TELEPARELLEL KURAMINDA, GENİŞLEYEN VE DÖNEN EVREN MODELLERİ İÇİN, DIRAC DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN TARTIŞILMASI

MERAL BAĞCI

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2007

TELEPARELLEL KURAMINDA, GENİŞLEYEN VE DÖNEN EVREN MODELLERİ İÇİN, DIRAC DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN TARTIŞILMASI

MERAL BAĞCI

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ali HAVARE

MERSİN
HAZİRAN – 2007

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ali HAVARE

Jüri Üyesi
Doç. Dr. Khanlar MAMMADOV

Jüri Üyesi
Yrd. Doç. Dr. Aytekin AYDEMİR

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun .... / .... / .... tarih ve .... / .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

ÖZ

Bu çalışma üç aşamadan oluşmaktadır. Birinci aşamada; dönen, durağan olmayan ve ögeleri iki değişkene bağlı genel bir çizgi elemanı için Teleparellel kuramında Dirac denklemi elde edilmektedir. Elde edilen bu denklem Genel Görelilik Kuramında daha önce aynı metrik için yazılan biçimiyle karşılaştırılmaktadır ve sonuçta her iki kuramda elde edilen biçimlerin eşdeğer olduğu görülmektedir. İkinci aşamada; Teleparellel Kuramında burulmanın vektörel ve eksenel bileşenleri cinsinden yazılan Dirac denklemi, aynı çizgi elemanı için elde edilerek çalışmanın birinci aşamasında bulunan denklem biçimi ile aynı olduğu gösterilmektedir. Üçüncü aşamada ise; dört değişkene bağlı daha genel bir çizgi elemanı ele alınarak burulma tensörünün eksenel ve vektörel bileşenleri hesaplanmaktadır. İşlemler sonucunda elde edilen veriler kullanılarak burulma tensörünün bileşenleri cinsinden yazılan Teleparellel Dirac denklemi elde edilmektedir.

Bu çalışmadaki amaç; temel parçacıkların kütlesel çekim ile etkileşimlerini betimleyen denklemlerden Dirac denkleminin, çok farklı temellere dayanan Genel Görelilik ve Teleparallel kuramlarındaki biçimlerinin eşdeğerliliğini tartışmak ve ayrıca Teleparallel kuramında burulmanın vektörel ve eksenel bileşenleri hesaplanarak Dirac denkleminin elde edilmesinin standart yoldan elde edilmesinden daha kolay olduğunu göstermektir.

Anahtar sözcükler: Teleparellel Kuramı, Dirac Denklemi, Burulma

ABSTRACT

This thesis consists of theree stages. For the first stage; Dirac Equation is obtained in the Teleparellel Theory for the general line element which is a rotating, non-static and whose components depend on two variables. Then, the obtained form of this equation is compared with the General Relativitic Dirac Equation that was before written for the same metric. Consequently, it was observed that the form of the obtained equations for both theories were same. In the second stage, by obtaining the Dirac Equation that is written for the same metric in Teleparellel Theory in terms of the vectorel and axial components of torsion, it is shown that the form of the equation is same as the equation obtained in the first stage. Finally for the last step, the axial and vectorel components of the torsion were calculated by considering a more general line element depending on four variables. By using these results, the Teleparellel Dirac Equation that is written in terms of the components of the torsion tensor, is obtained.

The aim of this work is to discuss the equivalence of the form of the Dirac Equation, one of the equation that is describing the interactions of the fundemantal particles with the gravitation, by considering its form in two different theories, General Relativity and Teleparellel theories, that are depending on completely different principles and to show that obtaining of the Dirac Equation by calculating the vectorel and axial components of the torsion in Teleparellel Theory is easier than obtaining it by standard way.

Keywords: Teleparellel Theory, Dirac Equation, Torsion

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın başlangıcından sonuçlanmasına kadar olan süreçte yardımlarını ve desteğini esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Ali Havare'ye, deneyimlerini ve bilgilerini benimle paylaşan Dr Kenan Söğüt'e ve Ali Kemal Havare'ye ayrıca hayatım boyunca bana her konuda destek olan babama, anneme ve ablama teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ …………………………………..……………….……………..……….. i
ABSTRACT ………………………………..…………….......………….. ii
TEŞEKKÜR ……………………...………………...…………………........… iii
İÇİNDEKİLER ………………………………….……………………… iv
SİMGELER VE KISALTMALAR ………………… …………………...... vi
1. GİRİŞ ……………...………………………….………………………1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI ……………………………………........ 3

2.1. GENEL GÖRELİLİK KURAMINDA DIRAC DENKLEMİ……………..…6

2.1.1 Köşegenel Olmayan Genel Metrik Seçimi…………………………..6
2.1.2 Robertson-Walker Evreninde Dirac Denklemi………………… ……...9
2.1.3 Özel Freidman-Robertson-Walker Evreninde Dirac Denklemi………..10
2.1.4 İsteksel bir U(x) Ardalanında Dirac Denklemi……………….…....11

3. MATERYAL ve METOT ………………………………………..…......12

3.1.TELEPARELLEL KURAMIN TEMELLERİ… .. ……...……..………......12
3.2. TELEPARELLEL KURAMINDA SPİN BAĞLANTILARI ……….…..… 15
3.3. TELEPARELLEL KURAMINDA DIRAC DENKLEMİ……….…..…... 17
3.4. BURULMANIN BİLEŞENLERİ VE SPİNÖRLER…....................... ...… 19
3.5. TELEPARELLEL KURAMINDA KERR-NEWMAN METRİĞİ İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ……...…………………..……………20
3.6 SPİNÖR ALANLARLA TELEPARELLEL DİRAC DENKLEMİ……..…...24
3.7 BURULMANIN BİLEŞENLERİ CİNSİNDEN DİRAC DENKLEMİ….......28

4.BULGULAR ve TARTIŞMA………………………………………………. 30

4.1. HESAPLAMALAR……………...………………………….……..…. 30
4.2. VERİLEN METRİK İÇİN DIRAC DENKLEMİ……………... ……...… .35

4.3.BURULMANIN BİLEŞENLERİ CİNSİNDEN DIRAC DENKLEMİ…… .36
4.4. KATSAYILARIN x^0,x^1,x^2,x^3 ‘ E BAĞLI OLMA DURUMU……………. 38
4.5. TARTIŞMA……..…………………..……………..………..…………...… 41

4.5.1. Köşegenel Metrikle Betimlenen Bazı Evren Modelleri …...……........42
4.5.2. Köşegenel Olmayan Metrikle Betimlenen Bazı Evren Modelleri...…...45

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER ……………………………………….…………......47
KAYNAKLAR ……………...……………………………………………………...49
ÖZGEÇMİŞ ……………………………………………………………………..54

SİMGELER VE KISALTMALAR

$g_{\mu\nu}$: Metrik Tensör

$g^{\mu\nu}$: Metrik Tensörün tersi

Ψ : Dalga Fonksiyonu

γ^{α} : Eğri Uzay-Zamandaki 4×4 'lük Dirac Gamma Matrisleri

$\gamma^{(a)}$: Düz Uzay-Zamandaki 4×4 'lük Dirac Gamma Matrisleri

σ^{μ} : Eğri Uzay-Zamandaki 2×2 'lik Pauli Matrisleri

$h_{(a)}{}^{\mu}$: Dört Ayaklar

$h^{\mu}{}_{(a)}$: Dört Ayakların Tersi

$\dot{A}^{a}{}_{bc}$: Spin Bağlantıları

$S^{(a)(b)}$: Spin Tensörü

$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$: Levi Civita (Christoffel Sembolleri) Bağlantıları

B_{μ} : Ayar Potansiyeli

P_{a} : Dönüşüm Üreteçleri

$\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\upsilon\mu}$: Weitzenböck Bağlantıları

$\dot{T}^{\rho}{}_{\mu\upsilon}$: Burulma Tensörü

$\dot{\nabla}_{\upsilon}$: Dörtayak Alan Tensörünün Kovaryant Türevi

$\dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu}$: Kıvrılma (Contortion) Tensörü

$\dot{D}_{\rho}$: Teleparellel Kuramında Kovaryant Türev

$t_{\lambda\mu\upsilon}$: Burulmanın Tam Tensör Parçası

v_{μ} : Burulmanın Vektör Parçası

a^{ρ} : Burulmanın Eksensel Parçası

$\dot{D}_{\mu}$: Fock Ivanenkov Türev İşlemcisi

∂_{x} : $\dfrac{\partial}{\partial x}$

[1-2]: [1]'Den [2]'Ye Kadar.

1. GİRİŞ

Genel Görelilik kuramı ile birlikte kütlesel çekim etkisinin, uzay-zamanın geometrisiyle derinden bir ilişkisi olduğu görülmüştür. Geometrikselleştirme felsefesi 20. yüzyılın başlarında A Einstein tarafından ortaya atılmıştır.

"Doğayı anlamak geometriyle başlar ve fizikle son bulur."

A Einstein[1]

Einstein, bu felsefeden yola çıkarak Rieman geometrisiyle başlamış ve Genel Görelilik kuramını oluşturarak başarılı bir şekilde sonlandırmıştır. Bu kuramın başarısının ardından aynı felsefeyi kullanarak kütlesel çekim ile elektromanyetizmayı birleştirmeyi denemiştir. Bunu yapmak için Einstein, Genel Görelilikte kullanmış olduğu Rieman geometrisinden daha geniş bir geometriye gereksinim duymuştur. Kütlesel çekim ile elektromanyetizmayı birleştirmek için ortaya konulan fiziği geometrikselleştirme düşüncesi başarılı olmamıştır. Bu durumda birleşik alan kuramını oluşturmak için kütlesel çekimi alan olarak tanımlama gerekliliği ortaya çıkmış ve ardından ayar kuramı kullanılarak birleşik alan kuramı oluşturulmaya çalışılmış fakat bu da başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Bununla birlikte Genel Görelilik kuramının oluşturulduğu ilk yıllarda kuramsal fizikteki gelişmeler, kütlesel çekim etkileşiminin tanımına burulmanın da dahil edilmesi gerekliliği ortaya konulmuştur. Özellikle spin etkileşiminin önem kazandığı durumlarda kütlesel çekimin etkisinin betiminde eğriliğe ek olarak burulmanın da etkili olduğu görülmüştür.

Bu gelişmelerin ışığında; kütlesel çekim, ayar kuramıyla betimlenirken geometrize etme felsefesinin matematiksel yapısından gelen dörtayak (tetrad) formalizmi kullanılmıştır. Genel göreliliğe bir seçenek olarak ortaya konulan kuramlardan biri de Teleparellel kuramıdır. Bu kuramda, eğriliğin bulunmadığı varsayılarak sadece burulmanın varlığında kütlesel çekim için eşitlikler yazılır. Son yıllarda Teleparellel Kuramının önem kazanmasının en büyük nedenlerinden

1.M.I.Wanas, "Absolute Parallelism Geometry: Developments, Applications And Problems"gr-qc/0209050 v1(2002) bir tanesi de bu eşitlikler yazılırken kütlesel çekimin bir alan olarak ele alınmış olmasıdır. Bu kuramda kütlesel etkileşim, elektrodinamikteki Lorentz kuvvet denklemlerine benzer, kuvvet denklemleriyle temsil edilmektedir.

Genel Görelilik kuramı kütlesel çekimi betimlemede oldukça başarılı bir kuram olup birçok deney ve gözlemler ile uyumlu sonuçlar vermiştir. Fakat doğadaki etkileşmeleri birleştirmek için bu etkileşimi de diğer üç etkileşim gibi alanlar cinsinden ifade etmek gerekir. Kütlesel çekimin alan olarak betimlendiği bir kuram olan Teleparallel Kuramda yapılan çalışmalar, Genel Görelilik kuramı ile karşılaştırıldığında eşdeğerliliğin görülmesi Teleparallel Kuramın da geçerliliğinin artmasını sağlayacaktır. Özellikle büyük ölçekli evrenle uğraşan astrofiziğin bir çok konusunda kütleselsel çekimin etkileri önemli rol oynar. Burulmanın göz önünde bulundurulduğu Teleparallel kuramının geçerliliğinin arttırılması için bazı evren modellerinde tek parçacık durumlarının çözümlenmesi ve anlaşılması gerekir. Bu nedenle son yıllarda; Einstein'nın Genel Görelilik kuramında yazılmış olan kütleli, spini1/2 olan parçacıkları betimleyen Dirac ve kütleselsiz, spini1/2 olan parçacıkları betimleyen Weyl denklemlerinin Teleparallel kuramında yazılmaları üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışmadaki birincil amaç: hem dönmeyi hem de genişlemeyi içeren genel bir metrik için spin-1/2 parçacığı betimleyen Dirac Denkleminin, Teleparellel Kuramındaki biçimini elde edip, aynı metrik için elde edilen Genel Görelilik Kuramındaki karşılığı olan denklemle karşılaştırarak eşdeğerliliğini göstermektir. Ayrıca ikincil amaç, aynı metrik için Teleparellel Kuramında burulma tensörünün vektörel ve eksensel bileşenleri kullanılarak Dirac denklemini yazmaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Doğadaki bütün etkileşimleri “Büyük Birleşik Alan Kuramı” adı ile tek çatı altında toplama düşüncesi fizikçiler için önemli bir araştırma konusu olmuştur. Düşünülen bu Büyük Birleşik Alan Kuramının oluşturulmasındaki en büyük zorluk kütlesel çekimin Genel Görelilik Kuramına göre alan olarak değil, uzay-zamanı geometri olarak tanımlanmış olmasıdır. 20. yüzyılın ilk çeyreğinde bilinen, iki temel etkileşim olan kütlesel çekim ve elektromanyetizmayı birleştirmek için ilk girişim 1918 yılında H.Weyl tarafından yapılmıştır [1]. Weyl, bu öneride kütlesel çekimin alan olarak tanımlanabileceğini göstererek, ayar değişmezi ve ayar dönüşümleri kavramlarını ilk kez kullanmıştır. Günümüzde Ayar Kuramları olarak bilinen bu kavramlar birçok alan için de temel nitelik taşımaktadır. Ancak Weyl bu çalışması ile asıl amacı olan birleşik alan kuramını tam olarak oluşturamamıştır. Bu çalışmadan 10 yıl sonra aynı amaç için A. Einstein bir girişimde bulunmuştur [2]. Einstein, düşüncesini dörtayak (tetrad) alanlarının dört boyutta uzay zamanın her bir noktasında teğet uzayların dik boylandırılmış (ortonormal) tabanlarının alanı olduğuna dayandırarak “Absouled Parellelism”(AP)‘in matematiksel yapısına anlam kazandırmıştır. Fakat dörtayakların bileşik alanı betimleyebilmesi için onaltı bileşenli olması gerekmektedir, oysa Genel Görelilikte kütlesel çekim, simetrik ve on bileşene sahip olan uzay-zaman metriği ile tanımlanmaktadır. Önerilen onaltı bileşenli dörtayakların on bilşeninin kütlesel çekimi geri kalan altı bileşenin ise elektromanyetizmayı betimlediği Einstein tarafından öngörülmüştür [3]. Bu çalışma da başarılı sonuç vermemekle birlikte bu yaklaşımlardaki bazı önemli kavramlar ortaya konulmuştur. E. Cartan ve R Weitzenböck tarafından da desteklenen bu başlangıç periyodunun ardından 30 yıl boyunca bu alanda herhangi bir çalışma yapılmamıştır.

