AĞIRLIKLI TELİN TİTREŞİMİNDE OLUŞAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI

ÖZGE TUZKAYA

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hanlar MEMMEDOV

MERSİN
ARALIK-2005

ÖZ

Bu çalışmada, ağırlıkla donatılmış bir telin enine titreşimi incelenir. Bu diferansiyel denklem Fourier dönüşümü ile sınır koşullarında spektral parametre bulunduran Sturm-Liouville problemine indirgenir ve Liouville dönüşümü yardımıyla bu problem daha da basitleştirilip çeşitli koşullar altında, bu sınır –değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları incelenir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel denklem, Sturm-Liouville denklemi, özdeğer, özfonksiyon, sönümlü telin titreşimi

ABSTRACT

In this study, transverse vibrations of a string which equipped with a mass are considered. By Fourier transformation the corresponding equation is reduced to a Sturm-Liouville problem with non-linear spectral parameter in the boundary conditions and this problem is become easy by Liouville transformation and we study at this boundary value problems eigenvalues and eigenfunctions under various conditions.

Keywords: Differantial equations, Sturm-Liouville equation, eigenvalue, eigenfunction, damped string vibrations.

TEŞEKKÜR

Bu tezin konusunun belirlenmesi, gereken bilimsel kaynakların ve bilgilerin elde edilmesinde yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Hanlar MEMMEDOV' a, kitaplarından yararlandığım Yrd. Doç. Dr. Hamza MENKEN' e teşekkür ederim.

Bu çalışmamın oluşmasında gösterdikleri ilgi ve destekleri için Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ ve Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH' a teşekkür ederim.

Yüksek Lisans ders ve tez aşamasında bilgilerini ve yardımlarını esirgemeyen tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca beni daima destekleyen sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
C^n	Kendisi ve n. Dereceden türevi sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
C[0,1]	[0,1] aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
w_2^2	İkinci mertebeden türevi L_2'den olan fonksiyonlar kümesi
ℓ(y)	Lineer diferansiyel ifade
L	Diferansiyel operatör
$U_k(y)$	Sınır koşulları
$\Delta(\lambda)$	L operatörünün karakteristik denklemi
λ	Özdeğer
$A(s)$	Telin sertlik katsayısı
p	Telin sönüm katsayısı
l	Telin uzunluğu
μ	Telin ucundaki ağırlığın kütlesi
ν	Ağırlığın sönüm katsayısı
$u(s,t)$	t anında telin enine yer değişimi

1.GİRİŞ

Sınır koşulu spektral parametre içeren sınır-değer problemleri fiziksel uygulamalarından dolayı incelenmesi gerekir. Bu tür problemler önce M. Poisson' un dikkatini çekmiştir [17]. Kısmi diferansiyel denklem için sınır koşulu zamana göre türev (veya yöne göre) içerdiğinde değişkenlere ayırma yöntemi uygulanırsa sınır koşulunda spektral parametre içeren sınır problemi ile karşılaşılır. Uçlarında ağırlıklı yük asılmış telin (veya çubuğun) titreşimi ile ilgili sınır değer problemi [6] da ele alınmıştır. Burada bir ucu bağlı diğer ucu da yükle donatılmış, homojen olmayan bir telin veya sicimin enine küçük titreşimleri

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A(s)\frac{\partial u}{\partial s}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-p\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (1.1)$$

denklemi ile ve

$$u(0,t)=0 \qquad (1.2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=l}+\upsilon\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{s=l}+\mu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{s=l}=0 \qquad (1.3)$$

sınır koşulları ile ifade edilir.

Burada $-p\frac{\partial u}{\partial t}$ terimi sicimi etkileyen titreşim kuvvetidir, yani sicim bir ortamda titreşiyorsa $\frac{\partial u}{\partial t}$ hızına orantılı (durdurmaya yönelik) direnç kuvveti oluşur ve p orantılılık katsayısıdır. $A(s)$ homojen olmayan sicimin sertliğe bağlı olarak yoğunluğudur. $\mu > 0$ telin ucuna bağlanmış yükün kütlesi ve υ' de bu yükün titreşimini durdurmaya yönelik sönme katsayısıdır. u(s,t) ise bu telin enine yerdeğişimi, ℓ de telin uzunluğudur.

Ele alınan bu probleme $u(s,t)=\vartheta(\lambda,s)e^{i\lambda t}$ dönüşümünü uygulayacak olursak;

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\vartheta'(\lambda,s)e^{i\lambda t} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=i\lambda\vartheta(\lambda,s)e^{i\lambda t} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\lambda^2\vartheta(\lambda,s)e^{i\lambda t}$$

olduğundan (1.1)'i ;

$$\left(A(s)\vartheta'(\lambda,s)\right)' e^{i\lambda t}+\lambda^2\vartheta(\lambda,s)e^{i\lambda t}-ip\lambda\vartheta(\lambda,s)e^{i\lambda t}=0$$

şeklinde yazabiliriz. Her iki tarafı $e^{i\lambda t}$ ' ye bölecek olursak

$$\left(A(s)\vartheta'(\lambda,s)\right)'+\lambda^2\vartheta(\lambda,s)-ip\lambda\vartheta(\lambda,s)=0 \tag{1.4}$$

denklemini elde ederiz. Aynı şekilde (1.2) denklemine bu dönüşümü uygulayalım.

$$u(0,t)=0=\vartheta(\lambda,0)e^{i\lambda t}$$

olur, her iki tarafı $e^{i\lambda t}$ ' ya bölelim.

$$\vartheta(\lambda,0)=0 \tag{1.5}$$

eşitliğini elde ederiz. (1.3) koşulundan ise aynı yöntemle,

$$\vartheta'(\lambda,l)+i\nu\lambda\vartheta(\lambda,l)-\mu\lambda^2\vartheta(\lambda,l)=0 \tag{1.6}$$

denklemini elde ederiz.

Liouville dönüşümü, yardımıyla bu sistem, aşağıda verilen sınır koşulunda spektral parametre içeren:

$$y''(\lambda,x)+(\lambda^2-i\lambda p-q(x))\,y(\lambda,x)=0$$
$$y(\lambda,0)=0$$
$$y'(\lambda,a)+(-m\lambda^2+i\alpha\lambda+\beta)\,y(\lambda,a)=0$$

Sturm-Liouville problemine indirgendi ve bu çalışmada bazı koşullar altında bu problemin spektral özellikleri incelendi.

Ayrıca, benzer problem [18]' de incelenir ve bu çalışmada:

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < 1$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(0) + y'(0) = 0$$

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)y(1) + y'(1) = 0$$

şeklinde verilmiş bir sınır-değer probleminin $q(x)$ reel değerli [0,1]' de sürekli olan bir fonksiyon ve $\alpha_2 > 0,\ \beta_2 < 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ koşulları için reel özdeğerlerin $R_0 \geq 0$ merkezli dairenin dışında yerleştiği gösterilmiştir.

Ayrıca tezde (1.1)-(1.3) problemine ilişkin,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A(s)\frac{\partial u}{\partial s}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\left.(\alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_0 u + \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x})\right|_{s=0} = 0$$

$$\left.(\beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_0 u + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial x})\right|_{s=1} = 0$$

karışık problem ele alınır, burada α_i, β_i' ler fiziksel sabitlerdir. Değişkenlere ayırma yöntemi ve değişken dönüşümü yapılarak bu problem

$$-y''(y,x) + q(x)y(y,x) = \lambda^2 y(y,x), \quad 0 < x < 1$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(\lambda,0) + \alpha_3 y'(\lambda,0) = 0$$

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)y(\lambda,1) + \beta_3 y'(\lambda,1) = 0$$

sınır-değer problemine indirgenir.

Burada λ spektral parametre olmak üzere $q(x)$ negatif olmayan reel değerli bir fonksiyon ve α_i, β_i (i = 0,1,2,3) reel sabitleri için

$$\alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,\ \alpha_0 < 0 \text{ ve } \beta_2 > 0,\ \beta_0 < 0, \beta_3 < 0$$

koşulları sağlanıyor. Bu sınır-değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları için elde edilen sonuçlar lemma ve teorem biçiminde bulgular ve tartışmalar bölümünde verilmiştir.

Bu tip problemlerin incelenmesi, doğada var olan bir olayın (yani ağırlıklı bir telin titreşimi olayını) matematiksel ifadesini kolaya indirgeyip üzerinde çalışılabilmesi açısından önemlidir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

Matematiksel fiziğin birçok problemi spektral parametre içeren özdeğer ve özfonksiyon problemine indirgenebilir. Bu tür problemlerle kısmi diferansiyel denklem için başlangıç değer ve sınır koşulları zamana (veya yöne) göre türev içerdiği durumlarda Fourier metodu uygulandığında karşılaşılır. Daha önceleri bu tip problemler M.Poisson'un [17] dikkatini çekmiştir. Sınır koşulları spektral parametre içeren problemler güncelliğini bu günde korumuş ve bu yönde farklı problemler için birçok araştırmalar yapılmış [2], [4], [5], [11], [13], [14], [16], [18]. İlk kez İ.Walter [11] bu problemlerin klasik Hilbert uzaylarında operatör biçiminde ifade edilmediğini ve özel Hilbert uzaylarında incelenebildiğini göstermiştir. Bu yönde yapılan çalışmalarda 2. mertebeden diferansiyel denklem için sınır-değer problemi $L_2 \oplus C$ veya $L_2 \oplus C^2$ ve buna benzer diğer özel uzaylarda operatör biçiminde ifade ediliyor ve lineerleştirici operatör için özel uzaylarda özdeğer ve özfonksiyon problemleri incelenir [11], [13]. Hatırlatalım ki, bu çalışmalarda spektral parametre sınır koşuluna lineer dâhil olur. Sınır koşulu spektral parametreyi lineer içerdiğinde bu problemler fiziksel uygulamaları ile [3]'te geniş özetlenmiştir. Bu durumlarda, [12]'de

$$-(py')' + qy = \lambda ry$$

ikinci dereceden lineer denklemi [0,1] kapalı aralığında,

$$(a_0\lambda + b_0)\,y(0) = (c_0\lambda + d_0)(py')(0)$$

$$(a_1\lambda + b_1)\,y(1) = (c_1\lambda + d_1)(py')(1)$$

sınır koşulları ile

$$(a_j, b_j, c_j, d_j) \neq 0,\ j = 0,1 \ \text{ ile } \quad p > 0, q \geq 0 \ \text{ ve } \frac{1}{p}, q, r \in L^1[0,1], r \neq 0$$

koşulları ile birlikte özdeğerleri için değerlendirmeler elde edilmiştir. Bu sınır probleminin $H = L_2(0,1) \oplus C^2$ uzayında tabanlığı [12]' de incelenmiştir.

Ancak yukarda ki çalışmalardan farklı olarak tezde spektral parametreyi lineer içermeyen

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < 1$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(0) + y'(0) = 0$$

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)y(1) + y'(1) = 0$$

sınır-değer problemi ele alınır.burada, $q(x)$ negatif olmayan [0,1] aralığında sürekli fonksiyon, α_i, β_i (i = 0,1,2,3) reel sabitlerdir. α_i, β_i (i = 0,1,2,3) sabitleri farklı koşullar sağladığında bu problem farklı yönlerde [6], [16], [18]'de incelenmiştir. Spektral parametreyi lineer içermeyen sınır koşullarına ilişkin problemler fiziksel uygulamaları ile [6] ve [7]' de verilmiştir. n mertebeden adi diferansiyel denklem için geniş özet ve incelemeler [14]'de yapılmıştır. 2. mertebeden diferansiyel denklem için spektral parametre sınır koşuluna polinom biçiminde dahil olduğunda, [5]' te

$$l[u(x)] \equiv -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad 0<x<1$$

$$P_0(\lambda)P(0)u'(0) + Q_1(\lambda)u(0) = 0$$

$$P_1(\lambda)P(1)u'(1) + Q_1(\lambda)u(1) = 0$$

sınır problemi için özdeğer ve özfonksiyon problemi ele alınır, özel Hilbert uzayında özdeğer ve özfonksiyon problemi ele alınır, kök fonksiyonlarının tabanlığı incelenir. Burada $P_i(\lambda), Q_i(\lambda)$, λ' ya bağlı polinomlar ve

$$R_i(\lambda) = (-1)^{i+1}\frac{P_i(\lambda)}{Q_i(\lambda)} \quad i=0,1$$

r_i dereceli basit olmayan reel rasyonel kesirdir.

