left(\iint_G f^q(\xi,z)d\sigma_\xi\right)^{1/q}\le I_1+I_2\preceq I_1+\tilde{I}_2=I_1+I_{21}+I_{22}=I_1+I_{211}+I_{212}+I_{22}\preceq n^{\frac{2}{\alpha p}}$$

$$|P_n(z)|\le\frac{1}{\pi}M_{n,p}\left(I_1+I_2\right)\preceq c_6M_{n,p}n^{2/\alpha p}$$

olup, z 'ye göre her iki tarafın supremum'u alınırsa,

$$\|P_n\|\le c_6M_{n,p}n^{2/\alpha p}$$

elde edilir. Burada $c_6=c_6(G,h,p)$ dir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.1.1.Önerme'nin İspatı:

$P_n(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i$ n dereceli keyfi polinom olsun. Basit bir analiz ile,

$$\|P_n\|_2=\left[\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2\frac{\pi}{i+1}\right]^{1/2} \tag{4.4.15}$$

olup,

$$\|P_n\|_\infty\le\sum_{i=0}^{n}|a_i| \tag{4.4.16}$$

eşitsizliği açıktır. Cauchy eşitsizliği ve (4.4.15) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}|a_i|&\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\sqrt{1+i}\right)^2\right)^{1/2}\sqrt{\pi}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{|a_i|}{\sqrt{1+i}}\right)^2\right)^{1/2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{(n+1)(n+2)}\|P_n\|_2\le 1\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

bulunur.

Böylece;

$$\|I_n\| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{(n+1)(n+2)}$$

dir.

Ancak $P_n(z)=\sum_{i=0}^{n}(i+1)z^i$ seçilirse, (4.4.16) ve (4.4.17)'deki eşitsizlikler eşitliğe çevrilir. Önerme 1 kanıtlanmış olur.

σ bir pozitif Lebesque ölçüsü ve $S:=\overline{G}$ sonsuz sayıda nokta içeren kompakt bir kume olsun.

$$Q_{n,\sigma}(\xi,z):=\sum_{i=0}^{n}\overline{K_{i,\sigma}(\xi)}K_{i,\sigma}(z)$$

seçelim.

$\pi^2_{n,\sigma}$ uzayında $Q_{n,\sigma}$ çekirdeğine Bergman çekirdek fonksiyonu gözüyle bakabiliriz. [13,p.44] özel olarak $Q_{n,\sigma}$, üretme özelliğine sahiptir.

$$\forall\ P\in\pi_n,\ \forall\ \xi\in\mathbb{C}\ \text{için}\, P(\xi)=\iint_{\overline{G}}P(z)\overline{Q_n(\xi,z)}d\sigma_z \tag{4.4.18}$$

Gerçekte $\{K_{i,\sigma}\}_{i=0}^{n}$ sisteminde Fourier serisinin p genişlemesi ,

yani;

$$P(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_iK_{i,\sigma}(\xi) \tag{4.4.19}$$

ile

$$a_i=\iint_{\overline{G}}P(z)\overline{K_{i,\sigma}(z)}d\sigma_z \tag{4.4.20}$$

elde edilir. (4.4.19)'de (4.4.20) yazılırsa (4.4.18) elde edilir.

4.1.2.Önerme'nin İspatı: 4.1.2.Önerme'nin varsayımı ile, negatif olmayan her n tamsayısı için öyle ki,

$$\max\left\{|K_{n,\sigma}(z)|\ :z\in\overline{G}\right\}\le c_7(n+1)^{\beta}\Rightarrow|K_{n,\sigma}(z)|\le c_7(n+1)^{\beta}$$

olacak şekilde $c_7>0$ sayısı vardır. (4.3.2)'den,

$$\|I_{n,\sigma}\|=\max_{z\in\overline{G}}\left(\sum_{i=0}^{n}|K_{i,\sigma}(z)|^2\right)^{1/2}\le c_7\left[\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{2\beta}\right]^{1/2} \tag{4.4.21}$$

elde edilir. Sağ taraftaki toplamı değerlendirelim,

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{2\beta} \leq \int_{1}^{n+1}(x+1)^{2\beta}\,dx \leq \frac{(n+2)^{2\beta+1}}{2\beta+1} \preceq n^{2\beta+1}$$

dir. Bu değerlendirme (4.4.21)'de yazılırsa,

$$\left\|I_{n,\sigma}\right\| \preceq n^{\beta+\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

4.1.4.Teorem'in ispatı:

4.1.2.Önerme göz önünde tutularak, (4.1.9) ve (4.1.10) koşulları kolayca görülebilir ve $\left\|K_{n,\sigma}\right\|_{\infty,\overline{G}} \succeq n^{\beta}$ eşitsizliği,

$$\left\|I_{n,\sigma}\right\| \succeq n^{\beta+1/2} \tag{4.4.22}$$

sonucunu verir.

4.3.1. Lemma'dan,

$$\left\|I_{n,\sigma}\right\| := \max_{\xi\in\overline{G}}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n}\left|K_{i,\sigma}(\xi)\right|^{2}\right)^{1/2}\right\}$$

olmak üzere $\forall\xi\in\overline{G}$ için,

$$\left\|I_{n,\sigma}\right\| \geq \left[\sum_{i=0}^{n}\left|K_{i,\sigma}(\xi)\right|^{2}\right]^{1/2}$$

dir.

(4.1.9)'a uygun olarak ξ seçilerek, (4.1.10) kullanılırsa

$$\left\|I_{n,\sigma}\right\| \succeq \left[\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{2\beta}\right]^{1/2} \geq \left(\int_{0}^{n}(x+1)^{2\beta}\,dx\right)^{1/2} \succeq n^{\beta+1/2}$$

(4.4.22) elde edilir.

4.1.3. Önerme 4.3.1. Lemma'nın basit bir sonucudur.

4.1.3.Önerme'nin ispatı :

$h(z)=|1-z|^{2}$ ağırlık fonksiyonu ile bir diskte ortonormal polinomların açık formunun belirtildiği (4.1.12) formülü, $[13,p,76]$ da Suetin tarafından kanıtlanmıştır. (4.1.12)' den,

$$\left\|K_{n}\right\|_{\infty} = K_{n}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi(n+1)(n+2)(n+3)}}\sum_{i=0}^{n}(i+1)(n-i+1)$$

elde edilir. Buradan basit bir dönüşüm ile (4.1.13) elde edilir.