1960’ larda Moller, Einstein’ nın bu konudaki çalışmalarını tekrar gözden geçirmiş ve aynı zamanda kütlesel çekim için ayar kuramlarının var olma koşulları üzerinde durmuştur [4,5]. Bu çalışmaları izleyen Pelegrini ve Plebanski [6] Teleparellel Kuramı için Lagranjiyen formalizmini oluşturmuştur. 1967’ de Hayashi ve Nakano [7] Dönüşüm grupları için ayar kuramını formalize ederek geliştirmişlerdir. Birkaç yıl sonra da Hayashi Absouled Parellelism ve ayar kuramı arasındaki ilişkiyi anlamlandırarak bu iki temel düşünceyi bir araya getirmiştir [8-10]. “Yeni Genel Görelilik”(New General Relativity) olarak adlandırdıkları bu yaklaşım, AP geometrisinin matematiksel temeline dayanmaktadır ve alan denklemleri eylem ilkesinden türetilmiştir. Bu kuramda Lagranjiyan,

$$\mathcal{L} \equiv \lambda(\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{k}} + d_1(t^{\lambda\mu\nu} t_{\lambda\mu\nu}) + d_2 c^{\mu} c_{\mu} + d_3 a^{\nu} a_{\nu}) \tag{2.1}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada λ, dörtayakların determinantı; $t_{\lambda\mu\nu}$, c_{μ}, a_{ν} sırasıyla burulmanın, tensörel, vektörel ve eksensel parçalarıdır. d_1, d_2, d_3 ise, deneylerle belirlenebilecek üç bağımsız parametre olarak verilmektedir. Böylece Genel Görelilik Kuramında burulmayı içeren yeni bir yol ortaya konularak Teleparellel Kuramı oluşturulmaya başlanmıştır. Bu kuram Einstein – Cartan – Sciama- Kibble [11] yaklaşımına benzer görünmesine karşın, burulma kavramına bu iki yaklaşımın bakış açısı arasında temel farklılık vardır. Bu fark Teleparellel Kuramında, burulma alan oluştururuken, diğer yaklaşımda ise burulma alan oluşturmamaktadır [12]. Teleparelleldeki bu özellik bu kurama diğerine göre üstünlük sağlamaktadır. Bu bağlamda Teleparellel Kuramına ayrıca üç-parametre kuramı da denilmektedir. Fakat bu üç serbest parametrenin özel seçimleri ile bu kuram Einstein’ nın Genel Görelilik Kuramına eş değer olduğu gösterilmektedir [13-14].

Genel Görelilik; kütlesel çekimi, kuvvetsel alan kavramıyla değil, geometrize ederek eğrilik kavramıyla betimler. Diğer taraftan Teleparellel Kuramı kütlesel çekimi kuvvetsel alan olarak burulma kavramıyla açıklar. Ayrıca Genel Görelilikte parçacıkların hareket yörüngelerini belirleyen Jeodezik denklemler tanımlanır. Buna karşılık Teleparellel Kuramında, Jeodezik denklemeleri yerine, Elektrodinamikteki Lorentz kuvvet denklemlerine benzer kuvvet denklemleri yer almaktadır [15]. Kütlesel etkileşimin genellikle eğrilme kavramıyla açıklanabildiği Genel Göreliliğe seçenek olarak görülen Teleparallel Kuramında burulma kavramıyla açıklanabileceği varsayımı gittikçe önem kazanmaktadır. Yukarıda ifade edilen farklılıklara karşın, son yıllarda yapılan kuramsal yapılı çalışmalara bakıldığında, bu iki kuramın eşdeğer olduğu varsayımının kabul görür duruma geldiği görülebilir [16-22].

Teleparellel Kuramının, Genel Görelilik kuramındaki bazı problemlere de ışık tutacağı öngörüsü ile son yıllarda bu kuram üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Einstein' nın Genel Görelilik kuramı serbest düşme temeline dayanmaktadır ve etkileşme tanımında geometri kuvvet ile yer değiştirir. Kütlesel etkileşim için geometrik tanım olmasına karşın bu kuram birçok deneysel sınamadan geçmiştir [23,24]. Teleparellel Kuramında $B^{a}{}_{\mu}$ dönüşüm ayar potansiyeli ile kütleselçekim alanda spinsiz parçacıklar için hareket denklemleri elde edilerek; de Sitter, Schwarzschild, Kerr-Newman çözümleri elde edilmiştir [25]. Ayrıca aynı kuramda kütleli, spinli parçacıkların hareket denklemlerinin yanı sıra Papapetrou denklemi yazılmış ve bu denklem Genel Görelilikteki Papapetrou denklemi ile yapısal olarak karşılaştırılmıştır [26-28]. Teleparellel Kuramında kütlesel çekim alanın enerji- momentum gösterimleri elde edilip, bu gösterimlerin yapısının Elektromanyetizmadaki simetrik olan enerji-momentum tensörleriyle benzer oldukları gösterilmiştir [29-30]. Ayrıca çok eskiden beri tartışılan bir konu; kütlesel çekim etkileşimin gerçek bir alan olarak tahmin edilmesidir ancak bu tahmin enerji momentum yoğunluğunun Genel Görelilik Kuramı'ndaki eşdeğerlilik ilkesinden dolayı yerel olarak tanımlanması ile bir problem yaratmaktadır. Çünkü bu nicelikler gerçek tensör değildir ve koordinat sistemine bağlıdırlar [31-32]. Diğer taraftan Teleparellel' in ayar kuramı kapsamında, enerji momentum yoğunluğunun tensörel olarak ifadesinin olası olduğu görülmektedir [33]. Bu çalışmaların sonucunda kütlesel çekimin, eşdeğerlilik ilkesine gerek duyulmadan, uzay-zamanın geometrisiyle değil, Maxwell Kuramına benzer dönüşüm grupları için ayar kuramı kullanılarak açıklanması, bu kuramın bir çok açıdan üstün hale gelmesine neden olmuştur [34,35].

Parçacık denklemlerinin biçimsel yapılarının bazı evren modelleri için incelenmesi kuramın etkinliğini arttıracaktır. Bu bağlamda son yıllarda yapılan çalışmalarda Genel Görelilik Kuramında yazılan Einstein Alan Denklemleri, Maxwell denklemleri, kuantum mekaniksel olarak bilinen kütleselli, spin-0 parçacığını betimleyen Klein-Gordon denklemi, kütleli spin -½ parçacığı betimleyen Dirac denklemi ve kütleselsiz, spin -½ parçacığı betimleyen Weyl denklemi için Teleparallel kuramında da parçacık denklemleri yazılarak Genel Görelilik kuramı ile olan ilişkileri incelenmiştir [36-39].

Bu sonuçlar, Teleparellel Kuramının daha genel kuramların özel bir durumu olarak göz önünde bulundurulmaması ve kütlesel çekimi betimlemek için bir seçenek olduğu düşüncesini yaygınlaştırmaktadır.

2.1 GENEL GÖRELİLİK KURAMINDA DIRAC DENKLEMİ

2.1.1 Köşegenel Olmayan Genel Metrik Seçimi [40]

Bu kesimde Genel Görelilik Kuramında,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{00}(x^0,x^1)(dx^0)^2 + g_{11}(x^0,x^1)(dx^1)^2 + g_{22}(x^0,x^1)(dx^2)^2 \\ &\quad + g_{33}(x^0,x^1)(dx^3)^2 - 2g_{02}(x^0,x^1)dx^0dx^2 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

biçiminde seçilen bazı dönen ve/veya genişleyen evren modellerini kapsayan çizgi elemanı için Dirac Denklemi ele alınmaktadır. Bu çizgi elemanına uyan özel evren modellerini betimleyen çizgi elemanlarının özellikleri göz önüne alınarak bu çizgi elemanının biçimi daha kullanışlı duruma dönüştürülebilir.

Bu durumda genel metrik

$$\begin{aligned} ds^2 &= -R_{00}{}^2(dx^0)^2 + T^2(x^0)[R_{11}{}^2(x^1)(dx^1)^2 + R_{22}{}^2(x^2)(dx^2)^2 \\ &\quad + R_{11}{}^2(x^1)(dx^3)^2] - 2T(x^0)R_{02}(x^1)dx^0dx^2 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

olur. Burada çizgi elemanındaki metrik tensörünün öğeleri zamana ve uzaya bağlılıklarının ayrı fonksiyonların çarpımı olarak

$$g_{00} = R_{00}(x_0), \quad g_{ii}(x^0, x^1) = T(x^0)R_{ii}, \quad g_{02} = T(x^0)R_{02}(x^1) \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca konformal dönüşümleri

$$d\eta = R_{00}dx^0, \quad d\xi = R_{11}dx^1, \quad du = R_{33}dx^3 \tag{2.1.4}$$

biçiminde tanımlanarak (η, ξ, x^2, u) koordinatlara geçilir. $G = R_{02}(R_{00})^{-1}$ şeklinde tanımlanırsa çizgi elemanı,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\eta^2 + T^2(\eta)[(d\xi)^2 + R_{22}{}^2(\xi)(dx^2)^2 + du^2] \\ &\quad - 2T(\eta)G(\xi)d\eta dx^2 \end{aligned} \quad \text{....................} \tag{2.1.5}$$

olarak elde edilir.

Denklem (2.1.5) ile verilen çizgi elemanı için metrik tensörü;

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -TG & 0 \\ 0 & T^2 & 0 & 0 \\ -TG & 0 & T^2R_{22}{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^2 \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

ve metrik tensörünün tersi ise ; $g^{\mu\nu} = \dfrac{Cofac g_{\mu\nu}}{\det g_{\mu\nu}}$ ifadesi kullanılarak

$$\Delta^2 g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -R_{22}{}^2 & 0 & -GT^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta^2 T^{-2} & 0 & 0 \\ -GT^{-1} & 0 & T^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta^2 T^{-2} \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

bulunur. Burada $\Delta = \sqrt{R_{22}{}^2 + G^2}$ 'dir.

Genel Görelilik Kuramında,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}\right) \tag{2.1.8}$$

biçiminde tanımlanan Christoffel Sembolleri kullanılarak sıfırdan farklı bileşenler aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned}\Delta^2\Gamma^{0}_{\mu\nu} &= \dot{T}\left\{G^2T^{-1}\delta^{00}_{\mu\nu} + R^2_{22}\left[T(\delta^{11}_{\mu\nu} + R^2_{22}\delta^{22}_{\mu\nu} + \delta^{33}_{\mu\nu}) - G(\delta^{02}_{\mu\nu} + \delta^{20}_{\mu\nu})\right]\right\} \\ &\quad + \frac{GG'}{2}(\delta^{01}_{\mu\nu} + \delta^{10}_{\mu\nu}) + \frac{TR_{22}}{2}(R_{22}G' - 2GR'_{22})(\delta^{12}_{\mu\nu} + \delta^{21}_{\mu\nu})\end{aligned} \tag{2.1.9a}$$

$$T\,\Gamma^{1}_{\mu\nu} = \dot{T}(\delta^{01}_{\mu\nu} + \delta^{10}_{\mu\nu}) + \frac{G'}{2}(\delta^{02}_{\mu\nu} + \delta^{20}_{\mu\nu}) - TR_{22}R'_{22}\delta^{22}_{\mu\nu} \tag{2.1.9b}$$

$$T\,\Gamma^{3}_{\mu\nu} = \dot{T}(\delta^{03}_{\mu\nu} + \delta^{30}_{\mu\nu}) \tag{2.1.9c}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2\Gamma^{2}_{\mu\nu} &= \dot{T}\left\{G(\delta^{11}_{\mu\nu} - T^{-2}\delta^{00}_{\mu\nu} + R^2_{22}\delta^{22}_{\mu\nu} + \delta^{33}_{\mu\nu}) + R^2_{22}T^{-1}(\delta^{02}_{\mu\nu} + \delta^{20}_{\mu\nu})\right\} \\ &\quad - \frac{G'}{2T}(\delta^{01}_{\mu\nu} + \delta^{10}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(GG' + 2R_{22}R'_{22})(\delta^{12}_{\mu\nu} + \delta^{21}_{\mu\nu})\end{aligned} \tag{2.1.9d}$$

Spin Bağlantı Katsayıları

$$4\Gamma_{\mu} = g_{\mu\alpha}[(\partial_{\lambda} a^{(k)}_{\nu})b^{\alpha}_{(k)} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}]S^{\mu\nu} \tag{2.1.10}$$

ile verilir. Bu bağıntı kullanılarak,

$$\Gamma_0 = \frac{G\dot{T}}{2T\Delta}\tilde{\gamma}^{2\eta} - \frac{G'}{4T\Delta}\tilde{\gamma}^{\xi 2} \tag{2.1.11a}$$

$$\Gamma_1 = \frac{-\dot{T}}{2}\tilde{\gamma}^{\xi\eta} + \frac{G\dot{T}}{2\Delta}\tilde{\gamma}^{\xi 2} + \frac{G'}{4\Delta}\tilde{\gamma}^{2\eta} \tag{2.1.11b}$$

$$\Gamma_2 = \frac{-G}{4}\tilde{\gamma}^{\xi\eta} - \frac{R^2_{22}\dot{T}}{2\Delta}\tilde{\gamma}^{2\eta} + \frac{GG' + 2R_{22}R'_{22}}{4\Delta}\tilde{\gamma}^{\xi 2} \tag{2.1.11c}$$

$$\Gamma_3 = \frac{-T}{2}\tilde{\gamma}^{u\eta} - \frac{G\dot{T}}{2\Delta}\tilde{\gamma}^{2u} \tag{2.1.11d}$$

ifadeleri elde edilir.

Genel Görelilik Kuramında elektromanyetik etkileşmeler göz ardı edildiğinde Dirac denklemi

$$[\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}) + im]\Psi = 0 \tag{2.1.12}$$

biçimindedir. (2.1.5)'de verilen metrik için hesaplanan (2.1.11)' de elde edilen spin bağlantıları kullanıldığında Dirac denklemi aşağıdaki biçimde olur:

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\tilde{\gamma}^{\eta} - \frac{G}{\Delta}\tilde{\gamma}^{\xi}\right)\partial_{\eta} + \frac{\tilde{\gamma}^{\xi}}{T}\partial_{\xi} + \frac{\tilde{\gamma}^{2}}{T\Delta}\partial_{2} + \frac{\tilde{\gamma}^{u}}{T}\partial_{u} - \frac{G'}{4T\Delta}\tilde{\gamma}^{\eta}\tilde{\gamma}^{\xi}\tilde{\gamma}^{2} + \frac{3\dot{T}}{2T}\tilde{\gamma}^{\eta}\right.\\ &\left.+\frac{\Delta'}{2T\Delta}\tilde{\gamma}^{\xi} - \frac{3G\dot{T}}{2\Delta T}\tilde{\gamma}^{2} + im\right\}\Psi = 0\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

2.1.2 Robertson-Walker Evreninde Dirac Denklemi [41]

Robertson-Walker(RW) evrenini betimleyen çizgi elemanı,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2.1.14}$$

şeklindedir. Bu metriğe göre spin bağlantı katsayıları,

$$\Gamma_1 = \frac{\dot{a}}{2}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^1, \qquad \Gamma_2 = \frac{\dot{a}}{2}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^2, \qquad \Gamma_3 = \frac{\dot{a}}{2}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^3, \qquad \Gamma_0 = 0 \tag{2.1.15}$$

biçiminde elde edilir. Bu sonuçlar denklem (2.1.12)'de kullanılarak elde edilen denklem, $-i\tilde{\gamma}^0$ ile soldan çarpıldığında verilen metrik için Dirac denklemi

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3\dot{a}}{2a}-\frac{1}{a}\vec{\alpha}.\vec{\nabla}-im\tilde{\gamma}^0\right\}\Psi=0 \tag{2.1.16}$$

olarak elde edilir.

2.1.3 Özel Freidman-Robertson-Walker Evreninde Dirac Denklemi [42]

Bu çalışmada ele alınan metrik,

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)dx^2+a^2(t)b^2(x)dy^2+a^2(t)b^2(x)c^2(y)dz^2 \tag{2.1.17}$$

şeklindedir. Bu metrik t,x ve y'ye bağlı fonksiyonları içerir ve dört ayaklar;

$$h_i^\alpha=diag(1,\frac{1}{a},\frac{1}{ab},\frac{1}{abc}) \tag{2.1.18}$$

biçiminde bulunur. Spinör bağlantıları ise düz uzay zaman dirac- gamma matrisleri ile birlikte;

$$\Gamma_0=0 \tag{2.1.19a}$$

$$\Gamma_1=\frac{1}{2}a_{,t}\gamma^0\gamma^1 \tag{2.1.19b}$$

$$\Gamma_2=\frac{1}{2}ba_{,t}\gamma^0\gamma^2+\frac{1}{2}b_{,x}\gamma^1\gamma^2 \tag{2.1.19c}$$

$$\Gamma_3=\frac{1}{2}cba_{,t}\gamma^0\gamma^3+\frac{1}{2}cb_{,x}\gamma^1\gamma^3+\frac{1}{2}c_{,y}\gamma^2\gamma^3 \tag{2.1.19d}$$

olur.

