TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın konusunun belirlenmesi ve hazırlanmasında, gereken bilimsel kaynakların ve bilgilerin elde edilmesinde hiçbir özveriden kaçınmayan,sabrı ve titizliğini esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Hanlar MEMMEDOV' a , teşekkür ederim.

Bu tezin oluşmasında gösterdiği ilgi ve destekleri için Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ ve Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca yüksek lisans ders ve tez aşamasında bilgilerini ve yardımlarını esirgemeyen tüm hocalarıma ve Araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$C^{(n)}$	Kendisi ve n. dereceden türevi sürekli olan fonksiyonların kümesi
$\mathcal{D}(A)$	A operatörünün tanım bölgesi
L	Diferansiyel operatör
$l(y)$	Lineer diferansiyel ifade
$U_k(y)$	Sınır koşulları
λ	Özdeğer
$u(x,t)$	t anında katının sıcaklığı
$u_t(x,t)$	Sıcaklık değişim hızı (C^o/san)
$u_x(x,t)$	Sıcaklık eğrisinin eğimi (C^o / cm)
$u_{xx}(x,t)$	Sıcaklık eğrisinin kabarıklığı(C^o / cm^2)
c	Katının özgül ısısı (kal / grC^o)
k	Öz iletkenlik
ρ	Yoğunluk
M	Sıvının kütlesi
q	Sıvının özgül ısısı(kal / grC^o)
α^2	Sıcaklık iletimi
δ_{jk}	Kroniker sembolü

1. GİRİŞ

Isı iletiminin matematiksel çalışması 1800'lerde ortaya çıkmıştır ve modern fizikçilerin dikkatini çekmeye devam etmektedir. Örneğin, yüksek hızda makinelerin kaynaklarının ısı transferi, dağılımının analizi hala önemli bir teknolojik problemdir.

Isı iletiminin matematiksel modelini inşa etmek için aşağıda verilen deneysel sonuçları hatırlamak yararlıdır:

(a) Isı akışı, azalan sıcaklık yönündedir.

(b) Isı akış hızı, akışın gerçekleştiği yüzeyin alanı ve bu yüzeye dik sıcaklık gradienti ile orantılıdır.

(c) Bir cismin sıcaklığının değişmesi sonucu, o cismin kazandığı veya kaybettiği ısı, cismin kütlesi ve sıcaklık değişimi ile orantılıdır.

Yukarıda (b) şıkkında belirtilen oranlılık katsayısı k "ısı iletkenlik katsayısı" ve (c) şıkkında ifade edilen "orantılılık katsayısı" c ise, cismin "ısınma ısısı" olarak tarif edilmekte ve burada ısının yayıldığı ortam içinde her tarafta sabit olduğu kabul edilmektedir.

Şimdi alınan cismin sonlu bir $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ hacim elemanı içinde enerji denklemi bulunsun. Isının yayıldığı ortamın yoğunluğu her tarafta aynı ve ρ ise, hacim elemanın kütlesi, $\Delta M = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ olur. (b)'de belirtilen durum birinci Fourier yasası olarak bilinir. Buna göre, örneğin pozitif x ekseni yönünde gerçekleşen ısı iletimi, o yöndeki sıcaklık gradienti ile orantılıdır ve bu orantı,

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.1}$$

şeklinde yazılır. Burada (-) işareti, ısı iletiminin azalan sıcaklık yönünde olduğunu gösterir. (1.1.)'de görülen q, birim alandan birim zamanda içinde geçen ısı miktarıdır. T ise sıcaklıktır.

Önce, x ekseni yönünde yayılan ısı-enerji denklemini göz önüne alınsın. Bu durumda, Δt zaman aralığı içinde yüzeyden hacim elemanına giren ısı,

$$\Delta q_x = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x \Delta y \Delta z \Delta t \tag{1.2}$$

olur. Benzer şekilde, aynı Δt süresi içinde diğer yüzeyden ΔV hacim elemanını terk eden ısı ise,

$$\Delta q_{x+\Delta x} = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t \tag{1.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Öyle ise, t zamanı içinde hacim elemanı tarafından tutulan ısı miktarı,

$$\Delta q = \Delta q_x - \Delta q_{x+\Delta x} = \Delta(mcT) \tag{1.4}$$

olur.

Isının iletildiği ortam içinde, herhangi bir noktada ve herhangi bir t anında, birim hacimde ve birim zamanda üretilen ısı miktarı $f(x, y, z, t)$ fonksiyonu ile ifade edilmiş olsun. O zaman, Δt zamanı içinde ΔV hacim elemanında üretilen ısı miktarı,

$$\Delta q' = f(x, y, z, t) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, \Delta t \tag{1.5}$$

olur. Diğer taraftan,

Giren ısı - çıkan ısı + üretilen ısı = Biriken ısı (1.6)

yazılabildiğinden, yukarıdaki değerler bu bağıntıda yerlerine konursa,

$$\begin{aligned} -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x} \Delta y \Delta z \Delta t + k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t + f(x, y, z, t) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \\ = \Delta(mct) \\ = \rho c \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, \Delta t \end{aligned}$$

elde edilir. Burada bütün terimler $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ ile bölünürse,

$$\frac{k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x} + f(x, y, z, t) = c \frac{\Delta(\rho T)}{\Delta t} \tag{1.7}$$

elde edilir. Şimdi bu noktada, Δt ve Δx 'in birlikte sıfıra yaklaştığını düşünülür, göz önüne alınan hacim elemanının sonsuz küçük bir hacim elemanı olduğu kabul edilirse, o zaman (1.7) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(x, y, z, t) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.8}$$

şeklinde ifade edilir. (1.8) denklemine "tek boyutlu ısı iletim denklemi" denir.

Tezde, konu edilen ısı denklemine ilişkin sınır-değer probleminin özellikleri incelenir.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \qquad x > 0 \;,\; t > 0$$

$$\omega_t(0,t) + \alpha^2 \omega_x(0,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$\omega(x,0) = \omega_0(x) \qquad x>0$$

$$\omega(0,0) = \upsilon_0$$

şeklinde bir sınır-değer problemi ele alınırsa, değişkenlere ayırma yöntemi uygulanarak,

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \qquad x > 0$$

denklemini ve

$$u'(0) - \lambda u(0) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} |u(x)| < \infty$$

sınır koşullarını sağlayan, spektral problem elde edilir.

Daha genel biçimde,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u \tag{1.9}$$

denkleminin

$$d_0 u_x(0,t) - b_0 u(0,t) = 0 \tag{1.10}$$

$$a_1 u_t(1,t) + b_1 u(1,t) = d_1 u_x(1,t) \tag{1.11}$$

sınır koşullarını ve

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{1.12}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü incelendi. Burada, $\varphi(x)$ sürekli, parçalı-sürekli, ve türevlenebilir bir fonksiyon olarak $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ koşulunu sağlıyor. $q(x)$, [0,1] aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon, a_1, b_0, b_1, d_0 *ve* d_1 reel sabitlerdir. Ayrıca, $|b_0| + |d_0| \neq 0$ ve $\sigma = a_1 d_1 > 0$ koşulları sağlansın.

Problemin çözümü için önce değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanarak,

$$X''(x) + q(x)X(x) = -\lambda X(x) \qquad 0 < x < 1$$

$$d_0 X'(0) - b_0 X(0) = 0$$

$$\left(b_1 - \lambda a_1\right) X(1) - d_1 X'(1) = 0$$

sınır koşullarını sağlayan spektral problem elde edilir. Daha sonra [7-8] ve [16]'dan tabanlık ile ilgili sonuçlar kullanılarak (1.9)-(1.12) probleminin çözümü elde edilir.

Benzer spektral problemle, ağırlıklı yüklenmiş telin ve zarın titreşimlerinde, uçağın kanatlarının vibrasyonunun kararlılığı olaylarında da karşılaşılır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Matematiksel fizik denklemlerinde sınır koşulu zamana (veya yöne) göre türev içeriyorsa, Fourier yönteminin uygulanmasıyla sınır koşulunda spektral parametre içeren sınır problemi ile karşılaşılır. Bu problemlerin ısı iletkenliği ve dalga denklemleri için sınır problemlerinde fiziksel uygulamaları [1-6]’ da verilmiştir.

Literatürde, böyle spektral problemler klasik uzaylarda özdeğer-özfonksiyon problemi olarak yorumlanmadığı için, özel Hilbert uzayları oluşturarak incelemeler yapılmıştır [3], [9]. Problemin çözümü sırasında elde edilen Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülü kısmi diferansiyel denklemin çözümünün bulunmasında önem taşır. Bu nedenle [10], [11]’de spektral problemin özdeğerleri ve özfonksiyonlarının özellikleri incelenir, [12], [13]’de özfonksiyonların özel Hilbert uzaylarında tabanlık özellikleri incelenir. Sınır koşulu spektral parametresi kuadratik içerdiğinde benzer problemler [12], [14]’de araştırılır. İlk kez [7] ve [8]’de sınır koşullarından biri spektral parametre içerdiğinde tabanlık problemi incelenmiştir, sonraları farklı ve daha genel durumlar için özfonksiyonların tabanlığı [4], [5], [15], [16]’da gösterilir.

Problemin incelenmesi sırasında karşılaşılan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin, özdeğer ve özfonksiyon’larının özellikleri, gerekli tanım ve kavramlar [17], [18]’den , konuya ilişkin diğer temel bilgiler ise [19], [21]’den alınmıştır.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde ileri kısımda kullanılacak kavramlar tanıtılarak, temel teoremler verilecektir.

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 3.1.1.:

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y \tag{3.1.1}$$

biçimindeki ifadeye lineer diferansiyel ifade denir. Burada *n* sayısı diferansiyel ifadenin mertebesi ve $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonları da diferansiyel ifadenin katsayısı olarak adlandırılır. $\dfrac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonları, sabit, kapalı ve sonsuz $[a,b]$ aralığında süreklidir.

Tanım 3.1.2.: *y* fonksiyonunun ve onun [*a,b*] aralığında *(n-1).* dereceden türevlerinin *a* ve *b* noktalarındaki değerleri

$$y_a, y_a', ..., y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', ..., y_b^{(n-1)} \tag{3.1.2}$$

ile belirtilsin. (3.1.2) değeriyle oluşturulan

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + ... + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + ... + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} \tag{3.1.3}$$

ifadesi bir lineer form belirtir. Eğer *k=1,2,…,m* için bu biçimde $U_k(y)$ oluşturulursa ve eğer

$$U_k(y) = 0 \quad , \; k=1,2,\dots,m \tag{3.1.4}$$

eşitliği $y(x) \in C^{(n)}$ için sağlanırsa bu ifadeye sınır koşulu denir.

(3.1.4) formundaki sınır koşulunu sağlayan tüm $y(x) \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonlar kümesi $\mathcal{D}$ ile belirtilsin. Burada $\mathcal{D}$, $C^{(n)}[a,b]$'nin lineer alt kümesidir. $l(y)$ diferansiyel ifade ve (3.1.4) sınır koşulu ile tanımlanan $\mathcal{D}$ alt kümesi verilmiş olsun. Herhangi bir $y \in \mathcal{D}$ fonksiyonuna $u = l(y)$ fonksiyonu karşılık gelsin. Bu dönüşüm tanım bölgesi $\mathcal{D}$ olan bir lineer operatördür ve L ile gösterilir. Bundan dolayı, eğer $y \in \mathcal{D}$ ve $u = l(y)$ ise, o halde L operatörünün tanımına göre

$u = L(y)$'dir. Burada ki L operatörüne $l(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (3.1.4) sınır koşulunun oluşturduğu diferansiyel operatördür denir.

Tanım 3.1.3:

$$l(y) = 0 \tag{3.1.5}$$

denklemini ve

$$U_k(y) = 0, \ k=1,2,\ldots,m \tag{3.1.6}$$

koşullarını sağlayan $y(x) \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonunun bulunması problemine homojen sınır-değer problemi denir [17]. $l(y)$ diferansiyel ifade ve (3.1.6) sınır koşulları ile belirtilen operatör L olsun. O halde homojen sınır-değer problemi, L operatörünü $\mathcal{D}$ tanım bölgesinde sıfıra dönüştüren $y(x)$ fonksiyonunun bulunmasına indirgenir.

