I. GİRİŞ

Leonard Euler'den (1707-1783) önce yapılan çalışmalar yakınsaklığın kurallarına bağlı olarak incelenmesi ile ilgili idi. Yakınsak olmayan seriler çok az ilgi görüyordu.

Agustin-Louris Cauchy, 1821 yılında yayınlanan Analyse Algébrique adlı çalışmasında, yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamasının da yakınsak ve dizi ile aynı limite sahip olduğunu göstermiştir. Böylece serilerin yakınsaklığının incelenmesinde önemli bir adım atılmıştır.

E. $Ces\acute{a}ro$ 1890 da $Ces\acute{a}ro$ yakınsaklık fikrini ortaya koydu.

$\{s_n\}_0^\infty$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere;

$\lim_{n} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} s_k = 1$ mevcut ise $\{s_n\}_0^\infty$ dizisi 1'ye $Ces\acute{a}ro$ yakınsak ($(C,1)$ yakınsak) denir ve $\lim_{n} s_n = 1\ (C,1)$ şeklinde gösterilir. Burada $\{s_n\}_0^\infty$ dizisi, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi 1'ye $(C,1)$ toplanabilirdir denir.

Böylece yakınsaklık kavramına yeni bir bakış açısı getirilmiştir.

1911 yılında O.Toeplitz, Lineer Uzay Teorisi Metotları ile Toplanabilme Teorisi arasındaki ilgiyi kurmuştur.

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Bir $s = (s_n)$ dizisinin bu matris ile dönüşümü;

$(A_n(s)) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k \right)$ dizisidir. Burada her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k$ nın yakınsak olduğu varsayılmıştır.

Eğer,

$$A = (a_{nk}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \ k \le n \\ 0 & , \ k > n \end{cases} \qquad \text{alınırsa;}$$

$$A_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} s_k \quad \text{olur ki}$$

bu da E. *Cesa′ro* 'nun verdiği $(C,1)$ yakınsaklık metodudur.

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi;

i) $\lim_n a_{nk} = 0$ her sabit k için,

ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

iii) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

koşullarını sağlıyorsa, $A = (a_{nk})$ matrisine 'regüler matris' denir.

Tezimize temel oluşturan James Mercer'in orijinal teoremi:

$\alpha \in$ ¡ olmak üzere;

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{n+1} & ,k < n \\ \dfrac{n\alpha + 1}{n+1} & ,k = n \\ 0 & ,k > n \end{cases} \tag{1.1}$$

olan $A = (a_{nk})$ matrisi;

i) $\lim_n a_{nk} = 0$ her sabit k için,

ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$,

iii) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \sup_n \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| < \infty$

olduğundan regülerdir. Bu matris altında,

$s = (s_n)$ dizisinin $A = (a_{nk})$ matris dönüşümü;

$A_n(s) = \alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n$ dir.

Burada $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$ dır.

$A = (a_{nk})$ matrisi regüler olduğundan;

$$s_n \to l \; (n \to \infty) \quad \text{iken} \quad A_n(s) \to l \quad (n \to \infty) \text{ dur.}$$

J.Mercer 1906 da $\alpha > 0$ için,

$$A_n(s) \to l \quad (n \to \infty) \quad \text{iken} \quad s_n \to l \quad (n \to \infty)$$

olduğunu göstermiştir.

Böylece A metodunun yakınsaklığa denk olduğu anlaşılmaktadır. Bu nedenle bir metodun yakınsaklığa denk olduğunu gösteren teoremlere ‘Mercerian Teoremler’ denir.

Bu tezde Mercerian teoremler incelenmiştir. Tezde yer alan Mercerian Teoremlerde, J.Mercer’in orjinal teoremindeki σ_n aritmetik ortalaması, herhangi bir regüler metotla ve hatta yakınsaklığa denk metotla yer değiştirmiştir.

Ayrıca σ_n aritmetik ortalamasının yerine Nörlund Tipi Metotlar ve C_m-($m \in \mathbb{Z}^+$) metotlarını kullanarak verilen teoremlerdeki Mercerian özellikler araştırılmıştır.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ iken tanımlanan herhangi bir A-limitleme metodunda da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\,(A)$ olacaktır.

Mercerian Teoremler ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\,(A)$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ olması için $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi üzerine konulacak koşulları araştırır.

Tezde kullanılması nedeniyle bazı dizi uzaylarını verelim.

$s = (s_n)$ reel yada kompleks terimli bir diziyi göstermek üzere;

Sınırlı diziler uzayı,

$$l_{\infty} = \left\{ s = (s_n) \mid \exists \mathrm{M} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \ \textit{için} \ |s_n| \le \mathrm{M} \right\}$$

Yakınsak diziler uzayı,

$$c = \left\{ s = (s_n) \mid \lim_n s_n = 1 \ \textit{mevcut} \right\}$$

Sıfır diziler uzayı,

$$c_0 = \left\{ s = (s_n) \mid \lim_n s_n = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

Serilerin yakınsaklığının incelenmesi çok eski bir konudur. Léonard Euler'den önce yapılan çalışmalar yakınsaklık kurallarına bağlı olarak yapılıyordu. Yakınsak olmayan seriler ya az ilgi görüyor veya hiç ilgi görmüyordu. Hatta böyle serileri incelemek akıllıca bir iş gibi görünmüyordu.

Euler'den önce sonsuz dizi ve serilerle ilgilenenlerin başında Leibniz ve Newton gelir. Bu matematikçiler sonsuz serileri, yapılan hesapların doğal bir sonucu olarak görmüşlerdir. Bu görüşün bir sonucu olarak, James Bernoulli 1696 yılında

$$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

bağıntısını kullanmıştır. Euler ise bu eşitlikte;
x = -1 yazarak, Euler paradoxal eşitliği adı verilen;

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

bağıntısını elde etmiş ve birçok yerde kullanmıştır. Euler z nin küçük değerleri için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisinin $f(z)$ değerine yakınsadığı ve $f(1)=s$ olması halinde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ yazmış ve böylece ıraksak seriler teorisinde önemli bir gelişme kaydetmiştir.

Aslında Euler'in bu fikri kesin bir temele dayanmamaktadır. Çünkü

$|z|<1$ için $\dfrac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

z=1 için $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{2}$ elde edilir.

Diğer yandan,

$|z|<1$ için $\dfrac{1-z^2}{1-z^3}=1-z^2+z^3-z^5+z^6-\cdots$

ve $z\neq 1$ için $\dfrac{1-z^2}{1-z^3}=\dfrac{1+z}{1+z+z^2}$ olup

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \cdots \qquad \text{elde edilir.}$$

Bu son ifadeden ise,

$$z=1 \text{ için } \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1+z}{1+z+z^2} = \frac{2}{3} \quad \text{elde edilir.}$$

Bu şekilde, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisine, Euler'in açıklaması altında herhangi bir değer karşılık getirilebilirdi.

Carl Friedich Gauss (1777–1855) sonsuz işlemlerin kullanımının Matematik Analize girmesine yardımcı oldu.

Binom teoremi (yani $(1+x)^n$ nin açılımı, burada n tamsayı olmak zorunda değildir.) Gauss tarafından genç yaşta ele alındı. Bu, Gauss'un, bir kuvvet serisinin bir fonksiyona yakınsaması ile ilgilenmesine neden oldu. Gauss matematik dünyasına başka katkılarda da bulundu. Bunlar arasında hipergeometrik seriler ve bunların yakınsaklığının incelenmesi gibi önemli konular gelmektedir.

Agustin-Louris Cauchy (1789–1857), Gauss ve Abel ile birlikte Matematik Analize önemli katkılarda bulunanların öncülerindendir. Kuvvet serilerinin yakınsaklığı ve ıraksaklığı hakkındaki düşünceleri formüle etmiştir. Çalışmalarının çoğu, bugünkü matematiksel aktivite için hala önemli bir taban oluşturmaktadır.

1821 yılında yayınladığı Analyse Algébrique adlı çalışmasında, yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamasının da yakınsak ve dizi ile aynı limite sahip olduğunu ispatlamıştır. Şimdi bu teoremi verelim.

Teorem 2.1. $\lim_{n} a_n = l$ ise $\lim_{n} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = l$ dir.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir.

N.Henrik Abel (1802–1829) 19. uncu yüzyılın ilk başlarında yakınsaklık ve ıraksaklık hakkındaki düşüncelere katkısı olan üçüncü önemli kişidir. Abel'e ait olan birçok teorem günümüzde hala kullanılmaktadır.

Iraksak seriler hakkında öncelikle Cauchy, Gauss ve Abel' ait olan ilgi 19. yüzyılın ikinci yarısında azalmıştır.

Iraksak serilerin yeniden incelenmesine başlayanlar arasında E. $Cesa'ro$ 1890 yılında $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisini yeniden göz önüne alarak;

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi;

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = 1-1+1-1+\cdots \pm 1$$

$$s_n = \begin{cases} 1, & n \text{ çift} \\ o, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$s_n = (1,0,1,0,\cdots) = \left(\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right)$ olup bunun da aritmetik ortalaması,

$$= \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{(n+1) + \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+(-1)^n}{n+1}\right) \qquad (2.1)$$

olup, böylece

$$t_n \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty) \text{ elde edilir.}$$

$E.Cesa'ro$, Cauchy anlamında yakınsak olmayan $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisinin kısmi toplamalar dizisinin aritmetik ortalamasının $\frac{1}{2}$ değerine yakınsadığını göstererek, $(C,1)$ yakınsaklık fikrini ortaya atmıştır.

2.1. KULLANILAN METOTLAR

Tanım 2.1.1 (C_1 - metodu):

Bir (s_n) dizisi verilsin. $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$ olmak üzere (σ_n) dizisi yakınsak ve limiti l ise (s_n) dizisi l ye C_1- limitlenebilir (veya 1. inci mertebeden Cesa'ro limitlenebilir) denir ve $s_n \to l\ (C_1)$ şeklinde gösterilir.

$$s_n \to l\ (C_1) \Leftrightarrow \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k \to l \quad (n \to \infty)$$

Eğer (s_n) dizisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ve $s_n \to l\ (C_1)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi l ye C_1- toplanabilir denir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l\left(C_1\right) \text{ şeklinde gösterilir.}$$

.

Böylece yakınsaklık kavramının genelleştirilmesi görüşü ortaya çıkmıştır.

P bir limitleme metodu olmak üzere;

Yakınsaklık kavramını genelleştirirken tanımlanan bir P metodunda, aşağıdaki özelliklerin olması gerekir.

i) Süreklilik koşulu: Cauchy anlamında yakınsak ve limiti s olan bir $\left(s_n\right)$ dizisi P metodunda da yakınsak olmalıdır. Yani;

$$s_n \to s\,(n \to \infty) \text{ ise } s_n \to s\left(P\right) \text{ dir.}$$

ii) Etki alanı: Cauchy anlamında ıraksak olan en az bir dizi P metoduyla limitlenebilir olmalıdır.

iii) Uygunluk koşulu: Eğer $\left(s_n\right)$ dizisine P_1 ve P_2 gibi iki farklı metot uygulandığında $\left(s_n\right)$ dizisi bu iki metot için de limitlenebilir ise dizinin limiti her iki metotta da aynı olmalıdır. Yani;

$$s_n \to s\left(P_1\right) \quad \Leftrightarrow \quad s_n \to s\left(P_2\right)$$

Burada ki (i) ve (ii) koşulları temel koşullardır. Fakat tüm metotlar (iii) koşulunu sağlamak zorunda değildir.

Ayrıca bunlara ek olarak Cauchy anlamında yakınsak serilerin cebirsel işlemlerinin elementer kurallarını da sağlaması beklenir.

(i) $\sum a_n = 1\left(P\right) \Rightarrow \sum k a_n = k1\left(P\right)$ (k bir sabit)

(ii) $\sum a_n = 1_1\left(P\right)$ ve $\sum b_n = 1_2\left(P\right)$ ise $\sum\left(a_n \,\mathrm{m}\, b_n\right) = \left(1_1 \,\mathrm{m}\, 1_2\right)\left(P\right)$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1\left(P\right)$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(1 - a_0\right)\left(P\right)$

(iv) $\sum a_n = 1\left(P\right)$, $\quad f\left(x\right) = \sum a_n x^n$; $\lim_{x \to 1^-} f\left(x\right) = 1$

E.$Cesa'ro$'nun C_1- yakınsaklık fikrini ortaya koymasının ardından m pozitif tam sayı olmak üzere C_m- metotları tanımlandı. K.Knopp, 1907 de, S.Chapman 1911 yılında K.Knopp'tan bağımsız olarak $\alpha > -1$ reel sayısı için C_α-metotlarını tanımladı.

Tanım 2.1.2 (C_m - metodu) $\left(m \in \mathbb{N}^{+}\right)$**:**

Bir $\left(s_n\right)$ dizisi verilsin;

$$S_n^{\,0} = s_n$$

$$S_n^{\,1} = S_0^{\,0} + S_1^{\,0} + \cdots S_n^{\,0} = s_0 + s_1 + \cdots s_n$$

$$S_n^m = S_0^{m-1} + S_1^{m-1} + \cdots + S_n^{m-1} \text{ olsun.}$$

$$C_n^m = \frac{S_n^m}{\binom{n+m}{n}} \to l \qquad \left(n \to \infty\right)$$

ise $\left(s_n\right)$ dizisi l ye C_m- limtlenebilir (veya m. inci mertebeden Cesa'ro limitlenebilir) denir.

$s_n \to l\ (C_m)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $\left(s_n\right)$ bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ve $s_n \to l\ (C_m)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi l ye C_m- toplanabilir (veya m. inci mertebeden Cesa'ro toplanabilir) denir.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l\left(C_m\right)$ şeklinde gösterilir. Kuvvet serileri yardımıyla,

S_n^m, a_n ve s_n ler cinsinden;

$$S_n^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+m-1}{m-1} s_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+m}{m} a_k \text{ elde edilir.}$$

O zaman

$$C_n^m = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+m-1}{m-1} s_k}{\binom{n+m}{n}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+m}{m} a_k}{\binom{n+m}{n}} \quad \text{yazılır.}$$

Burada C_n^m ye m. inci mertebeden *Cesa′ro* Ortalaması denir.

Tanım 2.1.3 **(**C_α **- metodu,** $\alpha > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}$ **) :**

Bir (s_n) dizisi verilsin. $\alpha > -1$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha.(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{olmak üzere}$$

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} s_k$$

$$C_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{\binom{n+\alpha}{n}} \to l \quad (n \to \infty) \qquad \text{ise}$$

$s_n \to l\ (C_\alpha)$ limitlenebilirdir denir.

Tanım 2.1.4 (Nörlund metodu) :

Bir (s_n) dizisi verilsin. (p_n), $p_0 > 0$ ve $p_n \geq 0$ $(n = 1, 2, ...)$ olan bir reel sayı dizisi ve $P_n = p_0 + p_1 + \cdots p_n$ olmak üzere

$$J_n = \frac{p_n s_0 + p_{n-1} s_1 + \cdots + p_0 s_n}{p_0 + \cdots p_n} = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k \to l \quad (n \to \infty)$$

ise (s_n) dizisi l ye N_p - limitlenebilir (veya Nörlund limitlenebilir) denir ve $s_n \to l(N_p)$ şeklinde gösterilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l\ (N_P) \Leftrightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ \text{ için } \ s_n \to l(N_p)$$

$$\Leftrightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ \text{ için } \quad \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k \to l \quad (n \to \infty)$$

Ayrıca (p_n) dizisi özel seçilerek Nörlund metodundan başka bilinen metotlar elde edilir.

Örneğin;

(i) $(p_n) = (1) :=$ (1,1, ...) sabit dizisi için $\mathrm{P}_n = n+1$ olur ki bu da C_1-metodunu verir.

(ii) $(p_n) = \left(\begin{pmatrix} n+\alpha-1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix} \right)$ $(\alpha > -1,\ \alpha \in \mathbb{R})$ dizisi için C_α- metodu elde edilir.

Nörlund metoduyla aynı yapıda olan başka adlarla anılan bir takım limitleme metotları vardır. Bu tür metotlara ‘Nörlund Tipi Metotlar’ denir. Bu çalışmada söz konusu olan Nörlund Tipi Metot aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.5 (Nörlund tipi metot):

Bir (s_n) dizisi verilsin. (p_n), $p_0 > 0$ ve $p_n \geq 0$ $(n = 1,2,...)$ olan bir reel sayı dizisi ve $\mathrm{P}_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ olmak üzere

$$t_n = \frac{p_0 s_0 + \cdots + p_n s_n}{p_0 + \cdots + p_n} = \frac{1}{\mathrm{P}_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \to l \qquad (n \to \infty) \quad \text{ise}$$

(s_n) dizisi l ye $\overline{N}_P$- limitlenebilir (veya Nörlund tipi limitlenebilir) denir ve

$(s_n) \to l\ (\overline{N}_P)$ şeklinde gösterilir.

Eğer (s_n) bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ve $(s_n) \to l\ (\overline{N}_P)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi l ye $\overline{N}_P$- toplanabilir (veya Nörlund tipi toplanabilir) denir ve

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l\ (\overline{N}_P)$ şeklinde gösterilir.

1911 yılında O.Toeplitz (1881–1940) Lineer Uzaylar Teorisi metotları ile Toplanabilme Teorisi arasındaki ilgiyi göstermiştir.

Şimdi tekrar $\sum (-1)^n$ serisini göz önüne alalım. Euler’e göre $\sum (-1)^n$ serisine hemen hemen her değer karşılık getirilebilir.

(2.1) de ki (t_n) dizisi, $(s_n)=\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)$ sınırlı ıraksak dizisinin

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & ,0\le k\le n\\[2ex] 0 & ,k>n\end{cases}$$

matrisiyle yapılan dönüşümünden ibarettir.

$$(t_n)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}s_k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}s_k=:A_n(s)$$

Bu da s $=(s_n)$ dizisinin aritmetik ortalamasıdır. E. *Cesáro*' nun tanımladığı dönüşümün aslında;

(s_n) dizisinin $C^1=\left(c_{nk}^1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & ,k\le n\\[2ex] 0 & ,k>n\end{cases}$

matrisiyle yapılan dönüşüm olduğu görülmektedir. Benzer şekilde diğer tanımlanan metotlar da birer matris dönüşümleridir.

C_m - metodu; ($m\in \mathbb{N}^{+}$) (s_n) dizisinin,

$$C^m=\left(c_{nk}^m\right)=\begin{cases}\dfrac{\binom{n-k+m}{m}}{\binom{n+m}{n}} & ,k\le n\\[4ex] 0 & ,k>n\end{cases}$$

matrisiyle yapılan dönüşümünden ibarettir.

C_α - metodu; ($\alpha>-1,\ \alpha\in\mathbb{R}$) ise (s_n) dizisinin,

$$C^{\alpha}=\left(c_{nk}^{\alpha}\right)=\begin{cases}\dfrac{\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}}{\binom{n+\alpha}{n}} & ,k\le n\\ 0 & ,k>n\end{cases}$$

matrisiyle yapılan dönüşümünden ibarettir.

Nörlund metodu ise, (s_n) dizisinin

$$\left(N_p\right)_{nk}=\begin{cases}\dfrac{p_{n-k}}{\mathrm{P}_n} & ,k\le n\\ 0 & ,k>n\end{cases}$$

matrisiyle yapılan dönüşümünden ibarettir. Burada $\mathrm{P}_n=p_0+p_1+\cdots p_n$, $p_0>0$ ve $p_n\ge 0$ $(n=1,2,...)$ dır.

Nörlund tipi metot ise,

$$\left(\bar{N}_p\right)_{nk}=\begin{cases}\dfrac{p_k}{\mathrm{P}_n} & ,k\le n\\ 0 & ,k>n\end{cases}$$

matrisiyle yapılan dönüşümünden ibarettir.

Burada $\mathrm{P}_n=p_0+p_1+\cdots p_n\to\infty$ $(n\to\infty)$, $p_0>0$ $p_n\ge 0$ $(n=1,2,...)$ dır.