Bu bağıntılar denklem (2.1.12)'de kullanıldığında Dirac denklemi aşağıdaki biçimi alır:

$$\left\{\gamma^0\partial_t + \frac{1}{a}\gamma^1\partial_x + \frac{1}{ab}\gamma^2\partial_y + \frac{1}{abc}\gamma^3\partial_z + m\right\}\psi = 0 \qquad (2.1.20)$$

Burada Ψ ve ψ arasındaki ilişki,

$$\Psi = a^{-3/2}b^{-1}c^{-1/2}\psi \qquad (2.1.22)$$

şeklindedir.

2.1.4 İsteksel bir U(x) Ardalanında Dirac Denklemi [43]

Bu çalışmada çizgi elemanı

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + u^2(x)(dy^2 + dz^2) \qquad (2.1.23)$$

biçiminde alınmaktadır. Dört ayaklar $e_a^{\mu} = diag(1,1,1/u,1/u)$ olarak tanımlanır. Buna göre sıfırdan farklı spin bağlantıları;

$$\Gamma_2 = -(u'/2u)\gamma_1\gamma_2, \qquad \Gamma_3 = -(u'/2u)\gamma_1\gamma_3 \qquad (2.1.24)$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntılar Dirac denkleminde yerine konulduğunda

$$\left[\gamma^0\frac{\partial}{\partial_t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u'}{u}\gamma^1 + \frac{1}{u}(\gamma^2\frac{\partial}{\partial_y} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial_z}) - m\right]\Psi = 0 \qquad (2.1.25)$$

denklemi bulunur.

3. MATERYAL ve METOT

3.1. TELEPARALLEL KURAMININ TEMELLERİ [44]

Teleparallel kuramında temel alan olarak görülen ayar potansiyeli

$$B_\mu = B^a{}_\mu P_a \tag{3.1.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada B_μ, ayar potansiyeli; $B^a{}_\mu$, dönüşüm ayar potansiyeli ve $P_a = \dfrac{\partial}{\partial x^a}$ dönüşüm üretecleridir. Bu dönüşüm üreteçleri

$$[P_a , P_b] = 0 \tag{3.1.2}$$

ile verilen sıra değişim bağıntısını sağlarlar.

Teğet (tanjant) uzay koordinatlarının yerel (lokal) bir ötelemesi olarak

$$x^{a'} = x^a + \alpha^a \tag{3.1.3}$$

şeklinde bir ayar dönüşümü tanımlanır. Burada $\alpha^a = \alpha^a(x^\mu)$ sonsuz küçük parametredir. Dönüşüm üreteçleri kullanılarak, sonsuz küçük ötelemeler için

$$\delta x^a = \alpha^b P_b \, x^a \tag{3.1.4}$$

bağıntısı verilir. Benzer şekilde genel bir kaynak alan olan $\psi \equiv \psi(x^\mu)$ için de

$$\delta\psi = -\alpha^a P_a \, \psi \tag{3.1.5}$$

ifadesi yazılır. Ayrıca dönüşüm üreteçleri herhangi bir alana etki ettirilebilir. Bu özellikten hareket ederek

$$h_\mu = \partial_\mu - B^a{}_\mu \frac{\delta}{\delta\alpha^a} \tag{3.1.6}$$

Şeklinde verilen kovaryant türevin genel tanımı [17] ele alınarak, genel kaynak alanı ψ' ye etki ettirildiğinde ve denklem (3.1.5) kullanıldığında

$$h_\mu\, \psi = \partial_\mu\, \psi + B^a{}_\mu\, P_a\, \psi \tag{3.1.7}$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem

$$h_\mu\, \psi = h^a{}_\mu \partial_a\, \psi \tag{3.1.8}$$

biçiminde de ifade edilir [12]. Burada $h^a{}_\mu$;

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu\, x^a + B^a{}_\mu \equiv h_\mu x^a \tag{3.1.9}$$

dır ve buna holonomik olmayan dörtayak alanları denir.

Genel olarak ayar kuramlarında kovaryant türevlerin sıra değişim bağıntılarından kuvvet alanı tanımlanır. Bunun için denklem (3.1.6)'da verilen işlemci için sıra değişim bağıntısı yazılarak herhangi bir alanı tanımlayan ψ 'ye uygulandığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left[\, h_\mu , h_\nu \right] \psi = \left(\partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu\right) P_a\, \psi = \dot{T}^a{}_{\mu\nu}\, P_a\, \psi \tag{3.1.10}$$

Burada

$$\dot{T}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu \equiv \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu \tag{3.1.11}$$

olmak üzere $\dot{T}_{\mu\nu} = \dot{T}^a{}_{\mu\nu}\, P_a$ niceliği tanımlanır.

Teğet uzayda sonsuz küçük bir yerdeğiştirme altında dörtayakların

$$h^{a'}_{\mu} = h^{a}_{\mu} \tag{3.1.12}$$

şeklinde değişmez kalması için ayar potansiyelinin dönüşümü,

$$B^{a'}_{\mu} = B^{a}_{\mu} - \partial_{\mu}\alpha^{a} \tag{3.1.13}$$

bağıntısını sağlar.

Teleparellel kuramında Weitzenböck bağlantısı

$$\dot{\Gamma}^{\rho}_{\upsilon\mu} = h_{a}{}^{\rho}\partial_{\mu}h^{a}_{\upsilon} \tag{3.1.14}$$

ile verilen bu niceliğe yapısal bağlantı katsayıları denir. Weitzenböck bağlantıları alt indisine göre simetrik olmadığı için bu niceliğin alt indislerine göre değişimin farkı:

$$\dot{T}^{\rho}{}_{\mu\upsilon} = \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\upsilon\mu} - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\upsilon} \tag{3.1.15}$$

şeklindedir ve buna burulma tensörü denir.

Genel Görelilikte metrik tensörünün kovaryant türevi $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$ şeklinde verilir ve buna metriklik koşulu denir. Bu koşula benzer Teleparellelde ise dörtayak alan tensörünün kovaryant türevi aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\dot{\nabla}_{\upsilon} h^{a}{}_{\mu} = \partial_{\upsilon} h^{a}{}_{\mu} - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\upsilon} h^{a}{}_{\rho} = 0 \tag{3.1.16}$$

Teleparelleldeki Weitzenböck bağlantıları ile Genel Görelilikteki Levi Civita (Chiristoffel sembolleri) bağlantıları arasında

$$\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\upsilon} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\upsilon} + \dot{K}^{\rho}{}_{\mu\upsilon} \tag{3.1.17}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Burada $\dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu}$, burulma tensörü cinsinden

$$\dot{K}^{\rho}{}_{\mu\upsilon} = \frac{1}{2}\left(\dot{T}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\upsilon} + \dot{T}_{\upsilon}{}^{\rho}{}_{\mu} - \dot{T}^{\rho}{}_{\mu\upsilon}\right) \tag{3.1.18}$$

olarak verilir ve buna kıvrılma (Contortion) tensörü denir.

Dörtayakların sıra değişim bağıntısını veren denklem (3.1.10) daki $\dot{T}^{a}{}_{\mu\upsilon}$, dörtayaklar kullanılarak teğet uzaydan eğri uzay-zamana taşınır ve sıradeğişim bağıntısı yeniden aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\left[h_{\mu}, h_{\upsilon}\right] = \dot{T}^{\rho}{}_{\mu\upsilon} h_{\rho} \tag{3.1.19}$$

Genel Görelilikte, V^{μ} bir uzay-zaman vektörünün kovaryant türevi, $\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}$ Chiristoffel sembolleri olmak üzere,

$$D_{\rho} V^{\mu} \equiv \partial_{\rho} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} V^{\lambda} \tag{3.1.20}$$

olarak tanımlanır. Teleparellel kuramında ise kovaryant türev $\dot{D}_{\rho}$, sembolü ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımı yapılır:

$$\dot{D}_{\rho} V^{\mu} \equiv \partial_{\rho} V^{\mu} + \left(\dot{\Gamma}^{\mu}{}_{\lambda\rho} - \dot{K}^{\mu}{}_{\lambda\rho}\right) V^{\lambda} \tag{3.1.20}$$

3.2. TELEPARALLEL KURAMINDA SPİN BAĞLANTILARI

Minimum çiftlenim betimlemesinin Teleparelleldeki karşılığını elde etmek için Teleparellel spin bağlantılarının doğru bir biçimde tanımlanması söz konusudur. Genel çerçeveden bakıldığında spin bağlantıları hem eğriliği hemde burulmayı içerir ve aralarındaki ilişki

$$\dot{A}^{a}{}_{bc} = \Gamma^{a}{}_{bc} - \dot{K}^{a}{}_{bc} \tag{3.2.1}$$

olarak verilir. Burada $\dot{A}^{a}{}_{bc}$, spin bağlantıları, $\Gamma^{a}{}_{bc}$, Levi-Civita bağlantıları, $K^{a}{}_{bc}$ ise kıvrılma tensörleridir. Teleparellel kuramında sadece burulma vardır ve eğrilik baştan sıfır olarak alınır. Bu nedenle denklem (3.2.1) deki $\Gamma^{a}{}_{bc} = 0$ dır. Bu sonuca dayanarak bu kuramda spin bağlantıları $\dot{A}^{a}{}_{bc}$, kıvrılma tensörünün negatif işaretlisine eşit olur ve aşağıdaki biçimde tanımlanır [36].

$$\dot{A}^{a}{}_{b\mu} = 0 - \dot{K}^{a}{}_{b\mu} \tag{3.2.2}$$

Bu eşitlik oldukça önemlidir, çünkü bu ifadedeki spin bağlantılarının gerçek tensörler olduğu görülür ve doğru bağlantılara ulaşılabilir. Bununla birlikte diğer bağlantılar gibi Lorentz gruplarının Lie cebrinin değerleri şeklinde .

$$\dot{A}_{\mu} = \tfrac{1}{2}\dot{K}^{a}{}_{b\mu} S_{a}{}^{b} \tag{3.2.3}$$

yazılabileceğini öngörür. Bu tanımda $S_{(a)(b)}$ Lorentz spin-1/2 üreteci olup,

$$S_{(a)(b)} = \tfrac{1}{2}\sigma_{(a)(b)} = \tfrac{i}{4}[\gamma_{(a)}, \gamma_{(b)}] \tag{3.2.4}$$

eşitliğini sağlar. $\dot{w}^{a}{}_{b\mu}$ spin bağlantısı ise ilk iki indisine göre antisimetriktir.Sonsuz local lorentz dönüşümleri altında $\varepsilon^{a}{}_{b} = \varepsilon^{a}{}_{b}(x^{\mu})$ parametresiyle

$$\delta\dot{K}^{a}{}_{b\mu} = -\dot{D}_{\mu}\varepsilon^{a}{}_{b} \tag{3.2.5}$$

biçiminde dönüşür. Bu denklemdeki $\dot{D}_{\mu}$;

$$\dot{D}_{\mu}\varepsilon^{a}{}_{b} = \partial_{\mu}\varepsilon^{a}{}_{b} + \dot{K}^{a}{}_{c\mu}\varepsilon^{c}{}_{b} - \dot{K}^{c}{}_{b\mu}\varepsilon^{a}{}_{c} \tag{3.2.6}$$

eşitliği ile tanımlanır, $\dot{K}^{a}{}_{b\mu}$ bağlantıları ile birlikte kovaryant türevi ifade eder. Bu durumda $\dot{K}^{a}{}_{b\mu}$ teleparallel spin bağlantıları olduğu görülür [23]. Sonuç olarak çiftlenim betimlemesi;

$$\dot{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - \tfrac{i}{2}\dot{w}^{a}{}_{b\mu} S_{a}{}^{b} \equiv \partial_{\mu} + \tfrac{i}{2}\dot{K}^{a}{}_{b\mu} S_{a}{}^{b} \tag{3.2.7}$$

Burada $\dot{D}_{\mu}$ teleparellel Fock-Ivanenkov türev işlemcisidir ve bu türev işlemcisi çiftlenim betimlemesinin bütün özelliklerini betimler.

3.3. TELEPARALLEL KURAMINDA DIRAC DENKLEMİ

Minkowski uzayında Dirac Lagranjiyeni

$$\mathcal{L} = \frac{ic\hbar}{2}\left(\overline{\psi}\,\gamma^{a}\,\partial_{a}\,\psi - \partial_{a}\,\overline{\psi}\,\gamma^{a}\,\psi\right) - mc^{2}\overline{\psi}\,\psi \tag{3.3.1}$$

biçiminde tanımlanır. ψ 'nin sağladığı denklemi elde etmek için $\overline{\psi}$' ye göre türev alınır. Bu durumda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_{a}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{a}\overline{\psi})}\right) = 0 \tag{3.3.2}$$

şeklinde yazılan Euler Lagrange denkleminden, serbest uzayda Dirac denklemi için

$$i\hbar\gamma^{a}\partial_{a}\psi - mc\psi = 0 \tag{3.3.3}$$

elde edilir. Serbest uzayda tanımlanan kovaryant türev işlemcisi Teleparellel kuramında Fock Ivanenkov türev işlemcisi ile

$$\partial_{a}\psi \rightarrow h_{a}{}^{\mu}\dot{D}_{\mu}\psi \tag{3.3.4}$$

biçiminde yerdeğiştirerek Lagranjiyen Teleparellel Kuramına taşınır ve

$$\mathcal{L}_{\psi} = h\left[\frac{ic\hbar}{2}\left(\overline{\psi}\,\gamma^{a}\ h_{a}{}^{\mu}\dot{D}_{\mu}\psi - h_{a}{}^{\mu}\dot{D}_{\mu}\overline{\psi}\,\gamma^{a}\ \psi\right) - mc^{2}\overline{\psi}\,\psi\right] \tag{3.3.5}$$

şeklinde yazılır. Burada dörtayaklar ile Dirac matrisleri arasında büzme işlemi yapıldıktan sonra bu denklem

$$\mathcal{L}_{\psi} = h\left[\frac{ic\hbar}{2}\left(\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\dot{D}_{\mu}\psi - \dot{D}_{\mu}\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\ \psi\right) - mc^{2}\overline{\psi}\,\psi\right] \tag{3.3.6}$$

biçimine dönüşür. Bu durumda Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overline{\psi}} - \dot{D}_{\mu}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\dot{D}_{\mu}\overline{\psi})}\right) = 0 \tag{3.3.7}$$

şeklinde yazılır ve $\overline{\psi}$ ' ye göre türev alınırsa;

$$h\frac{ic\hbar}{2}\gamma^{\mu}\dot{D}_{\mu}\psi - h\,mc^{2}\psi + \dot{D}_{\mu}\left(h\frac{ic\hbar}{2}\gamma^{\mu}\ \psi\right) = 0 \tag{3.3.8}$$

olduğu görülür.

$$\dot{D}_{\mu}\left(h\,\gamma^{\mu}\ \right) = 0 \tag{3.3.9}$$

koşulu altında denklem (3.3.8)

$$i\hbar\ \gamma^{\mu}\dot{D}_{\mu}\psi - mc\psi = 0 \tag{3.3.10}$$

denklemine dönüşür. Teleparallel Fock- Ivanenkov türev işlemcisi çiftlenim betimlemesinin bütün özelliklerini belirtir [23]. Denklem (3.2.6) kullanılarak denklem (3.3.10) açık olarak aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$i\hbar\,\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+\frac{i}{2}\;\dot{K}^{ab}{}_{\mu}\;S_{ab})\psi-mc\psi=0 \qquad (3.3.11)$$

Buna Teleparallel Kuramında Dirac Denklemi denir.