Herhangi homojen sınır-değer probleminin en azından bir $y \equiv 0$ çözümü vardır. Bu çözüme trivial veya sıfır çözüm denir. Bununla birlikte homojen sınır-değer probleminin sıfır olmayan çözümü de olabilir. Hangi koşullar altında homojen sınır-değer probleminin sıfır olmayan çözümlerinin var olduğu araştırılsın.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Diferansiyel denklemler teorisinden bilinir ki, homojen sınır-değer problemini sağlayan $l(y) = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü $c_1, c_2, \ldots, c_n$'ler sabit olmak üzere

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \tag{3.1.7}$$

ile ifade edilebilir. (3.1.6) sınır koşulunu sağlatarak,

$$\begin{aligned} &c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \ldots + c_n U_1(y_n) = 0 \\ &c_1 U_2(y_1) + c_2 U_2(y_2) + \ldots + c_n U_2(y_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_1 U_m(y_1) + c_2 U_m(y_2) + \ldots + c_n U_m(y_n) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

lineer homojen denklem sistemi elde edilir.

$$U = \begin{bmatrix} U_1(y_1) \ U_1(y_2) \ U_1(y_n) \\ U_2(y_1) \ U_2(y_2) \ U_2(y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_m(y_1) \ U_m(y_2) \ U_m(y_n) \end{bmatrix} \tag{3.1.9}$$

olsun. O halde $m = n$ için homojen sınır-değer probleminin sıfır olmayan çözümü ancak ve ancak U matrisinin determinantı sıfıra eşit olduğunda vardır.

Tanım 3.1.4.: L operatörünün tanımlandığı $\mathcal{D}$ bölgesinde

$$Ly = \lambda y \tag{3.1.10}$$

bağıntısını sağlayan özdeş olarak sıfıra denk olmayan fonksiyon var ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri denir ve y fonksiyonuna λ özdeğerine uygun özfonksiyon denir. L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_k(y) = 0 \quad , \; k=1,2,\ldots,m \tag{3.1.11}$$

koşulları ile inşa edildiği zaman

$$ly = \lambda y, \; U_k(y) = 0 \tag{3.1.12}$$

homojen sınır probleminin sıfır olmayan çözümünü garanti eden λ sayısına L diferansiyel operatörünün özdeğeri ve λ 'ya karşılık gelen, sıfır olmayan y çözümüne ise özfonksiyon denir.

Aynı bir λ özdeğerine uygun özfonksiyonların lineer kombinasyonu verilen L operatörünün λ özdeğerine uygun özfonksiyondur. Özdeğerleri belirleyecek koşullar bulunsun.

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda)$$

$ly = \lambda y,$ denkleminin $j,k = \overline{1,n}$ olmak üzere

$$y_j^{(k-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

başlangıç koşullarını sağlayan temel çözüm sistemi ise, bu çözümler herhangi sabit $x \in [a,b]$ için λ parametresine bağlı tam fonksiyondur.

(3.1.12) sınır probleminin sıfır olmayan çözümü ancak ve ancak

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \ldots & U_m(y_n) \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı n 'den küçük olduğunda vardır.

Eğer $m < n$ ise $rankU = r < n$ 'dir. O halde (3.1.4) sınır probleminin herhangi λ için sıfır olmayan çözümü vardır, yani $m < n$ ise, λ 'nın herhangi bir değeri verilen sınır probleminin özdeğeridir.

Eğer $m \geq n$ ise o zaman,

1) n-inci mertebeden determinantların her biri sıfıra eşit ise her bir λ özdeğerdir;

2) U matrisinin n. mertebeden determinantından en az bir determinantı özdeş olarak sıfır değilse bu determinantın sıfırları özdeğerdir.

Ancak özdeş olarak sıfır olmayan tam fonksiyonun sıfırlarının sayısı sayılabilirden fazla değil (hiç olmaya da bilir) ve sonlu limit noktasına sahip değildir. Buna göre (2) durumunda L operatörü sayılabilirden fazla olmayan ve sonlu limit noktasına sahip olmayan özdeğerlere sahiptir.

Eğer $m = n$ ise,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_n(y_1) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

olur.

$\Delta(\lambda)$ λ'ya bağlı tam analitik fonksiyondur ve buna L operatörünün $Ly = 0$ sınır probleminin karakteristik determinantı denir. $\Delta(\lambda)$'nın sıfırları L operatörünün özdeğerleridir. Eğer $\Delta(\lambda) \equiv 0$ ise her bir λ, L operatörünün özdeğeridir. Eğer $\Delta(\lambda)$'nın sıfırları yok ise, L operatörü özdeğerlere sahip değildir.

3.2. ÖZFONKSİYONLARA GÖRE AYRIŞIM

Kısmi diferansiyel denklemlerin Fourier metoduyla çözümü, diferansiyel operatörlerin özfonksiyonlarına göre ayrışım problemini ortaya çıkarır.

[17]'den

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \ldots + p_n(x)u, \qquad a \leq x \leq b \qquad (3.2.1)$$

denkleminin,

$$[u]_{t=0} = f(x) \quad , \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = \varphi(x) \tag{3.2.2}$$

başlangıç koşullarını

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{j\nu} \left(\frac{\partial^{\nu} u}{\partial x^{\nu}}\right)_{x=a} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{j\nu} \left(\frac{\partial^{\nu} u}{\partial x^{\nu}}\right)_{x=b} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \tag{3.2.3}$$

ve sınır koşullarını sağlayacak çözümü aranır.

(3.2.1) denkleminin, (3.2.3) sınır koşullarını sağlayan çözümü

$$u = y(x)\left(A\cos pt + B\sin pt\right) \tag{3.2.4}$$

biçiminde aransın.

Bu çözümü, (3.2.1) ve (3.2.3)'de yerine yazarak, $y(x)$ fonksiyonunun

$$l(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\, y = -p^2 y \tag{3.2.5}$$

diferansiyel denklemini ve

$$U_j(y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{j\nu} y_a^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{j\nu} y_b^{(\nu)} = 0 \tag{3.2.6}$$

sınır koşullarını sağladığı görülür.

Bu nedenle $y \not\equiv 0$ ise, $-p^2$ özdeğeri için y , (3.2.5) ve (3.2.6) sınır değer probleminin özfonksiyonudur.

$-p_1^2, -p_2^2, -p_3^2, \ldots$ problemin özdeğerleri, $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$ karşılık gelen özfonksiyonları olsun. Burada her özdeğer, ona uygun lineer bağımsız özfonksiyonların, sayısı kadar tekrarlanır. O zaman,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right) \tag{3.2.7}$$

sonsuz serisi,

(3.2.1) denklemini ve (3.2.3) sınır koşulunu gerçekler. Başlangıç koşullarının sağlanması gerekir. (3.2.4), birinci başlangıç koşulunda yerine yazılırsa,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) \tag{3.2.8}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik, *f(x)* fonksiyonunun, sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışımını verir. Bu nedenle $\{y_n(x)\}$ özfonksiyonlarının tamlık, minimallik ve tabanlık özellikleri önemlidir.

3.3. TAMLIK, BİORTAGONALLİK, TABANLIK

Tanım 3.3.1.: Normlandırılmış E uzayından olan $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin lineer geriliminin kapanışı tüm uzaya eşit ise, bu diziye *E'* de tamdır denir.

Eğer *H* Hilbert uzayı ve *E=H* ise, *H'*de $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tüm elemanlarına dikey sıfırdan farklı $f \in H$ elemanı yok ise, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi *H'* da *tamdır* denir.

Tanım 3.3.2.: *H* Hilbert uzayında $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ dizileri için $n, k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere,

$$(\varphi_n, \psi_k) = \delta_{n,k}$$

ise, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ dizileri, *H* uzayında *biortogonal dizi oluştururlar* denir. O zaman bunlardan birine diğerinin *biortogonal eşleniği* denir.

Tanım 3.3.3.: *H* uzayının $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisinin her bir $\psi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ elemanı, diğer $\psi_k(x)$ $(k \neq j)$ elemanlarının M_J kapalı lineer gerilimine dahil değilse, $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi *H*'de *minimaldir* denir. Yani herhangi bir $k \geq 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\left\| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{N} a_n \psi_n - \psi_k \right\|_H \geq \delta$ sağlanır.

Teorem 3.3.1.: [18] Herhangi bir $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin biortogonal eşleniği ancak ve ancak $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ minimal sistemi olduğunda vardır.

İspat: $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{j-1}, \psi_{j+1}, ...$ dizisinin kapalı lineer gerilimi

$span\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{j-1}, \psi_{j+1}, ...\} = M_j$

ile, ψ_j'lerin tüm kapalı gerilimi ise M ile gösterilsin.

Herhangi bir j için $M_j \neq M$ olduğundan $M \odot M_j$ ortogonal tümleyenden $(\psi_j, \varphi_j) = 1$ olmak üzere, φ_j elemanı alınırsa, o zaman $(\psi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$ bağıntısını sağlayan elemanlar da bulunur. Böylece, $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine ortogonal $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi oluşturulmuş olur.

Eğer $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine biortogonal eşlenik olan $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi varsa, o halde herhangi j için ψ_j fonksiyonu M_j'ye dâhil değildir. Eğer $\psi_j \in M_j$ olsa idi, ψ_j vektörü $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{j-1}, \psi_{j+1}, ...$ vektörlerine dikey olan φ_j'ye dikey olmalıydı. Bu ise mümkün değildir, çünkü koşula göre $(\psi_j, \varphi_j) = 1$ olması gerekir. Teorem ispatlanır.

Teoremi kullanarak gerekli olduğunda, minimal dizi olarak biortogonal eşleniği olan dizi göz önüne alınır.

Gösterilebilir ki, herhangi bir $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine biortogonal eşlenik dizi tek türlü olarak, ancak ve ancak bu dizi H uzayında tam olduğunda tanımlanır. Bundan dolayı her bir $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal sistem tek türlü tanımlanır.

Tanım 3.3.4.: $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ H Hilbert uzayından bir dizi olsun. Herhangi bir $f \in H$ vektörü tek türlü olarak,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \tag{3.3.1}$$

serisine ayrışabildiğinde, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine H *Hilbert uzayının tabanı* denir, burada (3.3.1) serisi H uzayının normu anlamında yakınsaktır

Önerme 3.3.1.: $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi H' de $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal eşlenik ise $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi H' de tamdır.

İspat: $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ H ' de taban olduğundan $f \in H$ için tek türlü olarak

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$$

olur. O halde kolaylıkla elde edilir ki,

$$c_j = \left(f, \psi_j\right),$$

$\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine ortogonal olan herhangi bir $f \in H$ için

$$\left(f, \psi_j\right) = c_j = 0, \quad (j=1,2,\ldots)$$

olduğundan $f = 0$ elde edilir. Bundan dolayı tabanın biortogonal eşleniği H' de tamdır. □

Teorem 3.3.2.: [18] H Hilbert uzayında $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal eşlenik $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi H uzayında tabandır.

H Hilbert uzayında $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ herhangi bir ortonormal taban, A ise sınırlı, tersi olan bir lineer operatör olsun. O halde herhangi bir $f \in H$ için,

$$A^{-1} f = \sum_{j=1}^{\infty} \left(A^{-1} f, \varphi_j\right)\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f, A^{*^{-1}} \varphi_j\right)\varphi_j$$

dır. O halde,

$\psi_j = A\,\varphi_j$, $\chi_j = A^{*^{-1}} \varphi_j$, $(j=1,2,\ldots)$ alarak

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f, \chi_j\right)\psi_j$$

elde edilir.

$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ ortonormal dizi olduğundan,

$$\left(\psi_j, \chi_k\right) = \left(A\varphi_j, A^{*^{-1}}\varphi_k\right) = \left(\varphi_j, \varphi_k\right) = \delta_{jk} \qquad \text{olur.}$$

Buna göre eğer

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$$

ise, o halde

$$c_j = \left(f, \chi_j\right)$$

olur. Yani f vektörü $\left\{\psi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine göre tek türlü ayrışıma sahiptir. Dolayısıyla, ortonormal $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ tabanının ve A operatörünün yardımıyla H uzayında yeni bir $\left\{\psi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ tabanı elde edilir. Elde edilen bu tabana Riesz tabanı denilebilir.

Tanım 3.3.5.: $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ H Hilbert uzayında ortonormal taban ve A sınırlı tersi olan lineer operatör olduğunda

$$\psi_k = A\varphi_k$$

biçiminde elde edilen $\left\{\psi_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine H *uzayında Riesz tabanı* denir.

Tanım 3.3.6.: H uzayının herhangi bir tabanında elemanların yerleri istenilen biçimde değiştirildiğinde yine taban oluşturursa, bu tabana yeri değişen (*koşulsuz taban*) denir [18].

Eğer herhangi bir $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ koşulsuz taban ise, o halde ona biortogonal $\left\{\psi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ tabanı da koşulsuz taban oluşturur.

Her bir ortonormal taban koşulsuz tabandır. Herhangi bir Riesz tabanı da koşulsuz tabandır.