Tez konusunda [12], [15], [16] çalışmalardaki sonuçlardan yararlanılmıştır.

Tezde diferansiyel operatörlerin özelliklerine ilişkin [1], [8], [9], [10] monograflardan kullanılmıştır.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde ileri kısımda kullanacağımız kavramlar tanıtılarak, temel teoremler verilecektir.

3.1 TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

3.1.1. Tanım:

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y \qquad (3.1.1)$$

biçimindeki ifadeye *lineer diferansiyel ifade* denir. Burada n sayısı diferansiyel ifadenin mertebesi ve $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonları da *diferansiyel ifadenin katsayısı* olarak adlandırılır.

3.1.2.Tanım: y fonksiyonun ve onun $[a,b]$ aralığında $(n-1)$. dereceden türevlerinin a ve b noktalarındaki değerlerini

$$y_a, y_a', ..., y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', ..., y_b^{(n-1)} \qquad (3.1.2)$$

ile belirtelim. (3.1.2) değeriyle oluşturulan

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + ... + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + ... + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} \qquad (3.1.3)$$

ifadesi bir lineer form belirtir. Eğer k=1, 2,…,m için bu biçimde $U_k(y)$ oluşturulursa ve

$$U_k(y) = 0, \quad k=1, 2,…,m \qquad (3.1.4)$$

eşitliği $y(x) \in C^{(n)}$ için sağlanırsa bu ifadeye *sınır koşulu* denir. (3.1.4) formundaki sınır koşulunu sağlayan tüm $y(x) \in C^{(n)}$ $[a,b]$ fonksiyonlar kümesini $\mathcal{D}$ ile belirtelim. Burada $\mathcal{D}$, $C^{(n)}$ $[a,b]$' nin lineer alt kümesidir. Kabul edelim ki, $l(y)$ diferansiyel ifade ve (3.1.4) sınır koşulu ile tanımlanan $\mathcal{D}$ alt kümesi verilmiş olsun. Her hangi bir y$\in$ $\mathcal{D}$ fonksiyonuna $u = l(y)$ fonksiyonu karşılık gelsin. Bu dönüşüm tanım bölgesi $\mathcal{D}$ olan bir lineer operatördür ve L ile gösterilir. Bundan dolayı, eğer y$\in$ $\mathcal{D}$ ve

$u = l(y)$ ise, o halde L operatörünün tanımına göre $u = Ly$' dır. Burada ki L operatörüne $l(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (3.1.4) sınır koşulunun oluşturduğu *diferansiyel operatördür* denir.

3.1.3.Tanım: [9]

$$l(y) = 0 \tag{3.1.5}$$

denklemini ve

$$U_k(y) = 0, \text{ k=1,2,…,m} \tag{3.1.6}$$

koşullarını sağlayan $y(x) \in C^{(n)}$ [a,b] fonksiyonunun bulunması problemine *homojen sınır-değer problemi* denir. $l(y)$ diferansiyel ifade ve (3.1.6) sınır koşulları ile belirtilen operatör L olsun. O halde homojen sınır-değer problemi, L operatörünü $\mathcal{D}$ tanım bölgesinde sıfıra dönüştüren *y(x)* fonksiyonunun bulunmasına indirgenir.

Her hangi homojen sınır-değer probleminin en azından bir $y \equiv 0$ çözümü vardır. Bu çözüme *trivial* veya *sıfır çözüm* denir. Bununla birlikte homojen sınır-değer probleminin sıfır olmayan çözümü de olabilir. Biz, hangi koşullar altında homojen sınır-değer probleminin sıfır olmayan çözümleri var, onu araştıracağız.

Kabul edelim ki $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Diferansiyel denklemler teorisinden bilinir ki, homojen sınır-değer problemini sağlayan $l(y) = 0$ denkleminin her hangi çözümü $c_1, c_2, ..., c_n$' ler olmak üzere

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

İle ifade edilebilir. (3.1.6) sınır koşulunu sağlatırsak

$$\begin{aligned} c_1U_1(y_1) + c_2U_1(y_2) + ... + c_nU_1(y_n) &= 0 \\ c_1U_2(y_1) + c_2U_2(y_2) + ... + c_nU_2(y_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ c_1U_m(y_1) + c_2U_m(y_2) + ... + c_nU_m(y_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

lineer homojen denklem sistemini elde ederiz.

$$U=\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & U_m(y_n) \end{bmatrix} \qquad (3.1.8)$$

olsun. O halde m = n için homojen sınır-değer probleminin sıfır olmayan çözümü ancak ve ancak U matrisinin determinantı sıfıra eşit olduğunda vardır.

3.1.4. Tanım: *L* operatörünün tanımlandığı $\mathcal{D}$ bölgesinde

$$Ly=\lambda y$$

bağıntısını sağlayan özdeş olarak sıfıra denk olmayan fonksiyonu var ise λ sayısına *L* operatörünün *özdeğeri* denir ve *y* fonksiyonuna λ özdeğerine uygun *özfonksiyon* denir.

L operatörü *l(y)* diferansiyel ifadesi ve

$$U_k(y)=0, \quad k=1, 2,\ldots,m$$

koşulları ile inşa edildiği zaman

$$l(y)=\lambda y,\ U_k(y)=0$$

homojen sınır probleminin sıfır olmayan çözümünü garanti eden λ sayısına *L* diferansiyel operatörünün özdeğeri, ve λ' ya karşılık gelen, sıfır olmayan *y* çözümüne ise özfonksiyon denir.

Aynı bir λ özdeğerine uygun özfonksiyonların lineer kombinasyonu verilen *L* operatörünün λ özdeğerine uygun özfonksiyondur.

Gerçekten $Ly_1=\lambda y_1$, $Ly_2=\lambda y_2$ ise c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} L(c_1y_1+c_2y_2) &= c_1\lambda y_1+c_2\lambda y_2 \\ &= \lambda(c_1y_1+c_2y_2) \end{aligned}$$

olur. Yani $(c_1y_1+c_2y_2)$' de λ özdeğerine uygun özfonksiyondur. $l(y)=\lambda y$ adi diferansiyel denklemin λ özdeğerine uygun lineer bağımsız çözümleri n' den fazla olmadığı için λ' ya uygun özfonksiyon ile tanımlanan lineer uzayın boyutu n' den fazla değildir.

Yani bu uzayın boyutu verilmiş bir λ için ,

$$l(y) = \lambda y\,,\ U_k(y) = 0$$

probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısına eşittir. Bu sayıya λ özdeğerinin *katlılığı* veya *geometrik katlılığı* denir.

Özdeğerleri belirleyecek koşulları bulalım.

$$y_1(x,\lambda),\, y_2(x,\lambda),\ldots,\, y_n(x,\lambda)$$

$l(y) = \lambda y$ denkleminin j, k= 1, 2, …, n olmak üzere

$$y_j^{(k-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

Başlangıç koşullarını sağlayan temel çözüm sistemi ise, bu çözümler herhangi sabit $x \in [a,b]$ için λ parametresine bağlı tam fonksiyondur.

$L(y) = \lambda y\,,\ U_k(y) = 0$ sınır probleminin sıfır olmayan çözümü ancak ve ancak

$$U=\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_n) \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & U_m(y_n) \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı n' den küçük olduğunda vardır.

Eğer m< n ise rankU= r < n' dir ve sınır probleminin herhangi λ için sıfır olmayan çözümü vardır, yani m<n ise, λ' nın herhangi bir değeri verilen sınır probleminin özdeğeridir. Eğer $m \geq n$ ise o zaman

1) n-inci mertebeden determinantların her biri sıfıra eşit ise her bir λ özdeğerdir.

2) U matrisinin en az bir determinantı özdeş olarak sıfır değilse bu determinantın sıfırları özdeğerdir.

Ancak özdeş olarak sıfır olmayan tam fonksiyonun sıfırlarının sayısı sayılabilirden fazla değil (hiç olmaya da bilir) ve sonlu limit noktasına sahip değildir. Bundan dolayı *L* operatörünün özdeğerleri sayılabilirden fazla değil (hiç olmaya da bilir) ve sonlu limit noktasına sahip değildir.

Eğer m=n ise

$$\Delta(\lambda)=\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & U_n(y_n) \end{bmatrix}$$

dır. $\Delta(\lambda)$, λ' ya bağlı tam analitik fonksiyondur ve buna L operatörünün *karakteristik determinantı* denir. $\Delta(\lambda)$' nın sıfırları L operatörünün özdeğerleridir. Eğer $\Delta(\lambda)\equiv 0$ ise her bir λ, L operatörünün özdeğeridir. Eğer $\Delta(\lambda)$' nın sıfırları yok ise, L operatörü özdeğerlere sahip değildir. Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının k katlı sıfırı ise, özdeğerin geometrik katı k' dan büyük değildir.

3.1.5. Teorem: $q(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere ve herhangi bir α için

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=\lambda y$$

denkleminin $\varphi(a,\lambda)=\sin\alpha$ ve $\varphi'_x(a,\lambda)=-\cos\alpha$ koşullarını sağlayan tek bir $\varphi(x,\lambda)$, $a\le x\le b$ çözümü vardır ve her fix edilmiş $x\in[a,b]$ için $\varphi(x,\lambda)$, λ' ya bağlı tam fonksiyondur.

İspat:

$$\varphi_0(x,\lambda)=\sin\alpha-(x-a)\cos\alpha$$

ve $n>0$ için

$$\varphi_n(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\varphi_{n-1}(t,\lambda)(x-t)dt$$

alalım.

$q(x)$ sürekli olduğundan $a\le x\le b$ için $|q(x)|<M$ alabiliriz.

$|\lambda|\le N$ alalım. O halde $a\le x\le b$ için $|\varphi_0(x,\lambda)|\le K$.

Buna göre,

$$|\varphi_1(x,\lambda)-\varphi_0(x,\lambda)|\le\int_a^x(M+N)K(x-t)dt=\frac{1}{2}K(M+N)(x-a)^2$$

$n \geq 2$ için,

$$\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda) = \int_a^x \{q(t)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda)\}(x-t)dt$$

ve bu ifadeyi değerlendirirsek,

$$\left|\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda)\right| \leq (M+N)(b-a)\int_a^x \left|\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda)\right| dt$$

elde ederiz. Böylece

$$\left|\varphi_2(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)\right| \leq \frac{K}{2}(M+N)^2(b-a)\int_a^x (t-a)^2 dt$$

$$= \frac{K(M+N)(b-a)(x-a)^3}{3!}$$

ve genel olarak

$$\left|\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda)\right| \leq \frac{K(M+N)^2(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

şeklindedir. Dolayısıyla;

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda)\} \qquad (3.1.9)$$

serisi $|\lambda| \leq N$ için λ' ya göre ve $a \leq x \leq b$ x' e göre düzgün yakınsaktır.