3.4. BURULMANIN BİLEŞENLERİ VE SPİNÖRLER

Burulma tensörü, yerel Lorentz grubuları altında indirgenemez bileşenlerine aşağıdaki biçimde ayrıştırılabilir [23].

$$\dot{T}_{\lambda\mu\upsilon}=\frac{2}{3}\left(t_{\lambda\mu\upsilon}-t_{\lambda\upsilon\mu}\right)+\frac{1}{3}\left(g_{\lambda\mu}\;v_{\upsilon}-g_{\lambda\upsilon}\;v_{\mu}\right)+\varepsilon_{\lambda\mu\upsilon\rho}\;\;a^{\rho} \qquad (3.4.1)$$

Bu denklemde, $t_{\lambda\mu\nu}$

$$t_{\lambda\mu\upsilon}=\frac{1}{2}\left(\dot{T}_{\lambda\mu\upsilon}-\dot{T}_{\mu\lambda\upsilon}\right)+\frac{1}{6}\left(g_{\upsilon\lambda}\;v_{\mu}+g_{\upsilon\mu}\;v_{\lambda}\right)-\frac{1}{3}g_{\lambda\mu}\;v_{\upsilon} \qquad (3.4.2)$$

biçiminde verilir ve burulmanın tam tensör parçasını oluşturur. v_{μ} (ve v_{ν}) ise burulmanın vektör parçası olup

$$v_{\mu}=\dot{T}^{\nu}{}_{\nu\mu} \qquad (3.4.3)$$

eşitliği ile verilir. Denklem (3.4.1) de a^{ρ} ise burulmanın eksensel parçasını ifade eder ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$a^{\mu}=\frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\upsilon\rho\sigma}\dot{T}_{\upsilon\rho\sigma} \qquad (3.4.4)$$

Teleparellel kuramının özel bir durumunda Dirac denklemindeki kıvrılma tensörünün içerdiği terim hesaplandığında

$$\frac{i}{4}\dot{K}^{bc}{}_{a}\ \gamma^{a}\quad \sigma_{bc}=-\gamma^{a}\left(\frac{1}{2}v_{a}+\frac{3i}{4}a_{a}\gamma^{5}\right) \tag{3.4.5}$$

elde edilir. Buna göre Dirac denklemi

$$i\,\hbar\,\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\frac{1}{2}v_{\mu}-\frac{3i}{4}a_{\mu}\gamma^{5}\right)\psi=mc\,\psi \tag{3.4.6}$$

biçimini alır [38]. Burada $\gamma^{5}=\gamma_{5}=i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$ dür. Dikkat edilirse denklem yalnızca burulmanın v_{μ} vektörel ve a^{ρ} eksenel parçalarını içermektedir. Görüldüğü gibi spin ½ olan parçacıkların (Fermiyonlar) kütlesel çekim alanıyla betiminde burulmanın yalnızca vektörel ve eksensel parçası yer almaktadır, tam tensör parçası ise etkileşimin dışında kaldığı için denklemde görülmemektedir.

3.5. TELEPARELLEL KURAMINDA KERR-NEWMAN METRİĞİ İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ [45]

Yüklü ve M kütleli dönen yükün gravitasyonel alanı

$$ds^{2}=g_{00}dt^{2}+g_{11}dr^{2}+g_{22}d\theta^{2}+g_{33}d\phi^{2}+2g_{03}d\phi dt \tag{3.5.1}$$

ile verilen ve eksensel simetrik olan Kerr-Newman metriğidir. Bu metrik tensörünün öğeleri aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir.

$$g_{00}=1-\frac{Rr}{\rho^{2}}\ ,\ g_{11}=-\frac{\rho^{2}}{\Delta}\ ,\ g_{22}=-\rho^{2}$$

$$g_{33}=-(r^{2}+a^{2}+\frac{Rra^{2}}{\rho^{2}}Sin^{2}\theta)Sin^{2}\theta \tag{3.5.2}$$

$$g_{03}=g_{30}=\frac{Rra}{\rho^{2}}Sin^{2}\theta$$

Bu ifadelerdeki $\Delta = r^2 - Rr + a^2$, $R = 2M - q^2 / r$, $\rho^2 = r^2 + a^2 Cos^2\theta$ olarak verilir. a gravitasyonel birim kütlesel kaynağının açısal momentumudur. q kaynağın elektiriksel yüküdür. $q=0$ olma durumunda Kerr- Newman metriği, Kerr metriğine indirgenir. $a=q= 0$ olma durumunda ise, Schwarzchild metriğinin standart biçimine dönüşür.

Kerr-Newman metriği için, $g_{\mu\nu} = h^a{}_\mu h^b{}_\nu \eta_{ab}$ bağıntısı dörtayaklar matris biçiminde

$$h^a{}_\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{00} & 0 & 0 & \eta \\ 0 & \gamma_{11} S\theta C\phi & \gamma_{22} C\theta C\phi & -\beta S\phi \\ 0 & \gamma_{11} S\theta S\phi & \gamma_{22} C\theta S\phi & \beta C\phi \\ 0 & \gamma_{11} C\theta & -\gamma_{22} S\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5.3}$$

Olarak elde edilir. Dört ayakların tersi ise;

$$h_a{}^\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma^{-1}{}_{00} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta g^{03} S\phi & \gamma^{-1}{}_{11} S\theta C\phi & \gamma^{-1}{}_{22} C\theta C\phi & -\beta^{-1} S\phi \\ \beta g^{03} C\phi & \gamma^{-1}{}_{11} S\theta S\phi & \gamma^{-1}{}_{22} C\theta S\phi & \beta^{-1} C\phi \\ 0 & \gamma^{-1}{}_{11} C\theta & -\gamma^{-1}{}_{22} S\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5.4}$$

Şeklinde bulunur. Burada $\beta^2 = \eta^2 - g_{33}$, $\eta = g_{03} / \gamma_{00}$, $\gamma_{00} = \sqrt{g_{00}}$,$\gamma_{ii} = \sqrt{-g_{ii}}$ $S\theta = Sin\theta$ ve $C\theta = Cos\theta$ dır. Denklem (3.5.3) ve (3.5.4) kullanılarak sıfırdan farklı burulmanın tensör bileşenleri

$$\begin{aligned} \dot{T}^0{}_{01} &= -[\ln \sqrt{g_{00}}]_{,r} \\ \dot{T}^0{}_{13} &= \eta_{,r} / \gamma_{00} - \beta g^{03} (\beta_{,r} - \gamma_{11} S\theta) \\ \dot{T}^0{}_{23} &= \eta_{,\theta} / \gamma_{00} - \beta g^{03} (\beta_{,\theta} - \gamma_{22} C\theta) \\ \dot{T}^1{}_{12} &= -[\ln \sqrt{-g_{11}}]_{,\theta} \end{aligned} \tag{3.5.5a}$$

$$\dot{T}^{2}{}_{12} = [\ln\sqrt{-g_{22}}]_{,r} - \gamma_{11}/\gamma_{22}$$
$$\dot{T}^{3}{}_{13} = (\beta_{,r} - \gamma_{11}S\theta)/\beta \qquad (3.5.5b)$$
$$\dot{T}^{3}{}_{23} = (\beta_{,\theta} - \gamma_{22}C\theta)/\beta$$

biçiminde elde edilir. Burada 'virgül' türevi göstermektedir.

Burulmanın vektör bileşenleri;

$$v_1 = -[\ln\sqrt{g_{00}}]_{,r} - [\ln\sqrt{-g_{22}}]_{,r} + \gamma_{11}/\gamma_{22} - [\ln\beta]_{,r} + \gamma_{11}S\theta/\beta \qquad (3.5.6)$$
$$v_2 = -[\ln\sqrt{-g_{11}}]_{,\theta} - [\ln\beta]_{,\theta} + \gamma_{22}C\theta/\beta$$

ve eksensel bileşenleri;

$$a^{(1)} = -\frac{1}{3l}(g_{00}\dot{T}^{0}{}_{23} + g_{03}\dot{T}^{3}{}_{23}) \qquad (3.5.7)$$
$$a^{(2)} = \frac{1}{3l}[g_{00}\dot{T}^{0}{}_{13} + g_{03}(\dot{T}^{3}{}_{13} + \dot{T}^{0}{}_{01})]$$

olarak bulunur. Burada $l = r^2 Sin\theta$ 'dır. Bu bağıntılarda metriğin bileşenleri doğrudan yerlerine yazılır ve , $\alpha_m = \frac{2m}{r}$, $\alpha_q = \frac{q^2}{r^2}$ terimleri ile betimlenen zayıf alan limiti yaklaşımı gözönüne alınırsa;

$$a^{(1)} = -\frac{1}{3l}(g_{03})_{,\theta} \qquad (3.5.8)$$
$$a^{(2)} = \frac{1}{3l}[\gamma_{00}(\eta)_{,r} - \eta(\gamma_{00})_{,r}]$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu sonuçlar kullanılarak burulmanın eksensel vektörlerinin uzaysal bileşenleri için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\vec{a} = a^{(1)}\gamma_{11}\hat{e}_r + a^{(2)}\gamma_{22}\hat{e}_\theta \equiv \vec{a}_m + \vec{a}_q \tag{3.5.9}$$

burada

$$\vec{a}_m = \frac{\alpha_m a}{3r^2}[2Cos\theta\,\hat{e}_r + Sin\theta\,\hat{e}_\theta] \tag{3.5.10}$$

ve

$$\vec{a}_q = -\frac{\alpha_q a}{3r^2}[2Cos\theta\,\hat{e}_r + 2Sin\theta\,\hat{e}_\theta] \tag{3.5.11}$$

biçimindedir ve sırasıyla burulmanın eksensel bileşenlerinin kütlesel ve yük dağılımlarıdır. Bu durumda a^μ eksensel vektörüne sahip bir evrende, spini $\vec{\mathbf{s}}$ olan bir parçacık için hareket denklemleri [10,46,47]

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = -\vec{b}\times\vec{s} \tag{3.5.12}$$

olarak tanımlanmaktadır ve burada $\vec{\mathbf{b}} = 3\vec{\mathbf{A}}/2$ dir. Bu denklemde (3.5.10) ve (3.5.11) denklemleri yerine yazıldığında $\vec{\mathbf{b}}$;

$$\vec{\mathbf{b}} = \frac{J}{r^3}[2Cos\theta\,\hat{e}_r + Sin\theta\,\hat{e}_\theta] - \frac{(q^2/m)J}{r^4}[2Cos\theta\,\hat{e}_r + 2Sin\theta\,\hat{e}_\theta] \tag{3.5.13}$$

şeklinde elde edilir. Denklemde $J = ma$ olmak üzere J açısal momentumu betimler. Ayrıca Kerr Newman metriğinin özel bir durumu olan $q = 0$, Kerr çözümleri ise;

$$\vec{\mathbf{b}} = \frac{G}{r^3}[-\boldsymbol{J} + 3\boldsymbol{J}(\;\cdot e_r)e_r] \tag{3.5.14}$$

Sonucunu verir. Burada $\vec{J} = J\,\hat{e}_z$ dir. Bunun anlamı; $\mathbf{b} = w_{LT}$'dır. w_{LT} Genel Görelilikten bilinen gravitasyonel alanın gravitomagnetik bileşeni tarafından üretilen

Lense-Thirring dönme açısal hızıdır. Teleparellel Kuramında $\vec{a}$, yani burulmanın eksensel bileşeni, gravitasyonel alanın gravitomagnetik bileşenini gösterir [48]. Aslında zayıf alan yaklaşımı gözönüne alındığında parçacıkların yörüngeleri;

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{a}} \tag{3.5.15}$$

denklemi ile elde edilir[ref kitap]. Bu denklemden de $\dot{\mathbf{A}}$'nın gravitasyonel alanın gravitomagnetik bileşeni olduğu görülmektedir.

3.6 SPİNÖR ALANLARLA TELEPARELLEL DİRAC DENKLEMİ [49]

Bu kesimde, kartezyen koordinatlarda bazı genişleyen veya durağan ya da her ikisini içeren özel evren modellerini içeren

$$ds^2 = -A^2(x,t)dt^2 + B^2(x,t)dx^2 + C^2(x,t)dy^2 + D^2(x,t)dz^2 \tag{3.6.1}$$

İle verilen bir çizgi elemanı için Dirac denklemi yazılacaktır. Bu çizgi elemanı için metrik tensörü

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^2 \end{pmatrix} \tag{3.6.2}$$

ve Metrik tensörünün tersi ise

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{-2} \end{pmatrix} \tag{3.6.3}$$

dir.

Eğri uzay- zamanda her bir nokta işaretlenerek her bir noktaya teğet doğrular çizildiğinde bu doğruların oluşturduğu bir düz uzay-zaman elde edilir. Elde edilen teğet (tanjant) uzay-zamanıdır. Elde edilen bu düz uzay ile eğri uzay-zaman arasında bağlantı kurulur. Bu bağlantılara dört ayaklar denir. Bu dört ayaklar aracılığıyla uzay zamanda yazılan denklemler düz uzay-zamana taşınır. Çizgi elemanının dört ayak bileşenleri ile ;

$$g_{\mu\nu} = h^{(a)}{}_{\mu} h^{(b)}{}_{\nu} \eta_{(a)(b)} \tag{3.6.4a}$$

şeklinde ifade edilirken tersi ise;

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu}{}_{(a)} h^{\nu}{}_{(b)} \eta^{(a)(b)} \tag{3.6.4b}$$

olur. Bu ifadede $h^{(a)}{}_{\mu}$ dört ayakları, $h^{\mu}{}_{(a)}$ ise dört ayakların tersini temsil eder. Gösterimdeki parentez içindeki Latin alfebesi (a,b,c,..) ile yazılan indisler düz uzay-zamanı, Yunan alfebesi $(\alpha, \beta, \mu, \nu, ...)$ ile yazılan indisler ise eğri uzay-zamanı betimler. Denklem (3.1.2) deki çizgi elemanı göz önüne alındığında dörtayaklar

$$h^{(a)}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \tag{3.6.5}$$

şeklinde elde edilir. Tersi ise çizgi elemanının tersi kullanılarak denklem (3.1.4b) den;

$$h^{\mu}{}_{(a)} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.6.6}$$

bulunur. Eğri uzay-zamanda ifade edilen Dirac gamma matrisleri (γ^{μ}) nin düz uzay-zaman gamma matrisleri ile olan ilişkileri

$$\gamma^{\mu} = h^{\mu}{}_{(a)}\gamma^{(a)} \tag{3.6.7}$$

ile verilir. Bu ifadedeki $\gamma^{(a)}$ düz uzay-zamandaki Dirac gamma matrisleridir. Verilen çizgi elemanı için elde edilen dört ayaklar denklem (3.1.7) de yerine konulduğunda Dirac matrisleri;

$$\begin{aligned} \gamma^{0} &= A^{-1}\gamma^{(0)}, \quad \gamma^{1} = B^{-1}\gamma^{(1)} \\ \gamma^{2} &= C^{-1}\gamma^{(2)}, \quad \gamma^{3} = D^{-1}\gamma^{(3)} \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

olur.

Eğri uzay- zaman hakkında bilgi içeren ve parçacıklarla olan ilişkiyi ifade eden genel bağlantı Teleparallel kuramında Weitzenböck bağlantılarıdır. Bu bağlantılar denklem (3.1.14) kullanılarak

$$\dot{\Gamma}^{0}{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{A}}{A}\delta^{00}_{\mu\nu} + \frac{A'}{A}\delta^{01}_{\mu\nu} \tag{3.6.9a}$$

$$\dot{\Gamma}^{1}{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{B}}{B}\delta^{10}_{\mu\nu} + \frac{B'}{B}\delta^{11}_{\mu\nu} \tag{3.6.9b}$$

$$\dot{\Gamma}^{2}{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{C}}{C}\delta^{20}_{\mu\nu} + \frac{C'}{C}\delta^{21}_{\mu\nu} \tag{3.6.9c}$$

$$\dot{\Gamma}^{3}{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{D}}{D}\delta^{30}_{\mu\nu} + \frac{D'}{D}\delta^{31}_{\mu\nu} \tag{3.6.9d}$$

elde edilir. Burada nokta, zamana, virgü ise x koordinatına göre türevi göstermektedir.

