YAKLAŞIM TEORİSİNDE DÜZ PROBLEMLER

MİNE AKBAŞ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN-2007

YAKLAŞIM TEORİSİNDE DÜZ PROBLEMLER

MİNE AKBAŞ

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
Haziran-2007

ÖZ

$G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $f : G \to \mathbb{C}$ belli özelliklere sahip bir fonksiyon olsun. G bölgesinde tanımlı $h(z)$ ağırlık fonksiyonu ve bu ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ polinomlar sistemi verilsin. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için bu fonksiyonun Fourier katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_n := \iint_G h(z) f(z) \overline{K_n(z)}\, d\sigma_z$$

Böylece verilmiş $f(z)$ fonksiyonuna bu fonksiyonun Fourier serisi karşılık getirebilir:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n K_n(z)$$

$\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonal polinomlar sistemi tam ise bu fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamı

$$S_n(f,z) := \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z)$$

olmak üzere, $\forall z \in G$ için

$$\varepsilon_n(z) := \left| f(z) - S_n(f,z) \right| \to 0\,, \quad n \to \infty$$

olur. Bu çalışmanın amacı G bölgesine ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonun özelliklerine bağlı olarak $\varepsilon_n(z)$'nin sıfıra gitme hızını G bölgesinde belirlemektir. Ayrıca

$$\varepsilon_n := \max_{z \in \overline{G}} \left| \varepsilon_n(z) \right|$$

şeklinde tanımlanırsa ele alınan G bölgesinin kapanışında ε_n'nin sıfıra gitme hızını saptamaktır. Böylece "Hangi bölgelerde ve hangi fonksiyon sınıflarında bu fonksiyonların Fourier serileriyle yaklaşım mümkündür?" sorusuna cevap bulmaktır.

Anahtar Kelimeler: Yarıkonform Dönüşümler, Ortogonal Polinomlar, Fourier Serileri

ABSTRACT

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a finite region and $f : G \subset \mathbb{C}$ be a function, which has certain properties. The weight function, $h(z)$, is defined on the region G. The polynomials $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ are orthogonal over the region G with respect to weight function $h(z)$. For each $n \in \mathbb{N}$, Fourier coefficients of this function are defined as follows:

$$a_n := \iint_G h(z) f(z) \overline{K_n(z)}\, d\sigma_z$$

So, any given function $f(z)$ can be associated with a class of Fourier series in the orthogonal polynomials:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n K_n(z)$$

Let the system of orthogonal polynomials $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ be complete. If $\{S_n(f,z)\}$ is the partial sum of $f(z)$ and it is defined as following;

$$S_n(f,z) := \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z),$$

in this case, for $\forall z \in G$, $\varepsilon_n(z) := \left| f(z) - S_n(f,z) \right|$ goes to zero.

The aim of this study is to determine the rate at which $\varepsilon_n(z)$ goes to zero over the region G depending on both the properties of the region G and weight function $h(z)$. Additionally, to find out the rate at which ε_n goes to zero when calculated on the closure of the region G. These efforts are made toward responding the question "Which regions and the class of the functions do these approximations possible?".

Key Words: Quasiconformal Mappings, Orthogonal Polynomials, Fourier Series.

TEŞEKKÜR

İlk olarak akademik hayatımda en baştan beri bana destek olan ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgisini ve deneyimlerini üstün bir sabırla benimle paylaşan danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. FahreddinAbdullayev'e içten teşekkür ederim.

Matematik bölümümüzdeki çalışmalarımız boyunca, gerekli olan her durumda yardımlarını esirgemeyen Bölüm Başkanımız Prof. Dr. Hüsnü Kızmaz'a teşekkürü bir borç bilirim. Çalışmalarım sırasında çok değerli yardımlarını gördüğüm başta Yard. Doç. Dr. Mehmet Küçükaslan olmak üzere tüm saygıdeğer bölüm hocalarıma ve değerli araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$:=$	Tanım olarak eşittir
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$
$\mathbb{D}$	Birim daire
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
∂G	G bölgesinin sınırı
CG	G bölgesinin tümleyeni
$int L$	L eğrisinin içi
$ext L$	L eğrisinin dışı
Ω	$ext\overline{G}$
Δ	$ext\mathbb{D}$
$U_\delta(z_0)$	$\{z : \lvert z-z_0\rvert<\delta\}$, (z_0 noktasının δ komşuluğu)
$d(z,M)$	$z\in\mathbb{C}$ noktasının M kümesine uzaklığı
$mesM$	M bölgesinin k-boyutlu Lebesque ölçüsü
$a\preceq b$	$a\le cb$; c , a ve b 'den bağımsız bir sabit
$a\asymp b$	$c_1 b\le a\le c_2 b$, c_1 ve c_2 a ve b 'den bağımsız birer sabit
$d\sigma_z$	$=dxdy,\ z=x+iy$
C^1	Kendisi ve türevi sürekli olan fonksiyonların kümesi
$\omega(f,\cdot)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$C(M)$	$\{f :\ f:M\to\mathbb{R}$ ve M kümesinde süreklidir $\}$
$A(M)$	M kümesinde analitik fonksiyonların sınıfı
$A(\overline{M})$	$\{f :\ f\in A(M)\cap C(M)\}$

$L_p(G)$	$\left\{ f : f, G\text{'de Lebesque ölçülebilir ve} \iint_G \lvert f(z) \rvert^p d\sigma_z < \infty \right\},\ p > 0$
$A_p(\overline{G})$	$\{ f : f \in A(G) \cap L_p(G) \},\ p > 0$

1. GİRİŞ

Fonksiyonları belirli özelliklerine göre sınıflara ayırarak bu sınıftan alınan herhangi bir fonksiyona daha basit ve daha kolay hesaplanan fonksiyonlar yardımıyla (polinomlarla, rasyonel kesirlerle, sonsuz kesirler, v.s.) yaklaşımın mümkün olup olmadığı Yaklaşım Teorisinde Düz Teoremler olarak adlandırılır. Bu teoremler Yaklaşım Teorisinde önemli bir yere sahiptir. Sahip oldukları özellikler nedeniyle cebirsel ve trigonometrik polinomlar bu alanda yapılan çalışmalarda önemli bir yer edinmiştir. Teorinin temeli Tschebyscheff tarafından atılmıştır. Daha sonra Weierstrass, reel sayıların sonlu kompak bir alt kümesi üzerinde sürekli keyfi bir f fonksiyonuna yeterince küçük yaklaşım hatasıyla yaklaşılabileceğini göstermiştir. Yani $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ve $f\in C[a,b]$ ise verilen keyfi bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\exists P_n$ polinomu vardır ve $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|<\varepsilon \tag{1.1}$$

sağlanır [1]. Weierstrass'dan sonra Jackson, Bernstein, Timan, v.b. matematikçiler tarafından reel eksende bu çalışmalar devam etmiştir.

Kompleks düzlemde ise (1.1) değerlendirmesine benzer değerlendirme ilk olarak Carl Runge tarafından elde edilmiştir ve Lavrentiev, Keldysh, Mergelyan tarafından devam ettirilmiştir. Yaklaşan polinomların inşa edilmesi ve onların kesin olarak belirlenmesi bu teoride önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle yaklaşan polinomlar olarak verilmiş bir bölge veya eğri üzere ortogonal olan polinomlardan oluşan Fourier serilerinden oluşturulan polinomlar ele alınmaktadır. Daha sonraki çalışmalarda iki konu üzerinde yoğunlaşmalar dikkati çekmektedir: Ele alınan fonksiyon sınıflarının temsilcilerine çeşitli Fourier serileri yardımıyla yaklaşımın mümkün olup olmadığı ve bu yaklaşımın hızının hesaplanması

$G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f:G\to\mathbb{C}$ belirli özelliklere sahip bir fonksiyon olsun. $h(z)$, G bölgesinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere bu ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan polinomlar sistemi $\left\{K_n(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ ise $\forall n\in\mathbb{N}$ için her bir f fonksiyonunun Fourier katsayıları

$$a_n := \langle f, K_n \rangle = \iint_G f(z)\overline{K_n(z)}\,d\sigma_z \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece bu şekilde ele alınmış f fonksiyonuna o fonksiyonunun Fourier serisi karşılık getirilebilir.

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n K_n(z) \tag{1.3}$$

Eğer $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonal polinomlar sistemi tam ise f fonksiyonun Fourier serisi fonksiyonun kendisine yakınsak olacaktır. Yani f fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamı

$$S_n(f, z) := \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z) \tag{1.4}$$

şeklinde ve yaklaşım hatası

$$\varepsilon_n(z) := \left| f(z) - S_n(f, z) \right| \tag{1.5}$$

olmak üzere $\forall z \in G$ için

$$\varepsilon_n(z) \to 0, \quad n \to \infty \tag{1.6}$$

olur.

Bu çalışmada yarıkonform ve düzgün eğrilerle sınırlı kompleks düzlemin sonlu bölgelerinde $\varepsilon_n(z)$'nin sıfıra gitme hızı ve bu bölgelerin kapanışında

$$\varepsilon_n := \max_{z \in \overline{G}} \left| \varepsilon_n(z) \right| \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlanırsa ε_n'nin sıfıra gitme hızı incelenmiştir. Böylece (1.6) ve (1.7) problemlerinin çözümü "Kompleks düzlemin hangi bölgelerinde ve hangi fonksiyon sınıflarında fonksiyonun Fourier serisi yardımıyla yeterince küçük yaklaşım hatasıyla yaklaşım mümkündür?" sorusuna cevap bulunmuştur.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yaklaşım Teorisi matematiğin önemli alanlarından biri olan analizde geniş bir uygulamaya sahiptir ve daha "basit", daha "kolay" hesaplanan fonksiyonlar yardımıyla diğer fonksiyonlara yaklaşımın mümkün olup olmadığı ve yaklaşımın mümkün olması durumunda bu yaklaşımın hızı ile ilgilenir. Bu teorinin temelleri 19. yüzyılın matematikçileri tarafından atılmıştır.

19. yüzyılın başlarında esas itibariyle fonksiyonlar çok kesin formüller, seriler veya denklemlerin çözümü olarak görülüyordu. Ancak Dirichlet'in bulgularının ve Fourier'in iddialarının sonucunda fonksiyonların sahip olduğu temel özelliklerin göz önüne alındığı modern fonksiyon kavramı ileri sürüldü ve bu kavram geniş ölçüde kabul gördü. Bazı fonksiyonların daha özel olarak sürekli fonksiyonların sahip olduğu özelliklerin incelenmesiyle Yaklaşım Teorisinin ortaya çıkışı ve daha sonrasında bu teorinin gelişmesi kaçınılmaz oldu.

Bu dönemde yapılan çalışmalar, fonksiyon üzerine bazı koşullar konularak bu fonksiyonların Fourier serisinin L^2 anlamında noktasal veya düzgün yakınsadığını ortaya çıkardı. Böylece Fourier Serilerinin teorisinde yaklaşım teorisinin ilk sonuçları elde edilmiş oldu. Benzer sonuçlar diğer ortogonal seriler ve analitik fonksiyonların kuvvet serileri için de geliştirildi. Ancak elde edilen sonuçlar oldukça özel durumlar için geçerli olup sınırlıydı. Bunun yanı sıra Fourier serileri teorisi, trigonometrik fonksiyonların yaklaşım için kullanılıp kullanılamayacağı veya fonksiyonun Fourier katsayıları yardımıyla elde edilen bilgilerin yaklaşımı sağlamak için yeterli olup olamayacağı sorusuna yanıt bulamadı.

Yaklaşım Teorisi temelde "Hangi durumlarda yaklaşım mümkündür?, Hangi durumlarda hangi fonksiyon sınıflarında en iyi yaklaşım yapılabilir?" sorularına yanıt aramıştır. Burada en iyi yaklaşım ile anlatılmak istenen en küçük hata ile yaklaşımın yapılmasıdır.

Fonksiyonları belli özelliklerine göre sınıflara ayırarak tüm sınıf temsilcilerine aynı yaklaşım aracıyla yaklaşımın mümkün olup olmadığı ve bu yaklaşımın en küçük hata ile yapılıp yapılamayacağının incelenmesi Yaklaşım Teorisinde Düz Problemler olarak kabul edilir. Bu problem incelenirken belirli fonksiyon sınıfları ve belirli normlu uzaylar üzerinde çalışılmıştır ve bu çalışmalarda sahip oldukları özellikler nedeniyle cebirsel ve trigonometrik polinomlar önemli bir yer tutmuştur. Teorinin temeli Tschebyscheff (1854) tarafından atılmıştır. Daha sonra Alman matematikçi Karl Wilhelm Theodor Weierstrass'ın sonucu (1885) Yaklaşım Teorisinde önemli bir yer edinmiştir. Bu çalışmada Weierstrass, reel sayılarının sonlu kapalı bir alt kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlara cebirsel polinomlarla yeterince küçük hatayla yaklaşımın mümkün olduğunu ispatlamıştır. Yani $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $f\in C[a,b]$ ise verilen keyfi bir $\varepsilon>0$ için derecesi n'yi aşmayan $\exists P_n$ cebirsel polinomu vardır ve $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|<\varepsilon \tag{2.1}$$

olur [1]. Daha sonraki yıllarda, Jackson, Bernstein, Timan, v.b. matematikçiler tarafından reel eksende bu çalışmalar devam ettirilmiştir.

Kompleks düzlemde (2.1) değerlendirmesine benzer bir değerlendirme Alman matematikçi Carl Runge (1885) tarafından elde edilmiştir. Literatürde Runge Yaklaşım Teoremi olarak da bilinen bu teoremi şu şekilde ifade edebiliriz:

$G\subset\mathbb{C}$, tümleyeni basit bağlantılı olan sonlu bir bölge ve $f(z)$ $\overline{G}$'da analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda verilen keyfi bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\exists P_n(z)$ polinomu vardır ve $\forall z\in\overline{G}$ için

$$\left|f(z)-P_n(z)\right|<\varepsilon \tag{2.2}$$

sağlanır [2].

J. Walsh (1926), G bölgesinin Jordan eğrisiyle sınırlı basit bağlantılı bir bölge, $f(z)$ fonksiyonun bu bölgede analitik ve $L=\partial G$ eğrisi üzerinde sürekli olması durumunda bu fonksiyona cebirsel polinomlarla yeterince küçük yaklaşım hatasıyla yaklaşılabileceğini ispatlamıştır [2]. Böylece J.Walsh, Runge Yaklaşım Teoremi'nde verilen L eğrisi üzerinde fonksiyonun analitik olması koşulunu hafifletmiştir. M. V. Keldysh (1945) ise kompleks değişkenli sürekli fonksiyonlara kompleks düzlemin kapalı bölgelerinde yaklaşım problemini tam olarak çözmüştür [2].

Keldysh ve Lavrentiev'nin çalışmalarından sonra S. N. Mergelyan (1951) kompleks düzlemin hangi kümeleri üzerinde (2.2) değerlendirmesinin sağlandığını aşağıda verilen teoremde göstermiştir:

$f(z)$ fonksiyonu kapalı ve sonlu $M\subset\mathbb{C}$ kümesinde sürekli, M kümesinin iç noktalarında analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonuna polinomlarla keyfi olarak yaklaşılabilmesi için gerek ve yeter koşul M kümesinin düzlemi bölmemesidir.

Böylece M sınırlı, kapalı ve düzlemi bölmeyen bir küme, $f(z)$ M üzerinde sürekli, M 'nin iç noktalarında analitik bir fonksiyon ise

$$E_n(f,M)=\inf_{P_n\in\wp}\max_{z\in M}\left|f(z)-P_n(z)\right|$$

olmak üzere Mergelyan Teorem'ine göre

$$\lim_{n\to\infty}E_n(f,M)=0$$

olur [2].

Yapılan bu çalışmaların yanı sıra kompleks düzlemin yarıkonform eğrileriyle sınırlı sonlu bölgelerinde Yaklaşım Teorisinin düz teoremlerine örnek olarak V.I.Belyi'nin aşağıdaki teoremi verilebilir:

$G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $L=\partial G$ K-yarıkonform eğri ve $f\in A(\overline{G})$ olsun. Bu durumda her bir $n\in\mathbb{N}$ için derecesi n'yi aşmayan cebirsel bir $P_n(z)$ polinomu vardır ve $\forall z\in L$ için

$$\left|f(z)-P_n(z)\right|\le M\omega\left(d\left(z,L_{1+1/n}\right)\right)$$

sağlanır. Burada $M>0$ sabiti z ve n'den bağımsız olup, $\omega(t)=\omega(f,t)$ $\overline{G}$'da $f(z)$ fonksiyonunun süreklilik modülüdür [3].

