SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

AYNUR ÇÖL

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hanlar MEMMEDOV

MERSİN
Haziran-2005

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hanlar MEMMEDOV

Jüri Üyesi
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

Jüri Üyesi
Yrd.Doç Dr. Serbülent YILDIRIM

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun 06../09../2005..tarih ve 2005/23/...415... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ÖZ

Bu çalışmada Dirac denklemler sistemi için sınır koşulu spektral parametre içeren

$$BY' + mTY + \Omega(x)Y = \lambda Y$$

$$Y_2(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda)Y_1(0) = 0$$

sınır değer problemi ele alınır. Sınır probleminin spektral karakteristikleri olarak saçılma verilerine göre saçılma teorisinin ters problemi incelenir ve potansiyelin inşası yöntemi gösterilir.

Anahtar Kelimeler: Dirac denklemler sistemi, saçılma verileri, saçılma teorisinin ters problemi ve Parseval eşitliği.

ABSTRACT

In this work, it is considered a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary condition for Dirac equations system generated by the differential equation

$$BY' + mTY + \Omega(x)Y = \lambda Y$$

and the boundary condition

$$Y_2(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda)Y_1(0) = 0.$$

It is examined inverse problem of scattering theory according to scattering data as spectral characteristics of boundary value problem and it is showed the method for construction of potential by using scattering data .

Key words: Dirac equations system, scattering data, inverse problem of scattering theory and Parseval equality.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Hanlar MEMMEDOV'a teşekkür ederim. Ayrıca, bu çalışma boyunca yardımını esirgemeyen bölümdeki hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\ell(y)$	Lineer diferansiyel ifade
$U_k(y)$	Sınır koşulları
L	Diferansiyel operatörler
L^*	L 'nin eşlenik operatörü
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
λ	Spektral parametre
$\Delta(\lambda)$	L operatörünün karakteristik polinomu
$D(L)$	L operatörünün tanım bölgesi
W	determinant veya Wronskian
$S(\lambda)$	Saçılma fonksiyonu
$\tilde{F}$	F 'in transpozu
F^*	$\overline{\tilde{F}}$
R_λ	Rezolvent operatör
$k=\overline{1,n}$	$k=1,...,n$
$\hbar$	Plank sabiti
m	kütle
$V(x)$	Karşılıklı etkileşme potansiyeli
$\Omega(x)$	Potansiyel fonksiyon
$\square$	İspatın bittiğini gösterir.

1. GİRİŞ

Genelde, fizikte kuvvet bilindiğinde parçacıklarının davranışları veya madde yapısı bilindiğinde ışının dağılımının incelenmesi ilgi çeken bir konudur. Ters problemde ise gözlemlenen harekete göre kuvvet hakkında veya madde yapısı hakkında sonuca ulaşmak önemlidir. Fizikte ters problem ilk kez 1877 yılında Raylligh J.W.S. tarafından gündeme getirilmiştir [1]. Homojen olmayan telin titreşimini inceleyerek, titreşim frekansları yardımıyla telin yoğunluk dağılımını belirtmek istemiş ve bundan dolayı ters problemin matematiksel incelenmesine dikkat çekmiştir.

Schrödinger denkleminin oluşması ile diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerine bağlı matematiksel kavramların fiziksel anlamı çok gelişti. Bu tipli sınır problemleri önceleri sadece mekanik titreşimlerde karşılaşılmış olmasına rağmen şimdi kuantum fiziğinde de geniş kullanıma sahiptir. Kuantum fiziğinde düz problem, verilen potansiyelli karşılıklı etkilemede dalga fonksiyonunu Schrödinger denkleminin çözümü olarak bulmak ve dalga fonksiyonu ile ele alınan sistemin tüm gözlemlenen özelliklerini tanımlamaktır. Ters problem ise deneyden elde edilen saçılma verilerine göre potansiyeli inşa etmektir.

Klasik kuantum mekaniğinde iki m_1, m_2 kütleli parçacıkların ve ε enerjisinin oluşturduğu durağan durum

$$-\frac{\hbar}{2M}\Delta\Psi + V(x)\Psi = \varepsilon\Psi$$

Schrödinger denklemini sağlayan Ψ fonksiyonları ile ifade edilir. Burada $\hbar$ Plank sabiti, $M = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ indirgenmiş kütle, $V(x)$ karşılıklı etkileşme potansiyeli ve $x = |\vec{x}|$ parçacıklar arasındaki mesafedir. Bu denklemde

$$\Psi(x) = x^{-1} u_\ell(\varepsilon, x) \gamma_\ell^m(\theta, \varphi)$$

alınarak denklem değişkenlerine ayrılabilir. Burada $\gamma_\ell^m(\theta,\varphi)$ küresel fonksiyonlardır. $u_\ell(\varepsilon, x)$ fonksiyonu

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left\{u_\ell'' + \ell(\ell+1)x^{-2}u_\ell\right\} + V(x)u_\ell = \varepsilon u_\ell$$

denklemini ve

$$u_\ell(\varepsilon,0)=0$$

sınır koşulunu sağlar. Kısa olması için

$$q(x)=\frac{2M}{\hbar^2}V(x), \qquad \lambda^2=\frac{2M\varepsilon}{\hbar^2}, \qquad u_\ell(\lambda,x)=u_\ell(\varepsilon,x)$$

ifadeleri kullanılırsa

$$-u_\ell''+q(x)u_\ell+\ell(\ell+1)x^{-2}u_\ell=\lambda^2u_\ell \tag{1.1}$$

$$u_\ell(\lambda,0)=0 \tag{1.2}$$

sınır değer problemi elde edilir. Bu sınır değer probleminin sonsuzluktaki sınırlı çözümüne *radyal dalga fonksiyonu* denir.

$V(x)$ potansiyeli $\int_0^\infty x|q(x)|dx<\infty$ koşulunu sağlasın ve $\ell=0$ olsun. O halde (1.1) ve (1.2) sınır değer probleminin $\lambda^2>0$ ve $\lambda=i\lambda_k$ $(k=1,...,n)$ olduğunda sınırlı çözümleri vardır ve $x\to\infty$ olduğunda bu çözümler

$$u_0(\lambda,x)=e^{-i\lambda x}-S(\lambda)e^{i\lambda x}+o(1), \qquad (0<\lambda^2<\infty)$$

ve

$$u_0(i\lambda_k,x)=m_ke^{-\lambda_k x}(1+o(1)), \qquad (k=1,...,n)$$

asimtotik formülleri sağlar. Görüldüğü gibi $\{S(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty);\lambda_k;m_k(k=1,...,n)\}$ değerler topluluğu, $u_0(\lambda,x)$ radyal dalga fonksiyonlarının sonsuzluktaki davranışlarını belirliyor. ℓ'nin diğer değerleri için de benzer durumlar geçerlidir.

Ele alınan sistemi tam ifade etmek için radyal dalga fonksiyonlarının sonsuzluktaki davranışını bilmek yeterlidir. Çünkü bu bütün gözlemlenen olayları ifade etmeye imkan veriyor. Böylece Ψ fonksiyonlarının sonsuzluktaki davranışlarının $V(x)$ potansiyelini belirleyip belirlemediği sorusu ortaya çıkıyor. Diğer bir deyişle, $V(x)$ potansiyeli deneysel verilerden elde edilebilir mi?

Potansiyelin deney sonuçlarından elde edilen verilere göre inşa olunması problemine *kuantum saçılma teorisinin ters problemi* denir. Çünkü esas bilgiler parçacıkların saçılması deneyinden elde edilir. Bu kavramlardan dolayı $u_0(\lambda,x)$ radyal dalga fonksiyonlarının sonsuzluktaki davranışını belirten

$\{S(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty);\lambda_k;m_k(k=1,...,n)\}$ değerler topluluğuna (1.1) ve (1.2) sınır değer probleminin *saçılma verileri* denir. [2], [3]' de saçılma verilerine göre $V(x)$ potansiyeli tek türlü inşa edilir. $\{S(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty);\lambda_k;m_k(k=1,...,n)\}$ topluluğunun (1.1) ve (1.2) biçimindeki sınır değer probleminin saçılma verileri olması için aşağıdaki I, II koşullarının sağlanması gerekli ve yeterlidir.

I . $S(\lambda)$ fonksiyonu tüm eksende süreklidir.

$$S(\lambda)=\overline{S(-\lambda)}=\{S(-\lambda)\}^{-1}$$

eşitliği sağlanır ve $|\lambda|\to\infty$ iken $1-S(\lambda)$ sıfıra yakınsar , $1-S(\lambda)$ fonksiyonu

$$F_S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-S(\lambda))e^{i\lambda x}d\lambda$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. $F_S(x)=F_S^{(1)}(x)+F_S^{(2)}(x)$ biçimindedir, $F_S^{(1)}(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, $F_S^{(2)}(x)$ sınırlıdır ve $F_S^{(2)}(x)\in L_2(-\infty,\infty)$. Pozitif reel eksende $F_S(x)$ fonksiyonunun $F_S'(x)$ türevi vardır ve

$$\int_0^{\infty}x|F_S'(x)|dx<\infty$$

koşulunu sağlar .

II . $S(\lambda)$ fonksiyonunun argüment değişimi ile (1.1) ve (1.2) sınır değer probleminin negatif özdeğerlerinin sayısı n arasında

$$n=\frac{\ln S(0+)-\ln S(+\infty)}{2\pi i}-\frac{1-S(0)}{4}$$

formülü ile ifade edilen bir bağıntı vardır.

Schrödinger denklemi ile oluşan sınır problemi üzerinde saçılma verilerini, saçılma teorisinin düz ve ters problemlerini tanımladıktan sonra saçılma teorisinin ters problemi ile lineer olmayan evrimleşme denklemlerin çözülmesi yönteminin ilk kez 1967 yılında bir grup Amerikan matematikçileri tarafından bulunduğunu hatırlatalım [4]. Bu buluştan sonra saçılma teorisinin ters problemi bir çok lineer olmayan (Kortvega-de Vriz, Lineer olmayan Schrödinger, Kleyn-Gordan, Sin-Gordon , Toda zincirleri vs. gibi) fiziksel denklemlere geniş olarak uygulanmaya başlandı. Bundan dolayı lineer olmayan evrimleşme denklemler için saçılmanın ters problemi gibi çözüm yöntemi gelişti. Bu yönde elde edilen çalışmalar [2], [5], [6]' da ele alınmıştır .

Saçılma teorisinin ters probleminin önemli tarafı lineer olmayan problemi lineer teorinin yöntemleri ile çözmeye imkan vermesidir. Ancak bu yöntem lineer problem için saçılma teorisinin düz ve ters problemi çözüldüğünde uygulanır. Lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözülmesinde yardımcı lineer problem birinci mertebeden diferansiyel denklemler sisteminden oluşur [6]. Bu nedenle Dirac denklemler sistemi için düz ve ters problemlerin incelenmesi önem taşıyor. Dirac denklemler sistemi için klasik durumda saçılmanın ters problemi [7] ve [8] de çözülmüştür.

Tezde Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi ele alınır. Ele alınan problemde sınır koşulu klasik sınır koşullarından farklı olarak spektral parametre içerir. Problemin çözümü için [2], [3], [7], [8], [9], [10], [11] ve [12]' de bulunan yöntemler kullanılır.

Birinci bölümde

$$BY' + mTY + \Omega(x)Y = \lambda Y \tag{1.3}$$

$$Y_2(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda)Y_1(0) = 0 \tag{1.4}$$

sınır değer problemi ele alınır. Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ m > 0 \text{ kütle}$$

$\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$-matris fonksiyon, , $p(x)$, $q(x)$ reel değerli fonksiyonlardır

ve

$$|p(x)| \le \frac{c}{(1+x)^{2+\varepsilon}} , |q(x)| \le \frac{c}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \tag{1.5}$$

koşullarını sağlar (c, ε pozitif sayılardır). α_0, α_1 reel sayılardır ve $\alpha_1 < 0$, λ spektral parametredir.

(1.3) denkleminin (1.5) koşulunu sağlayan

$$F(x,\lambda) = f(x,\lambda) + \int_x^{\infty} A(x,t) f(t,\lambda) dt \tag{1.6}$$

biçiminde gösterilen çözümü vardır , burada

$$f(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\-i\end{pmatrix}e^{iKx}, \qquad K=\lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}}, \qquad |\lambda|>m$$

biçimindedir. $A(x,t)$ matris fonksiyonu için

$$\Omega(x)=BA(x,x)-A(x,x)B \tag{1.7}$$

sağlanır. $A(x,t)$ çekirdeği için

$$\left\{B\frac{\partial}{\partial x}+mT+\Omega(x)\right\}A(x,t)=-\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)B+mA(x,t)T \tag{1.8}$$

diferansiyel denklemi sağlanır. (1.8), (1.7) sınır probleminin 2 boyutlu

$$A(x,t)=\begin{pmatrix}A_{11}(x,t) & A_{12}(x,t)\\ A_{21}(x,t) & A_{22}(x,t)\end{pmatrix}$$

matris çözümü var ve

$$|A_{ij}|\le\frac{c_1}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}}, \qquad i\neq j,\ |A_{ii}|\le\frac{c_1}{(1+t)^{1+\varepsilon}}, \qquad i=\overline{1,2} \tag{1.9}$$

koşulları sağlanır.

Reel $|\lambda|>m$ ve $\lambda_j\in(-m,m)$ $(j=1,...,n)$ için (1.3), (1.4) sınır probleminin $x\to\infty$ olduğunda

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{1}{2i}\left\{\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\-i\end{pmatrix}e^{iKx}-\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\i\end{pmatrix}e^{-iKx}S(\lambda)\right\}[1+o(1)]$$

$$\Phi(x,\lambda_j)=\sqrt{\frac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}}e^{-\sqrt{m^2-\lambda_j^2}x}m_j[1+o(1)]$$

bağıntılarını sağlayan sınırlı çözümlerinin vardır . Burada $K=\lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}}$, m_k pozitif sayılar, $S(\lambda)$ ise saçılma fonksiyonudur.

Dolayısıyla $\{S(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty);\lambda_k;m_k(k=1,...,n)\}$ değerler topluluğu (1.3), (1.4) ve (1.5) sınır probleminin normlaşmış özfonksiyonlarının sonsuzluktaki davranışını belirliyor. $\{S(\lambda);\lambda_1,...,\lambda_n;m_1,...,m_n\}$ değerler topluluğuna (1.3)-(1.5) sınır değer probleminin saçılma verileri denir. Böylece (1.3)-(1.5) sınır problemi ile ifade edilen, parçacıklardan oluşan potansiyelli alanın dalgalarının sonsuzluktaki davranışını belirlemek için sınır probleminin saçılma verilerini bilmek yeterlidir. Buna göre Dirac sistemi için saçılma teorisinin ters problemi şöyle ifade edilir : $\{S(\lambda);\lambda_j;m_j\ j=1,...,n\}$ saçılma verileri yardımıyla $\Omega(x)$ potansiyel matris fonksiyonunu bulmak için en uygun yöntemi göstermek ve $\{S(\lambda);\lambda_j;m_j\ j=1,...,n\}$ değerler topluluğunun (1.3)-(1.5) sınır değer probleminin saçılma verileri olması için gerekli ve yeterli koşulları bulmaktır.

Bundan dolayı tezde önce saçılma verileri tanımlanır ve özellikleri incelenir. $S(\lambda)$ fonksiyonu $E(\lambda)$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. $E(\lambda)$' nın sıfırları $\frac{1}{E(\lambda)}$ fonksiyonunun aykırı noktaları olması nedeniyle 4.1' de $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının dağılımı araştırılır .

4.3' de (1.3)-(1.5) probleminin özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edilir. Bu nedenle $H=L_2^{(2)}(0,\infty)\times\mathbb{C}$ hilbert uzayında (1.3)-(1.5) sınır probleminin operatör biçimi yazılır ve rezolvent operatör inşa edilir.

(1.7)'den görüldüğü gibi $\Omega(x)$ potansiyel fonksiyonunu bulmak için $A(x,t)$' nin bilinmesi gerekiyor. Bundan dolayı 4.2' de (1.6) çözümünün $A(x,t)$ çekirdek fonksiyonu için

$$A(x,y)+F(x+y)+\int_x^{\infty}A(x,t)F(t+y)dt=0\ (x<y<\infty) \tag{1.10}$$

integral denklemi elde edilir. Burada

$$F(x+y)=F_S(x+y)-\sum_{j=1}^{n}f(x,\lambda_j)M_j^{\,2}\tilde{f}(y,\lambda_j) \tag{1.11}$$

$$F_S(x)=\int_{|\lambda|>m}L(\lambda)e^{-iKx}d\lambda+\int_{|\lambda|>m}L^*(\lambda)e^{iKx}d\lambda \tag{1.12}$$

ve

$$L(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}(1-S(\lambda)) \tag{1.13}$$

biçimindedir. (1.10) integral denklemine (1.3) , (1.4) sınır değer probleminin temel denklemi denir . Temel denklemin , Dirac sistemi için ters problemin çözümünde önemli yeri vardır. (1.11), (1.12), (1.13) ifadelerinden görüldüğü gibi temel denklemi inşa etmek için sadece saçılma verilerinin bilinmesi yeterlidir.

Dolayısıyla $\{S(\lambda);\lambda_1,...,\lambda_n;m_1,...,m_n\}$ saçılma verileri ile $F(x)$ fonksiyonu bulunur. $F(x)$ fonksiyonu ile (1.10) temel denklem inşa edilir. Saçılma verileri yardımıyla inşa edilmiş bu integral denklemin tek bir $A(x,t)$ çözümü varsa (1.7) formülü ile tanımlı tek bir $\Omega(x)$ potansiyeli bulunur. Böylece (1.3) denklemini inşa etmek için uygun yöntem verilmiş olur.

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

Spektral analizin ters problemi bu veya diğer spektral karakteristiklerine göre operatörün inşasına denir. Bu tür spektral karakteristikler (farklı sınır koşullarında) spektrum, spektral fonksiyon, saçılma verileri v.b. olabilir.

İkinci mertebeden diferansiyel operatör için ters problem [13], [14]' de tamamen çözülmüştür . Spektral fonksiyona göre Sturm-Liouville operatörünün inşası önce [3], [13] ve [14]' de incelenmiş daha sonra bu yönde birçok çalışmalar yapılmıştır [15]. Dirac denklemler sistemi için benzer problemler [7]' de incelenmiştir. Yarı eksende Sturm Lioville problemi için saçılma teorisinin ters probleminin temel sonucu [3]' de elde edilmiştir. Bu işte saçılma verilerine göre potansiyelin inşası yöntemi verilmiştir ve saçılma verilerinin özellikleri incelenmiştir. Önceden bu problem ağır koşullarla [14]' deki yöntem uygulanarak [16]' da ele alınmıştır. Tüm eksende Sturm Liouville operatörü için saçılma teorisinin ters problemi [15]' de çözülmüş ve lineer olmayan evrimleşme denklemlere uygulaması verilmiştir.

Yarı eksende Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi [8]' de tamamen çözülmüş, bu işte saçılma teorisinin ters probleminin tek türlü çözülebilirliği için kanonik potansiyeller sınıfı seçilmiştir. Tüm eksende Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi [18] ve [19]' da çözülmüştür. Dirac denklemler sisteminin farklar denklemleri ile biçimi uygulama açısından önemlidir. Yarı eksende birinci mertebeden farklar denklemler sistemi (Dirac denklemler sisteminin farklarla ifadesi) için saçılma teorisinin ters problemi [20]' de, tüm eksende ise [21]' de çözülmüştür.

Sınır koşulu spektral parametre içeren Sturm Liouville operatörü için sonlu aralıkta spektral analizin düz ve ters problemlerine ait bir çok çalışmalar vardır ve bu yönde araştırmalar devam ediyor [4], [22], [23], [24], [25], [26]. Spektral parametre sınır koşuluna dahil olduğunda saçılma teorisinin ters problemi [9], [10], [11]' de incelenmiştir.

Spektral analizin farklı karakteristiklerine göre ters problemleri [2], [12], [15], [27]' de ve bunların lineer olmayan evrimleşme denklemlere uygulamaları [5], [6], [28]' de verilmiştir.

3. MATERYAL VE METOD

Bu bölümde ileride kullanılacak kavramlar tanıtılarak, temel teoremler verilecektir.

