

**FREKANS BÖLGESİNDE SÜREKLİ ve KESİKLİ  
SİSTEMLERDE TERS OPTİMAL KONTROL ve  
GAZ TÜRBİNİ PROBLEMİNE UYGULANMASI**

**SERRA ALTINOLUK**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ  
ANA BİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MERSİN  
KASIM- 2007**

**FREKANS BÖLGESİNDE SÜREKLİ ve KESİKLİ  
SİSTEMLERDE TERS OPTİMAL KONTROL ve GAZ TÜRBİNİ  
PROBLEMİNE UYGULANMASI**

**SERRA ALTINOLUK**

**Mersin Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Elektrik-Elektronik Mühendisliği  
Ana Bilim Dalı**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı  
Prof. Dr. C. Cengiz Arcasoy**

**MERSİN  
Kasım – 2007**

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı  
Prof. Dr. C. Cengiz ARCASOY

Jüri Üyesi  
Doç. Dr. Caner ÖZDEMİR

Jüri Üyesi  
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin MUTLU

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun ...../...../.....tarih ve ...../..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr.Mahir TURHAN  
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

## ÖZ

Bu çalışmada optimal kontrol problemi için incelenen yeni iki bölge için, sistemin özdeğerlerini seçilmiş olan bölgeler içerisine yerleştirecek sıklık bölgesinde yeni algoritma geliştirilmiştir. Optimal kontrol probleminde, sistemin özdeğerlerinin geçici tepkiyi (transient response) daha iyileştirebilmek için belirli bölgelere yerleştirilmesi gerekmektedir ki bu da ters optimal kontrol problemidir. İncelenen yeni iki bölgede ters optimal kontrol probleminin çözümünü sağlayan  $Q$  pozitif yarı tanımlı ağırlık matrisleri bulunmuştur. İncelenen optimal sistemin özdeğerlerinin seçilen bölgeler içine girdiği görülmüştür.

[3] 'te incelenen gaz türbini problemi sürekli sistemde ele alınarak optimal tasarım gerçekleştirilmiştir. Daha sonra sistemin tepkisini iyileştirmek için ters optimal kontrol algoritması kullanılmıştır. Seçilen giriş-çıkış değerlerine göre grafiklerin ve sıklık bölgesi sonuçların; zaman bölgesindeki sonuçlarla doğruluğu gösterilmiştir.

Seçilen yeni iki bölge için sıklık bölgesi yaklaşımı, bu çalışmada gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların doğruluğu MATLAB kodlarıyla da kontrol edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Optimal kontrol, ters optimal kontrol, kök yerleştirme, gaz türbini, spektral faktörizasyon.

## ABSTRACT

Discrete and continuous time-invariant multivariable linear optimal feedback control system design has been studied of the optimal control problem in frequency domain. The inverse optimal control problem is introduced to obtain a better transient response. A new algorithm is presented for the allocation of discrete-time systems' closed-loop poles inside two new regions in frequency domain. The positive/positive semidefinite weighting matrix  $Q$ , which allocates closed-loop poles inside new regions is found and also checked with MATLAB commands.

An example of a gas turbine analyses in frequency domain given by Arcasoy [3] is considered. The method was based on the spectral factorization of the performance spectrum matrix and was extended to the non-square transfer function matrix as well. The constant optimal gain matrix  $K$  is found directly.

The results obtained for new regions in frequency domain are also checked with MATLAB commands in time domain. It has been shown that frequency domain results coincide with the time-domain solution.

**Key words:** Optimal control, inverse optimal control, pole assignment, gas turbine, spectral factorization

## **TEŞEKKÜR**

Bu tez alışmamın her aşamasında bilgisini ve manevi desteğini esirgemeyen ve bu alışmamın oluşmasında büyük emeği geen değerli danışmanım Prof. Dr. C. Cengiz ARCASOY'a sonsuz teőekkürlerimi bir borç bilirim.