Belirtelim ki yaklaşım teorisinde düz teoremlerin esas problemlerinden birisi de verilmiş fonksiyonu belli bir integral gösterimi yardımıyla ifade etmektir. Bu integral gösterimi olarak genellikle Cauchy İntegral gösterimi veya buna benzer integral gösterimleri ele alınmaktadır. O halde temel problem Cauchy çekirdek fonksiyonuna yaklaşan polinomun bulunması veya inşası problemine indirgenir. Çoğu zaman yaklaşan polinomun varlığı kabul edilerek polinomun inşası yapılmamaktadır. Ancak birçok uygulamalı alanda bu polinomların inşası da istenmektedir. Bu amaçla ortogonal polinomlar kullanılmaktadır.

Ortogonal polinomlarla düz teoremlerin ifade edilmesi büyük ölçüde XX. yüzyılın başlarına rastlamaktadır. Bu alanda özellikle G. Szegö [4], Geronimus [5], P.P. Korovokin [6], T. Carleman [7], P.C. Rosembloom ve S.E. Warshawski [8], P.K. Suetin [9], F.G. Abdullayev ve V.V. Andrievskii [10], D.Gaier [11], F.G. Abdullayev [12], v.b. matematikçilerin yaptıkları çalışmalar dikkat çekicidir. Bu çalışmalarda ele alınan fonksiyon sınıflarının sınıf temsilcilerinin ortogonal polinomlar ve ağırlık fonksiyonlu ortogonal polinomlara göre Fourier serisinin, foksiyonun kendisine yakınsak olması için gerek ve yeter koşullar araştırılmış ve kompleks düzlemin sonlu bölgeleri ile bu bölgelerin kapanışında bu yakınsaklığın hızı incelenmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

3.1.1. Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar

3.1.1.1. Tanım: $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $\delta > 0$ olmak üzere

$$U_\delta(z_0) := \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

kümesine z_0 noktasının δ komşuluğu denir.

3.1.1.2. Tanım: S kompleks düzlemde bir küme ve $z_0 \in S$ olsun. z_0 noktasının $U_\delta(z_0) \subset S$ olacak şekilde en az bir komşuluğu varsa z_0 noktasına S kümesinin **iç noktası** denir.

S kümesinin her bir noktası iç nokta ise S 'e **açık küme** denir [13].

3.1.1.3. Tanım: S kompleks düzlemde açık bir küme olsun. Eğer S kümesinin keyfi iki z_1, z_2 nokta çifti, S kümesi içinde kalacak şekilde bir eğri ile birleştirilebilirse S **'e bağlantılı küme** denir [14].

3.1.1.4. Tanım: Kompleks düzlemin açık ve bağlantılı kümesine **bölge** denir.

$G \subset \mathbb{C}$ bölgesinin sınırı ∂G ile gösterilir.

$\overline{G} := G \cup \partial G$ kümesine G bölgesinin **kapanışı** denir [14].

3.1.1.5. Tanım: $G \subset \mathbb{C}$ olsun. $G \to \mathbb{C}$ tanımlı herhangi bir f fonksiyonuna kompleks değişkenli, kompleks değerli fonksiyon veya kısaca **kompleks değişkenli fonksiyon** denir. $\forall z \in G$ için $f(z) = w \in \mathbb{C}$ olduğundan

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade kompleks değişkenli her fonksiyonun reel değişkenli ve reel değerli iki fonksiyon yardımıyla tanımlanabileceğini gösterir.

3.1.1.6. Tanım: $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının delinmiş belli bir komşuluğunda tanımlı ve $L \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists \delta > 0$ sayısı bulanabilir ve $0 < |z - z_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan tüm z değerleri için $|f(z) - L| < \varepsilon$ sağlanırsa z, z_0' a giderken $f(z)$ fonksiyonunun limiti L'dir denir ve bu limit

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

şeklinde yazılır [13].

3.1.1.7. Tanım: $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in G$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

eşitliği sağlanırsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında **süreklidir** denir [14].

$f(z)$ fonksiyonu $\forall z \in G$ noktasında sürekli ise bu fonksiyona G bölgesinde süreklidir denir.

3.1.1.8. Tanım: $f : G \to \mathbb{C}$ olsun. $\alpha \in [0, 2\pi)$ sayısı için,

$$\partial_\alpha f(z_0) := \lim_{r \to 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\alpha}) - f(z_0)}{re^{i\alpha}}$$

limiti var ve sonlu ise $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında α**-yönlü türevlenebilirdir** denir [3].

Eğer $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında her $\alpha \in [0, 2\pi)$ için α yönlü tüm türevleri var ve bu türevler birbirine eşit ise $f(z)$'ye z_0 noktasında **türevlenebilirdir** denir. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu G bölgesinin her noktasında türevlenebilirse $f(z)$'ye G bölgesinde **türevlenebilirdir** denir.

Özel olarak $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ şeklinde ise bu fonksiyonun $z\in\mathbb{C}$ noktasındaki türevi

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$$

şeklinde hesaplanır.

3.1.1.1. Teorem: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonu $z=x+iy\in\mathbb{C}$ noktasının belli bir $U_\delta(z)$ komşuluğunda tanımlı; u ve v fonksiyonları (x,y) noktasında sürekli ve birinci mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun. Eğer (x,y) noktasında u ve v fonksiyonları için

$$u_x=v_y\,,\ v_x=-u_y \tag{3.1.1.1}$$

denklemleri sağlanırsa $f(z)$ fonksiyonu z noktasında türevlenebilirdir [13]

(3.1.1.1) denklemlerine **Cauchy Riemann Denklemleri** denir.

3.1.1.9. Tanım: $f:G\to\mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon ve $z_0=x_0+iy_0$ G bölgesinde tespit edilmiş bir nokta ve $f(z)$ fonksiyonunun (x_0,y_0) noktasında $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevleri mevcut ise $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{z_0}$ ve $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)_{z_0}$ kısmi türevleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z_0} &:= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}-i\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}\right)=: f_z(z_0)\\ \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)_{z_0} &:= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}+i\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}\right)=: f_{\bar{z}}(z_0)\end{aligned} \tag{3.1.1.2}$$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ olduğu dikkate alınarak (3.1.1.2) eşitlikleri

$$\begin{aligned}f_z &= \frac{1}{2}\left(u_x+v_y\right)+\frac{i}{2}\left(v_x-u_y\right)\\ f_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(u_x-v_y\right)+\frac{i}{2}\left(v_x+u_y\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır [15].

3.1.1.10. Tanım: $f: G \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon ve $z_0 \in G$ tespit edilmiş bir nokta olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının belli bir $U_\delta(z_0) \subset G$ komşuluğunda türevlenebilirse bu fonksiyona z_0 noktasında **analitiktir** denir [13].

Eğer $f(z)$ fonksiyonu G bölgesinin her noktasında analitik ise bu fonksiyona G 'de analitiktir denir.

G bölgesinde analitik olan fonksiyonların sınıfı $A(G)$ ile G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ 'da sürekli olan fonksiyonların sınıfı ise $A(\overline{G})$ ile gösterilir.

3.1.1.11. Tanım: $S \subset \mathbb{C}$ bir küme ve $f: S \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $\exists M > 0$ sabiti var ve $\forall z_1, z_2 \in S$ için

$$\left| f(z_1) - f(z_2) \right| \le M \left| z_1 - z_2 \right|^\alpha \tag{3.1.1.3}$$

eşitsizliği sağlanırsa $f(z)$ fonksiyonuna α.**'ıncı mertebeden Lipschitz şartını** sağlıyor denir.

S kümesi üzerinde α.'ıncı mertebeden Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı $Lip_\alpha(S)$ şeklinde gösterilir.

Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı aşağıda verilen özelliklere sahiptir:

i) $f \in Lip_\alpha(S)$ ise $f \in C(S)$ dir.

ii) $\alpha_1 < \alpha_2$ ve $f \in Lip_{\alpha_2}(S)$ ise $f \in Lip_{\alpha_1}(S)$ olur.

iii) $f \in Lip_\alpha(S)$ ve $g \in Lip_\alpha(S)$ ise $(f+g) \in Lip_\alpha(S)$ olur.

[16].

3.1.1.12. Tanım: $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge olsun. G bölgesinde analitik, $\overline{G}$ 'da r-kez sürekli türeve sahip ve r. türevi $Lip_\alpha(\overline{G})$ sınıfından olan fonksiyonların kümesi $W^{(r)}H^{(\alpha)}(\overline{G})$ ile gösterilir [9].

3.1.1.13. Tanım: M kümesi üzerinde tanımlı sürekli $f(z)$ fonksiyonu verilsin. $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f) := \sup\left\{\left|f(z_1) - f(z_2)\right| : z_1, z_2 \in M,\ \left|z_1 - z_2\right| < \delta\right\}$$

şeklinde tanımlı değere $f(z)$ fonksiyonunun M kümesi üzerinde süreklilik modülü denir.

3.1.2. Kompleks Düzlemde Eğriler ve Kompleks Değişkenli Fonksiyonların İntegrali

3.1.2.1. Tanım: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ve $z(t):[a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $L := \left\{z(t) : t \in [a,b]\right\}$ kümesine kompleks düzlemde bir **eğri** denir.

$\forall t \in [a,b]$ için $z(t) \in \mathbb{C}$ olduğundan $z(t) = x(t) + iy(t)$ şeklinde yazılabilir.

Yukarıda parametrik denklemi verilen L eğrisi için aşağıdaki tanımları verilebilir:

i) $z(a)$ ve $z(b)$ değerlerine sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

ii) $z(a) = z(b)$ ise bu eğriye **kapalı eğri,** $t_1 \neq t_2$ olacak şekilde $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için $z(t_1) \neq z(t_2)$ ise L eğrisine **Jordan Eğrisi** denir.

L Jordan eğrisi için $z(a) = z(b)$ ise bu eğriye **kapalı Jordan eğrisi** veya kısaca **Jordan eğrisi**, $z(a) \neq z(b)$ ise **açık Jordan eğrisi** veya kısaca **Jordan yayı** denir.

iii) $z(t)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında türevi var ve $\forall t \in [a,b]$ için $z'(t)$ sürekli ise L eğrisine **diferansiyellenebilir eğri** denir.

iv) L Jordan eğrisi diferansiyellenebilir ve $\forall t \in [a,b]$ için $z'(t) \neq 0$ ise bu eğriye **düzgün eğri** denir [14].

3.1.2.2. Tanm: $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $L = \partial G$, sonlu sayıda düzgün $L_1, L_2, ..., L_n$, eğrilerinin birleşiminden oluşan, z_j, $j = 1, ..., n$, birleşim noktalarında dış açı değeri $\lambda_j\pi$ olan bir eğri ve $\lambda = \min_{1\le j\le n}\{\lambda_j\}$ olsun. Bu özelliğe sahip G bölgelerinin sınıfı $C_\theta(\lambda)$ ile gösterilir [12].

3.1.2.3. Tanım: L, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir eğri olsun. Bu aralığın $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ olacak şekilde tüm $P = \{t_0, t_1, t_2, ...t_{n-1}, t_n\}$ parçalanmalarının kümesi $\wp$ ile gösterilsin ve

$$l_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \left| z(t_{k+1}) - z(t_k) \right|$$

olsun. Buna göre

$$\sup\{l_n(P):\ P \in \wp\} < \infty$$

ise L eğrisine **ölçülebilir eğri** (veya **düzlendirilebilir eğri**) denir [17].

3.1.2.4. Tanım: L kompleks düzlemde bir eğri ve $z \in L$ olsun. z noktasının, düzlendirilebilir, bağlantılı bir $\gamma \subset L$ yayını içeren en az bir komşuluğu varsa bu eğriye **yerel düzlendirilebilir eğri** denir [3].

3.1.2.1. Teorem (Jordan Eğri Teoremi): L, $\overline{\mathbb{C}}$'da herhangi bir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda L eğrisi, kompleks düzlemi ortak sınırları L olan iki ayrık bölgeye ayırır: L eğrisinin içi olan sınırlı bölge ve L eğrisinin dışı olan sınırsız bölge [17].

3.1.2.2. Teorem: Parçalı düzgün L eğrisi, $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$ parametrik denklemiyle verilsin ve $f(z)$ fonksiyonu L eğrisi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda $f(z)$, L eğrisi üzerinde integrallenebilirdir ve bu integral

$$\int_L f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \tag{3.1.2.1}$$

şeklinde tanımlanır. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ olduğu dikkate alınırsa (3.1.2.1)

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy$$

şeklinde yazılır. Burada sağda yazılan integraller bilinen eğrisel integrallerdir [13].

3.1.2.5. Tanım: L, $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$ parametrik denklemiyle verilmiş parçalı düzgün bir eğri olsun.

$$mes\,L:=\int_a^b |z'(t)|\,dt=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

şeklinde tanımlanan değere L **eğrisinin uzunluğu** denir [15].

3.1.2.3. Teorem (Cauchy Teoremi): $f(z)$ basit bağlantılı G bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda G 'de bulunan her kapalı parçalı düzgün L eğrisi için

$$\int_L f(z)\,dz=0$$

olur [14].

3.1.2.4. Teorem (Cauchy İntegral Formülü): $f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir G bölgesinde analitik ve L aynı G bölgesinde bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş, kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda $\forall z_0\in \operatorname{int} L$ için,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$$

olur [14].

3.1.2.5. Teorem (Cauchy Türev Formülü): $f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı G bölgesinde analitik ve L aynı G bölgesinde bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş, kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda $\forall z_0\in \operatorname{int} L$ için,

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

dır [13].

3.1.2.6. Teorem (Maksimum Modül Prensibi): $G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve

$f(z)$ fonksiyonu $\overline{G}$ üzerinde sabitten farklı analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$ fonksiyonu maksimum değerini ∂G üzerinde alır [13].

3.1.2.6. Tanım: $u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bir fonksiyon olsun. u fonksiyonu, D bölgesinde bulunan her $\{(x,y):\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ dikdörtgeni dikkate alındığında y'nin bir fonksiyonu olarak hemen hemen tüm $x \in [a,b]$ için $[c,d]$ aralığı üzerinde ve x'in bir fonksiyonu olarak hemen hemen tüm $y \in [c,d]$ için $[a,b]$ üzerinde sürekli ise bu fonksiyona D'de **mutlak sürekli fonksiyon** denir [3].

3.1.2.7. Tanım: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu G bölgesinde tanımlı olsun. u,v fonksiyonları G üzerinde mutlak sürekli ise $f(z)$ fonksiyonuna G bölgesinde mutlak sürekli fonksiyon denir.

G bölgesinde mutlak sürekli fonksiyonların kümesi $ACL(G)$ ile gösterilir [3].

3.1.2.8. Tanım: $f(z)$, G bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

i) f_x, f_y kısmi türevleri G bölgesi üzerinde L^p integrallenebilir, $p \ge 1$.

ii) $f \in ACL(G)$

koşulları sağlanıyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna G bölgesinde L^p türevlerine sahiptir denir [3].

3.1.2.7. Teorem (Kompleks Düzlemde Green Formülü): $f(z)$, G bölgesinde L^1 türevlerine sahip bir fonksiyon olsun. Eğer D, G bölgesinde bulunan düzlendirilebilir sınıra sahip bir bölge ise

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, d\zeta = 2i \iint_D f_{\bar{\zeta}}\, d\sigma_\zeta \qquad (3.1.2.2)$$

sağlanır [3].

3.1.2.8. Teorem (Cauchy-Pompeu Formülü): 3.1.2.7. Teorem'in koşulları altında her bir $z \in D$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{D} \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma_{\zeta} \qquad (3.1.2.3)$$

integral gösterimi geçerlidir [3].

3.1.2.9. Tanım: $G \subseteq \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $f : G \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $z_0 \in G$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün L_1, L_2 eğrilerinin $f(L_1)$ ve $f(L_2)$ görüntü eğrileri $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında **konformdur** denir [18].

3.1.2.9. Teorem: $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasını içeren bir G bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında konformdur [13].

3.1.2.10. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi): $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ sınırında en az iki nokta içeren basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ tespit edilmiş bir nokta olsun. Bu durumda G bölgesini $\mathbb{D} := \{w : |w| < 1\}$ bölgesine resmeden ve

$$\varphi(z_0) = 0 \text{ ve } \varphi'(z_0) > 0$$

koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır[17].

3.1.2.11. Teorem: $G \subset \mathbb{C}$ ve G sınırında en az iki nokta içeren basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu durumda $\Omega := \mathbb{C} - \overline{G}$ bölgesini $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ bölgesine resmeden ve

$$\Phi(\infty) = \infty, \ \Phi'(\infty) > 0$$

koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir konform dönüşüm vardır [17].