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

R_m m boyutlu kompleks vektör uzayını göstersin. Yani R_m, $y=(y_1,\dots,y_m)$ vektörlerinden oluşur. $y_n, n=1,\dots,m$ 'ler kompleks sayılardır.

3.1.1. Tanım: Değerleri R_m' den olan $y(x)$ fonksiyonuna *vektör fonksiyon* denir. $y(x)=(y_1(x),\dots,y_m(x))$ biçimindedir, burada x bağımsız değişkendir. Bundan dolayı vektör fonksiyon m tane sayısal fonksiyonlar sistemidir. $y_\nu(x)$, $\nu=1,\dots,m$ skaler fonksiyonlarının her birine $y(x)$ vektör fonksiyonunun bir *bileşeni* denir [15].

$y(x)$ vektör fonksiyonunun tüm bileşenleri x_0 noktasında sürekli iseler $y(x)$ fonksiyonu da x_0 noktasında süreklidir. Benzer şekilde $y(x)$ vektör fonksiyonunun tüm bileşenleri diferansiyellenebilirse $y(x)$ fonksiyonu da diferansiyellenebilirdir ve

$$y'(x)=\left(y_1'(x),\dots,y_m'(x)\right)$$

ile gösterilir. Yüksek mertebeden türevler benzer şekilde tanımlanır. Ayrıca

$$(y+z)'=y'+z'$$

ve

$$(y,z)'=(y',z)+(y,z')$$

eşitlikleri sağlanır, burada

$$(y,z)=\sum_{k=1}^{m} y_k(x)\overline{z_k(x)}$$

ile tanımlanır.

3.1.2. Tanım: Değerleri R_m' de lineer operatörler olan fonksiyonlara *operatör fonksiyon* denir. Böyle fonksiyonlar m mertebeden kare $A(x)=[a_{jn}(x)]$ matrisleriyle ifade edilirler, $a_{jn}(x)$' ler skaler fonksiyonlardır [15].

Operatör fonksiyonlar da vektör fonksiyonlardır. Çünkü R_m de bütün lineer operatörler m^2 boyutlu vektör uzay oluşturur. Sonuç olarak $a_{jn}(x)$ fonksiyonları x_0 noktasında sürekli iseler $A(x)$ operatör fonksiyonu da x_0 noktasında süreklidir. Benzer şekilde $a_{jn}(x)$ fonksiyonları x_0 noktasında diferansiyellenebilirse $A(x)$ operatör fonksiyonu da x_0 noktasında diferansiyellenebilirdir. Böylece $A'(x)$ bileşenleri $a_{jn}'(x)$ olan matristir. Ayrıca

$$(A+B)' = A'+B' \qquad (Ay)' = A'y+Ay'$$
$$(AB)' = A'B+AB'$$

eşitlikleri sağlanır.

3.1.3. Tanım: $[a,b]$ aralığında n. mertebeye kadar sürekli türevleri olan bütün vektör fonksiyonların kümesi $C^{(n)}$ ile gösterilsin. $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli operatör fonksiyonlar ve $\det P_0(x) \neq 0$ olsun.

$$\ell(y) := P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y$$

formundaki ifadeye *vektör fonksiyonlar uzayında lineer diferansiyel ifade* denir [15].

Böyle diferansiyel ifadeler ve karşılık gelen diferansiyel operatörler için aşağıda verilecek teori skaler fonksiyonlar için geçerli olan teoriye benzerdir.

$\ell(y)$ ifadesi m tane $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ skaler fonksiyonuna bağlı n. mertebeden diferansiyel ifadelerin m'li sistemidir. Örnek olarak $n=1$ için

$$\ell(y) = y' + P(x)y$$

ifadesi ele alınsın. $z = \ell(y)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri

$$\ell(y) = (\ell_1(y), \ldots, \ell_m(y))$$

biçiminde alınırsa

$$\ell_j(y) = y_j' + \sum_{k=1}^{m} P_{jk}(x) y_k \qquad j = 1,\dots,m$$

elde edilir, burada $P_{jk}(x)$, $P(x)$ matrisinin elemanlarıdır.

3.1.4. Tanım: y vektör fonksiyonunun ve onun $[a,b]$ aralığında $(n-1)$. mertebeye kadar türevlerinin a ve b noktalarındaki değerleri

$$y_a, y_a', y_a'', \dots, y_a^{(n-1)} \quad , \; y_b, y_b', y_b'', \dots, y_b^{(n-1)} \qquad (3.1.1)$$

ile belirtilsin. $y_a, \dots, y_b^{(n-1)}$, R_m uzayında vektörlerdir. (3.1.1) değerleriyle

$$U(y) := A_0 y_a + A_1 y_a' + \dots + A_{(n-1)} y_a^{(n-1)} + B_0 y_b + B_1 y_b'' + \dots + B_{(n-1)} y_b^{(n-1)}$$

ifadesi oluşturulsun, burada $A_0, \dots, A_{n-1}, B_0, \dots, B_{n-1}$, R_m uzayında lineer operatörlerdir. Eğer $\nu = 1, 2, \dots, q$ için $U_\nu(y)$ formları yazılabiliyorsa

$$U_\nu(y) = 0 \qquad , \; \nu = 1, 2, \dots, q \qquad (3.1.2)$$

bağıntılarına *sınır koşulları* denir [15].

(3.1.2) formundaki sınır koşullarını sağlayan tüm $y(x) \in C^{(n)}$ fonksiyonların kümesi D ile gösterilsin.

3.1.5. Tanım: L, D uzayından olan y için

$$L(y) = \ell(y)$$

ile tanımlanan operatör olsun. L' ye $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.1.2) sınır koşulları ile üretilen *diferansiyel operatördür* denir [15].

$$U_\nu(y) = A_{\nu,0} y_a + A_{\nu,1} y_a' + \dots + A_{\nu,(n-1)} y_a^{(n-1)} + B_{\nu,0} y_b + B_{\nu,1} y_b'' + \dots + B_{\nu,(n-1)} y_b^{(n-1)}$$

$$\nu = 1, \dots, q$$

yazılsın ve D uzayında $U_\nu(y)$ formları lineer bağımsız olsun. $[A_{\nu,j}],[B_{\nu,j}]$ matrisinin tüm elemanlarından oluşan

$$\begin{bmatrix} A_{10} & \dots & A_{1,n-1} & B_{10} & \dots & B_{1,n-1} \\ A_{20} & \dots & A_{2,n-1} & B_{20} & \dots & B_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q0} & \dots & A_{q,n-1} & B_{q0} & \dots & B_{q,n-1} \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı mq 'ya eşittir. Çünkü her bir $U_\nu(y)$ formu m bileşenden ibarettir. Daha sonra $q=n$ durumu ele alınacak.

$Y(x)$ operatör fonksiyon bilinmeyen olsun.

$$\ell(y) = P_0(x)Y^{(n)} + P_1(x)Y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)Y = 0 \qquad (3.1.3)$$

homojen denklemi ele alınsın, burada $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli operatör fonksiyonlar ve $\det P_0(x) \neq 0$ dır.

3.1.6. Tanım: (3.1.3)'in $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ çözümleri için

$$Y_1(x)C_1 + \dots + Y_n(x)C_n = 0 , \qquad (C_1, \dots, C_n \text{ sabit operatörler})$$

koşulu sağlandığında

$$C_1 = \dots = C_n = 0$$

oluyorsa $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ 'lere *lineer bağımsızdır* denir aksi taktirde *lineer bağımlıdır* denir [15].

(3.1.3)'in $Y_1, \dots, Y_n$ çözümlerinin sistemi lineer bağımsızdır $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki $n^2 \times n^2$ 'lik matrisin determinantı sıfırdan farklıdır.

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots & Y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$Y_1, \dots, Y_n$ çözümlerinin sistemi lineer bağımsız ise (3.1.3)'in her Y çözümü

$$Y = Y_1(x)C_1 + \dots + Y_n(x)C_n \qquad (3.1.4)$$

formunda yazılabilir. Sonuç olarak (3.1.4) formülü (3.1.3) denkleminin genel çözümünü tanımlar.

Y, (3.1.3)'in çözümü ise ve c sabit vektör ise $y(x)=Y(x)c$ yazılarak $\ell(y)=0$ denkleminin bir çözümü elde edilir. Böylece (3.1.4) formülü yardımıyla $\ell(y)=0$ denkleminin herhangi çözümünün

$$y = Y_1C_1 + \dots + Y_nC_n$$

formuna sahip olduğu çıkar, burada $C_1,\dots,C_n$'ler R_m uzayında keyfi sabit vektörlerdir.

3.1.7. Tanım:

$$\ell(y)=0 \tag{3.1.5}$$

denklemini ve

$$U_\nu(y)=0 \quad , \qquad \nu=1,2,\dots,n \tag{3.1.6}$$

sınır koşullarını sağlayan $y(x)$ vektör fonksiyonunun bulunması problemine *homojen sınır değer problemi* denir [15].

$n^2 \times n^2$'lik

$$U=\begin{bmatrix} U_1(Y_1) & U_1(Y_2) & \dots & U_1(Y_n) \\ U_2(Y_1) & U_2(Y_2) & \dots & U_2(Y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(Y_1) & U_n(Y_2) & \dots & U_n(Y_n) \end{bmatrix}$$

matris ele alınsın. O zaman

(3.1.5), (3.1.6) homojen sınır değer probleminin sıfır olmayan çözümü vardır. $\Leftrightarrow$ U matrisinin determinantı sıfıra eşittir.

3.1.8. Tanım: L operatörünün tanımlandığı D bölgesinde

$$Ly=\lambda y$$

bağıntısını sağlayan $y\neq 0$ vektör fonksiyonu varsa λ sayısına L operatörünün *özdeğeri* denir ve y fonksiyonuna λ özdeğerine uygun *özfonksiyon* denir.

L operatörü $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_k(y)=0\,, \quad k=\overline{1,m}$$

koşulları ile inşa edildiği zaman

$$\ell(y)=\lambda y, U_k(y)=0$$

homojen sınır değer probleminin sıfır olmayan vektör çözümünü garanti eden λ sayısına L diferansiyel operatörünün *özdeğeri* ve λ'ya karşılık gelen sıfırdan farklı y vektör çözümüne *özfonksiyon* denir [15].

Özellikle, $Y_1,...,Y_n$ $LY-\lambda Y=0$ operatör denkleminin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & ... & U_1(y_n) \\ ... & ... & ... \\ U_n(y_1) & ... & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

determinantının sıfırları özdeğerleridir.

3.1.9. Tanım: H Hilbert uzayı ve A bu uzayda tanımlı operatör olsun. $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ varsa ve bütün H uzayında tanımlı operatörü ifade ediyorsa $\lambda\in\mathbb{C}$ sayısına *regüler nokta* denir. R_λ operatörüne ise *A operatörünün rezolventi* denir. Regüler olmayan bütün $\lambda\in\mathbb{C}$ sayılarına *A operatörünün spektrumu* denir. Bir operatörün özdeğerleri spektrum kümesine dahildir. Bu yüzden $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ yoktur. Bütün özdeğerlerin kümesine operatörün *discrete spektrumu* denir. Spektrumun diğer noktalarına *sürekli spektrum noktaları* denir. Bu noktaların oluşturduğu kümeye *operatörün sürekli spektrumu* denir [29].

3.1.10. Tanım: D bir bölge, f ise D bölgesinde tanımlı, izole edilmiş singular noktaları hariç analitik fonksiyon olsun. $z_0\in D$ izole edilmiş singular nokta olmak üzere

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

ise, z_0 noktasına f'nin *kutup noktası* denir [30].

3.1.11. Tanım: D bir bölge, f ise D bölgesinde tanımlı, izole edilmiş singular noktaları hariç analitik fonksiyon olsun.. f fonksiyonunun kutup noktasından başka singular noktası yoksa bu fonksiyona *meromof fonksiyon* denir [30].

3.1.12. Tanım: D bir bölge, f ise D bölgesinde tanımlı, singular noktaları hariç analitik fonksiyon olsun. $z_0 \in D$, f fonksiyonunun izole edilmiş singular noktası ise f, z_0 ' ın delinmiş bir komşuluğunda

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahiptir. Bu açılımdaki a_{-1} sayısına f' nin z_0 noktasındaki *rezidüsü* adı verilir ve $a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$ ile gösterilir [30].

3.1.13. Teorem: D bölge olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu $\bar{D}$'de sürekli ve sonlu sayıda izole edilmiş $z_1, \ldots, z_k \in D$ singular noktalarının dışında D'de analitik olsun. O halde

$$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

eşitliği sağlanır [30].

3.1.14. Tanım (Argüment Prensibi): D bölge olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu sonlu sayıda $\beta_k \in D$, $k = 1, \ldots, m$, kutup noktaları dışında $\bar{D}$' de her yerde analitik olsun. ∂D sınırında $f(z) \neq 0$ olacak şekilde D' de sonlu sayıda $\alpha_k \in D, k = 1, \ldots, n$ sıfırlarına sahipse z noktası ∂D sınırını bir kez pozitif yönde devrettiğinde $f(z)$ fonksiyonunun argüment değişimi $2\pi(N-P)$'ye eşittir, burada N ve P $f(z)$ fonksiyonunun katlılıkları da dikkate alınarak sıfırlarının ve kutuplarının sayısıdır [30].

3.1.15. Lemma:(Jordan Lemması):

$$C_R = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

$f(z)$ fonksiyonunun üst düzlemde tüm izole edilmiş noktaları içeren yarı çember ve $f(z)$ fonksiyonu izole edilmiş noktaları hariç C_R' de analitik fonksiyon olsun.

$$\underset{z \in C_R}{Max}|f(z)| \to 0, \qquad R \to +\infty$$

koşulu gerçekleşirse, o halde $\forall \lambda > 0$ için

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

sağlanır [30].

3.2. DIRAC SİSTEMİNİN KANONİK BİÇİMİ

3.2.1. Tanım:

$$B\frac{dy}{dx} + P(x)y = \lambda y, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

matris denklem ele alınsın, burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}$$

biçimine sahiptir, $p_{ik}(x)$ $i,k = 1,2$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel değerli, sürekli fonksiyonlardır ve λ bir parametredir. (3.2.1) ifadesi aşağıdaki birinci mertebeden denklemler sistemine denktir:

$$\begin{aligned} y_2' + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 &= \lambda y_1 \\ -y_1' + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0$, $p_{11}(x) = V(x) + m$, $p_{22}(x) = V(x) - m$,$V(x)$ potansiyel fonksiyon ve m bir parçacığın kütlesi olmak üzere (3.2.2) denklemler sistemine görelilik kuantum teorisinde *bir boyutlu durağan Dirac sistemi* denir [27], [31].

$H = H(x)$ iki boyutlu uzayın düzgün ve ortogonal dönüşümü olsun. İki boyutlu uzayın her ortogonal dönüşümü sabitleştirilmiş ortogonal ve normlaştırılmış tabana göre

$$H(x) = \begin{pmatrix} Cos\varphi(x) & -Sin\varphi(x) \\ Sin\varphi(x) & Cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

formunda matrise sahiptir. B ve H matrisleri komutatiftir. Yani $BH = HB$ sağlanır. $y = H(x)z$ değişken dönüşümü yapılsın. y'nin ifadesi (3.2.1) de yerine yazılarak ve soldan H^{-1} ile çarpılarak

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz) + H^{-1}PHz = H^{-1}\lambda Hz$$

yada

$$B\frac{dz}{dx} + \left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}PH\right)z = \lambda z \qquad (3.2.3)$$

elde edilir. $Q(x) \equiv H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}PH$ matrisini hesaplamak için

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$H^{-1}PH = \begin{pmatrix} p_{11}Cos^2\varphi + p_{12}Sin2\varphi + p_{22}Sin^2\varphi & p_{12}Cos2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})Sin2\varphi \\ p_{12}Cos2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})Sin2\varphi & p_{11}Sin^2\varphi - p_{12}Sin2\varphi + p_{22}Cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

ifadeleri kullanılarak aşağıdaki formda Q matrisi bulunur.

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{12}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi' + p_{11}Cos^2\varphi + p_{12}Sin2\varphi + p_{22}Sin^2\varphi & p_{12}Cos2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})Sin2\varphi \\ p_{12}Cos2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})Sin2\varphi & \varphi' + p_{11}Sin^2\varphi - p_{12}Sin2\varphi + p_{22}Cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

$\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x) \equiv 0$ olacak şekilde seçilsin. O zaman

$$p_{12}(x)Cos2\varphi(x) + \frac{1}{2}\{p_{22}(x) - p_{11}(x)\}Sin2\varphi(x) = 0$$

olur. Böylece, $p_{11}(x) \neq p_{22}(x)$ ise

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

biçimindedir ve Q matrisi

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

formuna sahip olur. Böylece (3.2.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.2.4}$$

biçiminde yeniden yazılabilir.

Bir de $\varphi(x)$ fonksiyonu $2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)\equiv 0$ olacak şekilde seçilsin. Böylece,

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\{p_{11}(s)+p_{22}(s)\}\,ds$$

formuna sahip olur ve (3.2.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.2.5}$$

denklemine dönüşür. (3.2.4) ve (3.2.5) denklemlerine (3.2.1) denkleminin *kanonik formları* denir. (3.2.1) denkleminin spektral teorisindeki çeşitli problemlerin çözümünde bu ve buna benzer kanonik formları kullanmak daha uygun olur. Örneğin (3.2.1) denkleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülünde (3.2.4)'ü kullanmak daha uygundur, verilen sonsuz aralıkta (3.2.1)'in özdeğerlerinin asimtotik ifadeleri gibi sorularda ve ters problemde (3.2.5) kanonik formunu kullanmak daha uygundur.

A ve B lineer diferansiyel operatörler ve E_1, E_2 lineer fonksiyon uzayları olsun.

3.2.2. Tanım: $X: E_1 \to E_2$ lineer operatör olsun. X operatörü aşağıdaki iki koşulu sağlarsa X'e *dönüşüm operatörü* denir.

1) $AX = XB$

2) Sürekli ters operatör X^{-1} vardır.

$$A \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \qquad B \equiv \begin{pmatrix} p_2(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix}$$

olsun , burada $p_k(x), r_k(x), k = 1,2$ $[0,\pi]$ aralığında reel değerli, sürekli fonksiyonlardır [27], [31].

E_1 ve E_2

$$f_1(0) Sin\gamma + f_2(0) Cos\gamma = 0$$
$$g_1(0) Sin\delta + g_2(0) Cos\delta = 0$$

koşullarını sağlayan sürekli diferansiyellenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ vektör değerli fonksiyonlar kümesinden oluşsun, burada γ, δ keyfi reel sayılardır.

X matris dönüşüm operatörü

$$X\{f(x)\} = R(x) f(x) + \int_0^x K(x,s) f(s) ds$$

formunda yazılabilir, $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki mertebeli sürekli diferansiyellenebilir matrislerdir.

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

biçimindedir ve $\alpha(x), \beta(x)$ fonksiyonları

$$\alpha(x) = \frac{1}{\kappa} Sin\left\{ \frac{1}{2} \int_0^x trace[A - B] d\tau + \sin^{-1} \frac{1}{\kappa} \right\}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{\kappa} Cos\left\{ \frac{1}{2} \int_0^x trace[A - B] d\tau + \sin^{-1} \frac{1}{\kappa} \right\}, \qquad \kappa = \sec(\delta - \gamma)$$

olarak hesaplanır.

3.3 $(2n\times n)$ BOYUTLU DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ

$$BY'+mTY+\Omega(x)Y=\lambda Y, \quad 0\le x\le\infty \tag{3.3.1}$$

sınır değer problemi ele alınsın. Burada , $m>0$ kütle

$$B=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}, \; T=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & -E_n\end{pmatrix}$$

$$\Omega(x)=\begin{pmatrix}P(x) & IQ(x)\\ Q(x)I & -IP(x)I\end{pmatrix}$$

$p(x)$, $q(x)$ reel değerli fonksiyonlardır ve

$$\|p(x)\|\le\frac{c}{(1+x)^{2+\varepsilon}} \tag{3.3.2}$$

$$\|q(x)\|\le\frac{c}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \tag{3.3.3}$$

koşullarını sağlar , c, ε pozitif sayılardır.

$$f(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+m}{K}E_n\\ -iI\end{pmatrix}e^{iKx}, \qquad K=\lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}}, \qquad |\lambda|>m$$

(3.3.1) denklemine

$$y_1(0)=y_2(0)=\ldots=y_n(0)=0 \tag{3.3.4}$$

sınır koşulu eklensin.