4.1.1. Lemma ve (4.1.13) kullanılarak,

$$\|I_n\| = \max\left\{\left(\sum_{i=0}^{n}\left|K_{i,\sigma}(1)\right|^2\right)^{1/2}\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{n}\left|K_{i,\sigma}(1)\right\}^{1/2}$$

olmak üzere,

$$\|I_n\| = \left[\sum_{i=0}^{n}\left|K_i(1)\right|^2\right]^{1/2} = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left[\sum_{i=0}^{n}(i+1)(i+2)(i+3)\right]^{1/2}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

eşitliği ile (4.1.14) bulunur.

4.2.3.Teorem'in İspatı: (4.2.8) ve (4.2.9) ifadelerinden, $i=\overline{1,m}$ için μ_i pozitiftir. Monodromy teoremine göre, [24,V3-Syf 269] $\overline{G}$ 'da sınırlı, G 'de analitik bir $g(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$|g(z)| = \prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}$$

dir.

$P_n \in \pi_n$ ve $\|P_n\|_{p,h,G} \le 1$ olsun ve $f_n(z) = P_n(z)g(z)$ ile gösterilsin. $f_n(z)$, G 'de analitik ve $\overline{G}$ 'da sürekli olduğundan Belyi'nin integral gösteriminden $\forall z \in G$ için,

$$f_n(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f_n(\xi)Y_{\bar{\xi}}}{\left(Y(\xi)-z\right)^2}d\sigma_\xi \tag{4.4.23}$$

yazılır. Y, L eğrisine göre yarıkonform dönüşüm, $\xi = \eta + i\zeta$ ve $Y_{\bar{\xi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + i\frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right)$ dir. Ayrıca,

$$h^*(z) = h_0(z)\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\gamma_i^*}$$

olsun.

Burada $h_0(z)$, (3.5.7)'deki fonksiyon ve

$$\gamma_i^* = \frac{2\beta_i}{\alpha} - 2 \tag{4.4.24}$$

dir. (4.4.23)'den , $\forall z \in G$ için, her iki tarafın modülü alınırsa

$$|f_n(z)| \le \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{|f_n(\xi)| \left|Y_{\bar{\xi}}\right|}{|Y(\xi) - z|^2} d\sigma_\xi$$

dir. Sağ tarafta integral içi $\left(h^*(\xi)\right)^{1/p}$ ile çarpılıp bölünürse,

$$|f_n(z)| \le \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{|f_n(\xi)| \left(h^*(\xi)\right)^{1/p} \left|Y_{\bar{\xi}}\right|}{|Y(\xi) - z|^2 \left(h^*(\xi)\right)^{1/p}} d\sigma_\xi$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliğinden $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$|f_n(z)| \le \frac{1}{\pi} \left[\iint_G \left(|f_n(\xi)| \left(h^*(\xi)\right)^{1/p} \right)^p d\sigma_\xi \right]^{1/p} \left[\iint_G \left(\frac{\left|Y_{\bar{\xi}}\right|}{|Y(\xi) - z|^2 \left(h^*(\xi)\right)^{1/p}} \right)^q d\sigma_\xi \right]^{1/q}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\iint_G |P_n(\xi)|^p |g(\xi)|^p h^*(\xi) d\sigma_\xi \right]^{1/p} \left[\iint_G \frac{\left|Y_{\bar{\xi}}\right|^q \left(h^*(\xi)\right)^{1-q}}{|Y(\xi) - z|^{2q}} d\sigma_\xi \right]^{1/q}$$

elde edilir. Şimdi (4.4.24)'deki ve (4.2.9)' daki değerlendirmeler ile

$$h(z) = h^*(z) \prod_{i=1}^m |z - z_i|^{p\mu_i}$$

olduğunu gösterelim: (3.5.8)'den

$$h^*(z) = h_0(z) \prod_{i=1}^m |z - z_i|^{\gamma_i^*} \Rightarrow h_0(z) = h^*(z) \prod_{i=1}^m |z - z_i|^{-\gamma_i^*}$$

elde edilir. Bu (3.5.7)'de yazılırsa,

$$\begin{aligned} h(z) = h_0(z) \prod_{i=1}^m |z - z_i|^{\gamma_i} &= h^*(z) \prod_{i=1}^m |z - z_i|^{-\gamma_i^*} \prod_{i=1}^m |z - z_i|^{\gamma_i} \\ &= h^*(z) \prod_{i=1}^m |z - z_i|^{\gamma_i - \gamma_i^*} \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

ortaya çıkar. (4.2.9)'un her iki tarafını p ile çarpıp, (4.4.24) kullanılırsa

$$p\mu_i = 2+\gamma_i - \frac{2\beta_i}{\alpha} = 2 - \frac{2\beta_i}{\alpha} + \gamma_i = -\gamma_i^* + \gamma_i$$

bulunur. Bu son eşitlik (4.4.25)'de yerine yazılırsa,

$$h(z) = h^*(z)\prod_{i=1}^{m} |z - z_i|^{p\mu_i}$$

elde edilir. Buradan,

$$|f_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\left[\iint_G |P_n(\xi)|^p \underbrace{\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{p\mu_i} h^*(\xi)}_{h(z)} d\sigma_\xi\right]^{1/p} \left[\iint_G \frac{|Y_{\bar{\xi}}|^q \left(h^*(\xi)\right)^{1-q}}{|Y(\xi)-z|^{2q}} d\sigma_\xi\right]^{1/q}$$

$$= \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\iint_G |P_n(\xi)|^p h(z) d\sigma_\xi\right]^{1/p}}_{\|P_n\|_{p,h,G}} \left[\iint_G \frac{|Y_{\bar{\xi}}|^q \left(h^*(\xi)\right)^{1-q}}{|Y(\xi)-z|^{2q}} d\sigma_\xi\right]^{1/q}$$

dir. $\|P_n\|_{p,h,G} \le 1$ olduğu kabulden bilinmektedir. Sağ taraftaki ikinci integralde ise, h^* için singülerliğin interference koşulu sağlandığından, $z \in L^*_{1/n}$ için 4.2.2. Teorem 'in ispatındaki (4.1.9) ifadesinde yapıldığı gibi, $n^{\frac{2}{\alpha p}}$ ile üstten değerlendirilir. Böylece,

$$|f_n(z)| \le c_{12} n^{\frac{2}{\alpha p}}$$

olacak şekilde bir $c_{12} > 0$ sayısının varlığı ortaya çıkar.

Buradan da $z \in L^*_{1/n}$ için her iki tarafın maksimumu alınırsa,

$$\max_{z\in L^*_{1/n}} |f_n(z)| \le c_{12} n^{\frac{2}{\alpha p}} \Rightarrow \max_{z\in L^*_{1/n}}\left(|P_n(z)|\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right) \le c_{12} n^{\frac{2}{\alpha p}} \qquad (4.4.26)$$

elde edilir.