Tanım 3.3.7.: H uzayından olan $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\left\{g_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n - g_n \right\|^2 < \infty$$

gerçekleşirse bu dizilere *kare (kuadratik) yakınsaktır* denir.

Teorem 3.3.3.: (Bari Teoremi) $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $L_2(a,b)$'de Riesz tabanı olsun ve $\{\psi_n\} \subset L_2(a,b)$ fonksiyonlar dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi $L_2(a,b)$'de minimaldir.

2) $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi birbiri ile kare (kuadratik) yakınsaktır, yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \varphi_n - \psi_n \right\|_{L_2(a,b)}^2 < \infty$$

O halde $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ $L_2(a,b)$'de Riesz tabanı oluşturur.

3.4 SINIR KOŞULUNDA PARAMETRE İÇEREN İKİNCİ DERECEDEN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Sıfır derecede, sonlu miktarda sıvıyla temas içinde bulunan sonlu ince katı bir çubuğun soğuması durumu göz önüne alınsın. Isı akışının sadece sıvıya doğru olduğu ve sıvıdan çevreye ısı iletiminin engellendiği kabul edilsin. O zaman çubuk için başlangıç-sınır değer problemi, sabit temel çözümü hariç tutarak şu şekildedir:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{3.4.1}$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad \forall t \text{ } için \tag{3.4.2}$$

$$-k\,Au_x(1,t) = qM\,(d\vartheta/dt) + k_1 B\,\vartheta(t) \tag{3.4.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in [0,1] \tag{3.4.4}$$

$$\vartheta(0) = \vartheta_0$$

Burada, $\alpha^2 = \dfrac{k}{\rho c}$, k katının öziletkenliği, ρ yoğunluğu, c ise özgül ısısıdır. M sıvının kütlesi , q ise özgül ısısıdır. k_1 , k öz iletkenliğine ve h ısı değişimi katsayısına bağlı bir sabittir $\left(k_1 = \dfrac{h}{k}\right)$.

Katı-sıvı arasında yüzeydeki ısı transferinin oranı, çubuğun ucuyla sıvı arasındaki sıcaklık farkıyla orantılıdır ve $x = 1$ ' de Fourier'in ısı iletimi yasası uygulanarak,

$$\vartheta(t) = u(1,t) + k\,c^{-1} u_x(1,t) \qquad t > 0 \tag{3.4.5}$$

elde edilir. Bu, mükemmel olmayan termal bağlantı durumuna uyar [6]. Çözümü bulmak için değişkenlere ayırma yöntemi uygulanırsa problemin sıfır olmayan çözümü,

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.4.6}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi (3.4.1)'de yerine yazarak,

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

elde edilir. Burada $\lambda > 0$ dır. Bu durumda,

$$T(t) = e^{-\lambda\alpha^2 t}$$

bulunur. (3.4.6) ifadesi,

$$u(x,t) = X(x)\, e^{-\lambda\alpha^2 t} \tag{3.4.7}$$

olur. (3.4.7)'yi (3.4.3)'de yerine yazarak,

$$-kAu_x(1,t) = q\,M\left[u_t(1,t) + k\,c^{-1}u_{xt}(1,t)\right] + k_1 B\left[u(1,t) + k\,c^{-1}u_{xt}(1,t)\right]$$

$$\left(-kA - k\,k_1 B\,c^{-1}\right)u_x(1,t) = k_1 Bu(1,t) + qMu_t(1,t) + qM\,k\,c^{-1}u_{xt}(1,t) \tag{3.4.8}$$

elde edilir. β_i, β'_i $(i = 1,2)$ katsayılar olmak üzere,

$$-kA - k\,k_1 Bc^{-1} = \beta_1, \quad k_1 B = \beta_2, \quad qM = \beta'_1, \quad qMkc^{-1} = \beta'_2$$

dönüşümleri yapılır, (3.4.7) ve (3.4.8)'de yerine yazılırsa

$$\beta_2 X'(1) - \beta_1 X(1) = -\lambda\alpha^2 \left(\beta_1' X(1) + \beta_2' X'(1)\right)$$

elde edilir. $\beta_1, \beta_1', \beta_2, \beta_2'$ katsayılarını qM 'ye bölersek,

$$\begin{pmatrix} \beta_1' & \beta_1 \\ \beta_2' & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k_1 B/(\alpha^2 qM) \\ \dfrac{-k}{c} & \left[1 + k_1 B/(cA)\right]/\sigma \end{pmatrix} \tag{3.4.9}$$

elde edilir. Burada, $\rho = \dfrac{1}{\sigma} := \dfrac{kA}{\alpha^2 qM}$ şeklindedir.

$x = 0$ ve $x = 1$ 'de sınır koşullarının uygulanmasıyla, $q = 0$ ve $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ile ikinci dereceden sınır değer problemi elde edilir.

[3]'de sınır koşulunda λ parametresi içeren

$$\tau u := -u'' + qu = \lambda u, \tag{3.4.10}$$

$$\cos\alpha\, u(a) + \sin\alpha\, u'(a) = 0 \tag{3.4.11}$$

$$-\left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\right) = \lambda\left(\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b)\right) \tag{3.4.12}$$

sınır-değer problemi ele alınır. Burada, $q(x)$, $[a,b]$ 'de sürekli bir fonksiyon, $\alpha \in [0,\pi)$ ve

$$\rho = \begin{vmatrix} \beta_1' & \beta_1 \\ \beta_2' & \beta_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \beta_1, \beta_2, \beta_1, \beta_2' \in \mathbb{R} \tag{3.4.13}$$

şeklindedir.

Özel olarak $k_1 = 0$ durumunda (3.4.10)-(3.4.12) için öz fonksiyon açılımını kullanarak, (3.4.1)-(3.4.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünü sunan bir seri elde edilebilir.

$H = L_2[a,b] \oplus C$ Hilbert uzayı olarak iki bileşenli vektörler için iç çarpımı

$$(F,G) := \int_a^b F_1(x)\overline{G_1(x)}\,dx + \frac{1}{\rho} F_2 \overline{G_2} \tag{3.4.14}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$F=\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix}\in H \ ,$$

(3.4.13)'de tanımlanmış ρ bir sabittir. Gereklilik için,

$$R_b(u):=\beta_1\, u(b)-\beta_2\, u'(b) \qquad (3.4.15)_i$$

$$R'_b(u):=\beta'_1\, u(b)-\beta'_2\, u'(b) \qquad (3.4.15)_{ii}$$

şeklinde yazılır.

(3.4.1)-(3.4.4)'de verilmiş sınır problemi [9]'dan operatör biçiminde yazılsın:

$$A(F):=\begin{pmatrix} -F_1''(x)+q(x)F_1(x) \\ -R_b(F_1) \end{pmatrix} \qquad (3.4.16)$$

$D(A)=\ \ F\in H\,\big|\ F_1(x),F_1'(x),\ \ [a,b]$ aralığında tamamen sürekli,

$\tau F_1\in L_2[a,b],\quad \cos\alpha F_1(a)+\sin\alpha F'_1(a)=0\ \ ve\quad F_2=R'_b(F_1)$ (3.4.17)

Burada $x=b$ noktasındaki Wronskiyen,

$W_b(F_1,G_1)=F_1(b)\,G_1'(b)-F_1'(b)\,G_1(b)$ şeklindedir.

A 'nın resolventini inşa ederken, (3.4.10)'a ait $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ çözümleri ele alınır. Bunlar uygun olarak $x=a$ ve $x=b$ noktalarında,

$$\begin{pmatrix} \phi_\lambda(a) \\ \phi'_\lambda(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad (3.4.18)$$

ve

$$\begin{pmatrix} \chi_\lambda(b) \\ \chi'_\lambda(b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta'_2\lambda+\beta_2 \\ \beta'_1\lambda+\beta_1 \end{pmatrix} \qquad \lambda\in C \qquad (3.4.19)$$

koşullarını sağlıyor ve bunlar için

$$\omega(\lambda):=W_x(\phi_\lambda,\chi_\lambda)=\phi_\lambda(x)\,\chi'_\lambda(x)-\phi'_\lambda(x)\,\chi_\lambda(x) \qquad (3.4.20)$$

Wronskiyeni $x\in$ $[a,b]$'den bağımsızdır. Wronskiyen'nin ifadesinde $x=b$ yazarak,

$$W(\lambda)=\left(\beta_1'\lambda+\beta_1\right)\phi_\lambda(b)-\left(\beta_2'\lambda+\beta_2\right)\phi_\lambda'(b)$$
$$=\lambda R_b'\left(\phi_\lambda\right)+R_b\left(\phi_\lambda\right) \qquad (3.4.21)$$

bulunur.

(3.4.19)'dan ayrıca,

$$R_b'\left(\chi_\lambda\right)=\beta_1'\beta_2'\lambda+\beta_1'\beta_2-\beta_2'\beta_1'\lambda-\beta_2'\beta_1=\rho \qquad (3.4.22)$$

Burada ρ, (3.4.13)'de verilmiştir.

(3.4.19)'dan tüm $\lambda\in$ C için, $\chi_\lambda(x)$, (3.4.3) sınır koşullarını sağlar. Aynı tip kural regüler Sturm- Liouville problemi için çalışılırsa görülür ki, $\omega(\lambda)$'nın sıfırları reel ve basittirler. Eğer λ_n, (n=0,1,2,…) $\omega(\lambda)$'nın sıfırlarını gösterirse, iki bileşenli

$$\phi_n:=\begin{pmatrix}\phi_{\lambda_n}(x)\\ R_b'\left(\phi_{\lambda_n}\right)\end{pmatrix} \qquad (3.4.23)$$

vektörleri, A'nın ortogonallik bağıntısını sağlayan öz vektörleridir.

$$n\neq m \quad \text{için} \quad \left(\phi_n,\phi_m\right)=0 \qquad (3.4.24)$$

olur, yani ortogonaldirler.

Burada iç çarpım (3.4.14)'de verilmiştir. (3.4.10) denklemi ve (3.4.11) başlangıç koşulu, $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ fonksiyonlarının sabit x için λ'ya göre tam olmasını sağlar. Böylece $\omega(\lambda)$, λ için tam bir fonksiyondur.

$$\psi_n:=\frac{1}{\left\|\phi_n\right\|}\phi_n=:\begin{pmatrix}\psi_n(x)\\ R_b'\left(\psi_n\right)\end{pmatrix} \qquad (3.4.25)$$

normalize edilmiş özvektörler olsun ve $k_n \neq 0$ reel sabiti $\omega(\lambda)$ 'nın her λ_n sıfırı için,

$$\chi_{\lambda_n}(x) = k_n \phi_{\lambda_n}(x) \ , \quad x \in [a,b] \tag{3.4.26}$$

şeklindedir.

[17] ‘den Green formülüyle,

$$\int_a^b \phi_\lambda(x)\,\phi_{\lambda_n}(x)\,dx = \frac{W_b\left(\phi_{\lambda_n}, \phi_\lambda\right)}{\lambda_n - \lambda} \tag{3.4.27}$$

elde edilir.

(3.4.26), (3.4.19), (3.4.21) ‘i kullanarak yapılan hesaplamayla,

$$\begin{aligned} W_b'\left(\phi_{\lambda_n}, \phi_\lambda\right) &= -k_n^{-1}\left[\lambda_n R_b'(\phi_\lambda) + R_b(\phi_\lambda)\right] \\ &= -k_n^{-1}\left[\omega(\lambda) + (\lambda_n - \lambda) R_b'(\phi_\lambda)\right] \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

olur.

Bunu (3.4.27)'de yerine yazarak ve $\lambda \to \lambda_n$ ‘e yaklaştırarak

$$\int_a^b \left(\phi_{\lambda_n}\right)^2 dx = -k_n^{-1}\left[-\omega'(\lambda_n) + R_b'\left(\phi_{\lambda_n}\right)\right] \tag{3.4.29}$$

elde edilir.

(3.4.26) ve (3.4.22)'den ve $\lambda = \lambda_n$ den,

$$R_b'\left(\phi_{\lambda_n}\right) = \frac{\rho}{k_n} \quad \text{bulunur.} \tag{3.4.30}$$

(3.4.29)'dan k_n 'i çıkarmak için (3.4.30)'u kullanarak

$$\left\|\phi_n^{\ 2}\right\| = \rho^{-1} R_b'\left(\phi_{\lambda_n}\right)\omega'(\lambda_n) \tag{3.4.31}$$

elde edilir.