Böylece $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisini değişik seçerek verilen diziyi daha değişik dizilere dönüştürebiliriz. Sonuç olarak toplanabilme aslında bir matris dönüşümüdür.

Bir $s=(s_n)$ dizisi verildiğinde $A=(a_{nk})$ matrisiyle yapılan dönüşüm dizisinin yakınsak olması için $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi üzerine konulacak gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır.

2.2.DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

$A=(a_{nk})$ n,k = 1,2,3, ... reel yada kompleks terimli sonsuz matris olsun.

s, reel yada kompleks terimli bütün dizilerin uzayını göstermek üzere;

$(s_k) \in s$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k$ yakınsak olduğunu kabul edelim.

$$As = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{13}s_3 + \cdots \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{23}s_3 + \cdots \\ .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \\ a_{n1}s_1 + a_{n2}s_2 + \cdots + a_{n3}s_3 + \cdots \\ .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} s_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} s_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Böylece $As = \left((As)_n\right) = \left(A_n(s)\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k\right)$ dizisi elde edilir.

$\left(A_n(s)\right)$ dizisine $s = (s_k)$ dizisinin A matrisiyle yapılan ‘dönüşüm dizisi’ denir.

X ve Y, s uzayının iki alt kümesi olsun. $\forall s = (s_k) \in X$ için (As) dönüşüm dizisi mevcut ve $As \in Y$ ise A matrisine ‘X den Y içine bir matris dönüşümü’ denir. X dizi uzayını Y dizi uzayına dönüştüren bütün matrislerin sınıfı (X,Y) ile gösterilir. A, X den Y içine bir matris dönüşümü ise bu $A \in (X, Y)$ ile gösterilir.

A sonsuz matrisi bir dönüşüm olarak,

(i) $A(s+t) = A(s) + A(t)$

(ii) $A(\lambda s) = \lambda A(s) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C})$

koşullarını sağladığından bir lineer dönüşümdür.

$(s_n) \in s$ ve $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin. Her bir $n \in ¥$ için $A_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k$ yakınsak olsun. $\lim_n A_n(s) = l$ ise (s_n) dizisine l değerine A-limitlenebilirdir denir ve $s_n \to l(A) \quad (n \to \infty)$ veya $A - \lim_n s_n = l$ şeklinde gösterilir.

s uzayının iki alt kümesi X ve Y olmak üzere;

$\forall s = (s_k) \in X$ verildiğinde $(A_n(s))$ dönüşüm dizisi mevcut iken $(A_n(s)) \in Y$ olması için $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi üzerine konulacak gerek ve yeter şartlara bakalım.

Teorem 2.2.1.[9] $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i) Her sabit k için $\lim_n a_{nk} = 0$

(ii) M:= $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$

Bu durumda;

$A : c_0 \to c_0$ sınırlı lineer bir dönüşümdür.

$$\|A\| = M = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \text{ olur.}$$

Teorem 2.2.2. [9] $A : c_0 \to c_0$ sınırlı lineer bir dönüşüm olsun.

Bu takdirde;

A, bir (a_{nk}) matrisi belirler ve

(i) $\lim_n a_{nk} = 0$ her sabit k için

(ii) $\|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

koşullarını sağlar.

Yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren ve limiti de koruyan matrislere "regüler matris" veya "Toeplitz-matrisi" veya "T-matrisi" denir. Bu matrislerin sınıfı (c,c;P) ile gösterilir. Regüler matrisler ile ilgili Silverman Toeplitz Teoremini verelim.

Teorem 2.2.3 (Silverman Teoplitz Teoremi):[9]

$$A \in (c,c;P) \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \|A\| = \sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad (Satır - norm\, koşulu)(RN) \\ ii)\ Her\, sabit\, k\, için\ \lim\limits_n a_{nk} = 0 \qquad\qquad ((c_0)\, koşulu) \\ iii) \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 \qquad (Satır - toplam\, koşulu)(RS_1) \end{cases}$$

$A \in (c,c;P)$ ise A matrisine 'Regüler matris' veya 'Toeplitz – matrisi' veya 'T-marisi' denir.

Teorem2.2.4 (Kojima- Schur Teoremi):[9]

$$A \in (c,c) \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \\ ii)\ Her\, bir\ p\ için,\ \lim\limits_n \sum\limits_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p\ \ mevcut \end{cases}$$

$A \in (c,c)$ ise A matrisine yakınsaklığı koruyan matris denir. Yani yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştürür.

Teorem 2.2.5(Schur Teoremi):[9]

$$A \in (l_\infty, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \ \text{ n ye göre düzgün yakınsak} \\ \text{ii) } \lim\limits_n a_{nk} = a_k \quad \text{var (sabit her} k \in ¥ \text{ için)} \end{cases}$$

$A \in (l_\infty, c)$ ise A matrisi sınırlı dizileri yakınsak dizilere dönüştürür.

Tanım 2.6 (Yakınsaklığa Denk Metot):[21] $A = (a_{nk})$ herhangi bir limitleme metodu olsun.

$$s_n \to l \ (n \to \infty) \Leftrightarrow t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \to l \quad (n \to \infty)$$

ise 'A metodu yakınsaklığa denktir' denir.

Bir $s=(s_n)$ dizisi verilsin. Eğer,

$\lim\limits_{x\to n} s_n = s$ ise, bu dizinin aritmetik ortalaması;

$\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} s_k$ olup, Cauchy Prensibinden $\lim\limits_{n} \sigma_n = s$ olacaktır.

Bu durumda $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için,

$$\alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n \to \alpha s + (1-\alpha)s = s \ \ (n\to\infty) \text{ olur.}$$

J.Mercer 1906 yılında $\alpha > 0$ sayısı için

$$\alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n \to s \ \ (n\to\infty)$$

iken $s_n \to s \ \ (n\to\infty)$ olduğunu göstermiştir.

(1.1) de tanımlanan $A=(a_{nk})$ matrisini düşünelim. Bir $s=(s_n)$ dizisinin bu matris ile yapılan A- dönüşümünü;

$$A_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k = \alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n \text{ olacaktır.}$$

Burada $A=(a_{nk})$ matrisi regüler olduğundan;

$$s_n \to s \ \ (n\to\infty) \text{ iken } A_n(s) \to s \ \ (n\to\infty) \text{ dur.}$$

Böylece, J.Mercer'in üzerinde çalıştığı $\alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n$ ifadesi; $s=(s_n)$ dizisinin $A=(a_{nk})$ matrisi ile yapılan dönüşüm olduğu görülmektedir.

J.Mercer, $\alpha > 0$ için $A_n(s) = \alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n \to s \ \ (n\to\infty)$ iken $s_n \to s \ \ (n\to\infty)$ olduğunu göstererek; A- metodunun yakınsaklığa denk olduğunu göstermiştir.

Bu nedenle bir metodun yakınsaklığa denk olduğunu ifade eden her teoreme "Mercerian Teorem" adı verilir.

Teorem 2.2.6 (Mercer Teoremi):[6] $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için,

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{n+1} & ,k<n \\ \dfrac{n\alpha+1}{n+1} & ,k=n \\ 0 & ,k>n \end{cases} \qquad \text{olmak üzere;}$$

$(s_n)\in s$ dizisinin $A=(a_{nk})$ matris ile yapılan dönüşümü;

$$A_n(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}s_k=\alpha s_n+\frac{1-\alpha}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k \text{ dir.}$$

$\alpha>0$ olmak üzere;

$$\lim_n A_n(s)=\lim_n\left(\alpha s_n+\frac{1-\alpha}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k\right)=s$$

ise $\lim_n s_n=s$ dir.

İspat: Verilen bir (s_n) dizisi için $\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k$ $(n\in ¥)$ ve $\alpha>0$ olmak üzere;

$$t_n=\alpha s_n+(1-\alpha)\sigma_n \quad (n\in ¥) \qquad (2.2.1)$$

$\sigma_{-1}=0$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde;

$$s_n=(n+1)\sigma_n-n\sigma_{n-1} \quad (n\in ¥)$$

(s_n) nin bu değeri (2.2.1) de yerine yazılırsa,

$$t_n=(\alpha n+1)\sigma_n-\alpha n\sigma_{n-1} \quad (n\in ¥) \qquad (2.2.2)$$

elde edilir. Şimdi $q_0,q_1,q_2,...$ sayılarını tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
&q_0=1\\
&q_0-\alpha q_1=0\\
&(\alpha+1)q_1-2\alpha q_2=0\\
&(2\alpha+1)q_2-3\alpha q_3=0 \qquad (2.2.3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[(n-2)\alpha+1]q_{n-2}-(n-1)\alpha q_{n-1}=0\\
&[(n-1)\alpha+1]q_{n-1}-n\alpha q_n=0
\end{aligned}$$

olacak şekilde seçelim.

$$
\begin{aligned}
&q_0 = 1\\
&q_1 = \frac{1}{\alpha} q_0 = \frac{1}{\alpha}\\
&q_2 = \frac{\alpha+1}{2\alpha} q_1 = \frac{\alpha+1}{2\alpha}\frac{1}{\alpha}\\
&q_3 = \frac{2\alpha+1}{3\alpha} q_2 = \frac{2\alpha+1}{3\alpha}\frac{\alpha+1}{2\alpha}\frac{1}{\alpha}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&q_n = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha+1}{2\alpha}\frac{2\alpha+1}{3\alpha}\cdots\frac{(n-1)\alpha+1}{n\alpha} \qquad n\in\mathbb{N}^*\\
&q_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(2+\frac{1}{\alpha}\right)\cdots\cdots\left[(n-1)+\frac{1}{\alpha}\right]
\end{aligned}
\tag{2.2.4}
$$

$\beta = \dfrac{1}{\alpha}$ alınırsa;

$$q_n = \frac{1}{n!}(\beta+n-1).(\beta+n-2).....(\beta+2).(\beta+1).\beta \qquad (\beta>0,\ n\in\mathbb{N})$$

$$q_n = \frac{\Gamma(\beta+n)}{n!\,\Gamma(\beta)} \quad \text{olur.}$$

$$\frac{\Gamma(\beta+n)}{n!} \sim n^{\beta-1} \quad \text{olduğundan;}$$

$$q_n \sim \frac{n^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \quad \text{dir.}$$

Ayrıca (2.2.3) eşitlikler düzenlenip taraf tarafa toplanırsa;

$$Q_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n = (\alpha n+1)\,q_n \sim \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \quad (n\to\infty) \tag{2.2.5}$$

ifadesi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&q_0 - \alpha q_1 = 0\\
&\alpha q_1 + q_1 - 2\alpha q_2 = 0\\
&2\alpha q_2 + q_2 - 3\alpha q_3 = 0\\
&3\alpha q_3 + q_3 - 4\alpha q_4 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n-2)\alpha q_{n-2} + q_{n-2} - (n-1)\alpha q_{n-1} = 0\\
&(n-1)\alpha q_{n-1} + q_{n-1} - n\alpha q_n = 0
\end{aligned}
$$

şeklinde düzenlenip taraf tarafa toplanırsa;

$$q_0 + q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} - n\alpha q_n = 0$$ elde edilir. Buradan

$$q_0 + q_1 + \cdots q_n = (n\alpha + 1) q_n$$ dir.

(2.2.5) ile

$$(\alpha n + 1) q_n \sim \left(\frac{1}{\beta} n + 1\right) \frac{n^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{\beta} n^{\beta} + n^{\beta-1}\right)$$

$$= \frac{n^{\beta}}{\beta\Gamma(\beta)} \left(1 + \frac{\beta}{n}\right) \qquad (n \to \infty)$$

$$\Rightarrow (\alpha n + 1) q_n \sim \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta + 1)}$$

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k = (\alpha n + 1) q_n \sim \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta + 1)} \quad (n \to \infty)$$ elde edilir.

Şimdi (2.2.2) ve (2.2.4) yardımıyla $q_0 t_0, \cdots, q_n t_n$ teşkil edilip eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$\sigma_n = \frac{q_0 t_0 + \cdots + q_n t_n}{(\alpha n + 1) q_n}$$ olduğunu görelim:

$$q_0 t_0 = t_0 = \sigma_0$$

$$q_1 t_1 = \frac{1}{\alpha} \left[(\alpha + 1) \sigma_1 - \alpha \sigma_0 \right]$$

$$q_2 t_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha} \right) \left[(2\alpha + 1) \sigma_2 - 2\alpha \sigma_1 \right]$$

$$q_3 t_3 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha} \right) \left(\frac{2\alpha + 1}{3\alpha} \right) \left[(3\alpha + 1) \sigma_3 - 3\alpha \sigma_2 \right]$$

....

$$q_n t_n = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha} \right) \left(\frac{2\alpha + 1}{3\alpha} \right) \left(\frac{3\alpha + 1}{4\alpha} \right) \cdots\cdots \frac{(n-1)\alpha + 1}{n\alpha} \left[(n\alpha + 1) \sigma_n - n\alpha \sigma_{n-1} \right]$$

sistemi yeniden düzenlenirse;

$$q_0t_0=\sigma_0$$
$$q_1t_1=\frac{\alpha+1}{\alpha}\sigma_1-\sigma_0$$
$$q_2t_2=\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)\sigma_2-\frac{\alpha+1}{\alpha}\sigma_1$$
$$q_3t_3=\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)\left(\frac{3\alpha+1}{3\alpha}\right)\sigma_3-\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)\sigma_2$$
....
$$q_nt_n=\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)\alpha+1}{(n-1)\alpha}\right)\left(\frac{n\alpha+1}{n\alpha}\right)\sigma_n-\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)\alpha+1}{(n-1)\alpha}\right)\sigma_{n-1}$$

sistemi elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$q_0t_0+q_1t_1+\cdots+q_nt_n=\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)\ldots\ldots\left(\frac{n\alpha+1}{n\alpha}\right)\sigma_n$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}\right)\left(\frac{2\alpha+1}{3\alpha}\right)\ldots\ldots\left(\frac{(n-1)\alpha+1}{n\alpha}\right)(n\alpha+1)\sigma_n$$
$$=q_n(n\alpha+1)\sigma_n \text{ elde edilir.}$$

Buradan

$$\sigma_n=\frac{q_0t_0+\cdots+q_nt_n}{(\alpha n+1)q_n}$$

eşitliği elde edilir.

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n}q_k=(\alpha n+1)q_n \quad \text{ifadesi } \sigma_n \text{ de yerine yazılırsa;}$$

$$\sigma_n=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n}q_kt_k \quad \text{şeklini alır.}$$

(q_n) pozitif bir reel sayı dizisi, $q_0>0$, $Q_n=q_0+\cdots+q_n$, $Q_n \sim \dfrac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$ $(n\to\infty)$

olduğundan $Q_n\to\infty$ $\quad (n\to\infty)$ Şimdi

$$a_{nk}=\left(\overline{N}_q\right)_{nk}=\begin{cases}\dfrac{q_k}{Q_n} & ,k\le n\\ 0 & ,k>n\end{cases} \qquad \text{olmak üzere,}$$

$A=(a_{nk})\in(c,c;P)$ olduğunu gösterelim.

i) $\sup_{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{nk}\right| = \sup_{n}\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n}q_k\right) = \sup_{n}1 = 1 < \infty$

ii) $a_{nk} = \frac{q_k}{Q_n} : \frac{k^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} : \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{\beta.k^{\beta-1}}{n^{\beta}}$ olduğundan

$\lim_{n} a_{nk} = 0$ (k sabit) $(n \to \infty)$ olur.

iii) $\lim_{n}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk} = \lim_{n}\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{\infty}q_k\right) = \lim_{n}1 = 1$

$A = (a_{nk}) \in (c,c;P)$ dir. Yani $A = (a_{nk})$ regülerdir. Dolayısıyla $t_n \to s\ (n \to \infty)$ olduğundan $\sigma_n \to s\ (\bar{N}_q)\ (n \to \infty)$ dur. Yani

$\sigma_n = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n}q_k t_k \to s\ (n \to \infty)$ olur. Böylece

$t_n = \alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n$ ifadesinden s_n çekilip $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\lim_{n} s_n = \lim_{n}\frac{t_n - (1-\alpha)\sigma_n}{\alpha} = \frac{s-(1-\alpha)s}{\alpha} = s \text{ elde edilir.}$$

Mercer teoreminin ifadesine geri dönersek,

$\alpha > 0$ için,

$$\alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n \to s \Rightarrow s_n \to s\ (n \to \infty) \text{ dır.}$$

Burada $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k$ dir.

$$s_n + \frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma_n \to \frac{s}{\alpha} \qquad (n \to \infty)$$

$q > -1$ için,

$\alpha' = \frac{1}{1+q}$, $\alpha' > 0$ olduğundan;

$s_n + \frac{1-\alpha'}{\alpha'}\sigma_n \to \frac{s}{\alpha'}$ $(n \to \infty)$ olur.

$\frac{1-\alpha'}{\alpha'} = q$ ve $\frac{1}{\alpha'} = (1+q)$ olacağından;

$q > -1$ için,

$$s_n + q\sigma_n \to (1+q)s \qquad (n \to \infty) \text{ olacaktır.}$$

O halde

"$\alpha > 0$ için $\alpha s_n + (1-\alpha)\sigma_n \to s \;\Rightarrow\; s_n \to s \quad (n \to \infty)$" ifadesi ile

"$q > -1$ için $s_n + q\sigma_n \to (1+q)s \Rightarrow\; s_n \to s \quad (n \to \infty)$" ifadesi denktir.

Daha sonra bir çok matematikçi bu konu ile ilgilenmişlerdir. Buradaki σ_n aritmetik ortalamasının yerine bazı toplanabilme metotları kullanılmıştır.

E.R.Love ve R.T.Leslie'nin 1951 yılında yayımlanan makalede[10] σ_n aritmetik ortalamasının herhangi bir regüler metotla ve hatta yakınsaklığı koruyan metotla yer değiştirebileceğini göstermişlerdir. Regüler veya yakınsaklığı koruyan matrisleri kullanarak q üzerinde kısıtlamalara gitmişlerdir. Ayrıca (s_n) dizisi için sınırlılık şartı koymuşlardır.

R.P.Agnew ise Toeplitz ortalamalarına başvurarak, aynı tipte üç teorem vermiştir. R.T.Leslie ve E.R.Love bunlardan ikisinin sınırlılık hipotezlerinden ayrı olarak, regüler matrisleri kullanarak verdikleri teoremin özel bir durumunu teşkil ettiğini göstermişlerdir. R.P.Agnew'in verdiği 3.teorem biraz daha genel olup R.T.Leslie ve E.R.Love'un verdiği Sonuç 3.1.2'de içerilir.

R.P.Agnew'in 1952 yılında yayınlanan makalesinde, q üzerindeki kısıtlama E.R.Love'un verdiği teoremdeki q üzerindeki kısıtlamadan daha hafiftir.

G.H.Hardy ise Mercer'in Orijinal teoremini σ_n aritmetik ortalaması ve q>-1 koşuluyla göstermiştir. R.T.Lesli ve E.R.Love ise $|q| < 1$ için göstermiştir.

W.W.Rogosinski, Mercer Teoremini Euler Ortalamasını kullanarak $|q| < 1$ dairesi için vermiştir.

J.Karamata, Mercer Teoreminin birçok genellemesini vermiştir. Ancak q>-1 için verdiğinden R.T.Leslie ve E.R.Love'unkini içermez.

K.Klee ve P.Szüsz'ün 1973 yılında yayınlanan makalede Nörlund Tipi Metot için Mercerian özellikleri araştırmışlardır.

3.METERYAL VE METOTLAR

3.1.MERCERIAN TEOREMLER

Mercer toplanabilme teoremi birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bu kişiler teoremi değişik şekillerde genişletmiş ve genelleştirmişlerdir.

Mercer Teoremi; s_n reel, $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$ ve q>-1 olmak üzere;

$$s_n + q\sigma_n \to (1+q)s \quad (n \to \infty) \text{ ise}$$

$$s_n \to s \ (n \to \infty) \text{ dir.}$$

Bilinen genelleştirmelerin bazılarında $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$ aritmetik ortalamasının yerine bazı toplanabilme metotlarını kullanmışlardır.