4.3.2. Lemma'da $M = L$ alınarak ve (4.4.26) kullanılarak (4.2.10) elde edilir. Yani,

$$\max_{z\in L}\left(|P_n(z)|\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right) \le c_8 \max_{z\in L^*_{1/n}}\left(|P_n(z)|\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right) \le c_{12} n^{2/\alpha p}$$

dir.

Geriye kalan (4.2.12) eşitsizliğini kanıtlamaktır. Şimdi eşitsizliği $i=1$ için kanıtlayalım.

$$d_{n,1} := \min\left\{|z_1 - z| : z \in L_{1/n}\right\}$$

olsun. Bu durumda $d_{n,1} > 0$ ve $D(z_i, d_{n,1}) \subseteq \overline{G_{1/n}}$ dir. (4.3.6) eşitsizliğinde,

$$M = T_{n,1} := \left\{z : |z - z_1| = d_{n,1}\right\}$$

seçilsin. O zaman (4.4.26)'dan n_0 sabit edilmiş bir doğal sayı olmak üzere $n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned}\max_{z\in T_{n,1}}\left(|P_n(z)|\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right) &= d_{n,1}^{\mu_1}\max_{z\in T_{n,1}}\left(|P_n(z)|\prod_{i=2}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right)\\ &\asymp d_{n,1}^{\mu_1}\max_{z\in T_{n,1}}|P_n(z)| \preceq n^{2/\alpha p}\end{aligned} \tag{4.4.27}$$

elde edilir.

Maksimum-modülüs prensibinden $\max_{z\in T_{n,1}}|P_n(z)| \geq |P_n(z_1)|$ var ve (4.4.27)'ye göre

$$d_{n,1}^{\mu_1}|P_n(z_1)| \leq d_{n,1}^{\mu_1}\max_{z\in T_{n,1}}|P_n(z)| \preceq n^{2/\alpha p} \Rightarrow d_{n,1}^{\mu_1}|P_n(z_1)| \preceq n^{2/\alpha p} \tag{4.4.28}$$

dir. $d_{n,1}$'i değerlendirelim. seçelim öyle ki, $d_{n,1} = |\xi - z_1|$ olacak şekilde bir $\xi \in L_{1/n}$ seçelim. O zaman 3.5.9.Tanım-(ii)'den

$$\frac{1}{n} = |\Phi(\xi)| - |\Phi(z_1)| \leq |\Phi(\xi) - \Phi(z_1)| \preceq |\xi - z_1|^{\beta_1} = (d_{n,1})^{\beta_1}$$

ise,

$$\frac{1}{n} \preceq (d_{n,1})^{\beta_1} \Rightarrow d_{n,1} \succeq n^{-1/\beta_1} \Rightarrow d_{n,1}^{-\mu_1} \preceq n^{\mu_1/\beta_1}$$

bulunur. Bunu kullanarak,

$$d_{n,1}^{\mu_1}|P_n(z_1)| \preceq n^{2/\alpha p} \Rightarrow |P_n(z_1)| \preceq n^{2/\alpha p}d_{n,1}^{-\mu_1} \Rightarrow |P_n(z_1)| \preceq n^{2/\alpha p}n^{\mu_1/\beta_1} = n^{2/\alpha p + \mu_1/\beta_1}$$

elde edilir. (4.2.9)'dan ve (4.2.11)'den

$$\mu_1 = \frac{2+\gamma_1}{p} - \frac{2}{p}\frac{\beta_1}{\alpha} \Rightarrow \frac{\mu_1}{\beta_1} = \frac{2+\gamma_1}{p\beta_1} - \frac{2}{\alpha p} \Rightarrow \frac{\mu_1}{\beta_1} + \frac{2}{\alpha p} = \frac{2+\gamma_1}{p\beta_1}$$

bulunur. Böylece (4.2.12) eşitsizliği ispatlanır. Yani, $i=1$ için

$$|P_n(z_1)| \preceq n^{2/\alpha p + \mu_1/\beta_1} = n^{\frac{2+\gamma_1}{p\beta_1}} = n^{S_1}$$

ise $z_i, i = 1,\ldots,m$ noktalarında,

$$S_i = \frac{2+\gamma_i}{p\beta_i}$$

olmak üzere,

$$|P_n(z_i)| \le c_{11} n^{S_i}$$

elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.4.Teorem'in İspatı: L bir yarıçember olduğundan, $R = 1 + cn^{-1}$ olmak üzere herhangi bir L_R de yarıçemberdir. Böylece L_R 'de $y_R(\zeta)$ için 3.5.1. Sonuç'daki koşulları sağlayan bir y_R, $y_R(0) = \infty$, yansıması inşa edilebilir. Bu $y_R(\zeta)$'i kullanarak, $P_n(z)$ için Belyi'nin integral gösteriminden $\forall z \in G_R$ için,

$$P_n(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{G_R} \frac{P_n(\zeta) y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)}{(y_R(\zeta) - z)^2} d\sigma_\zeta \tag{4.4.29}$$

bulunur.

$\varepsilon > 0$ için, $U_\varepsilon(z) := \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$ ve genelliği kaybetmeksizin $U_\varepsilon := U_\varepsilon(0) \subset G^*$ olsun. $z_1 \in L$ için, (4.4.29) ifadesinde her iki tarafın modülü alınırsa;

$$|P_n(z_1)| \le \frac{1}{\pi} \iint_{G_R} \frac{|P_n(\zeta)| |y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|y_R(\zeta) - z_1|^2} d\sigma_\zeta$$

elde edilir. Buradan,

$$|P_n(z_1)| \le \frac{1}{\pi} \left[\iint_{U_\varepsilon} \frac{|P_n(\zeta)| |y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|y_R(\zeta) - z_1|^2} d\sigma_\zeta + \iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \frac{|P_n(\zeta)| |y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|y_R(\zeta) - z_1|^2} d\sigma_\zeta \right] =: J_1 + J_2 \tag{4.4.30}$$

biçiminde yazılabilir.