Ayrıca homojen olmayan operatör denklemini $\forall F \in H$ için çözerek,

$$(\lambda - A)\phi = F \tag{3.4.32}$$

$$\phi = R(\lambda; A)F = \begin{pmatrix} \left(\tilde{G}_{x,\lambda}, \bar{F}\right) \\ R_b'\left[\left(\tilde{G}_{x,\lambda}, \bar{F}\right)\right] \end{pmatrix} \tag{3.4.33}$$

resolvent operatörü elde edilir. Burada,

$$\tilde{G}_{x,\lambda} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ R_b'\left(G(x,.,\lambda)\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.34}$$

ve

$$G(x,y,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\chi_\lambda(x)\phi_\lambda(y)}{\omega(\lambda)} & a \le y \le x \le b \\ \dfrac{\phi_\lambda(x)\chi_\lambda(y)}{\omega(\lambda)} & a \le x \le y \le b \end{cases} \tag{3.4.35}$$

dir.

Teorem 3.4.1.:

(i) $F \in H$ için

$$\|F\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(F)|^2 \tag{3.4.36}$$

(ii) $F \in D(A)$ için

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (F, \psi_n)\psi_n \tag{3.4.37}$$

serileri, $x\in [a,b]$ için birinci bileşende mutlak ve düzgün olarak yakınsak, ikinci bileşen için mutlak yakınsaktır. (3.4.37)'ün birinci bileşeni, türevlenmiş olabilir, türevlenmiş seriler $x \in [a,b]$ için mutlak ve düzgün olarak $F_1'(x)$ 'e yakınsar.

Teorem 3.4.1(i)'den, $\omega(\lambda)$ ' nın sıfırları A'nın spektrumunu oluşturur. $\phi_\lambda(x)$ 'in asimptotik durumu için $x=b$ 'yi Titchmarsh formülünde yazarak ve (3.4.21)'de yerine koyarak, $\omega(\lambda)$ 'nın $|\lambda|\to\infty$ durumundaki asimptotik davranışı için ayrı durumlar elde edilir.

$\beta_2' \neq 0, \alpha \neq 0$ için,

$$\omega(\lambda) = \beta_2' s^3 \sin s(b-a)\sin\alpha + O\left(|s|^2 e^{|t|(b-a)}\right) \tag{3.4.38}$$

Burada s ve t,

$$si = \sqrt{\lambda} = i\sigma + t \tag{3.4.39}$$

olarak tanımlanmıştır. $t>0$ için formüllerde $s = it$ yazarak, negatif ve yeterince büyük λ için $\omega(\lambda) \neq 0$ olduğu görülür. A'nın spektrumu tüm durumlarda alttan sınırlıdır. Rouche teoremini yeterince büyük çevre için uygulanarak (3.4.38)'in çevre içinde aynı sayıda sıfıra sahip olduğu görülür. Bu sebepten, eğer $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\omega(\lambda)$ 'nın sıfırları ve $s_n^2 = \lambda_n$ ise, yeterince büyük n için,

$$\frac{(n-3/2)\pi}{b-a} < s_n < \frac{(n-1/2)\pi}{b-a} \tag{3.4.40}$$

olur.

Ayrıca, (3.4.40)'da yerine yazarak,

$$s_n = \frac{(n-1)\pi}{b-a} + \delta_n \tag{3.4.41}$$

elde edilir. Burada $\delta_n = O(\frac{1}{n})$ şeklindedir.

(3.4.41)'deki yeni yaklaşım, Titchmarsh'daki regüler Sturm-Liouville problemindeki yöntemden elde edilebilir. $\phi_\lambda(x)$ için integral denklemini kullanarak ve (3.4.38)'deki tüm s^2 sırasını içine alarak, ayrıca (3.4.41)'i (3.4.38)'de yerine yazarak,

$$\sin\delta_n(b-a)=\frac{\cos\delta_n(b-a)}{s_n}\left\{-\cot\alpha-\frac{\beta_1'}{\beta_2'}+\frac{1}{\sin\alpha}\int_a^b\cos s_n(y-a)q(y)\phi_{\lambda_n}(y)dy\right\}+O(\frac{1}{n^2})$$

(3.4.42)

elde edilir.

$\phi_{\lambda_n}(y)$ için asimptotik formülü kullanarak,

$$\frac{1}{\sin\alpha}\int_a^b\cos s_n(y-a)q(y)\phi_{\lambda_n}(y)dy=$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b q\,dy+\int_a^b\cos 2s_n(y-a)q(y)dy+O(\frac{1}{n}) \qquad (3.4.43)$$

bulunur.

(3.4.43)’de sağdaki ikinci integral Riemann-Lebesgue lemmasıyla $O(\frac{1}{n})$ dir. Eğer *q(x)* sınırlı varyasyonsa, (3.4.42) ve (3.4.43) denklemlerinden,

$$\delta_n=\frac{1}{(n-1)\pi}\left\{-\cot\alpha-\frac{\beta_1'}{\beta_2'}+\frac{1}{2}\int_a^b q\,dy\right\}+\varepsilon_n \qquad (3.4.44)_1$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_n=O(\frac{1}{n^2})$.

ε_n’u $(3.4.44)_1$ ‘de tanımlanmış kabul ederek ve (3.4.42)’de yerine yazarak, bu durumun varlığı gösterilir. (3.4.25)’in normalize edilmiş öz elemanının birinci bileşeninin asimptotik ifadesi,

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\left(\frac{(n-1)\pi(x-a)}{b-a}\right)+O(\frac{1}{n}) \qquad x\in[a,b] \qquad (3.4.45)_1$$

$\phi_{\lambda_n}(x)$ için (3.4.41) ve (3.4.42)’yi ve integral denklemi kullanıp, ($R_b'(\phi_{\lambda_n})=O(\frac{1}{n})$ elde etmek için) sonrada $\|\phi_n\|^2$’ yi tahmin etmek için, $\phi_{\lambda_n}(x)$ asimptotik formülü uygulanarak elde edilir.

3.5 SPEKTRAL PROBLEM

$$-(py')' + qy = \lambda ry \ , \qquad (3.5.1)$$

denklemi,

$$b_0 y(0) = d_0 (py')(0) \ , \ (b_0, d_0) \neq (0,0) \qquad (3.5.2)$$

başlangıç koşulu ile [10]'da ele alınmıştır. Problem [0,1] aralığında incelenir. $p, r > 0$ ile birlikte $\frac{1}{p}$, q, $r \in L_1[0,1]$ ' dir.

Lemma 3.5.1: $n \geq 0$ ve $\lambda \in \left(\lambda_{n-1}{}^D, \lambda_n{}^D\right]$ ise, (3.5.1)-(3.5.2)'nin tüm çözümleri, $(0,1)$ aralığında tamamen *n* sayıda sıfıra sahiptir.

Teorem 3.5.1: $\lambda = \lambda_n$ özdeğerleri, $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ şeklinde sıralanır ve $n \leq N$ için karşılıklı y özfonksiyonunun $(0,1)$ aralığında *n* sayıda sıfırı*,* *n>N* için *(n-1)* sayıda sıfırı vardır.

İspat: λ_n , f ve g ' nin grafiklerinin kesişim noktalarının karşılığıdır. Açıktır ki, $0 \leq n \leq N$ aralığı için her B_n , bir kez g'nin grafiğinin sol dalıyla kesişir.

Lemma 3.5.1, karşılıklı salınım sayılarını verir. Benzer bir kural, $\frac{-d_1}{c_1} = \lambda_n{}^D$ olmadığında, g'nin sağ dalını kullanarak, *n>N* için gerçekleşir. Sonraki durumda, $\lambda_{N+1} = \lambda_N{}^D$ dir. Ve Lemma 3.5.1'den özfonksiyonun N sayıda sıfırı vardır.

Sonuç 3.5.1.: (i) $pr \in AC[0,1]$ ise

$$\lambda_n = \left((n+\nu)\pi\right)^2 + o(n) \ \text{ dir}$$

Burada,

$$d_0 = 0 \ \ ise \ \nu = \frac{-1}{2} \quad \text{ve} \quad d_0 \neq 0 \ \ ise \quad \nu = -1 \quad \text{dir.}$$

(ii) Bundan başka $\left(pr\right)' \in AC[0,1]$ ise o zaman $O(1)$, $o(n)$'nin yerini alabilir.

Sonuç 3.5.3.: Eğer $c_1 = 0 < \delta_1$ ise Sonuç 3.5.1. aşağıdaki değişikliklere sahiptir:

$$d_0 = 0 \;\; ise \; \nu = 0 \quad \text{ve} \quad d_0 \neq 0 \;\; ise \; \nu = \frac{-1}{2} .$$

Şimdi de spektral problem,

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda\, y \qquad 0 < x < 1 \tag{3.5.4}$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0) \tag{3.5.5}$$

$$\left(a_1\lambda + b_1\right) y(1) = \left(c_1\lambda + d_1\right) y'(1) \tag{3.5.6}$$

şeklinde göz önüne alınsın. λ spektral parametre, $q(x)$, [0,1] aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $a_1,\, b_0,\, b_1,\, c_1,\, d_0\; ve\, d_1$ reel sabitlerdir. $|b_0| + |d_0| \neq 0$ ve $\sigma = a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0$ şeklindedir.

[10]'da (3.5.4)-(3.5.6) probleminin özfonksiyonlarının salınım özellikleri ve özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilir. Benzer sonuçlar [11]'de de elde edilir.

Teorem 3.5.2.: (3.5.4)-(3.5.6) sınır değer probleminin özdeğerlerinin, sınırsız artan $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi vardır.

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots ,$$

Ayrıca,

(a) $c_1 \neq 0$ ise, λ_n'e bağlı $y_n(x)$ özfonksiyonu $n \leq N$ için tamamen n sayıda basit sıfıra sahiptir ve (0,1) aralığında $n > N$ için tamamen *(n-1)* basit sıfıra sahiptir.

(b) Eğer $c_1 = 0$ ise, λ_n'e bağlı $y_n(x)$ özfonksiyonunun (0,1) aralığında tamamen n basit sıfırı vardır.

[7] ve [16]'da (3.5.4)-(3.5.6) probleminin özfonksiyonlarının tabanlık özellikleri incelenir.

Teorem 3.5.3.: k_0'ı sıfırdan farklı keyfi bir sabit tamsayı olsun. O zaman $\{ y_n(x) \}$ sistemi $(n = 0,1,2,\ldots; n \neq k_0)$, $L_2(0,1)$ uzayında minimaldir.

Teorem 3.5.4. k_0 , keyfi, sabit, negatif olmayan bir tamsayı olsun. O zaman $\{ y_n(x) \}$ $(n = 0,1,2,...; n \neq k_0)$, sistemi $L_2(0,1)$'de koşulsuz bir tabandır.

3.6 ISI İLETİMİ İLE İLGİLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Yarı-sonsuz sağ silindirik katı cisim, keyfi şekil ve boyutta çapraz kesite ve $x = 0$ da düz uç yüzeye sahiptir. Yan yüzü ısı geçişine karşı yalıtılmıştır ve pozitif x eksenine bağlı başlangıç sıcaklık dağılımına sahiptir. Sıvı, keyfi başlangıç sıcaklığını muhafaza etmek için iyi karışmış şekildedir. $t = 0$ anında, katının düz uç yüzeyi sıvıyla temas içindedir. Basitlik için, sıvıdan çevreye ve çevreden de sıvıya ısı iletiminin olmadığını varsayılır.

Amaç, herhangi bir $t > 0$ anında, sıvının sıcaklığına ve katının sıcaklık dağılımına uygun bir kuralı belirlemektir.

t anındaki ve x pozisyonundaki katının ω(x,t) sıcaklığı ısı denklemi ile,

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \tag{3.6.1}$$

biçiminde gösterilir. Burada $\alpha^2 = \dfrac{k}{\rho c}$, k katının öz iletkenliği, ρ yoğunluk ve c ise özgül ısıdır. A, katı cismin $x = 0$ uç yüzeyinde, çapraz kesitinin alanı olsun. Bu ucun yüzeyi sıvıyla temastadır. $\upsilon(t)$, her t anında sıvının sıcaklığını göstersin, o halde katı cisimle sıvı arasındaki termik bağıntı,

$$\omega(0,t) = \upsilon(t) \qquad t > 0 \tag{3.6.2}$$

ile ifade edilir. Katı cisimden sıvıya ısı akışının oranı $x = 0$ uç yüzünde $-kA\,\omega_x$' dir. Sıvıdaki ısı birikiminin oranı da $qM\upsilon'(t)$'dir. Burada M sıvının kütlesi, q ise özgül ısısıdır.

$$qM\,\upsilon'(t) = -kA\,\omega_x(0,t) \tag{3.6.3}$$

Sonuç olarak, eğer $\omega_0(x)$ ve υ_0 katıdaki ve sıvıdaki başlangıç sıcaklıklarını gösterirse,

$$\lim_{t\to 0}\omega(x,t) = \omega_0(x) \qquad x>0 \quad , \qquad \lim_{t\to 0}\upsilon(t) = \upsilon_0 \tag{3.6.4}$$

sağladığı açıkça görülür. (3.6.1)-(3.6.4)'de formüle edilmiş problem hem $\omega(x,t)$'yi hem de $\upsilon(t)$'yi içine alır. Problem sadece $\omega(x,t)$ için aşağıdaki gibi formüle edilebilir. Önce, (3.6.3),

$$\frac{\sigma}{\alpha^2}\upsilon'(t) + \omega_x(0,t) = 0 \tag{3.6.5}$$

şeklinde yazılsın.