Bunlardan R.T.Leslie ve E.R.Love σ_n aritmetik ortalamasının herhangi bir regüler metotla ve hatta herhangi bir yakınsaklığı koruyan metotla yer değiştirebileceğini göstermişlerdir. Bunu yaparken de q üzerinde bazı kısıtlamalara gitmişlerdir.

R.P.Agnew ise Toeplitz ortalamalarına başvurarak aynı tipte üç teorem vermiştir. Agnew bu teoremlerinde (s_n) dizisinin sınırlılık hipotezinin özel durumlarda gerekli olmadığını gösterir. R.T.Leslie ve E.R.Love ise Agnew'in verdiği Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3 ün verdikleri Sonuç 3.1.3 ten elde edilebileceğini gösterdi. R.P.Agnew'in verdiği Teorem 3.1.4 biraz daha genel olup R.T.Leslie ve E.R.Love'un verdiği Sonuç 3.1.1 de içerilir.

Şimdi öncelikle R.T.Leslie ve E.R.Love'un verdiği teoremleri ve sonuçları inceleyelim.

Teorem 3.1.1:[10]

(c_{nk}) yakınsaklığı koruyan bir matris olsun.

$$\lim_n c_{nk} = c_k \quad (\forall k \in \text{¥}) \quad \text{için} \tag{3.1.1}$$

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} = c \;, \quad \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| = C \tag{3.1.2}$$

limitleri var ve sonludur.

(s_n) sınırlı bir dizi ve $q \in \text{£}$ olsun.

$$s_n + q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \quad \text{yakınsak} \quad (n \to \infty) \tag{3.1.3}$$

ve

$$|q| < \left| c - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \right| \Big/ \left(C - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \right)^2 \tag{3.1.4}$$

ise $s_n \to s \quad (n \to \infty)$ dir.

Teorem 3.1.1 in ispatını vermeden önce bu ispatta kullanacağımız aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 3.1.1:[10]

(c_{nk}) matrisi, (3.1.1) ve (3.1.2) koşullarını gerçeklesin. (s_n) sınırlı bir dizi,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \neq c \tag{3.1.5}$$

$s = (s_n)$ dizisinin, $C = (c_{nk})$ matrisiyle yapılan dönüşümü;

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \quad \text{olur.} \tag{3.1.6}$$

$$\limsup_n |\sigma_m - \sigma_n| \le K \limsup_n |s_m - s_n| \quad (\min(m,n) \to \infty) \text{ dır} \tag{3.1.7}$$

$$K = \left(C - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \right)^2 \Big/ \left| c - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \right| \quad \text{dır.} \tag{3.1.8}$$

İspat:

(3.1.2), $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}$ serisinin $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için mutlak yakınsak olduğunu garanti eder.

Bu da, (s_n) sınırlı olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için (3.1.6) un varlığını yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için yakınsak olduğunu gösterir. Böylece,

$\forall p > 1$, $m, n > n_0$ tam sayıları için

$$\sigma_m - \sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{mk} - c_{nk}).s_k$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} (c_{mk} - c_{nk}) s_k + \sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} s_\mu - \sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} s_\upsilon$$

Burada her iki tarafı $\left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right)$ ile çarpalım.

$$\left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right) (\sigma_m - \sigma_n) = \left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right) \sum_{k=1}^{p-1} (c_{mk} - c_{nk}).s_k + \left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right) \sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} s_\mu$$

$$- \left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right) \sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} s_\upsilon$$

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafına $\sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} \sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} s_\mu$ ve $\sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} \sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} s_\upsilon$ ekleyip çıkaralım.

$$= \left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right) \sum_{k=1}^{p-1} (c_{mk} - c_{nk}).s_k$$

$$+ \left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right) \sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} s_\mu - \left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right) \sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} s_\upsilon -$$

$$- \sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} \sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} s_\mu + \sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} \sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} s_\mu$$

$$- \sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} \sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} s_\upsilon + \sum_{\mu=p}^{\infty} c_{m\mu} \sum_{\upsilon=p}^{\infty} c_{n\upsilon} s_\upsilon$$

$$= \left(c - \sum_{h=1}^{p-1} c_h \right) \sum_{k=1}^{p-1} (c_{mk} - c_{nk}).s_k$$

$$+\left(c-\sum_{\upsilon=1}^{p-1}c_{\upsilon}-\sum_{\upsilon=p}^{\infty}c_{n\upsilon}\right)\sum_{\mu=p}^{\infty}c_{m\mu}s_{\mu}$$

$$-\left(c-\sum_{\mu=1}^{p-1}c_{\mu}-\sum_{\mu=p}^{\infty}c_{m\mu}\right)\sum_{\upsilon=p}^{\infty}c_{n\upsilon}s_{\upsilon}$$

$$+\sum_{\upsilon=p}^{\infty}c_{n\upsilon}\sum_{\mu=p}^{\infty}c_{m\mu}s_{\mu}-\sum_{\mu=p}^{\infty}c_{m\mu}\sum_{\upsilon=p}^{\infty}c_{n\upsilon}s_{\upsilon}$$

Son iki terimdeki seriler mutlak yakınsak olduğundan, $\sum_{\mu=p}^{\infty}\sum_{\upsilon=p}^{\infty}c_{m\mu}c_{n\upsilon}\left(s_{\mu}-s_{\upsilon}\right)$ dir.

Ayrıca, $\forall\varepsilon>0$ sayısı için, $\exists p_{\varepsilon}\in$ ¥ $\ni$ $\min\left(\mu,\upsilon\right)>p_{\varepsilon}$ için,

$$\left|s_{\mu}-s_{\upsilon}\right|<\limsup_{n}\left|s_{m}-s_{n}\right|+\varepsilon\qquad\left(\min\left(m,n\right)\to\infty\right)$$

$w:=\limsup_{n}\left|s_{m}-s_{n}\right|\qquad\left(\min\left(m,n\right)\to\infty\right)$ olsun.

$\left(s_{n}\right)$ sınırlı olduğundan w sonludur.

$p>p_{\varepsilon}$ seçelim ve M, $\left|s_{n}\right|$ nin bir üst sınırı olsun. Böylece;

$$\left|c-\sum_{h=1}^{\infty}c_{h}\right|\left|\sigma_{m}-\sigma_{n}\right|\leq\left|c-\sum_{h=1}^{p-1}c_{h}\right|\mathrm{M}\sum_{k=1}^{p-1}\left|c_{mk}-c_{nk}\right|$$

$$+\left(\left|c-\sum_{\upsilon=1}^{\infty}c_{n\upsilon}\right|+\left|\sum_{\upsilon=1}^{p-1}\left(c_{n\upsilon}-c_{\upsilon}\right)\right|\right)\mathrm{M}\sum_{\mu=p}^{\infty}\left|c_{m\mu}\right|$$

$$+\left(\left|c-\sum_{\mu=1}^{\infty}c_{m\mu}\right|+\left|\sum_{\mu=1}^{p-1}\left(c_{m\mu}-c_{\mu}\right)\right|\right)\mathrm{M}\sum_{\upsilon=p}^{\infty}\left|c_{n\upsilon}\right|$$

$$+\sum_{\mu=p}^{\infty}\sum_{\upsilon=p}^{\infty}\left|c_{m\mu}\right|\left|c_{n\upsilon}\right|\left(w+\varepsilon\right)$$

Burada p sabit tutulup $\min\left(m,n\right)\to\infty$ için limsup alınırsa ilk üç terim (3.1.1) ve (3.1.2) den sıfıra gider.

$$\left|c-\sum_{h=1}^{p-1}c_{h}\right|\limsup_{\min\left(m,n\right)\to\infty}\left|\sigma_{m}-\sigma_{n}\right|\leq\left(w+\varepsilon\right)\limsup_{\min\left(m,n\right)\to\infty}\left(\sum_{\mu=p}^{\infty}\left|c_{m\mu}\right|\sum_{\upsilon=p}^{\infty}\left|c_{n\upsilon}\right|\right)$$

$$\leq\left(w+\varepsilon\right)\limsup_{m\to\infty}\sum_{\mu=p}^{\infty}\left|c_{m\mu}\right|\limsup_{n\to\infty}\sum_{\upsilon=p}^{\infty}\left|c_{n\upsilon}\right|$$

(3.1.2) den $\quad \leq (w+\varepsilon)\left(C-\sum_{\mu=1}^{p-1}|c_\mu|\right)\left(C-\sum_{\upsilon=1}^{p-1}|c_\upsilon|\right)$ elde edilir.

$\forall p > p_\varepsilon$ için sağlandığından $\quad p \to \infty$ için,

$$\left|c-\sum_{h=1}^{\infty} c_h\right| \limsup |\sigma_m - \sigma_n| \leq (w+\varepsilon)\left(C-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\right)^2$$

(3.1.5) ve (3.1.8) den

$$\limsup |\sigma_m - \sigma_n| \leq \mathrm{K}(w+\varepsilon)$$

ε keyfi olduğundan;

$$\limsup |\sigma_m - \sigma_n| \leq \mathrm{K}\, w$$

Şimdi teorem 3.1.1 in ispatını verelim:

İspatı:[10]

I. $C-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| \neq 0$ olsun.

$r_n = s_n + q\sigma_n$ olarak tanımlayalım.

$$r_m - r_n = (s_m - s_n) + q(\sigma_m - \sigma_n)$$

$$|q(\sigma_m - \sigma_n)| = |(r_m - r_n) - (s_m - s_n)|$$

$$|s_m - s_n| - |r_m - r_n| \leq |q(\sigma_m - \sigma_n)| \leq |s_m - s_n| + |r_m - r_n|$$

eşitsizliği elde edilir. $\min(m,n) \to \infty$ için limsup alınırsa, (r_n) hipotezden yakınsak olduğundan;

$$\limsup |r_m - r_n| = 0 \quad (\min(m,n) \to \infty)$$

$$\limsup |s_m - s_n| = |q| \limsup |\sigma_m - \sigma_n| \quad (\min(m,n) \to \infty)$$

$$\leq |q| K \limsup |s_m - s_n| \quad \text{(lemma 3.1.1 den)}$$

$(1-|q|K)\limsup|s_m - s_n| \leq 0$ ve (3.1.4) den $|q| < \dfrac{1}{K}$ olduğundan,

$\lim\sup|s_m - s_n| = 0 \Rightarrow s_n$ yakınsaktır.

II. $C - \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| = 0$ olsun.

Bu durumda lemma 3.1.1 gereksizdir. (3.1.1) ve (3.1.2) ile,

$$C = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\lim_n c_{nk}\right| \leq \liminf_n \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| \leq \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| = C \tag{3.1.9}$$

olduğundan;

$$\liminf_n \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| = C = \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| \Rightarrow \lim_n \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| = C = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$$

(3.1.1) ile birlikte $(c_{nk}) \in (l_\infty, c)$ Schur matrisidir.

Buradan (σ_n) dizisi yakınsak olacaktır. Ayrıca (r_n) dizisi hipotezden yakınsaktır.

$r_n = s_n + q\sigma_n$ ifadesinde (σ_n) ve (r_n) dizileri yakınsak olduğundan;

(s_n) dizisi yakınsak olmak zorundadır.

Şimdi bu teoremden elde edilebilecek sonuçları görelim:

Bu teoremde özel olarak $c_k = 0$ ve $c = 1$ alalım.

$\lim_n c_{nk} = 0$ ve $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} = 1$ olacaktır. Bu durumda (3.1.2) ile birlikte $C = (c_{nk}) \in (c, c; P)$ olur. Ayrıca,

$\lim_n c_{nk} = c_k = 0$ ve $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} = c = 1$ (3.1.3) de yerine yazılırsa;

$\left|c - \sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| \Big/ \left(C - \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\right)^2 = |1-0|/(C-0)^2 = 1/C^2$ olacaktır. Bu durumda şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.1:[10]

(c_{nk}) regüler bir matris, (s_n) sınırlı bir dizi ve $q \in £$ olsun.

$$s_n + q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}s_k \to (1+q)s \quad (n \to \infty) \tag{3.1.10}$$

ve
$$|q| < 1/C^2 = 1\Big/\left(\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|\right)^2 \tag{3.1.11}$$

ise
$$s_n \to s \quad (n \to \infty)$$

Sonuç 3.1.1 de $\forall k,n\in$ ¥ için $c_{nk}\geq 0$ kabul edersek;

$$\limsup_{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{nk}\right|=\limsup_{n}\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}=1$$

olduğundan şu sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.2:[10]

$\left(c_{nk}\right)$ pozitif, regüler bir matris, $\left(s_{n}\right)$ sınırlı bir dizi ve $q\in$ £ olsun.

Bu takdirde;

$$s_{n}+q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_{k}\rightarrow\left(1+q\right)s\quad\left(n\rightarrow\infty\right)\ \text{ ve}$$

$\left|q\right|<1$ ise

$$s_{n}\rightarrow s\quad\left(n\rightarrow\infty\right)\ \text{ olacaktır.}$$

R.T.Leslie ve E.R.Love'un yukarıda verdiği teorem ve sonuçlarda; toplanabilme metotları üzerindeki kısıtlamalar azaltıldığında, q üzerindeki sınırlamalar artmaktadır.

Şimdi Sonuç 3.1.2 nin özel bir durumu olarak aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 3.1.3:[10]

$\left(c_{nk}\right)$ pozitif, regüler, üçgensel bir matris ve $\left(s_{n}\right)$ verilen bir dizi olsun.

$-1<q<1$ olmak üzere,

$$s_{n}+q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_{k}\rightarrow\left(1+q\right)s\quad\left(n\rightarrow\infty\right)\tag{3.1.12}$$

ise

$$s_{n}\rightarrow s\quad\left(n\rightarrow\infty\right)$$

Burada $\left(s_{n}\right)$ dizisinin sınırlı varsayılmaması hariç, q sayısı reel ve $\left(c_{nk}\right)$ matrisi üçgenseldir. Oysa Sonuç 3.1.2 için $\left(s_{n}\right)$ nin sınırlılığı gereklidir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

Örnek 3.1.1:[10]

$\left(c_{nk}\right)$ matrisi ve $\left(s_{n}\right)$ dizisi,

$$c_{nk}=\begin{cases}1 & ,k=n+1\\ 0 & ,k\neq n+1\end{cases}\qquad\left(s_{n}\right)=\left(\left(-\frac{1}{q}\right)^{n}\right)\qquad\left(-1<q<1\right)$$

şeklinde tanımlansın.

i) (c_{nk}) regüler

ii) $\forall k,n\in$ ¥ için $c_{nk}\geq 0$ dır.

iii) $s_n+q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k=s_n+qs_{n+1}=\left(-\frac{1}{q}\right)^n+q\left(-\frac{1}{q}\right)^{n+1}=0\to 0\ \ (n\to\infty)$

O halde Sonuç 3.1.1'den $s_n\to 0\ \ (n\to\infty)$ olması beklenir. Fakat $s_n=\left(-\frac{1}{q}\right)^n$ ile tanımlı (s_n) dizisi ıraksaktır. $s_n\to 0\ \ (n\to\infty)$ olması ile çelişir.

Şimdi Sonuç 3.1.1 i Teorem 3.1.1 in bir sonucu olarak ispatlayalım:

(c_{nk}) regüler bir matris, (s_n) sınırlı bir dizi ve $q\in$ £ olmak üzere (3.1.10) ve (3.1.11) sağlansın. Bu takdirde,

$s_n\to s\ (n\to\infty)$ olduğunu gösterelim:

i) (c_{nk}) regüler olduğundan yakınsaklığı korur ve

$$c_k=\lim_n c_{nk}=0$$

$$c=\lim_n\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}=1$$

$$C=\limsup_n\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{nk}\right|<\infty \text{ dir.}$$

ii) s_n sınırlı ve $s_n+q.\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k$ yakınsak $(n\to\infty)$

iii) (c_{nk}) nın regülerliğinden;

$$|q|<\frac{1}{C^2}=\frac{\left|c-\sum_{k=1}^{\infty}c_k\right|}{\left(C-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\right)^2} \text{ olur.}$$

i), ii), iii) ve Teorem 3.1.1 den (s_n) dizisi yakınsaktır.

$s_n\to s\ \ (n\to\infty)$ olsun. (c_{nk}) regüler olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k\to l\ (n\to\infty)$

$$s_n + q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \to l + ql = (1+q)l$$

Komleks uzaylarda limitin tekliğinden ve (3.1.10) dan

$$(1+q)l = (1+q)s \Rightarrow l = s$$

$$s_n \to s \quad (n \to \infty)$$

Eğer, sadece Sonuç 3.1.1 ispatlanmış olsaydı, Teorem 3.1.1 onun bir sonucu olarak elde edilebilirdi. Ancak Teorem 3.1.1 de ki genellemelerin bir kısmı kaybolacaktır. Şimdi bu durumu araştıralım:

(3.1.4) hariç teoremin hipotezleri altında;

(3.1.9) den $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mutlak yakınsaktır.

$$c^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \qquad d_{nk} = \frac{c_{nk} - c_k}{c - c^*} \tag{3.1.13}$$

$c \neq c^*$ kabul edelim.

Bu şekilde tanımlanan d_{nk} matrisi;

i) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |d_{nk}| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_{nk} - c_k}{c - c^*} \right| \leq \frac{1}{|c - c^*|} \left(\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \right) < \infty$

ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{nk} - c_k}{c - c^*} = \frac{1}{c - c^*} \lim_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \right) = \frac{1}{c - c^*} (c - c^*) = 1$

iii) $\lim_n d_{nk} = \lim_n \frac{c_{nk} - c_k}{c - c^*} = \frac{1}{c - c^*} \left(\lim_n c_{nk} - c_k \right) = \frac{c_k - c_k}{c - c^*} = 0$

olduğundan regülerdir.

Ayrıca (s_n) sınırlı ve $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mutlak yakınsak olduğundan, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k s_k$ yakınsaktır.

$$s_n + q(c - c^*) \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} s_k = s_n + q(c - c^*) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{nk} - c_k}{c - c^*} s_k$$

$$= \left(s_n + q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \right) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k s_k$$

$s_n + q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k$ ifadesi (3.1.3) ten yakınsak ve $\sum_{k=1}^{\infty} c_k s_k$ yakınsak olduğundan;

$$s_n + q\left(c - c^*\right)\sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} s_k \quad \text{yakınsak } \left(n \to \infty\right)$$

Sonuç 3.1.1 den

$$\left|q\left(c - c^*\right)\right| < \frac{1}{\left(\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|d_{nk}\right|\right)^2} \quad \text{şartıyla } s_n \text{ yakınsaktır.}$$

$\left(d_{nk}\right)$ nın değerini yerine yazıp $\left|c - c^*\right|$ ile bölelim.

$$\left|q\right| < \frac{\left|c - c^*\right|}{\left(\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_{nk} - c_k\right|\right)^2} \tag{3.1.14}$$

koşulu elde edilir.

(3.1.14) deki koşul (3.1.4) deki koşuldan daha fazla kısıtlayıcıdır. Çünkü

$$\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_{nk} - c_k\right| \geq \limsup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|c_{nk}\right| - \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k\right|\right) = C - \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k\right| \tag{3.1.15}$$

$$\left[\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_{nk} - c_k\right|\right]^2 \geq \left(C - \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k\right|\right)^2$$

$$\frac{\left|c - c^*\right|}{\left(\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_{nk} - c_k\right|\right)^2} \leq \frac{\left|c - c^*\right|}{\left(C - \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k\right|\right)^2}$$

$$\left|q\right| \leq \frac{\left|c - c^*\right|}{\left(C - \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k\right|\right)^2}$$

Şimdi Agnew'in bu alanda verdiği teoremleri verelim. Bu teoremlerin, R.T.Leslie ve E.R.Love'un verdiği teorem ve sonuçlarla ilişkisini inceleyelim.