J_1 integralini değerlendirmek için integral içi $h^{1/p}(\zeta)$ ile çarpılıp bölünürse ve ardından $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$J_1 \preceq \left\{ \iint_{U_\varepsilon} h(\zeta) |P_n(\zeta)|^p \right\}^{1/p} \left\{ \iint_{U_\varepsilon} \frac{|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|^q}{h^{q-1}(\zeta) |y_R(\zeta) - z_1|^{2q}} d\sigma_\zeta \right\}^{1/q}$$

elde edilir. Sağ taraftaki ilk integral için

$$\left\{\iint_{U_\varepsilon} h(\zeta)|P_n(\zeta)|^p\right\}^{1/p} \le \frac{1}{\pi}\left\{\iint_G h(\zeta)|P_n(\zeta)|^p\right\}^{1/p} = \pi^{-1}M_{n,p} \preceq M_{n,p}$$

dir. 3.5.1. Sonuç'a göre her $\zeta \in U_\varepsilon$ için $\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right| \asymp |y_R(\zeta)|^2$ ve $|\zeta - z| \ge \varepsilon$ olmak üzere $z \in L$ ve $\zeta \in U_\varepsilon$ için,

$$|y_R(\zeta) - z| \asymp |y_R(\zeta)|$$

vardır. Ayrıca

$$h(\zeta) = h_0(\zeta)|\zeta - z_1|^{\gamma_1} \ge c_0|\zeta - z_1|^{\gamma_1} \ge c_0\varepsilon^{\gamma_1} \succeq 1 \text{ ve } q > 1$$

olmasından

$$h^{1-q}(\zeta) \preceq 1$$

elde edilir. Bu bağıntıları kullanarak,

$$\left\{\iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)\right|^q}{h^{q-1}(\zeta)|y_R(\zeta) - z_1|^{2q}} d\sigma_\zeta\right\}^{1/q} \asymp \left\{\iint_{U_\varepsilon} \frac{|y_R(\zeta)|^{2q}}{h^{q-1}(\zeta)|y_R(\zeta)|^{2q}} d\sigma_\zeta\right\}^{1/q} = \left\{\iint_{U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{h^{q-1}(\zeta)}\right\}^{1/q} \preceq 1$$

ortaya çıkar. Bu değerlendirmelerden,

$$J_1 \preceq M_{n,p} \tag{4.4.31}$$

elde edilir.

$\left|\mathcal{J}_{y_R}\right| := \left|y_{R,\zeta}\right|^2 - \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2$, $y_R(\zeta)$ yansımasının Jakobiyanı olmak üzere, [17]'deki çalışmaya benzer olarak,

$$\left|\mathcal{J}_{y_R}\right| \succeq \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2 \tag{4.4.32}$$

elde edilir.

Bu durumda 3.5.1. Sonuç, (4.4.32) ve 4.3.5. Lemma kullanılarak, J_2 için integral içi $h^{1/p}(\zeta)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$J_2 = \iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \frac{h^{1/p}(\zeta)|P_n(\zeta)|\left|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)\right|}{h^{1/p}(\zeta)|y_R(\zeta) - z_1|^2} d\sigma_\zeta$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğinden $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$J_2 \le \left[\iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \left(|P_n(\zeta)| h^{1/p}(\zeta)\right)^p d\sigma_\zeta\right]^{1/p} \left[\iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \left(\frac{|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{h^{1/p}(\zeta)|y_R(\zeta)-z_1|^2}\right)^q d\sigma_\zeta\right]^{1/q}$$

$$\le \underbrace{\left[\iint_G \left(|P_n(\zeta)| h^{1/p}(\zeta)\right)^p d\sigma_\zeta\right]^{1/p}}_{M_{n,p}} \left[\iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \left(\frac{|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{h^{1/p}(\zeta)|y_R(\zeta)-z_1|^2}\right)^q d\sigma_\zeta\right]^{1/q}$$

dir. Buradan,

$$J_2 \le M_{n,p} \left(\iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \left(\frac{|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{h^{1/p}(\zeta)|y_R(\zeta)-z_1|^2}\right)^q d\sigma_\zeta\right)^{1/q}$$

ve $\frac{q}{p} = q-1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} J_2 &\preceq M_{n,p} \left\{\iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)} |y_R(\zeta)-z_1|^{2q}}\right\}^{1/q} \\ &\preceq M_{n,p} \left\{\iint_{y_R(G_R \setminus U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{|y_R(\zeta) - z_1|^{\gamma_1(q-1)} |\zeta-z_1|^{2q}}\right\}^{1/q} \end{aligned} \tag{4.4.33}$$

değerlendirmesi elde edilir.

Bu integrali değerlendirmek için ilk olarak, $\forall \zeta \in G_R \setminus U_\varepsilon$ ve $z_1 \in L$ için,

$$|\zeta - z_1| \preceq |y_R(\zeta) - z_1| \tag{4.4.34}$$

değerlendirmesini elde edelim. $t \in L_R$ olmak üzere, $|z_1 - t| = d(z_1, L_R)$ olsun. 3.5.1. Sonuç'a göre, $\forall \zeta \in G_R \setminus U_\varepsilon$ ve $z \in L_R$ için,

$$c_1|\zeta - z| \le |y_R(\zeta) - z| \le c_2|\zeta - z| \tag{4.4.35}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} |\zeta - z_1| &\le |\zeta - t| + |y_R(\zeta) - t| + |y_R(\zeta) - z_1| \\ &\le (c_1^{-1}+1)|y_R(\zeta) - t| + |y_R(\zeta) - z_1| \preceq |y_R(\zeta) - z_1| \end{aligned}$$

elde edilir.

$\gamma_1 \le 0$ ise $y_R(\zeta) = \zeta$ kuralına göre değişkenleri değiştirerek ve (4.4.34), (4.4.32), 3.5.1. Sonuç ve (4.4.33) ifadelerini kullanarak,

$$J_2 \preceq M_{n,p}\left\{\iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1(q-1)+2q}}\right\}^{1/q}$$

$$\preceq M_{n,p}\left\{\iint_{y_R(G_R \setminus U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta-z_1\right|^{\gamma_1(q-1)+2q}}\right\}^{1/q} \preceq M_{n,p} d^{-\frac{2+\gamma_1}{p}}\left(z_1, L_R\right) \tag{4.4.36}$$

ve $\gamma_1 > 0$ ise $y_R(\zeta)=\zeta$ kuralına göre değişken değiştirerek ve (4.4.34), (4.4.32) ve 3.5.1. Sonuç ifadelerini kullanarak,

$$J_2 \preceq M_{n,p}\left\{\iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1(q-1)+2q}}\right\}^{1/q}$$

$$\preceq M_{n,p}\left\{\iint_{y_R(G_R \setminus U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta-z_1\right|^{\gamma_1(q-1)+2q}}\right\}^{1/q} \preceq M_{n,p} d^{-\frac{2+\gamma_1}{p}}\left(z_1, L_R\right) \tag{4.4.37}$$

elde edilir. (4.4.31), (4.4.33), (4.4.36) ve (4.4.37) eşitsizliklerinden,

$$\left|P_n(z_1)\right| \preceq M_{n,p} d^{-\frac{2+\gamma_1}{p}}\left(z_1, L_R\right)$$

ortaya çıkar. $G \in Q_{\alpha,\beta_1}$ olduğundan, [17]'deki çalışmaya benzer olarak,

$$\left|P_n(z_1)\right| \preceq M_{n,p} n^{\frac{(2+\gamma_1)}{p\beta_1}} \tag{4.4.38}$$

elde edilir.