Burada, $\sigma = \dfrac{qM\alpha^2}{kA}$ dır. Genelliği bozmadan $\sigma = 1$ kabul edilebilir.

Sonra, (3.6.2)'yi kullanarak (3.6.5),

$$\omega_t(0,t) + \alpha^2\omega_x(0,t) = 0$$

şeklinde yazılabilir. $\omega(x,t)$ için problem,

$$\alpha^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{\partial\omega}{\partial t} \qquad x>0 \ , \ \ t>0 \tag{3.6.6}$$

$$\omega_t(0,t) + \alpha^2\omega_x(0,t) = 0 \qquad t>0 \tag{3.6.7}$$

$$\omega(x,0) = \omega_0(x) \qquad x>0 \tag{3.6.8}$$

$$\omega(0,0) = \upsilon_0 \tag{3.6.9}$$

şeklindedir.

Problemin fiziksel durumunu korumak için, $x=\infty$ da sınırlılık koşulunun olduğunu varsayılır ve böylece $\omega(x,t)$ çözümü sınırlı kalır.

Eğer çözüm $\omega(x,t) = u(x).g(t)$ çarpımı kabul edilirse, (3.6.6) ve (3.6.7)

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)} = -\lambda\,,$$

$$\frac{u'(0)}{u(0)} = \frac{-g'(t)}{\alpha^2 g(t)} = \lambda \ ,$$

haline gelir. Burada $-\lambda$ ayrılma sabitidir ve $\lambda > 0$ dır, yalnız bu durumda sıfır olmayan çözüm vardır. Bundan dolayı

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

$$g'(t) + \lambda \alpha^2 g(t) = 0 \,,$$

denklemleri elde edilir. İkinci denklemi çözerek,

$$g(t) = e^{-\lambda\alpha^2 t} \tag{3.6.10}$$

bulunur.

u(x) çözümünü bulmak için de ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemle bağlantılı spektral gösterimin bulunması problemi incelenir.

$$u''(x) + \lambda\ u(x) = 0 \qquad x > 0 \tag{3.6.11}$$

$$u'(0) - \lambda\ u(0) = 0 \tag{3.6.12}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left| u(x) \right| < \infty \tag{3.6.13}$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemi için sınır problemi ele alınsın. *S*, iki *U* vektörünün bileşeninin uzayı kabul edilsin. Birinci bileşen $x > 0$ açık aralığında, iki kez diferansiyellenebilen reel *u(x)* fonksiyonudur. İkinci bileşen skaler u_0 dır. Öyle ki,

$$U(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Şimdi $D \subset S$ ve $U \in D$ olan D alt uzayının vektörleri göz önüne alınsın. Öyle ki, $u_0 = u(0)$ ve $x \to \infty$ yaklaşırken *u(x)* sınırlıdır. $U \in D$ vektörleriyle işlem gören bir *L* operatörü tanımlanırsa,

$$LU \equiv \begin{pmatrix} -u''(x) \\ u'(0) \end{pmatrix} \tag{3.6.14}$$

olur.

(3.6.11)-(3.6.13) sınır değer problemi, $LU = \lambda U$ şeklinde formüle edilebilir. Burada L, λ'dan bağımsızdır. Keyfi bir $F \in S$ için $LU - \lambda U = F$ alınsın. Bunun için $U \in D$ çözümü

$$U(x) = \int_0^\infty G(x,\xi,\lambda) F(\xi) d\xi \tag{3.6.15}$$

olur. $G(x,\xi,\lambda)$ problem için gereken bir matris ve $LG - \lambda G = I$ nın bir çözümüdür. Burada

$$I = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix} \tag{3.6.16}$$

şeklindedir.

(3.6.15) problemin çözümünü gösterirse,

$$(L-\lambda)U = \int_0^\infty (L-\lambda) G(x,\xi,\lambda) F(\xi) d\xi = F(x)$$

olması yeterlidir. Ayrıca, G,

$$G(x,\xi,\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(x,\xi,\lambda) & g_3(x,\xi,\lambda) \\ g_2(\xi,\lambda) & g_4(\xi,\lambda) \end{pmatrix},$$

ile verilmiştir.

Burada g_1 ve g_3 $x \to \infty$ 'a yaklaşırken sınırlıdır ve

$$g_1(0,\xi,\lambda) = g_2(\xi,\lambda)$$

$$g_3(0,\xi,\lambda) = g_4(\xi,\lambda)$$

şeklindedir.

Tek türlü tanımlanan g_i, $i = 1,2,3,4$ aşağıdaki şekildedir:

$$g_1(x,\xi,\lambda) = \frac{\left(\cos\sqrt{\lambda}x_< + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x_<\right)e^{i\sqrt{\lambda}x_>}}{\lambda - i\sqrt{\lambda}} \tag{3.6.17}$$

$$g_2(\xi,\lambda) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}\xi}}{\lambda - i\sqrt{\lambda}} \tag{3.6.18}$$

$$g_3(x,\xi,\lambda)=\frac{-e^{-\xi}e^{i\sqrt{\lambda}x}}{\lambda-i\sqrt{\lambda}} \qquad (3.6.19)$$

$$g_4(\xi,\lambda)=\frac{-e^{-\xi}}{\lambda-i\sqrt{\lambda}} \qquad (3.6.20)$$

Burada $x_<$ ve $x_>$, x ve ξ nin daha küçük ve büyük değeridir ve karekökü de $0<\arg\lambda<2\pi$ arasındadır. Spektral gösterim,

$$\lim_{R\to\infty}\tfrac{1}{2\pi i}\int_{C_R} G(x,\xi,\lambda)d\lambda \qquad (3.6.21)$$

gösterilmesinden sonuçlanır ve I 'ya yakınsar. C_R çevresi bir orijinle ilgili R yarıçaplı, pozitif reel eksen boyunca kesilmiş, kompleks λ-düzlemi içinde olan bir çemberdir.

$\sqrt{\lambda}=l$, $0<\arg\lambda<2\pi$ kabul etmek yeterlidir. Sonra, (3.6.12), (3.6.12′) 'ne dönüşür.

$$\lim_{R\to\infty}\tfrac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_R} G(x,\xi,l^2)\,l\,dl \qquad (3.6.21')$$

Γ_R , $-R$ den R ye yukarı yarı düzlem içinde, kompleks l düzleminde R yarıçaplı yarı-çember içeren kapalı bir çevredir. $g_i(x,\xi,\lambda)$ $i=1,2,3,4$, $\lambda=-1$ de basit kutuplara sahiptir, öyle ki $l=i$ de basit kutuplara döner. Şimdi Γ_R çevresinin dairesel parçası üzerindeki integral $R\to\infty$'a giderken I' ya yönelsin. Daha sonra basit bir kalan hesabıyla,

$$I=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada A_1, A_2, A_3, A_4 aşağıdaki biçimdedir:

$$A_1=-2e^{-\xi}e^{-x}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\cos lx+l\sin lx)(\cos l\xi+l\sin l\xi)}{l^2+1}d\xi \qquad (3.6.22)$$

$$A_2=2e^{-\xi}-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\cos l\xi+l\sin l\xi)}{l^2+1}dl \qquad (3.6.23)$$

$$A_3=-2e^{-\xi}e^{-x}+\frac{2}{\pi}e^{-\xi}\int_0^\infty \frac{(\cos l\xi+l\sin l\xi)}{l^2+1}dl \qquad (3.6.24)$$

$$A_4 = 2e^{-\xi} - \frac{2}{\pi} e^{-\xi} \int_0^\infty \frac{dl}{l^2+1} \qquad (3.6.25)$$

Şimdi, F, S'de keyfi bir vektör kabul edilsin öyle ki

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_0 \end{pmatrix}.$$

F' nin spektral gösterimi aşağıdaki gibi sonuçlanır:

$$F(x) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\xi) \\ f_0 \end{pmatrix} d\xi \qquad (3.6.26)$$

(3.6.22)-(3.6.25), (3.6.26)'da yerine yazılır; matris çarpımı uygulanırsa bazı cebirsel basit işlemler sonucunda spektral gösterim,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2e^{-x}\left[f_0 + \int_0^\infty e^{-\xi} f(\xi) d\xi \right] + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos lx + l \sin lx}{l^2+1} \left[f_0 + \int_0^\infty f(\xi)\left(\cos l\xi + l \sin l\xi\right) d\xi \right] dl \end{aligned} \qquad (3.6.27)$$

$$f_0 = 2\left[f_0 + \int_0^\infty e^{-\xi} f(\xi) d\xi \right] - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{l^2+1} \left[f_0 + \int_0^\infty f(\xi)\left(\cos l\xi + l \sin l\xi\right) d\xi \right] dl$$

(3.6.28)

olur.

Ayrıca $x > 0$ aralığının her yerinde (3.6.27)'nin sağ tarafının *f(x)*'i gösterdiği belirlenir. Fakat $x > 0$'da öyle bir şekilde süreksiz olur ki keyfi tanımlanmış f_0 skalerini gösterir.

Teorem 3.6.1.: f_0 keyfi bir skaler olsun ve *f(x)* sürekli ve $x > 0$'da birinci ve ikinci türeve sahip olsun.

$$f''(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad x \to \infty,$$

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \to \infty$$

kabul edilsin.

O zaman, (3.6.27)'nin sağ tarafı, $x > 0$ olan her yerde $f(x)$'e dönüşür ve $x = 0$ için (3.6.28)'de verildiği gibi $-f_0$'e dönüşür.

(3.6.27) ve (3.6.28) gösterimleri dönüşüm çifti şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x) = -2\beta e^{-x} + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(k)\frac{\cos kx + k\sin kx}{k^2+1}dk \tag{3.6.29}$$

$$-f_0 = -2\beta + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(k)\,\frac{1}{k^2+1}\,dk \tag{3.6.30}$$

burada

$$\beta = f_0 + \int_0^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,d\xi \tag{3.6.31}$$

$$B(k) = f_0 + \int_0^\infty f(\xi)\left(\cos k\xi + k\sin k\xi\right)d\xi \tag{3.6.32}$$

elde edilen gösterimleri kullanarak, (3.6.6)-(3.6.9) problemi çözülür. Açıktır ki, (3.6.7)'yi sağlayan (3.6.6)'nın bir çözümü şu şekildedir:

$$\omega(x,t) = -2\beta e^{-x+\alpha^2 t} + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(k)\left[\frac{\cos kx + k\sin kx}{k^2+1}\right]e^{-\alpha^2 k^2 t}\,dk \tag{3.6.33}$$

Şimdi β ve $B(k)$ öyle belirlenmelidir ki (3.6.8) ve (3.6.9) koşulları birlikte sağlansın. O halde,

$$\omega_0(x) = -2\beta e^{-x} + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(k)\left[\frac{\cos kx + k\sin kx}{k^2+1}\right]dk \tag{3.6.34}$$

ve

$$\upsilon_0 = -2\beta + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(k)\frac{1}{k^2+1}dk \tag{3.6.35}$$

gösterilir.

Buradan, aynı zamanda (3.6.33) ve (3.6.34) bağıntıları gösterir ki, (3.6.33)'ün sağ tarafı, genel bir durumda $x>0$ aralığında belirli bir fonksiyonu ifade eder fakat $x=0$ uç noktasında belirli bir biçimde süreksiz hale gelebilir. Bu nedenle, sadece süreksizliğin kuralı içinde, sıvının başlangıç sıcaklığı çözümü etkiler, fiziksel alanlarda bu durum açıkça bellidir.