3.3.1. Teorem: $\Omega(x)$ (3.3.2)-(3.3.3) koşullarını sağlayan fonksiyon olsun. O halde (3.3.1) denkleminin $(2n\times n)$ boyutlu tek bir matris $F(x,\lambda)$ çözümü vardır. Bu çözüm $\operatorname{Im}\lambda\ge0$ olduğunda $x\to\infty$ iken $f(x,\lambda)$'ya yakınsar ve $F(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$F(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^\infty A(x,t)f(t,\lambda)\,dt \tag{3.3.5}$$

biçimine sahip olacak şekilde $2n$ boyutlu $A(x,t)$ matris fonksiyonu vardır.

Ayrıca

$$\|A_{ii}\| \le \frac{c_1}{(1+t)^{1+\varepsilon}}, \qquad i=1,2 \tag{3.3.6}$$

$$\|A_{ij}\| \le \frac{c_1}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}}, \qquad i \ne j \tag{3.3.7}$$

sağlanır. Eğer $\Omega(x)$ mutlak sürekli ise $A(x,t)$ matris fonksiyonu

$$\left\{B\frac{\partial}{\partial x} + mT + \Omega(x)\right\}A(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)B + mA(x,t)T \tag{3.3.8}$$

denklemini ve

$$BA(x,x) - A(x,x)B = \Omega(x) \tag{3.3.9}$$

koşulunu sağlar. Tersine $A(x,t)$ fonksiyonu (3.3.8) denklemini ve (3.3.6), (3.3.7) ve (3.3.9) koşullarını sağlarsa (3.3.5) ile tanımlanan $F(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\left\{B\frac{d}{dx} + mT + \Omega(x)\right\}F(x,\lambda) = \lambda F(x,\lambda)$$

denklemini sağlar. Burada

$$\Omega(x) = BA(x,x) - A(x,x)B$$

biçimindedir [8].

(3.3.1) denkleminin

$$\Phi_1(0,\lambda) = 0, \quad \Phi_2(0,\lambda) = -E_n \tag{3.3.10}$$

başlangıç koşulunu sağlayan $(2n \times n)$ boyutlu matris çözümü $\Phi(x,\lambda)$ olsun, burada $\Phi_1(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda)$'nın ilk n satırından $\Phi_2(x,\lambda)$ ise geride kalan n satırından oluşur. Reel λ ve $|\lambda| > m$ olduğu durumda $F(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}$ (3.3.1) denkleminin lineer bağımsız matris fonksiyonlar sistemini oluşturur. Buna göre

$$\Phi(x,\lambda) = F(x,\lambda)C_1(\lambda) + \overline{F(x,\lambda)}C_2(\lambda)$$

eşitliği sağlanır, $C_1(\lambda)$ ve $C_2(\lambda)$ n boyutlu matrislerdir.

Dirac sistemi için Wronskian kavramını dahil edelim.

3.3.2. Tanım: $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.3.1) denkleminin $(2n\times n)$ boyutlu matris çözümleri olsun. Onların Wronskianı

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda)B\psi(x,\lambda)=W[\varphi,\psi]$$

ifadesine denir [8].

3.3.3. Lemma: (3.3.1) Dirac denklemler sisteminin iki matris çözümünün Wronskianı x'e bağlı değildir.

$$W[\varphi,\psi]=-2iE_n\frac{\lambda+m}{K}$$

biçimindedir [8].

Wronskian yardımıyla

$$C_1(\lambda)=F_1^*(0,\lambda)I\frac{K}{2i(\lambda+m)},$$

$$C_2(\lambda)=-F_1(0,\lambda)I\frac{K}{2i(\lambda+m)}$$

elde edilir. Buna göre

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{K}{2i(\lambda+m)}\left[F(x,\lambda)F_1^*(0,\lambda)-\overline{F(x,\lambda)}\tilde{F}_1(0,\lambda)\right]I$$

ve

$$S(\lambda)=\tilde{F}_1(0,\lambda)\left[F_1^*(0,\lambda)\right]^{-1} \tag{3.3.11}$$

formuna sahip olur. (3.3.11) matrisine (3.3.10) koşullu (3.3.1) denkleminin *saçılma matrisi* denir. Şimdi $S(\lambda)$ fonksiyonunun özelliklerini inceleyelim.

$\lambda,(-\infty,-m)$ ve (m,∞) aralıklarına dahil olduğunda $\det F_1(0,\lambda)\neq 0$ olduğu gösterilir. Buna göre $S(\lambda)$ fonksiyonu $(-\infty,-m)$ ve (m,∞) aralıklarında tanımlanır ve bu aralıkta süreklidir. Çünkü

$$F_1(0,\lambda)=E_n\frac{\lambda+m}{K}+\int_0^\infty\left\{A_{11}(0,t)\frac{\lambda+m}{K}-iA_{12}(0,t)I\right\}e^{iKt}dt$$

matris fonksiyonu üst düzlemde $\lambda = +m$ noktası dışında süreklidir. Bu ise $A_{11}(x,t)$ ve $A_{12}(x,t)$'nin sağladığı (3.3.6) ve (3.3.7) eşitsizliklerinden elde edilir. Böylece aşağıdaki lemma sağlanır.

3.3.4. Lemma: $F_1(0,\lambda)$ matris fonksiyonu $\operatorname{Im}\lambda > 0$ üst yarım düzlemde analitiktir ve reel eksende $\lambda = +m$ noktası dışında süreklidir. Buna göre $\sqrt{\lambda - m}F_1(0,\lambda)$ matris fonksiyonu $\lambda = +m$ olduğunda da süreklidir. Ayrıca $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ olduğunda $|\lambda| \to \infty$ iken

$$F_1(0,\lambda) \to E_n$$

sağlanır [8].

Bu lemmadan ve $S(\lambda)$'nın tanımından aşağıdaki lemma elde edilir.

3.3.5. Lemma: $S(\lambda)$ matris fonksiyonu iki matris fonksiyonun oranıdır. Pay üst düzlemde analitiktir payda ise alt düzlemde analitiktir. Ayrıca

$$\lim_{\lambda \to \pm m} S(\lambda)$$

limitleri vardır ve tersinirdir. $\lambda \to \mp\infty$ iken

$$S(\lambda) = E_n + o(1)$$

sağlanır [8].

3.3.6. Lemma: $E_n - S(\lambda)$ matris fonksiyonunun elemanları $(-\infty,-m]$, $[m,\infty)$ aralıklarında kareleri ile integre edilebilir [8].

3.3.7. Lemma: $S(\lambda)$ matris fonksiyonu

$$S^*(\lambda) = S^{-1}(\lambda) = \overline{S(\lambda)}$$

özdeşliklerini sağlar [8].

3.3.8. Teorem: $\operatorname{Im}\lambda > 0$ koşulunu sağlayan tüm λ' lar için $F_1(0,\lambda)$ matris fonksiyonunun determinantı sıfırdan farklıdır. $(-\infty,-m)$,(m,∞) aralıklarında olan tüm λ' lar için

$$\det F_1(0,\lambda) \neq 0$$

olur. $\left[F_1(0,\lambda)\right]^{-1}$ matrisinin $(-m,m)$ aralığından olan tüm izole edilmiş noktaları basit kutup noktalarıdır. $\sqrt{\dfrac{\lambda+m}{\lambda-m}}F_1(0,\lambda)$ matrisi $\lambda = \mp m$ noktalarında sınırlıdır [8].

$$By' + mTy + \Omega(x)y = \lambda y \tag{3.3.12}$$

$$y_1(0) = ... = y_n(0) = 0 \tag{3.3.13}$$

sınır değer problemi ele alınsın.

3.3.9. Teorem:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m} \Phi(x,\lambda) I F_1^{*-1}(0,\lambda) F_1^{-1}(0,\lambda) I \tilde{\Phi}(t,\lambda)\frac{(\lambda+m)}{K}d\lambda +$$

$$+\sum_{j=1}^{p} F(x,\lambda_j) M_j^{\,2} F^{*}(t,\lambda_j) = \delta(x-t)E_{2n}$$

Parseval eşitliği sağlanır. $\lambda_1,...,\lambda_p$ (3.3.12), (3.3.13) probleminin özdeğerleridir, $M_1,...,M_p$ ler ise rankları $\lambda_1,...,\lambda_p$'lerin katlılıkları ile çakışan negatif olmayan matrislerdir [8].

(3.3.9)' den $\Omega(x)$ potansiyelini bulmak için $A(x,y)$' yi bilmek yeterlidir. Bunun için

$$A(x,y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} A(x,t)F(t+y)\,dt = 0 \ (x < y < \infty) \tag{3.3.14}$$

temel denklemi elde edilir, burada

$$F(x) = F_S(x) + \sum_{j=1}^{p}\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}} \\ I\end{pmatrix} M_j^{\,2}\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}}E_n & I\end{pmatrix} e^{-\sqrt{m^2-\lambda_j^2}x}$$

$$F_S(x) = \int\limits_{|\lambda|>m} L(\lambda) e^{-iKx} d\lambda + \int\limits_{|\lambda|>m} L^*(\lambda) e^{iKx} d\lambda$$

ve

$$L(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{\lambda+m}{K} \\ iI \end{pmatrix} \left(E_n - S(\lambda)\right) \left(\frac{\lambda+m}{K} E_n \quad iI \right) \frac{K}{\lambda+m}$$

biçimindedir. (3.3.14) denkleminin $2n$ mertebeden Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters probleminin çözümünde önemli yeri vardır. Daha sonra [8]'de $S(\lambda), \lambda_1, ..., \lambda_p, M_1, ..., M_p$ saçılma verilerinin özellikleri incelenir.

3.3.10. Teorem: Her bir sabit x için

$$A(x,y) + F(x+y) + \int\limits_x^\infty A(x,t) F(t+y) dt = 0 \; (x < y < \infty)$$

denkleminin bileşenleri $L_2(x,\infty)$ uzayından olan tek bir çözümü vardır [8].

3.3.11 Teorem:

$$f(t) + \int\limits_0^\infty f(y) F_S(t+y) dy = 0$$

homojen denkleminin bileşenleri $L_2(0,\infty)$'dan olan lineer bağımsız vektör çözümlerinin sayısı $M_1, ..., M_n$ matrislerinin rankları toplamına eşittir [8].

3.3.12 Teorem:

$$-f(t) + \int\limits_{-\infty}^0 f(y) F_S(t+y) dy = 0 \; ,(-\infty < t \le 0)$$

homojen denkleminin bileşenleri $L_2(-\infty,0)$' dan olan sadece sıfır vektör çözümü vardır [8].

Elde edilen sonuçlara göre saçılma verileri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. n. mertebeden $S(\lambda)$ saçılma matrisi $(-\infty,-m)$ ve (m,∞) aralıklarında tanımlıdır ve $S^*(\lambda) = \overline{S}(\lambda) = S^{-1}(\lambda)$ eşitliği sağlanır.

2. $F_S(x)$ matris fonksiyonunun her bir elemanı $L_2(-\infty,\infty)$' a dahildir .

$$F(x)=\begin{pmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{pmatrix}$$

ise o halde her $x \geq 0$ için

$$\left|F_{ij}(x)\right| \leq \frac{c}{(1+x)^{2+\varepsilon}},\ i \neq j \qquad \left|F_{jj}(x)\right| \leq \frac{c}{(1+x)^{1+\varepsilon}},\ j=1,2$$

koşulları sağlanır .

3. Her bir sabit $x \geq 0$ için

$$f(t)+\int_x^{\infty} f(y)F_S(t+y)dy=0$$

homojen denkleminin sadece sıfır vektör $f(t)=(f_1(t),...,f_{2n}(t))$ çözümü vardır ve $f_j(t) \in L_2(x,\infty)$, $j=\overline{1,2n}$.

4.

$$f(t)+\int_0^{\infty} f(y)F_S(t+y)dy=0$$

homojen denkleminin bileşenleri $L_2(0,\infty)$'dan olan lineer bağımsız vektör çözümlerinin sayısı $M_1,...,M_n$ matrislerinin rankları toplamına eşittir .

5.

$$-f(t)+\int_{-\infty}^{0} f(y)F_S(t+y)dy=0\ ,(-\infty < t \leq 0)$$

homojen denkleminin bileşenleri $L_2(-\infty,0)$'dan olan sadece sıfır vektör çözümü vardır .

Bu koşullar $\{S(\lambda);\lambda_1,...,\lambda_n;m_1,...,m_n\}$ değerler topluluğunun (3.3.1) , (3.3.4) sınır değer probleminin saçılma verileri olması için sadece gerekli değil hem de yeterlidir.

Tezde Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi incelenirken Sturm Liouville operatörü için benzer problemin çözümünde kullanılan yöntemlerden yararlanılır[2], [3], [4], [5], [6], [13], [17], [28], [31], [32].

3.4 STURM LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN YARI EKSENDE SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ

$$-y''+q(x)y=\lambda^2 y, \quad 0\le x\le\infty \tag{3.4.1}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0)=0 \tag{3.4.2}$$

sınır koşulu ele alınsın, burada $q(x)$ fonksiyonu

$$\int_0^x x|q(x)|dx<\infty \tag{3.4.3}$$

koşulunu sağlayan reel değerli fonksiyondur. $x\to\infty$ iken (3.4.3) koşulundan (3.4.1) denklemi daha basit olan

$$-y''=\lambda^2 y$$

denklemine indirgenir. Bu ise (3.4.1) denkleminin çözümlerini araştırmaya imkan verir.

$$\sigma(x)=\int_x^\infty |q(t)|dt, \qquad \sigma_1(x)=\int_x^\infty \sigma(t)dt$$

notasyonları kabul edilsin, buradan (3.4.3) koşulunun

$$\sigma_1(0)<\infty$$

koşuluna eşit olduğu görülür.

3.4.1. Lemma: Kapalı üst yarım düzlemdeki her λ değeri için (3.4.1) denkleminin

$$e(\lambda,x)=e^{i\lambda x}+\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

formunda ifade edilen $e(\lambda,x)$ çözümü vardır, burada $K(x,t)$ çekirdeği için

$$|K(x,t)|\le\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\} \tag{3.4.4}$$

eşitsizliği sağlanır [2].

3.4.2. Tanım:

$$\{(I+K)f\}(x)=f(x)+\int_x^\infty K(x,t)f(t)dt$$

ile tanımlanan $(I+K)$ operatörüne sonsuzlukta (3.4.1) denkleminin çözümlerinin asimtotiklerini koruyan *dönüşüm operatörü* denir [2].

(3.4.4) eşitsizliği $(I+K)$ operatörünün $L_i(a,\infty)$, $(i=1,2)$ uzaylarının her birinde birebir ve örten olduğunu gösterir. Böylece

$$\{(I+L)f\}(x)=f(x)+\int_x^\infty L(x,t)f(t)dt$$

formunda $(I+K)^{-1}=(I+L)$ ters operatör vardır.

$q(x)$ diferansiyellenebilirse $K(x,t)$ çekirdeği iki kez diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}=q(x)K(x,t) \tag{3.4.5}$$

denklemini ve

$$\frac{d}{dx}K(x,x)=-\frac{1}{2}q(x) \tag{3.4.6}$$

$$\lim_{x+t\to\infty}\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}=\lim_{x+t\to\infty}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}=0 \tag{3.4.7}$$

koşullarını sağlar. Böylece $K(x,t)$'nin dönüşüm operatörünün çekirdeği olması için gerek ve yeter koşul onun (3.4.5), (3.4.6) ve (3.4.7)'ü sağlamasıdır.

3.4.3. Lemma: $e(\lambda,x)$ fonksiyonu üst yarım düzlemde analitik ve reel eksende süreklidir,

$$|e(\lambda,x)|\le\exp\{-\operatorname{Im}\lambda x+\sigma_1(x)\}$$

$$\left|e(\lambda,x)-e^{i\lambda x}\right|\le\left\{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(x+\frac{1}{|\lambda|}\right)\right\}\exp\{-\operatorname{Im}\lambda x+\sigma_1(x)\}$$

ve

$$\left|e'(\lambda,x)-i\lambda e^{i\lambda x}\right|\le\sigma(x)\exp\{-\operatorname{Im}\lambda x+\sigma_1(x)\}$$

eşitsizlikleri sağlanır [2].

Sıfırdan farklı reel λ'lar için $e(\lambda,x)$ ve $e(-\lambda,x)$ (3.4.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur. Onların Wronskianı x'e bağlı değildir ve $2i\lambda$'ya eşittir.

3.4.4. Lemma: Her λ değeri için (3.4.1) denkleminin $x\to\infty$ iken

$$w(\lambda,x;\infty)=x(1+o(1)),\qquad w'_x(\lambda,x;\infty)=1+o(1)$$

koşullarını sağlayan $w(\lambda,x;\infty)$ çözümü vardır, bu çözüm λ'nın analitik fonksiyonudur ve $\operatorname{Im}\lambda\ge 0$ için

$$\left|\lambda w(\lambda,x;\infty)-Sin\lambda x\,e^{i\lambda x}\right|\le\left[\sigma_1(0)-\sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right]\exp\left\{\int_x^\infty t\left|q(t)\right|dt\right\}$$

koşulunu sağlar [2].

3.4.5. Lemma: Tüm sıfırdan farklı reel λ'lar için

$$-\frac{2iw(\lambda,x;\infty)}{e(\lambda,0)}=e(-\lambda,x)-S(\lambda)e(\lambda,x)\qquad(3.4.8)$$

özdeşliği sağlanır, burada $S(\lambda)$ fonksiyonu

$$S(\lambda)=\frac{e(-\lambda,0)}{e(\lambda,0)}$$

biçimine sahiptir ve

$$S(\lambda)=\overline{S(-\lambda)}=\left[S(-\lambda)\right]^{-1}$$

eşitliğini sağlar [2].

(3.4.8) özdeşliğinin sol tarafına bakılırsa üst yarım düzlemde meromorf fonksiyon olduğu görülür. $e(\lambda,0)$ fonksiyonunun sıfırları onun kutup yerleridir.

3.4.6. Lemma: $\operatorname{Im}\lambda > 0$ Üst yarım düzlemde $e(\lambda,0)$ fonksiyonunun sonlu sayıda sıfırları vardır, bu sıfır yerleri basittir ve sanal eksende yerleşirler. Ayrıca $\lambda\left[e(\lambda,0)\right]^{-1}$ fonksiyonu $\lambda = 0$'ın komşuluğunda sınırlıdır [2].

3.4.7. Lemma: $1-S(\lambda)$ fonksiyonu

$$F_S(x) = F_S^{(1)}(x) + F_S^{(2)}(x)$$

formundaki $F_S(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür, burada

$$F_S^{(1)}(x) \in L_1(-\infty,\infty), \quad \sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_S^{(2)}(x)\right| < \infty \text{ ve } F_S^{(2)}(x) \in L_2(-\infty,\infty) \text{ [2].}$$

(3.4.1) denklemi kullanılarak

$$F(x+y) + K(x,y) + \int_x^\infty K(x,t)F(t+y)\,dt = 0 \qquad (x<y<\infty)$$

integral denklemi elde edilir. Bu denkleme *temel denklem* denir, burada

$$F(x) = \sum_{k=1}^n m_k^{\,2} e^{-\lambda_k x} + F_S(x) = \sum_{k=1}^n m_k^{\,2} e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(1-S(\lambda)\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

ve

$$m_k^{-2} = \int_0^\infty \left|e(i\lambda_k,x)\right|^2 dx = -\frac{e'(i\lambda_k,0)\,e(i\dot{\lambda}_k,0)}{2i\lambda_k}$$

formundadır.

3.4.8. Teorem: Dönüşüm operatörünün çekirdeği $K(x,y)$

$$F(x+y) + K(x,y) + \int_x^\infty K(x,t)F(t+y)\,dt = 0 \qquad (x<y<\infty)$$

temel denklemini sağlar [2].