Teorem 3.1.2:[10]

$\left(a_{nk}\right)$ pozitif, regüler, üçgensel bir matris ve yeterince büyük $n \in$ ¥ ler için $a_{nn} \geq \theta > \frac{1}{2}$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} s_k \to s \ \left(n \to \infty\right) \text{ ise } s_n \to s \ \left(n \to \infty\right)$$

Teorem 3.1.3:[10]

(a_{nk}) reel, regüler, üçgensel bir matris ve $\forall k \neq n$ için $a_{nk} \leq 0$ olsun. (s_n) verilen bir dizi olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} s_k \to s \ (n \to \infty) \quad \text{ise} \quad s_n \to s \quad (n \to \infty)$$

Bu iki teorem R.T.Lelie ve E.R.Love'un verdiği Sonuç 3.1.3'ün sırasıyla $q > 0$ ve $q < 0$ durumlarına denktir. Öncelikle Sonuç 3.1.3 ün Agnew'in verdiği bu iki teoremden çıkabileceğini gösterelim.

Sonuç 3.1.3 ün hipotezlerini varsayalım.

(c_{nk}) pozitif, regüler, üçgensel bir matris, (s_n) verilen bir dizi ve $-1 < q < 1$ olmak üzere;

$$s_n + q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \to (1+q)s \qquad (n \to \infty) \quad \text{olsun.}$$

$$\partial_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad \text{olmak üzere;} \tag{3.1.16}$$

(a_{nk}) matrisi;

$$a_{nk} = \frac{\partial_{nk} + qc_{nk}}{1+q} \tag{3.1.17}$$

şeklinde tanımlansın.

(∂_{nk}) ve (c_{nk}) reel, regüler ve üçgensel olduğundan (a_{nk}) da reel, regüler, üçgensel olduğunu gösterelim.

(a_{nk}) nın reel ve üçgenselliği açıktır.

i) $$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \frac{1}{1+q} \sup_n \sum_{k=1}^{n} \left(|\partial_{nk}| + |q||c_{nk}|\right) \leq \frac{1}{1+q}\left(1 + |q| \sup_n \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|\right) < \infty$$

ii) $$\lim_n a_{nk} = \lim_n \frac{\partial_{nk} + qc_{nk}}{1+q} = \frac{0 + q0}{1+q} = 0 \quad (n \to \infty)$$

iii) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \frac{1}{1+q}\left(1 + q\sum_{k=1}^{n} c_{nk}\right) \to \frac{1}{1+q}(1+q) = 1 \quad (n \to \infty)$$

(i), (ii) ve (iii) den (a_{nk}) matrisi regülerdir.

Ayrıca (a_{nk}) nın tanımı ve hipotez gereğince;

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk}s_k \to s \ (n\to\infty)$$

Eğer $0<q<1$ ise,

$$a_{nk}=\frac{\partial_{nk}+qc_{nk}}{1+q}\geq 0, \qquad a_{nn}=\frac{1+qc_{nn}}{1+q}\geq\frac{1}{1+q}>\frac{1}{2}$$

$$\theta=\frac{1}{1+q} \ ; \quad a_{nn}\geq\theta>\frac{1}{2} \text{ olacaktır.}$$

Teorem 3.1.2 ile $s_n\to s \ (n\to\infty)$ olacaktır.

q=0 ise $s_n+q\sum_{k=1}^{n}c_{nk}s_k=s_n\to s \ (n\to\infty)$ olur.

Eğer $-1<q<0$ ise ;

$\frac{q}{1+q}<0$ ve $\forall k,n\in ¥$ için $c_{nk}\geq 0$ olduğundan,

$\forall k\neq n$ için, $a_{nk}=\frac{\partial_{nk}+qc_{nk}}{1+q}=\frac{q}{1+q}c_{nk}\leq 0$

Teorem 3.1.3 ile $s_n\to s \ (n\to\infty)$ elde edilir.

$\forall k=n$ ve $-1<q<0$ için,

$\frac{1+qc_{nn}}{1+q}>1$ olduğundan Teorem 3.1.2 ile $s_n\to s \ (n\to\infty)$ olacaktır.

Agnew teoremlerinin Sonuç 3.1.3 ten çıkabileceğini görelim:

I) Teorem 3.1.2 nin hipotezlerini varsayalım.

(a_{nk}) pozitif, regüler, üçgensel bir matris, yeterince büyük $n\in ¥$ ler için, $a_{nn}\geq\theta>\frac{1}{2}$ ve verilen bir (s_n) dizisi için, $\sum_{k=1}^{n}a_{nk}s_k\to s \ (n\to\infty)$ olsun.

$s_n\to s \ (n\to\infty)$ olduğunu göstermek istiyoruz

$q=\frac{1}{\theta}-1$ olmak üzere;

(3.1.17) deki dönüşümden (c_{nk}) yı çekelim.

$$c_{nk}=\frac{(1+q)a_{nk}-\partial_{nk}}{q} \quad \text{olur.}$$

$\theta<1$ kabul edebiliriz. Böylece $\frac{1}{2}<\theta<1$ olduğundan

$0<q<1$ olacaktır. Ayrıca Sonuç 3.1.3 ün hipotezleri sağlanır.

i) (∂_{nk}), (a_{nk}) pozitif, regüler, üçgensel matris ve $q>0$ olduğundan (c_{nk}) da pozitif, regüler ve üçgenseldir.

ii) $s_n+q\sum_{k=1}^{n}c_{nk}s_k=s_n+\sum_{k=1}^{n}\left[(1+q)a_{nk}-\partial_{nk}\right]s_k=(1+q)\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}s_k$

ve hipotezden $\sum_{k=1}^{n}a_{nk}s_k\to s \ (n\to\infty)$ olduğundan,

$$s_n+q\sum_{k=1}^{n}c_{nk}s_k\to(1+q)s \qquad (n\to\infty)$$

Sonuç 3.1.3 ten $s_n\to s \ (n\to\infty)$ dir.

II) Teorem 3.1.3 ün hipotezlerini varsayalım:

(a_{nk}) reel, regüler, üçgensel matris olsun. $\forall k\neq n$ için $a_{nk}\leq 0$ ve verilen bir (s_n) dizisi için, $\sum_{k=1}^{n}a_{nk}s_k\to s\ (n\to\infty)$ olsun. $s_n\to s\ (n\to\infty)$ olduğunu gösterelim.

(a_{nk}) nın regülerliğinden dolayı ;

$\forall n\in ¥$ için $a_{nn}\leq\sum_{k=1}^{n}|c_{nk}|=O(1)$ olduğundan, $\forall n\in ¥$ için, a_{nn} üstten sınırlıdır. μ, a_{nn} nin 1'den büyük bir üst sınırı olmak üzere $q=\frac{1}{\mu}-1$ olsun. $\mu>1$ olduğundan, $-1<q<0$ dır.

$$c_{nk}=\frac{(1+q)a_{nk}-\partial_{nk}}{q}$$

Şeklinde tanımlanmak üzere Sonuç 3.1.3 ün diğer bütün hipotezleri sağlanır.

i) $\forall k\neq n$ için, $a_{nk}\leq 0$ ve $1+q>0$ olduğundan, $c_{nk}=\frac{(1+q)a_{nk}}{q}\geq 0$

$k = n$ için, $a_{nn} \le \mu = \dfrac{1}{1+q}$ buradan $(1+q)a_{nn} - 1 \le 0$ olduğundan,

$$c_{nn} = \frac{(1+q)a_{nn}}{q} \ge 0$$

$\forall k, n \in \mathbb{N}$ için, $c_{nk} \ge 0$ olacaktır.

ii) (∂_{nk}), (a_{nk}) regüler ve üçgensel olduğundan (c_{nk}) da regüler ve üçgenseldir.

iii) (I-ii) den $s_n + q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \to (1+q)s$ sonuç 3.1.3 ten;

$$s_n \to s \quad (n \to \infty) \text{ olur.}$$

Şimdi Agnew'in verdiği üçüncü teoremi verelim. Bu teorem Agnew'in verdiği Teorem 3.1.2 den daha geneldir. Agnew'in bu teoremi R.T.Leslie ve E.R.Love'un verdiği Sonuç 3.1.1 de içerilir.

Teorem 3.1.4:[10]

(a_{nk}) regüler, üçgensel bir matris ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ ler için,

$$a_{nn} \ge \theta > \frac{1}{2} \text{ olsun.}$$

(s_n) sınırlı bir dizi olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| \to 1, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{nk} s_k \to s \quad (n \to \infty)$$

ise, $$s_n \to s \quad (n \to \infty)$$

Bu teoremin ispatı;

Bir öncekini bir sonrakine indirgemeye ve sonrakini ispatlamaya karşılık gelir. İndirgeme R.P.Hurtwiz'in ispatladığı gibi şunu göstermekten ibarettir.

Eğer; $$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} \to 1 \text{ ve } \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| \to 1 \ (n \to \infty) \text{ ise,}$$

$$\alpha_{nk} \ge 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^{n} |\beta_{nk}| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{3.1.18}$$

olmak üzere,

$$a_{nk} = \alpha_{nk} + \beta_{nk} \tag{3.1.19}$$

şeklindedir. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} \to 1 \text{ ve } \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| \to 1 \ (n \to \infty)$$

koşullarını sağlayan (a_{nk}) matrisi, bir pozitif regüler (α_{nk}) matrisinden ihmal edilebilir bir miktar kadar fark eder.

İspat:[10]

Sonuç 3.1.1'in koşullarını sağladığını gösterelim.

Hipotezden $\theta \le |a_{nn}| \le \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|$ olup $n \to \infty$ için limit alınırsa (a_{nk}) nın regülerliğinden dolayı $\theta \le 1$ elde edilir.

Böylece;

$\frac{1}{2} < \theta \le 1$, λ sayısı $\frac{1}{2} < \lambda < \theta$ olacak şekilde seçilsin ve (c_{nk}) matrisi;

$$c_{nk} = \frac{a_{nk} - \lambda \partial_{nk}}{1-\lambda} \text{ ile tanımlansın.}$$

(a_{nk}) ve (∂_{nk}) regüler olduğundan;

i) $\sup\limits_{n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| = \frac{1}{1-\lambda} \sup\limits_{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{nk} - \lambda \partial_{nk}| \le \frac{1}{1-\lambda} \left(\sup\limits_{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| + 1 \right) < \infty$

ii) $\lim\limits_{n} c_{nk} = \lim\limits_{n} \frac{a_{nk} - \lambda \partial_{nk}}{1-\lambda} = \frac{0 - \lambda 0}{1-\lambda} = 0 \quad (n \to \infty)$ ($\forall k \in$ ¥ sabit)

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - \lambda \partial_{nk}) = \frac{1}{1-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} - \lambda \right) \to \frac{1}{1-\lambda} (1-\lambda) = 1 \ (n \to \infty)$

koşullarnı sağladığından (c_{nk}) matrisi de regülerdir.

$q = \frac{1}{\lambda} - 1$ dersek;

$0 < q < 1$ sayısı için,

$$s_n + q \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k = s_n + q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{nk} - \lambda \partial_{nk}}{1-\lambda} \right) s_k$$

$q = \frac{1}{\lambda} - 1$ ise $\lambda = \frac{1}{q+1}$, $\frac{1}{1-\lambda} = \frac{q+1}{q}$ olacağından,

$$= s_n + (q+1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}s_k - \frac{1}{q+1}\sum_{k=1}^{n} \partial_{nk}s_k\right)$$

$$=(q+1)\sum_{k=1}^{n} a_{nk}s_k \text{ olacaktır.}$$

Ve hipotezden $\sum_{k=1}^{n} a_{nk}s_k \to s \ (n \to \infty)$ olduğundan

$$s_n + q\sum_{k=1}^{n} c_{nk}s_k \to (1+q)s \quad (n \to \infty) \text{ elde edilir.}$$

Eğer;

$|q| < 1 \Big/ \left(\limsup_n \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}|\right)^2$ olduğunu gösterirsek, Sonuç 3.1.1 den

$s_n \to s \quad (n \to \infty)$ olacaktır.

Bunun için öncelikle,

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| = \frac{1}{1-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| - |a_{nn}| + |a_{nn} - \lambda|\right) \to 1 \ (n \to \infty) \tag{3.1.20}$$

olduğunu gösterelim.

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| = \frac{1}{1-\lambda}\sum_{k=1}^{n} |a_{nk} - \lambda\partial_{nk}|$$

$$= \frac{1}{1-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - \lambda\partial_{nk}| + |a_{nn} - \lambda\partial_{n}|\right)$$

$$= \frac{1}{1-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| + |a_{nn} - \lambda| - |a_{nn}|\right)$$

Hipotezden $\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| \to 1 \ (n \to \infty)$ dir.

$|a_{nn} - \lambda| - |a_{nn}| \to -\lambda \quad (n \to \infty)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} \to 1, \quad \sum_{k=}^{n} |a_{nk}| \to 1 \quad (n \to \infty)$ olduğundan,

$a_{nk} = \alpha_{nk} + \beta_{nk}$ olsun. Burada;

$\alpha_{nk} \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n} |\beta_{nk}| \to 0 \ (n \to \infty)$ dır.

Böylece yeterince büyük $n \in ¥$ ler için,

$$\alpha_{nn} = |\alpha_{nn}| = |a_{nn} - \beta_{nn}| \geq |a_{nn}| - |\beta_{nn}| \geq \theta - \sum_{k=1}^{n} |\beta_{nk}| > \lambda \qquad (3.1.21)$$

olduğundan $\alpha_{nn} > \lambda$ dır.

$\alpha_{nn} > \lambda$ ve $\alpha_{nk} \geq 0$ olduğunu kullanırsak;

$a_{nn} = \alpha_{nn} + \beta_{nn}$ olduğundan,

$|a_{nn}| = |\alpha_{nn} + \beta_{nn}|$ olacaktır. Buradan,

$$|\alpha_{nn}| - |\beta_{nn}| < |\alpha_{nn} + \beta_{nn}| < |\alpha_{nn}| + |\beta_{nn}|$$

$|\alpha_{nn}| - |\beta_{nn}| < |a_{nn}| < |\alpha_{nn}| + |\beta_{nn}|$ olur.

$\alpha_{nn} \geq 0$ olduğundan;

$$\alpha_{nn} - |\beta_{nn}| < |a_{nn}| < \alpha_{nn} + |\beta_{nn}| \text{ dir.} \qquad (3.1.22)$$

Ve $a_{nn} - \lambda = (\alpha_{nn} - \lambda) + \beta_{nn}$ olduğundan,

$|\alpha_{nn} - \lambda| - |\beta_{nn}| < |a_{nn} - \lambda| < |\alpha_{nn} - \lambda| + |\beta_{nn}|$ dır.

$\alpha_{nn} > \lambda$ olduğundan;

$$\alpha_{nn} - \lambda - |\beta_{nn}| < |a_{nn} - \lambda| < \alpha_{nn} - \lambda + |\beta_{nn}| \qquad (3.1.23)$$

Böylece yeterince büyük $n \in$ ¥ ler için (3.1.22) ve (3.1.23) deki ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa;

$$-\lambda - 2|\beta_{nn}| < |a_{nn} - \lambda| - |a_{nn}| < -\lambda + 2|\beta_{nn}| \qquad (3.1.24)$$

ifadesi elde edilir. (3.1.18) den,

$$0 \leq |\beta_{nn}| \leq \sum_{k=1}^{n} |\beta_{nk}| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

olduğundan $|\beta_{nn}| \to 0 \quad (n \to \infty)$ dır.

Buradan $-\lambda$ m2$|\beta_{nn}| \to -\lambda \quad (n \to \infty)$ olur.

(3.1.24) den,

$|a_{nn} - \lambda| - |a_{nn}| \to -\lambda \;\; (n \to \infty)$ elde edilir.

Sonuç olarak;

$\sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \to 1 \;\; (n \to \infty)$ ve $0 < q < 1$ olduğundan,

$$|q| < \frac{1}{\left(\limsup\limits_{n} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}|\right)^2} \quad \text{dır.}$$

(s_n) sınırlı dizisi için sonuç 3.1.1 gereğince;

$$s_n \to s \quad (n \to \infty) \text{ dir.}$$

Bu kısımda E.R.Love'un 15 Kasım 1951 tarihli makalesinde[11] yer alan teoremleri verilecek. E.R.Love bu teoremlerinde, Mercer teoremindeki aritmetik ortalama yerine; yine genel Toeplitz ortalamalarını kullanarak daha ileri genişlemelerini vermiştir. Şimdi bu teoremleri verelim:

Teorem 3.1.5:[11]

(c_{nk}) regüler matris (s_n) sınırlı bir dizi ve

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \to (1-q)1 \quad (n \to \infty) \tag{3.1.25}$$

$q \in$ £ olmak üzere,

$$|q| < 1 \Big/ \overline{\lim_{n}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| \tag{3.1.26}$$

ise,

$$s_n \to 1 \quad (n \to \infty) \text{ dir.}$$

Bu teorem daha önce verdiğimiz Sonuç 3.1.1 in genişlemesine benzerdir. Fakat burada q üzerindeki kısıtlama daha hafiftir.

Bu teoremdeki (c_{nk}) regüler matrisi yerine; $(c_{nk}) \in (c_0, c_0)$ alalım. Bu durumda $(c_{nk}) \in (c_0, c_0)$ için aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.1.6:[11]

$(c_{nk}) \in (c_0, c_0)$ olsun. (s_n) sınırlı bir dizi ve $q \in$ £ olmak üzere,

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \to 0 \ (n \to \infty) \tag{3.1.27}$$

ve $$|q| < 1 \Big/ \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| \tag{3.1.28}$$

ise, $s_n \to 0 \ (n \to \infty)$ dır.

Bu teoremin Sonuç 3.1.1 de bir karşılığı yoktur. Fakat J.Karamata ve diğerlerince tartışılan Mercer teoreminin bir geneline önderlik eder. Şimdi öncelikle Teorem 3.1.6 nın ispatını verelim:

İspat:[11]

λ, $|s_n|$ nin bir üst limiti olsun.

$\lambda = \limsup_n |s_n|$ olur.

(s_n) dizisi sınırlı olduğundan $0 \le \lambda < \infty$ dur.

Tanım gereğince verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için bir pozitif p tamsayısı vardır. Öyle ki; $n \ge p$ için $|s_n| < \lambda + \varepsilon$ dur.

Ayrıca hipotezden $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k$ mutlak yakınsak ve

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right| \le \sum_{k=1}^{p-1} |c_{nk} s_k| + (\lambda + \varepsilon) \sum_{k=p}^{\infty} |c_{nk}|$$

$n \to \infty$ için üst limite geçilirse sağdaki ilk toplam $(c_{nk}) \in (c_0, c_0)$ olduğundan sıfıra gider.

$$\limsup_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right| \le (\lambda + \varepsilon) \sum_{k=p}^{\infty} |c_{nk}| \tag{3.1.29}$$

$$|s_n| \le \left|s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right| + \left|q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right|$$

$n \to \infty$ için üst limite geçilirse,

$$\overline{\lim_n} |s_n| \le \overline{\lim_n} \left|s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right| + |q| \overline{\lim_n} \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right| \text{ (3.1.27) den,}$$

$$\overline{\lim_n} \left|s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right| = 0 \text{ dır.}$$

$\overline{\lim_n}|s_n| = \lambda$ olduğundan;

$$\lambda \le |q| \overline{\lim_n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \right| \quad \text{dır. (3.1.29) dan,}$$

$$\lambda \le |q| \overline{\lim_n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \right| \le |q| \overline{\lim_n} |s_n| \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}|$$

$$\le |q| \lambda \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| \quad \text{elde edilir.}$$

$\lambda < \infty$ olduğundan;

$$\left(1 - |q| \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}|\right) \lambda \le 0 \ \text{(3.1.28) den,}$$

$$1 - |q| \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| > 0 \quad \text{olduğundan } \lambda = 0 \text{ dır.}$$

Buradan, $\lambda = \overline{\lim_n} |s_n| = 0$

$$\Rightarrow \quad s_n \to 0 \quad (n \to \infty) \text{dır.}$$

Teorem 3.1.5 in ispatı için Teorem 3.1.6 da (s_n) yerine $(s_n - 1)$ alınarak gösterilebilir.