(3.6.29)-(3.6.32)'den β ve $B(k)$

$$\beta = -\upsilon_0 + \int_0^\infty e^{-\xi}\,\omega_0(\xi)\,d\xi \tag{3.6.36}$$

$$B(k) = -\upsilon_0 + \int_0^\infty \omega_0(\xi)\left(\cos k\xi + k\sin k\xi\right)\,dk \tag{3.6.37}$$

şeklinde belirlenir. (3.6.36) ve (3.6.37), (3.6.33)'de yerine yazılırsa, (3.6.6)-(3.6.9) sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} \omega(x,t) &= 2\upsilon_0 e^{-x+\alpha^2 t} - 2e^{-x+\alpha^2 t}\int_0^\infty e^{-\xi}\omega_0(\xi)\,d\xi - \\ &-\frac{2\upsilon_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha^2k^2t}\left[\frac{\left(\cos kx + k\sin kx\right)}{k^2+1}\right]dk + \\ &+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha^2k^2t}\left[\frac{\left(\cos kx + k\sin kx\right)}{k^2+1}\right]\int_0^\infty \omega_0(\xi)\left(\cos k\xi + k\sin k\xi\right)d\xi\,dk \end{aligned} \tag{3.6.38}$$

bulunur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1.ISI İLETİMİNE İLİŞKİN BİR SPEKTRAL PROBLEM

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x)u \qquad 0<x<1\ , \quad t>0 \tag{4.1.1}$$

denkleminin

$$d_0 u_x(0,t)-b_0 u(0,t)=0 \tag{4.1.2}$$

$$a_1 u_t(1,t)+b_1 u(1,t)=d_1 u_x(1,t) \tag{4.1.3}$$

sınır koşullarını ve

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{4.1.4}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü incelenir. Burada, $\varphi(x)$ sürekli, parçalı-sürekli, ve türevlenebilir bir fonksiyon olarak $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ koşulunu sağlıyor. $q(x)$, $[0,1]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon , $a_1,\ b_0,\ b_1,\ d_0\ ve\ d_1$ reel sabitlerdir. Ayrıca, $|b_0|+|d_0|\neq 0$ ve $\sigma=a_1 d_1>0$ koşulu sağlansın. Amaç, (4.1.1)-(4.1.4) probleminin kapalı ($0\le x\le 1, 0\le t\le T$) bölgesinde sürekli çözümünü bulmaktır.

Çözümü bulmak için değişkenlere ayırma yöntemi uygulanır. Problemin sıfır olmayan çözümü

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{4.1.5}$$

biçiminde aransın. Bu ifadeyi (4.1.1) denkleminde yerine yazarak,

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}+q(x) \tag{4.1.6}$$

eşitliğini elde edilir. (4.1.6)'nın sol tarafı sadece t'ye, sağ tarafı ise sadece x'e bağlıdır. t ve x birbirine bağlı olmayan bağımsız değişkenler olduğundan (4.1.6)'nın her iki tarafı aynı bir sabite eşittir.

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + q(x) = -\lambda$$

olsun, burada $\lambda > 0$ dır, yalnız bu durumda (4.1.5) biçiminde sıfır olmayan çözüm vardır. Bundan dolayı

$$X''(x) + q(x)X(x) = -\lambda X(x)$$
$$T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

denklemlerini elde edilir. İkinci denklemi çözerek,

$$T(t) = e^{-\lambda t}$$

bulunur. (4.1.5) ifadesi

$$u(x,t) = X(x)\,e^{-\lambda t} \tag{4.1.7}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan dolayı (4.1.1)-(4.1.3) sınır- değer probleminin çözümü $X(x)\,e^{-\lambda t}$ biçiminde aransın. (4.1.7), (4.1.2) sınır koşulunda yerine yazılırsa

$$d_0 X'(0)\,e^{-\lambda t} - b_0 X(0)\,e^{-\lambda t} = 0 \qquad \text{veya}$$
$$d_0\, X'(0) - b_0\, X(0) = 0$$

olur.

(4.1.3) sınır koşulunda yerine yazılırsa

$$-\lambda a_1 X(1)\,e^{-\lambda t} + b_1 X(1)\,e^{-\lambda t} = d_1 X'(1)\,e^{-\lambda t} \qquad \text{veya}$$
$$\left(b_1 - \lambda\, a_1\right) X(1) - d_1\, X'(1) = 0$$

koşulu elde edilir.

Dolayısıyla çözümün (4.1.7) ifadesindeki $X(x)$ fonksiyonu,

$$X''(x)+q(x)X(x)=-\lambda X(x) \qquad 0<x<1 \tag{4.1.8}$$

denklemini

$$d_0\, X'(0)-b_0\, X(0)=0 \tag{4.1.9}$$

$$\left(b_1-\lambda\, a_1\right) X(1)-d_1\, X'(1)=0 \tag{4.1.10}$$

sınır koşullarını sağlar.

4.2. ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLAR İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

$u(x,t)$ sıfır olmayan çözüm olduğundan, $X(x)$ fonksiyonunun (4.1.8)-(4.1.10) sınır probleminin özfonksiyonu olması gerekir.

$\left\{X_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi (4.1.8)-(4.1.10) sınır değer probleminin özfonksiyonları, λ_n özdeğerleri olsun. [10]'dan

$$\nu=\begin{cases} \dfrac{-1}{2} & d_0\neq 0 \\ 0 & d_0=0 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

olduğu yerlerde

$$\lambda_n=\left(\pi\left(n+\nu\right)\right)^2+O(1) \tag{4.2.2}$$

şeklinde bulunur.

Buradan yeterince büyük n için,

$$\sqrt{\lambda_n}=\left(\pi\left(n+\nu\right)\right)+O(\frac{1}{n}) \tag{4.2.3}$$

elde edilir. Şimdi özfonksiyonlar bulunur. $X_n(x)$ özfonksiyonu yeterince büyük n için,

$$X_n(x) = P_n \begin{vmatrix} \varphi_1\left(x,\sqrt{\lambda_n}\right) & \varphi_2\left(x,\sqrt{\lambda_n}\right) \\ U\left(\varphi_1\left(x,\sqrt{\lambda_n}\right)\right) & U\left(\varphi_2\left(x,\sqrt{\lambda_n}\right)\right) \end{vmatrix} \tag{4.2.4}$$

şeklinde hesaplanacaktır. Burada, P_n'ler normlaştırıcı çarpanlardır.

$$d_0 = 0 \quad için \quad P_n = \frac{\sqrt{2}}{2ib_0} \quad , \tag{4.2.5}$$

$$d_0 \neq 0 \quad için \quad P_n = \frac{\sqrt{2}}{2i\sqrt{\lambda_n}d_0} \quad . \tag{4.2.6}$$

[17]'den ,

$$\varphi_j\left(x,\mu\right) = e^{\mu\omega_j x}\left(1 + O(\frac{1}{\mu})\right) \qquad (j=1,2) \tag{4.2.7}$$

$\omega_1 = -\omega_2 = i$ ve

$$U\left(\varphi_j(x,\mu)\right) = b_0\varphi_j(0,\mu) - d_0\varphi_j'(0,\mu), \; j = 1,2 \tag{4.2.8}$$

şeklindedir.

(4.2.1)'de ki durumlar için (4.2.3)'ü kullanarak yeterince büyük n için $X_n(x)$ özfonksiyonlarını elde edilir. Önce $d_0 = 0$ durumu ele alınsın. (4.2.3)'den

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n + O(\frac{1}{n}) \tag{4.2.9}$$

olur.

(4.2.4)'de (4.2.7) ve (4.2.8) yerine yazılarak,

$$X_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{2ib_0}\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda_n}ix}\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) & e^{-\sqrt{\lambda_n}ix}\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) \\ b_0\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) & b_0\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) \end{vmatrix}$$

$$X_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{2ib_0}b_0(e^{\sqrt{\lambda_n}ix} - e^{-\sqrt{\lambda_n}ix})\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right)$$

$$X_n(x) = \sqrt{2}\ \sin\sqrt{\lambda_n}x\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right)$$

elde edilir.

(4.2.9)'dan ve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 ... \tag{4.2.10}$$

açılımını kullanarak,

$$X_n(x) \ = \sqrt{2}\ \sin n\pi x + O(\frac{1}{n}) \tag{4.2.11}$$

bulunur.

Şimdi $d_0 \neq 0$ durumunu ele alınsın. (4.2.3)'den

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi\left(n - \tfrac{1}{2}\right) + O(\frac{1}{n}) \tag{4.2.12}$$

şeklindedir.

(4.2.4)'de (4.2.7) ve (4.2.8) yerine yazılarak,

$$X_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{2i\sqrt{\lambda_n}d_0}\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda_n}ix}\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) & e^{-\sqrt{\lambda_n}ix}\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) \\ \left(b_0 - d_0 i\sqrt{\lambda_n}\right)\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) & \left(b_0 + d_0 i\sqrt{\lambda_n}\right)\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) \end{vmatrix}$$

$$X_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{2i\sqrt{\lambda_n}d_0}\left[e^{\sqrt{\lambda_n}ix}\left(b_0 + d_0 i\sqrt{\lambda_n}\right) - e^{-\sqrt{\lambda_n}ix}\left(b_0 - d_0 i\sqrt{\lambda_n}\right)\right]\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right)$$

$$X_n(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}d_0}\sin\sqrt{\lambda_n}x\right)\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right) + \left(\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_n}x\right)\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})\right)$$

bulunur.

$\sin\sqrt{\lambda_n}x$ sınırlı bir fonksiyon olduğundan, $n\to\infty$ yaklaşırken $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\to 0$ elde edilir. Bu yüzden

$$X_n(x) = \left(\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_n}x\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\right)$$

olur. (4.2.10) ve (4.2.12)'den

$$X_n(x) = \sqrt{2}\cos\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.2.13}$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla, ispatı yapılan teorem aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.2.1: (4.1.8)-(4.1.10) sınır-değer probleminin özdeğerleri, yeterince büyük n için,

$$\sqrt{\lambda_n} = \left(\pi\left(n + \nu\right)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

biçimine sahiptir. Özel olarak, (4.2.1) durumlarında özdeğerler,

$$\sqrt{\lambda_n} = \begin{cases} \pi n + O\left(\frac{1}{n}\right) & d_0 = 0 \\ \pi\left(n - \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) & d_0 \neq 0 \end{cases} \tag{4.2.14}$$

olur.Karşılık gelen özfonksiyonlar ise,

$$X_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) & d_0 = 0 \\ \sqrt{2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) & d_0 \neq 0 \end{cases} \tag{4.2.15}$$

asimptotik ifadelerine sahiptir.

4.3. MİNİMALLİK VE TABANLIK

Şimdi özfonksiyonların tabanlığını elde etmek için önce bunların minimal bir dizi olduğu gösterilmelidir. Bunun için minimal sistemin Teorem 3.3.1'deki özelliğinden yararlanılır. Bununla bağlantılı aşağıdaki teorem şu şekildedir:

Teorem 4.3.1.: k_0 sıfırdan farklı keyfi, sabit, negatif olmayan bir tamsayı olsun. O zaman $X_n(x)$ sistemi, $(n=0,1,2,...;n\neq k_0)$ $L_2(0,1)$ uzayında minimaldir.

İspat: $L_2(0,1)$ 'de $X_n(x)$ sistemine $(n=0,1,2,...;n\neq k_0)$ biortogonal $\{U_n(x)\}$ sisteminin varlığını ispat etmek yeterlidir.

Bunun için, $L_2(0,1)$ uzayında $\{X_n(x)\}$ dizisine biortogonal $\{U_n(x)\}$ dizisi var olsun. Bu dizi $(n=0,1,2,...;n\neq k_0)$ olmak üzere, $n,m\neq k_0$ için

$$\left(U_n, X_m\right)=\delta_{n,m} \tag{4.3.1}$$

koşulundan bulunsun.

$X_n(x)$ ve $X_m(x)$ (4.1.8)-(4.1.10) sınır-değer probleminin çözümleri olsun.

$X_n(x)$ ve $X_m(x)$ diferansiyel denklemi sağladığından,

$$X_n''(x)+q(x)X_n(x)=-\lambda_n X_n(x)$$

$$X_m''(x)+q(x)X_m(x)=-\lambda_m X_m(x)$$

eşitliklerine sahip olunur.

Birinci eşitlik X_m, ikinci eşitlik X_n ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$$X_n''(x)X_m(x)-X_m''(x)X_n(x)=\left(\lambda_m-\lambda_n\right)X_n(x)X_m(x)$$

elde edilir. Elde edilen eşitlik 0 dan 1'e kadar x 'e göre integre edilirse,

$$\int_0^1\Big(X_n''(x)X_m(x)-X_m''(x)X_n(x)\Big)dx=\left(\lambda_m-\lambda_n\right)\int_0^1 X_n(x)X_m(x)\,dx$$

kısmi integralleme sonucunda,

$$\int_0^1\Big(X_n'(x)X_m(x)-X_m'(x)X_n(x)\Big)'dx==\left(\lambda_m-\lambda_n\right)\int_0^1 X_n(x)X_m(x)\,dx$$

$$\Big(X_n'(x)X_m(x)-X_m'(x)X_n(x)\Big)\Big|_0^1=\left(\lambda_m-\lambda_n\right)\left(X_n,X_m\right)$$

$$\Big(X_n'(1)X_m(1)-X_m'(1)X_n(1)\Big)-\Big(X_n'(0)X_m(0)-X_m'(0)X_n(0)\Big)=\left(\lambda_m-\lambda_n\right)\left(X_n,X_m\right)$$

(4.3.2)

bulunur.