$n \geq 2$ için

$$\varphi_n'(x,\lambda) - \varphi_{n-1}'(x,\lambda) = \int_a^x \{q(t)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda)\}dt$$

$$\varphi_n''(x,\lambda) - \varphi_{n-1}''(x,\lambda) = \{q(x)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(x,\lambda) - \varphi_{n-2}(x,\lambda)\}(x-t)$$

(3.1.9) serisini 1 ve 2 kez türevlendirmekle elde edilen seriler x' e göre düzgün yakınsaktır. Bu nedenle;

$$\varphi''(x,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)\}$$

$$=\varphi_1''(x,\lambda)-\varphi_0''(x,\lambda)+\sum_{n=2}^{\infty}\{\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)\}$$

$$=\{q(x)-\lambda\}[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=2}^{\infty}\{\varphi_{n-1}(x,\lambda)-\varphi_{n-2}(x,\lambda)\}]$$

$$=\{q(x)-\lambda\}\varphi(x,\lambda)$$

Dolayısıyla $\varphi(x,\lambda)$,

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=\lambda y$$

denklemini ve başlangıç değer koşullarını sağlıyor. $\varphi_n(x,\lambda)$ fonksiyonunun biçiminde ve (3.1.9) serisinin düzgün yakınsaklığından dolayı $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu tamdır. •

3.1.6. Teorem: (Sturm Teoremi)

$[a,b]$ aralığında, $g(x)< h(x)$ olduğunda

$$u''(x)+g(x)u=0 \tag{3.1.10}$$

denkleminin sıfır olmayan herhangi iki ardışık sıfırı arasında

$$v''(x)+h(x)v=0 \tag{3.1.11}$$

denkleminin herhangi bir sıfır olmayan çözümünün en az bir sıfırı vardır.

İspat:

$$u''(x)+g(x)u=0$$

denklemini v ile,

$$v''(x)+h(x)v=0$$

denklemini u ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$u''v-v''u=\frac{d}{dx}\{u'v-v'u\}=\{h(x)-g(x)\}uv \tag{3.1.12}$$

u' nun ardışık iki sıfırını x_1 ve x_2 ile işaretlendirelim. (3.1.12) denklemini x_1' den x_2' e kadar integralliyelim.

$$\{u'v - v'u\}\Big|_{x_1}^{x_2} = u'(x_2)v(x_2) - v'(x_1)u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (h(x) - g(x))uvdx$$

Gösterelim ki (x_1 , x_2) aralığında $v(x)$ fonksiyonun en az bir sıfırı vardır. Bunun için aksini varsayalım. Farz edelim ki v fonksiyonu, (x_1 , x_2) aralığının hiçbir yerinde sıfıra eşit olmasın. Genelliği bozmadan farz edebiliriz ki (x_1 , x_2) aralığında $u > 0$ ve $v > 0$. Buradan görürüz ki eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. Kabulümüzden $u(x) \geq 0$, o halde u fonksiyonu x_1 noktasında artandır. Böylece $u'(x_1) > 0$ dır. Çünkü $u(x_1) = 0$ idi ve $u'(x_1)$ sıfır olursa dolayısıyla Cauchy probleminin çözümünün tekliğine göre $u(x) \equiv 0$. Bu ise varsayımımıza çelişkidir. Aynı tartışmadan $u'(x_2) < 0$ dır. Buradan,

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leq 0$$

elde ederiz ki bu ise çelişki oluşturur. •

3.1.7. Teorem: (Karşılaştırma Teoremi)

u (x) , (3.1.10) denkleminin $u(a) = \sin\beta$ $u'(a) = -\cos\beta$ başlangıç değer koşulunu sağlayan çözümü olsun. v (x), (3.1.11) denkleminin aynı koşulları sağlayan çözümü olsun. $[a,b]$ kapalı aralığında $g(x) < h(x)$ olsun.

Eğer $a < x \leq b$ aralığında u (x) fonksiyonunun m sayıda sıfırı var ise v (x) fonksiyonunun sıfırlarının sayısı m' den az değildir ve v (x)' in k. sıfırı u (x)' in k. sıfırından küçüktür. (v (t_k)=0 ve u (x_k)=0 ise $t_k < x_k$ dır.)

İspat: x_1 ile u (x) fonksiyonunun a noktasına en yakın sıfırını işaretleyelim. $x_1 \neq a$ olsun. $[a, x_1]$ aralığında v (x)' in bir tane sıfırı olduğunu gösterirsek teorem ispatlanır. O halde Sturm Teoremini uygularsak teorem ispatlanır. Aksini varsayalım. $[a, x_1]$ aralığında v (x)' in sıfırı olmasın. Genelliği bozmadan u (x) ve v (x) bu aralıkta pozitif olsun. $u(x_1) = 0$ olduğundan x_1 noktasının komşuluğunda u (x) azalan bir fonksiyondur. Buna göre $u'(x_1) \leq 0$ olur.

$$u''v - v''u = \frac{d}{dx}(u'v - v'u) = (h(x) - g(x))u(x)v(x)$$

eşitliğini a' dan x_1 ' e kadar integrallersek

$$u'(x_1)v(x_1) = \int_a^{x_1} (h(x) - g(x))u(x)v(x)dx$$

elde ederiz, u(x)>0 , v(x)>0 ve $g(x) < h(x)$ olduğundan $[a, x_1]$ aralığında eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. Fakat sol taraf negatiftir bu ise çelişki oluşturur. Dolayısıyla $[a, x_1]$ aralığında v(x)' in sıfırı vardır. Teorem ispatlanmıştır.

3.1.8. Lemma: Eğer x_0, $(0 < x_0 < 1)$, $\omega(x, \lambda_0)$ fonksiyonunun sıfırı ise o halde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ vardır ki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ olduğunda $|x - x_0| < \varepsilon$ aralığında $\omega(x, \lambda_0)$ fonksiyonunun sadece bir sıfırı vardır.

İspat: x_0, $\omega(x, \lambda_0)$ çözümünün sıfırı olsun. Sıfırlarının basit olması hakkındaki teoreme göre,

$$\omega(x_0, \lambda_0) = 0$$

$$\omega'_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$$

şeklindedir. Varsayalım ki, $\omega'_x(x_0, \lambda_0) > 0$. Öyle küçük bir ε >0 vardır ki $|x - x_0| \leq \varepsilon$ için $\omega'_x(x, \lambda_0) > 0$ olsun. Bu durumda, $\omega(x - \varepsilon, \lambda_0) < 0$ ve $\omega(x + \varepsilon, \lambda_0) > 0$ ' dır. Bundan başka, $\omega'_x(x, \lambda)$ λ ' ya göre sürekli olduğundan ([teorem 3.1.5]' e göre $\omega(x, \lambda)$ tam fonksiyondur) öyle bir $\delta > 0$ buluruz ki $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ için $\omega'_x(x, \lambda)$ fonksiyonu $|x - x_0| \leq \varepsilon$ aralığının tamamında pozitifliğini korur. Bu nedenle, monoton artan $\omega(x, \lambda)$ fonksiyonunun iki sıfırı olamaz. Eğer; δ ' yı öyle küçük seçersek ki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ için $\omega(x + \varepsilon, \lambda)$ pozitifliğini korurken $\omega(x - \varepsilon, \lambda)$ fonksiyonu da negatifliğini koruyorsa $\omega(x, \lambda)$ çözümünün $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ için $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ aralığında sadece bir sıfırı vardır. •

3.1.9. Sonuç: λ değiştiğinde, $\omega(x,\lambda)$ çözümü ya sıfır kaybeder ya da sıfır kazanır. Bu sıfırlar $[a,b]$ aralığına a , b uç noktalarından ya dâhil olurlar ya da çıkarlar.

3.1.10. Teorem: (Salınım Teoremi)

$$\begin{aligned}&-y'' + q(x)y = \lambda y\\ &y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0\\ &y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0\end{aligned}$$

probleminin artan yönde sıraya dizilmiş sonsuz sayıda $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ özdeğerleri var ve λ_n özdeğerini uygun özfonksiyonun $a < \mathrm{x} < b$ aralığında n tane sıfırı vardır.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

denkleminin

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \sin\alpha\\ \varphi'(a) &= -\cos\alpha\end{aligned}$$

başlangıç değer koşulunu sağlayan çözümü olsun. Karşılaştırma Teoremi'ne göre λ değerleri arttıkça $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı azalmıyor. $x \in [a,b]$ için $|q(x)| < c$ alalım ve $-y'' + q(x)y = \lambda y$ denklemi ile $-y'' + (\lambda + c)y = \lambda y$ denklemini karşılaştıralım. Bu denklemin φ(a)= $\sin\alpha$ $\quad \varphi'(a) = -\cos\alpha$ koşullarını sağlayan çözümü,

$$y = \sin\alpha \cosh\{(-\lambda - c)^{\frac{1}{2}}(x-a)\} - \frac{\cos\alpha}{(-\lambda - c)^{\frac{1}{2}}} sh\{(-\lambda - c)^{\frac{1}{2}}(x-a)\}$$

(cosh=cosiz ve sh=-isinz)

şeklindedir. λ parametresinin modülünün yeterince büyük negatif değerlerinde y fonksiyonu sıfıra dönüşmüyor. Yine Karşılaştırma Teoremi'ne göre $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun λ' nın mutlak değerce yeterince büyük negatif değerlerinde $[a,b]$ aralığında sıfır olmadığını elde ederiz.

Şimdi $-y'' + q(x)y = \lambda y$ denklemini $-y'' + (\lambda - c)y = \lambda y$ denklemiyle karşılaştıralım. Bu durumda $\lambda - q < \lambda - c$ olur. $\lambda \to +\infty$ bu denklemin $y(x,\lambda)$ çözümünün sıfırlarının sayısı sonsuz olarak artandır.

Öte yandan, $\lambda - q < \lambda - c$ olduğundan Karşılaştırma Teoremi'ne göre $\varphi(x,\lambda)$ çözümlerinin $[a,b]$ aralığında $\lambda \to +\infty$ gittiğinde sonsuz artandır. Lemma 3.1.8'e göre $\varphi(x,\lambda)$=0 denkleminin kökleri λ' ya göre sürekli bağlıdır ve Karşılaştırma Teoremi'ne göre λ arttığında $\varphi(x,\lambda)$' nın her bir sıfırı sola büzüşür ancak a noktasından çıkmıyor çünkü o zaman sıfırlarının sayısı azalabilir. Lemma 3.1.8'e göre yeni sıfırlar b noktasından girebilir. μ_0, λ parametresinin $\varphi(b,\lambda)$=0 koşulunu sağlayan ilk değeri olsun, böyle değerler her zaman var. μ_1, λ' nın $\varphi(b,\lambda)$=0 koşulunu sağlayan ikinci değeri olsun. Ve böyle devam ettirecek olursak μ_0, $\mu_1,\ldots$ dizisi elde ederiz ki $\varphi(x,\mu_m)$ fonksiyonunun (a , b) aralığında m sayıda sıfıra sahip olur ve $\varphi(b,\mu_m) = 0$.