(4.4.29) integral gösterimini kullanarak, $z \in G_R$ için,

$$\frac{P_n(z)-P_n(z_1)}{(z-z_1)^{\sigma_1}} = -\frac{1}{\pi}\left(\iint_{G_R} \frac{P_n(\zeta)\, y_{R,\bar\zeta}(\zeta)}{(z-z_1)^{\sigma_1}\left(y_R(\zeta)-z\right)^2} d\sigma_\zeta + \iint_{G_R} \frac{P_n(\zeta)\, y_{R,\bar\zeta}(\zeta)}{(z-z_1)^{\sigma_1}\left(y_R(\zeta)-z_1\right)^2} d\sigma_\zeta\right)$$

yazılır.

Buradan da,

$$\left|\frac{P_n(z)-P_n(z_1)}{(z-z_1)^{\sigma_1}}\right| \le \frac{1}{\pi}\iint_{G_R}\frac{|P_n(\zeta)||y_R(\zeta)-z||y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|z-z_1|^{\sigma_1}|y_R(\zeta)-z||y_R(\zeta)-z_1|^2}d\sigma_\zeta$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint_{G_R}\frac{|P_n(\zeta)||y_R(\zeta)-z_1||y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|z-z_1|^{\sigma_1}|y_R(\zeta)-z_1||y_R(\zeta)-z|^2}d\sigma_\zeta$$

$$\le \frac{1}{\pi}\iint_{G_R}\frac{|P_n(\zeta)||z-z_1|^{1-\sigma_1}|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|y_R(\zeta)-z||y_R(\zeta)-z_1|^2}d\sigma_\zeta \tag{4.4.39}$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint_{G_R}\frac{|P_n(\zeta)||z-z_1|^{1-\sigma_1}|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|y_R(\zeta)-z_1||y_R(\zeta)-z|^2}d\sigma_\zeta =: A(z;z_1)+B(z;z_1)$$

elde edilir. İntegrallerin z ve z_1 noktalarına göre simetrik olduğu, $A(z;z_1)$ ve $B(z;z_1)$ integrallerinin tanımlanmasından ortaya çıkar. Buna göre- $A(z;z_1)$ ve $B(z;z_1)$ integralleri paralel değerlendirilecektir. $A(z;z_1)$ ve $B(z;z_1)$ integrallerini değerlendirmek için, integral içinin pay ve paydası $|\zeta-z_1|^{\gamma_1/p}$ ile çarpılarak 4.3.5. Lemma ve Hölder eşitsizliği kullanılacaktır. Sonuç olarak, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$A(z;z_1)=\frac{1}{\pi}\iint_{G_R}\frac{|P_n(\zeta)||z-z_1|^{1-\sigma_1}|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|y_R(\zeta)-z||y_R(\zeta)-z_1|^2}d\sigma_\zeta$$

$$\preceq M_{n,p}\left\{\left(\iint_{U_\varepsilon}+\iint_{G_R\setminus U_\varepsilon}\right)\frac{|z-z_1|^{q(1-\sigma_1)}|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|d\sigma_\zeta}{|\zeta-z_1|^{\gamma_1(q-1)}|y_R(\zeta)-z|^q|y_R(\zeta)-z_1|^{2q}}\right\}^{1/q}$$

$$=: M_{n,p}\{A_1(z;z_1)+A_2(z;z_1)\}^{1/q}$$

(4.4.40)

$$B(z;z_1)=\frac{1}{\pi}\iint_{G_R}\frac{|P_n(\zeta)||z-z_1|^{1-\sigma_1}|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|y_R(\zeta)-z_1||y_R(\zeta)-z|^2}d\sigma_\zeta{}^{\imath}$$

$$\preceq M_{n,p}\left\{\left(\iint_{U_\varepsilon}+\iint_{G_R\setminus U_\varepsilon}\right)\frac{|z-z_1|^{q(1-\sigma_1)}|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)|d\sigma_\zeta}{|\zeta-z_1|^{\gamma_1(q-1)}|y_R(\zeta)-z_1|^q|y_R(\zeta)-z|^{2q}}\right\}^{1/q}$$

$$=: M_{n,p}\{B_1(z;z_1)+B_2(z;z_1)\}^{1/q}$$

bulunur.

3.5.1. Sonuç'a göre $\forall\zeta \in U_\varepsilon$ için $\left|y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)\right| \asymp \left|y_R(\zeta)\right|^2$ ve $\left|\zeta - z_1\right| \asymp 1$ olmasından, $z, z_1 \in L$ ve $\zeta \in U_\varepsilon$ için $\left|y_R(\zeta)\right| \asymp \left|y_R(\zeta) - z\right| \asymp \left|y_R(\zeta) - z_1\right|$ vardır. Bu bağıntılar ile,

$$A_1(z;z_1) \preceq 1 \quad \left(B_1(z;z_1) \preceq 1\right) \tag{4.4.41}$$

elde edilir.

$A_1(z;z_1) \preceq 1$ $\left(B_1(z;z_1) \preceq 1\right)$ değerlendirmek için, z ve z_1 noktalarının L üzerindeki farklı durumlarını ele alacağız. Bunun için:

$$F_1 := y_R(G_R \setminus U_\varepsilon), \quad E_0 := E_1 \cup E_2$$

$$F_{11} := \left\{\zeta \in F_1 : \left|\zeta - z_1\right| \le \frac{1}{2}\left|z - z_1\right|\right\}, \quad F_{11}^c := \left\{\zeta \in F_1 : \left|\zeta - z_1\right| \succeq \frac{1}{2}\left|z - z_1\right|\right\}$$

$$F_{12} := \left\{\zeta \in F_1 : \left|\zeta - z\right| \le \frac{1}{2}\left|z - z_1\right|\right\}, \quad F_{12}^c := \left\{\zeta \in F_1 : \left|\zeta - z\right| \succeq \frac{1}{2}\left|z - z_1\right|\right\}$$

$$E_1 := \left\{y_R(G_R \setminus U_\varepsilon) \cap U_\delta(z_1)\right\}, \quad E_2 := \left\{y_R(G_R \setminus U_\varepsilon) \setminus U_\delta(z_1)\right\}, \quad 0 < \delta < \delta_0(G)$$

$$E_{01} := \left\{\zeta \in E_0 : \left|\zeta - z_1\right| \ge \frac{1}{2}\left|\zeta - z\right|\right\}, \quad E_{01} := \left\{\zeta \in E_0 : \left|\zeta - z_1\right| < \frac{1}{2}\left|\zeta - z\right|\right\}$$

seçelim.