Denklem (3.5.1) de verilen çizgi elemanı için burulma tensörünün bileşenleri

$$\dot{T}^{0}{}_{\mu\nu} = \frac{A'}{A}(\delta^{10}_{\mu\nu} - \delta^{01}_{\mu\nu}) \tag{3.6.10a}$$

$$\dot{T}^{1}{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{B}}{B}(\delta^{01}_{\mu\nu} - \delta^{10}_{\mu\nu}) \tag{3.6.10b}$$

$$\dot{T}^{2}{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{C}}{C}(\delta^{02}_{\mu\nu} - \delta^{20}_{\mu\nu}) + \frac{C'}{C}(\delta^{12}_{\mu\nu} - \delta^{21}_{\mu\nu}) \tag{3.6.10c}$$

$$\dot{T}^{3}{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{D}}{D}(\delta^{03}_{\mu\nu} - \delta^{30}_{\mu\nu}) + \frac{D'}{D}(\delta^{13}_{\mu\nu} - \delta^{31}_{\mu\nu}) \tag{3.6.10d}$$

ve kıvrılma tensörünün bileşenleri ise

$$\dot{K}^{0}{}_{\mu\nu} = -\frac{A'}{A}\delta^{10}_{\mu\nu} - \frac{B\dot{B}}{A^2}\delta^{11}_{\mu\nu} - \frac{C\dot{C}}{A^2}\delta^{22}_{\mu\nu} - \frac{D\dot{D}}{A^2}\delta^{33}_{\mu\nu} \tag{3.6.11a}$$

$$\dot{K}^{1}{}_{\mu\nu} = -\frac{AA'}{B^2}\delta^{00}_{\mu\nu} - \frac{\dot{B}}{B}\delta^{01}_{\mu\nu} - \frac{CC'}{B^2}\delta^{22}_{\mu\nu} - \frac{DD'}{B^2}\delta^{33}_{\mu\nu} \tag{3.6.11b}$$

$$\dot{K}^{2}{}_{\mu\nu} = -\frac{\dot{C}}{C}\delta^{02}_{\mu\nu} - \frac{C'}{C}\delta^{12}_{\mu\nu} \tag{3.6.11c}$$

$$\dot{K}^{3}{}_{\mu\nu} = -\frac{\dot{D}}{D}\delta^{03}_{\mu\nu} - \frac{D'}{D}\delta^{13}_{\mu\nu} \tag{3.6.11d}$$

olarak bulunur. (3.6.11) de elde edilen verileri denklem (3.3.11) de yerine yazıldığında Dirac denklemi aşağıdaki biçimi alır:

$$\left\{-\frac{1}{A}\gamma_{(0)}\partial_0+\frac{1}{B}\gamma_{(1)}\partial_1+\frac{1}{C}\gamma_{(2)}\partial_2+\frac{1}{D}\gamma_{(3)}\partial_3\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{B}}{AB}+\frac{\dot{C}}{CB}+\frac{\dot{D}}{DB}\right)\gamma_{(0)}-\frac{1}{2}\left(\frac{A'}{AB}+\frac{C'}{CB}+\frac{D'}{DB}\right)\gamma_{(1)}-mc\right\}\Psi=0 \tag{3.6.12}$$

3.7 BURULMANIN BİLEŞENLERİ CİNSİNDEN DİRAC DENKLEMİ

Denklem (3.6.1) ‘de verilen çizgi elemanı için denklem (3.4.3) kullanılarak sıfırdan farklı v_μ değerleri;

$$v_0=\left(\frac{\dot{B}}{AB}+\frac{\dot{C}}{CB}+\frac{\dot{D}}{DB}\right) \tag{3.7.14a}$$

$$v_1=\left(\frac{A'}{AB}+\frac{C'}{CB}+\frac{D'}{DB}\right) \tag{3.7.14b}$$

ve denklem (3.4.4) kullanılarak burulmanın eksensel bileşenleri

$$a_0=0,\quad a_1=0,\quad a_2=0,\quad a_3=0 \tag{3.7.15}$$

olarak bulunur.

Burada elde edilen burulmanın eksensel ve vektörel bileşenleri denklem (3.4.6) da yerine yazıldığında Dirac denklemi için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left\{-\frac{1}{A}\gamma_{(0)}\partial_0+\frac{1}{B}\gamma_{(1)}\partial_1+\frac{1}{C}\gamma_{(2)}\partial_2+\frac{1}{D}\gamma_{(3)}\partial_3\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{B}}{AB}+\frac{\dot{C}}{CB}+\frac{\dot{D}}{DB}\right)\gamma_{(0)}-\frac{1}{2}\left(\frac{A'}{AB}+\frac{C'}{CB}+\frac{D'}{DB}\right)\gamma_{(1)}-mc\right\}\Psi=0 \tag{3.7.16}$$

Bu denklem, denklem (3.6.12) ile karşılaştırıldığında eşdeğer oldukları görülür.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Her bir evren modeli bir çizgi elemanı ile betimlenir ve bu çizgi elemanı o evren modelinin özelliklerini içerir. Genel Görelilik kuramında olduğu gibi, Teleparallel kuramında da parçacık denklemlerinin yazımında uzay-zamanın özellikleri değişmemektedir. Bu nedenle her iki kuramda da seçilecek evren modeli değişmez kalır. Bu çalışmada tartışacağımız Dirac denklemi için seçilen çizgi elemanı

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{00}(x^0,x^1)(dx^0)^2 + g_{11}(x^0,x^1)(dx^1)^2 + g_{22}(x^0,x^1)(dx^2)^2 \\ &\quad + g_{33}(x^0,x^1)(dx^3)^2 - 2g_{02}(x^0,x^1)dx^0dx^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanan çizgi elemanı için Dirac denkleminin hem genel görelilikte hem de Teleparellelde aynı biçimde olduğu ve dolayısıyla aynı çözümleri vereceği ve bunun sonucu olarak da her iki kuramın da aynı fiziği betimlediklerini gösterecektir. Seçilen çizgi elemanı genel biçimdedir ve birçok özel çizgi elemanını kapsamaktadır. Bu metrik durağan olmayan ve dönen evren modellerini de içermesi nedeniyle önem taşımaktadır.

4.1 HESAPLAMALAR

Denklem (4.1) de verilen çizgi elemanı için metrik tensör;

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -g_{00} & 0 & -g_{02} & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ -g_{02} & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

biçimindedir ve metrik tensörünün tersi için denklem (3.6.3)'teki ifade kullanıldığında $g^{\mu\nu}$ tensörü;

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -g_{22} & 0 & -g_{02} & 0 \\ 0 & \dfrac{\Delta}{g_{11}} & 0 & 0 \\ -g_{02} & 0 & -g_{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\Delta}{g_{33}} \end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada $\Delta = g_{00}g_{22} + g_{02}{}^{2}$ şeklindedir.

Teleparellel kuramının matematiksel alt yapısı dörtayak formalizmi oluşturmaktadır. Dörtayaklar bu kuramın temelini oluşturan burulma tensörlerinin elde edilmesi için kullanılır. Dörtayaklar aynı zamanda iki geometri arasındaki katsayıları temsil ederek uzay-zamanlar arasındaki geçişi sağlarlar. Eğri uzay-zamandaki ifadeler ile düz uzay-zaman arasında ilişki kurulmasını sağlayan bu dörtayaklar, ve dörtayakların tersi metrik tensörünün bileşenleri cinsinden sırasıyla denklem (3.6.5a) ve (3.6.5b) verilen ifade ile birlikte verilen çizgi elemanı göz önüne alındığında dörtayakların bileşenleri

$$\begin{aligned} h^{(0)}{}_{\mu} &= G_{00}\delta_{\mu}^{(0)} \\ h^{(1)}{}_{\mu} &= G_{11}\delta_{\mu}^{(1)} \\ h^{(2)}{}_{\mu} &= \frac{g_{02}}{G_{00}}\delta_{\mu}^{(0)} + \frac{\sqrt{\Delta}}{G_{00}}\delta_{\mu}^{(2)} \\ h^{(3)}{}_{\mu} &= G_{33}\delta_{\mu}^{(3)} \end{aligned} \tag{4.1.3a}$$

olarak bulunur. Burada $\sqrt{g_{00}} = G_{00}$, $\sqrt{g_{ij}} = G_{ij}$'dir. Dörtayakların tersi ise;

$$h^{\mu}{}_{(0)} = \frac{1}{G_{00}}\delta^{\mu}_{(0)}, \;\; h^{\mu}{}_{(1)} = \frac{1}{G_{11}}\delta^{\mu}_{(1)} \tag{4.1.3b}$$

$$h^{\mu}{}_{(2)} = \frac{G_{00}}{\sqrt{\Delta}}\delta_2^{\mu} - \frac{g_{02}}{G_{00}\sqrt{\Delta}}\delta_0^{\mu}$$

$$h^{\mu}{}_{(3)} = \frac{1}{G_{33}}\delta_{(3)}^{\mu} \tag{4.1.3b}$$

biçiminde elde edilir.

Verilen uzay-zamandaki Dirac gamma matrisleri ile düz uzay-zamandaki Dirac gamma matrisleri arasındaki ilişki, denklem (3.6.8) kullanılarak

$$\gamma^0 = \frac{\gamma^{(0)}}{G_{00}} - \frac{g_{02}\gamma^{(2)}}{G_{00}\sqrt{\Delta}},\ \gamma^1 = \frac{\gamma^{(1)}}{G_{11}}$$

$$\gamma^2 = \frac{G_{00}}{\sqrt{\Delta}}\gamma^{(2)},\ \gamma^3 = \frac{\gamma^{(3)}}{G_{33}} \tag{4.1.4}$$

şeklinde bulunur.

Denklem (4.1)'de verilen genel metrik için (3.1.10) bağıntısında (4.1.3a) ve (4.1.3b) de elde edilen sonuçlar kullanılarak Weitzenböck bağlantıları aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\dot{\Gamma}^0{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{G}_{00}}{G_{00}}\delta_{\mu\nu}^{00} + \frac{G'_{00}}{G_{00}}\delta_{\mu\nu}^{01}$$

$$+\left(\frac{g_{22}\dot{g}_{02}}{\Delta} - \frac{g_{22}g_{02}\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}} - \frac{g_{02}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta}\right)\delta_{\mu\nu}^{20} \tag{4.1.5a}$$

$$+\left(\frac{g_{22}g'_{02}}{\Delta} - \frac{g_{22}g_{02}G'_{00}}{\Delta G_{00}} - \frac{g_{02}G_{22}g'_{22}}{\Delta}\right)\delta_{\mu\nu}^{21}$$

$$\dot{\Gamma}^1{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{G}_{11}}{G_{11}}\delta_{\mu\nu}^{10} + \frac{G'_{11}}{G_{11}}\delta_{\mu\nu}^{11} \tag{4.1.5b}$$

$$\dot{\Gamma}^2{}_{\mu\nu} = \left(\frac{g_{00}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta} + \frac{g_{02}\dot{g}_{02}}{\Delta} - \frac{(g_{02})^2\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}} \right)\delta^{20}_{\mu\nu}$$

$$+ \left(\frac{g_{00}G_{22}G_{22}}{\Delta} + \frac{g_{02}g'_{02}}{\Delta} - \frac{(g_{02})^2 G'_{00}}{\Delta G_{00}} \right)\delta^{21}_{\mu\nu} \tag{4.1.5c}$$

$$\dot{\Gamma}^3{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{G}_{33}}{G_{33}}\delta^{30}_{\mu\nu} + \frac{G'_{33}}{G_{33}}\delta^{31}_{\mu\nu} \tag{4.1.5d}$$

Bu sonuçlar denklem (3.1.12) de yerine yazıldığında burulma bileşenleri için elde edilen ifadeler

$$\dot{T}^0{}_{\mu\nu} = \frac{G'_{00}}{G_{00}}(\delta^{10}_{\mu\nu} - \delta^{01}_{\mu\nu})$$

$$+ \left(\frac{g_{22}\dot{g}_{02}}{\Delta} - \frac{g_{22}g_{02}\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}} - \frac{g_{02}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta} \right)(\delta^{02}_{\mu\nu} - \delta^{20}_{\mu\nu}) \tag{4.1.6a}$$

$$+ \left(\frac{g_{22}g'_{02}}{\Delta} - \frac{g_{22}g_{02}G_{00}}{\Delta G_{00}} - \frac{g_{02}G_{22}G'_{22}}{\Delta} \right)(\delta^{12}_{\mu\nu} - \delta^{21}_{\mu\nu})$$

$$\dot{T}^1{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{G}_{11}}{G_{11}}(\delta^{01}_{\mu\nu} - \delta^{10}_{\mu\nu}) \tag{4.1.6b}$$

$$\dot{T}^2{}_{\mu\nu} = \left(\frac{g_{00}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta} + \frac{g_{02}\dot{g}_{02}}{\Delta} - \frac{(g_{02})^2\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}} \right)(\delta^{02}_{\mu\nu} - \delta^{20}_{\mu\nu})$$

$$+ \left(\frac{g_{00}G_{22}G'_{22}}{\Delta} + \frac{g_{02}g'_{02}}{\Delta} - \frac{(g_{02})^2 G'_{00}}{\Delta G_{00}} \right)(\delta^{12}_{\mu\nu} - \delta^{21}_{\mu\nu}) \tag{4.1.6c}$$

$$\dot{T}^3{}_{\mu\nu} = \frac{\dot{G}_{33}}{G_{33}}(\delta^{03}_{\mu\nu} - \delta^{30}_{\mu\nu}) + \frac{G'_{33}}{G_{33}}(\delta^{13}_{\mu\nu} - \delta^{31}_{\mu\nu}) \tag{4.1.6d}$$

olur. Bu ifadeler Dirac denklemindeki spin bağlantılarını sağlayan kıvrılma (contortion) tensörlerini elde etmek için kullanılır. Denklem (4.1) deki çizgi elemanı için (4.1.6) da elde edilen sıfırdan farklı burulma bileşenleri (3.1.15) de verilen denklemde kullanıldığında kıvrılma tensörünün bileşenleri

$$
\begin{aligned}
\dot{K}^{0}{}_{\mu\nu} = & \left(\frac{(g_{02})^2\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}} - \frac{g_{02}\dot{g}_{02}}{\Delta}\right)\delta^{00}_{\mu\nu} \\
& + \left(\frac{(g_{02})^2\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}} - \frac{g_{02}g'_{02}}{2\Delta}\right)\delta^{01}_{\mu\nu} - \left(\frac{(g_{02})^2 G'_{00}}{\Delta G_{00}} + \frac{g_{02}g'_{02}}{2\Delta}\right)\delta^{10}_{\mu\nu} \\
& + \frac{g_{02}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta}\delta^{02}_{\mu\nu} + \left(\frac{(g_{22})^2\dot{g}_{02}}{\Delta} - \frac{g_{22}g_{02}\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}}\right)\delta^{20}_{\mu\nu} \\
& - \frac{(g_{02})^2 G_{11}\dot{G}_{11}}{\Delta}\delta^{11}_{\mu\nu} + \left(\frac{g_{22}g'_{02}}{2\Delta} - \frac{g_{22}g_{02}G'_{00}}{\Delta G_{00}}\right)\delta^{21}_{\mu\nu} \\
& + \left(\frac{g_{02}G_{22}G'_{22}}{\Delta} - \frac{g_{22}g'_{02}}{2\Delta}\right)\delta^{12}_{\mu\nu} - \frac{(G_{22})^3 g'_{02}}{\Delta}\delta^{22}_{\mu\nu} \\
& - \frac{g_{22}G_{33}\dot{G}_{33}}{\Delta}\delta^{33}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.1.7a}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{K}^{1}{}_{\mu\nu} = & \frac{G_{00}G'_{00}}{G_{11}}\delta^{00}_{\mu\nu} - \frac{\dot{G}_{11}}{G_{11}}\delta^{01}_{\mu\nu} - \frac{g'_{02}}{G_{11}}\delta^{02}_{\mu\nu} \\
& + \frac{G_{22}G'_{22}}{G_{11}}\delta^{22}_{\mu\nu} + \frac{G_{33}G'_{33}}{G_{11}}\delta^{33}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.1.7b}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{K}^{2}{}_{\mu\nu} = & \left(\frac{g_{00}\dot{g}_{02}}{\Delta} + \frac{g_{02}G_{00}\dot{G}_{00}}{\Delta}\right)\delta^{00}_{\mu\nu} \\
& + \left(\frac{g_{00}g'_{02}}{2\Delta} - \frac{g_{02}G_{00}G_{00}}{\Delta}\right)(\delta^{01}_{\mu\nu} - \delta^{10}_{\mu\nu}) - \frac{g_{02}G_{11}\dot{G}_{11}}{\Delta}\delta^{11}_{\mu\nu} \\
& - \frac{g_{00}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta}\delta^{02}_{\mu\nu} + \left(\frac{g_{02}\dot{g}_{02}}{\Delta} - \frac{(g_{02})^2\dot{G}_{00}}{\Delta}\right)\delta^{20}_{\mu\nu} \\
& - \left(\frac{g_{00}G_{22}G'_{22}}{\Delta} + \frac{g_{02}g'_{02}}{2\Delta}\right)\delta^{12}_{\mu\nu} + \left(\frac{g_{02}g'_{02}}{2\Delta} - \frac{(g_{02})^2 G'_{00}}{\Delta G_{00}}\right)\delta^{21}_{\mu\nu} \\
& - \frac{g_{02}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta}\delta^{22}_{\mu\nu} - \frac{g_{02}G_{33}\dot{G}_{33}}{\Delta}\delta^{33}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.1.7c}
$$

$$\dot{K}^{3}{}_{\mu\nu} = -\frac{\dot{G}_{33}}{G_{33}}\delta^{03}_{\mu\nu} - \frac{G'_{33}}{G_{33}}\delta^{13}_{\mu\nu} \tag{4.1.7d}$$

biçiminde elde edilir.