Şimdi Teorem 3.1.6 da ki $(c_{nk}) \in (c_0, c_0)$ hipotezinin gerekliliğini bir örnek ile gösterelim:

Örnek 3.1.2:[11]

$C = (c_{nk})$ kompleks terimli matris $z \ne 0$, $|z| < 1$, $\theta = \arg z \ne 0$ olmak üzere;

$$c_{nk} = \begin{cases} (1-z) z^{n-k}, & 0 < k \le n \\ 0 \quad , & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve $s_n = e^{in\theta}$, $q = \dfrac{1 - ze^{-i\theta}}{1-z}$ olsun.

Teorem 3.1.6 nın koşullarını sağladığını görelim:

i) $|q| = 1 \Big/ \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| = 1 / N(C)$ olduğunu gösterelim:

$$N(C) = \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| = |1-z| \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{n} |z|^{n-k} = |1-z| \overline{\lim_n} \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k$$

$|z|<1$ için $\sum_{k=0}^{n-1}|z|^k \to \dfrac{1}{1-|z|}$ $(n\to\infty)$ olduğundan;

$$N(C)=\frac{1-z}{1-|z|} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
\left|1-ze^{-i\theta}\right|^2 &= \left(1-ze^{-i\theta}\right)\overline{\left(1-ze^{-i\theta}\right)} \\
&= \left(1-ze^{-i\theta}\right)\left(1-\overline{z}e^{-i\theta}\right) \\
&= 1-\left(\overline{z}e^{i\theta}+ze^{-i\theta}\right)+|z|^2 \\
&= 1-\left(|z|e^{-i\theta}e^{i\theta}+|z|e^{i\theta}e^{-i\theta}\right)+z^2 \\
&= 1-2|z|+|z|^2 \\
&= \left(1-|z|\right)^2
\end{aligned}$$

$$\left|1-ze^{-i\theta}\right| = \left|1-|z|\right| \text{ elde edilir.}$$

Buradan,

$$|q|=\frac{\left|1-ze^{-i\theta}\right|}{|1-z|}=\frac{1-|z|}{|1-z|}=\frac{1}{N(C)} \text{ olur.}$$

ii) $|s_n|=\left|e^{in\theta}\right|=\left|\cos n\theta+i\sin n\theta\right|=1$ olduğundan, (s_n) dizisi sınırlıdır.

iii) $s_n-q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k \to 0$ $(n\to\infty)$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
s_n-q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k &= e^{in\theta}-\frac{1-ze^{-i\theta}}{1-z}\sum_{k=1}^{n}(1-z)z^{n-k}e^{ik\theta} \\
&= e^{in\theta}-\left(1-ze^{-i\theta}\right)\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}e^{ik\theta} \\
&= e^{in\theta}-\left(1-ze^{-i\theta}\right)\sum_{k=0}^{n-1}z^{k}e^{i(n-k)\theta} \\
&= e^{in\theta}\left[1-\left(1-ze^{-i\theta}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(ze^{-i\theta}\right)^k\right]
\end{aligned}$$

$$\left(1-ze^{-i\theta}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(ze^{-i\theta}\right)^k \to 1 \quad (n\to\infty) \text{ olduğundan,}$$

$$\left[1-\left(1-ze^{-i\theta}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(ze^{-i\theta}\right)^{k}\right]\to 0 \ \ (n\to\infty) \text{ dır.}$$

Ayrıca $e^{in\theta}=O(1)$ dir. Buradan,

$$s_n-q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k=O(1)o(1)=o(1) \quad (n\to\infty) \text{ olur.}$$

Fakat $\sin n\theta$ (veya $\cos n\theta$) $n\to\infty$ için yakınsak olmadığından genel terimi $s_n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$ olan (s_n) dizisi ıraksaktır. Bu örneğin Teorem 3.1.6 ile çelişmesinin nedeni;

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|=\sum_{k=1}^{n}|1-z||z|^{n-k}=|1-z|\sum_{k=1}^{n}|z|^{n-k}$$

$$=|1-z|\sum_{k=0}^{n}|z|^{k}\to\frac{1-z}{1-|z|} \quad (n\to\infty)$$

$$1-|z|\le|1-z|\Rightarrow\frac{|1-z|}{1-|z|}>1\Rightarrow\sup_n\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|>1\Rightarrow c_{nk}\notin(c_0,c_0) \qquad \text{olmasıdır.}$$

Burada $z=0$ durumunda $c_{nk}=0, q=1$ olacağından, $s_n-q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k=s_n$ olur ki bunun da herhangi bir esprisi yoktur.

Sonuç 3.1.4:[11]

(c_{nk}) regüler bir matris, (s_n) sınırlı bir dizi olsun. Eğer;

$$\left(s_n-q_n\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k\right)\Big/(1-q_n)\to 1 \quad (n\to\infty) \tag{3.1.30}$$

ve
$$\overline{\lim_n}|q_n|<1\Big/\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| \tag{3.1.31}$$

ise, $s_n\to 1 \quad (n\to\infty)$ dir.

Şimdi Sonuç 3.1.4 ün ispatını verelim.

İspat:[11]

I) Öncelikle $1=0$ kabul edelim. Teorem 3.1.6 dan ispatını yapalım:

(c_{nk}) regüler matris olduğundan;

$$\sup_n\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|<\infty \text{ dur.}$$

(3.1.31) ile (q_n) sınırlı olacağından; (3.1.30) ile

$$s_n - q_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \to 0 \ (n \to \infty) \text{ elde edilir.}$$

i) (c_{nk}) regüler olduğundan, $\lim_n c_{nk} = 0 \quad (n \to \infty)$ olup (q_n) sınırlı olduğundan, $\lim_n q_n c_{nk} = 0 \ (n \to \infty)$ dur. Buradaki $(q_n c_{nk})$ regüler olmayabilir.

ii) $\overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |q_n c_{nk}| \le \overline{\lim_n} |q_n| \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| < 1 < \infty$ (3.1.28 den)

O halde (i) ve (ii) den $(q_n c_{nk}) \in (c_0, c_0)$ dır.

Sonuç 3.1.4 te (c_{nk}) yerine $(q_n c_{nk})$ ve q=1 alınırsa,

$$|q| = 1 < 1 \Big/ \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| \text{ olur.}$$

O halde Teorem 3.1.6 gereğince;

$$s_n \to 0 \ (n \to \infty) \text{ olacaktır.}$$

II) $1 \ne 0$ olsun.

$$\frac{1}{1-q_n}\left[(s_n - 1) - q_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}(s_k - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{1-q_n}\left[(s_n - 1) - q_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}(s_k - 1) + q_n 1 - q_n 1\right]$$

$$= \frac{1}{1-q_n}\left(s_n - q_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right) - 1 - \frac{q_n 1}{1-q_n}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\right) \tag{3.1.32}$$

$n \to \infty$ için limit alınırsa;

(3.1.30) dan $$\frac{s_n - q_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k}{1-q_n} \to 1 \ (n \to \infty) \text{ dir.}$$

Ve $\left(\frac{q_n}{1-q_n}\right)$ sınırlı olması şartıyla (c_{nk}) nın regülerliğinden dolayı,

$$\frac{q_n 1}{1-q_n}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\right) \to 0 \ (n \to \infty) \text{ dır.}$$

O halde $$\frac{1}{1-q_n}\left[(s_n - 1) - q_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}(s_k - 1)\right] \to 0 \ (n \to \infty)$$

(I) dan $s_n - 1 \to 0 \; (n \to \infty)$

$s_n \to 1 \quad (n \to \infty)$ elde edilir.

(3.1.31) den (q_n) dizisi sınırlıdır.

$$\underline{\lim_n} |1 - q_n| \geq \underline{\lim_n} (1 - |q_n|) = 1 - \overline{\lim_n} |q_n|$$

(c_{nk}) nın regülerliğinden dolayı,

$$\overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| \geq \overline{\lim_n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} \right| = 1 \quad \text{(3.1.31) den,}$$

$$\overline{\lim_n} |q_n| < 1 \quad \Rightarrow 1 - \overline{\lim_n} |q_n| > 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_n} |1 - q_n| > 0 \text{ dır.}$$

Sonuç 3.1.5:[11]

$A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ regüler matrisler olmak üzere; B, B^{-1} sol ters matrisine sahip ve AB^{-1} matrisinin kolonları sıfır dizileri olsun. Eğer;

$$N\left(I - AB^{-1}\right) < 1 \tag{3.1.33}$$

ise A-toplanabilen bütün sınırlı diziler B-toplanabilirdir.

İspat:[11]

(s_n), 1 ye A-toplanabilen bir sınırlı dizi; 1 , (s_n) dizisinin ve t ,$(s_n - 1)$ dizisinin kolon matrisi olsun. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$$Bt - \left(I - AB^{-1}\right) Bt = At$$

ve $$At = \left(A_n(t)\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (s_k - 1) \right)$$

$A = (a_{nk})$ nın regülerliğinden ;

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \to 1 \; (n \to \infty) \text{ olduğundan,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left(s_k - 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k - 1\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \rightarrow 1 - 1 1 = 0 \;\left(n \rightarrow \infty\right)$$

Bu durum At kolon matrisinin sıfır dizisi olduğunu gösterir.

$\left(c_{nk}\right) = I - AB^{-1}$ olsun. $\left(c_{nk}\right) \in \left(c_0, c_0\right)$ olduğunu görelim:

$\left(d_{nk}\right) = AB^{-1}$ olmak üzere,

$$\left(c_{nk}\right) = I - AB^{-1} \begin{bmatrix} 1-d_{11} & -d_{12} & -d_{13} & \cdots & -d_{1n} & \cdots & -d_{1k} & \cdots \\ -d_{21} & 1-d_{22} & -d_{23} & \cdots & -d_{2n} & \cdots & -d_{2k} & \cdots \\ -d_{31} & -d_{23} & 1-d_{33} & \cdots & -d_{3n} & \cdots & -d_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ -d_{n1} & -d_{n2} & -d_{n3} & \cdots & 1-d_{nn} & \cdots & -d_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ -d_{k1} & -d_{k2} & -d_{k3} & \cdots & -d_{kn} & \cdots & 1-d_{kk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$c_{nk} = \begin{cases} 1 - d_{nn}\,, & k = n \\ -d_{nk}\,, & k \neq n \end{cases}$$

i) Hipotez ile $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\begin{bmatrix} d_{1k} \\ \vdots \\ d_{nk} \\ \vdots \end{bmatrix}$ kolonları bir sıfır dizisi oluşturduğundan;

$$\lim_n d_{nk} = 0 \;(\;\forall k \in \mathbb{N} \;\text{ sabit})$$

ise $\lim\limits_n c_{nk} = 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$ sabit) olur.

ii) $\overline{\lim\limits_n} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|c_{nk}\right| = N\left(I - AB^{-1}\right) < 1$ olduğundan sonludur.

(i) ve (ii) den $\left(c_{nk}\right) \in \left(c_0, c_0\right)$ dır.

Sonuç olarak Teorem 3.1.6 da $\left(c_{nk}\right)$ yerine $I - AB^{-1}$ matrisi; $\left(s_n\right)$ yerine Bt kolon matrisi ve q yerine 1 alınırsa,

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k = Bt - \left(I - AB^{-1}\right)Bt = At$$

olduğundan ve At kolon matrisi bir sıfır dizisi belirlediğinden Teorem 3.1.6 gereğince Bt kolon matrisi de bir sıfır dizisi belirler.

$$Bt = B_n\left(t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\left(s_k - 1\right) \text{ olmak üzere,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\left(s_k - 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} s_k - 1\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \to 0 \quad \left(n \to \infty\right) \text{dır.}$$

$B = \left(b_{nk}\right)$ regüler olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \to 1 \;\; \left(n \to \infty\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} s_k \to 1 \;\; \left(n \to \infty\right)$$

Böylece $\left(s_n\right)$ dizisi 1 ye B-toplanabilirdir.

Şimdi Teorem 3.1.1 in bir genişlemesi olan aşağıdaki teoremi verelim: Bu teorem yakınsaklığı koruyan dönüşümler hakkındadır. Fakat q üzerindeki kısıtlama Teorem 3.1.1 dekinden daha azdır. Bu nedenle de Teorem 3.1.1 i içerir.

Teorem 3.1.7:[11]

$\left(c_{nk}\right) \in \left(c, c\right)$ olsun. $\left(s_n\right)$ sınırlı bir dizi ve $q \in$ £ olmak üzere,

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \quad \text{yakınsak } \left(n \to \infty\right) \tag{3.1.34}$$

ve
$$\left|q\right| < 1 \Big/ \left[\overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_{nk}\right| - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n \left|c_{nk}\right|\right] \;\left(n \to \infty\right) \text{ dir.} \tag{3.1.35}$$

Bu son ifade,

$$\left|q\right| < 1 \Big/ \left(N\left(C\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k\right|\right) \text{ şeklinde yazılabilir.} \tag{3.1.36}$$

O zaman $\quad s_n \to s \;\; \left(n \to \infty\right)$ dir.

Burada payda, ancak $\left(c_{nk}\right) \in \left(1_{\infty}, c\right)$ olursa '0' olur. Çünkü

$$\overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_{nk}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n \left|c_{nk}\right| \quad \text{(n ye göre düzgün yakınsak)}$$

ve
$$\lim_n \left|c_{nk}\right| = \left|c_k\right|$$

olacağından payda '0' olur. Burada $\left|q\right| < \infty$ olacaktır.

Teoremin ispatını vermeden önce aşağıdaki yardımcı teoremi ispatsız olarak verelim:

Yardımcı Teorem 3.1.2:[11]

$$\lim_n c_{nk} = c_k \quad (\forall k \in \mathbb{N} \ \text{ için}) \tag{3.1.37}$$

$$N(C) = \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}|, \ N(S) = \overline{\lim_n} |s_n| \tag{3.1.38}$$

Burada $c_k = 0$ kabul edelim. ($\forall k \in \mathbb{N}$ için) Bu durumda N fonksiyonel bir norm özellikleri taşır.

p pozitif bir tamsayı ise aşağıdaki ifadenin sonlu olması şartıyla,

$N\left(C^p S\right) \le \left\{N(C)\right\}^P N(S)$ dir.

Şimdi teorem 3.1.7 nin ispatını verelim:

İspatı:[11]

I) Özel olarak $c_k = 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$ için) kabul edelim. Kolon matrisleriyle belirlenen p tane diziyi,

$$s - qCs, \ qCs - q^2C^2s, \ q^2C^2s - q^3C^3s, \ \cdots, q^{p-1}C^{p-1}s - q^pC^ps$$

olarak alalım.

$$s - qCs = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \\ \vdots \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots \\ c_{21} & c_{22} \cdots \\ \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{1k}s_k \\ s_2 - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}s_k \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}s_k \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{bmatrix}$$

olduğundan, $s - qCs$ dizisi (3.1.31) den yakınsaktır. Diğer diziler de her biri bir öncekinin qC ile çarpımı olduğundan ve $C = (c_{nk})$ yakınsaklığı koruduğundan yakınsaktır. Bu nedenle dizilerin toplamı olan $s - q^pC^ps$ dizisi de yakınsaktır. Bu dizinin n.inci terimi;

$t_n^{(p)} = s_n - q^p \left(C^p s\right)_n$ dir.

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left| t_m^{(p)} - t_n^{(p)} + q^p\left(C^p s\right)_m - q^p\left(C^p s\right)_n \right| \\ &\le \left| t_m^{(p)} - t_n^{(p)} \right| + \left| q^p\left(C^p s\right)_m \right| + \left| q^p\left(C^p s\right)_n \right| \end{aligned}$$

$(m,n)\to\infty$ limsup alınırsa;

$$\overline{\lim_{(m,n)\to\infty}}\left|s_m - s_n\right| \le \overline{\lim_{(m,n)\to\infty}}\left|t_m^{(p)} - t_n^{(p)}\right| + \left|q^p\right|\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|\left(C^p s\right)_m\right| + \left|q^p\right|\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\left(C^p s\right)_n\right|$$

$t_n^{(p)}$ yakınsak olduğundan;

Cauchy Prensibinden,

$\limsup\limits_{(m,n)\to\infty}\left|t_m^{(p)} - t_n^{(p)}\right| = 0$ ve yardımcı Teorem 3.1.2 ile,

$\limsup\limits_{(m,n)\to\infty}\left|s_m - s_n\right| \le 2\left|q\right|^p \left(N(C)\right)^P N(S)$ eşitsizliği elde edilir.

(3.1.36) ile,

$$|q| < 1\Big/\left(N(C) - \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\right) = 1/N(C) \quad (c_k = 0 \text{ kabul etmiştik})$$

Buradan $|q|N(C) < 1$ olur. Ayrıca $N(S) < \infty$ olduğundan;

ifadesinde p'nin uygun seçimiyle, sağdaki ifade istenildiği kadar küçük yapılabilir. Buradan (s_n) dizinsinin yakınsaklığı elde edilir.

$$\limsup_{(m,n)\to\infty}\left|s_m - s_n\right| \le 2\left[|q|N(C)\right]^p N(S)$$

Böylece $c_k = 0$ için teorem ispatlanır.

Şimdi, $c_k \ne 0$ ($\forall k \in ¥$ için) durumunun ispatını vermeden önce yardımcı Teorem 3.1.3 ve yardımcı Teorem 3.1.4'ü verelim:

Yardımcı Teorem 3.1.3:[11]

(c_{nk}) yakınsaklığı koruyan bir matris ve $\forall k \in ¥$ için $c_k = \lim\limits_n c_{nk}$ olmak üzere (3.1.35) deki ifadenin paydası;

$$\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| - \sum_{k=1}^{\infty}\lim_n|c_{nk}| = \overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|c_{nk}| - |c_k|\right) = \overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left||c_{nk}| - |c_k|\right| \qquad (3.1.39)$$

Öncelikle 1.inci eşitliği görelim:

$\lim\limits_n c_{nk} = c_k$ olduğundan $\lim\limits_n|c_{nk}| = |c_k|$ olacaktır.