A. $\left|z - z_1\right| \ge \delta > 0$ olsun. Y_R için 3.5.1. Sonuç ve (4.4.34) göz önünde tutularak,

$$A_2(z;z_1) \preceq \iint_{F_1} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y_R(\zeta) - z_1\right|^{\gamma_1(q-1)}\left|\zeta - z\right|^q\left|\zeta - z_1\right|^{2q}}\xi$$

$$\le \left(\iint_{F_{11}} + \iint_{F_{12}} + \iint_{F_{11}^c} + \iint_{F_{12}^c}\right) \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y_R(\zeta) - z_1\right|^{\gamma_1(q-1)}\left|\zeta - z\right|^q\left|\zeta - z_1\right|^{2q}}$$

elde ederiz. $\zeta \in F_{11}$ için,

$$\left|z - z_1\right| \ge \left|\left|z - z_1\right| - \left|\zeta - z_1\right|\right| \ge \frac{1}{2}\left|z - z_1\right|$$

ve $\zeta \in F_{12}$ için,

$$\left|\zeta - z_1\right| \ge \frac{1}{2}\left|z - z_1\right|$$

olduğundan,

$$\left(\iint_{F_{11}}+\iint_{F_{12}}\right)\frac{d\sigma_\zeta}{|y_R(\zeta)-z_1|^{\gamma_1(q-1)}|\zeta-z|^q|\zeta-z_1|^{2q}}\preceq\iint_{F_{11}}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z_1|^{2q+\gamma_1(q-1)}}+\iint_{F_{12}}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|^q}$$

$$\preceq n^{\frac{(\gamma_1+2)(q-1)}{\beta_1}}+n^{\frac{q-2}{\alpha}}$$

$$\left(\iint_{F_{11}^c}+\iint_{F_{12}^c}\right)\frac{d\sigma_\zeta}{|y_R(\zeta)-z_1|^{\gamma_1(q-1)}|\zeta-z|^q|\zeta-z_1|^{2q}}\preceq 1$$

olması ile,

$$A_2(z;z_1)\preceq n^{\frac{(\gamma_1+2)(q-1)}{\beta_1}}+n^{\frac{q-2}{\alpha}} \tag{4.4.42}$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$B_2(z;z_1)\preceq\iint_{F_1}\frac{d\sigma_\zeta}{|y_R(\zeta)-z_1|^{\gamma_1(q-1)}|\zeta-z_1|^q|\zeta-z|^{2q}}$$

$$\leq\left(\iint_{F_{11}}+\iint_{F_{12}}+\iint_{F_{11}^c}+\iint_{F_{12}^c}\right)\frac{d\sigma_\zeta}{|y_R(\zeta)-z_1|^{\gamma_1(q-1)}|\zeta-z_1|^q|\zeta-z|^{2q}}$$

dir.

$$\left(\iint_{F_{11}}+\iint_{F_{12}}\right)\frac{d\sigma_\zeta}{|y_R(\zeta)-z_1|^{\gamma_1(q-1)}|\zeta-z_1|^q|\zeta-z|^{2q}}\preceq\iint_{F_{11}}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z_1|^{\gamma_1(q-1)+q}}+\iint_{F_{12}}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|^{2q}}$$

$$\preceq n^{\frac{\gamma_1(q-1)+q-2}{\beta_1}}+n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}$$

ve

$$\left(\iint_{F_{11}^c}+\iint_{F_{12}^c}\right)\frac{d\sigma_\zeta}{|y_R(\zeta)-z_1|^{\gamma_1(q-1)}|\zeta-z_1|^q|\zeta-z|^{2q}}\preceq 1$$

olduğundan,

$$B_2(z;z_1)\preceq n^{\frac{\gamma_1(q-1)+q-2}{\beta_1}}+n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}} \tag{4.4.43}$$

dir. Buradan da (4.4.40), (4.4.41), (4.4.42), ve (4.4.43) bağıntıları ile,

$$A(z;z_1)\preceq M_{n,p}n^{2/\alpha p},\quad B(z;z_1)\preceq M_{n,p}n^{2/\alpha p} \tag{4.4.44}$$

elde edilir.

B. $\delta > |z - z_1| \geq d(z_1, L_R)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$|z - z_1|^{\varepsilon} \leq c(\varepsilon)\left(|\zeta - z|^{\varepsilon} + |\zeta - z_1|^{\varepsilon}\right)$$

olduğunu göz önünde tutarak,

$$\begin{aligned} A_2(z;z_1) &\preceq \iint_{F_1} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)+2q} |\zeta - z|^{q\sigma_1}} + \iint_{F_1} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)+2q-(1-\sigma_1)q} |\zeta - z|^{q}} \\ &\leq \iint_{E_{01}} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^{\gamma_1(q-1)+2q+q\sigma_1}} + \iint_{E_{01}} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^{\gamma_1(q-1)+2q-(1-\sigma_1)q+q}} \\ &+ \iint_{E_{02}} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)+2q+q\sigma_1}} + \iint_{E_{02}} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)+2q-(1-\sigma_1)q+q}} \preceq n^{\frac{(\gamma_1+2)(q-1)+q\sigma_1}{\beta_1}} \end{aligned} \tag{4.4.45}$$

elde edilir. Benzer bir şekilde $B_2(z;z_1)$ için de,

$$B_2(z;z_1) \preceq n^{\frac{(\gamma_1+2)(q-1)+q\sigma_1}{\beta_1}} \tag{4.4.46}$$

değerlendirmesi yapılır. Böylece (4.4.40)'da (4.4.45) ve (4.4.46) ifadelerini yazılıp, (4.4.41) ve (4.2.13) ifadeleri kullanılırsa,

$$A(z;z_1) \preceq M_{n,p} n^{\frac{\gamma_1+2+\sigma_1}{\beta_1}} \preceq M_{n,p} n^{\frac{2}{\alpha p}} \tag{4.4.47}$$

ve

$$B(z;z_1) \preceq M_{n,p} n^{\frac{\gamma_1+2+\sigma_1}{\beta_1}} \preceq M_{n,p} n^{\frac{2}{\alpha p}} \tag{4.4.48}$$

elde edilir.

C. $|z - z_1| \leq d(z_1, L_R)$ olsun. (4.4.40) bağıntısı ile,

$$A_2(z;z_1) \preceq \iint_{G_R \setminus U_\varepsilon} \frac{d^{q(1-\sigma_1)}(z_1, L_R) d\sigma_\zeta}{d^{\gamma_1(q-1)+3q}(z_1, L_R)} \preceq n^{\frac{(\gamma_1+2)(q-1)+q\sigma_1}{\beta_1}} \tag{4.4.49}$$

ve

$$B_2(z;z_1) \preceq n^{\frac{(\gamma_1+2)(q-1)+q\sigma_1}{\beta_1}} \tag{4.4.50}$$

ortaya çıkar.