İspat: $\xi_0 \in \mathbb{C}$ tespit edilmiş bir nokta olsun. Bu durumda

$$f_1(z) := \xi_0 + \frac{1}{z}$$

dönüşümü, Ω bölgesini ξ_0 noktasını içeren basit bağlantılı G_1 bölgesine konform olarak resmeder. Bu dönüşüm için

$$f_1(\infty) = \xi_0, \; f_1'(\infty) = 0$$

koşulları sağlanır. Diğer taraftan Riemann Dönüşüm Teoremine göre G_1 bölgesini $\mathbb{D}$ bölgesine resmeden ve $\varphi(\xi_0) = 0$, $\varphi'(\xi_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir konform dönüşüm vardır ve $\varphi \circ f_1$ dönüşümü Ω bölgesini $\mathbb{D}$ bölgesine konform olarak resmeder. Böylece

$$\begin{aligned} f_2 &: \mathbb{D} \to \Delta \\ w &\to f_2(w) = \frac{1}{w} \end{aligned}$$

dönüşümü göz önüne alınarak Φ dönüşümü

$$\Phi := f_2 \circ \varphi \circ f_1$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu dönüşüm Ω bölgesini Δ bölgesine konform olarak resmeder ve bu dönüşüm için,

$$\Phi(\infty) = f_2\left(\varphi\left(f_1(\infty)\right)\right) = f_2\left(\varphi(\xi_0)\right) = f_2(0) = \infty \tag{3.1.2.4}$$

$$\Phi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \lim_{\xi\to\xi_0} \frac{\frac{1}{\varphi(\xi)}}{\frac{1}{\xi - \xi_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{\xi\to\xi_0} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)}{\xi - \xi_0}} = \frac{1}{\varphi'(\xi_0)} > 0 \tag{3.1.2.5}$$

koşulları sağlanır.

Bu çalışmada $\Omega := \mathbb{C} - \overline{G}$ bölgesini $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ bölgesine resmeden ve $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm Φ ile, bu konform dönüşümün tersi ise Ψ ile gösterilecektir. Ayrıca G bölgesini $\mathbb{D} := \{w : |w| < 1\}$ bölgesine resmeden ve $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm için φ ve bu dönüşümün tersi için ise ψ gösterimi kullanılacaktır.

3.1.2.10. Tanım: $0 < r < 1 < R < \infty$ olsun.

$$L_r := \{ z \in G : |\varphi(z)| = r \} \text{ ve } L_R := \{ z \in \Omega : |\Phi(z)| = R \}$$

eğrilerine sırasıyla G **bölgesinin iç seviye** ve **dış seviye eğrileri** denir [3].

3.2. NORMLU UZAYLAR VE SINIRLI LİNEER DÖNÜŞÜMLER

3.2.1.Temel Tanımlar

3.2.1.1. Tanım: $X \neq \varnothing$ bir küme ve F bir cisim olsun. X üzerinde

$$\begin{aligned} + : X \times X &\to X \\ (x, y) &\to x + y \end{aligned} \quad \text{ ve } \quad \begin{aligned} \cdot : F \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\to \lambda \cdot x \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar aşağıda verilen koşulları sağlıyorsa X 'e F cismi üzerinde bir **lineer uzay (** veya **vektör uzayı)** denir [19].

$\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in F$ için

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) $\exists \theta \in X$ **,** $x + \theta = x$

iv) $\exists (-x) \in X$ **,** öyle ki $x + (-x) = \theta$

v) $1 \cdot x = x$

vi) $\lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$

vii) $\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda \mu) \cdot x$

3.2.1.2. Tanım: X ve Y lineer uzaylar, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

koşulları sağlanırsa f fonksiyonuna **lineer dönüşüm** denir.

(i)-(ii) koşulları yerine $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

$$f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) = \lambda f\left(x_1\right) + \mu f\left(x_2\right)$$

koşulu yazılabilir.

3.2.1.3. Tanım: X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıda verilen koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona **norm fonksiyonu (** veya **kısaca norm),** $\left(X, \|\cdot\|\right)$ ikilisine de bir **normlu lineer uzay** denir [19].

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

ii) $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iii) $\forall x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3.2.1.4. Tanım: X bir normlu uzay olsun. Bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın elamanına yakınsaksa X **'e tam normlu uzay** veya **Banach uzayı** denir [20].

3.2.1.5. Tanım: X ve Y normlu uzaylar, $f : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. $\exists M > 0$ sayısı var ve $\forall x \in X$ için $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna **sınırlı lineer dönüşüm** denir.

3.2.1.6. Tanım: X bir lineer uzay ve $\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

i) $\forall x \in X$ **,** $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

ii) $\forall x, y \in X$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii) $\forall x, y, z \in X$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ **;** $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

koşulları sağlanırsa bu fonksiyona X üzerinde bir **iç çarpım fonksiyonu,** $\left(X, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ ikilisine de bir **iç çarpım uzayı** denir [19].

3.2.1.1. Teorem (Cauchy-Schwarz Eşitliği): X bir iç çarpım uzayı olsun.

Bu durumda $\forall x, y \in X$ için

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}$$

olur .

3.2.1.2. Teorem: X bir iç çarpım uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon X 'de bir normdur [19].

Bu fonksiyona iç çarpımın ürettiği norm denir

3.2.1.7. Tanım: X bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer X**,** iç çarpımın ürettiği norma göre bir Banach uzayı ise X 'e **Hilbert uzayı** denir [19].

3.2.2. $A_2(h, G)$ ile $A_2(G)$ Uzayları ve Bu Uzayların Cebirsel Yapısı

3.2.2.1. Tanım: G kompleks düzlemde bir bölge olsun. G üzerinde tanımlı, ölçülebilir ve

$$\iint_G \left|f(z)\right|^p d\sigma_z < \infty, \quad 0 < p < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı $L_p(G)$ ile gösterilir [21].

3.2.2.1. Teorem: $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge olsun. $f \in L_p(G)$, $g \in L_q(G)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

i) $$\left|\iint_G f(z) g(z) d\sigma_z\right| \leq \left(\iint_G \left|f(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/p} \left(\iint_G \left|g(z)\right|^q d\sigma_z\right)^{1/q} \quad (3.2.2.1)$$

ve

ii) $$\left(\iint_G \left|f(z) + g(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/p} \leq \left(\iint_G \left|f(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/p} + \left(\iint_G \left|g(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/p} \quad (3.2.2.2)$$

olur.

(3.2.2.1) ve (3.2.2.2) eşitsizliklerine sırasıyla **Hölder** ve **Minkowski Eşitsizlikleri** denir [22].

3.2.2.2. Teorem (Calderon-Zygmund Eşitsizliği): $p>1,\ f\in L_p$ için

$$T(f)(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{1}{\pi}\iint_{|z-\zeta|>\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\sigma_z\right\} \tag{3.2.2.3}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü $L_p\to L_p$ ' ye sınırlı bir lineer dönüşümdür. Yani,

$$\|Tf\|_{L_p}\leq C\|f\|_{L_p} \tag{3.2.2.4}$$

olacak şekilde $\exists C=C(p)>0$ sayısı vardır [23].

(3.2.2.3) ile tanımlı bu dönüşüme **Hilbert dönüşümü** de denir.

3.2.2.2. Tanım: G kompleks düzlemde bir bölge olsun. G bölgesinde tanımlı, negatif olmayan herhangi bir $h(z)$ fonksiyonu için

$$\iint_G h(z)\,d\sigma_z<\infty$$

ise bu fonksiyona G bölgesinde **ağırlık fonksiyonu** denir [21].

3.2.2.3. Tanım: G kompleks düzlemde sonlu bir bölge ve $h(z)$ G bölgesinde tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda G bölgesinde analitik ve

$$\iint_G h(z)|f(z)|^2\,d\sigma_z<\infty \tag{3.2.2.5}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı $A_2(h,G)$ ile gösterilir [21].

3.2.2.3. Teorem: $A_2(h,G)$ uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} +:A_2(h,G)\times A_2(h,G)&\to A_2(h,G)\\ (f,g)\qquad &\to (f+g)(z)=\iint_G h(z)|(f+g)(z)|^2\,d\sigma_z \end{aligned} \tag{3.2.2.6}$$

ve

$$\cdot : \mathbb{C} \times A_2(h,G) \to A_2(h,G)$$
$$(\lambda, f) \to (\lambda \cdot f)(z) = \iint_G h(z) \left|(\lambda f)(z)\right|^2 d\sigma_z \qquad (3.2.2.7)$$

işlemleri tanımlansın. Bu durumda $A_2(h,G)$ uzayı tanımlanan bu işlemlere göre kapalıdır.

İspat:

i) $\forall f, g \in A_2(h,G)$ için $(f+g) \in A(G)$ olduğu açıktır. Eğer

$$\left|f(z) + g(z)\right|^2 \leq 2^2 \left(\left|f(z)\right|^2 + \left|g(z)\right|^2\right) \qquad (3.2.2.8)$$

eşitsizliği ve integral işleminin özellikleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
I[f+g] &= \iint_G h(z) \left|(f+g)(z)\right|^2 d\sigma_z = \iint_G h(z) \left|f(z) + g(z)\right|^2 d\sigma_z \\
&\leq \iint_G h(z) \left[\left|f(z)\right|^2 + \left|g(z)\right|^2\right] d\sigma_z \\
&= 4\iint_G h(z) \left|f(z)\right|^2 d\sigma_z + 4\iint_G h(z) \left|g(z)\right|^2 d\sigma_z \\
&= 4I[f] + 4I[g] < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $(f+g) \in A_2(h,G)$ olmasıdır. Böylece $A_2(h,G)$ uzayının (3.2.2.6) ile tanımlanan işleme göre kapalı olduğu gösterilmiş olur.

ii) $\forall f \in A_2(h,G)$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda \cdot f \in A(G)$ dir. Şimdi $I[\lambda f] < \infty$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
I[\lambda f] &= \iint_G h(z) \left|(\lambda f)(z)\right|^2 d\sigma_z = |\lambda|^2 \iint_G h(z) \left|f(z)\right|^2 d\sigma_z \\
&= |\lambda|^2 I[f] < \infty
\end{aligned}$$

dır. Böylece (3.2.2.7) ile tanımlı işleme göre $A_2(h,G)$ uzayının kapalı olduğu elde edilir.

3.2.2.4. Teorem: $A_2(h,G)$ uzayı (3.2.2.6)-(3.2.2.7) işlemlerine göre bir lineer uzaydır [21].

$f,g\in A_2\left(h,G\right)$ olmak üzere,

$$f\left(z\right)\overline{g\left(z\right)}=\frac{1}{2}\left|f\left(z\right)+g\left(z\right)\right|^2+\frac{i}{2}\left|f\left(z\right)+ig\left(z\right)\right|^2-\frac{1+i}{2}\left|f\left(z\right)\right|^2-\frac{1+i}{2}\left|f\left(z\right)\right|^2$$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\iint_G h(z)\,f\left(z\right)\overline{g\left(z\right)}d\sigma_z&=\frac{1}{2}\iint_G\left|f\left(z\right)+g\left(z\right)\right|^2d\sigma_z+\frac{i}{2}\iint_G\left|f\left(z\right)+ig\left(z\right)\right|^2d\sigma_z\\&\quad-\frac{1+i}{2}\iint_G\left|f\left(z\right)\right|^2d\sigma_z-\frac{1+i}{2}\iint_G\left|g\left(z\right)\right|^2d\sigma_z\\&=\frac{1}{2}I\left[f+g\right]+\frac{i}{2}I\left[f+ig\right]-\frac{1+i}{2}I\left[f\right]-\frac{1+i}{2}I\left[g\right]\\&<\infty\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_2\left(h,G\right)$ uzayı üzerinde

$$\left\langle f,g\right\rangle=\iint_G h(z)\,f\left(z\right)\overline{g\left(z\right)}d\sigma_z$$

şeklinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlanarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

3.2.2.5. Teorem: $f,g\in A_2\left(h,G\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle:A_2\left(h,G\right)\times A_2\left(h,G\right)\rightarrow\mathbb{C}\\&\qquad\left(f,g\right)\qquad\rightarrow\left\langle f,g\right\rangle=\iint_G h(z)\,f\left(z\right)\overline{g\left(z\right)}d\sigma_z\end{aligned}\tag{3.2.2.9}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon, $A_2\left(h,G\right)$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur [21].

3.2.2.6. Teorem: $A_2\left(h,G\right)$ uzayı, (3.2.2.9) ile tanımlanan iç çarpım fonksiyonunun ürettiği

$$\begin{aligned}&\left\|.\right\|:A_2\left(h,G\right)\rightarrow\mathbb{C}\\&\qquad f\quad\rightarrow\left\|f\right\|:=\sqrt{\left\langle f,f\right\rangle}=\left(\iint_G h(z)\left|f\left(z\right)\right|^2d\sigma_z\right)^{1/2}\end{aligned}\tag{3.2.2.10}$$

norma göre bir normlu uzaydır [21].

3.2.2.4. Tanım: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\varphi_n\in A_2\left(h,G\right)$ olsun. Eğer $n\neq m$ için

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \iint_G h(z) \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\sigma_z = 0 \qquad (3.2.2.11)$$

ise $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ sistemine **ortogonal sistem** denir. Eğer $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ sistemi için

$$\|\varphi_n\| = \left[\iint_G h(z) |\varphi_n(z)|^2 d\sigma_z \right]^{1/2} = \begin{cases} 1, & n \neq m \\ 0, & n = m \end{cases} =: \delta_{n,m} \qquad (3.2.2.12)$$

sağlanırsa bu sisteme **ortonormal sistem** denir.

3.2.2.5. Tanım: $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $A_2(h,G)$'de ortonormal bir sistem ve $f \in A_2(h,G)$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n := a_n(f) = \iint_G h(z) f(z) \overline{\varphi_n(z)} d\sigma_z \qquad (3.2.2.13)$$

şeklinde tanımlanan a_n katsayılarına f fonksiyonunun **Fourier katsayıları,**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$$

serisine ise bu fonksiyonun **Fourier serisi** denir.

3.2.2.6. Tanım: G kompleks düzlemde sonlu bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon ve $p > 0$ olsun. G bölgesinde analitik ve

$$I(f) := \iint_G |f(z)|^p d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı $A_p(G)$ ile gösterilir. Yani bu sınıf

$$A_p(G) := \left\{ f : \ f \in A(G) \ , \quad I(f) := \iint_G |f(z)|^p d\sigma_z < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [21].

Bu çalışmada $A_p(G)$ uzayının cebirsel yapısı $p = 2$ durumu için incelenecektir. Dikkat edilirse $p = 2$ ve $h(z) = 1$ olması durumunda, $A_2(h,G) \equiv A_2(G)$ dir. Bu nedenle (3.2.2.6), (3.2.2.7), (3.2.2.9) ve (3.2.2.10) ile tanımlı işlemlerde $h(z) = 1$ alınarak, bu işlemler $A_2(G)$ uzayı üzerinde tanımlanabilir. Böylece $A_2(G)$ uzayının bir normlu lineer uzay olduğu gösterilebilir. Bunun yanı sıra bu uzayda herhangi bir $f \in A_2(G)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları,

$$a_n := a_n(f) = \iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma_z$$

şeklinde tanımlanır. $\{\varphi_n\} \in A_2(G)$ olmak üzere

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \iint_G \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)} d\sigma_z = 0 \ , \quad n \neq m$$

ise $\{\varphi_n\}$ sistemine ortogonal sistem,

$$\|\varphi_n\| = \left[\iint_G |\varphi_n(z)|^2 \, d\sigma_z \right]^{1/2} = \delta_{n,m}$$

ise bu sisteme ortonormal sistem denir.

Şimdi

$$I(f) := \iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z$$

integralinin Reimann integralinin düzgün limiti olarak yazılabileceğini ve $A_2(G)$ uzayının Hilbert uzayı olduğunu gösterelim:

3.2.2.7. Teorem: G Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $f \in A_2(G)$ olsun. Bu durumda

$$I(f) = \iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z$$

integrali Riemann integralinin düzgün limiti olarak yazılabilir [21].

İspat: Aşağıda verilen koşulları sağlayan $\{G_n\}$ bölgeler dizisi göz önüne alınsın:

i) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için G_n bölgesinin sınırı sonlu sayıda Jordan eğrisinin birleşimidir.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ dir.

iii) Her bir $z \in G$ için $z \in G_{n_0}$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Bu bölgeler dizisine göre,

$$\varphi_n(z) := \begin{cases} |f(z)|^2, & z \in \overline{G_n} \\ 0, & z \in G - \overline{G_n} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\{\varphi_n\}$ fonksiyonlar dizisi monoton artandır ve $\forall z \in G$ için

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = |f(z)|^2$$

olur. Monoton Yakınsaklık Teoremine göre [24],

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G \varphi_n(z)\, d\sigma_z = \iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \qquad (3.2.2.14)$$

dir. Diğer taraftan

$$\iint_G \varphi_n(z)\, d\sigma_z = \iint_{G_n} |f(z)|^2\, d\sigma_z \qquad (3.2.2.15)$$

olduğundan (3.2.2.14) ve (3.2.2.15) birleştirilirse,

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} \iint_{G_n} |f(z)|^2\, d\sigma_z$$

elde edilir.

3.2.2.8. Teorem: $f \in A_2(G)$, $z_0 \in G$ ve $\delta_{z_0} := d(z_0, \partial G)$ olsun. Bu durumda,

$$I(f) \geq \pi \delta_{z_0}^2 |f(z_0)|^2 \qquad (3.2.2.16)$$

olur [21].