(c_{nk}) yakınsaklığı koruduğundan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ serisi mutlak yakınsaktır.

$$\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|-\sum_{k=1}^{\infty}\lim_n|c_{nk}|=\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$$

$$=\overline{\lim_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\right)$$

$$=\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|c_{nk}|-|c_k|\right) \text{ dır.}$$

Şimdi 2.nci eşitliği görelim:

$$|c_{nk}|-|c_k|\le\big||c_{nk}|-|c_k|\big|$$

$$\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|c_{nk}|-|c_k|\right)\le\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}\big||c_{nk}|-|c_k|\big| \tag{3.1.40}$$

$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ yakınsak olduğundan, verilen bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık

$\exists p\in ¥ \ \ni \ \sum_{k=p}^{\infty}|c_k|<\frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Ayrıca $\forall k\in ¥$ için $\lim_n|c_{nk}|=|c_k|$ olduğundan k=1,2, ... ,p-1 için de böyledir. Buradan,

$$\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}\big||c_{nk}|-|c_k|\big|=\overline{\lim_n}\sum_{k=p}^{\infty}\big||c_{nk}|-|c_k|\big|$$

$$=\overline{\lim_n}\sum_{k=p}^{\infty}\left[|c_{nk}|-|c_k|+\delta_{nk}\right]$$

$$\delta_{nk}=\begin{cases}2\left(|c_k|-|c_{nk}|\right), & |c_{nk}|<|c_k|\\ 0 \quad , & |c_{nk}|\ge|c_k|\end{cases}$$

$$0\le\delta_{nk}\le 2|c_k|$$

$$\Rightarrow\ 0\le\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{nk}\le 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$$

$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ yakınsak olduğundan karşılaştırma testinden $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{nk}$ yakınsaktır.

$$\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}\big||c_{nk}|-|c_k|\big|\le\overline{\lim_n}\sum_{k=p}^{\infty}\left(|c_{nk}|-|c_k|\right)+\overline{\lim_n}\sum_{k=p}^{\infty}\delta_{nk}$$

$$\le\overline{\lim_n}\sum_{k=p}^{\infty}\left(|c_{nk}|-|c_k|\right)+2\sum_{k=p}^{\infty}|c_k|$$

$$\leq \overline{\lim_{n}} \sum_{k=p}^{\infty} \left(|c_{nk}| - |c_k| \right) + \varepsilon$$

$\limsup\limits_{n}$, ε dan bağımsız olduğundan;

$$\overline{\lim_{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \big| |c_{nk}| - |c_k| \big| \leq \overline{\lim_{n}} \sum_{k=p}^{\infty} \left(|c_{nk}| - |c_k| \right) \tag{3.1.41}$$

(3.1.40) ve (3.1.41) den,

$$\overline{\lim_{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \big| |c_{nk}| - |c_k| \big| = \overline{\lim_{n}} \sum_{k=p}^{\infty} \left(|c_{nk}| - |c_k| \right) \text{ dır.}$$

Yardımcı Teorem 3.1.4:[11] $z \in \mathbb{C}$ için,

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} & , \quad z \neq 0 \\ 0 & , \quad z = 0 \end{cases} \tag{3.1.42}$$

$\lim\limits_{n} c_{nk} = c_k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$ için) olmak üzere, eğer $\left(c_{nk}\right)$ yakınsaklığı koruyan bir matris ise;

$$\omega_{nk} = |c_k| \operatorname{sgn} c_{nk} \tag{3.1.43}$$

ile tanımlı $\left(\omega_{nk}\right)$ matrisi bütün sınırlı dizileri yakınsak dizilere dönüştürür. Yani;

$\left(c_{nk}\right) \in \left(c, c\right)$ ve $c_k \neq 0$ olduğundan;

$\left(\omega_{nk}\right) \in \left(l_{\infty}, c\right)$ dır.

İspat:[11]

i) $\omega_{nk} \to c_k \quad \left(n \to \infty\right)$ (k sabit) (3.1.44)

ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\omega_{nk}| \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k| \quad \left(n \to \infty\right)$ (3.1.45)

olduğunu göstermeliyiz.

i) $c_k = \lim\limits_{n} c_{nk} \neq 0$ olduğundan $c_{nk} \neq 0$ dır. ($\forall k, n \in \mathbb{N}$ için)

$\omega_{nk} = |c_k| \dfrac{c_{nk}}{|c_{nk}|}$ olup

$\omega_{nk} \to |c_k| \dfrac{c_k}{|c_k|} = c_k \quad \left(n \to \infty\right)$ (k sabit) olur.

ii) $|\omega_{nk}| = |c_k|$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\omega_{nk}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k\right| \to \sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k\right| \quad (n\to\infty)$$

Böylece yardımcı teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi Teorem 3.1.7 nin $c_k \neq 0$ durumunu ispatlayalım:

II) $c_k = \lim\limits_{n} c_{nk} \neq 0$ $(\forall k \in \mathbb{N}$ için) olsun. Bu durumun ispatı $c_k = 0$ daki özel durumdan elde edilir.

Özel durum: $C = (c_{nk}) \in (c,c)$, (s_n) sınırlı bir dizi,

$$\lim_{n} c_{nk} = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad (n \to \infty)$$

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}s_k \quad \text{yakınsak} \quad (n\to\infty) \text{ için;}$$

$$|q| < 1\Big/\overline{\lim_{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{nk}\right| = \frac{1}{N(C)} \quad \text{ise } (s_n) \text{ dizisi yakınsak idi.}$$

$(c_{nk}) \in (c,c)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.3 ile

$$|q| < 1\Bigg/\left[\overline{\lim_{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{nk}\right| - \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n}\left|c_{nk}\right|\right] = 1\Big/\overline{\lim_{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\left|c_{nk}\right| - \left|c_k\right|\Big|$$

Ayrıca Yardımcı Teorem 3.1.4 ten $\omega_{nk} = \left|c_k\right| \operatorname{sgn} c_{nk}$ şeklinde tanımlı (ω_{nk}) matrisi, $(\omega_{nk}) \in (1_{\infty}, c)$ ise $(\omega_{nk}) \in (c,c)$ dır.

$$\gamma_{nk} = c_{nk} - \omega_{nk} = \left(\left|c_{nk}\right| - \left|c_k\right|\right)\operatorname{sgn} c_{nk} \tag{3.1.46}$$

i) $\gamma_{nk} \in (c,c)$ olur.

ii) $\lim\limits_{n}\gamma_{nk} = \lim\limits_{n}\left(c_{nk} - \omega_{nk}\right) = c_k - c_k = 0$ $(\forall k \in \mathbb{N}$ sabit) olur.

iii) Yardımcı Teorem 3.1.4 ten ve hipotezden;

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}s_k = \left(s_n - q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k\right) + q\sum_{k=1}^{\infty}\omega_{nk}s_k \quad \text{yakınsak} \quad (n\to\infty) \text{ dır.}$$

iv) $|q| < 1\Big/\overline{\lim\limits_{n}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\gamma_{nk}\right|$ olur.

Böylece (γ_{nk}) ile Teorem 3.1.7 nin ispatında ki özel duruma başvurulursa; (s_n) dizisinin yakınsaklığı elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.5:[11]

$C=(c_{nk})\in(c,c)$ olsun.

$c_k=\lim_n c_{nk}$, $c=\lim_n\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}$ ve $N(C)=\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|$ olmak üzere,

$$\left|c-\sum_{k=1}^{\infty}c_k\right|\leq N(C)-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| \text{ dır.}$$

İspat:[11]

$(c_{nk})\in(c,c)$ olduğundan, $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ mutlak yakınsaktır. Verilen bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\exists p\in ¥ \ni \sum_{k=p}^{\infty}|c_k|<\frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Ayrıca $\forall n\in ¥$ için,

$$c-\sum_{k=1}^{\infty}c_k=c-\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}+\sum_{k=1}^{p-1}(c_{nk}-c_k)+\sum_{k=p}^{\infty}(c_{nk}-c_k)$$

$$\left|c-\sum_{k=1}^{\infty}c_k\right|\leq\left|c-\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}\right|+\left|\sum_{k=1}^{p-1}(c_{nk}-c_k)\right|+\sum_{k=p}^{\infty}|c_{nk}|+\sum_{k=p}^{\infty}|c_k|$$

Burada p sabit tutulup $n\to\infty$ için limsup alınırsa ilk iki terim hipotez ile sıfıra gider.

$$\begin{aligned}
\left|c-\sum_{k=1}^{\infty}c_k\right| &\leq \overline{\lim_n}\sum_{k=p}^{\infty}|c_{nk}|+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=\overline{\lim_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|-\sum_{k=1}^{p-1}|c_{nk}|\right)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|-\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{p-1}|c_{nk}|+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=N(C)-\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{p-1}|c_{nk}|+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=N(C)-\sum_{k=1}^{p-1}|c_k|+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=N(C)-\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|-\sum_{k=p}^{\infty}|c_k|\right)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&<N(C)-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|+\varepsilon
\end{aligned}$$

Eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki yanı ε dan bağımsız olduğundan;

$$\left|c-\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| \le N(C)-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| \text{ dir.}$$

Şimdi Teorem 3.1.7 ile Teorem 3.1.1 i karşılaştıralım. Teorem 3.1.1 de q üzerindeki kısıtlama; Teorem3.1.7 de q üzerindeki kısıtlamadan daha fazladır. Çünkü Teorem 3.1.7, q nun tanım bölgesini genişletmiştir. Yardımcı Teorem 3.1.5 yardımıyla q nun tanım bölgesinin genişlediğini gösterelim:

$(c_{nk}) \in (c,c)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.5 e göre,

$$\left|c-\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| \le N(C)-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| \text{ dir.}$$

Eşitsizliğinin her iki tarafı $\left(N(C)-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\right)^2$ ile bölünürse,

$$\frac{\left|c-\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right|}{\left(N(C)-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\right)^2} \le \frac{1}{N(C)-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|} \text{ olur.}$$

Şimdi Mercer teoreminin bir benzerini verelim. Burada yakınsaklık ile sınırlılık yer değiştirmiştir. Ayrıca bu teorem ve onun sonucu, (s_n) dizisinin sınırlılığını Teorem 3.1.5, Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.7 için gerekli olduğunu açıklar. Bu durum Mercer teoreminin daha önceki yorumlarında söz konusu edilemez. Eğer matris üçgensel değilse Teorem 3.1.5, Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.7 deki $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}s_k$ dönüşümünün varlığını garantiye almak için (s_n) dizisinin sınırlılığına ihtiyaç duyarız.

Teorem 3.1.8:[11]

(c_{nk}) üçgensel matris ve (s_n) verilen bir dizi olmak üzere;

$$|q| < \frac{1}{\overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}|} \tag{3.1.46}$$

ve $\left(s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \right)$ sınırlı (3.1.47)

ise (s_n) dizisi sınırlıdır.

İspat:[11]

(3.1.46) den dolayı, $\overline{bnd}$ bir üst sınırı göstermek üzere,

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad ; \qquad \mu = \overline{bnd}_{n \geq m} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| < \frac{1}{|q|} \text{ dır.} \qquad (3.1.48)$$

Bu m ve μ sabitlerini belirler.

(3.1.47) den, $\exists \mathrm{H} > 0 \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ için $\left| s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \right| \leq \mathrm{H}$

$\forall n \geq m$ için,

$$|s_n| \leq \left| s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \right| + \left| q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \right|$$

$$|s_n| \leq H + |q| \sum_{k=1}^{m-1} |c_{nk} s_k| + |q| \sum_{k=m}^{n} |c_{nk} s_k|$$

$\forall n \leq N$ için,

(3.1.48) den,

$$\sum_{k=m}^{n} |c_{nk} s_k| \leq \max_{m \leq h \leq n} |s_h| \sum_{k=m}^{n} |c_{nk}| \leq \max_{m \leq h \leq N} |s_h| \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \leq \mu \max_{m \leq h \leq N} |s_h|$$

ve $$\sum_{k=1}^{m-1} |c_{nk} s_k| \leq \max_{1 \leq h \leq m-1} |s_h| \sum_{k=1}^{m-1} |c_{nk}| \leq \max_{1 \leq h \leq m-1} |s_h| \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \leq \mu \max_{1 \leq h \leq m-1} |s_h|$$

olduğundan, $\forall m \leq n \leq N$ için,

$$|s_n| \leq \mathrm{H} + |q| \mu \left(\max_{1 \leq h \leq m-1} |s_h| + \max_{m \leq h \leq N} |s_h| \right)$$

Böylece $\forall N \geq m$ için (m sabit)

$$\max_{m \leq n \leq N} |s_n| \leq \mathrm{H} + |q| \mu \left(\max_{1 \leq h \leq m-1} |s_h| + \max_{m \leq h \leq N} |s_h| \right) \text{ olur.}$$

Buradan $\forall N \geq m$ için,

$$\left(1 - |q|\mu\right) \max_{m \leq n \leq N} |s_n| \leq \mathrm{H} + |q| \mu \max_{1 \leq h \leq m-1} |s_h|$$

elde edilir.

(3.1.47) den $1-|q|\mu>0$ olduğundan son eşitsizlik $\forall N\geq m$ (m sabit) için $\max\limits_{m\leq n\leq N}|s_n|$ nin sınırlı olduğunu garantiler. Bu ise (s_n) nin sınırlı olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.1 (Mutlak Yakınsaklık):

(s_n) dizisi mutlak yakınsak $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=m}^{\infty}|s_n-s_{n-1}|<\infty$ $\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$ dir. Şimdi mutlak toplanabilirlik için verilen Mears Teoremini verelim:

Tanım 3.1.2 (Mears Teoremi):[11]

(c_{nk}) sonsuz bir matris ve (s_n) sınırlı bir dizi olsun. $\forall n\in\mathbb{N}^*$ için $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_{nk}$ yakınsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=h}^{\infty}\left(c_{nk}-c_{n-1k}\right)\right|\leq \mathrm{K} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^* \text{ için) dır.} \tag{3.1.49}$$

Burada K, h dan bağımsız bir sayı ve

$$J_n=\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k \text{ olsun.} \tag{3.1.50}$$

Eğer (s_n) mutlak yakınsak ise (J_n) de mutlak yakınsaktır.

Teorem 3.1.10:[11]

(c_{nk}) üçgensel bir matris ve (s_n) verilen bir dizi olsun. Eğer,

$$|q|<1\Big/\left|\overline{\lim_{n}}\sum_{n=h}^{\infty}\left|\sum_{k=h}^{n}\left(c_{nk}-c_{n-1k}\right)\right|\right| \tag{3.1.51}$$

ve (3.1.51) in paydasındaki seri, $\forall h\in\mathbb{N}^*$ için yakınsak olsun.

$$t_n=s_n-q\sum_{k=1}^{n}c_{nk}s_k \text{ olsun.} \tag{3.1.52}$$

(t_n) mutlak yakınsak ise (s_n) de mutlak yakınsaktır.

Bu teorem Teorem 3.1.5 in bir benzeri olup burada yakınsaklık ile mutlak yakınsaklık yer değiştirmiştir. Bu Bosenquet'in Mercer teoremi ile ilgili sonuçlarıyla alakalıdır.

İspat:[11]

$h \leq n$ olmak üzere;

$$r_{nh} = \sum_{k=h}^{n} c_{nk} \quad (\, h > n \text{ için } r_{hn} = 0\,) \tag{3.1.53}$$

ile tanımlanan r_{nh} sonlu toplam olduğundan vardır. Buna göre (3.1.1.51) den $\overline{bnd}$ bir üst sınırı göstermek üzere ;

$$\exists m \in \mathbb{N}^*, \qquad \mu = \overline{\underset{h \geq m}{bnd}} \sum_{n=h}^{\infty} \left| r_{nh} - r_{n-1\,h} \right| < \frac{1}{|q|} \text{ dir.} \tag{3.1.54}$$

Böylece m ve μ sabitleri belirlenir. Ayrıca hipotezden;

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left| r_{nh} - r_{n-1\,h} \right| < \infty \quad \text{(h=1,2, ... ,m-1)} \tag{3.1.55}$$

s_0 ın uygun tanımıyla ve (3.1.50) den

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k = \sum_{k=1}^{n} \left(r_{nk} - r_{nk+1} \right) s_k \\ &= \left(r_{n1} - r_{n2} \right) s_1 + \left(r_{n2} - r_{n3} \right) s_2 + \cdots + \left(r_{n\,n-1} - r_{nn} \right) s_{n-1} + \left(r_{nn} - r_{n\,n+1} \right) s_n \\ &= r_{n1}.s_1 + r_{n2}\left(s_2 - s_1 \right) + r_{n3}\left(s_3 - s_2 \right) + \cdots + r_{nn}\left(s_n - s_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} r_{nk}\left(s_k - s_{k-1} \right) + r_{n1} s_0 \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

Buradan,

$$J_n - J_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(r_{nk} - r_{n-1\,k} \right)\left(s_k - s_{k-1} \right) + \left(r_{n1} - r_{n-11} \right) s_0$$

$\forall N \geq m$ tam sayısı için,

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{N} \left| J_n - J_{n-1} \right| &= \sum_{n=m}^{N} \left| \sum_{k=1}^{n} \left(r_{nk} - r_{n-1\,k} \right)\left(s_k - s_{k-1} \right) + \left(r_{n1} - r_{n-11} \right) s_0 \right| \\ &\leq \sum_{n=m}^{N} \sum_{k=1}^{m-1} \left| r_{nk} - r_{n-1\,k} \right| \left| s_k - s_{k-1} \right| + \sum_{n=m}^{N} \left| r_{n1} - r_{n-11} \right| \left| s_0 \right| \\ &\quad + \sum_{n=m}^{N} \sum_{k=m}^{n} \left| r_{nk} - r_{n-1k} \right| \left| s_k - s_{k-1} \right| \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left| s_k - s_{k-1} \right| \sum_{n=m}^{N} \left| r_{nk} - r_{n-1\,k} \right| + \left| s_0 \right| \sum_{n=m}^{N} \left| r_{n1} - r_{n-11} \right| + \end{aligned}$$

$$+\sum_{k=m}^{N}|s_k - s_{k-1}|\sum_{n=k}^{N}|r_{nk} - r_{n-1k}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m-1}|s_k - s_{k-1}|\sum_{n=m}^{\infty}|r_{nk} - r_{n-1k}| + |s_0|\sum_{n=m}^{\infty}|r_{n1} - r_{n-11}| +$$

$$+\sum_{k=m}^{N}|s_k - s_{k-1}|\sum_{n=k}^{\infty}|r_{nk} - r_{n-1k}|$$

(3.1.54) ve (3.1.55) ten

$$\sum_{n=m}^{N}|J_n - J_{n-1}| \leq \mathrm{H} + \mu\sum_{k=m}^{N}|s_k - s_{k-1}| \qquad (3.1.56)$$

Burada H sonlu ve N den bağımsızdır. Diğer yandan (t_n) dizisi mutlak yakınsak ve (3.1.52) den

$s_n = t_n + qJ_n$ olduğundan,

$$\sum_{n=m}^{N}|s_n - s_{n-1}| \leq \sum_{n=m}^{N}|t_n - t_{n-1}| + |q|\sum_{n=m}^{N}|J_n - J_{n-1}|$$

ve (3.1.56) ile

$$\sum_{n=m}^{N}|s_n - s_{n-1}| \leq \sum_{n=m}^{\infty}|t_n - t_{n-1}| + q\mathrm{H} + q\mu\sum_{k=m}^{N}|s_k - s_{k-1}|$$

$$(1-|q|\mu)\sum_{n=m}^{N}|s_n - s_{n-1}| \leq \sum_{n=m}^{\infty}|t_n - t_{n-1}| + q|\mathrm{H}|$$

Burada $(1-|q|\mu)\sum_{n=m}^{N}|s_n - s_{n-1}|$, N dan bağımsız bir üst sınıra sahiptir. (3.1.54) ile

$1-|q|\mu > 0$ olduğundan,

$\sum_{n=m}^{\infty}|s_n - s_{n-1}| < \infty$ ise (s_n) dizisi mutlak yakınsaktır.

3.2.NÖRLUND TİPİ METOD İÇİN MERCERIAN TEOREMİ

Klasik Mercer teoremindeki (C,1) metodu yerine Nörlund Tipi Metodun alınabileceğini gösteren aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.2.1:[9]

$(p_n), 0 < p_0 \le p_1 \le \cdots$ ve $P = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$ olmak üzere $\dfrac{p_n}{P_n} \to 0$

$(n \to \infty)$ özeliğini sağlayan bir reel sayı dizisi olsun. Kabul edelim ki verilen bir $\alpha \left(0 < \alpha \le \dfrac{1}{2} \right)$ sayısı ve $1 < t < 2$ sayısı mevcut, öyle ki;

$$\frac{P_k}{P_n} \le \frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)} \tag{3.2.1}$$

olan bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı için,

$$(1-t\alpha)P_{n-k} + t(1-\alpha)P_k - (1-2\alpha)P_n \ge \delta P_n \ (\delta > 0) \tag{3.2.2}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu takdirde (s_n) verilen bir dizi olmak üzere,

$$\lim_{n} \left[\alpha s_n + (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k} \right] = s \tag{3.2.3}$$

ise $\lim_{n} s_n = s$ dir. (3.2.4)

İspat:[9]

Genellikten bir şey kaybetmeksizin s=0 kabul edebiliriz. Çünkü teoremi s=0 için ispatladığımız takdirde s_n yerine $\overline{s}_n = s_n - s$ alınarak;

$\lim_{n} \left(\overline{s}_n + \dfrac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k \overline{s}_{n-k} \right) = 0$ iken $\lim_{n} \overline{s}_n = 0$ olur. Buradan,

$$\alpha(s_n - s) + \frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k (s_{n-k} - s) =$$

$$= \alpha s_n - \alpha s + \frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k} - s(1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k$$

$$= \alpha s_n + \frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k} - \alpha s - s + \alpha s \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ise $\lim_{n} (s_n - s) = 0$ dır. Böylece,

$\lim_{n} s_n = s$ olacaktır. O halde;

$\alpha s_n + \dfrac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k} \to 0 \ (n \to \infty)$ iken $s_n \to 0 \ (n \to \infty)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunu göstermek için aksini varsayalım. Yani;

$$\alpha s_n + \frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k} \to 0 \ (n\to\infty) \text{ iken } s_n \not\to 0 \quad (n\to\infty) \text{ olsun.}$$

Bu durumda $\limsup_n s_n = +\infty$ kabul edebiliriz.[9]

Bu durumda doğal sayıların $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} = (n_1, n_2, \ldots)$ alt dizisi vardır. Öyle ki;

$$\lim_k s_{n_k} = +\infty$$

ve n, $\{n_k\}$ alt dizisinin bir terimi olacağından $\forall n < n_k$ için,

$$|s_n| < s_{n_k} \tag{3.2.6}$$

Her bir n için aşağıdaki özelliklerle $m = m_n$ ve $m' = m_n$ sayılarını belirleyelim.

$$\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m-1} p_k = \frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)} + \varphi + \varepsilon_n \tag{3.2.7}$$

Burada $\varepsilon_n \to 0 \quad (n\to\infty)$, $\varphi > 0$ seçilen yeterince küçük bir sayı $n\to\infty$ için $n - m \to \infty$ dur.