(4.4.40) ifadesinde (4.4.49) ve (4.4.50) ifadeleri yazılır ve (4.4.41) ve (4.2.13) ifadeleri kullanılırsa,

$$A(z;z_1) \preceq M_{n,p} n^{\frac{2}{\alpha p}}, \quad B(z;z_1) \preceq M_{n,p} n^{\frac{2}{\alpha p}} \tag{4.4.51}$$

elde edilir.

Böylece (4.4.51), (4.4.38) ve (4.4.39) ifadelerinden (4.2.14) ifadesi ispatlanır.

4.1.5.Teorem'in İspatı : $K_n(z)$ için $M_{n,2} \equiv 1$ olduğundan, 4.2.4. Teorem'den, 4.1.5. Teorem ifadesi ispatlanır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde ele alınan konu ile ilgili sonuçlar, Bulgular ve Tartışma bölümünde

4.1.Ortogonal Polinomların Bölgenin Kapanışında Değerlendirilmesi

4.2.Keyfi Polinomların, Sınır Eğrisinin ve Ağırlık Fonksiyonunun İnterference Koşulu Altındaki Değerlendirmesi

başlıkları altında toplanmıştır. Ayrıca

4.3.Yardımcı Sonuçlar

bölümünde de esas teoremlerin ispatlarında kullanılacak lemmalar ve ispatları verilmiştir.

Ağırlık fonksiyonu (3.5.7) deki gibi tanımlanmak üzere,

1) 4.1.1. Teorem'de $G \in Q_\alpha$, $1/2 \le \alpha \le 1$, ve $i = \overline{1,m}$ için (3.5.7) deki γ_i' ler sıfıra eşit olduğunda $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün n doğal sayıları için $|K_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı , bölgeyi belirleyen α' ya bağlı olarak hesaplanmıştır.

2) 4.1.2. Teorem de $G \in Q_{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m}$, $1/2 \le \beta_i \le \alpha \le 1$ $i = \overline{1,m}$ için $1 + \frac{\gamma_i}{2} = \frac{\beta_i}{\alpha}$ interfence koşulu sağlandığında $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün n doğal sayıları için $|K_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı , bölgeyi belirleyen $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m$'lere bağlı olarak hesaplanmıştır.

Başka bir deyişle, 4.1.1. Teorem ve 4.1.2. Teorem'de $\overline{G}$'da, $|K_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı , interference koşulu altında $z_i \in L$ kritik noktalarında, değişmez.

3) 4.1.3. Teoerem'de $\|I_{n,h}\|$ normunun değerlendirilmesi verilmiş. Bu değerlendirmede, (4.1.3.2) ile (4.1.1.3) genişlemesinin kesinliği incelenmiştir.

4) 4.1.4. Teorem'de ise 4.1.4.1 ve 4.1.4.2 koşulları sağlandığında belirli bir α sayısı için $\|I_{n,h}\| \preceq n^\alpha$ ise, α'nın $\beta + \frac{1}{2}$'den küçük olamayacağı değerlendirilmesi elde edilmiştir.

5) 4.1.5. Teorem'de, $G \in Q_{\alpha,\beta_1}$, $0 < \beta_1 \le \alpha \le 1$ bölgesinde $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün n doğal sayıları için $1+\frac{\gamma_1}{2} < \frac{\beta_1}{\alpha}$ koşulu altında $|K_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı değerlendirilmiştir.

6) 4.2.1. Teorem'de keyfi P_n, $\deg P_n \le n$ polinomlarının sınır eğrisinin ve ağırlık fonksiyonunun interference koşulu altında $\|P_n\|_L$ değerlendirmesi elde edilmiştir.

7) 4.2.2. Teorem'de, $G \in Q_\alpha$, $1/2 \le \alpha \le 1$, bölgesinde $h(z)$ ağırlık fonksiyonu ile herhangi bir $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ polinomlar dizisi için $\overline{G}$'da modülce değerlendirilmesi elde edilmiştir.

8) 4.2.3. Teorem'de, $p > 1$, $G \in Q_{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m}$, $i = \overline{1,m}$, $1/2 \le \beta_i \le \alpha \le 1$ için $h(z)$ ağırlık fonksiyonu ile (4.2.3.1) koşulu altında 4.2.2. Teorem'deki değerlendirmenin benzeri yapılmıştır.

9) 4.2.4. Teorem'de, $p > 1$, $G \in Q_{\alpha,\beta_1}$, $\frac{1}{2} \le \beta_1 \le \alpha \le 1$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere herhangi bir P_n, $\deg P_n \le n$ polinomu için (4.1.5.1) koşulu altında $\overline{G}$'da, $|P_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı değerlendirilmiştir.

5.2. ÖNERİLER

Ağırlık fonksiyonu (3.5.7) deki gibi tanımlanmak üzere,

1) $G \in Q_\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$, ve $i = \overline{1,m}$ için (3.5.7) deki γ_i' ler sıfıra eşit olduğunda $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün n doğal sayıları için $|K_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı , bölgeyi belirleyen α ' ya bağlı olarak nasıl değişecektir?

2) $G \in Q_{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m}$, $0 < \alpha < 1/2$ $i = \overline{1,m}$ için sınır eğrisi ile ağırlık fonksiyonu arasında nasıl bir ilişki olmalıdır? Buna bağlı olarak $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün n doğal sayıları için $|K_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı , bölgeyi belirleyen $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_m$ lere bağlı olarak nasıl değişecektir?