İspat: $z_0 \in G$ ve $f \in A(G)$ olduğundan,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

yazılabilir. Bu seri $U_\delta(z_0) := \{z : |z - z_0| < \delta \ , \ 0 < \delta < \delta_{z_0}\}$ dairesinde düzgün ve mutlak yakınsaktır. $z = z_0 + re^{i\varphi}$ ve $d\sigma_z = r dr d\varphi$ olmak üzere kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\iint_{U_\delta(z_0)} |f(z)|^2 \, d\sigma_z = \int_0^{\delta}\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\varphi} \right|^2 r\,d\varphi\,dr = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2(n+1)} \delta^{2(n+1)} \qquad (3.2.2.17)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.2.2.17) göz önüne alınarak,

$$\iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma_z \geq \iint_{U_\delta(z_0)} |f(z)|^2 \, d\sigma_z \geq \pi |a_0|^2 \delta^2 \quad , \quad a_0 = f(z_0)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $\delta \to \delta_{z_0}$ için limite geçilirse,

$$I(f) \geq \pi |f(z_0)|^2 \delta_{z_0}^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise istenilendir.

3.2.2.9. Teorem: $A_2(G)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır [21].

İspat: $A_2(G)$ uzayının Hilbert uzayı olduğu gösterebilmek için bu uzaydan alınan her Cauchy dizisinin

$$\|\cdot\| = \left[\iint_G |\cdot(z)|^2 d\sigma_z \right]^{1/2}$$

şeklinde tanımlı norma göre yine bu uzayda yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

$\{f_n\} \in A_2(G)$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır ve $\forall n, m > n_0$ için

$$\| f_n - f_m \| < \varepsilon$$

sağlanır. $\overline{G}_n \subset G$ olacak şekilde G bölgesini içten dolduran $\{G_n\}$ bölgeler dizisini göz önüne alalım ve $\delta := dist(G_n, \partial G)$ olsun. $[f_n - f_m]$'e 3.2.2.8. Teorem'i uygulanırsa,

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{I(f_n - f_m)}{\pi \delta^2} < \frac{\varepsilon^2}{\pi \delta^2} \qquad (3.2.2.18)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten, $\{f_n(z)\}$ fonksiyonlar dizisinin G_n bölgesinin içinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu elde edilir. Böylece sabit bir k için

$$\iint_{G_n} \left| f_n(z) - f_m(z) \right|^2 d\sigma_z \le \iint_{G} \left| f_n(z) - f_m(z) \right|^2 d\sigma_z \le \varepsilon^2 \qquad (3.2.2.19)$$

elde edilir. (3.2.2.19) eşitsizliğinde $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{G_k} \left| f_n(z) - f_m(z) \right|^2 d\sigma_z = \iint_{G_k} \left| f_n(z) - f(z) \right|^2 d\sigma_z \le \varepsilon^2$$

bulunur. Bu değerlendirme n 'den bağımsız olduğu için,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{G_n} \left| f_n(z) - f(z) \right|^2 d\sigma_z \le \varepsilon^2 \qquad (3.2.2.20)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{G_n} \left| f_n(z) - f(z) \right|^2 d\sigma_z = \iint_{G} \left| f_n(z) - f(z) \right|^2 d\sigma_z \qquad (3.2.2.21)$$

bulunur. (3.2.2.20) ve (3.2.2.21) değerlendirmeleri birleştirilirse $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin G bölgesinde f fonksiyonuna yakınsak olduğu elde edilir. Şimdi $f \in A_2(G)$ olduğunu göstermek için $I(f) < \infty$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\left| f(z) \right|^2 \le \left| f(z) - f_n(z) \right|^2 + \left| f_n(z) \right|^2$$

eşitsizliği göz önüne alınır ve integral işleminin özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} I(f) = \iint_{G} \left| f(z) \right|^2 d\sigma_z &\le \iint_{G} \left| f(z) - f_n(z) \right|^2 d\sigma_z + \iint_{G} \left| f_n(z) \right|^2 d\sigma_z \\ &= \left\| f(z) - f_n(z) \right\|^2 + I(f_n) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $f \in A_2(G)$ olmasıdır.

3.3. YARIKONFORM DÖNÜŞÜMLER VE YARIKONFORM EĞRİLER

$G, R \subset \mathbb{C}$, $f : G \to R$ C^1 sınıfından olan bir homeomorfizm ve $w = f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$ olsun. u ve v fonksiyonlarının $\forall z \in G$ noktasında lineer dönüşümleri

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy \\ dv &= v_x dx + v_y dy \end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

şeklinde olup (3.3.1) ifadesi kompleks formda,

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} \tag{3.3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$f_z = \frac{1}{2}\left(f_x - if_y\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + v_y\right) + \frac{i}{2}\left(v_x - u_y\right)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(f_x + if_y\right) = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y\right) + \frac{i}{2}\left(v_x + u_y\right)$$

olur.

(3.3.1) lineer dönüşümleri geometrik olarak (dx, dy) düzleminden (du, dv) düzlemine bir afin dönüşüm belirtir. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$$

şeklindedir. Eğer $w = f(z)$ dönüşümü yönü koruyan bir dönüşüm ise $J > 0$, yönü koruyan bir dönüşüm değilse $J < 0$ olur.

Eğer $w = f(z)$ fonksiyonu yönü koruyan bir dönüşüm ise $J > 0$ olduğundan $|f_{\bar{z}}| < |f_z|$ olur. Üçgen eşitsizliği yardımıyla (3.3.2) den

$$\left(|f_z| - |f_{\bar{z}}|\right)|dz| \le |dw| \le \left(|f_z| + |f_{\bar{z}}|\right)|dz| \tag{3.3.3}$$

eşitsizliği ve bu eşitsizlikten

$$1 \le \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} =: D_f \tag{3.3.4}$$

ifadesi elde edilir. (3.3.4) ile tanımlanan bu D_f sayısına $f(z)$ dönüşümünün z noktasındaki **dilatasyonu** denir. Bunun yanı sıra

$$d_f := \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} < 1$$

olmak üzere D_f sayısı

$$D_f = \frac{1 + d_f}{1 - d_f}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.3.2) ile tanımlanan lineer dönüşüm orijin merkezli çok küçük çemberleri elipslere resmeder ve bu eliplerin asal eksenlerinin yedek eksenlerine oranı (3.3.4)'de verilen

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

orandır [23].

3.3.1. Tanım: $G, R \subset \mathbb{C}$ ve $f : G \to R$ tanımlı bir fonksiyon olsun. (3.3.4) ile tanımlı D_f sayısı sınırlı ise $w = f(z)$ dönüşümüne **yarıkonform dönüşüm** denir.

$D_f \le K$ ise bu dönüşüme K**-yarıkonform dönüşüm,** K sayısına da bu dönüşümün **yarıkonformluk katsayısı** denir [23].

Dikkat edilirse $D_f \le K$ olması $d_f \le k := \dfrac{K-1}{K+1}$ olmasına denktir. Bunun yanı sıra $K = 1$ ise

$$f_{\bar{z}} = 0 \text{ ve } f_z \ne 0$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda $w = f(z)$ dönüşümü $z \in G$ noktasında konformdur.

Şimdi yarıkonform dönüşümün bazı önemli özelliklerini verelim:

i) $K = 1$ ise $w = f(z)$ dönüşümü konformdur.

ii) $f(z)$ dönüşümü K-yarıkonform ise f^{-1} dönüşümü de K-yarıkonformdur

iii) $f_1 : G \to R$ dönüşümü K_1-yarıkonform, $f_2 : R \to B$ dönüşümü K_2-yarıkonform ise $f_1 \circ f_2$ dönüşümü $K_1 K_2$-yarıkonform dönüşümdür.

iv) $w = f(z)$ dönüşümü her bir $z \in G$ noktasının belli bir komşuluğunda K-yarıkonform ise bu dönüşüm G bölgesinde K-yarıkonformdur [23].

3.3.2. Tanım: $f : G \to D$ tanımlı K-yarıkonform dönüşüm, L ise G bölgesinde bulunan bir eğri olsun. f dönüşümü altında L eğrisinin görüntüsü bir çember (veya bir doğru) ise L eğrisine K**-yarıkonform eğri (** veya K-**yarıkonform yay)** denir.

Burada $G, D = \overline{\mathbb{C}}$ alınırsa 3.3.2.Tanım'a yarıkonform eğrinin **global tanımı,** $D, G \subset \mathbb{C}$ ise **yerel tanımı** denir [12].

3.3.3. Tanım: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. Eğer $L = \partial G$ K-yarıkonform eğri ise G bölgesine K**-yarıçember** denir [3].

3.3.1. Teorem: L analitik eğri (veya analitik yay) ise $K = 1$ dir [25].

3.3.2. Teorem: L düzgün eğri ise $\forall \varepsilon > 0$ için $(1+\varepsilon)$-yarıkonform eğridir [25].

3.3.3. Teorem: L bir Jordan eğrisi, $z_1 \neq z_2$ olmak üzere $z_1, z_2 \in L$ keyfi noktalar ve $\ell(z_1, z_2)$, z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren ve L nin küçük çaplı alt yayı olsun. L eğrisinin yarıkonform eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{z_1, z_2 \in L;\ z_3 \in \ell(z_1, z_2)} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

olmasıdır [23].

3.3.3. Tanım: L kompleks düzlemde kapalı bir eğri olsun. $y : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ve

$$y(intL) = extL,\ \ y(extL) = intL,\ y(L) = L$$

koşullarını sağlayan yarıkonform dönüşümü varsa bu dönüşüme L eğrisine göre **yarıkonform yansıma** denir [3].

3.3.4. Teorem: L kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda L eğrisine göre bir yarıkonform yansıma vardır [3].

3.3.5. Teorem: L bir yarıkonform eğri, $\infty \notin L$, $G := intL$, $\Omega := extL$ olsun. Bu durumda L eğrisine göre yarıkonformluk katsayısı $c_1(K)$ olan bir $y(z)$ yansıması vardır ve bu yansıma aşağıda ifade edilen özelliklere sahiptir:

i) $y(z)$ yansıması $\mathbb{C} - (L \cup \{a\})$ kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilirdir.

Burada $a \in G$ noktası $y(\infty) = a$ olacak şekilde tespit edilmiş bir noktadır.

ii) $\delta > 0$ yeterince küçük olmak üzere $U_\delta := U_\delta(a) = \{z : |z-a| < \delta\}$ ve $U_{\delta'} := y(U_\delta)$ olsun. Bu durumda her bir δ için $y(z)$ yansıması Öklid metriğine göre $\mathbb{C}_\delta := \mathbb{C} - (U_\delta \cup U_{\delta'})$ bölgesinde yarı izometriktir.

iii) Her $z \in \mathbb{C}_\delta - L$

$$|y_z| \preceq 1; \quad |y_{\bar{z}}| \preceq 1 \tag{3.3.5}$$

sağlanır. Ayrıca $\forall z \notin \mathbb{C}_\delta - L$ için,

$$|y_z| \preceq \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in U_\delta \\ |z-a|^{-2}, & z \in U_{\delta'} \end{cases} \tag{3.3.6}$$

ve

$$|y_{\bar{z}}| \preceq \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in U_\delta \\ |z-a|^{-2}, & z \in U_{\delta'} \end{cases} \tag{3.3.7}$$

olur [3].

Bu teoremle tanımlanan yansımaya **regüler yarıkonform yansıma** denir.

3.3.1. Lemma: L eğrisi K**-**yarıkonform eğri, $z_1 \in L$ ve $z_2, z_3 \in G \cap \{z : |z - z_1| \leq c_1 d(z_1, L_{R_0})\}$, $w_j = F(z_j)$, $j = 1,2,3$ $\left(z_2, z_3 \in G \cap \{z : |z - z_1| \leq c_2 d(z_1, L_{r_0})\},\ w_j = \Phi(z_j),\ j = 1,2,3\right)$ olsun.

Eğer $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$ ise aşağıda verilenler sağlanır:

i) $|w_1 - w_2| \preceq |w_1 - w_3|$,

ii) $|z_1 - z_2| \asymp |z_1 - z_3|$ ve $|w_1 - w_2| \asymp |w_1 - w_3|$,

iii)

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}\right|^{K^{-2}} \preceq \left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right| \preceq \left|\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}\right|^{K^2} \tag{3.3.8}$$

[26]

3.3.1. Sonuç: 3.3.1. Lemma'nın koşullarına ek olarak $z_3 \in L_{R_0}$ ($z_3 \in L_{r_0}$) ise

$$|w_1 - w_2|^{K^{-2}} \preceq |z_1 - z_2| \preceq |w_1 - w_2|^{K^2} \tag{3.3.9}$$

olur [26].

3.3.4. Tanım: $\rho(z)$ kompleks düzlemde tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer

$$A(\rho) := \iint_{\mathbb{C}} \rho^2(z)\, d\sigma_z \neq 0 \tag{3.3.10}$$

ise bu fonksiyona **model fonksiyon (**veya **metrik)** denir[3].

3.3.5. Tanım: Γ local düzlendirilebilir eğrilerin ailesi, P tüm model fonksiyonların sınıfı ve

$$L_p(\Gamma) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho(z)\, d\sigma_z \tag{3.3.11}$$

olsun. Bu durumda

$$m(\Gamma) := \inf_{\rho \in P} \frac{A(p)}{L_\rho(\Gamma)^2} \tag{3.3.12}$$

şeklinde tanımlı değere Γ **eğri ailesinin modülü,**

$$\lambda(\Gamma) := (m(\Gamma))^{-1} \tag{3.3.13}$$

değerine ise Γ **eğri ailesinin ekstramal uzunluğu** denir.

Γ_1 ve Γ_2 iki eğri ailesi olsun.

i) Her bir $\gamma_2 \in \Gamma_2$ eğrisi en az bir $\gamma_1 \in \Gamma_1$ eğrisini içeriyorsa bu durum $\Gamma_1 < \Gamma_2$ şeklinde gösterilir.

ii) $\Gamma_1 < \Gamma_2$ ise $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$ ve $m(\Gamma_1) \geq m(\Gamma_2)$,

iii) $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ ise $m(\Gamma_1) \geq m(\Gamma_2)$,

olur [3].

3.3.6. Teorem: $\phi : G \to D$ bir konform dönüşüm, Γ G bölgesinde bulunan herhangi bir eğri ailesi ve $\Gamma' = \phi(\Gamma)$ olsun. Bu durumda

$$m(\Gamma) = m(\Gamma') \text{ ve } \lambda(\Gamma) = \lambda(\Gamma')$$

olur [3].

3.3.6. Teoremi eğri ailelerinin modülünün konform dönüşümler altında değişmez (invaryant) olduğunu gösterir.

3.3.7. Teorem: $F : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ yarıkonformluk katsayısı K olan ve $F(\infty) = \infty$ koşulunu sağlayan bir yarıkonform dönüşüm, $\Gamma := \Gamma(\zeta_1, \zeta_2; \zeta_3; \mathbb{C})$ kompleks düzlemde ζ_1 ve ζ_2 noktalarını ∞ ve ζ_3 noktalarından ayıran lokal düzlendirilebilir eğrilerin ailesi ve $m(F(\Gamma)) := m(F(\zeta_1), F(\zeta_2); F(\zeta_3); \mathbb{C})$ olsun. Bu durumda

$$K^{-1} \le \frac{m(\Gamma)}{m(F(\Gamma))} \le K \qquad (3.3.14)$$

eşitsizliği sağlanır [3].

Bu eşitsizlik eğri ailelerinin modülünün yarıkonform dönüşümler altında yarı değişmez olduğunu ifade eder.

3.3.8. Teorem: $\Omega \subset \mathbb{C}$, $L = \partial\Omega$ yarıkonform eğrisiyle sınırlı "∞" noktasını içeren bir bölge, $z \in L$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\Omega}$ ve $0 < |z - \zeta_1| < |z - \zeta_2|$ olsun. Eğer Γ, Ω bölgesinde z ve ζ_1 noktalarını ζ_2 ve ∞ noktalarından ayıran eğri ailesi ise bu eğri ailesinin modülü için

$$\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\zeta_2 - z}{\zeta_1 - z} \right| - c_1 \le m(\Gamma) \le \frac{1}{c_2 \pi} \log \left| \frac{\zeta_2 - z}{\zeta_1 - z} \right| + c_3 \qquad (3.3.15)$$

sağlanır. Burada c_2, c_3 pozitif sabitler olup yalnız Ω bölgesine ve K yarıkonformluk katsayısına bağlıdır ve $c_1 = (1/\pi) \log C(K)$ şeklindedir [3].

BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. DÜZ TEOREMLER

$G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $L=\partial G$ K-yarıkonform eğri, $\Omega=ext\overline{G}$ ve $\Delta=ext\overline{\mathbb{D}}$ olsun. Diğer taraftan $\Phi:\Omega\to\Delta$ konform dönüşümü

$$\Phi(\infty)=\infty\,,\ \Phi'(\infty)>0$$

koşulları ile verilsin. L, yarıkonform eğri olduğu için bu eğriye göre bir $y(z)$ K^2 yarıkonform yansıması vardır ve bu yansıma için

$$y(\Omega)=G\,,\ y(G)=\Omega \text{ ve } y(L)=L \tag{4.1.1}$$

sağlanır. Böylece Φ konform dönüşümü, $y(z)$ yansıması ve $h(w)=\dfrac{1}{w}$ dönüşümü yardımıyla

$$\tilde{\Phi}(z):=\begin{cases}\Phi(z), & z\in\overline{\Omega}\\ (h\circ\Phi\circ y)(z), & z\in G\end{cases} \tag{4.1.2}$$

şeklinde tanımlanarak genişletilmiş kompleks düzleme K^2-yarıkonform dönüşüm olarak genişletilebilir. Benzer şekilde $\Psi=\Phi^{-1}$ konform dönüşümü de

$$\tilde{\Psi}(w):=\begin{cases}\Psi(w), & w\in\overline{\Delta}\\ (y\circ\Psi\circ h)(w), & w\in\mathbb{D}\end{cases} \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlanırsa bu dönüşüm $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ tanımlı K^2-yarıkonform dönüşümdür [3].

4.1.1. Teorem: $f(z)$ fonksiyonu $L=\partial G$ yarıkonform eğrisiyle sınırlı, sonlu G bölgesinde tanımlı analitik bir fonksiyon ve $y(z)$, L eğrisine göre bir yarıkonform yansıma olsun. Bu durumda $\forall z\in G$ için

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{(f\circ y)(\zeta)}{(\zeta-z)^2}y_{\bar{\zeta}}d\sigma_\zeta \tag{4.1.4}$$

sağlanır [3].

4.1.1. Sonuç: (4.1.4) integral gösterimi

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\left(y(\zeta)-z\right)^2} y_{\bar{\zeta}} d\sigma_\zeta, \qquad z \in G \tag{4.1.5}$$

şeklinde yazılabilir [3].

4.1.2. Teorem: $L = \partial G$ yarıkonform eğrisiyle sınırlı sonlu $G \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı $f(z)$ fonksiyonun (4.1.5) integral gösterimine (veya (4.1.4) integral gösterimine) sahip olması için gerek ve yeter koşul $f \in A_1(G)$ olmasıdır. Burada $y(z)$, L eğrisine göre bir regüler yarıkonform yansımadır [3].

4.1.3. Teorem: $f \in A_1(G)$ fonksiyonu $L = \partial G$ yarıkonform eğriyle sınırlı, sonlu $G \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon, $0 \in G$ ve $y(z)$, L eğrisine göre $y(\infty) = 0$ koşulunu sağlayan bir regüler yarıkonform yansıma olsun. Bu durumda $m \leq (k+1)(n-1)$ olmak üzere herhangi bir sabit $m \in \mathbb{N}$ sayısı ve tüm $z \in G$ noktaları için

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} J_{nk}(t)\,dt \iint_\Omega \frac{f\left(y(\zeta)\right) y_{\bar{\zeta}}}{(\zeta - z)^2}\left[1-\left(1-\frac{\zeta - z}{\tilde{\zeta}_t - z}\right)^m\right]^2 d\sigma_\zeta \tag{4.1.6}$$

integrali derecesi $\left((k+1)(n-1)-2\right)$'yi aşmayan cebirsel bir $P_n(f,z)$ polinomu tanımlar [3].

4.1.4. Teorem: $G \subset \mathbb{C}$, $L = \partial G$ yarıkonform eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge ve $f(z) \in A(\overline{G})$ olsun. Bu durumda $\exists P_n(z)$ polinomu vardır öyle ki her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\forall z \in L = \partial G$ için

$$\left|f(z) - P_n(z)\right| \preceq \omega\left(d\left(z, L_{1+1/n}\right)\right) \tag{4.1.7}$$

sağlanır. Burada $\omega(t) := \omega(f;t)$, $\overline{G}$ kümesi üzerinde $f(z)$ fonksiyonunun süreklilik modülüdür [3].

4.1.5. Teorem: $G \subset \mathbb{C}$, $L = \partial G$ yarıkonform eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge ve $f \in A^r\left(\overline{G}\right)$, $r \in \mathbb{N}$, olsun. Bu durumda herhangi bir sabit $m \geq 0$ sayısı ve her bir $n = r+1, r+2, ...$ için derecesi n'yi aşmayan cebirsel bir $P_n(z)$ polinomu vardır ve tüm $z \in \overline{G}$ noktaları için

$$\left|f(z) - P_n(z)\right| \preceq \left(d\left(z, L_{1+1/n}\right)\right)^r \tilde{\omega}_{r,n}(z) \tag{4.1.8}$$

olur. Burada

$$\tilde{\omega}_{r,n}(z) := \omega\left(d\left(z, L_{1+1/n}\right)\right)\left(\frac{d\left(z, L_{1+1/n}\right)}{\left|z - z^*\right| + d\left(z, L_{1+1/n}\right)}\right)^m, \quad \left|z^* - z\right| = d\left(z, L_{1+1/n}\right)$$

şeklinde olup, $\omega(t) = \omega\left(f^r, t\right)$, $\overline{G}$ kümesi üzerinde f^r fonksiyonunun süreklilik modülüdür [3].

4.2. PARÇALI DÜZGÜN EĞRİLER İLE K-YARIKONFORM EĞRİLERİYLE SINIRLI BÖLGELERDE DÜZ TEOREMLERİN UYGULAMALARI

L eğrisi yerel anlamda K-yarıkonform eğri olsun. Bu durumda $G, D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $G \to D$ tanımlı $f(z)$ K-yarıkonform dönüşümü vardır. L eğrisi bu dönüşüm altında birim çemberin görüntüsüdür. $1 < R_0 \leq 2$, $r_0 = R_0^{-1}$ ve $G := G_{R_0} - G_{r_0}$ olmak üzere

$$\alpha(\cdot) = f\left\{\overline{f(\cdot)}^{-1}\right\}$$

dönüşümü L eğrisine göre K^2 yarıkonform yansımadır. Bu durumunda

$$\alpha\left(G_{\tilde{R}} - \overline{G}\right) \subset G - \overline{G_{r_0}}, \quad \alpha\left(G - \overline{G_{\tilde{r}}}\right) \subset G_{R_0} - \overline{G} \tag{4.2.1}$$

olacak şekilde $1 < \tilde{R} < R_0$ ve $r_0 < \tilde{r} < 1$ sayıları vardır. Diğer taraftan 3.3.5. Teorem'den L eğrisine göre bir $y(z)$ yansıması vardır. Ayrıca L eğrisinin belli bir komşuluğunda bu yansıma için

$$\left|y(z) - z'\right| \asymp \left|z - z'\right|, \quad z' \in L \tag{4.2.2}$$

sağlanır. Böylece genelliği kaybetmeden 3.3.2. Tanım'da

$$y(z)=\alpha(z) \tag{4.2.3}$$

şeklinde alınabilir.

Bu bölümde 3.2.2.2. Tanım ile verilen ağırlık fonksiyonu

$$D(z)\in H^{\alpha}\left(\overline{G}\right),\ 0<\alpha\leq 1,\ D(z)\neq 0,\ z\in\overline{G}$$

olmak üzere

$$h(z)=\left|D(z)\right|^{2} \tag{4.2.4}$$

şeklinde ve $y(z)=\alpha(z)$ alınacaktır. Ayrıca $\vartheta(\lambda)$

$$\vartheta(\lambda):=\begin{cases}\dfrac{1}{2-\lambda}, & \lambda\leq\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{2\lambda}, & \dfrac{2}{3}<\lambda<1\\ \dfrac{1}{2}, & \lambda\geq 1\end{cases} \tag{4.2.5}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.2.1. Teorem: $G\in C_{\theta}(\lambda)$ **,** $0<\lambda<2$**,** ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (4.2.4) ile tanımlı olsun. Bu durumda

$$\varepsilon_n(z)\leq c\delta^{\frac{4\lambda-9}{2(2-\lambda)}}(z)E_n(f,A_2)n^{-\mu} \tag{ 4.2.6}$$

olur. Burada $\alpha>\vartheta(\lambda)$ ise $0<\mu<\min\left\{\frac{1}{2};\frac{\lambda}{2-\lambda}\right\}$, $\alpha\leq\vartheta(\lambda)$ olması durumunda ise $0<\mu<\alpha\min\{1;\lambda\}$ şeklinde olup, $\vartheta(\lambda)$ (4.2.6)'da tanımlandığı gibidir. Ayrıca

$$E_n(f,A_2):=\min_{P_n}\left[\iint_G h(z)\left|f(z)-P_n(z)\right|^{2}d\sigma_z\right]^{\frac{1}{2}}$$

sayısı $A_2(h,G)$ sınıfından olan $f(z)$ fonksiyonuna derecesi n'yi aşmayan cebirsel polinomlarla en iyi yaklaşım sayısıdır [27].

4.2.1. Sonuç: 4.2.1. Teorem'in koşullarına ek olarak $\lambda=1$ ise

$$\varepsilon_n(z) \le c\delta^{-\frac{5}{2}}(z) E_n(f, A_2) n^{-\mu} \tag{4.2.7}$$

olur. Burada $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ ise $\mu \in (0, \alpha)$, $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ ise $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ şeklindedir [27].

3.2.2.2. Tanım'da ağırlık fonksiyonu

$$h \in C\left(\overline{G}\right), \quad h(z) \ge c > 0 \tag{4.2.8}$$

şeklinde seçilirse aşağıdaki teoremler geçerlidir:

4.2.2. Teorem: $G \in C_\theta(\lambda)$, $0 < \lambda < 2$, ve $f \in A\left(\overline{G}\right)$ olsun. Bu durumda $\lambda^* = \min\{1; \lambda\}$ olmak üzere keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon_n \le c n^{\lambda^* + \varepsilon} E_n\left(f, \overline{G}\right) \tag{4.2.9}$$

olur. Burada

$$E_n\left(f, \overline{G}\right) := \inf_{P_n} \max_{z \in \overline{G}} \left| f(z) - P_n(z) \right|$$

sayısı derecesi n'yi aşmayan cebirsel polinomlarala $f \in A\left(\overline{G}\right)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşım sayısıdır [27].

4.2.2. Sonuç: 4.2.2. Teorem'in koşulları altında $f \in W^{(r)} H^\alpha\left(\overline{G}\right)$ olsun. Bu durumda $\lambda_* = \min\{1; \lambda\}$ ve $r + \alpha > \frac{\lambda^*}{\lambda_*}$ olmak üzere $\forall \eta < (r + \alpha)\lambda_* - \lambda^*$ için

$$\varepsilon_n \le c n^{-\eta} \tag{4.2.10}$$

eşitsizliği sağlanır [27].

4.2.3. Teorem: $G \subset \mathbb{C}$ $L = \partial G$ K-yarıkonform eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge ve $f \in W^{(r)} H^\alpha\left(\overline{G}\right)$ olsun. Bu durumda $r + \alpha > K^2$ ise

$$\varepsilon_n \le n^{-\vartheta} \tag{4.2.11}$$

olur. Burada $\vartheta := \frac{2\left(r + \alpha - K^2\right)}{K^2 + 1} > 0$ şeklindedir.

4.3. YARDIMCI SONUÇLAR

Bu kısımda 4.1 ve 4.2 kısımlarında verilen teoremlerin ispatı için gerekli olan lemmalar ve bu lemmaların ispatları verilecektir.

Her bir $R>1$ için $L^* := y(L_R)$, $G^* := intL^*$ ve $\Omega^* := extL^*$ olsun. $\Phi_* : \Omega^* \to \Delta$, $\Phi_*(\infty)=\infty$ ve $\Phi_*'(\infty)>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü verilsin. Bu durumda $\forall z \in L^*$ ve $|z-t| = d(z,L)$ eşitliğini sağlayan $t \in L$ noktası için

$$d(z,L) \asymp d(t,L_R) \asymp d(z,L_R) \tag{4.3.1}$$

$$|\Phi_*(t)| \le |\Phi_*(z)| \le 1 + c(R-1) \tag{4.3.2}$$

değerlendirmeleri geçerlidir.

4.3.1. Lemma: G, $L=\partial G$ yarıkonform eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge, $P_n(z)$ derecesi n' yi aşmayan keyfi bir polinom ve $R = 1 + \dfrac{c}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\|P_n\|_{C(\overline{G})} \le c_1 \|P_n\|_{C\left(\overline{G^*}\right)} \tag{4.3.3}$$

olur. Burada $c_1 = c_1(G,c) > 0$ şeklinde bir sabittir [27].

İspat:

$$F(z) := \frac{P_n(z)}{\left[\Phi_*(z)\right]^{n+1}} \quad , \quad z \in \Omega^* \tag{4.3.4}$$

olsun. Dikkat edilirse $F \in A\left(\overline{\Omega^*}\right)$, $F(\infty)=0$ ve her $z \in L^*$ için,

$$|F(z)| = \frac{|P_n(z)|}{|\Phi^*(z)|^{n+1}} = |P_n(z)|$$

dır. $F \in A\left(\overline{\Omega^*}\right)$ olduğu için 3.1.2.6. Teorem'den (Maksimum Modül Prensibi)

$$\left|F(\zeta)\right| \le \max_{z\in\overline{\Omega}^*}\left|F(z)\right| = \max_{z\in L^*}\left|F(z)\right| = \max_{z\in L^*}\left|P_n(z)\right| \ , \qquad \zeta\in\overline{\Omega^*} \quad (4.3.5)$$

olur. Diğer taraftan yine 3.1.2.6. Teorem'i gereği

$$\max_{z\in\overline{G}^*}\left|P_n(z)\right| = \max_{z\in L^*}\left|P_n(z)\right|$$

elde edilir. (4.3.4) ve son eşitlik göz önüne alınarak (4.3.5)'den

$$\left|P_n(\zeta)\right| \le \left|\Phi^*(\zeta)\right|^{n+1}\left\|P_n\right\|_{C\left(\overline{G}^*\right)} \qquad (4.3.6)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifadede $\zeta\in L$ alınarak (4.3.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|P_n(\zeta)\right| &\le \left|\Phi^*(\zeta)\right|^{n+1}\left\|P_n\right\|_{C\left(\overline{G}^*\right)} \le \left|\Phi^*(z)\right|^{n+1}\left\|P_n\right\|_{C\left(\overline{G}^*\right)}\\ &\le \left(1+c(R-1)\right)\left\|P_n\right\|_{C\left(\overline{G}^*\right)}\\ &\le c_1\left\|P_n\right\|_{C\left(\overline{G}^*\right)}\end{aligned}$$

değerlendirmesi elde edilir. Bu değerlendirme $\forall\zeta\in L$ için geçerli olduğundan her iki tarafın maksimumu alınarak istenilen elde edilir.

4.3.2. Lemma: $G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $L=\partial G$, K- yarıkonform eğri olsun. Bu durumda tespit edilmiş bir $z_0\in G$ noktası ve keyfi $0<u<R_0-1$ için

$$mes\left[(\varphi\circ\alpha)\left(G_{1+u}-G,z_0\right)\right] \preceq \delta^{-1}(z_0)\,\delta^{K^{-2}}(\zeta) \qquad (4.3.7)$$

sağlanır. Burada $\delta(z) := d(z,L), \zeta=\varphi^{-1}(\tau)$ ve $|\tau| = min\left\{|w| : w\in(\varphi\circ\alpha)\left(L_{1+u},z_0\right)\right\}$ şeklindedir [12].

İspat:

$$\begin{aligned}mes(\varphi\circ\alpha)\left(G_{1+u}-G,z_0\right) &\le 2\pi\left(1-|\tau|^2\right)\\ &\preceq 1-|\tau|\end{aligned} \qquad (4.3.8)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır. z_0 noktasının G bölgesinde bulunduğu yere göre $\left(1-|\tau|\right)$ uzunluğunu değerlendirelim:

i) Eğer $z_0\in\overline{G}_{r_0}$ ise (4.2.2), (4.2.3) ve 3.3.1.Sonuç' tan

$$1-|\tau| \preceq \delta^{K^{-2}}(\zeta) \qquad (4.3.9)$$

elde edilir.

ii) $z_0 \in G \cap D$ olsun. Bu durumda $z_0' := \alpha(z_0)$; $|z - z_0| := d(z_0, L),\ z \in L$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

a) $z_0' \in \overline{G}_{1+u}$ olsun. O zaman (4.2.2), (4.2.3) ve 3.3.1. Sonuç yardımıyla

$$1 - |\tau| \le 1 \preceq \left| \frac{\zeta - z}{z_0 - z} \right| \preceq \frac{\delta(\zeta)}{\delta(z_0)} \tag{4.3.10}$$

elde edilir.

b) $z_0' \in \Omega_{1+u} \cap D$ ise $|w| = R_0$ çemberi üzerinde bir w_1 noktası alalım ve $z_1 := \Psi(w_1)$ olsun. φ fonksiyonu

$$\tilde{\varphi}(z, z_0) := \begin{cases} \varphi(z, z_0) & , \quad z \in \overline{G} \\ \dfrac{1}{\overline{\varphi(\alpha(z), z_0)}} & , \quad z \in G_{R_0} - \overline{G} \end{cases} \tag{4.3.11}$$

şeklinde tanımlanarak G bölgesinden G_{R_0} bölgesine genişletilebilir. Dikkat edilirse $\tilde{\varphi}$ fonksiyonu K^2-yarıkonform dönüşümdür.

G_{R_0} bölgesinde z ve ζ noktalarını z_0 ve z_1 noktalarından ayıran eğri ailesi $\Gamma := \Gamma(z, \zeta; z_0, z_1, G_{R_0})$ ve bu eğri ailesinin φ dönüşümü altında görüntüsü $\Gamma' := \varphi(\Gamma)$ olsun. Bu durumda $m(\Gamma)$ ve $m(\Gamma')$ için (3.3.15)'den

$$m(\Gamma) \ge \frac{1}{2\pi} \ln c_1 \left| \frac{z - z_0}{z - \zeta} \right| , \quad m(\Gamma') \le \frac{1}{2\pi} \ln \frac{c_2}{1 - |\tau|} \tag{4.3.12}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $i = 1,2$ olmak üzere $c_i = c_i(R_0, D, G)$ sabitleri z, ζ, z_0, τ noktalarından bağımsızdır.

Diğer taraftan eğri ailelerinin modülünün yarıkonform dönüşümler altında yarı-değişmez olduğu ve (4.3.12) eşitsizleri göz önüne alınırsa

$$(1 - |\tau|)^{K^2} \preceq \left| \frac{\zeta - z}{z_0 - z} \right| \preceq \delta^{-1}(z_0)\, \delta(\zeta) \tag{4.3.13}$$

değerlendirmesi ve bu değerlendirmeden ise

$$1 - |\tau| \preceq \delta^{-K^{-2}}(z_0)\, \delta^{K^{-2}}(\zeta) \tag{4.3.14}$$

bulunur.

(4.3.9), (4.3.10) ve (4.3.14) değerlendirmeleri birleştirilerek istenilen sonuç kolayca görülür.

4.3.3. Lemma: $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $L = \partial G$ K-yarıkonform eğri ve $z_0 \in G$ tespit edilmiş bir nokta olsun. Bu durumda her bir $n \geq 1$ için $P_n(z_0, z_0) = 0$, $P_n'(z_0, z_0) = \varphi'(z_0, z_0)$ koşullarını sağlayan bir $P_n(z, z_0)$ polinomu vardır ve bu polinom için

$$\left\| \varphi'(\cdot, z_0) - P_n'(\cdot, z_0) \right\|_{A_2} \preceq n^{-1} + \delta^{-1}(z_0)\left[mes\varphi\left(\alpha\left(G_R - G\right), z_0\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.3.15)$$

olur [12].

İspat: R' sayısı $1 < R' < R_0$ koşulunu sağlayacak şekilde belirlensin. Bu durumda $\varphi(z, z_0)$ fonksiyonu

$$\tilde{\varphi}(z, z_0) := \begin{cases} \varphi(z, z_0), & z \in \overline{G} \\ \varphi\left(\alpha(z), z_0\right), & z \in G_{R'} - G \end{cases} \qquad (4.3.16)$$

şeklinde tanımlanarak $G_{R'}$ bölgesine genişletilebilir. $\tilde{\varphi}(z, z_0)$ fonksiyonunun $\overline{z}$'e göre türevi alınırsa

$$\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z, z_0) := \frac{\partial \tilde{\varphi}(z, z_0)}{\partial \overline{z}} = \begin{cases} 0, & z \in \overline{G} \\ \varphi'\left(\alpha(z), z_0\right)\alpha_{\overline{z}}, & z \in G_{R'} - \overline{G} \end{cases} \qquad (4.3.17)$$

elde edilir. $G_{R'}$ bölgesinde $\tilde{\varphi}(z, z_0)$ fonksiyonuna 3.1.2.8. Teorem (Cauchy-Pompeiu Formülü) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(z, z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}} \frac{\tilde{\varphi}(\zeta, z_0)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{G_{R'}} \frac{\tilde{\varphi}_{\overline{\zeta}}(\zeta, z_0)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}} \frac{\tilde{\varphi}(\zeta, z_0)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{G_{R'} - G} \frac{\tilde{\varphi}_{\overline{\zeta}}(\zeta, z_0)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{G} \frac{\tilde{\varphi}_{\overline{\zeta}}(\zeta, z_0)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta \end{aligned} \qquad (4.3.18)$$

bulunur. (4.3.18)'de $z \in G$ alınarak (4.3.17) dikkate alınırsa,

$$\varphi(z, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}} \frac{\tilde{\varphi}(\zeta, z_0)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{G_{R'} - G} \frac{\tilde{\varphi}_{\overline{\zeta}}(\zeta, z_0)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta \qquad (4.3.19)$$

eşitliği elde edilir. (4.3.19) eşitliğinin z'ye göre türevi alınırsa

$$\varphi'(z,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}}\frac{\tilde{\varphi}(\zeta,z_0)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{G_{R'}-G}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta \tag{4.3.20}$$

elde edilir.

Yeterince büyük $n>N(R_0)$ ve keyfi $0<\varepsilon<1$ için $R=1+c_1n^{\varepsilon-1}$ sayısı $1<R<R'$ olacak şekilde seçilsin. Böylece

$$A(z,z_0):=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}}\frac{\tilde{\varphi}(\zeta,z_0)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{G_{R'}-G_R}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,\quad z\in G$$

$$B(z,z_0):=-\frac{1}{\pi}\iint_{G_R-G}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,\quad z\in G$$

olmak üzere (4.3.19) eşitliği

$$\varphi(z,z_0)=A(z,z_0)+B(z,z_0) \tag{4.3.21}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.21) ifadesinde bulunan $A(z,z_0)$ fonksiyonu $\overline{G}$ 'da analitiktir ve bu fonksiyon $\overline{G}$ 'da

$$Q_n(z,z_0):=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}}\tilde{\varphi}(\zeta,z_0)K_{1,m,k,n}(\zeta,z)d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{G_{R'}-G_R}\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)K_{1,m,k,n}(\zeta,z)d\sigma_\zeta \tag{4.3.22}$$

şeklinde bir $Q_n(z,z_0)$ polinomu tanımlar. Bu ifadede $K_{1,m,k,n}(\zeta,z)$ Dzyadyk polinom çekirdeğidir. Böylece [28] yardımıyla

$$\left|A'(z,z_0)-Q_n'(z,z_0)\right|\le\frac{c_3}{n}\ ,\ z\in\overline{G} \tag{4.3.23}$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada c_3, z_0 noktasından bağımsız bir sabittir.

(4.3.22) ile tanımlı $Q_n(z,z_0)$ polinomu yardımıyla $\tilde{P}_n(z,z_0)$ polinomu

$$\tilde{P}_n(z,z_0):=Q_n(z,z_0)-Q_n(z_0,z_0) \tag{4.3.24}$$

şeklinde tanımlansın. (4.3.21), (4.3.24) eşitlikleri ve (4.3.23) değerlendirmesi kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-\tilde{P}_n'(\cdot,z_0)\right\|_{A_2}&=\left\|\left[A'(\cdot,z_0)-Q'(\cdot,z_0)\right]-B'(\cdot,z_0)\right\|_{A_2}\\&\preceq\frac{1}{n}+\left\|B'(\cdot,z_0)\right\|_{A_2}\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

elde edilir. Bu ifadede $\left\|B'(\cdot,z_0)\right\|_{A_2}$ normunu değerlendirmek için (3.3.2.3) ile tanımlı

$$\left(T(f)\right)(z) := -\frac{1}{\pi}\iint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma_\zeta$$

sınırlı lineer Hilbert dönüşümü göz önüne alınsın. $\tilde{\varphi}(z, z_0)$ fonksiyonu $L_2(\mathbb{C})$ sınıfına aittir. $G_R - G$ bölgesinde

$$\left|\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta, z_0)\right|^2 = \left|\varphi'(\alpha(\zeta), z_0)\right|^2 \left|\alpha_{\bar{\zeta}}\right|^2 \preceq \left|\varphi'(\alpha(\zeta), z_0)\right|^2$$

eşitliği göz önüne alınır ve bu fonksiyona Calderon-Zygmund eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left\|B'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2} &\preceq \left\|\tilde{\varphi}'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2} \preceq \left\|\varphi'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2(\alpha(G_R - G))} \\ &\preceq \left[mes\varphi\left(\alpha(G_R - G), z_0\right)\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

elde edilir. Böylece (4.3.26) değerlendirmesi (4.3.25)'de kullanılırsa

$$\left\|\varphi'(\cdot, z_0) - \tilde{P}_n'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2} \preceq \frac{1}{n} + \left[mes\varphi\left(\alpha(G_R - G), z_0\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.27}$$

olduğu görülür.

Şimdi $P_n(z, z_0)$ polinomu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$P_n(z, z_0) := \begin{cases} \tilde{P}_n(z, z_0) - (z - z_0)\left[\varphi'(z_0, z_0) - \tilde{P}_n'(z_0, z_0)\right], & n > N(R_0) \\ (z - z_0)\varphi'(z_0, z_0) \ , & n \leq N(R_0) \end{cases}$$

Bu aranılan polinomdur. Hölder ve Minkovski eşitsizlikleri ile birlikte (4.3.26) ve (4.3.27) değerlendirmeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\|\varphi'(\cdot, z_0) - P_n'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2} &= \left\|\left[A'(\cdot, z_0) + B'(\cdot, z_0)\right] - P_n'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2} \\ &\preceq \left\|\varphi'(\cdot, z_0) - \tilde{P}_n'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2} + \left\|A'(\cdot, z_0) - \tilde{P}_n'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2} + \left\|B'(\cdot, z_0)\right\| \\ &\preceq \frac{1}{n} + \left[mes\varphi\left(\alpha(G_R - G), z_0\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left\|\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}'(\cdot, z_0)\right\|_{A_2}\left[\iint_{G_R - G} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_0|}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\preceq \frac{1}{n} + \delta^{-1}(z_0)\left[mes\varphi\left(\alpha(G_R - G), z_0\right)\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{??}$$

elde edilir. Bu ise gösterilmek istenen sonuçtur.

4.3.4. Lemma: $G \in C_\theta(\lambda)$, $0<\lambda<2$, olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ ve $0<\mu<\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\lambda}{2-\lambda}\right\}$ için $P_n(z_0,z_0)=0$, $P_n(z_0,z_0)=\varphi'(z_0,z_0)$ koşullarını sağlayan bir $P_n(z,z_0)$ polinomu vardır ve bu polinom için

$$\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-P_n'(\cdot,z_0)\right\|_{A_2} \preceq \delta^{-\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}}(z_0)\,n^{-\mu} \tag{4.3.28}$$

olur [29].

4.3.5. Lemma: $G \in C_\theta(\lambda)$, $0<\lambda<2$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu 4.2.4'de tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda $z_0 \in G$, $\forall n \geq 1$ için

$$T_n(z_0,z_0)=\frac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}$$

koşulunu sağlayan bir $T_n(z,z_0)$ polinomu vardır ve bu polinom için

$$\left\|\frac{\varphi'(\cdot,z_0)}{D(\cdot)}-T_n(\cdot,z_0)\right\|_{A_2} \preceq \delta^{-\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}}(z_0)\,n^{-\mu} \tag{4.3.29}$$

olur. Burada; $\alpha>\vartheta(\lambda)$ ise $0<\mu<\min\left\{\frac{\lambda}{2-\lambda};\frac{1}{2}\right\}$, $\alpha \leq \vartheta(\lambda)$ ise $0<\mu<\alpha\min\{1;\lambda\}$ şeklinde olup, c z ve n'den bağımsız bir sabittir [27].

İspat: Lemmanın koşulu gereği $\frac{1}{D(z)} \in Lip_\alpha\left(\overline{G}\right)$'dır. L, $c(K)>1$ katsayılı yarıkonform eğri olduğundan [31, Teorem 3]'den

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|\frac{1}{D(z)}-\tilde{Q}_m(z)\right| \preceq d^{\alpha}\left(z,L_{1+1/m}\right) \tag{4.3.30}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\tilde{Q}_m(z)$ polinomu vardır. $Q_m(z,z_0)$ polinomu

$$Q_m(z,z_0):=\tilde{Q}_m(z)-\tilde{Q}_m(z_0)+\frac{1}{D(z_0)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $0<\mu'<\alpha\min\{1;\lambda\}$ için (4.3.30)'dan,

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|\frac{1}{D(z)}-Q_m(z,z_0)\right|\preceq m^{-\mu'} \tag{4.3.31}$$

elde edilir. (4.3.31) ve (4.3.28) değerlendirmeleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\varphi'(\cdot,z_0)}{D(\cdot)}-P_l'(\cdot,z_0)Q_m(\cdot,z_0)\right\|_{A_2} &\leq \left\|\frac{1}{D(\cdot)}\right\|_{C(\overline{G})}\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-P_l'(\cdot,z_0)\right\|_{A_2}\\ &+\left\|\varphi'(\cdot,z_0)\right\|_{A_2}\left\|\frac{1}{D(\cdot)}-Q_m(\cdot,z_0)\right\|_{C(\overline{G})}\\ &+\left\|\frac{1}{D(\cdot)}-Q_m(\cdot,z_0)\right\|_{C(\overline{G})}\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-P_l'(\cdot,z_0)\right\|_{A_2}\\ &\preceq \delta^{-\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}}(z_0)\left(l^{-\mu}+l^{-\mu}m^{-\mu'}\right)+m^{-\mu'}\end{aligned}$$

elde edilir. m, $\mu'\leq\mu$ olduğunda $m:=n$ şeklinde, $\mu'>\mu$ olması durumunda ise $m:=n^{\left[\frac{\mu}{\mu'}\right]}+1$ şeklinde tanımlanır ve $T_n:=P_l'Q_m$ şeklinde alınırsa ispat tamamlanır.

4.3.6. Lemma: $G\in C_\theta(\lambda)$, $0<\lambda<2$, ve $h(z)$, (4.2.4) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her bir $z_0\in G$ için

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left|K_k(z_0)\right|^2=O\left(\left|\lambda_0\right|^2\delta^{-\mu_1}(z_0)n^{-\mu_2}\right) \tag{4.3.32}$$

olur. Burada $\mu_1=\dfrac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}$ ve $\mu_2=2\min\{\mu;\mu'\}$ şeklindedir [27].