$X_k(x)$, $(k=0,1,...)$ fonksiyonu, (4.1.9), (4.1.10) sınır koşullarını sağladığından,

$$b_0 X_k(0) - d_0 X_k'(0) = 0 \tag{4.3.3}$$

$$\left(b_1 - \lambda_k\, a_1\right) X_k(1) - d_1 X_k'(1) = 0 \tag{4.3.4}$$

olur.

$|b_0| + |d_0| \neq 0$ olmasından ve tüm $n,m = 0,1...$ için (4.3.3)'den

$$X_n{}'(0) = \frac{b_0}{d_0} X_n(0) \quad , \quad X_m{}'(0) = \frac{b_0}{d_0} X_m(0)$$

eşitliklerini kullanarak,

$$X_n(0) X_m'(0) - X_n'(0) X_m(0) = 0 \tag{4.3.5}$$

olduğu gösterilir.

[10]'dan (4.1.8)-(4.1.10) sınır- değer probleminin özdeğerlerinin sınırsız artan $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi vardır;

$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ ve $X_0(x), X_1(x), X_2(x), ...$ uygun özfonksiyonları olsun. Önce,

$$\left(X_n, X_m\right) = \frac{-a_1}{d_1} X_n(1) X_m(1) \qquad \text{olduğu gösterilsin.}$$

(4.3.2), (4.3.4) ve (4.3.5)'ü kullanarak , $m \neq n$ için, $\left(X_n, X_m\right)$ iç çarpımı hesaplanır.

(4.3.2)'den,

$$\left(X_n, X_m\right) = \frac{\left(X_n(1) X_m'(1) - X_n'(1) X_m(1)\right) - \left(X_n(0) X_m'(0) - X_n'(0) X_m(0)\right)}{\lambda_m - \lambda_n}$$

ve (4.3.5)'den

$$\left(X_n, X_m\right) = \frac{X_n(1) X_m'(1) - X_n'(1) X_m(1)}{\lambda_m - \lambda_n} \tag{4.3.6}$$

olur.

(4.3.4)'den elde edilen

$$X_n'(1)=\frac{(b_1-\lambda_n a_1)}{d_1}X_n(1) \quad \text{ve} \quad X_m'(1)=\frac{(b_1-\lambda_m a_1)}{d_1}X_m(1)$$

eşitliklerini (4.3.6)'de yerine yazarak,

$$(X_n, X_m)=-\frac{a_1}{d_1}X_n(1)X_m(1) \tag{4.3.7}$$

hesaplanır.

U_n dizisi,

$$U_n = B\left(X_n - AX_{k_0}\right) \tag{4.3.8}$$

biçiminde aransın. (4.3.1)'e göre $n \neq m$ olmak üzere $(U_n, X_m)=0$ olması gerekir. Bundan dolayı, $B \neq 0$ olmak üzere,

$$(U_n, X_m)=B\left[(X_n, X_m)-A\left(X_{k_0}, X_m\right)\right]=0$$

olur.

Buradan,

$$(X_n, X_m)=A\left(X_{k_0}, X_m\right) \quad \text{elde edilir.}$$

(4.3.7)'ye göre $x=1$ olduğunda,

$$-\frac{a_1}{d_1}X_n(1)X_m(1)=-A\frac{a_1}{d_1}X_{k_0}(1)\,X_m(1) \quad \text{olur ki, buradan}$$

$$A=\frac{X_n(1)}{X_{k_0}(1)} \tag{4.3.9}$$

şeklindedir. (4.3.9)'i (4.3.8)'de yerine yazarak,

$$U_n = B\left[X_n(x)-\frac{X_n(1)}{X_{k_0}(1)}X_{k_0}(x)\right]$$

hesaplanır. Buna göre,

$$\left(U_n, X_m\right) = B\left[\left(X_n, X_m\right) - \frac{X_n(1)}{X_{k_0}(1)}\left(X_{k_0}, X_m\right)\right] \tag{4.3.10}$$

biçimindedir.

$n \neq m$ için $\left(U_n, X_m\right)$ iç çarpımının sıfıra dönüştüğünü gösterilsin. $B \neq 0$ olmak üzere,

$$\left(U_n, X_m\right) = B\left[-\frac{a_1}{d_1} X_n(1) X_m(1) + \frac{X_n(1)}{X_{k_0}(1)}\left(\frac{a_1}{d_1} X_{k_0}(1) X_m(1)\right)\right]$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$\left(U_n, X_m\right) = 0$$

olur.

Şimdi $n = m$ olduğunda B katsayısı bulunsun.

$\left(U_n, X_n\right) = 1$ koşuluyla, (4.3.10) ve (4.3.7)'den,

$$\begin{aligned} 1 = \left(U_n, X_n\right) &= B\left[\left(X_n, X_n\right) - \frac{X_n(1)}{X_{k_0}(1)}\left(X_{k_0}, X_n\right)\right] \\ &= B\left[\left\|X_n\right\|^2 - \frac{X_n(1)}{X_{k_0}(1)}\left(-\frac{a_1}{d_1} X_n(1) X_{k_0}(1)\right)\right] \\ &= B\left[\left\|X_n\right\|^2 + \frac{a_1}{d_1}\left(X_n(1)\right)^2\right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$B = \frac{1}{\|X_n\|^2 + \frac{a_1}{d_1}\left(X_n(1)\right)^2} \tag{4.3.11}$$

hesaplanır.

Buna göre $\{U_n(x)\}$ sisteminin elemanları, $(n = 0,1,2,...;n \neq k_0)$

$$U_n(x) = \frac{1}{\|X_n\|^2 + \frac{a_1}{d_1}\left(X_n(1)\right)^2}\left[X_n(x) - \frac{X_n(1)}{X_{k_0}(1)}X_{k_0}(x)\right] \tag{4.3.12}$$

ile tanımlanır.

Böylece, $\left(U_n, X_m\right) = \delta_{n,m}$ eşitliği doğrulanır, yani $\{U_n(x)\}$ *ve* $\{X_n(x)\}$ dizileri $(n = 0,1,2,...;n \neq k_0)$, $L_2(0,1)$ uzayında biortogonal dizi oluştururlar.

$\{X_n(x)\}$ sistemi biortogonal eşleniğe sahip olduğundan minimaldir. □

Teorem 4.3.2.: k_0, keyfi, sabit, negatif olmayan bir tamsayı olsun. O zaman $\{X_n(x)\}$ $(n = 0,1,2,...;n \neq k_0)$, sistemi $L_2(0,1)$'de koşulsuz bir tabandır.

İspat: Öncelikle $X_n(x)$ sistemi $(n = 0,1,2,...;n \neq k_0)$, $L_2(0,1)$ için ortonormal taban olan $\left\{\sqrt{2}\sin n\pi x\right\}$ $\left(n = 1,2,...\right)$ sistemiyle karşılaştırılsın.

$d_0 = 0$ durumunda, yeterince büyük n için, (4.2.14) ve (4.2.15)'den

$$\left\|X_n(x) - \sqrt{2}\sin n\pi x\right\| \leq \frac{c}{n} \tag{4.3.13}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$$\sum_{n=1}^{k_0}\left\|X_{n-1}(x) - \sqrt{2}\sin n\pi x\right\|^2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty}\left\|X_n(x) - \sqrt{2}\sin n\pi x\right\|^2 \tag{4.3.14}$$

serisinin yakınsaklığı elde edilir.($k_0 = 0$ için ilk toplam olmayacak). Bundan dolayı $\{X_n(x)\}$ sistemi $(n = 0,1,2,...; n \neq k_0)$, $\{\sqrt{2}\sin n\pi x\}$ $(n = 1,2,...)$, sistemine kare (kuadratik) yakınsaktır.

Aynı şekilde, $d_0 \neq 0$ için $\{X_n(x)\}$ sistemi ortonormal taban olan $\{\sqrt{2}\cos\left(\pi\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\right)\}$ $(n = 1,2,...)$ sistemiyle karşılaştırılırsa, (4.2.14) ve (4.2.15) den yeterince büyük n için $d_0 \neq 0$ durumunda,

$$\left\|X_n(x) - \sqrt{2}\cos\left(\pi\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right\| \leq \frac{c}{n}$$

eşitsizliği geçerli olur.

$$\sum_{n=1}^{k_0}\left\|X_{n-1}(x) - \sqrt{2}\cos\left(\pi\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right\|^2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty}\left\|X_n(x) - \sqrt{2}\cos\left(\pi\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right\|^2$$

(4.3.15)

serisinin yakınsaklığı elde edilir. ($k_0 = 0$ için ilk toplam olmayacak). Bundan dolayı, $\{X_n(x)\}$ sistemi $(n = 0,1,2,...; n \neq k_0)$, $\{\sqrt{2}\cos\left(\pi\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\right)\}$ $(n = 1,2,...)$, sistemine kare yakınsaktır. $\{X_n(x)\}$, $(n = 0,1,2,...; n \neq k_0)$ sisteminin $L_2(0,1)$ 'de minimal olduğu Teorem (4.3.1)'de gösterilmişti. O halde Bari teoremini kullanarak Teorem (4.3.2)'ün ispatını elde edilebilir.

Sonuç olarak, $\{X_n(x)\}$ sistemi yakınsak ve minimal olduğundan koşulsuz bir tabandır. □

[7]'de gösterildiği gibi, tabanlığa ilişkin Teorem 4.3.2'de k_0 indisli fonksiyon olarak sıfır indisli fonksiyon da alınabilir.

4.4. ISI İLETİMİ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Şimdi yeniden (4.1.1)-(4.1.4) problemine dönülsün. (4.1.1) denklemi lineer ve homojen olduğundan özel $u_n(x,t)$ çözümlerin toplamı

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\, e^{-\lambda_n t}\, X_n(x) \tag{4.4.1}$$

şeklindedir.

$u(x,t)$ fonksiyonu (4.1.1) denklemini ve (4.1.2), (4.1.3) sınır koşullarını sağlar. Başlangıç koşulunu kullanarak A_n katsayısı bulunur. (4.4.1) fonksiyonuna (4.1.4) koşulu sağlatılarak

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\; X_n(x) \tag{4.4.2}$$

elde edilir. Bu ise, $\varphi(x)$ fonksiyonunun $X_n(x)$ özfonksiyonuna göre açılımıdır. [1]'deki Fourier serileri teorisinden bilinir ki, [0,1] aralığında verilmiş her parçalı-sürekli ve parçalı-türevlenen $f(x)$ fonksiyonu Fourier serisine açılabilir.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \sin n\pi x\ ,$$

burada

$$A_n=2\int_0^1 f(\xi)\sin n\pi\xi\, d\xi\ .$$

Buna göre A_n katsayıları $\varphi(x)$ fonksiyonunun [0,1] aralığı üzerinde Fourier katsayılarıdır ve

$$A_n=2\int_0^1 \varphi(\xi)\, X_n(\xi)\, d\xi \tag{4.4.3}$$

şeklindedir.

Şimdi (4.4.3) formülü ile tanımlanan A_n katsayılı (4.4.1) serisinin, (4.1.1) probleminin tüm koşullarını sağladığı gösterilsin. Bunun için (4.4.1) ile tanımlanan serinin türevlenebilir olduğu, $0<x<1$, $t>0$ bölgesinde denklemi sağladığı ve bölgenin sınır ($t=0$ olduğunda ve $x=0$, $x=1$) noktalarında sürekli olduğununun kanıtlanması gerekir.

$t\geq \bar{t}>0$ ($\bar{t}$ yardımcı sayıdır) için türevlerden oluşan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

serilerinin düzgün yakınsak olduğu gösterilsin. Gerçekten, $d_0 = 0$ durumunda,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-A_n(\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 t} X_n(x)\right|$$

$$= \left|-A_n(\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 t}\sqrt{2}\sin n\pi x - A_n(\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 t} O\left(\frac{1}{n}\right)\right| < \left|A_n\right|\pi^2 n^2 e^{-(\pi n)^2 t} + \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Eğer $\varphi(x)$ sınırlı ise, $\left|\varphi(x)\right| < K$ dır. O halde

$$\left|A_n\right| = 2\left|\int_0^1 \varphi(\xi)\sin n\pi\xi\, d\xi\right| < 2K$$

olur. Buradan

$$t \geq \bar{t} \quad \text{için} \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2K(\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 \bar{t}}$$

olur. Benzer olarak

$$t \geq \bar{t} \quad \text{için} \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2K(\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 \bar{t}}$$

şeklindedir.