4.2 VERİLEN METRİK İÇİN DİRAC DENKLEMİ

Spini1/2 olan parçacıkların dinamiğini anlamak için çözülen Dirac denkleminin Teleparallel kuramda yazılmış formunu kullandığımızda seçilen genel çizgi elemanı için kontorsion tensörünün sıfırdan farklı olan terimleri denklem (3.1.17)deki Teleparallel Fock- Ivanenkov türev işlemcisinde yerine yazıldığında ve elde edilen sonuçlar (3.1.19) da betimlenen yerine konulduğunda genel bir denklem elde edilmiş olur. Bu bağlamda durağan olmayan ve açık evren modellerini de kapsayan çizgi elemanı için gamma matrislerinin dönüşümleri yapılarak Dirac denklemi;

$$\begin{aligned}
&\Bigg\{(\gamma_{(0)} - \frac{g_{02}}{\sqrt{\Delta}G_{00}}\gamma_{(2)})\partial_0 + \frac{1}{G_{11}}\gamma_{(1)}\partial_1 + \frac{G_{00}}{\sqrt{\Delta}}\gamma_{(2)}\partial_2 + \frac{1}{G_{33}}\gamma_{(3)}\partial_3 \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{(g_{02})^2\dot{G}_{00}}{G_{00}\Delta} - \frac{g_{02}\dot{g}_{02}}{G_{00}\Delta} - \frac{\dot{G}_{11}}{G_{00}G_{11}} - \frac{G_{00}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta} - \frac{\dot{G}_{33}}{G_{00}G_{33}}\right)\gamma_{(0)} \\
&+\frac{1}{2}\left(-\frac{G'_{00}}{G_{00}G_{11}} + \frac{g_{02}g'_{02}}{G_{11}\Delta} - \frac{(g_{02})^2G'_{00}}{G_{00}G_{11}\Delta} + \frac{g_{00}G_{22}G'_{22}}{G_{11}\Delta} + \frac{G'_{33}}{G_{11}G_{33}}\right)\gamma_{(1)} \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{-g_{02}\dot{G}_{00}}{g_{00}\sqrt{\Delta}} - \frac{\dot{g}_{02}}{G_{00}\sqrt{\Delta}} - \frac{g_{02}\dot{G}_{11}}{G_{00}G_{11}\sqrt{\Delta}} - \frac{g_{02}\dot{G}_{33}}{G_{00}G_{33}\sqrt{\Delta}}\right)\gamma_{(2)} \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{g_{02}G'_{00}}{G_{00}G_{11}\sqrt{\Delta}} + \frac{g'_{02}}{G_{11}\sqrt{\Delta}}\right)\gamma_{(0)}\gamma_{(1)}\gamma_{(2)} - m\Bigg\}\psi = 0
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemde görüldüğü gibi verilen çizgi elemanının katsayıları x ve t ye bağlı olması nedeniyle denklem zamana ve konuma göre türevleri içermektedir. $\gamma_{(0)}$ ve $\gamma_{(2)}$ ‘nin önündeki katsayı sadece zamana bağlı türev içerirken

$\gamma_{(1)}$'in önündeki katsayı ise yalnızca konuma göre türev içerir. Bununla birlikte metrik tansörünün dönmeyi içermesinden dolayı $\gamma_{(0)}\gamma_{(1)}\gamma_{(2)}$ çarpanıyla birlikte ek bir terim gelmektedir. Bu terimin önündeki katsayı ise sadece x'e göre türev içermektedir.

4.3 BURULMANIN BİLEŞENLERİ CİNSİNDEN DIRAC DENKLEMİ

Burulmanın indirgenemez bileşenleri ile denklem (3.2.5) de ki biçimde yazılan Dirac denklemi ele alındığında denklemde de göründüğü gibi sadece sıfırdan farklı burulma terimleri kullanılarak işlemler yapılır.

Verilen metrik tensöründen elde edilen burulma terimleri denklem (3.2.2) de yerine konulduğunda burulmanın sıfırdan farklı Vektörel bileşenleri;

$$v_0 = -\frac{\dot{G}_{11}}{G_{11}} - \frac{g_{00}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta} - \frac{g_{02}\dot{g}_{02}}{\Delta} + \frac{(g_{02})^2\dot{G}_{00}}{G_{00}\Delta} - \frac{\dot{G}_{33}}{G_{33}} \qquad (4.3.1a)$$

$$v_1 = \frac{G'_{00}}{G_{00}} - \frac{g_{00}G_{22}G'_{22}}{\Delta} - \frac{g_{02}g'_{02}}{\Delta} + \frac{{g_{02}}^2 G'_{00}}{\Delta G_{00}} - \frac{G'_{33}}{G_{33}} \qquad (4.3.1b)$$

$$v_2 = \frac{g_{22}\dot{g}_{02}}{\Delta} - \frac{g_{02}g_{22}\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}} - \frac{g_{02}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta} \qquad (4.3.1c)$$

şeklinde elde edilir. Burulmanın Eksensel bileşenleri ise ;

$$a_3 = \frac{2}{3}\left(-\frac{g_{02}G_{33}G'_{00}}{\sqrt{\Delta}G_{00}G_{11}} - \frac{G_{33}g'_{02}}{\sqrt{\Delta}G_{11}}\right) \qquad (4.3.2)$$

biçiminde bulunur. Seçilen metrik tensörü için burulmanın bileşenleri ele alındığında vektörel bileşenlerinden v_0, v_1, v_2 terimleri gelirken, eksensel bileşeninden sadece a_3 terimi gelmektedir ve içerdiği terimler sadece konuma bağlı türevleri içermektedir. Denklem (3.2.5);

$$i\hbar\left(\gamma^0\partial_0+\gamma^1\partial_1+\gamma^2\partial_2+\gamma^3\partial_3-\frac{1}{2}(\gamma^0 v_0+\gamma^1 v_1+\gamma^2 v_2+\gamma^3 v_3)\right.$$
$$\left.-\frac{3i}{4}(\gamma^0 a_0+\gamma^1 a_1+\gamma^2 a_2+\gamma^3 a_3)\gamma^5\right)\psi=mc\,\psi \tag{4.3.3}$$

biçiminde açılımı yapılp denklem (4.3.1) ve denklem (4.3.2) de elde edilen veriler kullanılarak, düz uzay-zaman dirac gamma metrisleri ile birlikte bu denklemde yerine yazıldığında,

$$\left\{(\gamma_{(0)}-\frac{g_{02}}{\sqrt{\Delta}G_{00}}\gamma_{(2)})\partial_0+\frac{1}{G_{11}}\gamma_{(1)}\partial_1+\frac{G_{00}}{\sqrt{\Delta}}\gamma_{(2)}\partial_2+\frac{1}{G_{33}}\gamma_{(3)}\partial_3\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left[(\gamma_{(0)}-\frac{g_{02}}{\sqrt{\Delta}G_{00}}\gamma_{(2)})(-\frac{\dot{G}_{11}}{G_{11}}-\frac{g_{00}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta}-\frac{g_{02}\dot{g}_{02}}{\Delta}\right.$$
$$+\frac{(g_{02})^2\dot{G}_{00}}{G_{00}\Delta}-\frac{\dot{G}_{33}}{G_{33}})+\frac{1}{G_{11}}\gamma_{(1)}(\frac{G'_{00}}{G_{00}}-\frac{g_{00}G_{22}G'_{22}}{\Delta}-\frac{g_{02}g'_{02}}{\Delta} \tag{4.3.4}$$
$$\left.+\frac{g_{02}{}^2G'_{00}}{\Delta G_{00}}-\frac{G'_{33}}{G_{33}})+\frac{G_{00}}{\sqrt{\Delta}}\gamma_{(2)}(\frac{g_{22}\dot{g}_{02}}{\Delta}-\frac{g_{02}g_{22}\dot{G}_{00}}{\Delta G_{00}}-\frac{g_{02}G_{22}\dot{G}_{22}}{\Delta})\right]$$
$$\left.-\frac{3i}{4}(\frac{1}{G_{33}}\gamma_{(3)}\frac{2}{3}(-\frac{g_{02}G_{33}G'_{00}}{\sqrt{\Delta}G_{00}G_{11}}-\frac{G_{33}g'_{02}}{\sqrt{\Delta}G_{11}}))\gamma^5-m\right\}\psi=0$$

biçiminde bulunur. Biraz işlem yapıldıktan sonra elde edilen denklemin Fock-Ivanenkov türev işlemcisi bulunarak elde edilen (4.2.1) denklemi ile aynı olduğu görülür.

4.4 ÇİZGİ ELEMANININ x^0, x^1, x^2, x^3'E BAĞLI OLMA DURUMU

Çizgi elemanı;

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-a^2(x^0,x^1,x^2,x^3)(dx^0)^2 + b^2(x^0,x^1,x^2,x^3)(dx^1)^2 \\
&+ c^2(x^0,x^1,x^2,x^3)(dx^2)^2 + d^2(x^0,x^1,x^2,x^3)(dx^3)^2 \\
&- 2e(x^0,x^1,x^2,x^3)dx^0dx^2
\end{aligned}
\tag{4.4.1}
$$

biçiminde seçilir. Denklem (4.4.1) de verilen çizgi elemanı için metrik tensör;

$$
g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -e & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ -e & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}
\tag{4.4.2}
$$

metrik tensörünün tersi için denklem (3.1.3)'teki ifade kullanıldığında

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{c^2}{n^2} & 0 & -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}^2} & 0 & \frac{a^2}{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d^2} \end{pmatrix}
\tag{4.4.3}
$$

elde edilir. Burada $n = \sqrt{a^2c^2 + e^2}$ şeklindedir.

Çizgi elemanına göre dörtayaklar

$$
h^{(0)}{}_0 = a, \quad h^{(0)}{}_2 = \frac{e}{a}, \quad h^{(1)}{}_1 = b, \quad h^{(2)}{}_2 = \frac{n}{a}, \quad h^{(3)}{}_3 = d
\tag{4.4.4a}
$$

dörtayakların tersleri;

$$h^{0}{}_{(0)}=\frac{1}{a},\quad h^{0}{}_{(2)}=-\frac{e}{an},\quad h^{1}{}_{(1)}=\frac{1}{b},$$
$$h^{2}{}_{(2)}=\frac{a}{n},\quad h^{3}{}_{(3)}=\frac{1}{d} \tag{4.4.4b}$$

şeklindedir. Bu sonuçlara göre gamma matrislerinin düz uzaya dönüşümü

$$\gamma^{0}=\frac{\gamma^{(0)}}{a}-\frac{e\gamma^{(2)}}{an},\quad \gamma^{1}=\frac{\gamma^{(1)}}{b},\quad \gamma^{2}=\frac{a}{n}\gamma^{(2)}\quad \gamma^{3}=\frac{\gamma^{(3)}}{d} \tag{4.4.5}$$

biçiminde bulunur. Weitzenböck bağlantıları;

$$\dot{\Gamma}^{0}{}_{00}=\frac{a_{,x^0}}{a},\quad \dot{\Gamma}^{0}{}_{01}=\frac{a_{,x^1}}{a},\quad \dot{\Gamma}^{0}{}_{02}=\frac{a_{,x^2}}{a},\quad \dot{\Gamma}^{0}{}_{03}=\frac{a_{,x^3}}{a} \tag{4.4.6a}$$

$$\dot{\Gamma}^{0}{}_{20}=\frac{e_{,x^0}}{a^2}-\frac{en_{,x^0}}{a^2 n},\quad \dot{\Gamma}^{0}{}_{21}=\frac{e_{,x^1}}{a^2}-\frac{en_{,x^1}}{a^2 n}$$
$$\dot{\Gamma}^{0}{}_{22}=\frac{e_{,x^2}}{a^2}-\frac{en_{,x^2}}{a^2 n},\quad \dot{\Gamma}^{0}{}_{23}=\frac{e_{,x^3}}{a^2}-\frac{en_{,x^3}}{a^2 n} \tag{4.4.6b}$$

$$\dot{\Gamma}^{1}{}_{10}=\frac{b_{,x^0}}{b},\quad \dot{\Gamma}^{1}{}_{11}=\frac{b_{,x^1}}{b},\quad \dot{\Gamma}^{1}{}_{12}=\frac{b_{,x^2}}{b},\quad \dot{\Gamma}^{1}{}_{13}=\frac{b_{,x^3}}{b} \tag{4.4.6c}$$

$$\dot{\Gamma}^{2}{}_{20}=\frac{n_{,x^0}}{n}-\frac{a_{,x^0}}{a},\dot{\Gamma}^{2}{}_{21}=\frac{n_{,x^1}}{n}-\frac{a_{,x^1}}{a}$$
$$\dot{\Gamma}^{2}{}_{22}=\frac{n_{,x^2}}{n}-\frac{a_{,x^2}}{a},\dot{\Gamma}^{2}{}_{23}=\frac{n_{,x^3}}{n}-\frac{a_{,x^3}}{a} \tag{4.4.6d}$$

$$\dot{\Gamma}^{3}{}_{30}=\frac{d_{,x^0}}{d},\dot{\Gamma}^{3}{}_{31}=\frac{d_{,x^1}}{d}$$
$$\dot{\Gamma}^{3}{}_{32}=\frac{d_{,x^2}}{d},\dot{\Gamma}^{3}{}_{33}=\frac{d_{,x^3}}{d} \tag{4.4.6e}$$

şeklinde elde edilir. Weitzenböck bağlantıları kullanılarak elde edilen Burulma tensörleri;

$$\begin{aligned}\dot{T}^{0}{}_{\mu\nu} &= \frac{a_{,x^1}}{a}(\delta^{10}_{\mu\nu}-\delta^{01}_{\mu\nu})+(\frac{e_{,x^0}}{a^2}+\frac{en_{,x^0}}{a^2 n}-\frac{e_{,x^2}}{a^2})(\delta^{02}_{\mu\nu}-\delta^{20}_{\mu\nu})\\ &+\frac{a_{,x^3}}{a}(\delta^{30}_{\mu\nu}-\delta^{03}_{\mu\nu})+(\frac{e_{,x^1}}{a^2}-\frac{en_{,x^1}}{a^2 n})(\delta^{12}_{\mu\nu}-\delta^{21}_{\mu\nu})\end{aligned} \quad (4.4.7a)$$

$$\begin{aligned}\dot{T}^{1}{}_{\mu\nu} &= \frac{b_{,x^0}}{b}(\delta^{01}_{\mu\nu}-\delta^{10}_{\mu\nu})+\frac{b_{,x^2}}{b}(\delta^{02}_{\mu\nu}-\delta^{20}_{\mu\nu})\\ &+\frac{b_{,x^3}}{b}(\delta^{03}_{\mu\nu}-\delta^{30}_{\mu\nu})\end{aligned} \quad (4.4.7b)$$

$$\begin{aligned}\dot{T}^{2}{}_{\mu\nu} &= (\frac{n_{,x^0}}{n}-\frac{a_{,x^0}}{a})(\delta^{02}_{\mu\nu}-\delta^{20}_{\mu\nu})\\ &+(\frac{n_{,x^1}}{n}-\frac{a_{,x^1}}{a})(\delta^{12}_{\mu\nu}-\delta^{21}_{\mu\nu})\\ &+(\frac{n_{,x^1}}{n}-\frac{a_{,x^1}}{a})(\delta^{32}_{\mu\nu}-\delta^{23}_{\mu\nu})\end{aligned} \quad (4.4.7c)$$

$$\begin{aligned}\dot{T}^{3}{}_{\mu\nu} &= \frac{d_{,x^0}}{d}(\delta^{03}_{\mu\nu}-\delta^{30}_{\mu\nu})+\frac{d_{,x^1}}{d}(\delta^{13}_{\mu\nu}-\delta^{31}_{\mu\nu})\\ &+\frac{d_{,x^2}}{d}(\delta^{23}_{\mu\nu}-\delta^{32}_{\mu\nu})\end{aligned} \quad (4.4.7d)$$

biçimindedir. Burulma tensörünün sırasıyla Vektörel bileşenleri

$$v_0 = -\frac{b_{,x^0}}{b}-\frac{n_{,x^0}}{n}+\frac{a_{,x^0}}{a}+\frac{d_{,x^0}}{d} \quad (4.4.8a)$$

$$v_1 = -\frac{n_{,x^1}}{n}-\frac{d_{,x^1}}{d} \quad (4.4.8b)$$

$$v_2 = \frac{e_{,x^0}}{a^2}-\frac{en_{,x^0}}{an}-\frac{a_{,x^2}}{a}-\frac{b_{,x^2}}{b}-\frac{d_{,x^2}}{d} \quad (4.4.8c)$$

$$v_3 = -\frac{n_{,x^3}}{n}-\frac{b_{,x^3}}{b} \quad (4.4.8d)$$

ve eksensel bileşenler;

$$a_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{eba_{,x^3}}{adn} + \frac{be_{,x^3}}{dn}\right) \tag{4.4.9a}$$

$$a_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{eda_{,x^1}}{abn} + \frac{de_{,x^1}}{bn}\right) \tag{4.4.9b}$$