Temel denklem kullanılarak $q(x)$ fonksiyonu gibi $F_S(x)$ fonksiyonunun da

$$\int_0^\infty x\left|F_S(x)\right|dx < \infty$$

koşulunu sağladığı bulunur. Ayrıca $S(\lambda)$ fonksiyonunun logaritmasının artışı ile (3.4.1)-(3.4.2) probleminin negatif özdeğerlerinin sayısı n arasında

$$n=\frac{\ln S(0+)-\ln S(\infty)}{2\pi i}-\frac{1-S(0)}{4}$$

bağıntısı vardır.

Böylece $\{S(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty);\lambda_k;m_k(k=1,...,n)\}$ koleksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı elde edildi.

I) $S(\lambda)$ fonksiyonu tüm eksende süreklidir,

$$S(\lambda)=\overline{S(-\lambda)}=\{S(-\lambda)\}^{-1}$$

eşitliği sağlanır ve $|\lambda|\to\infty$ iken $1-S(\lambda)$ sıfıra yakınsar ve $1-S(\lambda)$

$$F_S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-S(\lambda))e^{i\lambda x}d\lambda$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. $F_S(x)$ fonksiyonu iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir, bunlardan bir tanesi $L_1(-\infty,\infty)$'a, diğeri sınırlıdır ve $L_2(-\infty,\infty)$'a aittir. Pozitif reel eksende $F_S(x)$ fonksiyonunun

$$\int_0^{\infty}x|F_S'(x)|dx<\infty$$

koşulunu sağlayan türevi vardır.

II) $S(\lambda)$ fonksiyonunun argüment değişimi ile (3.4.1)-(3.4.2) probleminin negatif özdeğerlerinin sayısı n arasında

$$n=\frac{\ln S(0+)-\ln S(+\infty)}{2\pi i}-\frac{1-S(0)}{4}$$

formülü ile ifade edilen bir bağıntı vardır.

3.4.9. Teorem:, $\{S(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty);\lambda_k;m_k(k=1,...,n)\}$ değerler topluluğunun, (3.4.3) koşulunu sağlayan $q(x)$ potansiyelli (3.4.1)-(3.4.2) sınır değer probleminin saçılma verileri olması için gerek ve yeter koşul I ve II' i sağlamasıdır [2].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. (2×1) BOYUTLU DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ

Şimdi 2 boyutlu Dirac denklemler sistemi için sınır koşulu klasik durumdan farklı olarak λ spektral parametre içeren durum için saçılma teorisinin ters problemini inceleyelim .

$$BY'+mTY+\Omega(x)Y=\lambda Y \tag{4.1.1}$$

$$Y_2(0)+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)Y_1(0)=0 \tag{4.1.2}$$

sınır değer problemi ele alınsın. Burada $m>0$ kütle ,

$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisler, $\Omega(x)$ 2 boyutlu

$$\Omega(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

formunda matris fonksiyondur ve elemanları $p(x)$, $q(x)$ reel değerli fonksiyonlar için

$$|p(x)|\le\frac{c}{(1+x)^{2+\varepsilon}} \tag{4.1.3}$$

$$|q(x)|\le\frac{c}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \tag{4.1.4}$$

koşulları sağlanır (c, ε pozitif sayılardır), $\alpha_0,\alpha_1\in\mathbb{R}$ ve $\alpha_1<0$.

$$f(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda+m}{K} \\ -i \end{pmatrix}e^{iKx}, \qquad K=\lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}}, \qquad |\lambda|>m$$

fonksiyonu

$$BY'+mTY=\lambda Y$$

denkleminin çözümüdür.

[8] kullanılarak aşağıdaki 4.1.1. teorem kolayca ispatlanır.

4.1.1. Teorem: $\Omega(x)$ (4.1.3)-(4.1.4) koşullarını sağlayan fonksiyon olsun. O halde (4.1.1) denkleminin (2×1) boyutlu tek bir matris $F(x,\lambda)$ çözümü vardır. Bu çözüm $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ olduğunda $x\to\infty$ iken $f(x,\lambda)$'ya yakınsar ve $F(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$F(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^\infty A(x,t)f(t,\lambda)\,dt \tag{4.1.5}$$

biçimine sahip olacak şekilde

$$A(x,t)=\begin{pmatrix} A_{11}(x,t) & A_{12}(x,t)\\ A_{21}(x,t) & A_{22}(x,t)\end{pmatrix}$$

formunda 2 boyutlu $A(x,t)$ matris fonksiyonu vardır, elemanları

$$|A_{ii}|\leq\frac{c_1}{(1+t)^{1+\varepsilon}},\qquad i=1,2 \tag{4.1.6}$$

$$|A_{ij}|\leq\frac{c_1}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}},\ i\neq j \tag{4.1.7}$$

koşullarını sağlar.

4.1.2. Lemma: Eğer $\Omega(x)$ mutlak sürekli ise $A(x,t)$ matris fonksiyonu

$$\left\{B\frac{\partial}{\partial x}+mT+\Omega(x)\right\}A(x,t)=-\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)B+mA(x,t)T \tag{4.1.8}$$

denklemini ve

$$BA(x,x)-A(x,x)B=\Omega(x) \tag{4.1.9}$$

koşulunu sağlar.

İspat: $F(x,\lambda)$ (4.1.1) denklemini sağladığından

$$BF'(x,\lambda)+mTF(x,\lambda)+\Omega(x)F(x,\lambda)=\lambda F(x,\lambda)$$

$$\left\{B\frac{d}{dx}+mT+\Omega(x)\right\}F(x,\lambda)=\lambda F(x,\lambda) \tag{4.1.10}$$

olur. (4.1.5) ifadesi (4.1.10) de yerine yazılırsa

$$\left\{B\frac{d}{dx}+mT+\Omega(x)\right\}\left(f(x,\lambda)+\int_x^\infty A(x,t)f(t,\lambda)dt\right)=\lambda\left(f(x,\lambda)+\int_x^\infty A(x,t)f(t,\lambda)dt\right)$$

veya

$$Bf'+mTf+\Omega(x)f-BA(x,x)f(x,\lambda)+$$
$$+\int_x^\infty B\frac{\partial}{\partial x}A(x,t)f(t,\lambda)dt+\int_x^\infty mTA(x,t)f(t,\lambda)dt+\int_x^\infty \Omega(x)A(x,t)f(t,\lambda)dt$$
$$=\lambda f(x,\lambda)+\lambda\int_x^\infty A(x,t)f(t,\lambda)dt \qquad (4.1.11)$$

elde edilir.

$\lambda f=Bf'+mTf$ aşağıdaki ifadede yerine yazılırsa ve kısmi integralleme ile

$$\lambda\int_x^\infty A(x,t)f(t,\lambda)dt=\int_x^\infty A(x,t)\left[Bf'(t,\lambda)+mTf(t,\lambda)\right]dt$$
$$=\int_x^\infty A(x,t)Bf'(t,\lambda)dt+\int_x^\infty A(x,t)mTf(t,\lambda)dt$$
$$=-A(x,x)Bf(x,\lambda)-\int_x^\infty\left(\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)B\right)f(t,\lambda)dt+\int_x^\infty A(x,t)mTf(x,\lambda)dt$$
$$=-A(x,x)Bf(x,\lambda)+\int_x^\infty\left\{-\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)B+mA(x,t)T\right\}f(t,\lambda)dt \qquad (4.1.12)$$

bulunur. (4.1.11) ve (4.1.12) 'den

$$\left\{B\frac{\partial}{\partial x}+mT+\Omega(x)\right\}A(x,t)=-\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)B+mA(x,t)T$$

$$\Omega(x)=BA(x,x)-A(x,x)B$$

olduğu çıkar.□

Tersine $A(x,t)$ fonksiyonu (4.1.8) denklemini ve (4.1.6), (4.1.7) ve (4.1.9) koşullarını sağlarsa (4.1.5) ile tanımlanan $F(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\left\{B\frac{d}{dx}+mT+\Omega(x)\right\}F(x,\lambda)=\lambda F(x,\lambda)$$

denklemini sağlar, burada

$$\Omega(x)=BA(x,x)-A(x,x)B$$

biçimindedir.

4.1.3. Tanım:

$$\left(\left(\mathrm{I}+\mathrm{A}\right)f\right)(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_{x}^{\infty}A(x,t)f(t,\lambda)dt$$

formülü ile tanımlanan $\mathrm{I}+\mathrm{A}$ operatörüne *dönüşüm operatörü* denir. $A(x,t)$ fonksiyonuna *dönüşüm operatörünün çekirdeği* denir.

O halde 4.1.2 Lemma ve 4.1.3 tanımdan $A(x,t)$ fonksiyonunun dönüşüm operatörünün çekirdeği olması için gerek ve yeter koşulun onun (4.1.8) denklemini ve (4.1.6), (4.1.7),(4.1.9) koşularını sağlaması gerektiği çıkıyor.

4.1.4. Tanım: $y(x,\lambda)$ ve $z(x,\lambda)$ vektör fonksiyonlar olsun.

$$W\left[y(x,\lambda),z(x,\lambda)\right]=y^{T}(x,\lambda)Bz(x,\lambda)=(y_1,y_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=y_1z_2-y_2z_1$$

ifadesine *$y(x,\lambda)$ ve $z(x,\lambda)$ vektör fonksiyonların Wronskianı* denir.

$p(x)$ ve $q(x)$ reel fonksiyonlar olduğundan reel λ ve $|\lambda|>m$ için $F(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}$ (4.1.1) denkleminin çözümleridir.

4.1.5. Lemma: $F(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}$ fonksiyonlarının Wronskianı x'e bağlı değildir ve

$$W\left[F(x,\lambda),\overline{F(x,\lambda)}\right]=2i\frac{\lambda+m}{K}$$

biçimindedir.

İspat: $F(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}=\psi(x,\lambda)$ ile gösterilsin. $\psi(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ denklemi sağladığı için

$$B\psi'+mT\psi+\Omega(x)\psi=\lambda\psi$$

$$B\varphi'+mT\varphi+\Omega(x)\varphi=\lambda\varphi$$

olur. İkinci eşitliğin transpozunu alınırsa

$$B\psi' + mT\psi + \Omega(x)\psi = \lambda\psi$$
$$-\varphi^{T'}B + m\varphi^T T + \varphi^T\Omega(x) = \lambda\varphi^T$$

denklemler sistemi elde edilir. 1. denklem soldan φ^T ile 2. denklem sağdan ψ ile çarpılırsın ve taraf tarafa çıkarılsın. O halde

$$\varphi^T B\psi' + \varphi^{T'}B\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\varphi^T B\psi\right]' = 0$$
$$\varphi^T B\psi = c,\ c \text{ sabit}$$
$$W[\varphi,\psi] = W\left[F(x,\lambda),\overline{F(x,\lambda)}\right] = c,\ c\,\text{sabit}$$

Böylece Wronskianın x'e bağlı olmadığı elde edilir.

$$W\left[F(x,\lambda),\overline{F(x,\lambda)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left\{F_1(x,\lambda).\overline{F_2(x,\lambda)} - F_2(x,\lambda)\overline{F_1(x,\lambda)}\right\} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\lambda+m}{K}.i.e^{iKx}.e^{-iKx}\right\} - \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\lambda+m}{K}.(-i).e^{iKx}.e^{-iKx}\right\} =$$
$$= 2i\frac{\lambda+m}{K}$$

olduğu bulunur.□

$|\lambda| > m$ olduğu durumda $F(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}$' ın Wronskianı sıfırdan farklı olduğu içim $F(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}$ lineer bağımsızdır ve (4.1.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur.

$\alpha_0,\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_1 < 0$ olsun. $F_1(0,\lambda), F_2(0,\lambda)$ fonksiyonu yardımıyla

$$E(\lambda) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda) + F_2(0,\lambda) \qquad (4.1.13)$$

fonksiyonu tanımlansın.

4.1.6. Lemma: Reel λ ve $|\lambda| > m$ için (1) denkleminin

$$\Phi_1(0,\lambda) = -1 \qquad \Phi_2(0,\lambda) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda)$$

koşullarını sağlayan $\Phi(x,\lambda)$ çözümü vardır.

İspat: $|\lambda|>m$ olduğu durumda $F(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}$ (4.1.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturduğu için $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\Phi(x,\lambda)=c_1F(x,\lambda)+c_2\overline{F(x,\lambda)} \tag{4.1.14}$$

şeklinde ifade edilir.

$$W\left[F(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\right]=F_1(0,\lambda)\Phi_2(0,\lambda)-F_2(0,\lambda)\Phi_1(0,\lambda)=$$
$$=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda)+F_2(0,\lambda)=E(\lambda)$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$W\left[\overline{F(x,\lambda)},\Phi(x,\lambda)\right]=\overline{F_1(0,\lambda)}\Phi_2(0,\lambda)-\overline{F_2(0,\lambda)}\Phi_1(0,\lambda)$$
$$=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\overline{F_1(0,\lambda)}+\overline{F_2(0,\lambda)}=\overline{E(\lambda)}$$

elde edilir.

$$E(\lambda)=W\left[F(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\right]=W\left[F(x,\lambda),c_1F(x,\lambda)+c_2\overline{F(x,\lambda)}\right]=$$
$$=c_1W\left[F(x,\lambda),F(x,\lambda)\right]+c_2W\left[F(x,\lambda),\overline{F(x,\lambda)}\right]$$
$$=c_1.0+c_2.2i\frac{\lambda+m}{K}=c_2.2i\frac{\lambda+m}{K}$$

$$c_2=\frac{K}{2i(\lambda+m)}E(\lambda)$$

Benzer yöntemle $c_1=-\frac{K}{2i(\lambda+m)}\overline{E(\lambda)}$ olduğu bulunur. Bu ifadeler (4.1.14) de yerine yazılırsa

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{K}{2i(\lambda+m)}\overline{E(\lambda)}F(x,\lambda)+\frac{K}{2i(\lambda+m)}E(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

olur.□

4.1.7. Lemma: $|\lambda|>m$ $(\operatorname{Im}\lambda=0)$ için

$$-2i\frac{\lambda+m}{K}\frac{\Phi(x,\lambda)}{E(\lambda)}=F(x,\lambda)-S(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

ve

$$S(\lambda)=\frac{F_2(0,\lambda)+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda)}{\overline{F_2(0,\lambda)+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda)}}=\left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat:

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{K}{2i(\lambda+m)}\overline{E(\lambda)}F(x,\lambda) + \frac{K}{2i(\lambda+m)}E(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

ifadesinden

$$-2i\frac{\lambda+m}{K}\frac{\Phi(x,\lambda)}{\overline{E(\lambda)}} = F(x,\lambda) - S(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

olduğu bulunur. Burada

$$S(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{\overline{E(\lambda)}}$$

ile tanımlanır. (4.1.13) den

$$S(\lambda) = \frac{F_2(0,\lambda) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda)}{\overline{F_2(0,\lambda)} + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda)\overline{F_1(0,\lambda)}}$$

bulunur. Ayrıca

$$\overline{S(\lambda)} = \frac{\overline{E(\lambda)}}{\overline{\overline{E}(\lambda)}} = \frac{\overline{E}(\lambda)}{E(\lambda)} = [S(\lambda)]^{-1}$$

olduğu için

$$S(\lambda) = \left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$$

elde edilir.□

4.1.8. Tanım: $S(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{\overline{E(\lambda)}}$ fonksiyonuna saçılma teorisinde saçılma fonksiyonu denir.

$\frac{1}{\overline{E}(\lambda)}$ fonksiyonunun aykırı noktalarını bulmak için $E(\lambda)$ fonksiyonunu incelemek gerekir.

4.1.9. Lemma: $E(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ analitiktir, $\lambda = \pm m$ noktaları hariç reel eksende süreklidir.

İspat: $\operatorname{Im}\lambda > 0$ olduğunda

$$E(\lambda) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda) F_1(0,\lambda) + F_2(0,\lambda)$$

fonksiyonunun analitik olduğunu göstermek için

$$F_1(0,\lambda) = \frac{\lambda+m}{K} + \int_0^\infty \left\{ A_{11}\frac{\lambda+m}{K} - A_{12}i \right\} e^{iKt} dt$$

$$F_2(0,\lambda) = -i + \int_0^\infty \left\{ A_{21}\frac{\lambda+m}{K} - A_{22}i \right\} e^{iKt} dt$$

fonksiyonlarının analitik olduğunu göstermek gerekir.

$\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Im}\lambda_0 > 0$ olsun.

$$g(\lambda) = \frac{\lambda+m}{K} = \frac{\lambda+m}{\sqrt{\lambda^2-m^2}} = \sqrt{\frac{\lambda+m}{\lambda-m}} = \sqrt{1+\frac{2m}{\lambda-m}}$$

$\dfrac{\partial g(\lambda)}{\partial \overline{\lambda}} = 0$ olduğundan $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için $g(\lambda)$ diferansiyellenebilirdir. O halde $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ noktasının komşuluğunda diferansiyellenebilirdir.

$\Rightarrow$ $g(\lambda)$ λ_0 noktasında analitiktir. Böylece $g(\lambda)$ $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Im}\lambda > 0$ için analitiktir .

$$e^{iKt} = e^{i\sqrt{\lambda^2-m^2}t} = Cos\sqrt{\lambda^2-m^2}t + iSin\sqrt{\lambda^2-m^2}t$$

$$\frac{\partial x}{\partial \overline{\lambda}}\left\{ Cos\sqrt{\lambda^2-m^2}t + iSin\sqrt{\lambda^2-m^2}t \right\} = 0 \ , \ \forall\lambda \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0$$

yukarıdaki ifadeden e^{iKt} fonksiyonunun da λ 'nın analitik fonksiyonu olduğu çıkar.

Analitik iki fonksiyonun çarpımı, toplamı da analitik olduğundan $F_1(0,\lambda)$ ve $F_2(0,\lambda)$ analitiktir. Bundan dolayı $E(\lambda)$ üst yarım düzlemde analitik fonksiyondur.