$\alpha_n = N\, n^q\, e^{-(\pi n)^2 \bar{t}}$ olmak üzere, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ üstten sınırlayan (majorant) sayısal serinin yakınsaklığı D'Alembert kriterine göre,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^q \frac{e^{-\pi^2 n^2 (n^2+2n+1)\bar{t}}}{e^{-\pi^2 n^2 \bar{t}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q e^{-\pi^2 (2n+1)\bar{t}} = 0$$

olur. $d_0 \neq 0$ durumu ele alınırsa,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-A_n\left(\pi(n - \tfrac{1}{2})\right)^2 e^{-\left(\pi(n-\frac{1}{2})\right)^2 t} X_n(x)\right|$$

$$= \left|-A_n\left(\pi(n - \tfrac{1}{2})\right)^2 e^{-\left(\pi(n-\frac{1}{2})\right)^2 t}\sqrt{2}\cos\pi(n - \tfrac{1}{2})x - A_n\left(\pi(n - \tfrac{1}{2})\right)^2 e^{-\left(\pi(n-\frac{1}{2})\right)^2 t} O\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$

$$< \left|A_n\right|\pi^2 (n - \tfrac{1}{2})^2 e^{-\left(\pi(n-\frac{1}{2})\right)^2 t}\left[1 + O(\frac{1}{n})\right]$$

Eğer $\varphi(x)$ sınırlı ise, $|\varphi(x)| < K$ dır. O halde

$$|A_n| = 2\left|\int_0^1 \varphi(\xi)\cos\pi(n-\tfrac{1}{2})\xi\, d\xi\right| < 2K$$

olur. Buradan

$$t \geq \bar{t} \quad \text{için} \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2K\left(\pi(n-\tfrac{1}{2})\right)^2 e^{-\left(\pi(n-\frac{1}{2})\right)^2 \bar{t}}$$

olur. Benzer olarak

$$t \geq \bar{t} \quad \text{için} \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2K\left(\pi(n-\tfrac{1}{2})\right)^2 e^{-\left(\pi(n-\frac{1}{2})\right)^2 \bar{t}}$$

şeklindedir.

$\alpha_n = N\, n^q\, e^{-\left(\pi(n-\frac{1}{2})\right)^2 \bar{t}}$ olmak üzere, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ üstten sınırlayan (majorant) sayısal serinin yakınsaklığı D'Alembert kriterine göre,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^q \frac{e^{-\pi^2(n+\frac{1}{2})^2\bar{t}}}{e^{-\pi^2(n-\frac{1}{2})^2\bar{t}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q e^{-\pi^2(2n)\bar{t}} = 0$$

olur. Bundan dolayı, (4.4.1) serisini terim terime $t \geq \bar{t} > 0$ bölgesinde istenilen mertebeden türevlendirme gerçekleşir. Bu seri ile tanımlanan fonksiyon (4.1.1) denklemini sağlar. $\bar{t}$ yardımcı sayı olduğundan tüm $t > 0$ için de sağlanır. Dolayısıyla, (4.4.1) serisi $t > 0$ olduğunda istenilen mertebede türevlenebilen ve (4.1.1) denklemini sağlayan fonksiyonu verir.

Teorem 4.4.1.: Eğer $\varphi(x)$ sürekli, parçalı-sürekli fonksiyon olarak $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ koşulunu sağlarsa, o halde

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-(\pi n)^2 t}\, X_n(x) \qquad 4.4.4)$$

serisi $t \geq 0$ için sürekli fonksiyon tanımlar.

İspat: Gerçekten,

$$|u_n(x,t)| < |A_n| \qquad (t \geq 0,\ \ 0 \leq x \leq 1 \quad için)$$

eşitsizliğinden, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ için (4.4.4) serisinin düzgün yakınsaklığı elde edilir. Burada yukarıdaki koşulları sağlayan $\varphi(x)$ fonksiyonu için Fourier katsayılarının modüllerinden oluşan seri yakınsaktır. Buna göre (4.4.4) serisi sürekli, parçalı düzgün başlangıç koşuluyla ele alınan problemin kapalı ($0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$) bölgesinde sürekli çözümüdür.

Şimdi, A_n'nin değerini (4.4.1)'e götürmekle, $d_0 = 0$ durumunda,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[2\int_0^1 \varphi(\xi)\left(\sqrt{2}\sin n\pi\xi + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)d\xi\right]e^{-\lambda_n t}\left(\sqrt{2}\sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \int_0^1\left[2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\left(\sqrt{2}\sin n\pi\xi + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sqrt{2}\sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\varphi(\xi)\,d\xi$$

(4.4.5)

elde edilir. $t > 0$ için parantezler içi ξ'ye göre düzgün yakınsak olduğundan, $t > 0$ için toplam ile integrasyon işlemleri birbiriyle yer değiştirebilir.

Bu ifadede,

$$G(x,\xi,t) = \left[2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\left(\sqrt{2}\sin n\pi\xi + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sqrt{2}\sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \qquad (4.4.6)$$

şeklindedir.

(4.4.5)'de yerine yazarak,

$$u(x,t) = \int_0^1 G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (4.4.7)$$

olur.

Aynı şekilde $d_0 \neq 0$ durumunda,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[2\int_0^1 \varphi(\xi)\left(\sqrt{2}\cos(n-\frac{1}{2})\pi\xi + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)d\xi\right]e^{-\lambda_n t}\left(\sqrt{2}\cos\pi(n-\frac{1}{2})x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \int_0^1\left[2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\left(\sqrt{2}\cos(n-\frac{1}{2})\pi\xi + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sqrt{2}\cos(n-\frac{1}{2})\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\varphi(\xi)\,d\xi$$

(4.4.8)

elde edilir. $t>0$ için parantezler içi ξ'ye göre düzgün yakınsak olduğundan, $t>0$ için toplam ile integrasyon işlemleri birbiriyle yer değiştirebilir.

Bu ifadede,

$$G(x,\xi,t)=\left[2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}\left(\sqrt{2}\,\cos(n-\frac{1}{2})\pi\xi+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sqrt{2}\,\cos\pi(n-\frac{1}{2})x+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]$$

(4.4.9)

şeklindedir.

(4.4.8)'de yerine yazarak,

$$u(x,t)=\int_0^1 G(x,\xi,t)\ \varphi(\xi)\ d\xi \tag{4.4.10}$$

olur

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde ele alınan sonuçlar, Bulgular ve Tartışma bölümünde,

4.1. ISI İLETİMİNE İLİŞKİN SPEKTRAL PROBLEM
4.2. ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLAR İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER
4.3. MİNİMALLİK VE TABANLIK
4.4. ISI İLETİMİ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.
Başlıkları altında toplanmıştır.

4.1.'de ısı iletimine ilişkin

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u \qquad 0 < x < 1 \qquad t > 0 \tag{4.1.1}$$

$$d_0 u_x(0,t) - b_0 u(0,t) = 0 \tag{4.1.2}$$

$$a_1 u_t(1,t) + b_1 u(1,t) = d_1 u_x(1,t) \tag{4.1.3}$$

sınır koşullarını ve

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{4.1.4}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü incelendi. Burada, $\varphi(x)$ sürekli, parçalı-sürekli, ve türevlenebilir bir fonksiyon olarak $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ koşulunu sağlamaktadır. $q(x)$, $[0,1]$ aralığında reel değerli, sürekli bir fonksiyon , $a_1, b_0, b_1, d_0\ ve\ d_1$ reel sabitlerdir.

Değişkenlere ayırma yöntemiyle, sınır-değer problemi

$$X''(x) + q(x)X(x) = -\lambda X(x) \qquad 0 < x < 1 \tag{4.1.8}$$

$$d_0\, X'(0) - b_0\, X(0) = 0 \tag{4.1.9}$$

$$\left(b_1 - \lambda\, a_1\right) X(1) - d_1\, X'(1) = 0 \tag{4.1.10}$$

problemine indirgendi.

4.2.'de (4.1.8)-(4.1.9) probleminin özdeğer ve özfonksiyonları için asimptotik formüller belirlendi.

4.3.'de (4.1.8)-(4.1.9) probleminin özfonksiyonlarının minimalliği ve tabanlığı incelendi.

4.4.'de (4.1.1)-(4.1.4) probleminin çözümü incelendi.

Elde edilen sonuçlar ısı iletimi olaylarında ve çözümün bulunmasında kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Tychonov, A.N., Samarski A.A., " Partial Equation of Mathematical Physics", Vol 1, San Francisko, Translated from the Russian, Moscow, pp.380,(1962).

[2] Cohen D.S., "An İntegral Transform Associated with Boundary Conditions Containing an Eigenvalue Parameter", Slam Journal on Applied Math. **V.14**, No.**5**, 1164-1175, (1966).

[3] Fulton C.T., "Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Condition", Quart. J. Math. Oxford, **30**, **N2**, 33-42, (1979).

[4] Kapustin, N.Yu., Moisseev , E.İ. " The Square Laplace Operator for the Spectral Problem with the Spectral Parameter in the Boundary Condition", Diff. Uravn., **V.34**, **N.5**, 662-667, (1998).

[5] Kapustin, N.Yu. , Moisseev , E.İ. "A remark on the Convergence Problem for Spectral Expansions Corresponding to Classical Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Condition", Diff.Equations, **37 V.(12)**, 1677-1683, (2001).

[6] Jakob, M. "Heat Transfer" New York:Wiley, pp.529, (1949).

[7] Kapustin, N.Yu., Moisseev , E.İ. "Spectral Problem with the Spectral Parameter in the Boundary Condition", Diff. Uravn., **V.33, No.1**, 115-119, (1997).

[8] Kapustin, N.Yu. , Moisseev , E.İ. "On the Spectral Problem from the Theory of the Parabolic Heat Equation", Dok. Russ .Akad. Nauk, **352 No.4**, 451-454, (1997).

[9] Walter, J. "Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions", Math. Z., **133**, 301-312, (1973).

[10] Binding P.A., Browne P.J. and Seddighi K., "Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions", Proc. Edinburg, Mathematical Society **37**, 57-72, (1993).

[11] Kerimov, N. B. and Allahverdiev, T.I. "On a Certain Boundary Value Problem I," Diff. Uravn. **29. No.1**, 54-60, (1993).

[12] Russakovskij, E. M. "Operator Treatment of Boundary Problems with Spectral Parameters Entering Via Polynomials in the Boundary Conditions", Funct. Anal. Appl. **9**, 358-359, (1975); (translation from Funkts. Anal. Prilozh. **9, No.4**, 91-92), (Russian, English), (1975).

[13] Mamedov, Kh. R. "On one Boundary Value Problem with Parameter in the Boundary Conditions", Spectral Theory of Operators and its Applications,**V.11**, (1997).

[14] Kerimov, N. B., Mamedov, Kh. R. "On a Boundary Value Problem with a Spectral Parameter in a Boundary Condition", Siberian Math Journal, **V.40**, **No.2**, 281-290, (1999).

[15] Kapustin, N.Yu. "Oscillation Properties of the Solutions to a Nonselfadjoint Spectral Parameter in the Boundary Condition", Diff.Uravn.,**V.33**, **No.8** 1024-1027, (1999).

[16] Kerimov, N. B. and Mirzoev , V.S. "On the Basis Properties of an Spectral Problem with a Spectral Parameter in a Boundary Condition", Siberian Mathematical Journal, **V.44**, **No.5.**, 813-816, (2003).

[17] Naimark, M.A. "Lineer Diferantial Operators", Part I tranlated by Dawson, E.R., Frederick Ungar Publishing Co., New York, pp.144, (1967).

[18] Gohberg, I.C. , Krein, M.G. "Introduction to the Theory of Lineer Non Selfadjoint Operators" , American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, pp.378, (1969).

[19] Başkan, Turgut "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", Ceylan Matbaacılık, Bursa, 360 s, (1996).

[20] Kızmaz, Hüsnü " Fonksiyonel Analize Giriş", Trabzon, 287 s, (1993).

[21] Tunçer, Talat "Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler", İstanbul, 544s, (1992).

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Mersin'de doğdum. İlkokulu Hatay İlkokulu'nda, ortaokul ve liseyi ise İçel Anadolu Lisesi'nde tamamladım.

1997 – 2001 yılları arasında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimimi yaptım.

2001 yılında Candan Merzeci İlköğretim okulunda Matematik öğretmenliğine başladım.

2002-2004 yılları arasında H.Okan Merzeci Lisesi'nde,

2004 yılından bu yana da Mersin Atatürk Lisesi'nde görev yapmaktayım.