KAYNAKLAR

[1] Carleman, T. "Uber die Approximation Analytischer Functionen durch Lineare Aggregate van Vofgegebenen", Potezen-Aktiv mat.,astron achfys.,**17, no:9**:, 1-30, (1922)

[2] Szegö, G. "Orthogonal polynomials", Amer. Math. Soc. Colog. Publ., **vol. 23**:, A.M.S.,Providence, R.I.,(1939)

[3] Korovkin, P.P. "The Asymptotic Representation of Polynomials Orthogonal over a Region", Dokl. Akad. Nauk SSSR, **58**:, 1883-1885. (1947)

[4] Geronimus, Y.L. "Theory of Orthogonal Polynomials, Gostekhizdat. MR **12**:, 177., (1950)

[5] Rosenbloom, P.C., Warschawskii, S.E., "Approximation by Polynomials, Lectures on Functions of a Complex Variable", Univ. Of Michagen Press, MR17, 605:,287-302. (1955)

[6] Kuzmina, A.L. "Asymptotic representation of the orthogonal polynomials along a piecewise analytic curve.", In: Func. Anal. and Theory of Function. Kazan (1963) [in Russian]

[7] Suetin, P.K. "Main properties of the orthogonal polynomials along a circle", Uspekhi Mat. Nauk, **vol. 21, no:2(128)**:, 41-88, (1966) [in Russian]

[8] Suetin, P.K. "Some estimation for orthogonal polynomials along a circle under the singularity of the weight and circle", Siberian Mat. J., **vol. 8, no:5**:, 1070-1078, (1967) [in Russian]

[9] Suetin, P.K. "Polynomials orthogonal over a region and Bieberbach polynomials", Providence.Rhode Island, American Math. Society, **91**, (1974)

[10] Belyi, V.I. "Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary", Math.USSR-Sb., **31**:, pp.289-317, (1977)

[11] Abdullayev, F.G., Andrievskii, V.V. "On the orthogonal polynomials in the domains with K-quasiconformal boundary", Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR., Ser. FTM, **1**, 3-7, (1983) [in Russian]

[12] Abdullayev, F.G. "On Orthogonal Polynomials in Domains with Quasiconcormal Boundary",(Russian) Dissertation (Donetsk). (1986)

[13] Gaier, D. "Lectures on Approximation Theory in a Complex Domain",[Russian translation] Mir, Moscow, (1986)

[14] Gaier, D., "On the Convergence of Bieberbach Polynomials in Regions with Corners", Const. Approx.**4**:, 289-305, (1988)

[15] Andrievskii, V.V., Belyi, V.I., Dzyadyk, V.K. "Conformal invariants in constructive theory of functions of complex plane" Atlanta:World Federation Publ.Com. (1995).

[16] Abdullayev, F.G. "On the Convergence of the Generalized Bieberbach Polynomials in Regions with Non-zero Angles", Acta Math. Hungar.,**77(3):**, 223-246, (1997)

[17] Abdullayev, F.G. "On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane (Part1)", Ukr. Math. J. **Vol. 52, no:12:**, pp. 1807 –1817., (2000) (Trans. from Ukr. Mat. Zh., **Vol. 52, no:12**:, pp. 1587-1595)

[18] Abdullayev, F.G. "On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane (Part II)" Ukr. Math. J. **Vol. 53, no:1**:, pp. 1 – 14, (2001) (Trans. from Ukr. Mat. Zh., **Vol. 53, no:1**:, pp. 3-13)

[19] Abdullayev, F.G. "On some properties of orthogonal polynomials over an area in domains of the complex plane (Part III)", Ukr.Math.. J., **12**:, p. 1588-1599, (2001)

[20] Abdullayev, F.G. "On the Interference of the Weight and Boundary Contour for Orthogonal Polynomial over the Region", J.C.A.A.(2001)

[21] Lesley, F. D. "Conformal mapping of domains satisfying wedge conditions", Proc. Amer. Math. Soc., **93**:, 483-488, (1985)

[22] Belyi, V.I.,Pritsker, I. E. "On the curved wedge condition and the continuity moduli of conformal mapping", Ukr. Math.Zh.,**Vol.45, no:6**:, pp.763-769., (1993)

[23] Andrievskii, V.V., Blatt, H.P. "Zeros of Polynomials in the Complex Plane", Katholische Universitat, Eichstatt, (1997)

[24] Markushevich, A.I. " Theory of Functions of a Complex Variable", Chelsea Publishing Company., New York, Three volumes in one, (1985)

[25] Berezanskii, Yu.M., Us, G.F., Sheftel, Z.G., "Functional Analysis", [In Russian], Nauka, Moscow, (1981)

[26] Rudin, W. "Real and Complex Analysis", Mc Graw-Hill, (1974)

[27] Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M. "YM1,Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi", 1. Baskı, Alemdar O., Literatür, 470 s. , (1999)

[28] Başkan, T. "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", 3. Baskı, Vipaş, 360 s. , (1998)

[29] Andrievskii, V.V. "Uniform Convergence of Bieberbach Polynomials in Domains with Piecewise Quasiconformal Boundary, In Theory of Mappings and Approximation of Functions" (G.D.Suvarov ed.) Naukova Dumka, Kiev, (Russian), 3-18. (1983)

[30] Ahlfors, L.V. "Lectures on Quasiconformal Mappings", Von Nosrand Company, USA, (1987)

[31] Ahlfors, L.V. "Complex Analysis", Second Edition, McGrow Hill,Ltd. Tokyo. (1996)

[32] Depree, J.D., Gehring, C.C. "Elements of Complex Analysis", Addison Wesley Publishing Company,USA, (1969)

[33] Gaier, D. "Estimates of Conformal Mappings near the Boundary", Indiana Univ. Math. **J.21**:, 581-595, (1972)

[34] Goldstein, V.M.,. The Degree of Summability of Generalized Derivatives of Plane Quasiconformal Homeomorphisms, Soviet Math. Dokl.**21**:,10-13, (1980)

[35] Gleason, A.M. "Fundementals of Abstract Analysis", Addison-Wesley Publishing Company, USA, (1966)

[36] Lehto, O., Virtanen, K.I.. "Quasiconformal Mappings in the Plane", Springer-Verlag, Berlin, (1973)

[37] Rikman, S. "Characterisation of Quasiconformal arcs", Ann. Acad. Sci. Feen Ser. A. Mathematica, 395p, (1966)

[38] Saff, E.B., Snider, A.D. "Fundamentals of Complex Analysis", Prentice Hall, Upper saddle River, New Jersey, (1993)

[39] Simirnov, V.I., Lebedev, N.A. "Functions of a Complex Variable", The M.I.T. Press,(in Russian), (1968)

[40] Stahl, H., Totik, V. "General orthogonal polynomials", Cambridge University Pres,250 p.,(1992)

[41] Walsh, J.L. "Interpolation and Approximation by Rational Functions in the complex Plane", AMS,b Providence, RI, (1969)

[42] Hayman, W.K., Kennedy, P.B. "Subharmonik Functions", Mir,Moscow, (1980)

[43] Stoilov, S. "Theory of Functions of Complex Variables", **Vol. 2**, Izd. Inostr. Liter., Moscow, (1962)

[44] Goluzin, G.M. "Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, (1952)

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Şanlıurfa'nın Siverek ilçesinde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Siverek'te tamamladım. 2000 yılında Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programını bitirerek, aynı yıl yüksek lisans programına girdim. 25 Aralık 2001 tarihinden bu yana Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalına bağlı olarak, Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi kadrosunda görev yapmaktayım.