Gerçekten $\varphi(x,\lambda)$' nın (a , b) aralığında m sayıda sıfırı olan μ_0, $\mu_1,\ldots,\mu_m$ dizisinin üst sınırı λ_m olsun. O halde λ_m ' e uygun olan $\varphi(x,\lambda_m)$ fonksiyonunun da (a , b) aralığında m sayıda sıfıra sahip olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. Varsayalım ki m-1 sayıda olsun. O halde; $\varphi(x,\lambda_m)$' nin m. sıfırının b olması gerekir ve lemma 3.1.8 'e göre öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunur ki $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_{m+\delta})$ aralığında lemma' ya göre $\varphi(x,\lambda)$' nın (a , b] aralığında kesin olarak m sayıda sıfırı olur. Bu ise λ_m ' nin tanımına göre çelişkidir çünkü λ_m sıfırlar dizisinin üst sınırıdır. Bundan dolayı $\varphi(x,\lambda_m)$ fonksiyonunun çözümünün sıfırlarının sayısı (a , b] aralığında m' den az olmuyor. Şimdi sıfırlarının sayısının m' den fazla olmadığını gösterelim. Aksini varsayalım, $\varphi(x,\lambda_m)$, (a , b) m+l olduğunu varsayalım. Bu çözümün (m+l). sıfırı için, $x_{m+l}(\lambda_m) < b$ olur. Lemma 3.1.8'e göre çözümün sıfırlarının sayısı λ' ya göre sürekli bir fonksiyon olduğundan λ_m' nin öyle bir küçük ($\lambda_m - \delta_n, \lambda_m + \delta_n$) ($\delta_n > 0$) komşuluğu var ki burada $x_{m+l}(\lambda) < b$ olur. Bu ise λ_m özdeğerinin tanımına çelişkidir. Bu nedenle (a , b) $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun m sayıda sıfırı vardır. Şimdi ise $\varphi(b,\lambda_m) = 0$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım; $\varphi(b,\lambda_m) \neq 0$ olsun. O halde $\varphi(x,\lambda)$' nın λ' ya göre sürekli bir fonksiyon olmasından öyle $\delta_2 > 0$ sayısı bulunur ki $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_m + \delta_2)$ için $\varphi(b,\lambda) \neq 0$ olmalıdır.

Buna göre bu λ' lar için $\varphi(x,\lambda)$ çözümünün m sayıda sıfırı var. Bu ise λ_m' nin sıfırlarının üst sınır olmasına çelişkidir. Buna göre elde ederiz ki $\varphi(b,\lambda)=0$ dır.

$\sin\beta=0$ ise, sınır koşullarından ikincisi de sağlanıyor ve μ_m özdeğerdir. Bu durumda teorem ispatlandı.

$\sin\beta\neq 0$ olsun ve u (x) fonksiyonu,

$$u''(x)+g(x)u=0$$

$$u(a)=\sin\alpha \quad u'(a)=-\cos\alpha$$

v (x) fonksiyonu ise

$$v''(x)+h(x)v=0$$

$$v(a)=\sin\alpha \quad v'(a)=-\cos\alpha$$

$$(h(x)>g(x))$$

sınır-değer problemlerine uygun çözümler olsun.

O halde,

$$\frac{d}{dx}\left\{u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\right\}=2uu'\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)+u^2\left(\frac{u''}{u}-\frac{v''}{v}\right)-u^2\left(\frac{u'^2}{u^2}-\frac{v'^2}{v^2}\right) \tag{3.1.13}$$

$$=\frac{(u'v-v'u)^2}{v^2}+u^2\{h(x)-g(x)\}>0$$

olur. Buradan, $u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)$ fonksiyonu, v fonksiyonunun sıfır olmadığı tüm aralıklarda monoton artan olur. $u(x)$, $v(x)$ fonksiyonlarının (a,b) aralığında aynı miktarda sıfıra sahip olduğunu varsayalım. x_v ile $u(x)$ fonksiyonunun b noktasına en yakın olan sıfırını işaretleyelim. $x_v \leq$ x $\leq b$ aralığında $v(x)$ fonksiyonunun sıfırı olmadığını gösterelim. Gerçekten Karşılaştırma Teoremi'ne göre $(a,\ x_v)$ aralığında $v(x)$'in en azından v tane sıfırı yerleşir. Eğer $x_v \leq$ x $\leq$ b aralığının herhangi bir yerinde $v(x)$ fonksiyonu sıfıra dönüşürse o halde tüm $[a,b]$ aralığında $v(x)$' in sıfırlarının sayısı $u(x)$' in sıfırlarının sayısından fazla olur. Bu ise $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının aynı sayıda sıfırı olması varsayımına çelişkidir.

(3.1.13) özdeşliğini x_v ' den b ' ye kadar integralliyelim.

$$\left\{u^2(b)\left(\frac{u'(b)}{u(b)}-\frac{v'(b)}{v(b)}\right)\right\} > u^2(x_v)\left(\frac{u'(x_v)}{u(x_v)}-\frac{v'(x_v)}{v(x_v)}\right)=0 .$$

Buradan

$$\frac{u'(b)}{u(b)} > \frac{v'(b)}{v(b)} \qquad (3.1.14)$$

olur.

$$\left(\frac{v'(x,\lambda^{'})}{v(x,\lambda^{'})} > \frac{v'(x,\lambda^{''})}{v(x,\lambda^{''})}\right) \qquad (\mu_m < \lambda^{'} < \lambda^{''} < \mu_{m+1})$$

$u(x)$ ' i $\varphi(x,\lambda^{'})$ ile $v(x)$ ' i $\varphi(x,\lambda^{''})$ ile değiştirelim, burada $\mu_m < \lambda^{'} < \lambda^{''} < \mu_{m+1}$.

(3.1.14) eşitsizliğine göre, $\dfrac{v'(b)}{v(b)}$ fonksiyonu monoton azalan bir fonksiyondur. (μ_m, μ_{m+1}) aralığında $\varphi(b,\mu_m)=\varphi(b,\mu_{m+1})=0$ olduğundan $\dfrac{\varphi'(b,\lambda)}{\varphi(b,\lambda)}$ fonksiyonunun $+\infty$'dan $-\infty$'a azalması gerekir. Bu nedenle, (μ_m,μ_{m+1}) aralığında öyle bir λ_m değeri olur ki,

$$\frac{\varphi'(b,\lambda_m)}{\varphi(b,\lambda_m)} = -ctg\beta$$

olasıdır. Yani ,

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

koşulu da sağlanıyor. Çünkü $(\mu_{m,}\mu_{m+1})$ aralığında bir λ_m değeri bulunur ki,

$$\varphi'(b,\lambda_m) = ctg\beta.\varphi(b,\lambda_m) \text{ veya } y'(b) = -ctg\beta y(b)$$

Bu nedenle, λ_m özdeğerine uygun $\varphi(x,\lambda_m)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı $\varphi(x,\mu_m)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısına eşittir. Yani m sayıda sıfırı vardır.•

3.2. SINIR KOŞULLARI PARAMETREYE BAĞLI SOL TANIMLI STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

[0,1] kapalı aralığında

$$-(py')' + qy = \lambda r y \tag{3.2.1}$$

$$(a_0\lambda + b_0)\,y(0) - (c_0\lambda + d_0)(py')(0) = 0 \tag{3.2.2}$$

$$(a_1\lambda + b_1)\,y(1) - (c_1\lambda + d_1)(py')(1) = 0 \tag{3.2.3}$$

sınır-değer problemini inceleyelim.

Burada [0,1] aralığında sol tanımlılık koşulları sağlansın, yani

$$p > 0,\; q \geq 0 \quad \text{ve} \quad (a_j, b_j, c_j, d_j) \neq 0 \quad \text{j= 0, 1} \tag{3.2.4}$$

ayrıca,

$$\frac{1}{p}, q, r \in L^1[0,1] \tag{3.2.5}$$

$$\delta_j = a_j d_j - b_j c_j \tag{3.2.6}$$

j =1 için $(-1)^j \delta_j M_j$ pozitif olsun. (3.2.7)

r özdeş olarak sıfırdan farklı ve

$$M_j = \begin{bmatrix} a_j b_j & -b_j c_j \\ -b_j c_j & c_j d_j \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

olsun. C kompleks sayılar kümesi olmak üzere $H = L^2[0,1] \oplus C \oplus C$ uzayını düşünelim.

Bu uzayda iç çarpım;

$$(Y,W)=((y,\alpha,\beta),(w,\mu,\nu)) \tag{3.2.9}$$

$$=\int_0^1 y\overline{w}dx+|\delta_0|^{-1}\alpha\overline{\mu}+|\delta_1|^{-1}\beta\overline{\nu}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. H uzayında A operatörünü,

$$D(A)=\{(y,\alpha,\beta)|\ y,py'\in AC[0,1],-(py')'+qy,ry\in L^2[0,1],$$

$$-a_0y(0)+c_0(py')(0)=\alpha,-a_1y(1)+c_1(py')(1)=\beta\} \tag{3.2.10}$$

bölgesinde

$$A(y,\alpha,\beta)=(-(py')'+qy,-\varepsilon_0(b_0y(0)-d_0(py')(0),\varepsilon_1(b_1y(1))-d_1(py')(1))) \tag{3.2.11}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada, $\varepsilon_j=\operatorname{sgn}\delta_{j,}\ j=0,1$'dir.

H uzayında, (3.2.1)-(3.2.3) problemini,

$$S(y,\alpha,\beta)=(ry,-\varepsilon_0\alpha,\varepsilon_1\beta)$$

olmak üzere,

$$AY=\lambda SY$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu eşitliği gösterelim.

$$Y=(y,\alpha,\beta)$$

olsun.

$$\lambda SY=\lambda(ry,-\varepsilon_0\alpha,\varepsilon_1\beta) \tag{3.2.12}$$

(3.2.1)' den

$$-(py')'+qy=\lambda ry \tag{3.2.13}$$

(3.2.2)'den,

$$(a_0\lambda)y(0)-(c_0\lambda)(py')(0)=d_0(py')(0)-(b_0)y(0)$$

$$\lambda(a_0y(0)-c_0(py')(0))=d_0(py')(0)-(b_0)y(0)$$

elde edilir. Ve, (3.2.10)' u kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\lambda(-\alpha)=d_0(py')(0)-(b_0)y(0)$$

Buradan,

$$-\lambda\varepsilon_0\alpha = \varepsilon_0(d_0(py')(0)-(b_0)y(0)) \tag{3.2.14}$$

bulunur.

(3.2.3) sınır koşulundan kullanacak olursak,

$$(a_1\lambda)y(1)-(c_1\lambda)(py')(1) = d_1(py')(1)-(b_1)y(1)$$

$$\lambda(a_1 y(1)-c_1(py')(1)) = d_1(py')(1)-(b_1)y(1)$$

(3.2.10)' u kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\lambda(-\beta) = d_1(py')(1)-(b_1)y(1)$$

Buradan,

$$\lambda\varepsilon_1\beta = \varepsilon_1((b_1)y(1)-d_1(py')(1)) \tag{3.2.15}$$

elde edilir.