$e^{iKt} = e^{i\sqrt{\lambda^2-m^2}t}$ λ ' nın sürekli fonksiyonudur. $m = \pm\lambda$ noktalarında $K = 0$ olduğu için $\int_0^\infty \left\{ A_{11}\frac{\lambda+m}{K} - A_{12}i \right\} e^{iKt} dt$ $m = \pm\lambda$ hariç reel eksende süreklidir.

$$F_1(0,\lambda) = \frac{\lambda+m}{K} + \int_0^\infty \left\{ A_{11}\frac{\lambda+m}{K} - A_{12}i \right\} e^{iKt} dt$$

$\lambda=\pm m$ hariç reel eksende süreklidir. $F_2(0,\lambda)$'ın sürekliliği de benzer şekilde gösterilir. Sürekli fonksiyonların çarpımı ve toplamı da sürekli olduğundan

$$E(\lambda)=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda)+F_2(0,\lambda)$$

fonksiyonunun $\lambda=\pm m$ noktaları hariç reel eksende sürekli olduğu bulunur.□

4.1.10. Lemma: $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları $(-m,m)$ aralığında yerleşir.

İspat: $\mu\in\mathbb{C}$ $(\operatorname{Im}\mu>0)$ veya $\mu\in(-m,m)$ olmak üzere $E(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırı olsun.

$$BF'(x,\mu)+mTF(x,\mu)+\Omega(x)F(x,\mu)=\mu F(x,\mu)$$

eşitliği sağlanır. Bu ifadenin önce eşleniği sonra transpozu alınırsa

$$-F^{*'}(x,\mu)B+mF^{*}(x,\mu)T+F^{*}(x,\mu)\Omega(x)=\overline{\mu}F^{*}(x,\mu)$$

elde edilir. Burada

$$\overline{F}^{T}=F^{*}$$

ile gösterilir.

$$BF'(x,\mu)+mTF(x,\mu)+\Omega(x)F(x,\mu)=\mu F(x,\mu)$$

$$-F^{*'}(x,\mu)B+mF^{*}(x,\mu)T+F^{*}(x,\mu)\Omega(x)=\overline{\mu}F^{*}(x,\mu)$$

denklemler sisteminde birincisi denklem soldan $F^{*}(x,\mu)$ ile ikinci denklem sağdan $F(x,\mu)$ ile çarpılırsa

$$F^{*}(x,\mu)BF'(x,\mu)+mF^{*}(x,\mu)TF(x,\mu)+F^{*}(x,\mu)\Omega(x)F(x,\mu)=\mu F^{*}(x,\mu)F(x,\mu)$$

$$-F^{*'}(x,\mu)BF(x,\mu)+mF^{*}(x,\mu)TF(x,\mu)+F^{*}(x,\mu)\Omega(x)F(x,\mu)=\overline{\mu}F^{*}(x,\mu)F(x,\mu)$$

bulunur. Taraf tarafa çıkarıldığında

$$F^{*}(x,\mu)BF'(x,\mu)+F^{*'}(x,\mu)BF(x,\mu)=(\mu-\overline{\mu})F^{*}(x,\mu)F(x,\mu)$$

veya

$$W'\left[\overline{F(x,\mu)},F(x,\mu)\right]=(\mu-\overline{\mu})F^{*}(x,\mu)F(x,\mu)$$

olduğu elde edilir. 0'dan ∞'a kadar x'e göre integrallenirse

$$W\left[\overline{F(x,\mu)},F(x,\mu)\right]\Big|_{x=0}^{x=\infty}+(\overline{\mu}-\mu)\int_0^\infty F^*(x,\mu)F(x,\mu)dx=0 \tag{4.1.15}$$

ifadesi çıkar. Diğer taraftan μ, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu için

$$W\left[F(x,\mu),\Phi(x,\mu)\right]=E(\mu)=0 \quad \forall x\in[0,\infty)$$

olur. Bu ise $F(x,\mu)$ ve $\Phi(x,\mu)$fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğunu gösterir. O halde

$$F(x,\mu)=c\phi(x,\mu)$$

şeklinde yazılabilir. $\phi(x,\lambda)$ (4.1.2) sınır koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(0,\mu)+(\alpha_0+\alpha_1\mu)\Phi_1(0,\mu)=0\\
&\frac{F_2(0,\mu)}{c}-(\alpha_0+\alpha_1\mu).1=0\\
&\Rightarrow c=\frac{F_2(0,\mu)}{(\alpha_0+\alpha_1\mu)}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(0,\mu)+(\alpha_0+\alpha_1\mu)\frac{F_1(0,\mu)}{c}=0\\
&(\alpha_0+\alpha_1\mu)+(\alpha_0+\alpha_1\mu)\frac{F_1(0,\mu)}{c}=0\\
&\Rightarrow c=-F_1(0,\mu)
\end{aligned}$$

bulunur. c yerine yazılırsa

$$F(x,\mu)=-F_1(0,\mu)\Phi(x,\mu)=\frac{F_2(0,\mu)}{\alpha_0+\alpha_1\mu}\Phi(x,\mu)$$

elde edilir.

$$\left.\begin{aligned}
F_1(x,\mu)&=\frac{\mu+m}{K}e^{iKx}+\int_x^\infty\left\{A_{11}(x,t)\frac{\mu+m}{K}-A_{12}(x,t)i\right\}e^{iKt}dt\\
F_2(x,\mu)&=-ie^{iKx}+\int_x^\infty\left\{A_{21}(x,t)\frac{\mu+m}{K}-A_{22}(x,t)i\right\}e^{iKt}dt
\end{aligned}\right\} \tag{4.1.16}$$

(4.1.16) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}W\left[\overline{F(x,\mu)},F(x,\mu)\right]&=\lim_{x\to\infty}\left\{\overline{F_1(x,\mu)}.F_2(x,\mu)-F_1(x,\mu)\overline{F_2(x,\mu)}\right\}\\
&=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\mu+m}{\sqrt{m^2-\mu^2}}-\frac{\mu+m}{\sqrt{m^2-\mu^2}}\right\}=0
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

çıkar.

$$F_2(0,\mu) = -F_1(0,\mu)\Phi_2(0,\mu)$$
$$\overline{F_2(0,\mu)} = -\overline{F_1(0,\mu)\Phi_2(0,\mu)} \tag{4.1.18}$$

(4.1.18) ifadesi yardımıyla

$$\lim_{x\to 0} W\left[\overline{F(x,\mu)}, F(x,\mu)\right] = \lim_{x\to 0}\left\{\overline{F_1(x,\mu)}.F_2(x,\mu) - F_1(x,\mu)\overline{F_2(x,\mu)}\right\} =$$
$$= \overline{F_1(0,\mu)}.F_2(0,\mu) - F_1(0,\mu)\overline{F_2(0,\mu)} =$$
$$= \overline{F_1(0,\mu)}.\left(-F_1(0,\mu)\Phi_2(0,\mu)\right) - F_1(0,\mu)\left(-\overline{F_1(0,\mu)}.\overline{\Phi_2(0,\mu)}\right) =$$
$$= -\left|F_1(0,\mu)\right|^2 \Phi_2(0,\mu) + \left|F_1(0,\mu)\right|^2 \overline{\Phi_2(0,\mu)} = \left|F_1(0,\mu)\right|^2\left[\overline{\Phi_2(0,\mu)} - \Phi_2(0,\mu)\right] =$$
$$= \left|F_1(0,\mu)\right|^2\left[\alpha_0 + \alpha_1\overline{\mu} - (\alpha_0 + \alpha_1\mu)\right] = \left|F_1(0,\mu)\right|^2 .\alpha_1.\left(\overline{\mu} - \mu\right) \tag{4.1.19}$$

sonucu bulunur. (4.1.17) ve (4.1.19), (4.1.15) de yerine yazılırsa

$$0 - \left|F_1(0,\mu)\right|^2 .\alpha_1.\left(\overline{\mu} - \mu\right) + \left(\overline{\mu} - \mu\right)\int_0^\infty F^*(x,\mu)F(x,\mu)\,dx = 0$$

$$\left[\overline{\mu} - \mu\right].\left[-\alpha_1\left|F_1(0,\mu)\right|^2 + \int_0^\infty F^*(x,\mu)F(x,\mu)\,dx\right] = 0$$

eşitliği elde edilir. $-\alpha_1 > 0$, $\left|F_1(0,\mu)\right|^2 > 0$ ve $\int_0^\infty F^*(x,\mu)F(x,\mu)\,dx > 0$ olduğundan

$$-\alpha_1\left|F_1(0,\mu)\right|^2 + \int_0^\infty F^*(x,\mu)F(x,\mu)\,dx \neq 0$$

olur. O halde

$$\overline{\mu} - \mu = 0$$
$$\overline{\mu} = \mu$$

elde edilir. Bu ise $\mu \in \mathbb{R}$ olduğunu gösterir. Böylece $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının reel olduğu ve $(-m,m)$ aralığında yerleştiği bulunur.□

4.1.11. Lemma: Yeterince büyük A için $x \in [A,\infty)$ ve $\lambda \in (-m,m)$ olmak üzere

$$iF_1(x,\lambda) > \frac{1}{2}\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}$$

$$iF_2(x,\lambda) > \frac{1}{2}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

$$F_1(x,\lambda) = \frac{\lambda+m}{K}e^{iKx} + \int_x^\infty \left\{ A_{11}(x,t)\frac{\lambda+m}{K} - A_{12}(x,t)i \right\} e^{iKt}dt$$

$$\left| iF_1(x,\lambda) - i\frac{\lambda+m}{K}e^{iKx} \right| = \left| \int_x^\infty \left\{ A_{11}(x,t)i\frac{\lambda+m}{K} + A_{12}(x,t) \right\} e^{iKt}dt \right| \le \int_x^\infty \left| A_{11}(x,t)i\frac{\lambda+m}{K} + A_{12}(x,t) \right| . \left| e^{iKt} \right| dt$$

$$\left| iF_1(x,\lambda) - i\frac{\lambda+m}{i\sqrt{m^2-\lambda^2}}e^{i.i.\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \right| \le \int_x^\infty \left| A_{11}(x,t)i\frac{\lambda+m}{i\sqrt{m^2-\lambda^2}} + A_{12}(x,t) \right| . \left| e^{i.i.\sqrt{m^2-\lambda^2}t} \right| dt$$

$$\left| iF_1(x,\lambda) - \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \right| \le \int_x^\infty \left| A_{11}(x,t)\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} + A_{12}(x,t) \right| .e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}t}dt$$

$e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}t}$ monoton azalan olduğundan

$$\left| iF_1(x,\lambda) - \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \right| \le \int_x^\infty \left| A_{11}(x,t)\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} + A_{12}(x,t) \right| .e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}t}dt \le$$

$$\le e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\int_x^\infty \left| A_{11}(x,t)\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} + A_{12}(x,t) \right| dt \le$$

$$\le e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{ \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\int_x^\infty \left|A_{11}(x,t)\right|dt + \int_x^\infty \left|A_{12}(x,t)\right|dt \right\} \le$$

$$\le e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{ \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\int_x^\infty \frac{c_1}{(1+t)^{1+\varepsilon}}dt + \int_x^\infty \frac{c_1}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}}dt \right\}$$

$$= e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{ \frac{c_1}{\varepsilon}\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{1}{(1+x)^\varepsilon} + \frac{c_1}{\varepsilon}\frac{1}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \right\}$$

sonucu çıkar. Buradan

$$iF_1(x,\lambda) - \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \ge -e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{ \frac{c_1}{\varepsilon}\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{1}{(1+x)^\varepsilon} + \frac{c_1}{\varepsilon}\frac{1}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \right\}$$

$$iF_1(x,\lambda) \ge \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} - e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{ \frac{c_1}{\varepsilon}\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{1}{(1+x)^\varepsilon} + \frac{c_1}{\varepsilon}\frac{1}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \right\}$$

olduğu bulunur.

$$c_1^* = \frac{c_1}{\varepsilon}$$

olsun. Yeterince büyük A^* ve $x \in [A^*, \infty)$ için

$$\frac{c_1^*}{(1+x)^{1+\varepsilon}} < \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{c_1^*}{(1+x)^{\varepsilon}} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \cdot \left\{ \frac{c_1^*}{(1+x)^{1+\varepsilon}} + \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} \frac{c_1^*}{(1+x)^{\varepsilon}} \right\} < \frac{1}{2} e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}$$

sonucuna varılır. Bu ifade

$$iF_1(x,\lambda) \geq \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} - e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \left\{ \frac{c_1}{\varepsilon} \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} \frac{1}{(1+x)^{\varepsilon}} + \frac{c_1}{\varepsilon} \frac{1}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \right\}$$

eşitsizliğinde yerine yazılarak

$$iF_1(x,\lambda) > \frac{1}{2} e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}$$

sonucu elde edilir.

$$F_2(x,\lambda) = -ie^{iKx} + \int_x^{\infty} \left\{ A_{21}(x,t) \frac{\lambda+m}{K} - A_{22}(x,t) i \right\} e^{iKt} dt$$

$$iF_2(x,\lambda) = e^{iKx} + \int_x^{\infty} \left\{ A_{21}(x,t) i \frac{\lambda+m}{K} + A_{22}(x,t) \right\} e^{iKt} dt$$

eşitliklerinden

$$\left| iF_2(x,\lambda) - e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \right| = \left| \int_x^{\infty} \left\{ A_{21}(x,t) \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} + A_{22}(x,t) \right\} e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}t} dt \right|$$

$$\leq \int_x^{\infty} \left| A_{21}(x,t) \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} + A_{22}(x,t) \right| e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}t} dt$$

eşitsizliğinin sağlandığı çıkar. $e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}t}$ monoton azalan olduğu için

$$\left| iF_2(x,\lambda) - e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \right| \leq \int_x^{\infty} \left| A_{21}(x,t) \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} + A_{22}(x,t) \right| e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}t} dt \leq$$

$$\leq e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x} \left\{ \frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}} \int_x^{\infty} |A_{21}(x,t)| dt + \int_x^{\infty} |A_{22}(x,t)| dt \right\} \leq$$

$$\leq e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\int_x^{\infty}\frac{c_1}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}}dt+\int_x^{\infty}\frac{c_1}{(1+t)^{1+\varepsilon}}dt\right\}$$

$$\leq e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{c_1^*}{(1+x)^{1+\varepsilon}}+\frac{c_1^*}{(1+x)^{\varepsilon}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_1^*=\frac{c_1}{\varepsilon}$ biçimindedir. Böylece

$$iF_2(x,\lambda)-e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\geq -e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{c_1^*}{(1+x)^{1+\varepsilon}}+\frac{c_1^*}{(1+x)^{\varepsilon}}\right\}$$

$$iF_2(x,\lambda)\geq e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}-e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{c_1^*}{(1+x)^{1+\varepsilon}}+\frac{c_1^*}{(1+x)^{\varepsilon}}\right\}$$

eğitsizliği sağlanır. Yeterince büyük A^{**} ve $x\in\left[A^{**},\infty\right)$ için

$$\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{c_1^*}{(1+x)^{1+\varepsilon}}+\frac{c_1^*}{(1+x)^{\varepsilon}}<\frac{1}{2}$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{c_1^*}{(1+x)^{1+\varepsilon}}+\frac{c_1^*}{(1+x)^{\varepsilon}}\right\}<\frac{1}{2}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliği

$$iF_2(x,\lambda)\geq e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}-e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}\left\{\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\frac{c_1^*}{(1+x)^{1+\varepsilon}}+\frac{c_1^*}{(1+x)^{\varepsilon}}\right\}$$

ifadesinde yerine yazarak

$$iF_2(x,\lambda)>\frac{1}{2}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}$$

elde edilir.

$$A=Maks\left\{A^*,A^{**}\right\}$$

olsun. O halde yeterince büyük A için, $\forall x\in\left[A,\infty\right)$ ve $\forall\lambda\in(-m,m)$ olmak üzere

$$iF_1(x,\lambda)>\frac{1}{2}\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}$$

$$iF_2(x,\lambda)>\frac{1}{2}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

4.1.12. Lemma: $E(\lambda)=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda)+F_2(0,\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı sonludur.

İspat: δ, $E(\lambda)$ fonksiyonunun iki komşu sıfırı arasındaki mesafenin infimumu olsun. $\delta>0$ olduğunun gösterilmesi gerekiyor. Aksi kabul edilsin. $\{\lambda_k\}$, $\{\tilde{\lambda}_k\}$ $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarından oluşan diziler olsunlar öyleki

$$\lim_{k\to\infty}\left(\tilde{\lambda}_k-\lambda_k\right)=0 \qquad -m\le\lambda_k<\tilde{\lambda}_k<0$$

sağlansın.

4.1.11 Lemma yardımıyla

$$\begin{aligned}
F^*(x,\lambda_k).F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)&=\overline{F_1(x,\lambda_k)}.F_1\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)+\overline{F_2(x,\lambda_k)}F_2\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)\\
&>\frac{1}{4}\frac{\lambda_k+m}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}}\frac{\tilde{\lambda}_k+m}{\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}e^{-\left(\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}\right)x}+\frac{1}{4}e^{-\left(\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}\right)x}\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_k+m}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}}\frac{\tilde{\lambda}_k+m}{\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}+1\right)e^{-\left(\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}\right)x}
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlik A'dan ∞'a integrallenirse

$$\begin{aligned}
\int_A^\infty F^*(x,\lambda_k).F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)dx&>\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_k+m}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}}\frac{\tilde{\lambda}_k+m}{\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}+1\right)\int_A^\infty e^{-\left(\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}\right)x}dx\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_k+m}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}}\frac{\tilde{\lambda}_k+m}{\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}+1\right)\left[-\frac{1}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}e^{-\left(\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}\right)x}\Bigg|_A^\infty\right]\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_k+m}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}}\frac{\tilde{\lambda}_k+m}{\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}+1\right)\left[\frac{1}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}e^{-\left(\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}\right)A}\right]
\end{aligned}$$

bulunur. $\dfrac{\lambda_k+m}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}}\dfrac{\tilde{\lambda}_k+m}{\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}>0$ olduğu için

$$\int_A^\infty F^*(x,\lambda_k).F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)dx>\frac{1}{\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}}e^{-\left(\sqrt{m^2-\lambda_k^2}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^2}\right)A}$$

sonucu elde edilir. Buna göre $k \to \infty$ iken limite geçildiğinde $\lambda_k, \tilde{\lambda}_k \to -m$ olacağından

$$\lim_{k\to\infty} \int_A^{\infty} F^*(x,\lambda_k) F(x,\tilde{\lambda}_k) dx = +\infty \qquad (4.1.20)$$

olduğu çıkar. Diğer taraftan (4.1.15)'den

$$0 = \int_0^{\infty} F^*(x,\lambda_k) F(x,\tilde{\lambda}_k) dx - \alpha_1 \overline{F_1(0,\lambda_k)} F_1(0,\tilde{\lambda}_k) = \int_0^{A} F^*(x,\lambda_k)\left[F(x,\tilde{\lambda}_k) - F(x,\lambda_k)\right]dx +$$

$$+ \int_0^{A} F^*(x,\lambda_k) F(x,\lambda_k) dx + \int_A^{\infty} F^*(x,\lambda_k) F(x,\tilde{\lambda}_k) dx - \alpha_1 \overline{F_1(0,\lambda_k)} F_1(0,\tilde{\lambda}_k)$$

ifadesi bulunur. Burada $k \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{k\to\infty} \int_A^{\infty} F^*(x,\lambda_k) F(x,\tilde{\lambda}_k) \le 0 \qquad (4.1.21)$$

elde edilir. (4.1.20) ve (4.1.21) ifadeleri çelişki oluşturur. Buna göre varsayım doğru değildir. O halde $E(\lambda)$ fonksiyonunun iki komşu sıfırı arasındaki mesafenin uzunluğu δ sıfırdan büyüktür. Ayrıca $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları $(-m,m)$ aralığında yerleştiği için sıfırlarının sonlu sayıda olduğu sonucu elde edilir.□

4.1.13. Lemma: $E(\lambda) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda) F_1(0,\lambda) + F_2(0,\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları basittir.

İspat: $F(x,\lambda)$ fonksiyonunun eşleniğinin transpozu $F^*(x,\lambda)$ ile λ' ya göre türevi ise $\dot{F}(x,\lambda)$ ile gösterilsin. $|\lambda| < m$ için

$$BF'(x,\lambda) + mTF(x,\lambda) + \Omega(x) F(x,\lambda) = \lambda F(x,\lambda)$$

denkleminin önce eşleniği sonra transpozu alınırsa

$$-F^{*\prime}(x,\lambda) B + mF^*(x,\lambda) T + F^*(x,\lambda)\Omega(x) = \lambda F^*(x,\lambda)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlik λ' ya göre türevlendirilirse

$$-\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*\prime} B + m\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} T + \left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} \Omega(x) = \lambda\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} + F^*(x,\lambda)$$

elde edilir.

$$BF'(x,\lambda)+mTF(x,\lambda)+\Omega(x)F(x,\lambda)=\lambda F(x,\lambda)$$

$$-\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*\prime}B+m\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}T+\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}\Omega(x)=\lambda\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}+F^{*}(x,\lambda)$$

denklemler sisteminde birinci denklem soldan $\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}$ ile ikinci denklem sağdan $F(x,\lambda)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}BF'(x,\lambda)+\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*\prime}BF(x,\lambda)=-F^{*}(x,\lambda)F(x,\lambda)$$

$$\left[\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}BF(x,\lambda)\right]'=-F^{*}(x,\lambda)F(x,\lambda)$$

ifadesi çıkar. Bu ifade 0'dan $+\infty$'a kadar x'e göre integrallendiğinde

$$\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}BF(x,\lambda)\Big|_{x=0}^{\infty}=-\int_{0}^{\infty}F^{*}(x,\lambda)F(x,\lambda)\,dx \qquad (4.1.22)$$

elde edilir.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}BF(x,\lambda)=0$$

olur. Yukarıdaki ifade (4.1.22) de yerine yazılırsa $|\lambda|<m$ için

$$\left(\dot{F}(0,\lambda)\right)^{*}BF(0,\lambda)=\int_{0}^{\infty}F^{*}(x,\lambda)F(x,\lambda)\,dx \qquad (4.1.23)$$

özdeşliği bulunur. Diğer taraftan λ_j, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olsun.

$$\overline{E(\lambda_j)}=-(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j)F_1(0,\lambda_j)-F_2(0,\lambda_j)=-E(\lambda_j)$$

$$\overline{\dot{E}(\lambda_j)}=-(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j)\dot{F}_1(0,\lambda_j)-\alpha_1F_1(0,\lambda_j)-\dot{F}_2(0,\lambda_j)=-\dot{E}(\lambda_j)$$

ifadelerinden yararlanarak

$$\left(\dot{F}(0,\lambda_j)\right)^{*}BF(0,\lambda_j)=\left(\dot{\overline{F_1}}\right)(0,\lambda_j)F_2(0,\lambda_j)-\left(\dot{\overline{F_2}}\right)(0,\lambda_j)F_1(0,\lambda_j)=$$

$$=-\dot{F}_1(0,\lambda_j)F_2(0,\lambda_j)+\dot{F}_2(0,\lambda_j)F_1(0,\lambda_j)=-\dot{F}_1(0,\lambda_j)\left[E(\lambda_j)-(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j)F_1(0,\lambda_j)\right]+$$

$$+\left[\dot{E}(\lambda_j)-\alpha_1F_1(0,\lambda_j)-(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j)\dot{F}_1(0,\lambda_j)\right]F_1(0,\lambda_j)=\dot{E}(\lambda_j)F_1(0,\lambda_j)-\alpha_1F_1^2(0,\lambda_j)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç (4.1.23) de kullanılarak

$$\dot{E}(\lambda_j)F_1(0,\lambda_j)=\alpha_1F_1^2(0,\lambda_j)+\int_0^\infty F^*(x,\lambda_j)F(x,\lambda_j)dx$$

eşitliği bulunur.

$$\alpha_1F_1^2(0,\lambda_j)+\int_0^\infty F^*(x,\lambda_j)F(x,\lambda_j)dx>0$$

olması

$$\dot{E}(\lambda_j)F_1(0,\lambda_j)\neq 0$$

sonucunu verir. O halde

$$\dot{E}(\lambda_j)\neq 0$$

olur. Buradan $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının basit olduğu görülür.□

$$m_j^{-2}=\int_0^\infty F^*(x,\lambda)F(x,\lambda)dx+\alpha_1F_1^2(0,\lambda)=\dot{E}(\lambda)F_1(0,\lambda)$$

ile tanımlanır.