İspat:

$$J(f):=\iint_G h(z)\left|f(z)\right|^2 d\sigma_z \tag{4.3.33}$$

integrali göz önüne alınır ve

$$f(z_0,z_0)=\frac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}=:\lambda_0 \tag{4.3.34}$$

koşulunu sağlayan $f \in A_2(h,G)$ sınıfı üzerinde $J(f)$ integralinin minimum problemi incelenirse, bu integrale minimum değerini veren fonksiyonun

$$f_0(z,z_0) := \frac{\varphi'(z,z_0)}{D(z)}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan aynı problem, derecesi $(n-1)$'i aşmayan ve (4.3.34) koşulunu sağlayan polinomlar sınıfı üzerinde incelendiğinde

$$\min_{P_{n-1}}\left\{J(P_{n-1})\right\} = \frac{\lambda_0}{\sum_{j=0}^{n-1}\left|K_j(z_0)\right|^2}$$

olduğu ve $\tilde{Q}_{n-1}(z) := \lambda_0 \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1}\overline{K_j(z_0)}K_j(z)}{\sum_{j=0}^{n-1}\left|K_j(z_0)\right|^2}$ polinomunun bu integrale minimum değerinin veren polinom olduğu görülür [9]. Bunların yanı sıra,

$$\begin{aligned}\left|f_0(z,z_0)-\tilde{Q}_{n-1}(z,z_0)\right|^2 &= \left[f_0(z,z_0)-\tilde{Q}_{n-1}(z,z_0)\right]\left[\overline{f_0(z,z_0)-\tilde{Q}_{n-1}(z,z_0)}\right]\\ &= \left|\tilde{Q}_{n-1}(z,z_0)\right|^2 - \left|f_0(z,z_0)\right|^2 + 2\operatorname{Re}\overline{f_0(z,z_0)}\left[f_0(z,z_0)-\tilde{Q}_{n-1}(z,z_0)\right]\end{aligned}$$

eşitliği ve

$$\operatorname{Re}\iint_G h(z)\overline{f_0(z,z_0)}\left[f_0(z,z_0)-\tilde{Q}_{n-1}(z,z_0)\right]d\sigma_z = 0$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\iint_G h(z)\left|f_0(z,z_0)-\tilde{Q}_{n-1}(z,z_0)\right|^2 d\sigma_z &= \iint_G h(z)\left|\tilde{Q}_{n-1}\right|^2 d\sigma_z - \iint_G h(z)\left|f_0(z,z_0)\right|^2 d\sigma_z\\ &= \iint_G h(z)\left|\tilde{Q}_{n-1}\right|^2 d\sigma_z - \pi\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned}\pi \le \iint_G h(z)\left|\tilde{Q}_{n-1}\right|^2 d\sigma_z &= \pi + \iint_G h(z)\left|f_0(z,z_0)-\tilde{Q}_{n-1}(z,z_0)\right|^2 d\sigma_z\\ &\le \pi + \iint_G h(z)\left|f_0(z,z_0)-T_{n-1}(z,z_0)\right|^2 d\sigma_z\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

bulunur. Burada $T_{n-1}(z,z_0)$, $T_{n-1}(z_0,z_0)=\lambda_0$ koşulunu sağlayan keyfi bir polinomdur. (4.3.35) eşitliğinde

$$\iint_G h(z)\left|\tilde{Q}_{n-1}\right|^2 d\sigma_z = \frac{\lambda_0}{\sum_{j=0}^{n-1}\left|K_j(z_0)\right|^2}$$

olduğu göz önüne alınır ve $T_{n-1}(z, z_0)$ polinomu olarak 4.3.5.Lemma'daki polinom alınırsa (4.3.29) değerlendirmesi yardımıyla

$$\frac{\lambda_0}{\sum_{j=0}^{n-1}\left|K_j(z_0)\right|^2} = \pi + O\left(\delta^{-\mu_1}(z_0)n^{-\mu_2}\right)$$

elde edilir. Buradan paydadaki toplam için

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left|K_j(z_0)\right|^2 = \frac{\left|\lambda_0\right|^2}{\pi} - O\left(\left|\lambda_0\right|^2 \delta^{-\mu_1}(z_0)n^{-\mu_2}\right) \tag{4.3.36}$$

asimptotik gösterimi bulunur. $m > n$ olmak üzere (4.3.36)'dan

$$\sum_{j=n}^{m}\left|K_j(z_0)\right|^2 = O\left(\left|\lambda_0\right|^2 \delta^{-\mu_1}(z_0)n^{-\mu_2}\right) - O\left(\left|\lambda_0\right|^2 \delta^{-\mu_1}(z_0)m^{-\mu_2}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{j=n}^{\infty}\left|K_j(z_0)\right|^2 = O\left(\left|\lambda_0\right|^2 \delta^{-\mu_1}(z_0)n^{-\mu_2}\right) \tag{4.3.37}$$

asimptotik gösterimi elde edilir.

4.3.8. Lemma: $G \subset \mathbb{C}$ bir k-yarıçember, $0 \le k < 1$ ve $\Psi : \Delta \to \Omega$ bir konform dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall w_1, w_2 \in \overline{\Delta}$ için

$$\left|\Psi(w_1) - \Psi(w_2)\right| \succeq \left|w_1 - w_2\right|^{1+k}$$

sağlanır [27].

4.4. TEOREMLERİN İSPATLARI

4.4.1. (4.1.1. Teorem'in İspatı): Tespit edilmiş $a \in G$ ve keyfi $z \in G$ noktaları için

$$F(z) := \int_a^z f(\zeta)\, d\sigma_\zeta \tag{4.4.1}$$

fonksiyonu tanımlansın. $F(z)$ fonksiyonu G bölgesinde $f(z)$'in ilkel fonksiyonudur. $F(z)$ fonksiyonu $y(z)$ yarıkonform yansıması yardımıyla

$$\tilde{F}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in \overline{G} \\ f(y(z)), & z \in \Omega \end{cases} \tag{4.4.2}$$

şeklinde tanımlanarak G bölgesinden $\overline{\mathbb{C}}$'a genişletilebilir. Bu fonksiyon $ACL(\overline{\mathbb{C}})$ sınıfındandır. Bunu gösterebilmek için keyfi bir $R \subset \mathbb{C}$ dikdörtgeni ve bu R dikdörtgeninin yatay (veya düşey) kenarına ait olan ve birbirleriyle kesişmeyen $(z_1, z_1'), (z_2, z_2'), \ldots, (z_n, z_n')$ aralıklar sistemi ile

$$\begin{aligned} I_n &:= \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\tilde{F}(z_k') - \tilde{F}(z_k) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}{}^{(1)} \left| F(z_k') - F(z_k) \right| + \sum_{k=1}^{n}{}^{(2)} \left| F(y(z_k')) - F(y(z_k)) \right| + \sum_{k=1}^{n}{}^{(3)} \left| \tilde{F}(z_k') - \tilde{F}(z_k) \right| \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

toplamı göz önüne alınsın. Burada $\sum^{(1)}$ toplamı, G bölgesinde bulunan aralıklar üzerinden; $\sum^{(2)}$ toplamı, Ω bölgesinde bulunan aralıklar üzerinden ve $\sum^{(3)}$ toplamı ise L eğrisi ile ortak noktası bulunan aralıklar üzerinden alınacaktır. Dikkat edilirse $z_k^* \in (z_k, z_k')$ ise genelliği kaybetmeden $z_k \in G$ ve $z_k' \in \Omega$ alınabilir. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n}{}^{(3)} \left| \tilde{F}(z_k') - \tilde{F}(z_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n}{}^{(3)} \left(\left| F(y(z_k')) - F(z_k^*) \right| + \left| F(z_k^*) - F(z_k) \right| \right) \tag{4.4.4}$$

yazılabilir. $F(z) \in Lip_1(\overline{G})$ olduğundan $\forall z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$\left| F(z_1) - F(z_2) \right| \leq M \left| z_1 - z_2 \right| \tag{4.4.5}$$

eşitsizliğini sağlayan $\exists M > 0$ sayısı vardır. (4.4.4) ve (4.4.5) göz önüne alınarak (4.4.3) eşitsizliği

$$\begin{aligned} I_n &\leq M \left(\sum_{k=1}^{n}{}^{(1)} \left| z_k' - z_k \right| + \sum_{k=1}^{n}{}^{(2)} \left| y(z_k') - y(z_k) \right| \right) \\ &+ M \left(\sum_{k=1}^{n}{}^{(3)} \left| y(z_k') - y(z_k^*) \right| + \sum_{k=1}^{n}{}^{(3)} \left| z_k^* - z_k \right| \right) \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan $y(z)\in ACL(\mathbb{C}-\{a\})$ olduğundan $\sum_{k=1}^{n}|z_k - z_k'| < \delta_1$ eşitsizliğini sağlayan $\exists\delta_1 > 0$ sayısı vardır ve bu δ_1 için

$$\sum_{k=1}^{n}{}^{(2)}\left|y(z_k') - y(z_k)\right| + \sum_{k=1}^{n}{}^{(3)}\left|y(z_k') - y(z_k^*)\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{4.4.7}$$

sağlanır. $\delta := \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$ seçilirse $\sum_{k=1}^{n}|z_k - z_k'| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan tüm z_k, z_k' noktaları için (4.4.7) değerlendirmesi (4.4.6)'da kullanılırsa

$$I_n \le M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $\tilde{F}(z)\in ACL(\mathbb{C})$ olmasıdır. Diğer taraftan $p>2$ olmak üzere $\tilde{F}_z, \tilde{F}_{\bar{z}} \in L_p(\mathbb{C})$'dir. Böylece $\tilde{F}(z)$ fonksiyonu L_p-türevlerine sahip bir fonksiyondur. 3.1.2.8. Teorem'i $\tilde{F}(z)$ fonksiyonuna uygulanırsa herhangi bir $z\in\mathbb{C}$ noktası ve $|z|<r$ için

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\le r}\frac{\tilde{F}_{\bar{\zeta}}}{\zeta - z}d\sigma_\zeta \tag{4.4.8}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte z'ye göre türev alınırsa,

$$\tilde{F}'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\sigma_\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\le r}\frac{\tilde{F}_{\bar{\zeta}}}{(\zeta - z)^2}d\sigma_\zeta \tag{4.4.9}$$

elde edilir. (4.4.9) ifadesinde $z\in G$ alınırsa

$$f(z) = F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\sigma_\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\{|\zeta|\le r\}-G}\frac{(f\circ y)(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\sigma_\zeta \tag{4.4.10}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\sigma_\zeta\right| \le \lim_{r\to\infty}\left(\frac{2}{\pi r^2}\max_{|\zeta|=r}\left|\tilde{F}(\zeta)\right|\int_{|\zeta|=r}|d\zeta|\right) = 0$$

olduğu dikkate alınır ve (4.4.10) ifadesinde $r\to\infty$ için limite geçilirse

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{(f\circ y)(\zeta)}{(\zeta - z)^2}y_{\bar{\zeta}}d\sigma_\zeta$$

elde edilir.

4.4.2. (4.1.2. Teorem'in İspatı): Genelliği kaybetmeden $0 \in G$ ve $y(\infty)=0$ olsun.

$\Rightarrow$: $f(z)$ fonksiyonu (4.1.5) integral gösterimine sahiptir. Bu durumda $0 \in G$ için

$$f(0) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{(y(\zeta))^2} y_{\bar{\zeta}} d\sigma_\zeta \tag{4.4.11}$$

integral gösterimi yazılabilir. Lebesque integralinin sonlu olmasından

$$\iint_G \left| \frac{f(\zeta)}{(y(\zeta))^2} y_{\bar{\zeta}} \right| d\sigma_\zeta < M < \infty$$

elde edilir. $y(z)$ regüler yansıma olduğu için yeterince küçük $\delta > 0$ ve $\zeta \in U_\delta = \{\zeta \in G : |\zeta| < \delta\}$ için (3.3.5)'den

$$|y_{\bar{\zeta}}| \asymp |y(\zeta)|^2$$

ve $\zeta \in G - U_\delta$ için (3.3.6)'dan

$$|y_{\bar{\zeta}}| \asymp 1 \text{ ve } |y(\zeta)| \asymp 1$$

olur. Bu değerlendirmeler göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \iint_G |f(\zeta)| d\sigma_\zeta &= \iint_{U_\delta} |f(\zeta)| d\sigma_\zeta + \iint_{G-U_\delta} |f(\zeta)| d\sigma_\zeta \\ &\asymp \iint_{U_\delta} \frac{|f(\zeta)|}{\left|(y(\zeta))^2\right|} |y_{\bar{\zeta}}| d\sigma_\zeta + \iint_{G-U_\delta} \frac{|f(\zeta)|}{\left|(y(\zeta))^2\right|} |y_{\bar{\zeta}}| d\sigma_\zeta \\ &\asymp 1 \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

elde edilir. Böylece (4.4.12) değerlendirmesi $f(z)$ fonksiyonunun $A_1(G)$ sınıfından olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$: $f \in A_1(G)$'dir. L K-yarıkonform eğri olduğu için $\psi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tanımlı K-yarıkonform dönüşümü vardır ve bu dönüşüm altında birim çemberin görüntüsü L'dir. $\Gamma_n = \left\{ w : |w| = 1 - \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ olmak üzere her bir $n \in \mathbb{N}$ için $L_n = \psi(\Gamma_n)$

eğrileri G bölgesinin iç seviye eğrileri ve $G_n := intL_n$ olsun. $\{G_n\}$ bölgeler dizisi G bölgesini içten doldurur ve

$$L_n \to L\,,\quad n \to \infty$$

olur. Diğer taraftan her bir $n \in \mathbb{N}$ için L_n, K-yarıkonform eğridir ve L_n eğrilerine göre $y_n(0) = \infty$ koşulunu sağlayan y_n yarıkonform yansıması vardır. Bunun yanı sıra $y_n(z)$ yansımaları için (3.3.5)-(3.3.7) sağlanır. Bu ilişkiler göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
I = \iint_G \frac{|f(\zeta)||y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta) - z|^2} d\sigma_\zeta &= \left(\iint_{U_\delta} \frac{|f(\zeta)||y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta) - z|^2} d\sigma_\zeta + \iint_{G - U_\delta} \frac{|f(\zeta)||y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta) - z|^2} d\sigma_\zeta \right) \\
&\preceq \iint_{U_\delta} |f(\zeta)| \frac{|y(\zeta)|^2}{|y(\zeta) - z|^2} d\sigma_\zeta + \iint_{G - U_\delta} \frac{|f(\zeta)|}{d^2(z, L)} d\sigma_\zeta \\
&\preceq \iint_{U_\delta} |f(\zeta)| d\sigma_\zeta + \frac{1}{d^2(z, L)} \iint_{G - U_\delta} |f(\zeta)| d\sigma_\zeta \\
&\preceq \iint_G |f(\zeta)| d\sigma_\zeta < \infty
\end{aligned}
\tag{4.4.13}
$$

elde edilir. Böylece (4.4.13)'den I integrali vardır. Diğer taraftan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(z) \in A(\overline{G}_n)$ olduğundan 4.1.1. Sonuç'tan $\forall z \in G_n$ için

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{G_n} \frac{f(\zeta)(y_n)_{\bar{\zeta}}}{(y_n(\zeta) - z)^2} d\sigma_\zeta \tag{4.4.14}$$

integral gösterimi geçerlidir.

$z \in G$ olsun. $N \in \mathbb{N}$ sayısı $z \in G_N$ olacak şekilde belirlensin. (4.4.12) değerlendirmesine benzer şekilde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $y_n(z)$ yansımaları (3.3.5)-(3.3.7) ilişkilerini sağlandığından tüm $n > N(z)$ ve $\delta = d(0, L_1)/2$ için

$$\frac{|(y_n)_{\bar{\zeta}}|}{|y_n(\zeta) - z|^2} \preceq 1 \tag{4.4.15}$$

sağlanır. Diğer taraftan Lebesque İntegralinin mutlak sürekli olmasından verilen keyfi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$ sayısı vardır ve $mes(D) < \varepsilon_1$ olduğunda

$$\iint_D |f(\zeta)| d\sigma_\zeta < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\exists N_1 > N$ sayısı bulunabilir ve $\forall n \geq N_1$ için $mes(G - G_n) < \varepsilon_1$ sağlanır. Böylece $\forall n \geq N_1$ için

$$\pi |I - f(z)| = \left| \iint_G \frac{f(\zeta) y_{\bar{\zeta}}}{(y(\zeta) - z)^2} d\sigma_\zeta - \iint_{G_n} \frac{f(\zeta)(y_n)_{\bar{\zeta}}}{(y_n(\zeta) - z)^2} d\sigma_\zeta \right|$$

$$= \left| \iint_{G_{N_1}} \frac{f(\zeta) y_{\bar{\zeta}}}{(y(\zeta) - z)^2} d\sigma_\zeta + \iint_{G - G_{N_1}} \frac{f(\zeta) y_{\bar{\zeta}}}{(y(\zeta) - z)^2} d\sigma_\zeta \right.$$

$$\left. - \left(\iint_{G_n - G_{N_1}} \frac{f(\zeta)(y_n)_{\bar{\zeta}}}{(y_n(\zeta) - z)^2} d\sigma_\zeta + \iint_{G_{N_1}} \frac{f(\zeta)(y_n)_{\bar{\zeta}}}{(y_n(\zeta) - z)^2} d\sigma_\zeta \right) \right|$$

$$\leq \iint_{G_{N_1}} |f(\zeta)| \left| \frac{y_{\bar{\zeta}}}{(y(\zeta) - z)^2} - \frac{(y_n)_{\bar{\zeta}}}{(y_n(\zeta) - z)^2} \right| d\sigma_\zeta +$$

$$+ \iint_{G - G_{N_1}} \frac{|f(\zeta)| |y_{\bar{\zeta}}|}{\left|(y(\zeta) - z)^2\right|} d\sigma_\zeta + \iint_{G_n - G_{N_1}} \frac{|f(\zeta)| |(y_n)_{\bar{\zeta}}|}{\left|(y_n(\zeta) - z)^2\right|} d\sigma_\zeta \qquad 4.4.16)$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3$$

elde edilir. (4.4.15) değerlendirmesi kullanılarak

$$I_2 \preceq \iint_{G - G_{N_1}} |f(\zeta)| d\sigma_\zeta \preceq \varepsilon \qquad (4.4.17)$$

ve

$$I_3 \preceq \iint_{G_n - G_{N_1}} |f(\zeta)| d\sigma_\zeta \preceq \varepsilon \qquad (4.4.18)$$

bulunur. I_1 integralini değerlendirmek için

$$\tilde{y}(\zeta) := \frac{1}{y(\zeta) - z}; \; \tilde{y}_n(\zeta) := \frac{1}{y_n(\zeta) - z}$$

yarıkonform yansımalarını göz önüne alınsın. $\{\tilde{y}_n(\zeta)\}$ dizisi G bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde $\{\tilde{y}(\zeta)\}$ yansımasına düzgün olarak yakınsar. Yani keyfi $M \subset G$ kompakt alt kümesi için

$$\left\|(\tilde{y}_n)_\zeta - \tilde{y}_\zeta\right\|_{L_p} \to 0\,, \quad n \to \infty$$

olur. Bu sonuç göz önüne alınarak I_1 integraline Hölder Eşitsizliği uygulanırsa, $\forall n > N_2$ için

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{G_{N_1}} |f(\zeta)| \left| \frac{y_{\bar{\zeta}}}{\left(y(\zeta)-z\right)^2} - \frac{(y_n)_{\bar{\zeta}}}{\left(y_n(\zeta)-z\right)^2} \right| d\sigma_\zeta \\
&\le \max_{\zeta \in G_{N_1}} |f(\zeta)| \iint_{G_{N_1}} \left|(\tilde{y}_n)_\zeta - \tilde{y}_\zeta\right| d\sigma_\zeta \\
&\le \max_{\zeta \in \overline{G}_{N_1}} |f(\zeta)| \left[\iint_{G_{N_1}} d\sigma_\zeta\right]^{\frac{1}{q}} \left[\iint_{G_{N_1}} \left|(\tilde{y}_n)_\zeta - \tilde{y}_\zeta\right|^p d\sigma_\zeta\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (4.4.19) \\
&< \max_{\zeta \in \overline{G}_{N_1}} |f(\zeta)| \left[mes\left(G_{N_1}\right)\right] \varepsilon \\
&\preceq \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n > \max\{N_1, N_2\}$ için (4.4.17), (4.4.18) ve (4.4.19) değerlendirmeleri (4.4.16) ifadesinde kullanılarak

$$|I - f(z)| \preceq \varepsilon$$

bulunur. ε keyfi olduğu için $f(z) = I$ elde edilir.