(3.2.13), (3.2.14) ve (3.2.15)' ten (3.2.12)' nin (3.2.11)' e eşit olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$AY = \lambda SY$$

olduğu ispat edilmiş olur.•

3.2.1. Teorem: $D(A)$ ' da A operatörü pozitif tanımlıdır.

İspat:

$$(AY,Y) = \int_0^1 (-(py')'+qy)\overline{y}dx - \left|\delta_0\right|^{-1}(-\varepsilon_0(b_0 y(0)-d_0(py')(0))\overline{\alpha} +$$

$$+\left|\delta_1\right|^{-1}(\varepsilon_1(b_1 y(1))-d_1(py')(1)))\overline{\beta}$$

(3.2.10)' dan kullanalım,

$$(AY,Y) = \int_0^1 (-(py')'+qy)\overline{y}dx - \left|\delta_0\right|^{-1}(-\varepsilon_0(b_0 y(0)-d_0(py')(0))(-a_0\overline{y(0)} +$$

$$+c_0(p\overline{y}')(0)) + \left|\delta_1\right|^{-1}(-\varepsilon_1(b_1 y(1)-d_1(py')(1))(a_1\overline{y(1)}+c_1(p\overline{y}')(1))$$

$$=\int_0^1 (p|y'|^2+q|y|^2)dx-(py')(1)\overline{y}(1)+(py')(0)\overline{y}(0)-$$

$$-\delta_0^{-1}(-a_0b_0|y(0)|^2-c_0d_0|(py')(0)|^2+b_0c_0y(0)(p\overline{y}')(0)+$$

$$+a_0d_0\overline{y}(0)(py')(0))+\delta_1^{-1}(-a_1b_1|y(1)|^2-c_1d_1|(py')(1)|^2+$$

$$+b_1c_1y(1)(p\overline{y'})(1)+a_1d_1\overline{y(1)}(py')(1))$$

$$=\int_0^1 (p|y'|^2+q|y|^2)dx+\delta_0^{-1}(a_0b_0|y(0)|^2+c_0d_0|(py')(0)|^2-$$

$$-2b_0c_0\operatorname{Re}(yp\overline{y}')(0))-\delta_1^{-1}(a_1b_1|y(1)|^2+c_1d_1|(py')(1)|^2-2b_1c_1\operatorname{Re}(ypy')(1))$$

$$=\int_0^1 (p|y'|^2+q|y|^2)dx+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\delta_j(M_jf_j,f_j) \qquad (3.2.16)$$

Burada,

$$f_j=[y(j),(py')(j)]^T .$$

$q\geq 0$ ve (3.2.7)' den (3.2.16)' nın pozitif olduğunu elde ederiz. •

3.3 SINIR KOŞULLARINDA LİNEER OLMAYAN SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

λ lineer olmayan spektral parametreyi hem denkleminde hem de sınır koşullarında bulunduran Sturm-Liouville problemini inceleyelim.

$$-u''+q(x)u=\lambda^2u, \quad 0<x<1 \qquad (3.3.1)$$

$$(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)u(0)+u'(0)=0 \qquad (3.3.2)$$

$$(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2)u(1)+u'(1)=0 \qquad (3.3.3)$$

Burada, λ spektral parametre, $q(x)$ C[0,1] sınıfından olan reel değerli fonksiyon, α_i ve β_i ler (i = 0,1,2,3) reel sabitlerdir.

Ayrıca,

$$\alpha_2 > 0,\ \beta_2 < 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$$

olduğunu kabul edelim.

3.3.1. Lemma: Öyle bir $R_0 \geq 0$ sayısı vardır ki, (3.3.1)-(3.3.3) sınır değer probleminin $|\lambda| \geq R_0$ eşitsizliğini sağlayan bütün λ özdeğerleri reeldir.

İspat : λ, (3.3.1)-(3.3.3) sınır değer probleminin özdeğeri ve $y(x,\lambda)$ da bu özdeğere uygun özfonksiyon olsun.

(3.3.1) denkleminin her iki tarafını $\overline{u(x,\lambda)}$ ile çarpıp x'e göre 0'dan 1'e kadar integralleyelim:

$$-\int_0^1 u''(x,\lambda)\overline{u(x,\lambda)}\,dx + \int_0^1 q(x)\,|u(x,\lambda)|^2\,dx = \lambda^2 \int_0^1 |u(x,\lambda)|^2\,dx \qquad (3.3.5)$$

Kısmi integrasyon yöntemi ile (3.3.2),(3.3.3) sınır koşullarından;

$$\int_0^1 u''(x,\lambda)\overline{u(x,\lambda)}\,dx = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)|u(0,\lambda)|^2 -$$

$$-(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)|u(1,\lambda)|^2 - \int_0^1 |u'(x,\lambda)|^2 dx$$

$$\{\lambda : |\lambda| < R_0\}$$

Buradan ve (3.3.5)' ten:

$$A(\lambda)\lambda^2 + B(\lambda)\lambda + C(\lambda) = 0$$

yazabiliriz. Burada,

$$A(\lambda) = \int_0^1 |u(x,\lambda)|^2\,dx + \alpha_2\,|u(0,\lambda)|^2 - \beta_2\,|u(1,\lambda)|^2$$

$$B(\lambda) = \alpha_1\,|u(0,\lambda)|^2 - \beta_1\,|u(1,\lambda)|^2$$

$$C(\lambda) = -\int_0^1 |u'(x,\lambda)|^2\,dx - \int_0^1 q(x)\,|u(x,\lambda)|^2\,dx + \alpha_0\,|u(0,\lambda)|^2 - \beta_0\,|u(1,\lambda)^2|$$

Böylece λ özdeğeri;

$$A(\lambda)z^2 + B(\lambda)z + C(\lambda) = 0 \tag{3.3.6}$$

quadratic denklemin bir köküdür.

Aşağıdaki değerlendirmelerden;

$$\max_{0 \le x \le 1} |u(x,\lambda)|^2 \le c_0(1+|\lambda|)\int_0^1 |u(x,\lambda)|^2\, dx \tag{3.3.7}$$

ve

$$\int_0^1 |u'(x,\lambda)|^2\, dx \le c_1(1+|\lambda|)^2 \int_0^1 |u(x,\lambda)|^2\, dx \tag{3.3.8}$$

Burada c_0 ve c_1, λ'ya bağlı olmayan pozitif sabitlerdir.

$$\max_{0 \le x \le 1} |q(x)| = q_0$$

alalım.

$$C(\lambda) \le q_0 \int_0^1 |u(x,\lambda)|^2\, dx + |a_0|\,|u(0,\lambda)|^2 + |b_0|\,|u(1,\lambda)^2| - \int_0^1 |u'(x,\lambda)|^2\, dx$$

$$\le \left[c_0\left(|\alpha_0| + |\beta_0|\right)(1+|\lambda|) + q_0 - c_1(1+|\lambda|)^2\right]\int_0^1 |u(x,\lambda)|^2\, dx$$

$$C(\lambda) \le -\left(1+|\lambda|\right)^2 \left(c_1 - \frac{c_2}{1+|\lambda|}\right)\int_0^1 |u(x,\lambda)|^2 dx \tag{3.3.9}$$

Burada

$$c_2 = c_0\left(|\alpha_0| + |\beta_0|\right) + q_0$$

$$R_0 = \frac{c_2}{c_1}$$

alalım. Lemma' nın koşuluna göre $|\lambda| \ge R_0$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$c_1 - \frac{c_2}{1+|\lambda|} > 0$$

Çünkü, $|\lambda| \geq \frac{c_2}{c_1}$ ise $c_1 \geq \frac{c_2}{|\lambda|}$ olur ve $c_1 > \frac{c_2}{1+|\lambda|}$

Dolayısıyla;

$$C(\lambda) < 0$$

sağlandı.

$$A(\lambda) = \int_0^1 |u(x,\lambda)|^2 \, dx + \alpha_2 \, |u(0,\lambda)|^2 - \beta_2 \, |u(1,\lambda)|^2$$

(3.3.4)' ten

$\alpha_2 > 0$ ve $\beta_2 > 0$, buna göre $A(\lambda) > 0$ olur.

Böylece,

$$B^2(\lambda) - 4A(\lambda)C(\lambda) > 0$$

oldu. Sonuç olarak (3.3.6) denkleminin $|\lambda| \geq R_0$ olduğunda sadece reel kökleri vardır.•

3.3.2. Lemma: (3.3.1)-(3.3.3) sınır-değer probleminin özdeğerleri

(a) sonlu limit noktasına sahip olmayan, sayılabilirden fazla olmayan bir küme oluşturur.

(b) (3.3.1)-(3.3.3) sınır-değer probleminin özdeğerleri basittirler.

İspat: Teorem 3.1.5' e benzer olarak (3.3.1) denkleminin,

$$\omega(0,\lambda) = 1 \qquad \omega'(0,\lambda) = -\alpha_0 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2 \qquad (3.3.10)$$

başlangıç değer koşullarını sağlayan tek bir çözümünün olduğunu ispatlayalım. Burada her sabit $x \in [0,1]$ için $\omega(x,\lambda)$, λ'ya bağlı tam fonksiyondur. (3.3.1)-(3.3.3) sınır-değer probleminin özdeğerleri

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)\omega(1,\lambda) + \beta_3\omega'(1,\lambda) = 0 \qquad (3.3.11)$$

denkleminin kökleridir.

Lemma 3.3.1'de reel olmayan $|\lambda| \geq R_0$ eşitsizliğini sağlayan λ' lar için bu fonksiyonun sıfır olmadığı gösterilmişti. Bu yüzden, sıfırları sayılabilenden fazla değil ve sonlu limit noktasına sahip değildir.

(3.3.1)-(3.3.3) sınır-değer probleminin özdeğerlerinin basit olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2)\omega(1,\lambda)+\beta_3\omega'(1,\lambda)=0$$

denkleminin $\{\lambda:|\lambda|<R_0\}$ dairesinin dışında basit köklere sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten $\lambda=\lambda^*$ (3.3.11) denkleminin 2 katlı kökü ve $|\lambda^*|\geq R_0$ ise

$$(\beta_0+\beta_1\lambda^*+\beta_2\lambda^{*2})\ \omega(1,\lambda^*)+\beta_3\omega'(1,\lambda^*)=0$$

$$(\beta_1+2\beta_2\lambda^*)\omega(1,\lambda^*)+(\beta_0+\beta_1\lambda^*+\beta_2\lambda^{*2})\frac{\partial\omega(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*}+\frac{\partial\omega'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*}=0$$

$\omega(x,\lambda)$, (3.3.1) denkleminin çözümü olduğundan (3.3.1) denklemini λ ve μ özdeğerleri için yazalım.

$$-\omega''(x,\lambda)+q(x)\omega(x,\lambda)=\lambda^2\omega(x,\lambda)$$

$$-\omega''(x,\mu)+q(x)\omega(x,\mu)=\lambda^2\omega(x,\mu)$$

Bu iki denklemden birincisini $\omega(x,\mu)$, ikincisini $\omega(x,\lambda)$ ile çarpalım ve taraf tarafa çıkaralım.

$$-\omega''(x,\lambda)\omega(x,\mu)+\omega(x,\lambda)\omega''(x,\mu)=(\lambda^2-\mu^2)\omega(x,\lambda)\omega(x,\mu)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\omega(x,\lambda)\omega'(x,\mu)-\omega(x,\mu)\omega'(x,\lambda)\right]=(\lambda^2-\mu^2)\omega(x,\lambda)\omega(x,\mu)$$

integrallemeden ve (3.3.2) koşulundan kullanarak elde ederiz ki $\lambda\neq\mu$ olduğunda

$$\omega(x,\lambda)\omega'(x,\mu)-\omega(x,\mu)\omega'(x,\lambda)\,|_0^1=(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)\int_0^1\omega(x,\lambda)\omega(x,\mu)dx$$

$$\omega(1,\lambda)\omega'(1,\mu)-\omega(1,\mu)\omega'(1,\lambda)-\omega(0,\lambda)\omega'(0,\mu)+\omega(0,\mu)\omega'(0,\lambda)=$$

$$=(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)\int_0^1\omega(x,\lambda)\omega(x,\mu)dx$$

elde edilir.

$$\omega'(0,\mu) = -\left(\alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2\right)\omega(0,\mu)$$

ve

$$\omega'(0,\lambda) = -\left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2\right)\omega(0,\lambda)$$

eşitliklerini yukardaki denklemde yerlerine yazalım.

$$\frac{\omega(1,\lambda)\omega'(1,\mu) - \omega(1,\mu)\omega'(1,\lambda)}{\lambda-\mu} + \frac{\omega(0,\lambda)\omega(0,\mu)}{\lambda-\mu}\left(\alpha_1(\mu-\lambda) + \alpha_2(\mu^2-\lambda^2)\right) =$$

$$= (\lambda+\mu)\int_0^1 \omega(x,\lambda)\omega(x,\mu)dx$$

Burada, $\omega(0,\lambda) = 1$ ve $\omega(0,\mu) = 1$ dir.