şeklinde elde edilir. Burulma bileşenleri (3.2.5) denkleminde yerine yazılarak sadeleştirmeler yapıldıktan sonra Teleparellel kuramda Dirac Denklemi;

$$\Bigg\{\left(\frac{1}{a}\gamma_{(0)} - \frac{e}{na}\gamma_{(2)}\right)\partial_{x^0} + \frac{1}{b}\gamma_{(1)}\partial_{x^1} + \frac{a}{n}\gamma_{(2)}\partial_2 + \frac{1}{d}\gamma_{(3)}\partial_{x^3}$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{b_{,x^0}}{ab} - \frac{n_{,x^0}}{an} + \frac{a_{,x^0}}{a^2} + \frac{d_{,x^0}}{ad}\right)\gamma_{(0)} - \frac{1}{2}\left(-\frac{n_{,x^1}}{bn} - \frac{d_{,x^1}}{bd}\right)\gamma_{(1)}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{ea_{,x^0}}{a^2 n} - \frac{eb_{,x^0}}{abn} - \frac{ed_{,x^0}}{adn} - \frac{e_{,x^0}}{an} - \frac{a_{,x^2}}{n} - \frac{b_{,x^2}}{bn} - \frac{d_{,x^2}}{dn}\right)\gamma_{(2)}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{n_{,x^3}}{dn} - \frac{b_{,x^3}}{db}\right)\gamma_{(3)} - \frac{1}{2}\left(\frac{ea_{,x^3}}{adn} + \frac{e_{,x^3}}{dn}\right)\gamma_{(0)}\gamma_{(2)}\gamma_{(3)}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{ea_{,x^1}}{abn} + \frac{e_{,x^1}}{bn}\right)\gamma_{(0)}\gamma_{(1)}\gamma_{(2)} - m\Bigg\}\psi = 0 \tag{4.4.10}$$

4.5 TARTIŞMA

Durağan olmayan veya dönen yada her ikisini birden içeren genel bir çizgi elemanı ele alınarak Genel Görelilik Kuramına alternatif olarak öne sürülen Teleparellel Kuramda Dirac Denklemi elde edildi. Elde edilen sonuçların daha önce Genel Görelilik kuramı ile bulunan sonuçlarla eşdeğerliliği bulundu. Son zamanlarda oldukça üzerinde çalışılan bu kuramda, burulma teriminin bileşenleri cinsinden de Dirac denklemi elde edilerek işlemsel olarak daha kolay sonuçlara ulaşıldı. Ayrıca genel çizgi elemanına ait katsayıların burulma terimlerine katkıları ve spin bağlantıları ile burulma bileşenlerinin etkileri görüldü. Bu noktadan hareketle daha genel metrikler için de burulmanın bileşenleri cinsinden denklemlere oldukça kısa bir yoldan ulaşılabilir. Böylece denklemler özel çizgi elemanları için doğrudan yazılıp, çözümleri elde edilebilir.

Bu çalışmada ele alınan genel metriklerin içerdiği bazı özel metrik ve yarı genel metrikler için denklemler elde edildi.

4.5.1 Köşegenel Metrikle Betimlenen Evren Modelleri

1. Robertson-Walker[41]

Metrik: $a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2)-dt^2$

Denklem: $\left(\gamma_0\partial_t+\gamma_1\partial_x+\gamma_2\partial_y+\gamma_3\partial_3-\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\gamma_0\right)\psi=0$

2. Minkowski[50]

Metrik: $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$

Denklem: $(\gamma_0\partial_t+\gamma_1\partial_x+\gamma_2\partial_y+\gamma_3\partial_3)\psi=0$

3. Bianchi-V tipi[51]

Metrik: $dx^2+e^{2x}(dy^2+dz^2)-dt^2$

Denklem: $(\gamma_0\partial_t+\gamma_1\partial_x+e^{-x}\gamma_2\partial_y+e^{-x}\gamma_3\partial_z-\gamma_1)\psi=0$

4. Bianchi-VI(A) tipi[51]

Metrik: $dx^2+e^{2(A-1)x}dy^2+e^{(A+1)x}dz^2-dt^2 \quad (0\le A\le 1)$

Denklem: $(\gamma_0\partial_t+\gamma_1\partial_x+e^{-(A-1)x}\gamma_2\partial_y+e^{-(A-1)x}\gamma_3\partial_z+(A-1)\gamma_1)\psi=0$

5. Bianchi-VII(A) tipi[51]

Metrik: $dx^2 + e^{2Ax}(dy^2 + dz^2) - dt^2 \ (0 \le A \le 1)$

Denklem: $\left(\gamma_0 \partial_t + \gamma_1 \partial_x + e^{-Ax}\gamma_2 \partial_y + e^{-Ax}\gamma_3 \partial_z + A\gamma_1\right)\psi = 0$

6. Kantowski-Sachs[51]

Metrik: $dx^2 + s^2 dy^2 + dz^2 - dt^2 \ (s = Sinx)$

Denklem: $\left(\gamma_0 \partial_t + \gamma_1 \partial_x + \frac{1}{s}\gamma_2 \partial_y + \gamma_3 \partial_z + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\gamma_1\right)\psi = 0$

7. Silindirik koord.Minkowski[52]

Metrik: $dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 - dt^2$

Denklem: $(\gamma_0 \partial_t + \gamma_1 \partial_r + \frac{1}{r}\gamma_2 \partial_\phi + \gamma_3 \partial_z + \frac{1}{2r}\gamma_1)\psi = 0$

8. Düz Tabak biçimli[52]

Metrik: $-(a+bx)^2 dt^2 + dx^2 + c(dy^2 + dz^2) \quad (a, b, c : birer\ sabit)$

Denklem: $(\frac{\gamma_0}{a+bx}\partial_x + \gamma_1 \partial_x + \frac{1}{c}\gamma_2 \partial_y + \frac{1}{c}\gamma_3 \partial_z + \frac{i}{2}(\frac{b}{a+bx})\gamma_1)\psi = 0$

9. Düz Rindler[53]

Metrik: $-x^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Denklem: $(\frac{\gamma_0}{x}\partial_t + \gamma_1 \partial_x + \gamma_2 \partial_y + \gamma_3 \partial_z + \frac{1}{2x}\gamma_1)\psi = 0$

10. Levi-Civita[53]

Metrik: $-r^{4\sigma} dt^2 + r^{4\sigma(2\sigma-1)}(dr^2 + a^{-2} dm^2) + b^{-2} r^{2(1-2\sigma)} dn^2 \quad (\sigma, a, b : birer\ sabit)$

Denklem: $(\frac{\gamma_0}{r^{2\sigma}}\partial_t + \frac{\gamma_1}{r^{2\sigma(2\sigma-1)}}\partial_r + \frac{a\gamma_2}{r^{2\sigma(2\sigma-1)}}\partial_m + \frac{b\gamma_3}{r^{(1-2\sigma)}}\partial_n)\psi = 0$

11. Genel olarak statik, silindirik simetrik[54]

Metrik: $(r^2-a)(dz^2-dt^2)+dr^2+(b-r^2)d\phi^2 \quad (a,b: birer\, sabit)$

Denklem:

$$(\frac{1}{\sqrt{r^2-a}}\gamma_0\partial_t+\gamma_1\partial_x+\frac{1}{\sqrt{b-r^2}}\gamma_2\partial_y+\frac{1}{\sqrt{b-r^2}}\gamma_3\partial_z+\frac{1}{2}(\frac{r}{r^2-a}-\frac{2}{b-r^2})\gamma_1)\psi=0$$

12.Weyl uzay-zamanı[55]

Metrik: $-e^{2U(r)}dt^2+e^{2[K(r)-U(r)]}(dr^2+dz^2)+r^2e^{-2U(r)}d\phi^2$

Denklem:

$$(\frac{1}{e^{U(r)}}\gamma_0\partial_t+\frac{1}{e^{K(r)-U(r)}}\gamma_1\partial_r+\frac{1}{re^{-U(r)}}\gamma_2\partial_\phi+\frac{1}{e^{K(r)-U(r)}}\gamma_3\partial_z$$
$$+\frac{1}{2e^{K(r)-U(r)}}(\frac{1}{r}+K^{,r}(r)-U^{,r}(r))\gamma_1)\psi=0$$

13.Plane-Symmetric[56]

Metrik: $-e^{2\gamma}dt^2+e^{2\alpha}dx^2+e^{2\beta}(dy^2+dz^2) \; (\alpha,\beta,\gamma: x\; ve\, t'nin\; fonksiyonları)$

Denklem:

$$(\frac{1}{e^{\gamma}}\gamma_0\partial_t+\frac{1}{e^{\alpha}}\gamma_1\partial_x+\frac{1}{e^{\beta}}\gamma_2\partial_y+\frac{1}{e^{\beta}}\gamma_3\partial_z-\frac{1}{2}(\frac{\dot{\alpha}}{e^{\gamma+\alpha}}+2\frac{\dot{\beta}}{e^{\beta+\alpha}})\gamma_0$$
$$-\frac{1}{2}(\frac{\alpha^{,x}}{e^{\gamma+\alpha}}+2\frac{\beta^{,x}}{e^{\beta+\alpha}})\gamma_1)\psi=0$$

14.Yarı genel metrikler;

Metrik: $-dt^2+dx^2+e^{-2gx}(dy^2+dz^2) \quad (g: sabit\, bir\, sayı)$ [43]

Denklem: $(\gamma_0\partial_t+\gamma_1\partial_x+e^{\rho x}\gamma_2\partial_y+e^{\rho x}\gamma_3\partial_z-g\gamma_1)\psi=0$

Metrik: $-dt^2+a^2(t)dx^2+a^2(t)b^2(x)dy^2+a^2(t)b^2(x)c^2(y)dz^2$ [42]

Denklem: $(\gamma_0\partial_t+\frac{1}{a}\gamma_1\partial_x+\frac{1}{ab}\gamma_2\partial_y+\frac{1}{abc}\gamma_3\partial_z-\frac{1}{2}\frac{3\dot{a}}{a}\gamma_0-\frac{b^{,x}}{2ab}\gamma_1-\frac{c^{,y}}{2abc}\gamma_2)\psi=0$

4.5.2 Köşegenel Olmayan Metrikle Betimlenen Bazı Evren Modelleri

1.Kararlı Gödel[57]

Metrik: $-(dt+e^{\alpha r}d\theta)^2+dr^2+\frac{1}{2}(e^{\alpha r}d\theta)^2+dz^2 \quad (\alpha : Sabit\, bir\, sayı)$

Denklem: $(\gamma_0\partial_t-\sqrt{2}\gamma_2\partial_t+\gamma_1\partial_1+\sqrt{2}e^{\alpha r}\gamma_2\partial_\theta+\gamma_3\partial_z+\frac{\alpha}{2}\gamma_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\gamma_0\gamma_1\gamma_2)\psi=0$

2. Kararsız Gödel-tipi[58]

Metrik: $c^2t^2(dx^2+\lambda e^{2mx}dy^2+dz^2)-2cte^{mx}dtdy-dt^2 \quad (m,c : birer\, sabit\, sayı)$

Denklem:

$$(\gamma_0\partial_t+\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\gamma_2\partial_t+\frac{1}{ct}\gamma_1\partial_x+\frac{e^{mx}}{ct\sqrt{\lambda+1}}\gamma_2\partial_y+\frac{1}{ct}\gamma_3\partial_z+\frac{1}{2t}\gamma_0$$
$$\frac{m}{ct(\lambda+1)}\gamma_1+\frac{1}{t\sqrt{\lambda+1}}\gamma_2+\frac{m}{2ct\sqrt{\lambda+1}}\gamma_0\gamma_1\gamma_2)\psi=0$$

3.Som-Raychaudhuri[59]

Metrik: $dr^2+r^2(1-r^2)d\phi^2+dz^2-2r^2dtd\phi-dt^2$

Denklem: $(\gamma_0\partial_t+i\partial_t+\gamma_1\partial_r-\frac{i}{r^2}\gamma_2\partial_\phi+\gamma_3\partial_z+\frac{\gamma_1}{r}-\frac{i}{r}\gamma_0\gamma_1\gamma_2)\psi=0$

4. Hoenselaers-Vishveshwara[59]

Metrik: $dr^2-\frac{1}{2}(c_1-1)(c_1-3)d\phi^2+dz^2+4c_1tdtd\phi-dt^2$

Denklem:

$$\Big\{(\gamma_0-\frac{2c_1t}{\sqrt{7/2c_1{}^2-4c_1+3}}\gamma_2)\partial_t+\gamma_1\partial_r+\frac{1}{\sqrt{7/2c_1{}^2-4c_1+3}}\gamma_2\partial_\phi+\gamma_3\partial_z$$
$$-\frac{1}{2}(\frac{7/2c_1^{;r}c_1-2c_1^{;r}}{7/2c_1{}^2-4c_1+3})\gamma_1-\frac{1}{2}(\frac{2c_1^{;r}}{7/2c_1{}^2-4c_1+3})\gamma_0\gamma_1\gamma_2-m\Big\}\psi=0$$

5.Rebouças[59]

Metrik: $-dt^2+dr^2-(1+3c_2{}^2)d\phi^2+dz^2+4c_2dtd\phi$

Denklem:

$$\left\{(\gamma_0 - \frac{2c_2}{\sqrt{c_2^2 - 1}}\gamma_2)\partial_t + \gamma_1\partial_r + \frac{1}{\sqrt{c_2^2-1}}\gamma_2\partial_\phi + \gamma_3\partial_z \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\frac{c_2^{;r}c_2}{c_2^2-1})\gamma_1 - \frac{c_2^{;r}}{\sqrt{c_2^2-1}}\gamma_0\gamma_1\gamma_2 - m\right\}\psi = 0$$

6. Krechet-Gödel[60]

Metrik: $R^2(t)\{dx^2 - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{2}w_0x}dy^2 + dz^2\} - 2R(t)e^{\sqrt{2}w_0x}dtdz - dt^2$

Deklem:

$$(\gamma_0\partial_t - \sqrt{2}\gamma_2\partial_t + \frac{1}{R(t)}\gamma_1\partial_x + \frac{\sqrt{2}}{R(t)e^{\sqrt{2w_0x}}}\gamma_2\partial_y + \gamma_3\partial_z + \frac{\dot{R}(t)}{R}\gamma_0$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}w_o\gamma_1 - 2\sqrt{2}\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\gamma_2 - \frac{w_0}{R(t)}\gamma_0\gamma_1\gamma_2)\psi = 0$$

7.Weyl-Levis-Papapetrou[55]

Metrik: $-e^{2U(\rho)}(dt + ad\phi)^2 + e^{-2U(\rho)}[e^{2k}(d\rho^2 + d\zeta^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad a\, ve\, k; Birersabit$

Denklem:

$$\left\{(\frac{1}{e^{U(\rho)}}\gamma_0 - \frac{ae^{U(\rho)}}{\rho}\gamma_2)\partial_t + \frac{e^{U(\rho)}}{e^k}\gamma_1\partial_\rho + \frac{e^{U(\rho)}}{\rho}\gamma_2\partial_\phi + \frac{e^{U(\rho)}}{ae^k}\gamma_3\partial_\varsigma \right.$$
$$\left. \frac{1}{2}(\frac{e^{U(\rho)}}{\rho e^k} - \frac{U^{,\rho}(\rho)}{e^{U(\rho)}e^k})\gamma_1 - \frac{1}{2}(\frac{ae^{3U(\rho)}U^{,\rho}(\rho)}{\rho e^k} + \frac{a2U^{,\rho}(\rho)e^{U(\rho)}}{\rho e^k})\gamma_0\gamma_1\gamma_2\right\}\psi = 0$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin kaynak araştırması bölümünde Teleparallel kuramının alt yapısı ile ilgili yapılan çalışmaların bir özeti verilirken aynı zamanda bu kuram Genel Görelilik kuramıyla da karşılaştırıldı. Bu bölümün ikinci kesiminde dönen, durağan olmayan ve ögeleri iki değişkene bağlı genel bir çizgi elemanı için Spini 1/2 kütleli parçacıkları betimleyen Dirac denkleminin Genel Görelilik Kuramında açık olarak ifadesi yazıldı.