4.2 TEMEL DENKLEMİN ELDE EDİLMESİ

$1-S(\lambda)$ fonksiyonu $(-\infty,-m)$ ve (m,∞) aralıklarında karesi ile integrallenebilirdir. Lemma 4.1.7.' ye göre

$$-2i\frac{\lambda+m}{K}\Phi(x,\lambda)=\overline{E(\lambda)}F(x,\lambda)-E(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

veya

$$-2i\frac{\lambda+m}{K}\frac{\Phi(x,\lambda)}{\overline{E}(\lambda)}=F(x,\lambda)-S(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

bağıntısı vardır. Burada 4.1.5'i dikkate alarak

$$-2i\frac{\lambda+m}{K}\frac{\Phi(x,\lambda)}{\overline{E}(\lambda)}=\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKx}+\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKt}dt\right]$$
$$-S(\lambda)\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKx}+\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKt}dt\right]$$

Bu ifadenin sağ tarafına $\overline{F(x,\lambda)}$ eklenip çıkarılırsa

$$-2i\frac{\lambda+m}{K}\frac{\Phi(x,\lambda)}{E(\lambda)}=\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKx}+\int_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKt}dt\right]$$

$$-S(\lambda)\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKx}+\int_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKt}dt\right]$$

$$+\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKx}+\int_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKt}dt\right]$$

$$-\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKx}+\int_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKt}dt\right]$$

$$=\left(1-S(\lambda)\right)\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKx}+\int_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKt}dt\right]$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKx}-\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKx}+\int_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKt}dt$$

$$-\int_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}\\ i\end{pmatrix}e^{-iKt}dt$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{2\pi}\frac{K}{\lambda+m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}$ ile çarpılıp

ve λ 'ya göre integrallenirse

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}-2i\frac{\phi(x,\lambda)}{E(\lambda)}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(x+y)}d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ -i & \frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{iK(x-y)}d\lambda=\int_x^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ -i & \frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{iK(t-y)}d\lambda dt$$

$$-\int_x^\infty A(x,t)\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(t+y)}d\lambda dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}(1-S(\lambda))\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(x+y)}d\lambda$$

$$+\int_x^\infty A(x,t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}(1-S(\lambda))\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(t+y)}d\lambda\right]dt$$

olur. Buradan

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}-2i\frac{\phi(x,\lambda)}{\overline{E}(\lambda)}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}d\lambda+\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(x+y)}d\lambda$$

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ -i & \frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{iK(x-y)}d\lambda=\mathrm{Re}\int_x^\infty\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ -i & \frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{iK(t-y)}d\lambda dt$$

$$-\mathrm{Re}\int_x^\infty A(x,t)\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(t+y)}d\lambda dt$$

$$+\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}(1-S(\lambda))\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(x+y)}d\lambda$$

$$+\mathrm{Re}\int_x^\infty A(x,t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}(1-S(\lambda))\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(t+y)}d\lambda\right]dt \qquad (4.2.1)$$

olduğu görülür. (4.2.1)' in sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimin

$$\mathrm{Re}\int_x^\infty\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ -i & \frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{iK(t-y)}d\lambda dt$$

$$=\int_x^{\infty} A(x,t)\,\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda>m|}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ -i & \frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}\big(CosK(t-y)+iSinK(t-y)\big)\,d\lambda dt$$

$$=\int_x^{\infty} A(x,t)\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}CosK(t-y) & -SinK(t-y)\\ SinK(t-y) & \frac{K}{\lambda+m}CosK(t-y)\end{pmatrix}d\lambda dt$$

$$=\int_x^{\infty} A(x,y)\,\delta(t-y)\,dt=A(x,y) \qquad (4.2.2)$$

ve

$$\mathrm{Re}\int_x^{\infty} A(x,t)\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-iK(t+y)}\,d\lambda dt$$

$$=\int_x^{\infty} A(x,t)\,\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}\big(CosK(t+y)-iSinK(t+y)\big)\,d\lambda dt$$

$$=\int_x^{\infty} A(x,t)\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}CosK(t+y) & SinK(t+y)\\ SinK(t+y) & -\frac{K}{\lambda+m}CosK(t+y)\end{pmatrix}d\lambda dt$$

$$=\int_x^{\infty} A(x,t)\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K}CosK(t+y) & -SinK(t+y)\\ SinK(t+y) & \frac{K}{\lambda+m}CosK(t+y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}d\lambda dt$$

$$=\left(\int_x^{\infty} A(x,t)\,\delta(t+y)\,dt\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=A(x,-y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (4.2.3)$$

formlarına sahip oldukları bulunur.

$$F_S(x)=\int_{|\lambda|>m} L(\lambda)e^{-iKx}d\lambda+\int_{|\lambda|>m} L^{*}(\lambda)e^{iKx}d\lambda \qquad (4.2.4)$$

ve

$$L(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{K} & i\\ i & -\frac{K}{\lambda+m}\end{pmatrix}\big(1-S(\lambda)\big) \qquad (4.2.5)$$

tanımlansın. (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) ve (4.2.5) denklemleri (4.2.1) denkleminde yerine yazılırsa (4.2.1) denkleminin sağ tarafının

$$A(x,y)+F_S(x+y)+\int_x^{\infty}A(x,t)F_S(t+y)\,dt \quad ,y>x \qquad (4.2.6)$$

formuna sahip olduğu çıkar. Jordan Lemması kullanılarak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|>m}2\Phi(x,\lambda)\left[\frac{1}{\overline{E}(\lambda)}\right]\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}d\lambda$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(2\Phi(x,\lambda)\left[\frac{1}{\overline{E}(\lambda)}\right]\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy},\lambda_j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\lim_{\lambda\to\lambda_j}(\lambda-\lambda_j)2\frac{\Phi(x,\lambda)}{\overline{E}(\lambda)}\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}=\sum_{j=1}^{n}2\frac{\Phi(x,\lambda_j)}{\overset{\bullet}{E}(\lambda_j)}\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_j+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}2\frac{\Phi(x,\lambda_j)\overline{F_1(0,\lambda_j)}}{m_j^{-2}}\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_j+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}2m_j^2\left(-\Phi(x,\lambda_j)F_1(0,\lambda_j)\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_j+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}2m_j^2F(x,\lambda_j)\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_j+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}2m_j^2\left[\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_j+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKx}+\int_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_j+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKt}dt\right]\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_j+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}f(x,\lambda_j)2m_j^2\tilde{f}(y,\lambda_j)+\int_x^{\infty}A(x,t)\left(\sum_{j=1}^{n}f(t,\lambda_j)2m_j^2\tilde{f}(y,\lambda_j)\right)dt \qquad (4.2.6)$$

eşitliği bulunur. (4.2.6) ifadesi (4.2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$A(x,y)+F(x+y)+\int_x^{\infty}A(x,t)F(t+y)\,dt=0 \ (x<y<\infty)$$

integral denklemi elde edilir, burada

$$F(x+y)=F_S(x+y)-\sum_{j=1}^{n}f(x,\lambda_j)M_j^2\tilde{f}(y,\lambda_j)$$

$$f(x,\lambda_j)=\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_j+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{-iKx} \qquad \text{ve} \qquad M_j^2=2m_j^2$$

$$m_j^{-2} = \int_0^\infty F^*(x,\lambda)F(x,\lambda)dx + \alpha_1 F_1^2(0,\lambda) = \dot{E}(\lambda)F_1(0,\lambda)$$

şeklinde ifade olunur.

4.2.1. Tanım:

$$A(x,y) + F(x+y) + \int_x^\infty A(x,t)F(t+y)dt = 0 \quad (x < y < \infty) \qquad (4.2.7)$$

integral denklemine (4.1.1), (4.1.2) sınır değer probleminin *temel denklemi* denir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanır.

4.2.2. Teorem: Dönüşüm operatörünün çekirdeği $A(x,t)$ temel denklemi sağlar.

Buradan temel denklemi inşa etmek için $F(x)$ fonksiyonunun bilinmesi gerekir. $F(x)$ fonksiyonunu bulmak için ise saçılma verileri yeterlidir. Saçılma teorisinin ters probleminin çözümünde (4.2.7) temel denklemi çok önemlidir. Temel denklem saçılma verileri ile inşa edilirse ve $A(x,t)$ çözümü tek olarak bulunursa o halde (4.1.1) denklemi yani $\Omega(x)$ potansiyeli için (4.1.9) formülü bulunur .

4.3. REZOLVENT OPERATÖR VE AYRIŞIM FORMÜLÜ

$H = L_2(0,\infty;\mathbb{C}^2)\times\mathbb{C}$ Hilbert uzayı $F = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3 \end{pmatrix} \in H$ olmak üzere

$$(F,G)_H = \int_0^\infty \{f_1(x)\overline{g}_1(x) + f_2(x)\overline{g}_2(x)\}dx - \frac{1}{\alpha_1} f_3\overline{g}_3$$

iç çarpımı ile tanımlansın.

$F = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3 \end{pmatrix} \in H$, $f_i(x), i = 1,2$ $[0,a]$ sonlu aralığında sürekli ve

$B\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}+mT\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}+\Omega(x)\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}\in L_2(0,\infty;\mathbb{C}^2)$, $f_3=-\alpha_1 f_1(0)$ olsun. L operatörü

$$LF=\begin{pmatrix} -f_2'(x)+mf_2(x)+p(x)f_1(x)+q(x)f_2(x) \\ f_1'(x)-mf_2(x)+q(x)f_1(x)-p(x)f_2(x) \\ \alpha_0 f_1(0)+f_2(0) \end{pmatrix}$$

gibi tanımlansın. L operatörünün tanım bölgesi $D(L)$ ile gösterilsin.

L operatörü H uzayında özeşleniktir .

Eğer λ , L operatörünün spektrum noktası değilse $(L-\lambda I)^{-1}$ rezolvent operatör vardır . Şimdi rezolvent operatörün biçimini bulalım.

4.3.1. Lemma: $R_\lambda=(L-\lambda I)^{-1}$ rezolvent operatör

$$R_\lambda(x,t)=-\frac{1}{E(\lambda)}\begin{cases}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda), x\le t<\infty \\ F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda), 0\le t<x\end{cases}$$

formuna sahiptir, burada $F(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)$ (4.1.1) denkleminin çözümleridir.

İspat: Rezolventin açık biçimini bulmak için aşağıdaki problemin çözülmesi gerekir.

$$BY'+mTY+\Omega(x)Y=\lambda Y+f(x) \qquad (4.3.1)$$

$$y_2(0)+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)y_1(0)=f_3 \qquad (4.3.2)$$

Burada $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ sonlu her $(0,a)$ aralığının dışında sıfırdır. (4.3.1), (4.3.2) probleminin çözümü

$$Y(x,\lambda)=c_1(\lambda,x)\Phi(x,\lambda)+c_2(\lambda,x)F(x,\lambda) \qquad (4.3.3)$$

biçiminde ele alınsın, burada $F(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)$ (4.3.2)'e uygun homojen denklemin çözümleridir. Sabitlerin değişimi yöntemi uygulanarak $c_1(\lambda,x)$ ve $c_2(\lambda,x)$'in belirlenmesi gerekiyor.

$$Y(x,\lambda)=c_1(\lambda,x)\Phi(x,\lambda)+c_2(\lambda,x)F(x,\lambda)$$

ve

$$Y'(x,\lambda)=c_1'(\lambda,x)\Phi(x,\lambda)+c_1(\lambda,x)\Phi'(x,\lambda)+c_2'(\lambda,x)F(x,\lambda)+c_2(\lambda,x)F'(x,\lambda)$$

eşitlikleri (4.3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&c_1'(\lambda,x)B\Phi(x,\lambda)+c_2'(\lambda,x)BF(x,\lambda)+\\&+c_1(\lambda,x)\left[B\Phi'(x,\lambda)+mT\Phi(x,\lambda)+\Omega(x)\Phi(x,\lambda)\right]+\\&+c_2(\lambda,x)\left[BF'(x,\lambda)+mTF(x,\lambda)+\Omega(x)F(x,\lambda)\right]=\\&=c_1(\lambda,x)\lambda\Phi(x,\lambda)+c_2(\lambda,x)\lambda F(x,\lambda)+f(x)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$c_1'(\lambda,x)B\Phi(x,\lambda)+c_2'(\lambda,x)BF(x,\lambda)=f(x) \tag{4.3.4}$$

sonucu ortaya çıkar. (4.3.4) eşitliği soldan $\tilde{F}(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1'(\lambda,x)W[F,\Phi]+c_2'(\lambda,x)W[F,F]=\tilde{F}(x,\lambda)f(x)$$

$$c_1'(\lambda,x)\tilde{F}(x,\lambda)B\Phi(x,\lambda)=\tilde{F}(x,\lambda)f(x) \tag{4.3.5}$$

elde edilir. Burada çözümün $L_2\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$' den olması için $c_1(\lambda,\infty)=0$ olması gerekir. (4.3.5) (x,∞) aralığında integrallenerek

$$\int_x^\infty c_1'(\lambda,t)E(\lambda)dt=\int_x^\infty \tilde{F}(t,\lambda)f(t)dt$$

$$-c_1(\lambda,x)E(\lambda)=\int_x^\infty \tilde{F}(t,\lambda)f(t)dt$$

$$c_1(\lambda,x)=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \tilde{F}(t,\lambda)f(t)dt+c_1^*$$

ifadesi bulunur. $x\to\infty$ iken

$$c_1(\lambda,\infty)=-\frac{1}{E(\lambda)}.0+c_1^* \quad\Rightarrow\quad c_1^*=0$$

olur. O halde

$$c_1(\lambda,x)=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \tilde{F}(t,\lambda)f(t)dt \tag{4.3.6}$$

biçimindedir. Benzer şekilde (4.3.4) eşitliği soldan $\tilde{\Phi}(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1'(\lambda,x)W[\Phi,\Phi]+c_2'(\lambda,x)W[\Phi,F]=\tilde{\Phi}(x,\lambda)f(x)$$

$$c_2'(\lambda,x)\tilde{\Phi}(x,\lambda)BF(x,\lambda)=\tilde{\Phi}(x,\lambda)f(x) \tag{4.3.7}$$

elde edilir. (4.3.7) eşitliği ise $(0,x)$ aralığında integrallenerek

$$-E(\lambda)\left[c_2(\lambda,x)-c_2(\lambda,0)\right]=\int_0^x \tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)\,dt+c_2^*$$

$$c_2(\lambda,x)=c_2(\lambda,0)-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)\,dt+c_2^*$$

sonucunu verir. $x=0$ olduğunda $c_2^*=0$ olur. Böylece

$$c_2(\lambda,x)=c_2(\lambda,0)-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)\,dt \tag{4.3.8}$$

formuna sahip olduğu belirlenir. (4.3.6), (4.3.8) ve (4.3.3) kullanılarak

$$y(\lambda,x)=\left(-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \tilde{F}(t,\lambda)f(t)\,dt\right)\Phi(x,\lambda)$$

$$+\left(c_2(\lambda,0)-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)\,dt\right)F(x,\lambda)$$

$$=\int_x^\infty -\frac{\Phi(x,\lambda)}{E(\lambda)}\tilde{F}(t,\lambda)f(t)\,dt+\int_x^\infty -\frac{F(x,\lambda)}{E(\lambda)}\tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)\,dt+c_2(\lambda,0)F(x,\lambda)$$

$$=\int_0^\infty\left[-\frac{F(x,\lambda)}{E(\lambda)}\tilde{\Phi}(t,\lambda)-\frac{\Phi(x,\lambda)}{E(\lambda)}\tilde{F}(t,\lambda)\right]f(t)\,dt+c_2(\lambda,0)F(x,\lambda)$$

ifadesi bulunur. Burada $R_\lambda(x,t)$ operatörü

$$R_\lambda(x,t)=-\frac{1}{E(\lambda)}\begin{cases}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda), x\le t<\infty\\ F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda), 0\le t<x\end{cases} \tag{4.3.9}$$

ile ifade edilir. $c_2(\lambda,0)$'n ifadesini bulmak için (4.3.2) koşulunu kullanmak gerekir.

$y(x,\lambda)$ (4.3.2) koşulunu sağladığından

$$y_1(0,\lambda)=y_1(0)=c_1(\lambda,0)\Phi_1(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)F_1(0,\lambda)$$
$$y_2(0,\lambda)=y_2(0)=c_1(\lambda,0)\Phi_2(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)F_2(0,\lambda)$$

ifadeleri (4.3.2) de yerine yazılırsa

$$c_1(\lambda,0)\Phi_2(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)F_2(0,\lambda)+$$
$$+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\left[c_1(\lambda,0)\Phi_1(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)F_1(0,\lambda)\right]=f_3$$

olur ve böylece

$$c_1(\lambda,0).(\alpha_0+\alpha_1\lambda)+c_2(\lambda,0)F_2(0,\lambda)+$$
$$+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\left[c_1(\lambda,0).(-1)+c_2(\lambda,0)F_1(0,\lambda)\right]=f_3$$

ifadesinden

$$c_2(\lambda,0)\left[F_2(0,\lambda)+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda)\right]=f_3$$

$$c_2(\lambda,0)=\frac{f_3}{E(\lambda)}$$

sonucu elde edilir. Buradan $y(x,\lambda)$ fonksiyonunun

$$y(\lambda,x)=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt+\frac{f_3}{E(\lambda)}F(x,\lambda)$$

formunda olduğu bulunur.□

4.3.2. Lemma: $f(t)$ sonlu vektör fonksiyon ve $F=\begin{pmatrix} f(t) \\ f_3 \end{pmatrix}\in D(L)$ olsun.

O halde

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt+\frac{f_3}{E(\lambda)}F(x,\lambda)=-\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{F(x,\lambda)\{f_2(0)+f_1(0)\alpha_0\}}{\lambda E(\lambda)}+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)dt$$

biçimine sahiptir. Burada

$$g(x)=Bf'(x)+mTf(x)+\Omega(x)f(x)$$

şeklindedir.