$$\frac{\omega(1,\lambda)\omega'(1,\mu) - \omega(1,\mu)\omega'(1,\lambda)}{\lambda-\mu} - \alpha_1 - \alpha_2\left(\lambda+\mu\right) = \left(\lambda+\mu\right)\int_0^1 \omega(x,\lambda)\omega(x,\mu)dx$$

$$\frac{\omega(1,\lambda)\omega'(1,\mu) - \omega(1,\mu)\omega'(1,\lambda)}{\lambda-\mu} - \alpha_1 = \left(\lambda+\mu\right)\left(\alpha_2 + \int_0^1 \omega(x,\lambda)\omega(x,\mu)dx\right)$$

$\mu \to \lambda$ limit alalım ve $\lambda = \lambda^*$ yazalım.

$$\omega'(1,\lambda^*)\frac{\partial\omega(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} - \omega(1,\lambda^*)\frac{\partial\omega'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*} - \alpha_1 = 2\lambda^*\left(\alpha_2 + \int_0^1 \omega^2(x,\lambda^*)dx\right) \quad (3.3.12)$$

elde ederiz.

$$\frac{\partial\omega'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*} = -\left(\beta_1 + 2\beta_2\lambda^*\right)\omega(1,\lambda^*) - \left(\beta_0 + \beta_1\lambda^* + \beta_2\lambda^{*2}\right)\frac{\partial\omega(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*}$$

$$\omega'(1,\lambda^*) = -\left(\beta_0 + \beta_1\lambda^* + \beta_2\lambda^{*2}\right)\omega(1,\lambda^*)$$

Elde ettiğimiz bu eşitlikleri (3.3.13)' te yerlerine yazalım.

$$2\lambda^*\left[\int_0^1 \omega^2(x,\lambda^*)dx+\alpha_2-\beta_2\omega^2(1,\lambda^*)\right]=\beta_1\omega^2(1,\lambda^*)-\alpha_1$$

λ^*, özdeğer olduğundan lemma 3.3.1 de gösterildiği üzere,

$$A(\lambda^*)\lambda^{*2}+B(\lambda^*)\lambda^*+C(\lambda^*)=0 \qquad (3.3.13)$$

Burada,

$$A(\lambda^*)=\int_0^1 \omega^2(x,\lambda^*)dx+\alpha_2-\beta_2\omega^2(1,\lambda^*) \qquad (3.3.14)$$

ve (3.3.4) koşulundan, $\alpha_2>0$, $\beta_2<0$ olduğundan

$$A(\lambda^*)>0$$

$$B(\lambda^*)=\alpha_1-\beta_1\omega^2(1,\lambda^*) \qquad (3.3.15)$$

$$C(\lambda^*)=\alpha_0-\beta_0\omega^2(1,\lambda^*)-\int_0^1 \omega'^2(x,\lambda^*)dx-\int_0^1 q(x)\omega^2(x,\lambda^*)dx$$

(3.3.12) , (3.3.14) ve (3.3.15) ten;

$$\lambda^*=-\frac{B(\lambda^*)}{2A(\lambda^*)}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (3.3.13)'ten

$$B^2(\lambda^*)=4A(\lambda^*)C(\lambda^*) \qquad (3.3.16)$$

elde edildi. Oysa ki lemma 3.3.1'de $C(\lambda^*)<0$ olduğu gösterilmişti. Bu (3.3.16)'a çelişkidir. Çünkü $4A(\lambda^*)C(\lambda^*)<0$ ve $B^2(\lambda^*)>0$ olduğundan (3.3.16) deki eşitlik sağlanamaz. Dolayısıyla (3.3.1)-(3.3.3) probleminin özdeğerleri basittirler.•

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 AĞIRLIKLI TELİN TİTREŞİMİNDE OLUŞAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN YAYILIMI

λ lineer olmayan spektral parametreyi hem denkleminde hem de sınır koşullarında bulunduran Sturm-Liouville problemini inceleyelim.

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < 1 \tag{4.1.1}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)\, y(0) + \alpha_3 y'(0) = 0 \tag{4.1.2}$$

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)\, y(1) + \beta_3 y'(1) = 0 \tag{4.1.3}$$

Burada, λ spektral parametre, $q(x)$ C[0,1] sınıfından olan reel değerli ve $q(x) \geq 0$ şeklinde bir fonksiyon, α_i ve β_i (i = 0,1,2,3) reel sabitlerdir.
Ayrıca,

$$\alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,\ \alpha_0 < 0,\ \beta_2 > 0,\ \beta_0 < 0,\ \beta_3 < 0 \tag{4.1.4}$$

olduğunu kabul edelim.

4.1.1. Lemma: (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin bütün λ özdeğerleri reeldir.

İspat: λ, (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğeri ve y(x, λ) da bu özdeğere uygun özfonksiyon olsun.
(4.1.1) denkleminin her iki tarafını $\overline{y(x,\lambda)}$ ile çarpıp x'e göre 0'dan 1'e kadar integralleyelim:

$$-\int_0^1 y''(x,\lambda)\overline{y(x,\lambda)}\, dx + \int_0^1 q(x)\,|\, y(x,\lambda)|^2\, dx = \lambda^2 \int_0^1 |\, y(x,\lambda)|^2\, dx \tag{4.1.5}$$

Kısmi integrasyon yöntemi ile;

$$\int_0^1 y''(x,\lambda)\ \overline{y(x,\lambda)}\,dx\ =\ \int_0^1 \overline{y(x,\lambda)}\ dy'(x,\lambda)$$
$$=\ y'(x,\lambda)\overline{y(x,\lambda)}\Big|_0^1 - \int_0^1 y'(x,\lambda)\ \overline{y(x,\lambda)}'\,dx$$
$$=\ y'(1,\lambda)\overline{y(1,\lambda)}\ -\ y'(0,\lambda)\overline{y(0,\lambda)} - \int_0^1 |\,y'(x,\lambda)|^2\ dx \tag{4.1.6}$$

(4.1.2) sınır koşulundan:

$$(\alpha_0 +\ \alpha_1\lambda\ +\ \alpha_2\lambda^2)\ y(0)\ +\ \alpha_3 y'(0)\ =\ 0$$

$$y'(0)\ =\ \left(\frac{\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2}{-\alpha_3}\right)y(0)$$

elde edilir.

(4.1.3) sınır koşulundan ise:

$$(\beta_0 +\ \beta_1\lambda\ +\ \beta_2\lambda^2)\ y(1)\ +\ \beta_3 y'(1)\ =\ 0$$

$$y'(1)\ =\ \left(\frac{\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2}{-\beta_3}\right)y(1)$$

elde edilir.

(4.1.2) ve (4.1.3) sınır koşullarından elde edilen bu değerleri (4.1.6)’ da yerlerine yazalım.

$$\int_0^1 y''(x,\lambda)\overline{y(x,\lambda)} = \left(\frac{\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2}{-\beta_3}\right)|\,y(1,\lambda)|^2 - \left(\frac{\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2}{-\alpha_3}\right)|\,y(0,\lambda)|^2 -$$
$$-\int_0^1 |\,y'(x,\lambda)|^2\ dx$$

Bu bulduğumuz eşitliği (4.1.5)’e uygulayalım.

$$\lambda^2\int_0^1 |\, y(x,\lambda)|^2\, dx\ + \left(\frac{\alpha_0 +\ \alpha_1\lambda\ +\ \alpha_2\lambda^2}{\alpha_3}\right)|\, y(0,\lambda)|^2 - \left(\frac{\beta_0 +\ \beta_1\lambda\ +\ \beta_2\lambda^2}{\beta_3}\right)|\, y(1,\lambda)|^2 -$$

$$-\int_0^1 |\, y'(x,\lambda)\ \ |^2\ dx - \int_0^1 q(x)\,|\, y(x,\lambda)|^2\ dx = 0$$

(4.1.5)' i aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\mathrm{A}(\lambda)\lambda^2 + B(\lambda)\lambda + C(\lambda) = 0$$

Burada;

$$A(\lambda) = \int_0^1 |\, y(x,\lambda)|^2\ dx + \frac{\alpha_2}{\alpha_3}|\, y(0,\lambda)|^2 - \frac{\beta_2}{\beta_3}|\, y(1,\lambda)|^2$$

$$B(\lambda) = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}|\, y(0,\lambda)|^2 - \frac{\beta_1}{\beta_3}|\, y(1,\lambda)|^2$$

$$C(\lambda) = -\int_0^1 |\, y'(x,\lambda)|^2\ dx - \int_0^1 q(x)\,|\, y(x,\lambda)|^2\ dx + \frac{\alpha_0}{\alpha_3}|\, y(0,\lambda)|^2 - \frac{\beta_0}{\beta_3}|\, y(1,\lambda)^2\,|$$

Böylece λ özdeğeri;

$$A(\lambda)z^2 + B(\lambda)z + C(\lambda) = 0 \qquad (4.1.7)$$

quadratic denklemin kökleridir.

(4.1.4)' ten

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} > 0\ , \qquad \frac{\beta_2}{\beta_3} < 0$$

olur. Böylece,

$$A(\lambda) > 0$$

olduğu elde edilir.

Yine (4.1.4) koşulundan,

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_3} < 0 \quad , \quad \frac{\beta_0}{\beta_3} > 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $C(\lambda) < 0$ olur.

Böylece,

$$B^2(\lambda) - 4A(\lambda)C(\lambda) > 0$$

oldu.

Sonuç olarak (4.1.7) denkleminin (4.1.4) koşulu altında sadece reel kökleri vardır.•

4.1.2. Teorem: (4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin özdeğerleri sonlu limit noktasına sahip olmayan, sayılabilirden fazla olmayan bir küme oluşturur.
(4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin özdeğerleri basittirler.

İspat: Lemma 4.1.1'de λ özdeğerlerinin reel olduğunu ispatlamıştık.
(4.1.1) denkleminin,

$$\psi(0,\lambda)=1 \qquad \psi'(0,\lambda) = \frac{-\alpha_0 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2}{\alpha_3} \qquad \alpha_3 \neq 0 \tag{4.1.8}$$

başlangıç değer koşullarını sağlayan tek bir çözümü vardır ve her sabit $x \in [0,1]$ için $\psi(x,\lambda)$ λ'ya bağlı tam fonksiyondur.[teorem 3.1.5].Bu yüzden, sıfırları sayılabilenden fazla değil ve sonlu limit noktasına sahip değildir.

(4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin özdeğerlerinin basit olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki denklemin basit köklere sahip olduğunu göstermek yeterlidir. (4.1.8) sınır koşulları (4.1.2)' yi sağlar (4.1.3)' ü sağlatalım.

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)\psi(1,\lambda) + \beta_3\psi'(1,\lambda) = 0 \tag{4.1.9}$$

(4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin özdeğerleri bu denklemin kökleridir.

$\lambda=\lambda^*$ (4.1.9) denkleminin 2 katlı kökü ise o halde

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda^* + \beta_2\lambda^{*2})\psi(1,\lambda^*) + \beta_3\psi'(1,\lambda^*) = 0 \tag{4.1.10}$$

$$(\beta_1+2\beta_2\lambda^*)\psi(1,\lambda^*)+(\beta_0+\beta_1\lambda^*+\beta_2\lambda^{*2})\frac{\partial\psi(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*}+\frac{\beta_3\partial\psi'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*}=0 \qquad (4.1.11)$$

bağıntıların sağlanması gerekir.