4.4.3. (4.2.1 Teorem'in İspatı): Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(z) &= |f(z) - S_n(f,z)| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k K_k(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k K_k(z)\right| \\
&\le \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} |K_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} = E_n(f, A_2) \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} |K_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.4.20)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.4.20) eşitsizliğinde 4.3.6. Lemma kullanılırsa istenilen elde edilir.

$T_n(z)$, $\overline{G}$ da $f(z)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_k^{(n)} := \iint_G h(\zeta) T_n(\zeta) \overline{K_k(\zeta)} d\sigma_\zeta$$

olmak üzere

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} K_k(z) \tag{4.4.21}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(z) &= \left| f(z) - S_n(f,z) \right| \\ &\le \left| f(z) - T_n(z) \right| + \left| T_n(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z) \right| \\ &\le E_n\left(f, \overline{G}\right) + \left| T_n(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z) \right| \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left| T_n(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} K_k(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n} \iint_G h(\zeta)\left[T_n(\zeta) - f(\zeta)\right] \overline{K_k(\zeta)} K_k(z) d\sigma_\zeta \right| \\ &\le \max_{z\in\overline{G}} \left| T_n(z) - f(z) \right| \left| \iint_G h(\zeta) \left[\sum_{k=0}^{n} \overline{K_k(\zeta)} K_k(z) \right] d\sigma_\zeta \right| \\ &\le \max_{z\in\overline{G}} \left| T_n(z) - f(z) \right| \left[\iint_G h(\zeta) \left| \sum_{k=0}^{n} \overline{K_k(\zeta)} K_k(z) \right| d\sigma_\zeta \right]\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki integrale Hölder Eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left| T_n(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z) \right| &\le E_n\left(f, \overline{G}\right) \left[\iint_G \left(\sqrt{h(\zeta)}\right)^2 d\sigma_\zeta \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[\iint_G \left(\sqrt{h(\zeta)}\right)^2 \left| \sum_{k=0}^{n} \overline{K_k(\zeta)} K_k(z) \right|^2 d\sigma_\zeta \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le cE_n\left(f, \overline{G}\right) \left[\sum_{k=0}^{n} \left| K_k(z) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.4.23)}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$F(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \overline{K_k(\zeta)} K_k(z)$$

bilineer serisi göz önüne alınır ve $z \in G$ olmak üzere bu fonksiyonuna $|\zeta - z| < d(z,L)$ dairesinde 3.2.2.8 Teorem'i uygulanırsa

$$\iint\limits_{|\zeta - z| < d(z,L)} |F(z,\zeta)|^2 \, d\sigma_\zeta \le \frac{1}{\pi d^2(z,L)} \iint\limits_G |F(z,\zeta)|^2 \, d\sigma_\zeta$$

$$\left[\sum_{k=0}^{n} |K_k(z)|^2\right]^2 \le \frac{1}{c\pi d^2(z,L)} \iint\limits_G h(\zeta) |F(z,\zeta)|^2 \, d\sigma_\zeta$$

$$= \frac{1}{c\pi d^2(z,L)} \iint\limits_G h(\zeta) \left| \sum_{k=0}^{n} \overline{K_k(z)} K_k(\zeta) \right|^2 d\sigma_\zeta$$

$$= (c\pi)^{-1} d^{-2}(z,L) \sum_{k=0}^{n} |K_k(z)|^2$$

eşitliği ve bu eşitlikten

$$\sum_{k=0}^{n} |K_k(z)|^2 \le (c\pi)^{-1} d^{-2}(z,L) \tag{4.4.24}$$

bulunur. (4.4.24) değerlendirmesi (4.4.23)'de kullanılarak

$$\left| T_n(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k K_k(z) \right| \le E_n\left(f, \overline{G}\right) d^{-1}(z,L)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlik (4.4.22)'de kullanılırsa,

$$\varepsilon_n(z) \le c E_n\left(f, \overline{G}\right) d^{-1}(z,L) \tag{4.4.25}$$

elde edilir. $z \in L^*$ alınarak (4.4.25) eşitsizliğinde 4.3.6. Lemma göz önüne alınır ve (4.3.1) kullanılırsa

$$\varepsilon_n \le c E_n\left(f, \overline{G}\right) d^{-1}(t, L_R) \quad , \; z \in \overline{G} \tag{4.4.26}$$

bulunur. Burada $t \in L$ noktası $d(z,L) = |z - t|$ eşitliğini sağlayan noktadır.

4.4.4. (4.2.2. Teorem'in İspatı): Teorem'in hipotezinden $G \in C_\theta(\lambda)$ olduğu için $\lambda^* = \max\{1, \lambda\}$ ve $\lambda_* = min\{1, \lambda\}$ olmak üzere

$$c_1 n^{-\lambda^*} \le d\left(z, L_{1+1/n}\right) \le c_2 n^{-\lambda_*} \tag{4.4.27}$$

sağlanır. Böylece (4.4.27) ve (4.4.26) kullanılarak istenilen elde edilir.

4.4.5. (4.2.2. Sonuç'un İspatı): $f \in W^{(r)} H^{\alpha}\left(\overline{G}\right)$ olduğundan (4.1.7) yardımıyla

$$\left|f(z)-S_n(f,z)\right| \leq d^{r+\alpha}\left(z, L_{1+1/n}\right),\ z \in \overline{G} \tag{4.4.28}$$

elde edilir. 4.4.4. Teorem'de (4.4.27) ve (4.4.28) kullanılarak istenilen elde edilir.

4.4.6 (4.2.3. Teorem'in ispatı): Teoremin koşulu gereği L eğrisine göre (4.1.1) ile tanımlı K^2-yarıkonform $y(z)$ yansıması vardır ve $\Psi : \Delta \to \Omega$ konform dönüşümü (4.1.4)'de olduğu gibi tanımlanarak genişletilmiş kompleks düzleme K^2-yarıkonform dönüşüm olarak genişletilebilir. G bölgesi bir k- yarıçember olduğu için 4.3.8. Lemma'dan

$$d\left(t, L_{1+1/n}\right) \succeq n^{-(1+k)} \tag{4.4.29}$$

olur ve (4.4.29)'dan

$$d^{-1}\left(t, L_{1+1/n}\right) \preceq n^{(1+k)} \tag{4.4.30}$$

elde edilir. Bunun yanı sıra $f \in W^{(r)} H^{(\alpha)}\left(\overline{G}\right)$ fonksiyonu için [31]'den

$$\left|f(z)-S_n(f,z)\right| \preceq n^{-(r+\alpha)(1-k)} \tag{4.4.31}$$

bulunur. Böylece (4.4.26)'dan

$$\varepsilon_n \preceq n^{-(r+\alpha)(1-k)+(1+k)} \tag{4.4.32}$$

elde edilir. $k = \dfrac{K^2-1}{K^2+1}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\varepsilon_n \preceq n^{-\frac{2}{K^2+1}\left(r+\alpha-K^2\right)}$$

bulunur. Böylece $r+\alpha > K^2$ ve $\gamma = \dfrac{2}{K^2+1}\left(r+\alpha-K^2\right)$ olmak üzere her bir $f \in W^{(r)} H^{(\alpha)}\left(\overline{G}\right)$ fonksiyonu için

$$\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty$$

olacaktır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde ele alınan konu ile ilgili sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde,

4.1. Düz Teoremler

4.2. Düz Teoremlerin Uygulamaları

başlıkları altında toplanmıştır. Ayrıca

4.3. Yardımcı Sonuçlar

bölümünde esas teoremlerin ispatı için gerekli lemma ve teoremler ile bunların ispatları verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma'da elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) 4.1.1. Teorem'de $L=\partial G$ yarıkonform eğrisiyle sınırlı, kompleks düzlemin sonlu G bölgesinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonu için integral gösterimi elde edilmiştir.

2) 4.1.2. Teorem'de $A_1(G)$ sınıfından olan $f(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemin $L=\partial G$ yarıkonform eğrisiyle sınırlı sonlu G bölgelerinde (4.1.4) (veya (4.1.5)) integral gösterimine sahip olması için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir.

3) 4.1.3. Teorem'de kompleks düzlemin yarıkonform eğrileriyle sınırlı sonlu bölgelerinde her bir $f(z)\in A_1(G)$ fonksiyona karşılık derecesi n'yi aşmayan cebirsel bir polinom inşa edilmiştir.

4) 4.1.4. Teorem'de kompleks düzlemin yarıkonform eğrileriyle sınırlı kapalı bölgelerinde analitik olan herhangi bir $f(z)$ fonksiyonuna 4.1.3. Teorem'inde inşa edilen $P_n(f,z)$ cebirsel polinomuyla yaklaşılmıştır. Bu yaklaşımın hızı $\omega\left(d\left(z,L_{1+1/n}\right)\right)$ değerine bağlı olarak bulunmuştur.

5) 4.1.5. Teorem'de $f\in A^r\left(\overline{G}\right)$ fonksiyonuna 4.1.3. Teorem'de inşa edilen $P_n(f,z)$ polinomuyla yaklaşılmıştır. Bu yaklaşımın hızı tespit edilmiş $z\in\overline{G}$ noktasının $L_{1+1/n}$ seviye eğrisine olan uzaklığı ile $f(z)$ fonksiyonunun $\overline{G}$'da süreklilik modülüne bağlı olarak belirlenmiştir.

6) 4.2.1. Teorem'de $G \subset \mathbb{C}$'nin parçalı düzgün eğrilerle sınırlı ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun (4.2.4) ile tanımlı olması durumunda $n \to \infty$ için $\varepsilon_n(z)$'nin sıfıra gitme hızı belirlenmiştir. Böylece her bir

7) 4.2.2. Teorem'de $G \in C_\theta(\lambda)$ ve $f \in A(\overline{G})$ olması durumunda $n \to \infty$ için ε_n'nin sıfıra gitme hızı belirlenmiştir.

8) 4.2.3. Teorem'de $G \subset \mathbb{C}$ bölgesinin K yarıkonform eğriyle sınırlı ve $f \in W^r H^\alpha(\overline{G})$ olması durumunda bu bölgenin kapanışında $n \to \infty$ için ε_n'nin sıfıra gitme hızı belirlenmiştir.

5.2. ÖNERİLER

Bu tezde ele alınan problem kompleks düzlemin farklı bölgeleri ve farklı fonksiyon sınıfları için incelenerek benzer sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Devore, R.A., Lorentz G.G., "Constructive Approximation", Springer-Verlag, USA, 499s., (1993).

[2] Suetin, P.K., "Series of Faber Polynomials" , Basımevi, Basım yeri, 301s., (1998).

[3] Szegö, G., "Ortogonal Polinomials", Amer. Math. Soc.,USA, (1939).

[4] Geronimus, Y.L., "On some properties of analytic functions continuous on a closed circle or circular sector" Mat.Sb., **38(80):**319-330, (1956).

[5] Korovokin, P.P., "the Asymptotic representation of polinomials orthogonal over a region", Dokl.Akad. Nauk SSSR, **58(9):**1883-1885, (1947).

[6] Carleman, T., "Uber die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen", Ark.Mat.Astron.,**17(23):**1-30, (1922).

[7] Rosembloom, P.C., Warshawskii, S.E., "Approximation by polinomials", University of Michigan Press.,USA, 605s., (1955).

[8] Suetin, P.K., "Polynomials Orthogonal over a Region and Bieberbach Polynomials", American Mathematical Society, USA, 87s., (1974).

[9] Abdullayev, F.G., Andrievskii, V.V., "On Orthogonal Polinomials in the Domains with K-quasiconformal Boundary", Izv.Akad.Nauk., Azerbaycan, **1:**3-7, (1983).

[10] Gaier, D., "Estimate of conformal mappings at the boundary via the strip method", Indiana Univ. Mat. J., **21:**581-595, (1988).

[11] Abdullayev, F.G., Uniform Convergence of the Generalized Bieberbach Polinomials in Regions with Non-Zero Angles", Acta Math., **77(3):**223-246, (1997).

[12] Zill, D.G., Shanan P.D., "A First Course in Complex Analysis with Application", Jones and Barlet Publishers, USA, 449s., (2003).

[13] Saff, E.B., Snider, A.D., Trefethen, L.N., "Fundamentals of Complex Variable", Prentice Hall, New Jersey, 468s., (1993).

[14] Andrievskii, V.V., Belyi, V.I.,Dzjadyk, V.K., "Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable", World Federation,

USA, 199s., (1995).

[15] Ahlfors L.V., "Complex Analysis", McGraw-Hill Book Company, England, 331s., (1979).

[16] Rudin, W., "Real and Complex Analysis", McGraw-Hill International Editions, New York, 416s., (1987).

[17] Markushevich, A.I., "Theory of Functions of a Complex Variable", Chelsea Publishing Company, New york, 1231s., (1985).

[18] Başkan, T., "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", Vipaş, Basım Yeri, 360s., (1998).

[19] Kızmaz, H., "Fonksiyonel Analize Giriş", Karadeniz Tenkilk Üniversitesi Basımevi, Trabzon, 322s., (1993).

[20] Yosida, K., "Functional Analysis", Springer, Almanya, 500s., (1980).

[21] Smirnov, V.I., Lebedev, N.A., "Functions of a Complex Variable", M.I.T. Press, London, 488s., (1968).

[22] Davis, J.P., "Interpolation and Approximation", Blaısdell Publishing Company, New York, 393s., (1963).

[23] Ahlfors, L.V., "Lectures on Quasiconformal Mappings", Von Nosrand Company,USA, 146s., (1987).

[24] Balcı, M., "Reel Analiz", Erdem Maatba, Ankara,141s., (2000).

[25] Abdullayev, F.G., Küçükaslan M., "On The Convergence Of The Fourier Series Of Orthogonal Polinomials In The Domain With Piecewise Smooth Boundary", Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, **14(22):**3-13**,** (2001).

[26] Abdullayev, F.G., "Uniform Convergence of The Bieberbach Polinomials Inside and on The Closure of Domains in the Complex Plane", **7(1):**77-101, (2001).

[27] Abdullayev, F.G., Küçükaslan M., "On The Convergence of Fourier Series with Orthogonal Polinomials inside and the Closure of a Region", Ukrainian Mathematical Journal, **54(10):**1567-1582**,** (2002).

[28] Belyi, V.I., "Conformal mappings and approximations of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary", Math. USSR-Sb.,**31:**289-317, (1977).

[29] Abdullayev, F.G., Küçükaslan M., "On the Convergence of the Fourier Series of Orthonormal Polinomials in the Complex Plane", Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, **11(3):**157-166**,** (1999).

[30] Andrievskii, V.V., Belyi, V.I.,Dzjadyk, "Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable" World Federation, Atlanta, (1995).

[31] Anderson, J.M., Gehring, F.W., Hinkanen A., "Polynomial approximation in quasidisks", Different. Geom. Complex Analysis, 75-86, (1985).

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Mersin'in Tarsus ilçesinde doğdu. İlköğrenimini 1993 yılında Tarsus Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda, orta öğrenimini 1996 yılında Tarsus Cumhuriyet Lisesi'nde tamamladı. 1997 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2001 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Batman Merkez Hürriyet İlköğretim Okulu'na Matematik öğretmeni olarak atandı.

2003 yılında Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2004 yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında araştırma görevlisi kadrosuna atandı. Halen aynı kadroda araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.