İspat:

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)dt-$$
$$-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda)f(t)dt$$

eşitliğinde

$$\tilde{\Phi}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Phi}(x,\lambda)B+m\tilde{\Phi}(x,\lambda)T+\tilde{\Phi}(x,\lambda)\Omega(x)\right\}$$

$$\tilde{F}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{F}(x,\lambda)B+m\tilde{F}(x,\lambda)T+\tilde{F}(x,\lambda)\Omega(x)\right\}$$

ifadeleri yerlerine yazılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{E(\lambda)}F(x,\lambda)\int_0^x\left[\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Phi}(t,\lambda)B+m\tilde{\Phi}(t,\lambda)T+\tilde{\Phi}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}\right]f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\int_x^\infty\left[\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(t,\lambda)B+m\tilde{F}(t,\lambda)T+\tilde{F}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}\right]f(t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\int_0^x\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Phi}(t,\lambda)B\right\}f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\int_x^\infty\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(t,\lambda)B\right\}f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\int_0^x\left\{m\tilde{\Phi}(t,\lambda)T+\tilde{\Phi}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\int_x^\infty\left\{m\tilde{F}(t,\lambda)T+\tilde{F}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}f(t)\,dt$$

ifadeleri elde edilir. Kısmi integralleme ile

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\,dt=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\int_0^\infty\tilde{\Phi}(t,\lambda)\left\{Bf'(t)+mTf(t)+\Omega(t)f(t)\right\}dt$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\int_x^\infty\tilde{F}(t,\lambda)\left\{Bf'(t)+mTf(t)+\Omega(t)f(t)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\int_0^\infty\tilde{\Phi}(t,\lambda)g(t)\,dt-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\int_x^\infty\tilde{F}(t,\lambda)g(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)\,dt \qquad (4.3.10)$$

bulunur. İspatı bitirmek için

$$\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)Bf(t)\Bigg|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda)Bf(t)\Bigg|_{t=x}^{t=\infty}$$

ifadesinin biçimini belirlemek gerekir.

$$\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)Bf(t)\Bigg|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda)Bf(t)\Bigg|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)Bf(x)-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(0,\lambda)Bf(0)$$

$$+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(\infty,\lambda)Bf(\infty)-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(x,\lambda)Bf(x)$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\left[F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)B-\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(x,\lambda)B\right]f(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\left[\begin{pmatrix}\Phi_1(0,\lambda) & \Phi_2(0,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(0)\\ f_2(0)\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\left[\begin{pmatrix}F_1(x,\lambda)\\ F_2(x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\Phi_2(x,\lambda) & \Phi_1(x,\lambda)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Phi_1(x,\lambda)\\ \Phi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-F_2(x,\lambda) & F_1(x,\lambda)\end{pmatrix}\right]f(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\left[-f_1(0)(\alpha_0+\alpha_1\lambda)-f_2(0)\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\left[-F_1(x,\lambda)\Phi_2(x,\lambda)+F_2(x,\lambda)\Phi_1(x,\lambda)\right]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}f(x)$$

$$+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\alpha_1\lambda f_1(0)+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\{f_2(0)+\alpha_0 f_1(0)\}$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}(-E(\lambda))f(x)-\frac{1}{E(\lambda)}F(x,\lambda)f_3+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\{f_2(0)+\alpha_0 f_1(0)\}$$

$$=-\frac{f(x)}{\lambda}-\frac{1}{E(\lambda)}F(x,\lambda)f_3+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\{f_2(0)+\alpha_0 f_1(0)\}$$

sonucu çıkar. Bu sonuç (4.3.10) da yerine yazılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\,dt=-\frac{f(x)}{\lambda}-\frac{1}{E(\lambda)}F(x,\lambda)f_3$$

$$+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}F(x,\lambda)\{f_2(0)+\alpha_0 f_1(0)\}+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)\,dt$$

olur. Buradan

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) f(t)\,dt + \frac{1}{E(\lambda)} F(x,\lambda) f_3 = -\frac{f(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda E(\lambda)} F(x,\lambda)\{f_2(0)+\alpha_0 f_1(0)\}$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t) g(t)\,dt$$

sonucu bulunur.□

4.3.3. Lemma: $f(t)$ sonlu vektör fonksiyon ve $F=\begin{pmatrix} f(t) \\ f_3 \end{pmatrix} \in D(L)$ olsun. $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ ve $|\lambda| \to \infty$ sağlanırken

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) f(t)\,dt + \frac{f_3 F(x,\lambda)}{E(\lambda)} = -\frac{f(x)}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.3.11}$$

koşulu gerçeklenir.

İspat: $F(x,\lambda)$ çözümünün ve $A(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun özelliğinden $|\lambda| \to \infty$ iken $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ için

$$F(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda x}\left[1+o(1)\right]$$

olur. Ayrıca x kapalı bölgede değişirse $|\lambda| \to \infty$ iken

$$\Phi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} Cos\lambda x+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)Sin\lambda x \\ Sin\lambda x-(\alpha_0+\alpha_1\lambda)Cos\lambda x \end{pmatrix}\left[1+o(1)\right]$$

biçimine sahiptir. $g(t)$ sonlu vektör fonksiyon olduğundan yukarıdaki formülden $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ ve $|\lambda| \to \infty$ sağlanırken

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) g(t)\,dt = o(1)$$

olur. Bu ifade kullanılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) f(t)\,dt + \frac{f_3 F(x,\lambda)}{E(\lambda)} = -\frac{f(x)}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

olduğu elde edilir.□

4.3.4. Teorem: $\begin{pmatrix} f(x) \\ f_3 \end{pmatrix} \in D(L)$ vektör fonksiyonu L operatörünün özfonksiyonlarına göre ayrışıma sahiptir.

İspat: $f = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_3 \end{pmatrix}$ 4.3.3 Lemma'nın koşullarını sağlasın. O halde (4.3.11) formülü sağlanır. (4.3.11)'in her iki tarafı $\frac{1}{2\pi i}$ ile çarpıpılıp merkezi 0'da yarıçapı r olan Γ_r çemberi boyunca λ'ya göre integrallenirse

$$-f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} o\left(\frac{1}{\lambda}\right)d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt\right]d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f_3F(x,\lambda)}{E(\lambda)}d\lambda \tag{4.3.12}$$

olur. $R_\lambda(x,t)$ üst ve alt düzlemlerde analitik fonksiyonlardır. Buna göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt\right]d\lambda = I_r^1+I_r^2+I_r^3$$

yazılır. Burada

$$I_r^1=\frac{1}{2\pi i}\int_{-r-i\delta}^{r-i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt\right]d\lambda$$

$$I_r^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{r+i\delta}^{-r+i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt\right]d\lambda$$

ve

$$I_r^3=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{r-i\delta}^{r+i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt\right]d\lambda+\int_{-r+i\delta}^{-r-i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt\right]d\lambda\right\}$$

formundadır ve δ pozitif sayıdır. (4.3.12) de $r\to\infty$ iken limite geçilirse

$$f(x)=-\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt\right]d\lambda-\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f_3F(x,\lambda)}{E(\lambda)}d\lambda$$

$$=-\lim_{r\to\infty}\left\{I_r^1+I_r^2+I_r^3\right\}-\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f_3F(x,\lambda)}{E(\lambda)}d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^\infty\left[R_{\lambda-i0}(x,t)-R_{\lambda+i0}(x,t)\right]f(t)dt\right\}d\lambda-\sum_{j=1}^{p}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left(\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt\right)$$

$$-\sum_{j=1}^{p}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j} s\frac{F(x,\lambda)f_3}{E(\lambda)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(x,\lambda+i0)}{E(\lambda+i0)}-\frac{F(x,\lambda-i0)}{E(\lambda-i0)}\right]f_3 d\lambda \tag{4.3.13}$$

bulunur. İspata devam etmek için $R_{\lambda+i0}(x,t)$ ve $F(x,\lambda+i0)$'n hesaplanması gerekir. $\psi(x,\lambda)$ (4.3.1) denkleminin $\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\-\alpha_1\end{pmatrix}$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. O halde $F(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir. Böylece

$$F(x,\lambda)=\frac{\alpha_1 F_1(0,\lambda)}{-\alpha_1}\Phi(x,\lambda)+\frac{E(\lambda)\psi(x,\lambda)}{-\alpha_1} \tag{4.3.14}$$

$\Phi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ λ'ya bağlı tam vektör fonksiyondur. (4.3.9) ve (4.3.14) ifadelerinden

$$-\int_0^{\infty}\left[R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)\right]f(t)dt=-\int_0^{\infty}\left[R_{\lambda+i0}(x,t)-\bar{R}_{\lambda+i0}(x,t)\right]f(t)dt$$

$$=\int_0^{x}\left[\frac{F(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\left[\overline{\frac{F(x,\lambda)}{E(\lambda)}}\right]\right]\tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)dt+\int_x^{\infty}\Phi(x,\lambda)\left[\frac{\tilde{F}(t,\lambda)}{E(\lambda)}-\left[\overline{\frac{\tilde{F}(t,\lambda)}{E(\lambda)}}\right]\right]f(t)dt$$

sonucu çıkar. Diğer taraftan

$$\frac{F(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\left[\overline{\frac{F(x,\lambda)}{E(\lambda)}}\right]=\frac{\alpha_1 F_1(0,\lambda)\Phi(x,\lambda)}{-\alpha_1 E(\lambda)}+\frac{E(\lambda)\psi(x,\lambda)}{-\alpha_1 E(\lambda)}$$

$$-\frac{\alpha_1\overline{F_1(0,\lambda)}\Phi(x,\lambda)}{-\alpha_1\overline{E(\lambda)}}-\frac{\overline{E(\lambda)}\psi(x,\lambda)}{-\alpha_1\overline{E(\lambda)}}\left\{\frac{\overline{F_1(0,\lambda)}E(\lambda)-F_1(0,\lambda)\overline{E(\lambda)}}{|E(\lambda)|^2}\right\}\Phi(x,\lambda)$$

$$=\frac{W\left[\bar{F},F\right]}{|E(\lambda)|^2}\Phi(x,\lambda)=\begin{cases}-2i\dfrac{\lambda+m}{K}\dfrac{1}{|E(\lambda)|^2}\Phi(x,\lambda)\,, & |\lambda|>m\\ 0 & ,|\lambda|<m\end{cases}$$

bulunur. Böylece

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\left\{R_{\lambda+i0}(x,t)-\bar{R}_{\lambda+i0}(x,t)\right\}f(t)dt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{x}-2i\frac{\lambda+m}{K}\Phi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)\frac{1}{|E(\lambda)|^2}f(t)dt\\ 0\end{cases}$$

$$+\begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x}^{\infty}\Phi(x,\lambda)\left(-2i\frac{\lambda+m}{K}\right)\frac{1}{|E(\lambda)|^2}\tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)dt & ,|\lambda|>m \\ 0 & ,|\lambda|<m \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\Phi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)f(t)}{|E(\lambda)|^2}\frac{\lambda+m}{K}dt, & |\lambda|>m \\ 0 & ,|\lambda|<m \end{cases} \tag{4.3.15}$$

olur. Ayrıca

$$-\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\int\limits_{0}^{\infty}R_\lambda(x,t)f(t)dt=\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\int\limits_{0}^{x}\frac{F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)}{E(\lambda)}f(t)dt+\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda)}{E(\lambda)}f(t)dt$$

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{F(x,\lambda_j)\tilde{\Phi}(t,\lambda_j)}{\dot{E}(\lambda_j)}f(t)dt+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\Phi(x,\lambda_j)\tilde{F}(t,\lambda_j)}{\dot{E}(\lambda_j)}f(t)dt$$

$$=-\int\limits_{0}^{x}\frac{F(x,\lambda_j)\tilde{F}(t,\lambda_j)}{F_1(0,\lambda_j)\dot{E}(\lambda_j)}f(t)dt-\int\limits_{x}^{\infty}\frac{F(x,\lambda_j)\tilde{F}(t,\lambda_j)}{F_1(0,\lambda_j)\dot{E}(\lambda_j)}f(t)dt$$

$$=-\int\limits_{0}^{\infty}\frac{F(x,\lambda_j)\tilde{F}(t,\lambda_j)}{F_1(0,\lambda_j)\dot{E}(\lambda_j)}f(t)dt=-m_j^2\int\limits_{0}^{\infty}F(x,\lambda_j)\tilde{F}(t,\lambda_j)f(t)dt \tag{4.3.16}$$

elde edilir. (4.3.13), (4.3.15) ve (4.3.16) formüllerinden $\begin{pmatrix} f(x) \\ f_3 \end{pmatrix}\in D(L)$ elemanı için

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\frac{\Phi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda)}{|E(\lambda)|^2}\frac{\lambda+m}{K}f(t)dt-\sum_{j=1}^{n}m_j^2\int\limits_{0}^{\infty}F(x,\lambda_j)\tilde{F}(t,\lambda_j)f(t)dt$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{F(x,\lambda_j)f_3}{\dot{E}(\lambda_j)}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\frac{\Phi(x,\lambda)}{|E(\lambda)|^2}\frac{\lambda+m}{K}f_3d\lambda \tag{4.3.17}$$

ve

$$f_3=\frac{-\alpha_1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}d\lambda\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\tilde{\Phi}(t,\lambda)}{|E(\lambda)|^2}\frac{\lambda+m}{K}f(t)dt-\alpha_1\sum_{j=1}^{n}m_j^2\int\limits_{0}^{\infty}F(x,\lambda_j)\tilde{F}(t,\lambda_j)f(t)dt$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_1F_1(0,\lambda_j)f_3}{\dot{E}(\lambda_j)}+\frac{\alpha_1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\frac{f_3}{|E(\lambda)|^2}\frac{\lambda+m}{K}d\lambda \tag{4.3.18}$$

sonuçları elde edilir.□

4.3.5. Tanım: $f=\begin{pmatrix} f(x) \\ f_3 \end{pmatrix} \in D(L)$ olmak üzere 4.3.3 Lemma'nın koşullarını sağlasın. O halde (4.3.17) ve (4.3.18) formüllerine $\begin{pmatrix} f(x) \\ f_3 \end{pmatrix} \in D(L)$ elemanının *öz fonksiyonlara göre ayrışım* formülü denir.

4.4. LEVINSON FORMÜLÜ

Şimdi temel denklemi kullanarak (4.1.1) , (4.1.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin sayısı ile $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonunun argüment değişimi arasındaki bağıntıyı bulalım.

4.4.1. Teorem: $S(\lambda)$ fonksiyonunun logaritmasının artışı ile (4.1.1) (4.1.2) sınır değer probleminin öz değerlerinin sayısı n arasında

$$n-1=\frac{\ln S(-m-0)-\ln S(-\infty)}{2\pi i}+\frac{\ln S(\infty)-\ln S(m+0)}{2\pi i}-\frac{S(-m-0)-S(m+0)}{4}$$

bağıntısı vardır.

İspat: $E(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$E(\lambda)=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)F_1(0,\lambda)+F_2(0,\lambda)=$$

$$=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\left\{\frac{\lambda+m}{K}+\int_0^\infty\left\{A_{11}\frac{\lambda+m}{K}-A_{12}i\right\}e^{iKt}dt\right\}+\left\{-i+\int_0^\infty\left\{A_{21}\frac{\lambda+m}{K}-A_{22}i\right\}e^{iKt}dt\right\}$$

$$=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\left\{\frac{\lambda+m}{K}\left(1+\int_0^\infty A_{11}(0,t)e^{iKt}dt\right)-i\int_0^\infty A_{12}(0,t)e^{iKt}dt\right\}$$

$$+\left\{\frac{\lambda+m}{K}\int_0^\infty A_{21}(0,t)e^{iKt}dt-i\left(1+\int_0^\infty A_{22}(0,t)e^{iKt}dt\right)\right\}$$

$\psi(\lambda)=K.E(\lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. $\psi(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde analitik ve reel eksende süreklidir. Ayrıca $|\lambda|<m$, $\operatorname{Im}\lambda=0$ olduğunda $\operatorname{Im}\psi(\lambda)=0$ olur. λ noktası pozitif yönde

$$\Gamma_{\delta,R}=\left\{\lambda \mid m+\delta\le \operatorname{Re}\lambda\le R,\ \operatorname{Im}\lambda=0;|\lambda\pm m|=\delta,\left|\lambda-\lambda_j\right|=\delta, j=\overline{1,n},|\lambda|=R,\operatorname{Im}\lambda\ge 0\right\}$$

eğrisi boyu değiştiğinde $\arg\psi(\lambda)$'in değişimi sıfırdır, yani

$$\Gamma_{\delta,R}\arg\psi(\lambda)=0$$

olur. $\Gamma_{\delta,R}\arg\psi(\lambda)=\eta(\lambda)$ ile gösterilsin. (1) de $R\to\infty$ iken limite geçilirse

$$\begin{aligned}&\{\eta(-m-\delta)-\eta(-\infty)\}+\{\eta(-m+\delta)-\eta(-m-\delta)\}+\\&\qquad+\{\eta(m+\delta)-\eta(m-\delta)\}+\{\eta(\infty)-\eta(m+\delta)\}+\\&\qquad\qquad+\sum_{j=1}^{n}\{\eta(\lambda_j+\delta)-\eta(\lambda_j-\delta)\}+2\pi=0\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

elde edilir. Çünkü $\operatorname{Im}\lambda\ge 0$, $|\lambda|\to\infty$ olduğunda

$$\psi(\lambda)=\lambda^2\alpha_1+o(1)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi $\lim\limits_{\delta\to 0}\{\eta(\pm m+\delta)-\eta(\pm m-\delta)\}$ ifadesi ele alınsın. Bu limitin hesaplanması için $\psi(\lambda)$ fonksiyonunun $\pm m$ noktası etrafında nasıl forma sahip olduğunun bilinmesi gerekir.

$$\ell_1=\lim_{\lambda\to m}\frac{K}{\lambda+m}E(\lambda) \text{ ve } \ell_2=\lim_{\lambda\to -m}E(\lambda)$$

olsun.

$$\begin{aligned}\ell_1=\lim_{\lambda\to m}\frac{K}{\lambda+m}E(\lambda)&=\lim_{\lambda\to m}\left[(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\left\{\left(1+\int_0^\infty A_{11}(0,t)e^{iKt}dt\right)-i\frac{K}{\lambda+m}\int_0^\infty A_{12}(0,t)e^{iKt}dt\right\}\right.\\&\qquad\left.+\left\{\int_0^\infty A_{21}(0,t)e^{iKt}dt-i\frac{K}{\lambda+m}\left(1+\int_0^\infty A_{22}(0,t)e^{iKt}dt\right)\right\}\right]\\&=(\alpha_0+\alpha_1 m)\left(1+\int_0^\infty A_{11}(0,t)dt\right)+\int_0^\infty A_{21}(0,t)dt\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\psi(\lambda)=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)&\left\{(\lambda+m)\left(1+\int_0^\infty A_{11}(0,t)e^{iKt}dt\right)-iK\int_0^\infty A_{12}(0,t)e^{iKt}dt\right\}+\\&+\left\{(\lambda+m)\int_0^\infty A_{21}(0,t)e^{iKt}dt-iK\left(1+\int_0^\infty A_{22}(0,t)e^{iKt}dt\right)\right\}\end{aligned}$$

fonksiyonu $\ell_1\ne 0$ olduğunda $\lambda\to m$

$$\psi(\lambda)=2m\ell_1+o(1)\tag{4.4.2}$$

formundadır.