Tezin materyal ve metod bölümünde Teleparallel Kuramının temellerini oluşturan tanımlar, kavramlar ve bu kavramların matematiksel alt yapıları tartışıldı. Bu tanımlar ve matematiksel alt yapı kullanılarak Dirac denkleminin Teleparallel kuramındaki biçimi yazıldı. Bu kuramın en temel kavramı olan burulma tensörünün parçaları olan tensörel, vektörel ve eksenel parçalarının tanımlanması ve Dirac denkleminin bu parçalar cinsinden yazılması da bu bölümde yapıldı. Bu bölümün son kesiminde, burulmanın vektörel ve eksenel parçaları cinsinden yazılan Dirac denklemi için, bu tezin bir parçasına alt yapı oluşturan, iki örnek tartışıldı.

Tezin bulgu ve tartışma bölümü ise çalışmanın üç aşamasını içermektedir. Birinci aşamada temel parçacıkların kütlesel çekim ile etkileşimlerini betimleyen denklemlerden Dirac denkleminin dönen, durağan olmayan ve ögeleri iki değişkene bağlı genel bir çizgi elemanı için Teleparellel kuramında Dirac denklemi elde edildi ve bu denklem Genel Görelilik Kuramında daha önce aynı metrik için yazılan biçimiyle karşılaştırıldı. Sonuçta her iki kuramda elde edilen biçimlerin eşdeğer olduğu görüldü. İkinci aşamada; Teleparellel Kuramında burulmanın vektörel ve eksenel bileşenleri cinsinden yazılan Dirac denklemi, aynı çizgi elemanı için elde edilerek çalışmanın birinci aşamasında bulunan denklem biçimi ile aynı olduğu gösterildi. Üçüncü aşamada ise; dört değişkene bağlı daha genel bir çizgi elemanı ele alındı ve bunun için burulma tensörünün eksenel ve vektörel bileşenleri bulundu. İşlemler sonucunda elde edilen veriler kullanılarak burulma tensörünün bileşenleri cinsinden yazılan Teleparellel Dirac denklemi elde edildi. Teleparallel kuramında burulmanın vektörel ve eksenel bileşenleri hesaplanıp Dirac denkleminin elde edilmesinin standart yoldan elde edilmesinden daha kolay olduğu görüldü.

Teleparellel Kuramı ile Genel Görelilik Kuramı arasında temel farklılıkların olmasına karşın özdeş sonuçlar vermesi oldukça önemlidir. Çünkü Genel Görelilik Kuramı birçok deneysel sonuçla uyumludur fakat kütlesel çekimin geometri ile ilişkilendirilmesi ve kuvvet olarak betimlenememesi Büyük Birleşik Alan Kuramının oluşmasında bir sorun olarak görülmektedir.. Bu çalışmada varılan sonuçlar ışığında Teleparellel kuramının Spin-1/2 parçacıkların kütlesel çekim ile etkileşiminin betiminde Genel Göreliliğe göre üstünlük sağladığı söylenebilir. Bu çalışma, ayrıca, Dirac denkleminin dışında, temel parçacıkları betimleyen diğer denklemlerin de her iki kuramda eşdeğer olabilecekleri konusunda umut ışığı vermektedir.

Telepallel kuramının Genel Görelilik Kuramında günümüzde de çözülmemiş enerji yerelleşmesi ve kuantum mekaniğiyle olan uyumuyla ilgili bazı sorunlara destek olabileceği umudunu da vermektedir. Bununla birlikte en genel metrik için denklemler elde edilip, herhangi bir programlama dilinde yazılarak daha karmaşık evren modellerindeki parçacıkların dalga fonksiyonlarına ulaşılabilir. Her iki kuramda, kütlesel çekim olgusunun her ne kadar farklı kavramlarla açıklansa da, yazılan denklemlerin genel metrikler için eşdeğer olduklarının gösterilmesi, bundan sonra bu alanda yapılacak çalışmalarda bu iki kuramın her konuda eşdeğerliliği üzerinde durulması büyük önem taşımaktadır.. Bu bakış açısı Teleparallel kuramına üstünlük sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

[1] O' Raifeartaigh, L. , " The Dawning of Gauge Theory" Princeton University Press Princeton,247s (1998).

[2] Sauer, T.,"Field Equation in Teleparallel Space Time Einstein's 'Fernparallelismus' approach Towards Unified Field Theory Einstein's Papers Project " gr-qc/0405142.

[3] O' Raifeartaigh, L., and Straumann, N., "Gauge Theory: Historical Origins and Some Modern Developments" Rev. Mod. Phys. , **72(1)**, (2000).

[4] Moller, C., "Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity'',Mat. Fys. Skr. Danske. Vid. Selsk., **1(10):** 1–50 (1961).

[5] Moller, C., "On the Crisis in the Theory of Gravitation and a Possible Solution'' Math.Fys. Skr. Dan. Vid. Selskab., **39(13),** (1978).

[6] Pellegrini, C. and Plebanski, J., "Tetrad Fields And Gravitational Fields", K. Dan. Vidensk. Selsk.Mat. Fys. Skr., **2(2),** (1962).

[7] Hayashi, K. and Nakano, T., "Extended Translation Invariance and Associated Gauge Fields", Prog. Theor. Phys., **38:** 491, (1967).

[8] Hayashi, K., ''Gravitational Interactions Of The Proton And The Electron - The Possible Existence Of A Massless Scalar Particle'' Nuovo Cimento A **16,** 639-673 (1973).

[9] Hayashi, K., ''The Gauge Theory of The Translation Group and Underlying Geometry '' Phys. Lett. B, **69(4):** 441**-**444, (1977).

[10] Hayashi, K. and Shirafuji, T., "New General Relativity" Phys. Rev. D**, 19,** 3524-3553 (1979).

[11] De Sabbata, V. and Gasperini, M., "Introduction to Gravitation", Word Scientific, Singapore,348s, (1985).

[12] de Andrade, V.C and Pereira, J.G., "Gravitational Lorentz Force And The Description Of The Gravitational Interaction" Phys. Rev. D**, 56:** 4689, (1997).

[13] de Andrade, V. C., Guillen, L.C.T. and J.G.Pereira, "Teleparellel Gravity: An Overview" gr-qc / 0011087 (2002).

[14] H. I. Arcos and J.G.Pereira, "Torsion and the Gravitational Interaction" Class. Qunt. Grav. **21:** 5193 (2004).

[15] F.W. Hehl, J. D. Mccrea, E.W. Mielke and Y. Ne'eman, ''Metric-Affine Gauge Theory of Gravity: Field Equations, Noether Identities, World Spinors, and Breaking of Dilation Invariance'', Phys. Rep., **258**: 1-171 (1995).

[16] S. Kobayashi and K. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry" , Interscience New York,150s, (1996).

[17] Aldrovandi, R. and Pereira, J. G., "An Introduction to Geometrical Physics", World Scientific, Singapore,683s, (1995).

[18] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, P.B. Barros," Gravitation and Anholonomy" Gen. Rel. Grav., **35:**991, (2003).

[19] Maluf, J. W., "Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity,", J. Math. Phys., **35:**335 (1994).

[20] de Andrade, V. C., Guillen, L.C.T. and Pereira, J.G., "Gravitational Energy-Momentum Density in Teleparallel Gravity" Phys. Rev. Lett., **84**:4533,(2000).

[21] Maluf, J. W., "Title: Localization of Energy in General Relativity" J. Math. Phys., **36:** 4242, (1995).

[22] Shirafuji, T., Nashed, G. L. and Kobayashi, Y., "Energy and Momentum in the Tetrad Theory of Gravitation", Prog. Theor. Phys. **96:** 933(1996).

[23] Mosna, R. A. and Pereira, J.G., "Some Remarks on the Coupling Prescription of Teleparallel Gravity" Gen. Rel. Grav., **36:** 2525 (2004).

[24] Will, C. M., "The Confrontation Between General Relativity And Experiment", Living Rev. Rel., **4:** 4 (2001).

[25] Haugan, M. P. and Lömerzahl, C., "On the interpretation of Michelson-Morley experiments", Phys.Lett. A, **282:** 223-229 (2001).

[26] Aldrovandi, R., .Pereira, J.G and Vu, K. H., "Gravitation Without the Equivalence Principle", Gen. Rel. Grav. **36:**101 (2004).

[27] de Andrade, V. C., Arcos, H. I. and Pereira, J.G., "Torsion and Gravitation: A New View", Int. J. Mod. Phys. D**, 13**, 807 (2004).

[28] Wang, S. K., Nuova Cimento **A65,** 689 (1970).

[29] Dreshsler, W., "Translational gauge theory of grav- ity:Post-Newtonian approximation and spin precession", Phys. Lett. B**, 90:**258 (1980).

[30] Papapetrou, A., "Spinning Test-Particles in General Relativity. I", Proc. R. Soc. **A209**, 248 (1951).

[31] de Andrade, V. C., Guillen, L.C.T and Pereira, J.G., “Gravitational Energy-Momentum Density in Teleparallel Gravity”, Phys. Rev. Lett., **84:** 4533 (2000).

[32] Itzykson, C., and Zuber, J. B., “Quantum Field Theory” Mcgravw – Hill, New York ,572s, (1980).

[33] Chang, C. C. and Nester, J. M., “Pseudotensors and Quasilocal Energy-Momentum”, Phys. Rev. Lett., **83:**1897 (1999).

[34] de Andrade, V. C., Pereira, J.G., “Riemannian and Teleparellel Descriptions of the scalar field Gravitational Interaction”, gr-qc/ 9706070, (1997).

[35] de Andrade, V. C., Barbosa, A. L. and Pereira, J.G., “Gravitation and Duality Symmetry”, Int. J. Mod. Phys. D, **14,** (2005).

[36] de Andrade, V. C., Guillen, L.C.T. and Pereira, J.G., “Teleparallel spin connection”, Phys. Rev. D**, 64,** (2001).

[37] Wu, Y. L., Chou, K. C. “CP violation, fermion masses and mixings in a predictive SUSY SO(10)×Δ(48)×U(1) model with small tanβ”, Phys. Rev. D **53:**3492 - 3495 (1996).

[38] Maluf, J. W., “Dirac Spinor Fields in Teleparellel Gravity Commenton :metric-Affin Approch to Teleparellel Gravity”,gr-qc:/0304005 v1, (2003).

[39] Arcos, H. I. and Pereira, J.G., “Torsion of Gravity : A Reappraisal”, gr-qc/ 0501071 v1**,** (2005).

[40] Saltı, M., “Köşegel Olmayan Genel Metriklerde Skaler Ve Spinör Alanların Diferensiyel Denklemleri”, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,Yüksek Lisans Tezi, (2004).

[41] Barut, A. O., Duru, I. H., “Exact Solutions of the Dirac Equation in Spatially Flat Robertson-Walker Space-Time”, Phys. Rev. D**, 36**: 3705- 3711 (1987).

[42] Mendy, J.E.B, “Scalar and Spin-1/2 Particle Creation in Gravititational Constant Electric Field Backgrounds”, J. Math. Phys., **44(2)**, (2003).

[43] Alimohammadi, M. and Vakili, B., “Spin-0 and Spin-1/2 Particles in a Constant Scalar Curvature Background”,Annals of Physics, **310:**95,(2004).

[44] Aldrovandi, R and Pereira, J.G., “An Introduction to Teleparallel Gravity” ders notları, Instituto de Fisica, UNESP, Sao Paulo, Brazil,(2005).

[45] Hehl, F.W., “On The Kinematics Of The Torsion Of Space-Time”, Phys. Lett.B**, 90:**98 (1980).

[46] Gibbons, G.W., Herdeiro, C.A.R., “The Melvin Universe in Born-Infeld Theory and Other Theories of Non-Linear Electrodynamics”, Class. Quant. Grav. **18:**1677-1690, (2001).

[47] Audretsch, J., “Dirac Electron In Space-Times With Torsion: Spinor Propagation, Spin Precession, And Nongeodesic Orbits”, Phys. Rev.D**, 24**:1470 (1981).

[48] Pereira, J.G., Vargas, T. and Zhang, C. M., “Axial-Vector Torsion And The Teleparallel Kerr Spacetime”, Class. Quantum Grav., **18:**833 (2001).

[49] Bağcı, M., Havare, A. and Söğüt, K., “On The Equivalance Of Dirac Equation Between General Relativity And Teleparallel Gravity” Balkan Physics Union 6, İstanbul, 139s (2006).

[50] Havare, A. Yetkin, T., “The Massless DKP Equation and Maxwell Equations in Bianchi Type III spacetimes”, Chin. J. Phys., **41(10)**, (2003).

[51] Fagundes, H.V., “Closed Spaces in Cosmology”, Gen. Rel. and Grav.,.**24(2),** (1992).

[52] Avakyan, R.M., Chubaryan, E.V., Yeranyan, A.H., “Homogeneous Gravitational Field in General Relativty”, arXiv: gr-qc/0102030 (2001).

[53] Herrera, L., Santos, N.O., “On the Interpretation of Cylindrically Symmetric Levi-Civita Spacetime for $0 \leq \sigma \leq \infty$”, Class.Quant.Grav., **18:**3847-3856 (2001).

[54] Carneiro, S., “A Gödel-Friedman Cosmology?”, Phys. Rev. D**, 61:**383-506 (2000).

[55] Klein, C., “Exact Relativistic Treatment of Stationary Counter-Rotating Dust, Disks II Axis, Disk and Limiting Cases”, Theor. Math. Phys., **127:**767-778 (2001); Teor.Mat.Fiz., **127:**418-431 (2001).

[56] Karade, T.M., Adhao, K.S., Katore, S.D., “Plane-symmetric Spacetimes in Bimetric Relativity Theory”, Czechoslovak Journal of Physics, **51:**5 (2001).

[57] Havare, A., Yetkin, T., “Exact Solution of Photon Equation in Stationary Gödel type and Gödel Space-Times”, Class. Quant. Grav., **19**: 2783-2791 (2002).

[58] Havare, A., Yetkin, T., Aydoğdu, O., "Exact Solution of the Massless DKP Equation in a Nonstationary Gödel-Type Cosmological Universe", Int. J.Mod.Phys. D., **13(15):**935-944 (2004).

[59] Krori, K. D., Borgohain, P., Kar, P. K., Das, D., "Exact Scalar and Spinor Solutions in Some Rotating Universes", J. Math. Phys., **29 (7)**, (1988).

[60] Gron, O., Soleng, H. H., "Note on Rotating Universe Models", Acta Physica Polonica,**7(B20)** (1989)

[61] de Andrade, L.C. Garcia, "Spin Polarised Magnetized Cylinders in Torsioned Spacetime", Gen. Rel. Grav., **35:**1279-1283 (2003)

ÖZGEÇMİŞ

19 Nisan 1979'da Aydın ilinin Nazilli ilçesinde doğdum. İlköğrenimi, İsabeyli İlkokulunda tamamladım. 1990 yılında Nazilli Anadolu Lisesini kazandım. 1994 yılında bu okulun orta okul bölümünden mezun oldum. 1997 yılında ise Nazilli Lisesinden mezun oldum. Lisans eğitimini Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fizik Öğretmenliği Bölümünde 2003 yılında Tezsiz Yüksek Lisans derecesi ile tamamladım. 2004 yılında Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine aynı zamanda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladım.