BERNSTEIN POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MEHPARE MELİS ÇİÇEK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN– 2007

BERNSTEIN POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MEHPARE MELİS ÇİÇEK

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

MERSİN
HAZİRAN-2007

ÖZ

Bu çalışmada genel olarak Bernstein polinomlarının bazı temel özellikleri ve Bernstein polinomlarıyla fonksiyonlara yaklaşım problemi incelenmiştir.

Ayrıca, Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlara Bernstein polinomları ile yakalaşım hızı ve azalmayan fonksiyonlara Bernstein polinomuyla yaklaşım hızının noktaya bağımlılığı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Weierstrass Teoremi, Bernstein Polinomu, Yaklaşım hızı, Sürekli fonksiyon.

ABSTRACT

In this thesis, generally the main properties of Bernstein polynomials and the approximation problem to the functions with Bernstein polynomials has been investigated.

Also, the approximation rate was obtained when the function satisfying Lipschitz conditions and dependency to the point of the rate of approximation has been investigated when the functions are non-decreasing.

Key Words: Weierstrass Theorem, Bernstein Polynomials, Approximation rate, Continuous function.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgisini, emeğini ve desteğini esirgemeyen danışmanım Yrd. Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca bilgilerinden yararlandığım Mersin Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ, Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Jüri üyesi Yrd. Doç. Dr. A. Ali ÖZKURT ve özellikle Bulgular ve Tartışma bölümünün 4.4 kısmına katkılarından dolayı Prof. Dr. Nazım KERİMOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$:=$	Tanım olarak eşittir
$\lVert f \rVert$	$\max\limits_{a\le x\le b} \lvert f(x)\rvert$
P_n	Derecesi n'i aşmayan polinomlar kümesi
$C[a,b]$	$\{ f : f:[a,b]\to\mathbb{R}$ süreklidir$\}$
$C^{(p)}[a,b]$	$\{ f : f^{(p)}\in C[a,b],\ p=0,1,...\}$
$BV[a,b]$	$[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonların kümesi
$Lip\,\alpha$	α mertebeden Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi
$L^p[a,b]$	$\left\{ f : f:[a,b]\to\mathbb{R}, \int_a^b \lvert f(x)\rvert^p dx<\infty \right\}$
$B_n(f;x)$	f fonksiyonunun n-inci Bernstein polinomu
$\Delta_h^k f(x)$	f fonksiyonunun h adımlı k-ıncı sonlu farkı
$\omega(f,\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\sum_{j=0}^{n} a_j$	$a_0+a_1+a_2+...+a_n$
$\prod_{i=0}^{n} a_i$	$a_0 \bullet a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_n$
$\sup x_n$	x_n üst sınırların en küçüğü (supremum)
$\inf x_n$	x_n alt sınırların en büyüğü (infimum)
$\binom{n}{k}$	$\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

1.GİRİŞ

Kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında en iyi yaklaşan polinomun bulunması ve yaklaşım hızının hesaplanması yaklaşım teorisinde üzerinde çalışılan önemli problemlerden biridir.

1885 yılında K. Weierstrass tarafından kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşılabileceği gösterildikten sonra bu teoremin bir çok değişik ispatı sonraki yıllarda yapılmıştır. Bu ispatlar içerisinde en ilginç olanı 1912 yılında S. Bernstein tarafından verilmiştir.

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı olmak üzere,

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

biçiminde tanımlanan polinoma n*-inci Bernstein polinomu* denir. S. Bernstein, bu polinomlarla $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır.

Daha sonraki yıllarda da Bernstein polinomları üzerine bir çok çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar genellikle f fonksiyonuna $B_n(f;x)$ polinomuyla yaklaşım hızının bulunması üzerinedir.

Bu tezde, Bernstein polinomlarına yaklaşım konusu üzerine daha önce yapılan bir çok araştırma sonuçları ele alınmıştır. Ayrıca temel tanımlar, teoremler ve Bernstein polinomunun bazı temel özellikleri verilmiştir.

"Materyal ve Metot" bölümünde konu için gerekli bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

"Bulgular ve Tartışma" bölümünde ise Bernstein polinomlarının yaklaşımı ile ilgili daha önce elde edilen önemli teoremler ve ispatları verilmiştir. Bu bölümde ayrıca elde edilen yeni sonuçlara da yer verilmiştir. Bu sonuçlara göre;

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $0<\alpha\le 1$ için $f\in Lip\alpha$ olsun. $B_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$ için

$$\left|f(x)-B_n(f;x)\right|\le K\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)^{\alpha/2}$$

sağlanır.

(ii) f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında monoton bir fonksiyon olmak üzere

$$\|f(x)\|_C \leq \frac{K}{\min\{x,1-x\}}\|f\|_L$$

sağlanır.

(iii) f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\|B_n(f;x)\|_C \leq \frac{K}{\min\{x,1-x\}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

sağlanır.

(iv) f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında azalmayan fonksiyon ise, M pozitif sabit olmak üzere

$$\|B_n(f;x)-f(x)\|_C \leq \frac{M}{\min\{x,1-x\}}\cdot\frac{1}{n}$$

dır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yaklaşım Teorisinin genel problemlerinden biri; $[a,b]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonuna derecesi n'i aşmayan cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında en iyi yaklaşan polinomunun bulunmasıdır.

Weierstrass 1885 yılında Yaklaşım Teorisinin en temel teoremini ispatlamıştır. Yani; $f \in C[a,b]$ olmak üzere verilen her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| < \varepsilon$$

şartını sağlayan en az bir $p_n(x)$ polinomu (n yeterince büyük) bulunabilir.

Weierstrass teoremi olarak bilinen bu teorem kapalı bir aralıkta sürekli olan fonksiyonlara polinomlarla düzgün yaklaşılabileceğini göstermektedir. Bu teoremin literatürde bir çok farklı ispatı olmasına rağmen en ilginç ispat 1912 yılında S. Bernstein tarafından [1]'de verilmiştir. Bu ispat için önce ***Bernstein polinomu*** olarak adlandırılan polinomlar tanımlanmıştır:

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı olmak üzere onun n-inci Bernstein polinomu

$$B_n(f;x) := B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır.

S. Bernstein $[1]$'de, $[0,1]$ aralığında sınırlı $f(x)$ fonksiyonunun her bir x_0 süreklilik noktasında

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x_0) = f(x_0) \tag{2.2}$$

bağıntısının sağlandığını, ayrıca $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ise (2.2)'nin bu aralıkta düzgün olarak sağlandığını göstermiştir.

Kendine özgü özelliklerinden dolayı (2.1) Bernstein polinomları günümüzde de Matematiğin değişik alanlarında kullanılmaktadır.

1932 yılında Voronowskaja tarafından [2]'de $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve tespit edilmiş x noktasında ikinci türeve sahip ise,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f(x)-B_n(f;x)\right]=\frac{-x(1-x)}{2}f''(x)$$

biçimindeki asimptotik formülü verilmiştir.

1935 yılında T.Popoviciu tarafından [3]'de $\omega(\delta)$ sembolü, f fonksiyonunun süreklilik modülü olmak üzere,

$$\left|f(x)-B_n(f,x)\right|\leq C\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

olduğu gösterilmiştir.

1937 yılında Chlodovsky tarafından [4]'de sınırlı olmayan aralıklarda da Bernstein polinomlarıyla (türevleriyle) verilmiş fonksiyona (türevlerine) yaklaşılabileceği gösterilmiştir.

1938 yılında Kac tarafından [7], [8] çalışmalarında Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyona Bernstein polinomuyla yaklaşım problemi incelenmiştir. Bu teoreme göre;

$f\in Lip\alpha$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ ve her $x\in[0,1]$ için

$$\left|f(x)-B_n(f;x)\right|\leq L\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dır.

1946 yılında Herzog ve Hill tarafından $[5]$'te $x_0\in(0,1)$, f fonksiyonunun süreksizlik noktası fakat sağdan ve soldan $f(x_0+)$ ve $f(x_0-)$ limitleri varsa

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0+)+f(x_0-)\right) \tag{2.3}$$

olduğu ispatlanmıştır.

Hildebrant, Schoenberg tarafından $[6]$'da ve Butzer tarafından [30]'de Bernstein polinomlarının k-boyutlu uzaya genişletilebileceğinden söz edilmiştir. Yani; $0\leq x_i\leq 1,\quad i=1,...,k$ olmak üzere, k-boyutlu küpte tanımlı ve sınırlı $f(x_1,x_2,...,x_k)$ fonksiyonuna

$$B_{n_1,...,n_k}(f;x_1,...,x_k)=$$

$$=\sum_{\nu_1=0}^{n_1}...\sum_{\nu_k=0}^{n_k}\binom{n_1}{\nu_1}...\binom{n_k}{\nu_k}f\left(\frac{\nu_1}{n_1},...,\frac{\nu_k}{n_k}\right)x_1^{\nu_1}(1-x_1)^{n_1-\nu_1}...x_k^{\nu_k}(1-x_k)^{n_k-\nu_k}$$

polinomu ile fonksiyonun herhangi bir süreklilik noktasında $n_i \to \infty$ iken yaklaşılabileceği ispatlanmıştır.

1960 yılında Essen tarafından [31]'de,

$$\left|f(x)-B_n(f;x)\right| \leq C\omega\left(f;\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n}\right)$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük C sabiti asimptotik olarak hesaplanmıştır. Yani, $f \in C[0,1]$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f(x)-B_n(f,x)\right|}{\omega\left(f,\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n}\right)} = C_n$$

ifadesinin minimumu $C_1 = 1{,}045564...$ dır. Bu sayıyı Sikkema 1971 yılında tespit etmiştir.

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı, kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere $f \in BV[0,1]$ ise (2.3)'in yaklaşım hızı 1983 yılında Cheng tarafından [9]'de gösterilmiştir. Cheng tarafından [9]'de verilen bu sonuç daha da geliştirilerek 1989 yılında S.Guo. ve M.K. Khan tarafından [10]'de verilmiştir.

1991 yılında Taberska tarafından [12]'de ;$[0,1]$ aralığında sınırlı, kompleks değerli fonksiyonlar için [9], [10]'de verilen sonuçların daha genel durumlar [11],[12]'de gösterilmiştir.

1994 yılında Taberska tarafından [13]'de; bazı koşullar altında mutlak sürekli f fonksiyonuna $B_n(f;x)$ Bernstein polinomuyla yaklaşım hızı gösterilmiştir.

2000 yılında K.Neammaree tarafından [14]'de $f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyona $\mathbb{R}^N$'nin herhangi bir kompakt alt kümesi üzerinde Bernstein polinomlarıyla yaklaşılabileceğini göstermiştir. Bu teoreme göre $f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ bir Lipschitz fonksiyonu olsun. Yani, C pozitif sabit ve her $x, y \in \mathbb{R}^N$ için,

$$\left\|f(x)-f(y)\right\| \leq C\left\|x-y\right\|$$

dır. $\mathbb{R}^N$'deki her kompakt D kümesi ve $B_n : D \to \mathbb{R}^P$, $n \in \mathbb{N}$ polinomu için

$$\left\| f(x) - B_n(x) \right\| \leq K \sqrt{\frac{\ln(n+1)}{n}}, \ \forall x \in D,$$

sağlanır. Burada K, f 'ye bağlı bir sabittir.

Bernstein polinomlarıyla tip olarak benzer özelliklere sahip polinomlarla ilgili de pek çok çalışma yapılmıştır. Bu operatörler literatürde Bernstein tipi operatörler olarak adlandırılır. Bazı Bernstein tipi operatörler:

Szasz-Mirakiyan: $[0,\infty)$ için,

$$S_n(f,x) := \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} ,$$

Meyer-König ve Zeller: $[0,1]$ için,

$$T_n(f,x) := \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right) x^k (1-x)^{n+1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Becker ve Nessel[18]'da, Totik[19],[20]'de sırasıyla S_n ve T_n operatörleriyle ilgili sonuçlar vermişlerdir. (Bernstein tipi operatörlerin özelliklerinin incelenmesi bu tezin konusu değildir.)

3. MATERYAL VE METOT

3.1.ÖN BİLGİLER

3.1.1.Giriş

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak kavramlar ve bazı temel teoremler verilecektir.

3.1.1.1.Tanım

$A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

(i) $\delta > 0$ sayısı için $|x-a| < \delta$ ($0 < |x-a| < \delta$) koşulunu sağlayan noktaların kümesine a noktasının $\delta -$ ***komşuluğu*** (***delinmiş*** $\delta -$ ***komşuluğu***) denir.

(ii) a noktasının her delinmiş $\delta -$komşuluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa a noktasına A kümesinin bir ***yığılma noktası*** denir.

3.1.1.2.Tanım

(i) $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun.

Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta := \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ reel sayısı bulunabilirse f fonksiyonu x_0 noktasında ***süreklidir*** denir[21].

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x_1 - x_2| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x_1, x_2 \in A$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonu A kümesinde ***düzgün süreklidir*** denir[21].

(ii)'den düzgün sürekli her fonksiyonun sürekli olduğu kolayca görülür. Tersi, her zaman doğru değildir.

3.1.1.3.Teorem

Kapalı bir aralıkta sürekli her fonksiyon o aralıkta düzgün süreklidir[21].

3.1.1.4.Tanım

f fonksiyonu $A \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı ve $M > 0$ olsun. $\forall x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ oluyorsa f fonksiyonuna A kümesi üzerinde ***sınırlıdır*** denir[21].

3.1.1.5.Teorem

$f \in C[a,b]$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlıdır[21].

3.1.1.6.Tanım

f , $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonu x_0 noktasında ***türevlenebilir*** denir.

Bu değer $f'(x_0)$ şeklinde gösterilir[22]. Yani;

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

dir.

3.1.1.7.Teorem (Rolle Teoremi)

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli (a,b) aralığında türevlenebilir ve $f(a) = f(b)$ olsun. Bu durumda $f'(c) = 0$ olacak biçimde en az bir $c \in (a,b)$ vardır[22].

3.1.1.8.Teorem (Diferansiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi)

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun.

Bu durumda

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ sayısı vardır[22].

3.1.1.9.Teorem

f fonksiyonu x_0 noktasında $n+1$ defa türevlenelenebilir olsun. Bu durumda

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon(x)\right]$$

dır. Burada,

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$$

dır[23].

3.1.1.10.Tanım

Eğer $A\subset\mathbb{R}$ üstten (alttan) sınırlı bir küme ise üst sınırların en küçüğüne(alt sınırların en büyüğüne) A'nın ***supremumu (infimumu)*** denir ve $\sup A$ $(\inf A)$ ile gösterilir[21].

Eğer, $\sup A$ $(\inf A)$ kümeye ait ise $\sup A=\max A$ $(\inf A=\min A)$ olur.

3.1.1.11.Tanım

$X\subset\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $A\subset X$ olsun. $x_1<x_2$ şartını sağlayan her $x_1,x_2\in A$ için,

(i) $f(x_1)<f(x_2)$ ise f 'e A üzerinde ***artan***, $f(x_1)\leq f(x_2)$ ise ***azalmayan***,

(ii) $f(x_1)>f(x_2)$ ise f 'e A üzerinde ***azalan***, $f(x_1)\geq f(x_2)$ ise ***artmayan fonksiyon*** denir[21].

3.1.1.12.Tanım

Her hangi bir aralık üzerinde tanımlı fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona ***kesin monotondur***, artmayan veya azalmayansa ***monotondur*** denir.

Eğer, fonksiyonun tanımlı olduğu her sonlu aralık, onun monoton olduğu sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa bu fonksiyona ***parçalı monoton fonksiyon*** denir[21].

3.1.1.13.Tanım

Her $x_1, x_2 \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde ***konveks fonksiyon*** denir[21].

3.1.1.14.Teorem

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) üzerinde ikinci türevi mevcut ve her $x \in (a,b)$ için $f''(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konvekstir[23].

$\wp$ ile $[a,b]$ aralığının tüm $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ biçimindeki parçalanmaların kümesi gösterilsin.

3.1.1.15.Tanım

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

(i) $V_a^b(f) = \sup\limits_{P \in \wp} \sum\limits_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$

genişletilmiş reel sayısına f fonksiyonunun ***toplam salınımı*** denir.

(ii) Eğer, $V_a^b(f)$ sonlu ise f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığı üzerinde ***sınırlı salınımlıdır*** denir.

(iii) $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonların kümesi $BV[a,b]$ ile gösterilir[28].

Kolayca gösterilebilir ki, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artmayan (azalmayan) ise sınırlı salınımlıdır. Gerçekten; f artmayan bir fonksiyon ve $P \in \wp$, $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanması ise

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = \sum_{k=1}^{n} - f(x_k) + f(x_{k-1}) = f(x_0) - f(x_n) = f(a) - f(b)$$

sağlanır. Yani, $V_a^b(f) = f(a) - f(b)$ dır.

Şu halde monoton fonksiyonlar sınırlı salınımlıdır.

3.1.1.16.Tanım $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $[a,b]$ aralığının $\sum_{k=0}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ koşulunu sağlayan her bir ayrık $\{(a_k,b_k)\}_{k=0}^{n}$ parçalanması için $\sum_{k=0}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon$ sağlanacak şekilde $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa, f 'ye $[a,b]$ aralığında ***mutlak sürekli fonksiyon*** denir[28].

Bu tanıma göre mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir fakat karşıtı doğru değildir.

3.1.1.17.Lemma

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ise sınırlı salınımlıdır[28].

3.1.1.18.Tanım

$X\neq\varnothing$ bir küme ve T bir cisim olmak üzere

$$+:\underset{(x,x')\to x+x'}{X\times X\to X}\quad \text{ve}\quad \bullet:\underset{(k,x)\to kx}{T\times X\to X}$$

fonksiyonları verilsin. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa X kümesine T cismi üzerinde ***lineer uzay*** (veya vektör uzayı) denir. "+" işlemine ***toplama*** "•" işlemine ise ***skalerle çarpma*** işlemleri denir[24].

(i) $\forall x,y,z\in X$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$,

(ii) $\forall x,y\in X$ için $x+y=y+x$,

(iii) $\forall x\in X$ için $x+\Theta=x$ olacak şekilde bir tek $\Theta\in X$ var. (Θ'a toplamaya göre *etkisiz eleman* denir)

(iv) $\forall x\in X$ için $\exists x^*\in X$ öyle ki $x+x^*=\Theta$, (x^* ye toplamaya göre x'in ***tersi*** denir ve $x^*=-x$ ile gösterilir)

(v) $\forall x,y\in X$ ve $\forall\lambda\in T$ için $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$

(vi) $\forall x\in X$ ve $\forall\lambda,\beta\in T$ için $(\lambda+\beta)x=\lambda x+\beta x$

(vii) $\forall x\in X$ ve $\varepsilon\in T$ için $\varepsilon\cdot x=x$,(ε'a skalerle çarpma işlemine göre etkisiz eleman denir)

(viii) $\forall x\in X$ ve $\forall\lambda,\beta\in T$ için $(\lambda\beta)x=\lambda(\beta x)$

3.1.1.19.Tanım

X , T cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzay olmak üzere,

$$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

fonksiyonu,

(i) $\forall x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$,

(ii) $\forall x \in X$ ve $\lambda \in T$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(iii) $\forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlasın. $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir ***norm***, X 'e ise bu norm ile ***normlu lineer uzay*** denir ve $(X, \|.\|)$ şeklinde gösterilir[24].

3.1.1.20.Tanım

M **,** X normlu lineer uzayın bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda

$$\inf_{y \in M} \|x - y\|$$

sayısına x noktasına M kümesinde ***en iyi yaklaşım sayısı*** denir ve $E_n(x) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$ simgesi ile gösterilir[25].

3.1.1.21.Tanım

S **,** bir X normlu lineer uzayının alt kümesi olsun. S kümesinden alınan her dizinin S kümesindeki bir elemana yakınsayan bir alt dizisi varsa S kümesi ***dizisel kompaktır*** denir.

3.1.2. Polinomlar

3.1.2.1.Tanım

$i = 0,1,...,n$ için $a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ olmak üzere,

$$p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n, \; a_0 \neq 0$$

şeklinde tanımlı fonksiyona n***-dereceli polinom*** denir. Burada; $a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $i = 0,1,...,n$ ise p_n polinomuna ***reel katsayılı*** (*kompleks katsayılı)* ***polinom*** denir.

Bu çalışmada reel katsayılı polinomlar ele alınacak, ayrıca derecesi n'i aşmayan polinomlar kümesi P_n ile gösterilecektir.

3.1.2.2.Teorem

$n \geq 1$ için n dereceli bir polinomun n tane reel veya kompleks kökü vardır[23].

3.1.3. Süreklilik Modülü

3.1.3.1.Tanım

$[a,b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. $[0,b-a]$ aralığında tanımlı

$$\omega(\delta) := \omega(f,\delta) := \left\{\sup\left|f(x_2) - f(x_1)\right| : \left|x_2 - x_1\right| \leq \delta,\ x_1, x_2 \in [a,b]\right\}$$

fonksiyonuna f 'in ***süreklilik modülü*** denir[26].

3.1.3.2.Teorem

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonunun süreklilik modülü,

(i) $\omega(0) = 0$

(ii) $0 < \delta_1 < \delta_2$ ise $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$

(iii) $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

(iv) $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$**,** ayrıca $\omega(\delta) \in C[0,b-a]$

özelliklerini sağlar[23].

3.1.4. Lipschitz Koşulu

3.1.4.1.Tanım

f fonksiyonu $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı olsun. $\exists M > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ öyle ki her $x_1, x_2 \in I$ için,

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leq M\left|x_1 - x_2\right|^{\alpha}$$

sağlanıyorsa f fonksiyonu α. ***mertebeden Lipschitz koşulunu sağlıyor*** denir[23].

Bu tür fonksiyonların kümesi $Lip\alpha$ veya $Lip_M\alpha$ ile gösterilir.

3.1.4.2.Teorem

(i) $Lip\alpha$ bir lineer uzaydır.

(ii) Eğer I üzerinde $f \in Lip\alpha$ ise f, I üzerinde düzgün süreklidir.

(iii) $\alpha > 1$ ve $f \in Lip\alpha$ ise $f = sabit$

(iv) $\alpha < 0$ ve $f \in Lip\alpha$ ise f fonksiyonu sınırsızdır.

(v) $|f'(x)| \leq M$ ise $f \in Lip_M 1$ dır.

(vi) $\alpha < \beta$ ise $Lip\alpha \supset Lip\beta$

(vii) $f \in Lip_M\alpha$ ancak ve ancak $\omega(\delta) \leq M\delta^{\alpha}$ dır[23].

3.1.5. Sonlu Farklar

3.1.5.1.Tanım

$$\Delta_h^m(f, x_0) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x_0 + jh)$$

ifadesine f ***fonksiyonunun*** x_0 ***noktasındaki*** h ***adımlı*** $m-$***inci sonlu farkı*** denir[26].

Örneğin,

$\Delta_h^0(f; x_0) := f(x_0)$,

$\Delta_h^1(f; x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$,

$\Delta_h^2(f; x_0) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)$

3.1.5.2.Lemma

f fonksiyonu $(x_0, x_0 + kh)$ aralığında k -inci mertebeden türeve sahip ise

$$\Delta_h^k(f; x_0) = h^k f^{(k)}(\xi), \; x_0 < \xi < x_0 + kh$$

dır.

3.1.6. Bölünmüş Farklar

3.1.6.1.Tanım

f fonksiyonu birbirinden farklı $x = x_0, x_1, ..., x_m$ noktalarında tanımlı olsun. Bu durumda,

$$[x_0; f] = f(x_0)$$

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{[x_0, x_1; f] - [x_1, x_2; f]}{x_0 - x_2}$$

....

$$[x_0, x_1, ..., x_m; f] = \frac{[x_0, ..., x_{m-1}; f] - [x_1, ..., x_m; f]}{x_0 - x_m} \qquad (3.1.6.1)$$

bağıntılarına f fonksiyonunun ***bölünmüş farkları*** denir[29].

Örneğin; $f(x) = b^x$ ise

$$[a, a+1, ..., a+k; f] = b^a (b-1)^k \frac{1}{k!} \qquad (3.1.6.2)$$

dır.

(3.1.6.1)'den tümevarım ile,

$$[x_0, x_1, ..., x_m; f] = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{f(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)...(x_\nu - x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu+1})...(x_\nu - x_m)} \qquad (3.1.6.3)$$

sonucu elde edilir.

Örneğin;

$$[a, a+h, ..., a+mh; f] = h^{-m} \Delta^m f(a) / m!$$

dır. Burada Δ^m, h artışına göre mertebesi m olan farktır.

3.2.WEIERSTRASS YAKLAŞIM TEOREMİ

Bulgular ve Tartışması bölümünde Weierstrass teoreminin $B_n(f;x)$ Bernstein polinomları yardımıyla ispatı verilecektir.

Şimdi ise kıyaslama yapabilmek için, Weierstrass teoreminin Lebesgue [34] tarafından verilen farklı bir ispatını verelim. Bu ispatta $f(x) = |x|$ özel fonksiyonuna yaklaşım temel alınmaktadır.

3.2.1.Teorem (Weierstrass, 1885)

Her $f \in C[a,b]$ ve $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için, $\|f - P\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır[27].

İspat Farzedelim ki $-1 \le x \le 1$ ve $u = 1 - x^2$ olsun.

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{1-u}$$

dır. Binom serilerinden;

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}u^2 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}u^3 - \ldots$$

$0 \le u \le 1$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır. Bu nedenle $\sqrt{1-u}$ fonksiyonuna $0 \le u \le 1$ aralığında u değişkeninin polinomlarıyla ve $-1 \le x \le 1$ aralığında da $|x|$ fonksiyonuna x değişkeninin polinomlarıyla düzgün yaklaşılabilir.

$|x|$ fonksiyonun grafiği bir açılı poligonal doğrudur. Şimdi herhangi bir poligonal fonksiyona polinomlarla keyfi küçük bir hatayla düzgün yaklaşılabileceğini göstermek istiyoruz.

Öncelikle; $(-l,+l)$ aralığında $|x| = l \cdot \left|\frac{x}{l}\right|$ ve $\left|\frac{x}{l}\right| \le 1$ sağlandığında, her $(-l,+l)$ aralığındaki $|x|$ için bu durum doğrudur.

Yine, her

$$L_c(x) = \frac{1}{2}\{(x-c) + |x-c|\}$$

fonksiyonuna her $[a,b]$ aralığında polinomlarla yaklaşılabilir.

Şimdi kabul edelim ki; $g(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında grafiği $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ temel noktalarında açılara sahip herhangi bir poligonal fonksiyon olsun. Şimdi $g(x)$ fonksiyonunun L_c'nin bir lineer kombinasyonu olduğunu göstereceğiz.

$$g_0(x) = g(a) + C_0 L_{a_0}(x) + C_1 L_{a_1}(x) + ... + C_{n-1} L_{a_{n-1}}(x)$$

ifadesi kullanılarak ve

$$g_0(a_\nu) = g(a_\nu), \qquad \nu = 0,1,...,n$$

denklemleri yardımıyla C_ν sabitleri tanımlanır. Bu denklemlerden birincisi bir özdeşliktir. İkincisi ise

$$g(a) + C_0 L_{a_0}(a_1) = g_0(a_1)$$

dır ve buradan C_0 bulunur,üçüncüsünden ise C_1 ve böyle devam edilerek tüm sabitler bulunur.

g ve g_0 poligonal fonksiyonları tüm temel noktalarda çakışır ve bu nedenle özdeştirler. Bu durum herhangi bir $g(x)$ fonksiyonuna polinomlarla yaklaşılabileceğini gösterir.

Son olarak, kabul edelim ki $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ aralığının bir parçalanması vardır öyle ki $f(x)$ fonksiyonun maksimumu M_ν ve minimumu m_ν arasındaki fark herhangi bir $[a_{\nu-1}, a_\nu]$ aralığında $\frac{1}{2}\varepsilon$'dan küçüktür. $g(x)$ poligonal fonksiyonu a_ν noktasında $f(x)$ fonksiyonuna interpole olsun. $[a_{\nu-1}, a_\nu]$ aralığında $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her ikiside m_ν ve M_ν arasındadır ve bu nedenle,

$$|f(x) - g(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad a \le x \le b$$

dır.

Eğer $P(x)$ bir polinom öyle ki; $|g(x) - P(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ ise, $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

3.2.2.Teorem(Borel,1905)

$[a,b]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonuna, $n \in \mathbb{N}$ için derecesi n'yi aşmayan cebirsel polinomlar uzayında en iyi yaklaşan polinom vardır[25].

3.2.3.Teorem

$f \in C[a,b]$ fonksiyonuna, $\wp_n$ uzayında en iyi yaklaşan eleman tektir[23].

3.2.4.Tanım

f , $[a,b]$ aralığında sürekli ve P_n derecesi n'yi aşmayan keyfi bir polinom olsun. Her P_n için,

$$E_n(f) := \inf_{P_n} \max_{a \le x \le b} \left| f(x) - P_n(x) \right|$$

olsun. Bu $E_n(f)$'e derecesi n'yi aşmayan polinomlarla $f(x)$ fonksiyonuna ***en iyi yaklaşım derecesi*** denir[29].

3.3. BERNSTEIN POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

3.3.1.Tanım

$f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı olsun.

$$B_n(f;x) := B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$$

biçiminde tanımlanan ifadeye $f(x)$ fonksiyonunun n-inci $(n \ge 1)$ ***Bernstein polinomu*** denir[29].

Burada,

$$B_n(f;0) = f(0), B_n(f;1) = f(1)$$

olarak kabul edilir.

$B_n \in \wp_n$ olduğu açıktır. Bazı özel durumlarda Bernstein polinomu dejenere olarak, derecesi n'den küçük olabilir.

$$p_{n\nu}(x) := p_\nu(x) = \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$$

şeklinde tanımlanmak üzere; $[0,1]$ aralığında $p_{n\nu}(x) \geq 0$ ve $\sum_{\nu=0}^{n} p_{n\nu}(x) = 1$ olur.

Ayrıca;

$$\int_0^1 p_{n\nu}(x) = \frac{1}{n+1} \tag{3.3.1}$$

eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki teoremde, 3.1.5.1.Tanım'dan yararlanarak $f(x)$ fonksiyonunun Bernstein polinomunun farklı bir gösterimi elde edilmiştir.

3.3.2.Teorem

$\frac{\nu}{n}$, $\nu = 0,1,...,n$ noktalarında f fonksiyonunun sonlu farklar ile ifadesi

$$B_n(f;x) = \sum_{t=0}^{n} \Delta^{(t)} f(0) \binom{n}{t} x^t \tag{3.3.2}$$

biçimindedir[23].

İspat $B_n(f;x)$ polinomunda $(1-x)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-k-j}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} B_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-j} \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu son toplam yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{n} x^t \sum_{k=0}^{t} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-t} (-1)^{t-k} &= \sum_{t=0}^{n} x^t \binom{n}{t} \sum_{k=0}^{t} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{t}{k} (-1)^{t-k} \\ &= \sum_{t=0}^{n} \Delta^{(t)} f(0) \binom{n}{t} x^t \end{aligned}$$

elde edilir.

$f \in \wp_m$ ise $t > m$ için $\Delta^{(t)} f(0) = 0$ dır. Buna göre (3.3.2)'den her n için $B_n(f;x) \in \wp_m$ olur. (3.3.2)'ü $1, x, x^2$ fonksiyonlarına uygulayarak bazı önemli özdeşlikler elde edilebilir.

3.3.3.Örnek

$f(x) = 1$ için $\Delta^0 f(0) = 1,\ \Delta^1 f(0) = 0,\ \Delta^2 f(0) = 0, \ldots$ dır. Buna göre,

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

dır. Bu durum $1^n = \left(x + (1-x)\right)^n$ eşitliğinden açıktır.

3.3.4.Örnek

$f(x) = x$ için $\Delta^0 f(0) = 0,\ \Delta^1 f(0) = \dfrac{1}{n},\ \Delta^2 f(0) = 0, \ldots$ dır. Buna göre,

$$B_n(x;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}\binom{n}{1} x = x$$

dır.

3.3.5.Örnek

$f(x) = x^2$ için $\Delta^0 f(0) = 0,\ \Delta^1 f(0) = \dfrac{1}{n^2}, \Delta^2 f(0) = \dfrac{2}{n^2}, \Delta^3 f(0) = 0, \ldots$ dır.

Buna göre,

$$B_n(x^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2}\binom{n}{1} x + \frac{2}{n^2}\binom{n}{2} x^2$$

Bazı özel durumlarda $B_n(f;x)$ Bernstein polinomu $f(x)$ fonksiyonunun sahip olduğu özelliklere sahiptir.

$0 \le x \le 1$ için;

(i) $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ ise $B_n(f;x) = a_1 B_n(f_1;x) + a_2 B_n(f_2;x)$ olur.

(ii) $m \le f(x) \le M$ ise $m \le B_n(f;x) \le M$ dır.

(iii) $f^{(p)}(x) \geq 0$ ise $B_n^{(p)}(f;x) \geq 0$ olur.

(iv) $f(x)$ azalmayan ise $B_n(f;x)$ de azalmayandır.

(v) $f(x)$ konveks ise $B_n(f;x)$ de konvekstir.

Verilen bu özelliklerin ispatları Bulgular ve Tartışma bölümünde verilecektir.

4.BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1.BERNSTEIN POLİNOMLARI

Bu bölümde ilk olarak; $B_n(f;x)$ Bernstein polinomları yardımıyla 3.2.1.Teorem'de verilen ***Weierstrass Teoremi***'nin ispatı verilecektir.

Öncelikle, Weierstrss teoremi $[0,1]$aralığında sağlanırsa $[a,b]$ aralığında da (ve tersine) sağlanacağını gösterelim.

4.1.1.Lemma

Eğer Weierstrass teoremi $[0,1]$ aralığında sağlanırsa $[a,b]$ aralığında da sağlanır. Tersi de doğrudur.

İspat

$f \in C[a,b]$ verilsin. $g(x) = f(a+(b-a)x),\ (0 \leq x \leq 1)$ biçiminde tanımlanan g fonksiyonu sürekli fonksiyonların bileşke işlemine göre süreklidir. Kabul edelim ki, her $\varepsilon > 0$ için en az bir p polinomu vardır öyle ki

$$\|f-p\| < \varepsilon$$

sağlansın. Yani,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |g(a+(b-a)x) - p(x)| < \varepsilon$$

elde edilir. $p(x)$ x'in bir polinomu olduğundan

$$q(t) = p(\frac{t-a}{b-a})$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon t'nin bir polinomudur. Bu ise,

$$\|g-q\| < \varepsilon$$

olması demektir.

O halde, Weierstrass Teoremini $[0,1]$ aralığında ispatlamak genelliği bozmaz. Bundan dolayı aşağıdaki incelemeler $[0,1]$ aralığında yapılacaktır.

4.1.2.Teorem

$[0,1]$ aralığında sınırlı f fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun her bir x_0 süreklilik noktasında

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x_0) = f(x_0)$$

sağlanır.

Ayrıca; $f(x)$ bu aralıkta sürekli ise yakınsama düzgün olarak sağlanır.

İspat

Teoremin ispatını vermeden önce bazı işaretlemeler ve ispat içerisinde kullanılacak sonuçlar verilecektir. $p_v := \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v}$ olmak üzere $\sum_{v=0}^{n} p_v = 1$ olduğu açıktır.

Ayrıca;

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu p_\nu = nx \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} x^\mu (1-x)^{n-1-\mu} = nx,$$

ve

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu(\nu-1) p_\nu = n(n-1)x^2 \sum_{\mu=0}^{n-2} \binom{n-2}{\mu} x^\mu (1-x)^{n-2-\mu} = n(n-1)x^2$$

olduğundan

$$T := \sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^2 \, p_\nu \qquad (4.1.1)$$

ifadesi

$$T = \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \nu(\nu-1) - (2nx-1)\nu + n^2x^2 \right\} p_\nu$$

biçiminde yazılırsa

$$T = n^2x^2 - (2nx-1)nx + n(n-1)x^2 = nx(1-x) \qquad (4.1.2)$$

olduğu görülür.

$\left[0,1\right]$ aralığında $x\left(1-x\right)$ en büyük değerini $x=\dfrac{1}{2}$ noktasında alacağından $x\left(1-x\right)\le\dfrac{1}{4}$ tür.

$$\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\ge\delta} p_\nu \le \frac{1}{\delta^2}\sum\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^2 p_\nu \le \frac{1}{n^2\delta^2}T=\frac{x\left(1-x\right)}{n\delta^2}\le\frac{1}{4n\delta^2} \tag{4.1.3}$$

f fonksiyonu sınırlı olduğundan $\exists M>0$ ∍ her $0\le u\le 1$ için $\left|f\left(u\right)\right|\le M$ ve x_0 süreklilik noktası ise, her $\varepsilon>0$ için en az bir $\delta>0$ bulunur öyle ki $\left|x_0-x'\right|<\delta$ şartını sağlayan noktalarda $\left|f\left(x_0\right)-f\left(x'\right)\right|<\varepsilon$ sağlanır. Böylece,

$$\left|f\left(x_0\right)-B_n\left(f;x_0\right)\right|=\left|\sum_{\nu=0}^{n}\left\{f\left(x_0\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right\}p_\nu\right|\le$$

$$\le\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x_0\right|<\delta}\left|f\left(x_0\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|p_\nu+\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x_0\right|\ge\delta}\left|f\left(x_0\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|p_\nu \tag{4.1.4}$$

dir. (4.1.4)'de birinci toplam f fonksiyonunun sürekliliğinden, ikinci toplam ise (4.1.3)'ten yararlanılarak sırasıyla $\varepsilon\sum p_\nu=\varepsilon$ ve $2M\left(4n\delta^2\right)^{-1}$ sayılarından küçük yapılabilir. Sonuç olarak

$$\left|f\left(x_0\right)-B_n\left(f;x_0\right)\right|<\varepsilon+M\left(2n\delta^2\right)^{-1} \tag{4.1.5}$$

sağlanır.

Böylece, yeterince büyük n doğal sayısı için $\left|f\left(x\right)-B_n\left(f;x\right)\right|<2\varepsilon$ olur.

Ayrıca, $f(x)$ fonksiyonu $\left[0,1\right]$ aralığında sürekli ise δ sayısı (4.1.5)'de x'den bağımsız olacağından yakınsama düzgündür.

4.1.3.Sonuç

(i) 4.1.2.Teorem'deki ispatın biraz farklı bir durumu göstermektedir ki:

Eğer sınırlı bir $f\left(x\right)$ fonksiyonu x noktasında sürekli ise $c_n\to x$ için $B_n\left(c_n\right)\to f\left(x\right)$ sağlanır.

(ii) Eğer $0<a<b<1$ ise Weierstrass teoremi tam değerli katsayılara sahip $P(x)$ polinomları için de doğrudur (Chlodovsky [33]). Tam değerli katsayılara sahip,

$$P(x)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\!\!\left[\binom{n}{\nu}f(\frac{\nu}{n})\right]\!\!\right]x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$$

polinomu ile $B_n(f;x)$'in farkı,

$$M\left\{x^n+(1-x)^n\right\}+\sum_{\nu=1}^{n-1}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \tag{4.1.6}$$

ifadesinden küçüktür. (4.1.6) daki son toplam

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}p_{n\nu}(x)\leq\frac{1}{n}$$

eşitsizliğini sağlar. Sonuç olarak; $a\leq x\leq b$ aralığında (4.1.6) ifadesi düzgün olarak sıfıra yaklaşır.

(iii) Kabul edelimki, sınırlı f,g fonksiyonları x_0 noktasının bir δ komşuluğunda çakışmaktadır**.** (4.1.4)'e benzer bir hükümle $n\to\infty$ için $B_n(f;x_0)-B_n(g;x_0)\to 0$ olur. Yani, sınırlı f fonksiyonunun $B_n(f;x)$ Bernstein polinomunun x_0 noktasındaki durumu yalnızca f fonsiyonunun x_0 noktasının yeterince küçük komşuluğunda aldığı değerlere bağlıdır.

Şimdi $p_{n\nu}(x)$ ifadesini içeren aşağıdaki toplama bakalım:

$$T_s(x):=T_{n,s}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}(\nu-nx)^s\,p_{n\nu}(x),\ n=1,2,...;s=0,1,..., \tag{4.1.7}$$

Bu ifade; (4.1.1)'de verilen T ifadesinin genelleştirilmesidir.

4.1.2.Teorem'den

$$T_{n,0}(x)=1,\ T_{n,1}(x)=\sum\nu p_{\nu}-nx=0,\ T_{n,2}(x)=nx(1-x)$$

olduğunu biliniyor.

$T_{n,s}(x)$ ifadesiyle ilgili daha fazla bilgi için aşağıdaki teorem verilmiştir.

4.1.4.Teorem

$T_{n,s}(x)$, $s=0,1...,$ x'e göre derecesi $\leq s$ ve n'ye göre derecesi $[\![s/2]\!]$ olan bir polinom olsun. $X := x(1-x)$ olmak üzere,

$$T_{n,2s}(x) = \sum_{j=1}^{s} a_{j,s}(X)\, n^j X^j,$$

$$T_{n,s+1}(x) = (1-2x)\sum_{j=1}^{s} b_{j,s}(X)\, n^j X^j$$

dır.

Burada, $a_{j,s}$ $,b_{j,s}$ ile katsayıları n'den bağımsız derecesi $s-j$ sayısından küçük yada eşit olan polinomlar işaret edilmiştir.

İspat

$$T'_{n,s}(x) = -nsT_{n,s-1}(x) + \sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^s\, p'_{n\nu}(x)$$

$$= -nsT_{n,s-1}(x) + \sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^{s+1} \binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu-1}$$

dır ve böylece

$$T_{n,s+1}(x) = x(1-x)\left[T'_{n,s}(x) + nsT_{n,s-1}(x)\right]$$

formülü elde edilir.

Tümevarımla teoremdeki tüm durumlar ispatlanır.

4.1.5.Teorem

$0 \leq x \leq 1$ olmak üzere

$$0 \leq z \leq \frac{3}{2}\left(nx(1-x)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1.8}$$

eşitsizliğini sağlayan her bir z için

$$\sum_{|\nu - nx| \geq 2z(nx(1-x))^{1/2}} p_\nu(x) \leq 2e^{-z^2} \tag{4.1.9}$$

sağlanır.

İspat

$$\Phi = \Phi_n(u,x) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{u(\nu - nx)} p_\nu(x)$$

toplamı $|u| \leq 3/2$ için,

$$\Phi \leq \exp\{nx(1-x)u^2\} \tag{4.1.10}$$

eşitsizliğini sağlar.

$\Phi = \left[xe^{u(1-x)} + (1-x)e^{-ux}\right]^n$ için $|u| \leq 3/2$ ise

$$\begin{aligned} xe^{u(1-x)} + (1-x)e^{-ux} &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\left[x(1-x)^k + (1-x)(-x)^k\right] \\ &\leq 1 + x(1-x)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|u|^k}{k!} \\ &\leq 1 + x(1-x)\frac{u^2}{2}\left(1 + \frac{|u|}{3} + \frac{|u|^2}{3^2} + \ldots\right) \\ &= 1 + x(1-x)\frac{u^2}{2}\left(1 - \frac{1}{3}|u|\right)^{-1} \\ &\leq 1 + x(1-x)u^2 \end{aligned}$$

Buradan, $e^{\nu} \geq 1+\nu$ iken $\nu \geq 0$ için (4.1.10) sağlanır ve

$$\Psi \leq \Phi_n(u,x) + \Phi_n(-u,x) \leq 2\exp\{nx(1-x)u^2\} \tag{4.1.11}$$

elde edilir. (4.1.9) ise $C \geq 0$ ve $u \geq 0$ için

$$\sum_{\exp[u|\nu-nx|]\geq C\Psi} p_\nu(x) \leq \frac{1}{C\Psi}\sum e^{u|\nu-nx|}p_\nu(x) = \frac{1}{C}$$

olduğuna dikkat edilir ve

$C = \frac{1}{2}e^{z^2}$ için (4.1.11) kullanılırsa

$$\sum_{|\nu-nx|\geq u^{-1}z^2+nx(1-x)u} p_\nu(x) \leq 2e^{-z^2}$$

elde edilir.

Burada en iyi sonuç $u^{-1}z^2 + nx(1-x)u$ ifadesinin minimum olduğu $u = z(nx(1-x))^{-1/2}$ noktasıdır. Eğer $0 \leq u \leq 3/2$ ise (4.1.9) elde edilir.

4.1.6.Lemma

Her bir $x \in [0,1]$ için n'den bağımsız bir c sabiti vardır öyle ki

$$\sum_{|k/n-x|\geq n^{-1/4}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{c}{n^{3/2}}$$

sağlanır.

İspat

İspat için (4.1.7)'de verilen

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^m \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ifadesini inceleyelim. **4.1.2.Teorem**'de $T_0(x) = 1\,, T_1(x) = 0\,, T_2(x) = nx(1-x)$ olduğu gösterilmişti. (4.1.7) ifadesinin x'e göre türevi alınırsa

$$T'_m(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^{m-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \left[-mnx(1-x) + (k-nx)^2 \right] =$$

$$= -mnT_{m-1}(x) + \frac{T_{m+1}(x)}{x(1-x)}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$T_{m+1}(x) = x(1-x)\left[T'_m(x) + mnT_{m-1}(x)\right]$$

dır. Bu eşitlikle $T_m(x)$ ifadesine x ve n'ye göre bir polinom gibi bakılabilir. n'ye göre T_3 birinci, T_5 ikinci ve T_6 üçüncü dereceden polinomdur.

Buna göre, bazı c sabitleri ve $[0,1]$ noktaları için $|T_6(x)| \le cn^3$ dır. $\left|\frac{k}{n} - x\right| \ge n^{-1/4}$ eşitsizliğinden $\frac{(k-nx)^6}{n^{9/2}} \ge 1$ olduğu görülür. Böylece,

$$\sum_{|k/n - x| \ge n^{-1/4}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{n^{9/2}} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^6 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= n^{-9/2} T_6(x) \le \frac{c}{n^{3/2}}$$

bulunur.

Şimdi verilecek iki teorem ile $f(x)$ fonksiyonuna $B_n(f;x)$ Bernstein polinomuyla yaklaşım hızı süreklilik modülü yardımıyla ifade edilecektir.

4.1.7.Teorem

f sürekli ve $\omega(\delta)$ fonksiyonu f'nin süreklilik modülü ise

$$\left| f(x) - B_n(f;x) \right| \le \frac{5}{4} \omega\left(n^{-1/2}\right) \qquad (4.1.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Her hangi $x_1, x_2 \in [0,1]$ noktaları ve $\delta > 0$ için $[\![|x_1 - x_2| \delta^{-1}]\!]$ tamsayısı $\lambda := \lambda(x_1, x_2; \delta)$ ile işaret edilsin. O halde, $f(x_1) - f(x_2)$ farkı uzunluğu δ sayısından küçük olan aralıklarda $f(x)$'in $\lambda + 1$ farkının toplamıdır**.**

Bu nedenle,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le (\lambda + 1)\omega(\delta)$$

ve (4.1.2)'den yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f;x)| &\le \sum_{\nu=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{\nu}{n}\right) \right| p_\nu(x) \\
&\le \omega(\delta) \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ 1 + \lambda\left(x, \frac{\nu}{n}; \delta \right) \right\} p_\nu = \omega(\delta) \left\{ 1 + \delta^{-2} \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n} - x \right)^2 p_\nu \right\} \\
&\le \omega(\delta) \left\{ 1 + \left(4n\delta^2 \right)^{-1} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\delta = n^{-1/2}$ seçilirse (4.1.12) elde edilir.

4.1.8.Teorem

$f \in C^1[0,1]$ ve $f'(x)$ fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega_1(\delta)$ olmak üzere

$$|f(x) - B_n(f;x)| \le \frac{3}{4} n^{-1/2} \omega_1\left(n^{-1/2}\right) \tag{4.1.13}$$

sağlanır.

İspat

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 < \xi < x_2$ olsun. **3.1.1.8.Teorem**'den

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi) = (x_1 - x_2) f'(x_1) + (x_1 - x_2)[f'(\xi) - f'(x_1)]$$

dir. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimin tam kısmı $\lambda = \lambda(x_1, x_2; \delta)$ olmak üzere

$$|x_1 - x_2|(\lambda + 1)\omega_1(\delta)$$

sayısından küçük veya eşittir. $T_{n,1}(x) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &= \left| \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ f(x) - f\left(\frac{\nu}{n}\right) \right\} p_\nu \right| \\
&\le \left| \sum_{\nu=0}^{n} \left(x - \frac{\nu}{n} \right) f'(x) p_\nu \right| + \omega_1(\delta) \sum_{\nu=0}^{n} \left| \frac{\nu}{n} - x \right| (\lambda + 1) p_\nu
\end{aligned}$$

$$\leq \omega_1(\delta)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\left|\frac{\nu}{n}-x\right|p_\nu+\sum_{\lambda\geq 1}\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\lambda\left(x,\frac{\nu}{n};\delta\right)p_\nu\right\}$$

$$\leq \omega_1(\delta)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\left|\frac{\nu}{n}-x\right|p_\nu+\delta^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^2 p_\nu\right\}$$

dır. Burada son satırın ikinci toplamı (4.1.2)'den

$$x(1-x)n^{-1}\leq \frac{1}{4}n^{-1}$$

dır. Keyfi $\alpha>0$ ve α'ya bağlı sabit A_α^* için,

$$T_{n\alpha}^*(x)=\sum_{\nu=0}^{n}|\nu-nx|^\alpha p_\nu(x)\leq A_\alpha^* n^{\alpha/2},\ n=1,2,... \tag{4.1.14}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.1.14) eşitsizliği $\alpha=1, A_1^*=A_1^{1/2}=\frac{1}{2}$ için kullanılırsa

$$\left|f(x)-B_n(f;x)\right|\leq \omega_1\left\{\frac{1}{2}n^{-1/2}+(4n\delta)^{-1}\right\}$$

elde edilir. $\delta=n^{-1/2}$ seçilirse, (4.1.13) bulunur.

Aşağıdaki teoremde, bazı şartlar altında $B_n(f;x)$ Bernstein polinomlarıyla $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım asimptotik olarak ifade edilmiştir.

4.1.9.Teorem (Voronovsky)

$f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve $x_0\in[0,1]$ olsun. Eğer $f''(x_0)$ mevcut ise

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(f;x_0)-f(x_0)]=\frac{1}{2}x_0(1-x_0)f''(x_0) \tag{4.1.15}$$

dır.

İspat

3.1.1.8.Teorem'den $\lim_{x\to x_0} s(x)=0$ olmak üzere,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2}+s(x)(x-x_0)^2$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifadede $x=\frac{k}{n}$ yazılarak,

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=f(x_0)+f'(x_0)\left(\frac{k}{n}-x_0\right)+\frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2+s\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2 \quad (4.1.16)$$

elde edilir. $B_n(1;x)=1$, $B_n(x;x)=x$, $B_n(x^2;x)=\frac{1}{n^2}\binom{n}{1}x+\frac{2}{n^2}\binom{n}{2}x^2$ olduğu göz önünde tutularak (4.1.16)'in her iki tarafı $\binom{n}{k}x_0^{\,k}(1-x_0)^{n-k}$ ile çarpılır ve $k=0$ dan $k=n$'ye kadar toplanırsa

$$B_n(f,x_0)=f(x_0)+\frac{x_0(1-x_0)f''(x_0)}{2n}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}s\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2\binom{n}{k}x_0^{\,k}(1-x_0)^{n-k} \quad (4.1.17)$$

elde edilir.

(4.1.17)'deki üçüncü terimi S ile işaretleyelim. $\varepsilon>0$ için yeterince büyük n bulunabilir öyle ki, $|x-x_0|<\frac{1}{n^{1/4}}$ iken $|s(x)|\le\varepsilon$ dur. Sonuç olarak,

$$|S|\le\sum_{\left|\frac{k}{n}-x_0\right|<n^{-1/4}}\left|s\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2\binom{n}{k}x_0^{\,k}(1-x_0)^{n-k}+$$

$$+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x_0\right|\ge n^{-1/4}}\left|s\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2\binom{n}{k}x_0^{\,k}(1-x_0)^{n-k}$$

elde edilir. $M=\sup\limits_{0\le x\le 1}s(x)(x-x_0)^2$ olmak üzere

$$|S|\le\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2\binom{n}{k}x_0^{\,k}(1-x_0)^{n-k}+M\sum_{\left|\frac{k}{n}-x_0\right|\ge n^{-1/4}}\binom{n}{k}x_0^{\,k}(1-x_0)^{n-k}$$

sağlanır.

Böylece (4.1.2) ve **4.1.6.Lemma**'dan

$$|S|\le\frac{\varepsilon x_0(1-x_0)}{n}+\frac{M\cdot C}{n^{3/2}}$$

dir ve (4.1.16)'dan

$$\left|n\left[B_n(f;x_0)-f(x_0)\right]-\frac{x_0(1-x_0)}{2}f''(x_0)\right|=|nS|\le\varepsilon x_0(1-x_0)+\frac{M\cdot C}{n^{1/2}}$$

bulunur. ε keyfi olduğundan (4.1.15) elde edilir.

4.1.10.Lemma

$p \geq 0$ bir tam sayı olsun.

$$B_{n+p}^{(p)}(f;x) = \frac{(n+p)!}{n!}\sum_{t=0}^{n}\Delta^{p} f\left(\frac{t}{n+p}\right)\binom{n}{t}x^{t}(1-x)^{n-t}$$

dır.

İspat

$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}$ polinomuna, u ve v fonksiyonları p. mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$(uv)^{(p)} = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}u^{(j)}v^{(p-j)}$$

Leibnitz formülü uygulanırsa,

$$B_{n+p}^{(p)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n+p} f\left(\frac{k}{n+p}\right)\binom{n+p}{k}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\left(x^{k}\right)^{(j)}\left[(1-x)^{n+p-k}\right]^{(p-j)}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\left(x^{k}\right)^{(j)} = k!x^{k-j}/(k-j)!,\ k-j \geq 0$$

ve

$$\left[(1-x)^{n+p-k}\right]^{(p-j)} = (-1)^{p-l}(n+p-k)!(1-x)^{n+j-k}/(n+j-k)!,\ k-j \leq n$$

olduğundan,

$$B_{n+p}^{(p)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n+p}\sum_{j=0}^{p} f\left(\frac{k}{n+p}\right)\frac{(n+p)!}{(k-j)!(n+j-k)!}\binom{p}{j}(-1)^{p-j}x^{k-j}(1-x)^{n+j-k}$$

biçiminde yazılabilir. Burada; $k-j=t$, $k=t+j$ olduğu göz önüne alınırsa $0 \leq t \leq n$, $j=0,1,...,p$ olduğu görülür. O halde,

$$B_{n+p}^{(p)}(f,x) = (n+p)!\sum_{t=0}^{n}\frac{x^{t}(1-t)^{n-t}}{t!(n-t)!}\sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}\binom{p}{j}f\left(\frac{t+j}{n+p}\right)$$

dır.

4.1.11.Teorem

$f \in C^p[0,1]$ ise $\lim_{n\to\infty} B_n^{(p)}(f;x) = f^{(p)}(x)$ sağlanır.

İspat

$\dfrac{t}{n+p} < \xi_t < \dfrac{t+p}{n+p}$, $t = 0,1,...,n$ sağlayan bazı ξ_t noktaları için,

$$\Delta^p f\left(\frac{t}{n+p}\right) = \frac{1}{(n+p)^p} f^{(p)}(\xi_t)$$

dır.

4.1.10.Lemma'dan

$$B_{n+p}^{(p)}(f;x) = \frac{(n+p)!}{n!(n+p)^p}\sum_{t=0}^{n} f^{(p)}(\xi_t)\binom{n}{t}x^t(1-x)^{n-t}$$

dir. $\sum_{k=0}^{n} f^{(p)}\left(\frac{t}{n}\right)\binom{n}{t}x^t(1-x)^{n-t}$ ifadesi eklenir ve çıkarılırsa

$$\frac{n!(n+p)^p}{(n+p)!}B_{n+p}^{(p)}(f;x) = \sum_{t=0}^{n} f^{(p)}\left(\frac{t}{n}\right)\binom{n}{t}x^t(1-x)^{n-t} +$$

$$+\sum_{t=0}^{n}\{f^{(p)}(\xi_t) - f^{(p)}\left(\frac{t}{n}\right)\}\binom{n}{t}x^t(1-x)^{n-t} \qquad (4.1.18)$$

elde edilir. $\dfrac{t}{n+p} \le \dfrac{t}{n} \le \dfrac{t+p}{n+p}$, $t = 0,1,...,n$ iken $\left|\xi_t - \dfrac{t}{n}\right| < \dfrac{t+p}{n+p} - \dfrac{t}{n+p} = \dfrac{p}{n+p}$ dır.

$f^{(p)}(x)$'in düzgün sürekliliğinden her bir $\varepsilon > 0$ için öyle n_0 bulunabilir ki her $n \ge n_0$ ve her $0 \le t \le n$ için $\left|f^{(p)}(\xi_t) - f^{(p)}(t/n)\right| < \varepsilon$ sağlanır.

(4.1.18)'deki ikinci toplamın mutlak değeri her $x \in [0,1]$ ve $n \ge n_0$ için ε'dan küçüktür. O halde, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+p)^p}{(n+p)!} = 1$ ve **4.1.2.Teorem**'den birinci toplam $f^{(p)}(x)$'e düzgün olarak yaklaşır.

4.1.12.Teorem

p, $(0 \le p \le n)$ tespit edilmiş bir tam sayı olmak üzere m ve M reel sayıları için

$$m \le f^{(p)}(x) \le M \ , 0 \le x \le 1 \qquad (4.1.19)$$

sağlansın. Bu durumda,

$$m \le \frac{n^p}{n(n-1)\ldots(n-p-1)} B_n^{(p)}(f;x) \le M \ , \ 0 \le x \le 1 \tag{4.1.20}$$

dır.

$p=0$ için $B_n^{(p)}(f;x)$ polinomunun önündeki çarpan 1 olarak alınacaktır.

Ayrıca; $f^{(p)}(x) \ge 0$ ise

$$B_n^{(p)}(f;x) \ge 0 \tag{4.1.21}$$

dır.

$f(x)$, azalmayan (konveks) ise, $B_n(f;x)$ bu aralıkta azalmayandır (konvekstir).

İspat

$p=1,2,...,n$ için,

$$B_n^{(p)}(f;x) = n(n-1)\ldots(n-p+1)\sum_{t=0}^{n-p} \Delta^p f\left(\frac{t}{n}\right)\binom{n-p}{t} x^t(1-x)^{n-p-t} \tag{4.1.22}$$

olduğu **4.1.10.Lemma**'da gösterilmiştir. f fonksiyonunun p. türevine Ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\Delta^p f\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{n^p} f^{(p)}(\xi_t)\,, \ \frac{t}{n} < \xi_t < \frac{t+p}{n}$$

eşitliği elde edilir.

$p=0$ olduğunda bu eşitliğin $\xi_t = \dfrac{t}{n}$ noktasında sağlandığı açıktır.

$$Q = \frac{n^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} B_n^{(p)}(f;x) =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-p} f^{(p)}(\xi_t)\binom{n-p}{t} x^t(1-x)^{n-p-t}$$

(4.1.19) ve $[0,1]$ aralığında $x^t(1-x)^{n-p-t} \ge 0$ olduğundan

$$m = m\sum_{t=0}^{n-p}\binom{n-p}{t} x^t(1-x)^{n-p-t} \le Q \le M\sum_{t=0}^{n-p}\binom{n-p}{t} x^t(1-x)^{n-p-t} = M$$

sağlanır.

Bu durum, (4.1.20)'nin sağlandığını gösterir. $m=0$ koyarak (4.1.21) elde edilir.

f azalmayan ise $\Delta f\left(\frac{t}{n}\right) \geq 0$ dır ve $p=1$ ile (4.1.22)'den $[0,1]$ aralığında $B_n'(f;x) \geq 0$ olduğu görülür. Bu ise $B_n(f;x)$ polinomunun azalmayan olduğunu gösterir.

f konveks ise $\Delta^2 f(t/n) \geq 0$ dır[23, p.59] ve $p=2$ ile (4.1.22)'dan $B_n''(f;x) \geq 0$ olduğu görülür. **3.1.1.15 Teorem** ile bu durum $(0,1)$ aralığının her kapalı alt aralığında $B_n(f;x)$ polinomunun konveks olduğunu gösterir. Ayrıca, $B_n(f;x)$ sürekli olduğundan $[0,1]$ aralığında konvekstir.

4.1.13.Teorem

$f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında konveks olsun. Bu durumda, $n = 2,3,...$ ve $0 < x < 1$ için

$$B_{n-1}(f;x) \geq B_n(f;x),\ 0 < x < 1 \tag{4.1.23}$$

dır.

İspat

(3.3.2)'de verilen $B_n(f;x)$ polinomunun sonlu farklar ile ifadesinde $t = \frac{x}{1-x}$ yazılırsa

$$(1-x)^{-n}\left(B_{n-1}(f;x) - B_n(f;x)\right) = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n-1}\right)\binom{n-1}{k}t^k - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n-1}\right)\binom{n-1}{k}t^k + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k-1}{n-1}\right)\binom{n-1}{k-1}t^k + f(1)t^n -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k - f(0) - f(1)t^n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k t^k$$

elde edilir. Burada

$$c_k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left\{\frac{1}{k} f\left(\frac{k}{n-1}\right) + \frac{1}{n-k} f\left(\frac{k-1}{n-1}\right) - \frac{n}{k(n-k)} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \tag{4.1.24}$$

dır.

$\frac{k-1}{n-1} < \frac{k}{n} < \frac{k}{n-1}$ ve f fonksiyonu konveks olduğundan (4.1.24)'deki parantezin içi ≥ 0 dır.

Sonuç olarak $\sum_{k=1}^{n-1} c_k t^k \geq 0$ dır. Böylece (4.1.23) ispatlanmış olur.

4.1.14.Teorem

$n = 1,2,...$ için,

$$B_n(f;x) - B_{n+1}(f;x) = \frac{x(1-x)}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f \right] \right\} p_{n+1,k}(x) \quad (4.1.25)$$

dır.

İspat

$$B_{n+1}(f;x) = f(0)(1-x)^{n+1} + f(1)x^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n+1}\right) x^{\nu} (1-x)^{n+1-\nu}$$

$$B_n(f;x) = B_n(f;x)(x+(1-x)) = f(0)(1-x)^{n+1} + f(1)x^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu-1}{n}\right)\binom{n}{\nu-1} x^{\nu}(1-x)^{n+1-\nu}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n+1-\nu}$$

Tüm toplamlarda $\nu - 1$ yerine k yer değiştirmesi yapılarak,

$$B_n(f;x) - B_{n+1}(f;x) =$$

$$= x(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} - f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\binom{n}{k+1} \right] \quad (4.1.26)$$

bulunur. (3.1.6.3) formülüyle ikinci bölünmüş farklar için;

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f \right] =$$

$$= f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^2(n+1)}{(n-k)} - f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\frac{n^2(n+1)}{(k+1)(n-k)} + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n^2(n+1)}{k+1}$$

dır.

Sonuç olarak; (4.1.25) formülü (4.1.26) formülüne eşittir.

4.1.15.Teorem

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı, $0 \le a < b < 1$ için $f \in C[a,b]$ ve

$$\limsup \left\{ n\left[B_n\left(f;x\right) - f\left(x\right)\right]\right\} \ge 0,\ a < x < b \qquad (4.1.27)$$

ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konvekstir.

İspat

f fonksiyonunun konveks olmadığını kabul edelim. O halde, $\varepsilon > 0$ için $g(x) = f(x) + \varepsilon x^2$ biçiminde tanımlanmış fonksiyonların hiç biri konveks değildir. $L(x_i) = g(x_i)$, $i = 1,2$ koşulunu sağlayan $L(x)$ lineer fonksiyonu için $g(y) > L(y)$ eşitsizliğini sağlayan $[a,b]$ aralığında $x_1 < y < x_2$ noktaları vardır. Böylece, $g - L$ fonksiyonu $I := [x_1, x_2]$'da süreklidir.

$g - L$ fonksiyonu I aralığında maksimumunu z ($x_1 < z < x_2$) noktasında alsın ve $f(z) = M > 0$ olsun. Buna göre; $f(x) \le -\varepsilon x^2 + L(x) + M$, z noktasında eşitlik vardır. Bazı α sabitleri için,

$$f(x) \le -\varepsilon(x-z)^2 + \alpha(x-z) + f(z) =: Q(x),\ x \in I$$

dır. f fonksiyonu $F \in C[0,1]$ fonksiyonuna genişletilebilir, şöyle ki;

$$F(x) = f(x),\ x \in I,$$

$$F(x) \le Q(x),\ x \in [0,1].$$

$B_n\left(u^2, x\right) = x^2 + x(1-x)n^{-1}$ iken,

$$n[B_n(F,z) - F(z)] \le n[B_n(Q,z) - Q(z)] = -\varepsilon z(1-z)$$

4.1.3.Sonuç'daki (iii) özelliği

$$n[B_n(f;z) - f(z)] \le -\varepsilon z(1-z) + o(1)$$

durumunu gösterir. Bu durum (4.1.27) ile çelişir.

4.1.16.Teorem

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve fonksiyonunun x noktasındaki sağ ve sol üst limitleri (alt limitleri) sırasıyla L^+ $\left(l^+\right)$ ve L^- $\left(l^-\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{2}\left(l^{+}+l^{-}\right)\leq\liminf_{n\to\infty}B_n\left(f;x\right)\leq\limsup_{n\to\infty}B_n\left(f;x\right)\leq\frac{1}{2}\left(L^{+}+L^{-}\right) \tag{4.1.28}$$

sağlanır.

x noktasında sağ limit $f\left(x+\right)$ ve sol limit $f\left(x-\right)$ mevcut fakat farklı ise,

$$\lim_{n\to\infty}B_n\left(f;x\right)=\frac{1}{2}\{f\left(x+\right)+f\left(x-\right)\} \tag{4.1.29}$$

dır.

İspat

$B_n\left(f;x\right)$ polinomunu x noktasının $\delta>0$ komşuluğunu $x\leq\frac{\nu}{n}<x+\delta$, $x-\delta<\frac{\nu}{n}<x$ ve $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geq\delta$ biçiminde parçalayarak aşağıdaki biçimde yazalım:

$$B_n(f;x)=\sum_{x-\delta<\frac{\nu}{n}<x}f\left(\frac{\nu}{n}\right)p_{n\nu}+\sum_{x\leq\frac{\nu}{n}<x+\delta}f\left(\frac{\nu}{n}\right)p_{n\nu}+\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geq\delta}f\left(\frac{\nu}{n}\right)p_{n\nu}$$

4.1.6.Lemma ile üçüncü toplam $o(1)$ dır. Her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık yeterince küçük $\delta>0$ vardır öyle ki birinci toplamda $l^{-}-\varepsilon<f(\nu/n)<L^{-}+\varepsilon$, ikinci toplamda $l^{+}-\varepsilon<f(\nu/n)<L^{+}+\varepsilon$ eşitsizlikleri sağlanır.

$p_{n\nu}\left(x\right)$'in ise uygun toplamları $\frac{1}{2}$ sayısına yaklaşır [29, p.18]. Bu nedenle yeterince büyük n için (4.1.28)

$$\frac{1}{2}\left(l^{+}+l^{-}\right)-3\varepsilon<B_n\left(f;x\right)<\frac{1}{2}\left(L^{+}+L^{-}\right)+3\varepsilon$$

biçiminde elde edilir.

Ayrıca, (4.1.29)'deki limitin sadece $f(x)$ üzerindeki koşullar altında var olduğu ispatlandı. Bu tür ifadelerin doğruluğu herhangi sürekli olmayan fonksiyonlar için beklenemez. Yani, $f(x)$ fonksiyonunun irrasyonel noktalardaki durumu onun rasyonel noktalardaki $f(\nu/n)$ değerleri ile açıklanamaz. Çünkü, $B_n(f;x)$ sadece $f(\nu/n)$'e bağlıdır.

4.2. BERNSTEIN POLİNOMLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ

f fonksiyonu $(0,b)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu aralık için $B_n^f(x;b)$ Bernstein polinomu;

$$B_n(x) = B_n^f(x;b) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{b\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{b}\right)^{\nu}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n-\nu}$$

biçiminde tanımlanır.

Burada, $b = b_n$ dizisi n'nin artan bir fonksiyonu olduğu kabul edilecektir.

4.2.1.Tanım

$$B_n^f(x;b) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{b\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{b}\right)^{\nu}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\Delta_{b/n}^{\nu} f(0)\left(\frac{x}{b}\right)^{\nu} \qquad (4.2.1)$$

formülünde b sıfıra yaklaşır ve her bir $\nu = 0,1,...,n$ için $f^{(\nu)}(0)$ varsa (4.2.1)'de limit alınarak

$$A_n(x) = A_n^f(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(0)\left(\frac{x}{n}\right)^{\nu} \qquad (4.2.2)$$

polinomu elde edilir.

(4.2.2)'de verilen yeni polinoma $f(x)$ fonksiyonunun ***Bozulmuş (Dejenere) Bernstein polinomu*** denir.

4.2.2.Teorem

$b_n = o(n)$ ve $f(x)$ fonksiyonu $(0,+\infty)$ aralığında sınırlı ise f fonksiyonunun herhangi x süreklilik noktasında

$$B_n(x;b) \to f(x) \qquad (4.2.3)$$

sağlanır.

İspat

Bu teoremin ispatında **4.1.2.Teorem**'deki ispata benzer bir yol izlenecektir.

$$\left|B_n(x) - f(x)\right| \le \sum_{\nu=0}^{n}\left|f\left(\frac{b_n\nu}{n}\right) - f(x)\right| p_{n\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)$$

dır. Herhangi $\varepsilon > 0$ verildiğinde ve yeterince küçük $\delta > 0$ için $|x - x'| < \delta$ koşulunu sağlayan noktalarda $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ sağlanır. $t = xb_n^{-1}$ koyarak

$$\left|B_n(x)-f(x)\right| \le \sum_{\left|\frac{b_n\nu}{n}-x\right|<\delta} + \sum_{\left|\frac{b_n\nu}{n}-x\right|>\delta} \le \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{\nu}{n}-t\right|\ge \delta/b_n} p_{n\nu}(t) \tag{4.2.4}$$

elde edilir.

(4.2.4) eşitsizliğinde (4.1.4) kullanılırsa yeterince büyük n ve $b_n = o(n)$ için

$$\left|B_n(x)-f(x)\right| \le \varepsilon + 2M \frac{x/b_n}{n(\delta/b_n)^2} < 2\varepsilon$$

elde edilir.

4.2.3.Teorem

$b_n = o(n)$ ve $M(b) := \max\limits_{0\le x\le b}\left|f(x)\right|$ olmak üzere her bir $\alpha > 0$ için

$$M(b_n)e^{-\alpha_n/b_n} \to 0 \tag{4.2.5}$$

ise (4.2.3) ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun her bir süreklilik noktasında sağlanır.

İspat

(4.2.4)'de M yerine $M(b_n)$ konularak elde edilen eşitsizlikte

$$z = \delta n(2b_n)^{-1}\left[nt(1-t)\right]^{-1/2}$$

ise (4.1.8) şartı sağlanır. Böylece **4.1.5.Teorem** yardımıyla (4.2.4) deki son toplam elde edilir. Sonuç olarak (4.2.5)'dan yeterince büyük n için,

$$\left|B_n(x)-f(x)\right| \le \varepsilon + 2M(b_n)\exp\{-\delta^2 n\left[4b_n x\left(1-xb_n^{-1}\right)\right]^{-1}\} < 2\varepsilon$$

elde edilir.

4.3 LIPSCHITZ KOŞULUNU SAĞLAYAN FONKSİYONLARA BERNSTEIN POLİNOMUYLA YAKLAŞIM

4.3.1.Lemma

X, n ve x parametrelerine göre bir binomal rastgele değişken olsun. $a > 0$ için

$$P\left(\left|X-nx\right| \ge a\right) \le 2e^{-2a^2/n}$$

dır.

4.3.2.Teorem

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $0<\alpha\le 1$ için $f\in Lip\alpha$ olsun. $B_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$ için

$$\left|f(x)-B_n(f;x)\right|\le K\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)^{\alpha/2} \tag{4.3.1}$$

sağlanır.

İspat

t bir olayın gerçekleşme olasılığını, J ise n denemede olayın gerçekleşme sayısını ifade eden bağımsız değişken olsun. Sonuç olarak J sayısı n ve t parametreleriyle binomal rastgele değişkendir. Bunun için olasılık teorisinden

$$E(J)=nt\ ,\ Var(J)=nt(1-t)\ \text{ ve }\ P(J=j)=\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j}$$

olduğu bilinmektedir.

Adım 1:

$[0,1]$ kapalı, sınırlı aralığında ve f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından, f sınırlı ve düzgün süreklidir. Yani, $\exists M>0$ öyle ki, $\forall x\in[0,1]$ için $|f(x)|\le M$ dır.

$$\left|f(t)-B_n(f;t)\right|\le\sum_{j=0}^{n}\left|f(t)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j}\le$$

$$\le\sum_{|nt-j|\le a}\left|f(t)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j}+\sum_{|nt-j|>a}\left|f(t)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j} \tag{4.3.2}$$

$|nt-j|\le a$ koşulunu sağlayan t noktalarında

$$\left|f(t)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\le L\left|t-\frac{j}{n}\right|^{\alpha}=\frac{L}{n^{\alpha}}|nt-j|^{\alpha}\le\frac{La^{\alpha}}{n^{\alpha}}$$

olduğundan (4.3.2)'deki birinci toplam

$$\sum_{|nt-j|\le a}\left|f(t)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j}\le\frac{La^{\alpha}}{n^{\alpha}}\sum_{|nt-j|\le a}\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j}\le\frac{La^{\alpha}}{n^{\alpha}} \tag{4.3.3}$$

biçiminde hesaplanır. Ayrıca, $[0,1]$ aralığında $|f(t)|\le M$ ve 4.3.1.Lemma'dan (4.3.2)'deki ikinci toplam

$$\sum_{|nt-j|>a}\left|f(t)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}t^{j}(1-t)^{n-j}\leq 2MP\left(|J-nt|\geq a\right)\leq 4Me^{\frac{-2a^2}{n}} \qquad (4.3.4)$$

sağlar.

$$\left|f(t)-B_n(f;t)\right|\leq L\frac{a^{\alpha}}{n^{\alpha}}+4Me^{\frac{-2a^2}{n}} \qquad (4.3.5)$$

dır. (4.3.5)'de $a=\frac{1}{2}\sqrt{n\alpha\ln(n+1)}$ olarak seçilirse

$$\left|f(t)-B_n(f;t)\right|\leq K\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)^{\alpha/2}$$

olduğu ispatlanmış olur.

Adım 2:

$H:[a,b]\to[0,1]$ fonksiyonu $H(x)=\frac{1}{b-a}(x-a)$ biçiminde tanımlansın. H birebir, örten bir fonksiyon olduğundan $H([a,b])=[0,1]$ dır.

$F:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ise $F(x):=\left(f\circ H^{-1}\right)(x)$ biçiminde tanımlansın.

$H^{-1}(x)=x(b-a)+a:[0,1]\to[a,b]$ olmak üzere:

$$\left|F(x)-F(y)\right|=\left|f\circ H^{-1}(x)-f\circ H^{-1}(y)\right|=$$

$$=\left|f\left(x(b-a)+a\right)-f\left(y(b-a)+a\right)\right|\leq$$

$$\leq L\left|(x-y)(b-a)\right|^{\alpha}\leq L|b-a|^{\alpha}|x-y|^{\alpha} \qquad (4.3.6)$$

(4.3.6) eşitsizliği F fonksiyonunun Lipschitz fonksiyonu olduğunu gösterir. F fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ve $f=F\circ H$ dır. Böylece Adım 1'den her bir $n\in\mathbb{N}$ için $B_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ polinomu ve K sabiti vardır öyle ki, $y\in[0,1]$ için

$$\left|F(y)-B_n(y)\right|\leq K\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)^{\alpha/2}$$

dır.

$\overline{B}_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ polinomu $\overline{B}_n(x)=B_n\circ H(x)$ biçiminde tanımlansın.

$H([a,b])=[0,1]$ olduğundan dolayı $\overline{B}_n$ iyi tanımlıdır ve

$$\left|f(x)-\overline{B}_n(x)\right|=\left|F\circ H(x)-B_n\circ H(x)\right|=$$

$$=\left|F\left(H\left(x\right)\right)-B_n\left(H\left(x\right)\right)\right|\le K\left(\frac{\ln\left(n+1\right)}{n}\right)^{\alpha/2}$$

sağlanır. Bu ise (4.3.1)'nin ispatıdır.

4.4. MONOTON FONKSİYONLARA BERNSTEIN POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIMIN NOKTAYA BAĞIMLILIĞI

f fonksiyonu $\left[0,1\right]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\|f\|_L := \int_0^1 |f(x)|dx$ olsun. Ayrıca $\|f\|_C := \sup\left\{\left|f\left(x\right)\right| : x\in\left[0,1\right]\right\}$ işaretlemesi yapılıp, bu sayıya $f\left(x\right)$ fonksiyonunun $C-$normu denilecektir.

4.4.1. Lemma

f fonksiyonu $\left[0,1\right]$ aralığında monoton bir fonksiyon ve $K>0$ olmak üzere

$$\|f\|_C \le \frac{K}{\min\left\{x,1-x\right\}}\|f\|_L \tag{4.4.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Kabul edelim ki, $f(x)$ fonksiyonu $\left[0,1\right]$ aralığında azalmayan olsun. O halde, her bir $x,y\in\left[0,1\right]$, $x\le y$ için $f(x)\le f(y)$ dır. Burada x sabit tutulup y'ye göre önce $\left[0,x\right]$ aralığında sonra $\left[x,1\right]$ aralığında integral alınırsa, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$xf(x)\le\int_0^x f(y)dy \text{ ve } (1-x)f(x)\le\int_x^1 f(y)dy \tag{4.4.2}$$

elde edilir.

(4.4.2)'deki eşitsizliklerinin mutlak değeri alınır ve sağ taraftaki integraller $\left[0,1\right]$ aralığına genişletilirse

$$x\left|f(x)\right|\le\int_0^1\left|f(y)\right|dy \text{ ve } (1-x)\left|f(x)\right|\le\int_0^1\left|f(y)\right|dy \tag{4.4.3}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece; (4.4.3)'ten

$$\left|f(x)\right| \le \frac{K}{\min\{x,1-x\}} \int_0^1 \left|f(x)\right| dx$$

bulunur. $x \in [0,1]$ keyfi olduğundan (4.4.1) eşitsizliği elde edilir.

Eğer, $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artmayan ise yukarıdaki ispat yöntemi izlenerek aynı sonuç elde edilir.

4.4.2.Teorem

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında azalmayan fonksiyon ise,

$$\left\|B_n(f;x)\right\|_C \le \frac{K}{\min\{x,1-x\}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{4.4.4}$$

dır.

İspat

$$\left\|B_n(f;x)\right\|_L \le \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| dx \le$$

$$\le \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} dx \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \int_0^1 \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| dx \le$$

$$\le \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \le \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

eşitsizliği bulunur.

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında azalmayan olduğundan $B_n(f;x)$ Bernstein polinomu da azalmayan fonksiyondur. **4.4.1.Lemma** ve (3.3.1)'den yararlanarak

4.4.3.Teorem

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında azalmayan ise,

$$\left\|B_n(f;x) - f(x)\right\|_C \le \frac{K}{\min\{x,1-x\}} \cdot \frac{1}{n} \tag{4.4.5}$$

dır.

İspat

f sınırlı fonksiyon olduğundan $\exists M > 0$ öyle ki her $0 \le u \le 1$ için $\left| f(u) \right| \le M$ ve x_0 süreklilik noktası ise her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ bulunur öyle ki $\left| x - x' \right| < \delta$ şartını sağlayan x noktaları için $\left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon$ olur.

(3.3.1)'den yararlanarak

$$\begin{aligned}
\left\| B_n(f;x) - f(x) \right\|_L &= \int_0^1 \left| B_n(f;x) - f(x) \right| dx = \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} p_{nk}(x) \right| dx = \\
&\le \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| p_{nk}(x)\, dx \\
&\le \int_0^1 \left\{ \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \right\} p_{nk}(x)\, dx \\
&\le \int_0^1 (\varepsilon + 2M)\, p_{nk}(x)\, dx \\
&\le (\varepsilon + 2M) \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ seçilirse C bir sabit olmak üzere

$$\left\| B_n(f;x) - f(x) \right\|_L \le C \cdot \frac{1}{n+1} \tag{4.4.6}$$

dır. (4.4.6) eşitsizliği 4.4.1 Lemma'da yerine yazılırsa (4.4.5) elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde ele alınan problem ile ilgili sonuçlar, Bulgular ve Tartışma bölümünde

4.1. Bernstein Polinomları,

4.2. Bernstein Polinomlarının Genelleştirilmesi,

4.3. Lipschitz Fonksiyonlarına Bernstein Polinomlarıyla Yaklaşım,

4.4. Monoton Fonksiyonlara Bernstein Polinomları ile Yaklaşımın Noktaya Bağımlılığı, başlıkları altında toplanmıştır.

1) 4.1.2.Teorem'de; $[0,1]$ aralığında sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna $B_n(f;x)$ Bernstein polinomuyla düzgün olarak yaklaşılabileceği gösterildi.

2) 4.1.7.Teorem'de; sürekli $f(x)$ fonksiyonuna $B_n(f;x)$ polinomu ile yaklaşım hızı fonksiyonun $\omega(\delta)$ süreklilik modülüyle ifade edildi.

3) 4.1.8.Teorem'de; $\omega_1(\delta)$, $f'(x)$ fonksiyonunun süreklilik modülü olmak üzere, $f(x)\in C^1[0,1]$ fonksiyonuna $B_n(f;x)$ polinomuyla yaklaşım hızı $\omega_1(\delta)$ ile ifade edildi.

4) 4.1.11.Teorem'de; $f(x)\in C^p[0,1]$ olmak üzere $[0,1]$ aralığında $B_n^{(p)}(f;x)$ polinomuyla $f^{(p)}(x)$'e düzgün olarak yaklaşılabileceği gösterildi.

5) **4.1.16.Teorem**'de; $[0,1]$ aralığında sınırlı f fonksiyonuna, $x \in [0,1]$ süreksizlik noktalarında $B_n(f;x)$ ile yaklaşım değerlendirildi.

6) **4.3.2.Teorem**'de; $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonuna $B_n(f;x)$ Bernstein polinomuyla yaklaşım hızı değerlendirilmiştir.

7) **4.4.3.Teorem**'de; $[0,1]$ aralığında azalmayan $f(x)$ fonksiyonuna $B_n(f;x)$ polinomuyla $C-$normunda yaklaşım $L-$normunda yaklaşımdan yararlanılarak verilmiştir. Ayrıca yaklaşım hızı $x \in (0,1)$ noktasına bağlı olarak ifade edilmiştir.

5.2.ÖNERİLER

1) **4.4.1.Lemma**'da verilen eşitsizlik f sınırlı salınımlı bir fonksiyon olduğunda sağlanır mı?

2) $\|f\|_C$ normu ile $\|f\|_{L_p}$, $p>1$ normu arasında **4.4.1.Lemma** anlamındaki bağıntı nedir?

3) $B_n(f;x)$ Bernstein polinomunun $f(x)$ fonksiyonuna $C-$normunda yaklaşımı hızı L_p normu yardımıyla bulunabilir mi?

KAYNAKLAR

[1] Bernstein, S. “Demonstration du theoreme de Weierstrass,fondee sur le calcul des probabilites”,Commun.Soc.Math.Kharkow(2),**13:1-2,**(1912-13)

[2] Voronowskaja, E. “Determination de la forme asymplotique d’approximation des fonctions par les polynomes de M.Bernstein”,C.R.Acad.Sci.URSS,79-85,(1932)

[3] Popoviciu, T. “Sur I’approximation des fonctions convexes d’ordre superieur”,Mathematica(Cluj),**10:49-54**,(1935)

[4] Chlodovsky, I. “Sur le developpment des fonctions definies dans un interval infini en series de polynomes de M.S.Bernstein”,Compositio Math.,**4:380-393**(1937)

[5] Herzog, F., Hill, J.D. “The Bernstein polynomials for discontinuous functions”,Amer.J.Math.,**68:109-124**,(1946)

[6] Hildebrandt, T.H., Schoenberg, I.J. “On linear functional operations and the moment problem”,Ann. Of Math.(2),**34:317-328**,(1933)

[7] Kac, M. “Une remarque sur les polynomes de M.S.Bernstein”,Studia Math., **7**,49-51,(1938)

[8] Kac, M. “Une remarque sur les polynomes de M.S.Bernstein”,Studia Math., 8,170,(1939)

[9] Cheng, F. “On the rate of convergence of Bernstein polynomials of functions of bounded variation”,J.Approx. Theory, **39:259-274**,(1983)

[10] Guo, S., Khan, M.K. “On the rate of convergence of some operators on functions of bounded variation”,J.Approx. Theory, **58:90-101**,(1989)

[11] Pych-Taberska, P. “On the rate of pointwise convergence of Bernstein and Kantorovich polynomials”,Funct. Approx. Comment. Math., **16: 63-76**,(1988)

[12] Pych-Taberska, P. “On the rate of convergence of the Feller operators”,Ann. Soc. Math. Polon. Ser. I Comment. Math. Prace Mat. **31:147-156**,(1991)

[13] Pych-Taberska, P. “Rate of pointwise convergence of Bernstein polynomials for some absolutely continuous functions”, J. Math. Anal. Appl. **212**,9-19s., (1997)

[14] Neammanee, K. “Approximation of Lipschitz functions on $\mathbb{R}^N$ by Bernstein polynomials”,ScienceAsia **27 :63-66**,(2001)

[15] Essen, C.G. “Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen”, Numer. Math. **2:206-213**,(1960)

[16] Sikkema, P.C. “Der wert einiger konstanten in der theori der approximation mit Bernstein-polynomen”, Numer. Math. **3:107-116**,(1971)

[17] Berens, H., Lorentz, G.G. “Inverse theorems for Bernstein polynomials”, Indiana University Math. J. **21:693-708**,(1972)

[18] Becker, M., Nessel, R.J. “A global approximation theorem for Meyer-König and Zeller operators”, Math. Z. **160:195-206**,(1978)

[19] Totik, V. “Approximation by Meyer-König and Zeller-type operators”, Math. Z. **182: 425-446**,(1983)

[20] Totik, V. “Uniform approximation by Szasz-Mirakjan type operators”, Acta Math. Hungar. **41: 291-307**,(1983)

[21] Balcı, M. “Matematik Analiz”, Ertem Matbaası, 420s., (1984)

[22] Thomas, G.B., Finney, R.L. “Calculus and Analytic Geometry”, Addison-Wesley Publishing Company, 1142s., (1984)

[23] Davis, P.J. “Interpolation and Approximation”, Blaisdell Publishing Company, 393s., (1963)

[24] Kızmaz, H. “Fonksiyonel Analize Giriş”, Karadeniz Teknik Ünv. Basımevi, Trabzon, 322s., (1993)

[25] Dzjadyk, V.K. “Introduction in Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials”, Nauka, Moscow, 511s., (1977)

[26] Shevchuk, I.A. "Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a segment", Naukova Dymka, Kiev, 324s., (1992)

[27] Weierstrass, K. "Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen", Sitzungsberichete der Akademie zu Berlin, 633-639, (1885)

[28] Balcı, M. "Reel Analiz", Ertem Matbaası, 141s., (1998)

[29] Lorentz, G.G. "Bernstein Polynomials", Chelsea Publishing Company,New York,134s.,(1986)

[30] Butzer, P.L. "Linear combinations of Bernstein polynomials", Can. J. Math., **5 :559-567**,(1953),

[31] Essen, C.G. "Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen", Numer. Math. **2: 206-213,**(1960)

[32] Feinerman, R.P., Newman, D.J. "Polynomial Approximation", WavelyPres,148s., (1974)

[33] Chlodovsky, I. "Une remarque sur la representation des fonctions continues par les polynomes a coefficients entiers", Mat. Sbornik, **32: 472-475**,(1925)

[34] Lebesgue, H. "Sur I'approximation des fonctions", Bull. Soc. Math. France, 22 , 278-287,(1908)

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İskenderun'da doğdum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi aynı şehirde tamamladım. 1997 yılında girdiğim Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2001 yılında mezun oldum. 2001 yılında özel bir dershanede çalıştıktan sonra 2002 yılında M.E.B. bağlı bir okula Matematik öğretmeni olarak atandım. 2003 yılında girdiğim Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Yüksek Lisans öğrenimi görmekteyim.