$\ell_1 = 0$ olsun, o zaman

$$(\alpha_0 + \alpha_1 m)\left(1 + \int_0^\infty A_{11}(0,t)\,dt\right) + \int_0^\infty A_{21}(0,t)\,dt = 0 \tag{4.4.3}$$

sonucu bulunur.

$$A(x,y) + F(x+y) + \int_x^\infty A(x,t)F(t+y)\,dt = 0 \ (x < y < \infty)$$

denkleminde $x = 0$ yazılırsa

$$\begin{pmatrix} F_{11}(y) & F_{12}(y) \\ F_{21}(y) & F_{22}(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}(0,y) & A_{12}(0,y) \\ A_{21}(0,y) & A_{22}(0,y) \end{pmatrix} +$$
$$+ \int_0^\infty \begin{pmatrix} A_{11}(0,t) & A_{12}(0,t) \\ A_{21}(0,t) & A_{22}(0,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11}(t+y) & F_{12}(t+y) \\ F_{21}(t+y) & F_{22}(t+y) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan

$$A_{11}(0,y) + F_{11}(y) + \int_0^\infty \{A_{11}(0,t)F_{11}(t+y) + A_{12}(0,t)F_{21}(t+y)\}\,dt = 0 \tag{4.4.4}$$

ve

$$A_{21}(0,y) + F_{21}(y) + \int_0^\infty \{A_{21}(0,t)F_{11}(t+y) + A_{22}(0,t)F_{21}(t+y)\}\,dt = 0 \tag{4.4.5}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.4.4) ifadesi y değişkenine göre (z,∞) aralığında integrallensin.

$$\int_z^\infty A_{11}(0,y)\,dy + \int_z^\infty F_{11}(y)\,dy + \int_z^\infty \left\{ \int_0^\infty \{A_{11}(0,t)F_{11}(t+y) + A_{12}(0,t)F_{21}(t+y)\}\,dt \right\} dy = 0$$

$$\int_z^\infty A_{11}(0,y)\,dy + \int_z^\infty F_{11}(y)\,dy + \int_0^\infty A_{11}(0,t)\int_z^\infty F_{11}(t+y)\,dy\,dt + \int_0^\infty A_{12}(0,t)\int_z^\infty F_{21}(t+y)\,dy\,dt = 0$$

Böylece yukarıdaki eşitlik bulunur . Burada $t + y = \xi$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\int_z^\infty \{A_{11}(0,y) + F_{11}(y)\}\,dy +$$

$$+ \int_0^\infty A_{11}(0,t)\int_{t+z}^\infty F_{11}(\xi)\,d\xi\,dt + \int_0^\infty A_{12}(0,t)\int_{t+z}^\infty F_{21}(\xi)\,d\xi\,dt = 0 \tag{4.4.6}$$

sonucu ortaya çıkar. $\int_0^\infty A_{11}(0,t)\int_{t+z}^\infty F_{11}(\xi)\,d\xi\,dt$ ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^\infty A_{11}(0,t)\int_{t+z}^\infty F_{11}(\xi)d\xi dt=$$

$$=\left(\int_{t+z}^\infty F_{11}(\xi)d\xi\right)\left(-\int_t^\infty A_{11}(0,y)dy\right)\Bigg|_{t=0}^\infty-\int_0^\infty\left(-\int_t^\infty A_{11}(0,y)dy\right)\left(-F_{11}(t+z)\right)dt=$$

$$=\left(\int_z^\infty F_{11}(\xi)d\xi\right)\left(\int_0^\infty A_{11}(0,y)dy\right)-\int_0^\infty F_{11}(t+z)\int_t^\infty A_{11}(0,y)dydt \qquad (4.4.7)$$

olduğu bulunur. Benzer yöntemle

$$\int_0^\infty A_{12}(0,t)\int_{t+z}^\infty F_{21}(\xi)d\xi dt=$$

$$=\left(\int_z^\infty F_{21}(\xi)d\xi\right)\left(\int_0^\infty A_{12}(0,y)dy\right)-\int_0^\infty F_{21}(t+z)\int_t^\infty A_{12}(0,y)dydt \qquad (4.4.8)$$

ifadesi elde edilir. (4.4.7) ve (4.4.8) (4.4.6)'de yerine yazılırsa

$$\left(1+\int_0^\infty A_{11}(0,y)dy\right)\left(\int_z^\infty F_{11}(y)dy\right)+\int_z^\infty A_{11}(0,y)dy-\int_0^\infty F_{11}(t+z)\int_t^\infty A_{11}(0,\xi)d\xi dt+$$

$$+\left(\int_0^\infty A_{12}(0,y)dy\right)\left(\int_z^\infty F_{21}(y)dy\right)-\int_0^\infty F_{21}(t+z)\int_t^\infty A_{12}(0,\xi)d\xi dt=0 \qquad (4.4.9)$$

sonucu çıkar. (4.4.5) eşitliğine de aynı yöntemler uygulanarak

$$\left(1+\int_0^\infty A_{22}(0,y)dy\right)\left(\int_z^\infty F_{21}(y)dy\right)+\int_z^\infty A_{21}(0,y)dy-\int_0^\infty F_{21}(t+z)\int_t^\infty A_{22}(0,y)dydt+$$

$$+\left(\int_0^\infty A_{21}(0,y)dy\right)\left(\int_z^\infty F_{11}(y)dy\right)-\int_0^\infty F_{11}(t+z)\int_t^\infty A_{21}(0,\xi)d\xi dt=0 \qquad (4.4.10)$$

elde edilir. (4.4.9) eşitliği $(\alpha_0+\alpha_1\lambda)$ ile çarpılıp (4.4.10) ile toplanırsa

$$\left[(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\left(1+\int_0^\infty A_{11}(0,y)dy\right)+\left(\int_0^\infty A_{21}(0,y)dy\right)\right]\left(\int_z^\infty F_{11}(y)dy\right)$$

$$+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\int_z^\infty A_{11}(0,y)dy+\int_z^\infty A_{21}(0,y)dy$$

$$-\int_0^\infty F_{11}(t+z)\left[(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\int_t^\infty A_{11}(0,\xi)d\xi+\int_t^\infty A_{21}(0,\xi)d\xi\right]dt$$

$$-\int_0^\infty F_{21}(t+z)\left[\int_t^\infty A_{22}(0,\xi)d\xi+(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\int_t^\infty A_{12}(0,\xi)d\xi\right]dt$$

$$+\left[(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\left(\int_0^\infty A_{12}(0,y)dy\right)+\left(1+\int_0^\infty A_{22}(0,y)dy\right)\right]\left(\int_z^\infty F_{21}(y)dy\right)=0$$

$\lambda \to m$ iken (4.4.3) ile

$$(\alpha_0+\alpha_1 m)\int_z^\infty A_{11}(0,y)\,dy+\int_z^\infty A_{21}(0,y)\,dy-$$
$$-\int_0^\infty F_{11}(t+z)\left[(\alpha_0+\alpha_1 m)\int_t^\infty A_{11}(0,\xi)\,d\xi+\int_t^\infty A_{21}(0,\xi)\,d\xi\right]dt+$$
$$-\int_0^\infty F_{21}(t+z)\left[\int_t^\infty A_{22}(0,\xi)\,d\xi+(\alpha_0+\alpha_1 m)\int_t^\infty A_{12}(0,\xi)\,d\xi\right]dt+$$
$$+\left[(\alpha_0+\alpha_1 m)\left(\int_0^\infty A_{12}(0,y)\,dy\right)+\left(1+\int_0^\infty A_{22}(0,y)\,dy\right)\right]\left(\int_z^\infty F_{21}(y)\,dy\right)=0$$

olur.

$$K_1(z)=(\alpha_0+\alpha_1 m)\int_z^\infty A_{11}(0,y)\,dy+\int_z^\infty A_{21}(0,y)\,dy$$

ve

$$F(z)=\int_0^\infty F_{21}(t+z)\left[\int_t^\infty A_{22}(0,\xi)\,d\xi+(\alpha_0+\alpha_1 m)\int_t^\infty A_{12}(0,\xi)\,d\xi\right]dt-$$
$$-\left[(\alpha_0+\alpha_1 m)\left(\int_0^\infty A_{12}(0,y)\,dy\right)+\left(1+\int_0^\infty A_{22}(0,y)\,dy\right)\right]\left(\int_z^\infty F_{21}(y)\,dy\right)$$

ile gösterilsin. Böylece

$$K_1(z)-\int_0^\infty F_{11}(t+z)K_1(t)\,dt=F(z) \tag{4.4.11}$$

bulunur. $K_1(z)$ fonksiyonu (4.4.11) denkleminin sınırlı çözümü olur. Dolayısıyla $K_1(z)\in L_1(0,\infty)$ olur. Bu nedenle $\ell_1=0$ durumunda $\psi(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki forma sahiptir.

$$\psi(\lambda)=(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\left\{(\lambda+m)\left(1+\int_0^\infty A_{11}(0,t)e^{iKt}dt\right)-iK\int_0^\infty A_{12}(0,t)e^{iKt}dt\right\}$$
$$+\left\{(\lambda+m)\int_0^\infty A_{21}(0,t)e^{iKt}dt-iK\left(1+\int_0^\infty A_{22}(0,t)e^{iKt}dt\right)\right\}=\sqrt{\lambda-m}\,\hat{K}_1(\lambda) \tag{4.4.12}$$

Burada

$$\hat{K}_1(\lambda)=\sqrt{\lambda-m}\,(\lambda+m)\left\{\alpha_1\left(1+\int_0^{\infty}A_{11}(0,t)e^{iKt}dt\right)\right\}-$$

$$-i\sqrt{\lambda-m}\left\{(\alpha_0+\alpha_1\lambda)\int_0^{\infty}A_{21}(0,t)e^{iKt}dt\right\}+\left(1+\int_0^{\infty}A_{22}(0,t)e^{iKt}dt\right)$$

formundadır ve $\lambda=m$ noktasında süreklidir. $\psi(\lambda)$'nın (4.4.12) ifadesi

$$-2i\frac{\lambda+m}{K}\Phi(x,\lambda)=\overline{E(\lambda)}F(x,\lambda)-E(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-2i\Phi(x,\lambda)=F_1(x,\lambda)\sqrt{\lambda-m}\,\overline{\hat{K}_1(\lambda)}-\overline{F_1(x,\lambda)}\sqrt{\lambda-m}\,\hat{K}_1(\lambda), \qquad |\lambda|>m$$

elde edilir. Buradan $\hat{K}_1(m)\neq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\ell_1=0$ durumunda $\lambda\to m$ olduğunda

$$\psi(\lambda)\sim\hat{K}_1(m)\sqrt{\lambda-m} \tag{4.4.13}$$

sağlanır. (4.4.2) ve (4.4.13)'den $\lambda\to m$ iken

$$\psi(\lambda)=\begin{cases}2m\ell_1+o(1), & \ell_1\neq 0\\ \hat{K}_1(m)\sqrt{\lambda-m}, & \ell_1=0\end{cases} \tag{4.4.14}$$

sonucu bulunur. Benzer yolla $\ell_2=\lim\limits_{\lambda\to -m}E(\lambda)$ durumunda

$$\psi(\lambda)=\begin{cases}\sqrt{\lambda+m}\,(c_1+o(1)) & \ell_2\neq 0\\ (\lambda+m)(c_2+o(1)) & \ell_2=0\end{cases} \tag{4.4.15}$$

elde edilir. (4.4.1) formülünde $\delta\to 0$ olduğunda limite geçilirse (4.4.14) ve (4.4.15) yardımıyla

$$\{\eta(-m-0)-\eta(-\infty)\}+\{\eta(\infty)-\eta(m+0)\}-n\pi+2\pi=$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}, & \ell_1\neq 0\ \ \ell_2\neq 0\\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi, & \ell_1=0\ \ \ell_2\neq 0\\ \pi+0=\pi, & \ell_1\neq 0\ \ \ell_2=0\\ \pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}, & \ell_1=0\ \ \ell_2=0\end{cases} \tag{4.4.16}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\ln S(\lambda)=2i\eta(\lambda)$$

ve

$$S(-m-0)=\begin{cases}-1, & \ell_2 \neq 0 \\ 1\ , & \ell_2 = 0\end{cases} \qquad S(m+0)=\begin{cases}-1, & \ell_1 = 0 \\ 1\ , & \ell_1 \neq 0\end{cases}$$

biçimindedir. (4.4.16)'den yararlanarak

$$\frac{\ln S(-m-0)-\ln S(-\infty)}{2\pi i}+\frac{\ln S(\infty)-\ln S(m+0)}{2\pi i}=\frac{\eta(-m-0)-\eta(-\infty)}{\pi}$$
$$+\frac{\eta(\infty)-\eta(m+0)}{\pi}=n-1+\frac{S(-m-0)-S(m+0)}{4}$$

bağıntısı elde edilir.□

4.4.2. Tanım:

$$n-1=\frac{\ln S(-m-0)-\ln S(-\infty)}{2\pi i}+\frac{\ln S(\infty)-\ln S(m+0)}{2\pi i}-\frac{S(-m-0)-S(m+0)}{4}$$

bağıntısına *Levinson Formülü* denir.

5. SONUÇLAR

Bu tezde ele alınan sonuçlar, *Bulgular ve Tartışma* bölümünde

4.1 (2×1) *Boyutlu Dirac Denklemler Sistemi*

4.2 Temel Denklemin Elde Edilmesi

4.3 Rezolvent Operatör ve Ayrışım Formülü

ve

4.4 Levinson Formülü

başlıkları altında toplanmıştır.

4.1' de

$$BY' + mTY + \Omega(x)Y = \lambda Y$$

$$Y_2(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda)Y_1(0) = 0$$

problemi ele alındı. Saçılma fonksiyonu $S(\lambda)$ tanımlandı. $S(\lambda)$ fonksiyonunun tanımlanmasında kullanılan $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının özellikleri belirlendi.

4.2' de

$$-2i\frac{\lambda+m}{K}\frac{\Phi(x,\lambda)}{\overline{E}(\lambda)} = F(x,\lambda) - S(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

eşitliği yardımıyla

$$A(x,y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} A(x,t)F(t+y)\,dt = 0 \ (x < y < \infty)$$

temel denklemi elde edildi.

4.3' de

$$R_\lambda(x,t) = -\frac{1}{E(\lambda)}\begin{cases}\Phi(x,\lambda)\tilde{F}(t,\lambda), x \le t < \infty \\ F(x,\lambda)\tilde{\Phi}(t,\lambda), 0 \le t < x\end{cases}$$

biçiminde $R_\lambda(x,t) = (L-\lambda I)^{-1}$ rezolvent operatör bulundu ve Parseval eşitliği elde edildi.

4.4' de

4.1' de ele alınan sınır değer probleminin özdeğerlerinin sayısı ile $S(\lambda)$' nın argümentinin arasındaki

$$n-1=\frac{\ln S(-m-0)-\ln S(-\infty)}{2\pi i}+\frac{\ln S(\infty)-\ln S(m+0)}{2\pi i}-\frac{S(-m-0)-S(m+0)}{4}$$

ile tanımlanan bağıntı çıkarıldı.

Dolayısıyla $\{S(\lambda);\lambda_1,...,\lambda_n;m_1,...,m_n\}$ saçılma verileri ile $F(x)$ fonksiyonu bulunur. $F(x)$ fonksiyonu ile (4.2.7) temel denklem inşa edilir. Saçılma verileri yardımıyla inşa edilmiş bu integral denklemin tek bir $A(x,t)$ çözümü varsa (4.1.9) formülü ile tanımlı tek bir $\Omega(x)$ potansiyeli bulunur. Böylece (4.1.1) denklemini inşa etmek için uygun yöntem verilmiş olur.

KAYNAKLAR

[1] Rayleigh J.W.S. "The Theory of Sound", Dover Publications", New York, p.324, (1945).

[2] Marchenko, V.A. "Sturm Liouville Operators and Applications", Birkhauser Verlag, Boston, p.364, (1986).

[3] Marchenko, V.A. "Reconstruction of The Potential Energy from The Phases of The Scattered waves", Nauk SSSR **104**, No.**5**, p.695-698, (1955).

[4] Kruskal, M.D., Gardner, C.S., Grene, J.M. and Minra, K.M. "Method for Solving The Kortveg-de Vries Equation", Phys. Rev. V.**19**, p.1095-1097, (1967).

[5] Chadan, K. and Sabatier, P.C. "Inverse Problems in Quantum Scattering Theory", Springer-Verlag, New York, p.344, (1977).

[6] Ablowitz, M.J. and Segur, H. "Solutions and The Inverse Scattering Transform", SIAM Philadelphia, p.474, (1981).

[7] Gasymov, M.G. and Levitan, B.M. "To Scattering Phase The Structure of Dirac Operator", DAN SSSR, T **167**, No.**6**, p.967-1219, (1966).

[8] Gasymov, M.G. "For 2n order Dirac Equations System, Inverse Problem of Scattering Theory", Tr. Mos. Mat. Obs.,T.**19**, p.41-112, (1968).

[9] Mamedov, Kh.R. "Uniqueness of Solution of The Inverse Problem of Scattering Theory with a Spectral Parameter in The Boundary Condition", Matematical Notes,v.**74**, No.**1**,p.136-140, (2003).

[10] Mamedov, Kh.R. and Menken, H. "On The Scattering Data of Sturm Liouville Problem with a Spectral Parameter in The boundary Condition", University of İstanbul of Sciene The Journal of Mathematics, Vol:**61-62**, p.1-14, (2002-2003).

[11] Mamedov, Kh.R. and Menken, H. "On The Inverse Problem of Scattering Theory for a Differantial operator of The Second Order", Functional Analysis and Its Application, **197** Mathematics Studies-ELSEVIER, p.185-195, (2004).

[12] Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. "Introduction to Spectral Theory", American Mathematical Society, United States of America, p.524, (1975).

[13] Gelfand, I.M. and Levitan, B.M. "On The Determination of Differantial Equation from Its Specktral Function", Izv Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 15, No.**4** (1951), English Translate: Amer. Math. Soc Transl. p.253-304, (1955).

[14] Levitan, B.M.and Gasımov, M.G. "The Construction of Diferantial Equation to Two Spectrum", Usp.Math. Nauk., V.**19** No**2** (116), p.3-63, (1964).

[15] Naimark, M.A. "Linear Differantial Operators", Frederic Ungar Publishing, New York, p.144, (1969).

[16] Newton, R.G. "Scattering Theory of Waves and Particles", McGraw-Hill, New York, p.254, (1966).

[17] Faddeev, L.D. "Propertiers of S-matrix of The One Dimesional Schrödinger Equation", Trudy Mat. Inst. Steklov **(73)**, p.314-336, (1974).

[18] Fam Loy Vu. "On The Whole Line for Dirac Equations System Inverse Problem of Scatterig Theory", Ukr. Mat. Journ. T.**24**, No.**5**, p.666-674, (1972).

[19] Frolov, I.S. "On The Whole Line for Dirac Equations System Inverse Problem of Scatterig Theory", DAN SSSR, T.**207**, No.**1**, p.44-48, (1972).

[20] Azimova, G. and Guseynov, I.M. "Inverse Problem of Scattering Theory for First-order Equations System", DAN Azer. SSR, T.**39**, No.**11**,p.9-32-37, (1983).

[21] Mamedov, Kh.R. "On The Whole Line for First–order Distinction Equations System Problem of Scattering Theory, Application Problems of Functional Analysis", ADU, p.57-65, (1987)

[22] Fulton, C.T. "Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in The Boundary Conditions", Proc.Roy.Soc.Edin., **77A**, p.293-308, (1977).

[23] Binding, P.A., Browne, P.J. and Watson, B.A. "Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions rationally dependent on The Eigenparameter I", Proc. Edinburg Math. Soc.**(2)** No.**3**, p.631-645, (2002).

~~[24] Pivovarchik, V.N. "Direct and Inverse Problem for a Damped String", J. Operator Theory 42, p.180-220, (1999).~~

[25] Maeve McCarthy, C. and Rundell, W. "Eigenparameter Dependent Inverse Sturm-Liouville Problems", Numerical Functional Analysis and Optimization Vol. **24**, No.**1&2**, p.85-105, (2003).

[26] Megrabov, A.G. "Mathematical Problems of Geophysics", Novosibirsk, No 4, p.84-102, (1973).

[27] Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. "Sturm Lioville and Dirac Operators", Kluwer Academic Publıshers, London, p.349, (1991).

[28] Alan C.Newell,"Solitons in Mathematics and Physics", University of Arizona, Tuscon, p.323, (1985).

[29] Devito, C.L. "Functional Analysis and Linear Operator Theory", Addison – Wesley Publishing Company, University of Arizona, Tuscon, p.358, (1990).

[30] Saff, E.B., Snıder, A.D. and Trefethen, L.N. "Fundamental of Complex Analysis", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, p.468, (2002).

[31] Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. "Inverse Problems of Sturm Liouville", Nauka, Moskov, p.239, (1984).

[32] Coddigton, E.A and Levinson, N. "Theory of Ordinary Differantial Equations", McGraw-Hill, New York, p.429, (1965).

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Ankara'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Çorum'da yaptım. 1998-2002 yılları arasında Mersin Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2002 yılında Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans programına başladım. 27.07.2004 tarihinden bu yana Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosuna bağlı olarak Matematik Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.