(3.2.6) dan k=1,2, ... için $|s_{n-k}| < s_n$ (3.2.8)

$1 < t < 2$ olmak üzere,

$$s_{n-k} > (t-1)s_n \quad \text{k= 1,2, ... ,n için,}$$

eşitsizliği (3.2.3) ile çelişeceğinden;

$$\begin{aligned} s_{n-1} &\geq (t-1)s_n \\ s_{n-2} &\geq (t-1)s_n \\ &\vdots \\ s_{n-m'+1} &\geq (t-1)s_n \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

ve $s_{n-m'} < (t-1)s_n$ olacak şekilde bir en küçük m' sayısı mevcut olmalıdır.

Eğer $m' \geq m$ ise

$$\left|\alpha s_n + (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k}\right|$$

$$\geq \left|\alpha s_n + (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m-1} p_k s_{n-k}\right| - \left|(1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=m}^{n} p_k s_{n-k}\right| \tag{3.2.10}$$

eşitsizliğinde;

$$\alpha s_n + (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m-1} p_k s_{n-k}$$

$$= \alpha s_n + (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\left[p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + p_2 s_{n-2} + \cdots + p_{m-1} s_{n-m+1}\right] \quad \text{(3.2.9) dan}$$

$$\geq \alpha s_n + (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\left[(p_0 + p_1 + \cdots + p_m)(t-1)s_n\right]$$

$$= \alpha s_n + (1-\alpha)(t-1)s_n \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m-1} p_k \quad \text{(3.2.7) den}$$

$$= s_n\left[\alpha + (1-\alpha)(t-1)\left(\frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)} + \varphi + \varepsilon_n\right)\right]$$

$$= s_n\left[\alpha + \frac{(1-\alpha)(t-1)(1-2\alpha)}{t(1-\alpha)} + (\varphi + \varepsilon_n)(1-\alpha)(t-1)\right] \qquad (3.2.11)$$

elde edilir.

$0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $1 < t < 2$, $\varphi > 0$ olduğundan (3.2.11) daki ifade sıfırdan büyüktür. O halde;

$$\left|\alpha s_n + (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m-1} p_k s_{n-k}\right|$$

$$\geq s_n\left[\alpha + \frac{(1-\alpha)(t-1)(1-2\alpha)}{t(1-\alpha)} + (\varphi + \varepsilon_n)(1-\alpha)(t-1)\right] \qquad (3.2.12)$$

$$\left|(1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=m}^{n} p_k s_{n-k}\right|$$

$$\leq \frac{1-\alpha}{P_n}\left(p_m|s_{n-m}| + p_{m+1}|s_{n-m-1}| + \cdots + p_n|s_0|\right) \quad \text{(3.1.28) den}$$

$$\leq \frac{1-\alpha}{P_n}\left(\sum_{k=m}^{n} p_k\right)s_n$$

$$\frac{1-\alpha}{P_n}\left(\sum_{k=m}^{n} p_k\right)s_n = s_n(1-\alpha)\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k - \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{m-1} p_k\right]$$

$$= s_n(1-\alpha)\left[1 - \frac{(1-2\alpha)}{t(1-\alpha)} - (\varphi + \varepsilon_n)\right]$$

$$= s_n\left[(1-\alpha)-\frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{t(1-\alpha)}-(\varphi+\varepsilon_n)(1-\alpha)\right]$$

$$\left|(1-\alpha)\frac{1}{\mathrm{P}_n}\sum_{k=m}^{n} p_k s_{n-k}\right| \le s_n\left[(1-\alpha)-\frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{t(1-\alpha)}-(\varphi+\varepsilon_n)(1-\alpha)\right] \quad (3.2.13)$$

(3.2.12) ve (3.2.13) deki ifadeler (3.2.10) da yerine yazılırsa;

$$\left|\alpha s_n+(1-\alpha)\frac{1}{\mathrm{P}_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k}\right|$$

$$\ge s_n\left\{\alpha+\frac{(1-\alpha)(t-1)(1-2\alpha)}{t(1-\alpha)}+(1-\alpha)(t-1)(\varphi+\varepsilon_n)\right.$$

$$\left.-(1-\alpha)+\frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{t(1-\alpha)}+(\varphi+\varepsilon_n)(1-\alpha)\right\}$$

$$= s_n\left\{\alpha+(1-2\alpha)-1+\alpha+(1-\alpha)(\varphi+\varepsilon_n)t\right\}$$

$$= s_n(1-\alpha)(\varphi+\varepsilon_n)t$$

$(1-\alpha)(\varphi+\varepsilon_n)t$ sınırlı ve $s_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ olduğundan;

$$s_n(1-\alpha)(\varphi+\varepsilon_n)t \to \infty \quad (n\to\infty)$$

Bu durumda,

$\left|\alpha s_n+(1-\alpha)\frac{1}{\mathrm{P}_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k}\right| \to \infty \quad (n\to\infty)$ olur ki bu da (3.2.3) ile çelişir.

Bu durumda $m' < m$ kabul edebiliriz.

$n\to\infty$ iken $n-m\to\infty$ olduğundan, $n-m'\to\infty$ olacaktır. Hipotez gereğince $\varepsilon>0$ için,

$$\left|\alpha s_{n-m'}+(1-\alpha)\frac{1}{\mathrm{P}_{n-m'}}\sum_{k=0}^{n-m'} p_k s_{n-m'-k}\right| < \varepsilon \quad (3.2.14)$$

ifadesi yeterince büyük n ler için sağlanır. Bu ifade $\frac{\mathrm{P}_{n-m'}}{\mathrm{P}_n}>0$ ile çarpılırsa;

$\left|\alpha s_{n-m'}\frac{\mathrm{P}_{n-m'}}{\mathrm{P}_n}+(1-\alpha)\frac{1}{\mathrm{P}_n}\sum_{k=0}^{n-m'} p_k s_{n-m'-k}\right| < \varepsilon\frac{\mathrm{P}_{n-m'}}{\mathrm{P}_n}$ elde edilir. Bu ifade (3.2.3) ten çıkarılırsa;

$$\left|\alpha s_n+\frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k s_{n-k}-\left(\alpha s_{n-m'}\frac{P_{n-m'}}{P_n}+(1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n-m'}p_k s_{n-m'-k}\right)\right|$$

$$<\varepsilon\left(1-\frac{P_{n-m'}}{P_n}\right)$$

$$\left|\alpha\left(s_n-\frac{P_{n-m'}}{P_n}s_{n-m'}\right)+\frac{1-\alpha}{P_n}\left(\sum_{k=0}^{n}p_k s_{n-k}-\sum_{k=0}^{n-m'}p_k s_{n-m'-k}\right)\right|<2\varepsilon \qquad (3.2.15)$$

$m'<m<n$ olduğundan;

$$\sum_{k=0}^{n}p_k s_{n-k}-\sum_{k=0}^{n-m'}p_k s_{n-m'-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m'-1}p_k s_{n-k}+\sum_{k=m'}^{n}p_k s_{n-k}-\sum_{k=0}^{n-m'}p_k s_{n-m'-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m'-1}p_k s_{n-k}+\sum_{k=0}^{n-m'}\left(p_{k+m'}-p_k\right)s_{n-m'-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m'-1}p_k s_{n-k}+\left[\left(p_{m'}-p_0\right)s_{n-m'}+\left(p_{m'+1}-p_1\right)s_{n-m'-1}+\ldots+\left(p_n-p_{n-m'}\right)s_0\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{m'-1}p_k s_{n-k}+\sum_{k=0}^{n-m'}\left(p_{n-k}-p_{n-m'-k}\right)s_k \text{ dır.}$$

İfadesi (3.2.15) de yerine yazılırsa;

$$\left|\alpha\left(s_n-\frac{P_{n-m'}}{P_n}s_{n-m'}\right)+\frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{m'-1}p_k s_{n-k}+\frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n-m'}\left(p_{n-k}-p_{n-m'-k}\right)s_k\right|$$

$$\geq\left|\alpha\left(s_n-\frac{P_{n-m'}}{P_n}s_{n-m'}\right)+\frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{m'-1}p_k s_{n-k}\right|$$

$$-\left|\frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n-m'}\left(p_{n-k}-p_{n-m'-k}\right)s_k\right| \text{ olur.} \qquad (3.2.16)$$

$$\alpha\left(s_n-\frac{P_{n-m'}}{P_n}s_{n-m'}\right)+\frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{m'-1}p_k s_{n-k}$$

$$=\alpha\left(s_n+\frac{P_{n-m'}}{P_n}\left(-s_{n-m'}\right)\right)+(1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m'-1}p_k s_{n-k}$$

(3.2.9) dan $-s_{n-m'}>-(t-1)s_n$ ve $s_{n-k}\geq(t-1)s_n$ olduğundan;

$$> \alpha\left(s_n - \frac{P_{n-m'}}{P_n}(t-1)s_n \right) + (1-\alpha)\left(\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m'-1} p_k \right)(t-1)s_n$$

$$= s_n\left[\alpha\left(1 - \frac{P_{n-m'}}{P_n}(t-1) \right) + (1-\alpha)(t-1)\frac{P_{m'-1}}{P_n} \right] > 0$$

$$\left| \alpha\left(s_n - \frac{P_{n-m'}}{P_n} s_{n-m'} \right) + (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m'-1} p_k s_{n-k} \right|$$

$$> s_n\left[\alpha\left(1 - \frac{P_{n-m'}}{P_n}(t-1) \right) + (1-\alpha)(t-1)\frac{P_{m'-1}}{P_n} \right] \tag{3.2.17}$$

$$\left| \frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n-m'} \left(p_{n-k} - p_{n-m'-k} \right) s_k \right|$$

$$\leq \frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n-m'} \left(p_{n-k} - p_{n-m'-k} \right)\left| s_k \right|$$

(3.2.6) dan $\left| s_k \right| < s_n$ olduğundan;

$$< (1-\alpha)\frac{1}{P_n}\left[\sum_{k=0}^{n-m'} \left(p_{n-k} - p_{n-m'-k} \right) \right] s_n$$

$$= s_n(1-\alpha)\frac{1}{P_n}\left[\left(p_n - p_{n-m'} \right) + \left(p_{n-1} - p_{n-m'-1} \right) + \cdots + \left(p_{m'} - p_0 \right) \right]$$

$$= s_n(1-\alpha)\frac{1}{P_n}\left[\left(p_{m'} + p_{m'+1} + \cdots + p_{n-1} + p_n \right) - \left(p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-m'} \right) \right]$$

$m' < n$ olduğundan;

$$= s_n(1-\alpha)\frac{1}{P_n}\left[\left(P_n - P_{m'-1} \right) - P_{n-m'} \right]$$

$$= s_n(1-\alpha)\frac{P_n - P_{m'-1} - P_{n-m'}}{P_n} \tag{3.2.18}$$

(3.2.17) ve (3.2.18) den

$$\left| \alpha\left(s_n - \frac{P_{n-m'}}{P_n} x_{n-m'} \right) + \frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{m'-1} p_k s_{n-k} + \frac{1-\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n-m'} \left(p_{n-k} - p_{n-m'-k} \right) s_k \right|$$

$$> s_n \left\{ \alpha \left(1 - \frac{\mathrm{P}_{n-m'}}{\mathrm{P}_n}(t-1) \right) + (1-\alpha)(t-1)\frac{\mathrm{P}_{m'-1}}{\mathrm{P}_n} - (1-\alpha)\frac{\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{m'-1} - \mathrm{P}_{n-m'}}{\mathrm{P}_n} \right\} \quad (3.2.19)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.2.2) ile (3.2.19) da ki parantezin içindeki ifade sınırlı ve $s_n \to \infty \ (n \to \infty)$ olduğundan;

(3.2.15) ile (3.2.16) çelişir.

O halde varsayım yanlıştır.

$s_n \to 0 \ (n \to \infty)$ dır.

3.3. *CESA′RO* ORTALAMALARI İÇİN MERCER TEOREMİ

Teorem 3.3.1:[18] (s_n) verilen bir dizi, β, $1 \le \beta \le 2$ olan bir reel sayı ve $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\lim_n \left[\alpha s_n + (1-\alpha)\frac{1}{\binom{n+\beta}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\beta-1}{\beta-1} s_k \right] = s \quad (3.3.1)$$

ise, $\lim_n s_n = s$ dir. (3.3.2)

İspat:[18] $\alpha > \frac{1}{2}$ Agnew'in verdiği teoremden çıkarılacağından $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ alabiliriz. Ayrıca $\beta = 1$ durumu Mecer'in orijinal teoremi ile sağlanacağından $1 < \beta \le 2$ kabul edebiliriz.

Teoremin ispatı için;

$1 < t < 2$ sayısı ve $\mathrm{P}_n = \binom{n+\beta}{\beta}$ için Teorem 3.2.1 in hipotezinin sağlandığını gösterelim:

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k = \sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k} \quad \text{olacağından;}$$

$$p_{n-k} = \binom{n-k+\beta-1}{\beta-1} \quad \text{buradan} \quad p_k = \binom{k+\beta-1}{\beta-1}$$

$$\mathrm{P}_n = \binom{n+\beta}{\beta} : \frac{n^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \quad (n \to \infty) \tag{3.3.3}$$

$\mathrm{P}_n^* = n^\beta$ yı düşünbiliriz.

$$1 < t < 2 \text{ ve } \frac{\mathrm{P}_k^*}{\mathrm{P}_n^*} = \left(\frac{k}{n}\right)^\beta \le \left(\frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)}\right) \tag{3.3.4}$$

$$\text{Buradan} \quad \frac{k}{n} \le \left(\frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)}\right)^{1/\beta} \quad \text{olacaktır.} \tag{3.3.5}$$

Bu durumda Teorem 3.2.1 den

$$(1-\alpha t)\mathrm{P}_{n-k}^* + t(1-\alpha)\mathrm{P}_k^* > (1-2\alpha+\delta)\mathrm{P}_n^* \quad (\delta > 0)$$

$$(1-\alpha t)(n-k)^\beta + t(1-\alpha)k^\beta > (1-2\alpha+\delta)n^\beta \tag{3.3.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada P_n teorem 3.2.1 in koşullarını sağlar. Yani $\mathrm{P}_n = \binom{n+\beta}{\beta}$ için;

i) $0 < p_0 \le p_1 \le p_2 \le \mathrm{L}$

ii) $\mathrm{P}_n = p_0 + p_1 + \mathrm{L} \;\; p_n$

iii) $\dfrac{p_n}{\mathrm{P}_n} \to 0 \;\; (n \to \infty)$

Şimdi de (3.2.6) eşitsizliğini görelim:

Bunu için $f_t(x) = (1-\alpha t)(1-x)^\beta + t(1-\alpha)x^\beta - (1-2\alpha)$ fonksiyonunu düşünelim.

Bu takdirde (3.2.6) yı $\dfrac{1}{n^\beta}$ ile çarpılıp, $x = \dfrac{k}{n}$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki ifadeye denk olacaktır.

$$1 < t < 2,\; 0 \le x \le \left(\frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)}\right)^{1/\beta} \quad \text{için} \quad f_t(x) > 0 \tag{3.3.7}$$

(3.3.6) yerine (3.3.7) i göstermek yeterlidir.

$f_t(x)$ in $0 \le x \le 1$ aralığındaki minimum değerini bulalım. x_0, bu aralıktaki extremum noktası olsun. Bunun için,

$$f_t'(x_0) = -\beta(1-\alpha t)(1-x_0)^{\beta-1} + \beta t(1-\alpha)x_0^{\beta-1} = 0$$

$$\beta t(1-\alpha)x_0^{\beta-1} = \beta(1-\alpha t)(1-x_0)^{\beta-1}$$

$$\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right)^{\beta-1} = \frac{t(1-\alpha)}{1-\alpha t}$$

$$\left(\frac{1}{x_0}-1\right)^{\beta-1} = \frac{t(1-\alpha)}{1-\alpha t}$$

$$\frac{1}{x_0} = \left(\frac{t(1-\alpha)}{1-\alpha t}\right)^{1/(\beta-1)} + 1$$

$$x_0 = \frac{1}{\left(\frac{t(1-\alpha)}{1-\alpha t}\right)^{1/(\beta-1)} + 1} = \frac{(1-\alpha t)^{1/(\beta-1)}}{(1-\alpha t)^{1/(\beta-1)} + (t(1-\alpha))^{1/(\beta-1)}}$$

x_0 extremum noktasını cinsini belirlemek için $f_t(x)$ in 2. nci türevini alalım.

$$f_t''(x) = \beta(\beta-1)(1-\alpha t)(1-x)^{\beta-2} + \beta(\beta-1)(t(1-\alpha))x^{\beta-2}$$

$$f_t''(x_0) = \beta(\beta-1)(1-\alpha t)\left[1-\frac{(1-\alpha t)^{1/(\beta-1)}}{(1-\alpha t)^{1/(\beta-1)} + (t(1-\alpha))^{1/(\beta-1)}}\right]^{\beta-2}$$

$$+\beta(\beta-1)(t(1-\alpha))\left[\frac{(1-\alpha t)^{1/(\beta-1)}}{(1-\alpha t)^{1/(\beta-1)} + (t(1-\alpha))^{1/(\beta-1)}}\right]^{\beta-2}$$

elde edilir.

$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, $1 < \beta \le 2$, $1 < t < 2$ olduğundan;

$f_t''(x_0)$ daki her bir terim pozitif olacağından $f_t''(x_0) > 0$ olur.

x_0 , $f_t(x)$ fonksiyonunun $0 \le x \le 1$ aralığındaki minimum noktasıdır.

$$f_t(x_0) = \left[\left(\frac{1}{1-\alpha t}\right)^{1/(\beta-1)} + \left(\frac{1}{t(1-\alpha)}\right)^{1/(\beta-1)}\right]^{1-\beta} - (1-2\alpha) > 0 \quad \text{dır.}$$

$1 < t < 2$ ve $1 < \beta \le 2$ için $f_t(x) > 0$ (3.3.8)

$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, $1 < \beta \le 2$, $1 < t < 2$ olduğundan;

$$0<1-2\alpha<\frac{1}{3}\ ,\ \frac{3}{4}<\frac{1}{t(1-\alpha)}<2 \text{ ve } \frac{1}{2}\leq\frac{1}{\beta}<1 \text{ dir.}$$

Buradan $0<\left(\frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)}\right)<\frac{2}{3}<1 \Rightarrow 0<\left(\frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)}\right)^{1/\beta}<1$

(3.3.8) ile birlikte $1<t<2$ ve $0\leq x\leq\left(\frac{1-2\alpha}{t(1-\alpha)}\right)^{1/\beta}<1$ $f_t(x)>0$ gerçekleşir.

Böylece ispat tamamlanır.

4.BULGULAR VE TARTIŞMALAR

Bu bölümde (c_{nk}) matrisinin üçgensel olması durumunda Teorem 3.1.5, Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.7 deki (s_n) dizisinin sınırlılık varsayımının yumuşatılabileceğini aşağıdaki sonuç ile görelim:

Sonuç 4.1.1:

Eğer (c_{nk}) üçgensel bir matris ise, (s_n) nin sınırlılık hipotezi Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.6 dan atılabilir. Teorem 3.1.7 de ise onun yerine $\sum_{k=1}^{n} c_k s_k$ ($c_k=\lim_n c_{nk}$) serisinin mutlak yakınsaklığı hipotezi getirilir.

Teorem 4.1.1:

(c_{nk}) regüler, üçgensel bir matris, (s_n) verilen bir dizi ve $q\in$ £ olsun. Eğer,

$$s_n-q\sum_{k=1}^{n}c_{nk}s_k\to(1-q)s \quad (n\to\infty)$$

ve $$|q|<1\Big/\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{n}|c_{nk}|$$

ise $$s_n\to s \quad (n\to\infty) \text{ dir.}$$

Teorem 4.1.2:

(c_{nk}) sıfır limitini koruyan üçgensel bir matris, (s_n) verilen bir dizi olmak üzere; $q \in$ £ olsun.

$$s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ve $$|q| < 1 \Big/ \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}|$$

ise $s_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ dır.

Teorem 4.1.3:

(c_{nk}) yakınsaklığı koruyan üçgensel matris, (s_n) verilen bir dizi $q \in$ £ ve $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k s_k|$ yakınsak ($c_k = \lim_n c_{nk}$) olsun. Eğer,

$$s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \text{ yakınsak } (n \to \infty)$$

ve $$|q| < 1 \Big/ \left[\overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| - \sum_{k=1}^{n} \lim_n |c_{nk}| \right]$$

ise $s_n \to s \ (n \to \infty)$ dir.

İspat:

Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2 nin bir sonucudur. Teorem 4.1.1 de (s_n) yerine $(s_n - s)$ alınarak Teorem 4.1.2 den ispatlanır.

$$(s_n - s) - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk}(s_k - s) = \left(s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \right) - s\left(1 - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} \right) \text{ olur.}$$

Teorem 4.1.1 ve (c_{nk}) nın regülerliğinden;

$$\left(s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \right) - s\left(1 - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} \right) \to o \ (n \to \infty)$$

ve $$|q| < 1 \Big/ \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \text{ dir.}$$

O halde Teorem 4.1.2 ile $(s_n - s) \to 0 \ (n \to \infty)$ dır.

Buradan $s_n \to s \ (n \to \infty)$ elde edilir.

Teorem 4.1.2 de ise (s_n) nin sınırlılığı Teorem 3.1.8 ile gösterilebilir. Buradan Teorem 3.1.6 ile $s_n \to 0 \ (n \to \infty)$ elde edilir.

Teorem 4.1.3 ün ispatı:

$c_k = \lim_n c_{nk} = 0$ olsun. ($\forall k \in \mathbb{N}$ için)

$\lim_n |c_{nk}| = 0$ olacağından, hipotez ile

$|q| < 1 \Big/ \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}|$ olur.

$(c_{nk}) \in (c, c)$ ve $\lim_n c_{nk} = 0$ olduğundan, (c_{nk}) sıfır limitini korur ve hipotez ile üçgenseldir.

$s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k \to 1 \quad (n \to \infty)$ olsun.

$$(s_n - 1) - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk}(s_n - 1)$$

$$= \left(s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k\right) - 1\left(1 - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk}\right) \to 1 - 1(1 - q0) = 0 \quad (n \to \infty)$$

Teorem 4.1.2 gereğince $s_n - 1 \to 0 \ (n \to \infty)$ olur. Buradan

$s_n \to 1 \quad (n \to \infty)$ elde edilir.

Şimdi $\lim_n c_{nk} = c_k \neq 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$ için) durumunu inceleyelim. (3.1.43) ve (3.1.46) da tanımladığımız (ω_{nk}) ve (γ_{nk}) yi kullanarak Teorem 3.1.8 yardımıyla (s_n) nin sınırlılığını görelim:

$$\omega_{nk} = |c_k| \operatorname{sgn} c_{nk}$$

$$\gamma_{nk} = c_{nk} - \omega_{nk} = (|c_{nk}| - |c_k|) \operatorname{sgn} c_{nk}$$

(c_{nk}) matrisi üçgensel olduğundan, $\forall k > n$ için $\operatorname{sgn} c_{nk} = \operatorname{sgn} 0 = 0$ olur. Burada (ω_{nk}) ve (γ_{nk}) matrisleri de üçgenseldir. Ayrıca;

$$|q| < 1 \Big/ \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}| \text{ olur.} \tag{4.1}$$

Teorem 3.1.8 ile (3.1.41) koşulu (γ_{nk}) için sağlanmış olur. Buna ek olarak;

$$s_n - q\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk}s_k = \left(s_n - q\sum_{k=1}^{n}c_{nk}s_k\right) + q\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}s_k$$

ifadesindeki $s_n - q\sum_{k=1}^{n}c_{nk}s_k$ yakınsak olduğundan sınırlı ve hipotez ile

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_{nk}s_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|\omega_{nk}||s_k| = \sum_{k=1}^{n}|c_k||s_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|c_k s_k| < \infty \text{ dur.}$$

Buradan,

$$s_n - q\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk}s_k \text{ sınırlıdır.} \tag{4.2}$$

(4.1) ve (4.2) nin bir sonucu olarak Teorem 3.1.8 gereğince (s_n) sınırlı olur. Ayrıca (c_{nk}) yakınsaklığı koruyan bir matris olduğundan Teorem 3.1.7 ile (s_n) yakınsaktır.

Eğer Teorem 3.1.8, üçgensel olmayan (c_{nk}) matrisine genişletilseydi ve $\sum_{k=n+1}^{\infty}c_{nk}s_k = O(1)$ $(n \to \infty)$ kabul edilseydi (s_n) dizisinin sınırlı olduğu Teorem 3.1.8 in bir uygulaması olacaktı. Şimdi bunu görelim.

Teorem 4.1.4:

(c_{nk}) bir sonsuz matris ve (s_n) sınırlı bir dizi olsun.

Eğer, $\sum_{k=n+1}^{\infty}c_{nk}s_k = O(1)$

ve $|q| < 1 \Big/ \overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|$

ve $s_n - q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k$ sınırlı

ise (s_n) sınırlıdır.

İspat:

Teorem 3.1.8 in koşullarını sağladığını görelim:

$$s_n - q\sum_{k=1}^{n}c_{nk}s_k = s_n - q\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k - \sum_{k=n+1}^{\infty}c_{nk}s_k\right)$$

$$= \left(s_n - q\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}s_k\right) + q\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}c_{nk}s_k\right)$$

Hipotezden $s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k$ sınırlıdır.

$\forall n \in ¥$ için, $\sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}|$ sağlandığından;

$$\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \le \overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}|$$

$$|q| < 1\Big/\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| \le 1\Big/\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \text{ dır.}$$

O halde, Teorem 3.1.8 den (s_n) sınırlıdır.

Burada özel olarak $s_n = O\left(\dfrac{1}{c_{nn+1}}\right)$ $(n \to \infty)$ ve $\forall k > n+1$ için $c_{nk} = 0$ alınabilir. Çünkü

$$s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k = s_n - q\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{nk} s_k\right)$$

$$= \left(s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k\right) + q\left(c_{n\,n+1} s_{n+1}\right)$$

olduğundan, $s_n - q\sum_{k=1}^{n} c_{nk} s_k$ sınırlı olur.

Şimdi Teorem 4.1.4 deki $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_{nk} s_k = O(1)$ $(n \to \infty)$ koşulunun gerekliliğini aşağıdaki örnek ile gösterelim:

Örnek 4.1.1:

$$c_{nk} = \begin{cases} 1 \ , & k = n+1 \\ 0 \ , & k \ne n+1 \end{cases} \ , \quad |q| < 1 \ , \quad s_n = \frac{1}{q^n} \text{ olarak alalım.}$$

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k = \frac{1}{q^n} - q.1.\frac{1}{q^{n+1}} = 0$$

ve $$\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| = \overline{\lim_n} 1 = 1$$

olduğundan, Teorem 4.1.4 ün koşulları sağlanır. Fakat (s_n) dizisi sınırlı değildir.

Çünkü

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_{nk}s_k = 1\frac{1}{q^{n+1}} = \frac{1}{q^{n+1}}, \ |q|<1 \text{ olduğundan, } \frac{1}{q^{n+1}} \neq O(1) \ (n\to\infty) \text{ dir.}$$

Ayrıca bu örnek Teorem 4.1.2 deki (c_{nk}) nın üçgenselliği hipotezinin, niçin gerekli olduğunu da açıklar. Çünkü

$\lim_n c_{nk} = 0$ ve $\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| = 1 < \infty$ olduğundan, $(c_{nk}) \in (c_0, c_0)$ ile

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}s_k = 0 \to 0 \ (n\to\infty)$$

ve $$|q| < 1 = 1\Big/\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|$$

olduğu halde $s_n \not\to 0 \ (n\to\infty)$ dır.

Bunun nedeni ise, (c_{nk}) nın üçgensel olmamasıdır.

Teorem 4.1.5:

(a_{nk}) regüler bir matris, (s_n) sınırlı bir dizi,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k \to 1 \quad (n\to\infty)$$

$$\liminf_n \left[|a_{nn}| - \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*}|a_{nk}| \right] > 0$$

ise $s_n \to 1 \ (n\to\infty)$ dir.

(burada $\sum_{k=1}^{\infty}{}^{*}$: serisinde k=n.inci terimin atılmasıdır)

İspat:

(c_{nk}) regüler matris, (s_n) sınırlı bir dizi ve $q \neq 1$ olsun. Bu durumda (a_{nk}) matrisi;

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1-qc_{nn}}{1-q}, & k = n \\[2ex] \dfrac{-qc_{nk}}{1-q}, & k \neq n \end{cases}$$

Burada (a_{nk}) matrisi, regüler ve

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k \to (1-q)1 \quad (n\to\infty)$$

ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k \to 1 \ (n\to\infty)$ olacaktır.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k = a_{nn} s_n + \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*} a_{nk} s_k$$

$$= \frac{1-qc_{nn}}{1-q} s_n + \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*} \left(\frac{-qc_{nk}}{1-q}\right) s_k$$

$$= \frac{1}{1-q} s_n - \frac{q}{1-q} c_{nn} s_n - \frac{q}{1-q} \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*} c_{nk} s_k$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(s_n - q\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} s_k \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k \to \frac{1}{1-q}\big((1-q)1\big) = 1 \quad (n\to\infty) \text{ olur.}$$

Böylece Teorem 4.1.5 e göre $\liminf_n \left[|a_{nn}| - \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*} |a_{nk}| \right] > 0$ şartıyla,

$s_n \to 1 \ (n\to\infty)$ olacaktır.

$$\liminf_n \frac{1}{|1-q|}\left(|1-qc_{nn}| - \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*} |q||c_{nk}| \right) > 0$$

$$\liminf_n \left(|1-qc_{nn}| + |qc_{nn}| - \sum_{k=1}^{\infty} |q||c_{nk}| \right) > 0$$

$$|q| < \liminf_n \left[\frac{|1-qc_{nn}| + |qc_{nn}|}{\sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}|} \right] \quad \text{olur.}$$

Şimdi Teorem 4.1.5 in bir uygulaması olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.6:

(c_{nk}) regüler bir matris, (s_n) sınırlı bir dizi ve $q \neq 1$ bir kompleks sayı olsun. Eğer;

$$s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \to (1-q)1 \quad (n\to\infty)$$

ve $$|q| < \liminf_n \left[\frac{|1-qc_{nn}|+|qc_{nn}|}{\sum_{k=0}^{\infty}|c_{nk}|} \right]$$

ise, $s_n \to 1 \quad (n \to \infty)$ dir.

İspat:

Teorem 4.1.5 e göre $\liminf_n \left(|1-qc_{nn}|+|qc_{nn}| - \sum_{k=1}^{\infty}|q||c_{nk}| \right) > 0$ dır.

Buradan $|q| < \liminf_n \left[\frac{|1-qc_{nn}|+|qc_{nn}|}{\sum_{k=0}^{\infty}|c_{nk}|} \right]$ olacaktır.

Teorem 3.1.5 de q üzerindeki koşulu;

$|q| < 1 \Big/ \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| = \liminf_n \left[1 \Big/ \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}| \right]$ şeklinde gösterelim.

Buradan,

$|1-qc_{nn}|+|qc_{nn}| \geq 1$ olduğundan;

$$\liminf_n \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}|c_{nk}|} \right) \leq \liminf_n \left[\frac{|1-qc_{nn}|+|qc_{nn}|}{\sum_{k=0}^{\infty}|c_{nk}|} \right] \text{ olur.}$$

Bu nedenle Teorem 4.1.6, Teorem 3.1.5 i içerir. Burada $(c_{nk}), c_{nn} \to 0 \ (n \to \infty)$ olan regüler matris ise Teorem 3.1.5 ile Teorem 4.1.6 çakışır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Materyal ve metotlar bölümünde regüler matrisler ve yakınsaklığı koruyan matrisler kullanılarak verilen Mercerian Teoremler incelenmiştir. Bulgular ve tartışmalar bölümünde ise bu matrisleri üçgensel alarak dizi üzerindeki sınırlılık şartı kaldırılmş ve daha geniş dizi uzayları ile çalışılması sağlanmıştır. Matris üzerinde ki şartları ağırlaştırıldığında dizi üzerinde ki şartlar hafifleştirilebilmektedir. Ayrıca dizi üzerine bazı koşulları konulduğunda da çalışacağımız matrisler sınıfını genişletebiliriz.

Problem 5.1.1:

$s=(s_n)\in l_\infty$ ve $s_n - s_{n-1} \to 0 \ (n\to\infty)$, $s_0=0$ koşulları sağlansın.

(c_{nk}) pozitif, regüler, üçgensel bir matris olmak üzere;

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}s_k = s \quad \text{iken} \quad s_n \to s \quad (n\to\infty) \text{ olması için,}$$

(c_{nk}) üzerine konulacak koşulları araştıralım:

Çözüm:

m pozitif bir tamsayı olmak üzere;

$\sum_{k=1}^{m} c_{nk}s_k$ Abel Kısmi Toplamasını uygulayalım:

$$\sum_{k=1}^{m} c_{nk} s_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{v=1}^{k} c_{nv} \right) \left(s_k - s_{k+1} \right) + \sum_{v=1}^{m} c_{nv} \left(s_{m+1} \right)$$

$m \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^{k} c_{nv} \right) \left(s_k - s_{k+1} \right) + \left(\sum_{v=1}^{\infty} c_{nv} \right) \lim_m \left(s_{m+1} \right) \text{ olur.}$$

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^{k} c_{nv} \right) \left(s_k - s_{k+1} \right) + \lim_n \left(\sum_{v=1}^{\infty} c_{nv} \right) \lim_m \left(s_{m+1} \right) = s \tag{5.1}$$

Burada $b_{nk} = \sum_{v=1}^{k} c_{nv}$ alalım. $\left(b_{nk} \right)$ matrisi üzerine;

i) $\lim_n b_{nk} = 0$

ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = 1$

iii) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| b_{nk} \right| < \infty$

şartlarını koyduğumuzda regüler bir matris olacaktır.

$\left(b_{nk} \right)$ regüler ve $\lim_k \left(s_k - s_{k-1} \right) = 0$ olduğundan;

$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \left(s_k - s_{k-1} \right) = 0$ olacaktır.

Ayrıca $\left(c_{nk} \right)$ regüler olduğundan;

$$\lim_n \left(\sum_{v=1}^{\infty} c_{nv} \right) \lim_m \left(s_{m+1} \right) = \lim_m \left(s_{m+1} \right) \lim_n \sum_{v=1}^{\infty} c_{nv}$$

$$= \lim_m \left(s_{m+1} \right) \lim_n \sum_{v=1}^{\infty} c_{nv} = \lim_m \left(s_{m+1} \right)$$

Bu durumda (4.3) den $\lim_n s_{n+1} = s$ olur.

Buradan,

$$\lim_n s_n = s \text{ dir.}$$

KAYNAKLAR

[1] Agnew,R.P., “Mercer’s Summability Theorem”,Emmanuel Collage, Cambridge, 123-125,(1952)

[2] Fridy,J.A., “Noninclusion Theorems for Summability Matrices”,J,Math.& Math.Sci.,**20(3):**511-516,(1997)

[3] Fichtenholz,G.M., “Summability through Functional Analysis”,Gordon and Breach,Science Publishers,New York,130s.,(1970)

[4] Hardy,G.H. ve Riesz,M., “The General Theory of Dirichet’s Series”,Cambridge Tract No:**18**,70s.,(1915)

[5] Hardy,G.H., “Divergent Series”,OxfordUniversity Press,London,396s.,(1963)

[6] Kızmaz,H., “Fonksiyonel Analize Giriş” Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi, Trabzon,322s.,(1993)

[7] Knopp,K., “Infinite Sequences and Series” Dover Publications,New York,186s., (1956)

[8] Knopp,K., “Theory and Application of Infinite Series”,Great Britain by Blackie&Son,Ltd.,Glasgow,562s.,(1964)

[9] Klee,K. and Szüsz,P.,“A Mercerian Theorem for Nörlund Means”,Monatshefte für Mathematik by Springer- Verlag,**77:**113–119,(1973)

[10] Love,E.R. ve Leslie,R.T., “An Extension of Mercer’s Theorem”,The American Math.Soc.,448-457,(1951)

[11] Love,E.R., “Mercer’s Summability Theorem”,Journal London Math.Soc.,**27:**413-428,(1952)

[12] Maddox,I.J., “Elements of Functional Analysis”,Cambridge University Press, 208s.,(1970)

[13] Maddox,I.J., “Infinite Matrices of Operators ”,Springer-Verlag,Berlin Heidelberg,121s.,(1980)

[14] Martic,B., “On Some Mercerian Theorems”,Puplications De L’institut Mathématique,**30(40):**,113-115,(1981)

[15] Maric,V., ve Tomic’,M., “On A Method for Inverse Theorems for (C,1) and Gap (C,1) Summability”,J.Math.&Math.Sci.,**7(3):**469-475,(1984)

[16] Peyerimhoff,A., “Lecture Notes in Mathematics”,Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,111s.,(1969)

[17] Powel,R.E. ve Shah,S.M., “Summability Theory and Its Applications”,Von Nostrand Reinhold Company Ltd.,London,177s.,(1972)

[18] Szüsz,P., “On Mercer’s Theorem for (C,2)-Means”,Monatshefte für Mathematik by Springer- Verlag,**81:**113–119, (1976)

[19] Stieglitz,M. and Tietz,H., “Matrixtransformationen von Folgenraumen Eine Ergebnisübersicht”,Zeitschrift by Springer-Verlag,1-11,(1977)

[20] Wilansky,A., “Summability through Functional Analysis”,Elsevier Science Publishers B.V.,New York,318s.,(1984)

[21] Balcı,M., “Analiz”,Balcı Yayınları,Ankara,420s.,(1999)

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında K.Maraş' ta doğdum. İlkokulu Karaçar İlkokulunda ortaokulu Nurhak Ortaokulunda ve lise öğrenimimi Ankara Çankaya Kılıçaslan Lisesinde tamamladım. 1996–2001 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimimi yaptım. 2001 yılında Milli Eğitim Bakanlığında öğretmen olarak göreve başladım. 2002 yılında Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim dalında yüksek lisans öğrenimime başladım. Halen Milli Eğitime bağlı bir okulda öğretmen olarak görev yapmaktayım.