$\psi(x,\lambda)$, (4.1.1) denkleminin çözümü olduğundan (4.1.1) denklemini λ ve μ özdeğerleri için yazalım.

$$-\psi''(x,\lambda)+q(x)\psi(x,\lambda)=\lambda^2\psi(x,\lambda)$$
$$-\psi''(x,\mu)+q(x)\psi(x,\mu)=\lambda^2\psi(x,\mu)$$

Bu iki denklemden birincisini $\psi(x,\mu)$ ile ikincisini $\psi(x,\lambda)$ ile çarpalım ve taraf tarafa çıkaralım.

$$-\psi''(x,\lambda)\psi(x,\mu)+\psi(x,\lambda)\psi''(x,\mu)=(\lambda^2-\mu^2)\psi(x,\lambda)\psi(x,\mu)$$
$$\frac{d}{dx}\left[\psi(x,\lambda)\psi'(x,\mu)-\psi(x,\mu)\psi'(x,\lambda)\right]=(\lambda^2-\mu^2)\psi(x,\lambda)\psi(x,\mu)=0$$

Bu eşitliği gösterelim.

İntegrallemeden ve (4.1.3) koşulundan kullanarak elde ederiz ki $\lambda\neq\mu$ olduğunda

$$\psi(x,\lambda)\psi'(x,\mu)-\psi(x,\mu)\psi'(x,\lambda)\big|_0^1=(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)\int_0^1\psi(x,\lambda)\psi(x,\mu)dx$$
$$\psi(1,\lambda)\psi'(1,\mu)-\psi(1,\mu)\psi'(1,\lambda)-\psi(0,\lambda)\psi'(0,\mu)+\psi(0,\mu)\psi'(0,\lambda)=$$
$$=(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)\int_0^1\psi(x,\lambda)\psi(x,\mu)dx$$

elde edilir.

$$\psi'(0,\mu)=\left(\frac{\alpha_0+\alpha_1\mu+\alpha_2\mu^2}{-\alpha_3}\right)\psi(0,\mu)$$

ve

$$\psi'(0,\lambda)=\left(\frac{\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2}{-\alpha_3}\right)\psi(0,\lambda)$$

eşitliklerini yukarıdaki denklemde yerlerine yazalım.

$$\frac{\psi(1,\lambda)\psi'(1,\mu)-\psi(1,\mu)\psi'(1,\lambda)}{\lambda-\mu}+\frac{\psi(0,\lambda)\psi(0,\mu)}{\lambda-\mu}\left(\frac{\alpha_1(\mu-\lambda)+\alpha_2(\mu^2-\lambda^2)}{\alpha_3}\right)=$$

$$=(\lambda+\mu)\int_0^1\psi(x,\lambda)\psi(x,\mu)dx$$

Burada,

$$\psi(0,\lambda)=1 \quad , \quad \psi(0,\mu)=1$$

dir. Dolayısıyla,

$$\frac{\psi(1,\lambda)\psi'(1,\mu)-\psi(1,\mu)\psi'(1,\lambda)}{\lambda-\mu}-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}(\lambda+\mu)=(\lambda+\mu)\int_0^1\psi(x,\lambda)\psi(x,\mu)dx$$

$$\frac{\psi(1,\lambda)\psi'(1,\mu)-\psi(1,\mu)\psi'(1,\lambda)}{\lambda-\mu}-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=(\lambda+\mu)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\int_0^1\psi(x,\lambda)\psi(x,\mu)dx\right)$$

$\mu\to\lambda$ limit alalım ve $\lambda=\lambda^*$ yazalım.

$$\psi'(1,\lambda^*)\frac{\partial\psi(1,\lambda^*)}{\partial\lambda}-\psi(1,\lambda^*)\frac{\partial\psi'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*}-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=2\lambda^*\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\int_0^1\psi^2(x,\lambda^*)dx\right) \qquad (4.1.12)$$

elde ederiz.

(4.1.10) ve (4.1.11) den

$$\frac{\partial\psi'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*}=-\left(\frac{\beta_1+2\beta_2\lambda^*}{\beta_3}\right)\psi(1,\lambda^*)-\left(\frac{\beta_0+\beta_1\lambda^*+\beta_2\lambda^{*2}}{\beta_3}\right)\frac{\partial\psi(1,\lambda^*)}{\partial\lambda^*}$$

$$\psi'(1,\lambda^*)=-\left(\frac{\beta_0+\beta_1\lambda^*+\beta_2\lambda^{*2}}{\beta_3}\right)\psi(1,\lambda^*)$$

Elde ettiğimiz bu eşitlikleri (4.1.12)' de yerlerine yazalım.

$$2\lambda^*\left[\int_0^1 \psi^2(x,\lambda^*)dx+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}-\frac{\beta_2}{\beta_3}\psi^2(1,\lambda^*)\right]=\frac{\beta_1}{\beta_3}\psi^2(1,\lambda^*)-\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \tag{4.1.13}$$

λ^*, özdeğer olduğundan lemma 4.1.1 de gösterildiği üzere,

$$A(\lambda^*)\lambda^{*2}+B(\lambda^*)\lambda^*+C(\lambda^*)=0 \tag{4.1.14}$$

Burada,

$$A(\lambda^*)=\int_0^1 \psi^2(x,\lambda^*)dx+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}-\frac{\beta_2}{\beta_3}\psi^2(1,\lambda^*) \tag{4.1.15}$$

ve (4.1.4) koşulundan,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3}>0 \quad , \quad \frac{\beta_2}{\beta_3}<0$$

olduğundan

$$A(\lambda^*)>0$$

elde edilir.

$$B(\lambda^*)=\frac{\alpha_1}{\alpha_3}-\frac{\beta_1}{\beta_3}\psi^2(1,\lambda^*) \tag{4.1.16}$$

$$C(\lambda^*)=\frac{\alpha_0}{\alpha_3}-\frac{\beta_0}{\beta_3}\psi^2(1,\lambda^*)-\int_0^1 \psi'^2(x,\lambda^*)dx-\int_0^1 q(x)\psi^2(x,\lambda^*)dx \tag{4.1.17}$$

(4.1.13), (4.1.15) ve (4.1.16) dan,

$$\lambda^* = -\frac{B(\lambda^*)}{2A(\lambda^*)}$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla (4.1.14)'ten

$$B^2(\lambda^*) = 4A(\lambda^*)C(\lambda^*) \tag{4.1.18}$$

elde edildi.

Oysa ki lemma 4.1.1'de $C(\lambda^*) < 0$ olduğu gösterilmişti. Bu (4.1.18)'e çelişkidir.

Çünkü $4A(\lambda^*)C(\lambda^*) < 0$ ve $B^2(\lambda^*) > 0$ olduğundan (4.1.18) deki eşitlik sağlanamaz.

Dolayısıyla (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerleri basittirler.•

4.2 (4.1.1)-(4.1.3) PROBLEMİNİN SALINIM ÖZELLİĞİ

4.2.1. Lemma: u (x) fonksiyonu,

$$u''(x) + g(x)u = 0 \tag{4.2.1}$$

$$u(0) = 1$$

$$u'(0) = \frac{-\alpha_0 - \alpha_1\lambda' - \alpha_2\lambda'^2}{\alpha_3}$$

başlangıç değer koşulunu sağlayan çözümü olsun.

v (x) fonksiyonu,

$$\begin{aligned} &v''(x) + h(x)v = 0 \\ &v(0) = 1 \\ &v'(0) = \frac{-\alpha_0 - \alpha_1\lambda'' - \alpha_2\lambda''^2}{\alpha_3} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

başlangıç değer koşulunu sağlayan çözümü olsun.

Varsayalım ki;

$$g(x) < h(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

ve ya $\lambda'' > \lambda' \ge \max\left\{0, \frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}\right\}$ ya da $\lambda'' < \lambda' \le \min\left\{0, \frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}\right\}$ olsun.

O halde, eğer u (x)'in $0 \le x \le 1$ aralığında m tane sıfırı var ise o halde v (x)'in bu aralıkta sıfırlarının sayısı m'den az değildir. Ayrıca v (x)'in k. sıfırı u (x)'in k. sıfırından küçüktür.

İspat: Birinci durumu ele alalım. Yani,

$$\lambda'' > \lambda' \ge \max\left\{0, \frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}\right\}$$

olsun. x_1, u (x) fonksiyonunun sıfıra yakın ilk sıfırı olsun. Bu durumda,

$$u(x_1) = 0$$

dır. O zaman Sturm Teoremine göre, $[0, x_1]$ aralığında v (x)'in en az bir sıfırı olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini varsayalım, $0 \le x \le 1$ olduğunda

$$u\,(\mathrm{x}) > 0, \quad v\,(\mathrm{x}) > 0$$

şeklinde olsun. $u(x_1) = 0$ x_1, u (x)'in ilk sıfırı ve u (x)>0 kabulümüzden u (x) x_1'in komşuluğunda azalandır. Bu nedenle;

$$u'(x_1) \le 0$$

(4.2.1) denklemini v (x) ile (4.2.2) denklemini u (x) ile çarpıp çıkarırsak;

$$\frac{d}{dx}(u'v - uv') = (h(x) - g(x))u(x)v(x)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi 0'dan x_1'e kadar integrallersek

$$u'(x_1)v(x_1) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}(\lambda'' - \lambda') - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}(\lambda''^2 - \lambda'^2) = \int_0^{x_1}(h(x) - g(x))u(x)v(x)dx \qquad (4.2.3)$$

elde ederiz.

$(0,x_1)$ aralığında $g(x)<h(x)$, u(x)>0, $v(x)$>0 olduğundan sağ taraftaki ifade pozitiftir.

$$u'(x_1).v(x_1)\le 0 \qquad \text{ve} \quad \alpha_2>0\,, \quad \alpha_3>0\,, \quad \lambda''>\lambda'\ge \max\left\{0,\frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}\right\}$$

olduğundan,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3}(\lambda''-\lambda')+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}(\lambda''^2-\lambda'^2)=(\lambda''-\lambda')\left\{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}(\lambda''+\lambda')\right\}>$$

$$>(\lambda''-\lambda')\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_3}+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}2\max\left\{0,\frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}\right\}\right]$$

$$\ge 0$$

Bu nedenle (4.2.3) eşitliğinin sol tarafı negatif olur. Bu ise çelişki oluşturur, dolayısıyla varsayımımız yanlıştır.

2. durumda benzer yolla ispatlanır.•

4.2.2. Lemma: λ =0, (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğeri değildir.

İspat: $\psi(x)$ ile,

$$-\psi''+q(x)\psi=0\,,$$

$$\psi(0)=1$$

$$\psi'(0)=\frac{-\alpha_0}{\alpha_3}$$

başlangıç değer probleminin çözümünü işaretleyelim. Gösterelim ki $\psi(x)$, (4.1.3) sınır koşulunu sağlamıyor. Yani;

$$\frac{\beta_0}{\beta_3}\psi(1)+\psi'(1)\ne 0\,.$$

Bunun için kabul edelim ki

$$\frac{\beta_0}{\beta_3}\psi(1)+\psi'(1)=0$$

olsun.

$$\frac{-\beta_0}{\beta_3}=\frac{\psi'(1)}{\psi(1)}$$

ise (4.1.4) koşulundan dolayı

$$\psi(1)\psi'(1)<0$$

şeklinde olur.

Öte yandan $-\psi''+q(x)\psi=0$ denklemini 0'dan 1' e kadar x' e göre integre edelim.

$$\psi(1)\psi'(1)=\frac{-\alpha_0}{\alpha_3}+\int_0^1\psi'^2(x)dx+\int_0^1 q(x)\psi^2(x)dx$$

(4.1.4) koşulundan ve q(x)$\geq$0 olduğundan,

$$\psi(1)\psi'(1)>0$$

elde edilir.

Bu ise çelişkidir. Bundan dolayı,

$$\frac{\beta_0}{\beta_3}\psi(1)+\psi'(1)\neq 0\,.$$

Dolayısıyla lemma ispatlanmış olur.•

4.2.3. Teorem: (Salınım Teoremi)

(4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin sonsuz azalan negatif $\{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri ve sonsuz artan pozitif $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri vardır:

$...<\lambda_{-n}<\lambda_{-n+1}<...<\lambda_{-1}<\lambda_1<...<\lambda_{n-1}<\lambda_n<...$

Öyle;

$n_*\in \mathrm{N}, n^*\in \mathrm{N}$ ve $k_*, k^*\in \mathrm{N}\cup\{0\}$ vardır ki;

λ_{-n} $(n\geq n_*)$ ve λ_n $((n\geq n^*)$ özdeğerlerine uygun özfonksiyonların (0,1) aralığında uygun olarak $(n+k_*-n_*)$ ve $(n+k^*-n^*)$ sayısı kadar sıfırları vardır.

İspat: Pozitif özdeğerlerin varlığını kanıtlayalım. Negatifler için benzer yolla gösterilebilir.

$$\lambda \geq \lambda^* \equiv \max\left\{0; \frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}; \frac{-\beta_1}{2\beta_2}\right\}$$

ve $\psi(x,\lambda)$, (4.1.1) denkleminin

$$\psi(0,\lambda) = 1 \tag{4.2.4}$$

$$\psi'(0,\lambda) = \frac{-(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)}{\alpha_3}$$

başlangıç değer koşulunu sağlayan çözümü olsun.

Önce ispatladığımız teorem 3.1.7' e göre λ sayısı arttığında $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı azalmıyor. $\forall x \in [0,1]$ için $0 \leq q(x) < c$ olsun.

$$y'' + (\lambda^2 - c)y = 0 \tag{4.2.5}$$

denkleminin (4.2.4) başlangıç değer koşulunu sağlayan çözümü;

$$y = \cos(x\sqrt{\lambda^2 - c}) - \frac{\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2}{\alpha_3\sqrt{\lambda^2 - c}}\sin(x\sqrt{\lambda^2 - c}) \tag{4.2.6}$$

biçiminde olur. λ pozitif olarak artan olduğundan (4.2.6) fonksiyonunun (0,1) aralığındaki sıfırlarının sayısı sonsuz artandır. (4.1.1) denklemini (4.2.5) denklemi ile karşılaştıralım.

O zaman sonuç 3.1.9'a göre elde ederiz ki pozitif sonsuz artan λ özdeğerine uygun $\psi(x,\lambda)$ özfonksiyonunun (0,1) aralığında yerleşen sıfırlarının sayısı sonsuz artandır.

$\lambda \geq \lambda^*$ olduğunda $\psi(x,\lambda)$ =0 denklemini göz önüne alalım. Varsayalım ki $\psi(x,\lambda^*)$ fonksiyonunun (0,1) aralığındaki sıfırlarının sayısı k^* olsun. Lemma 3.1.8'e göre $\psi(x,\lambda)$ =0 denkleminin sıfırları λ'ya sürekli bağlıdır. Diğer yandan; λ arttıkça $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonunun her bir sıfırı sola ötelenir ancak sıfır noktasından dışarı çıkmaz, çünkü sıfırlarının sayısı azalan değildir.

Lemma 3.1.8'den elde edilen sonuca göre fonksiyonun sıfırları 1'den girebilir. $\tilde{\lambda}_0$, $\lambda \geq \lambda^*$ parametresi için $\psi(1,\lambda)=0$ bağıntısını sağlayan λ'nın ilk değeri olsun. $\tilde{\lambda}_0$ değeri her zaman bulunur.

$\tilde{\lambda}_1$ ile ($\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_0$) λ'nın $\psi(1,\lambda)=0$ bağıntısını sağlayan ikinci değeri olsun.

Ve böyle devam ettirecek olursak açıktır ki; $\psi(x,\tilde{\lambda}_0)$ fonksiyonunun (0,1) aralığındaki sıfırlarının sayısı k^* kadardır.

$$\tilde{\lambda}_0,\ \tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\lambda}_2, \ldots$$

dizisi öyle bir özelliğe sahip olur ki uygun $\psi(x,\tilde{\lambda}_k)$ fonksiyonu (0,1) aralığında k+k^* sayısı kadar sıfıra sahiptir ve $\psi(1,\tilde{\lambda}_k)=0$ dır. Kolaylıkla elde edilir ki $\tilde{\lambda}_k$ k=0,1,2,… sayıları çözümler sıfır olduğundan, (4.1.1)-(4.1.3) probleminin özdeğerleri değildir.

$\dfrac{\psi'(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}$ fonksiyonu $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ aralığında kesin azalandır.

$$\psi(1,\tilde{\lambda}_k)=\psi(1,\tilde{\lambda}_{k+1})=0$$

olduğundan $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ aralığında $\dfrac{\psi'(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}$ fonksiyonu $(+\infty)$'dan $(-\infty)$'a doğru ciddi azalandır.

$P(\lambda)=\dfrac{-\beta_0-\beta_1\lambda-\beta_2\lambda^2}{\beta_3}$ fonksiyonu $\lambda \geq \dfrac{-\beta_1}{2\beta_2}$ olduğunda kesin artandır. Buna göre $\lambda \geq \tilde{\lambda}_0$ olduğunda da kesin artandır (çünkü $\tilde{\lambda}_0 \geq \lambda^* \geq \dfrac{-\beta_1}{2\beta_2}$).

n^*-1 (4.1.1)-(4.1.3) probleminin $[0,\tilde{\lambda}_0]$ aralığındaki özdeğerlerinin sayısı olsun.

$\dfrac{\psi'(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}$ fonksiyonu $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ aralığında $(+\infty)$'dan $(-\infty)$'a kesin azalan olduğundan öyle tek bir $\lambda_{n^*+k} \in (\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ sayısı bulunur ki bu değerde;

$$\frac{\psi'(1,\lambda^*_{n+k})}{\psi(1,\lambda^*_{n+k})}=P(\lambda_{n^*+k})$$

olur. Yani, (4.1.3) koşulu sağlanır. Dolayısıyla λ_{n^*+k} (4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer problemininin özdeğeridir. Uygun $\psi(x,\lambda_{n^*+k})$ özfonksiyonu ise (0,1)'da $\psi(x,\tilde{\lambda}_k)$ fonksiyonunun sıfırları kadar sıfıra sahiptir. Yani bu aralıkta sıfırlarının sayısı $k+k^*$ olur.•

5. SONUÇLAR

Bu tezde ele alınan sonuçlar, *Bulgular ve Tartışma* bölümünde

4.1 AĞIRLIKLI TELİN TİTREŞİMİNDE OLUŞAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN YAYILIMI

4.2 (4.1.1)-(4.1.3) PROBLEMİNİN SALINIM ÖZELLİĞİ.

Başlıkları altında toplanmıştır.

4.1' de fiziksel probleme ilişkin

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < 1 \tag{4.1.1}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(0) + \alpha_3 y'(0) = 0 \tag{4.1.2}$$

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)y(1) + \beta_3 y'(1) = 0 \tag{4.1.3}$$

Sınır-değer problemi ele alınır.

Burada, λ spektral parametre, $q(x)$ C[0,1] sınıfından olan reel değerli ve $q(x) \geq 0$ şeklinde bir fonksiyon α_i ve β_i (i = 0,1,2,3) reel sabitlerdir.

Ayrıca,

$$\alpha_0 < 0, \alpha_2 > 0, \ \alpha_3 > 0, \ \beta_0 < 0, \beta_2 > 0, \beta_3 < 0$$

koşulları altında bu sınır-değer problemin özdeğerlerinin aşağıdaki özellikleri ispatlandı.

Bu problemin özdeğerleri reeldir.

Sıfır reel sayısı (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğeri değildir.

(4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin özdeğerlerinin kümesi sayılabilirden fazla değildir ve sonlu limit noktasına sahip değildir.

Bu sınır-değer probleminin özdeğerleri basittirler.

4.2.' de

Bu problemin salınım özellikleri incelendi. Yani, (4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin sonsuz azalan negatif $\{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri ve sonsuz artan pozitif $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri vardır:

$$...<\lambda_{-n}<\lambda_{-n+1}<...<\lambda_{-1}<\lambda_1<...<\lambda_{n-1}<\lambda_n<...$$

Öyle;

$n_* \in \mathrm{N}, n^* \in \mathrm{N}$ ve $k_*, k^* \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ vardır ki;

λ_{-n} $(n \geq n_*)$ ve λ_n $(n \geq n^*)$ özdeğerlerine uygun özfonksiyonların (0,1) aralığında uygun olarak $(n+k_*-n_*)$ ve $(n+k^*-n^*)$ sayısı kadar sıfıra sahip olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR

[1] Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. "Introduction to Spectral Theory", American Mathematical Society, United States of America, p.524, (1975).

[2] Schneider A., "A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions", Math.Z., **136**, p 163-167, (1974).

[3] Fulton, C.T. "Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions", Proc. Roy. Soc. Edin., **77A**, p.293-308, (1977).

[4] Hinton D.B. "An Expantion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenparameter in the Boundary Condition", Quart. J.Math. Oxford, **30**, No.**2**, p.33-42, (1979).

[5] E.M. Russakovski, "Funk. Analizi ee Prilojeniya", v.**9**, No.**4**, p. 91-92, (1975).

[6] Pivovarchik, V.N. "Direct and Inverse Problem for a Damped String" J. Operator Theory, **42**, p.180-220, (1999).

[7] Cox, S. Zuazua, E. "The Rate at Which Energy Decays in a String Damped at One End", Indıana Univ. Math. J. **44**, (1995).

[8] Marchenko, V.A. "Sturm Liouville Operators and Applications", Birkhauser Verlag, Boston, p.364, (1986).

[9] Naimark, M.A. "Linear Differantial Operators", Frederic Ungar Publishing, New York, p.144, (1969)

[10] Coddington E.A, Levinson N. "Theory of Ordinary Differantial Equations", McGraw-Hill, New York, p.429, (1965).

[11] Walter, I. "Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions", Math.Z, 133, (1997).

[12] Binding, P.A. and Browne, P.J. "Left Definite Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions", Differantial and Integral Equations, v.**12**, no**2**, (1999).

[13] Mamedov, Kh.R. "On One Boundary Value Problem with Parameter in the Boundary Conditions, Spectral Theory of Operators and its Applications, v**11**, (1997).

[14] Shkalikov, A.A. “Boundary Value Problems for Ordinary Differantial Equations with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions”, Tr.sem. Petrovskow, no.**9**, (1983).

[15] Binding, P.A., Browne, P.J., Seddighi, K.. “Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions”, Proc. Edinburgh Math, Soc. **37**, p. 7-72, (1993).

[16] Kerimov N.B, Mamedov Kh.Ri , “On a Boundary Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions”, Sib. Math. Jour., **40**, no**2**, (1999).

[17] Poisson, M., “Surla maniere d’ experimer les fonctions par des series se quanties periodiques, et sur l’ usage de cette trnsformation dans la resdution de differents problems”, 18^{eme} cahier tome XI de l’ecole politechnique de Paris, (1820).

[18] Kerimov N.B, Mamedov, “The Sturm-Liouville Problem with non-lineer Spectral Parameter in the Boundary Conditions”, İzv. An Azerb., (2001).

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Tomarza'da doğdum. İlk ve orta okulu MEV Özel Toros Koleji'nde, liseyi ise Özel Toros Fen Lisesi'nde tamamladım.

1998 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladım ve 1999 yılında yatay geçişle Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne geldim. 2002 yılında lisans eğitimimi tamamladım

2002 yılından beri Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans yapmaktayım.