Eęitimimin bu noktaya hatta bundan sonraki noktalara da ulaşmasında katkısı olan ve olacak olan, sabrıyla daima yanımda olan Anneme de teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZ</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b>	<b>iii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b>	<b>iv</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b>	<b>v</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b>	<b>v</b>
<b>SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ</b>	<b>vii</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI</b>	<b>2</b>
2.1. OPTİMAL KONTROL PROBLEMİN TANIMI	2
2.2. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN SIKLIK BÖLGESİ TASARIM YÖNTEMLER	3
2.2.1. Ayrık-Zamanlı Sistemin Dönüş-Fark ve Dönüş- Oranı Matrisleri	3
2.2.2. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Tasarımında Görüngesel Ayrışımın Kullanılması	5
2.2.3. Tanımlar ve gerekli tasarım yöntemleri	5
2.2.4. Optimal denetleyicinin görüngesel ayrışımı ile hesaplanması (Yöntem 1)	7
2.2.5. Optimal denetleyicinin görüngesel ayrışım ile hesaplanması (Yöntem 2)	9
2.3. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNDE KÖKLERİN YENİ BÖLGE İÇERİSİNE ÇEKİLMESİ	10
<b>3. MATERYAL ve METOT</b>	<b>15</b>
3.1. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNDE İNCELENEN YENİ BÖLGE	15
3.2. PROBLEM FORMÜLASYONU	15
3.3. BULUNAN Q AĞIRLIK MATRİSİNİN POZİTİF YARI- TANIMLI OLDUĞUNUN İRDELENMESİ	17
<b>4. BULGULAR ve TARTIŞMASI</b>	<b>19</b>
4.1. I. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER	19
4.2. II. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER	42
4.3. GAZ TÜRBİNİN GENEL TANIMI	65

4.3.1. Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemlerin Sıklık Bölgesindeki Tasarımı	67
4.3.2. Kare Olmayan Transfer Fonksiyonuna Uyarlanan Algoritma	68
4.3.3. Optimal Tasarım Algoritması	69
<b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER</b>	<b>80</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>81</b>
<b>EKLER</b>	<b>85</b>



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Ayırık-zamanlı optimal geri-beslemeli kontrol sistemi

Şekil 2.2. Optimal kontrol sistemi için dönüş-fark matrisinin hesaplanması.

Şekil 2.3.  $|\alpha|+|\beta|=1$  seçildiği takdirde ayırık-zamanlı optimal kontrolde kutup yerleştirme için belirlenen I. bölge

Şekil 3.1.  $|\alpha|+|\beta|<1$  seçildiği takdirde ayırık-zamanlı optimal kontrolde kutup yerleştirme için belirlenen II.Bölge

Şekil 4.1.1.  $\alpha=0.3$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.7$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.1.2.  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.8$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.1.3.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.1.4.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.1.5.  $\alpha=0.5$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.1.6.  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.8$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.1.7.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.2.1.  $\alpha=0.3$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.2.2.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.2.3.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.2.4.  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.2.5.  $\alpha=0.5$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.3$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.2.6.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.2.7.  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.3$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

Şekil 4.3.1. Gaz türbini basitleştirilmiş akış diyagramı

Şekil 4.3.2. Optimal LSVF (linear state variable feedback) sistemi

Şekil 4.3.3.  $G(s)$ 'in çıkışlarının sayısı girişten fazla olduğundaki sistem

Şekil 4.3.4.  $G(s)$ 'in girişlerinin sayısı çıkıştan fazla olduğundaki sistem

Şekil 4.3.5. Sistem çıkış ve girişleri :  $\rho_1=50$  ,  $\rho_2=50$  ,  $R(s)=R_1(s)$

Şekil 4.3.6. Sistem çıkış ve girişleri :  $\rho_1=50$  ,  $\rho_2=50$  ,  $R(s)=R_2(s)$

Şekil 4.3.7. Sistem çıkış ve girişleri :  $\rho_1=25$  ,  $\rho_2=10$  ,  $R(s)=R_2(s)$

Şekil 4.3.8. Sistem çıkış ve girişleri :  $\rho_1=25$  ,  $\rho_2=10$  ,  $R(s)=R_1(s)$

## SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$L_{uu}$	:	Hessian matrisi
$\lambda$	:	Lagrange çarpanı
$P$	:	Matris Riccati eşitliğinin pozitif tanımlı çözümü
$H(x,u, \lambda)$	:	Hamiltonian fonksiyonu
$J$	:	Başarım indisi
$Q$	:	Pozitif yarı tanımlı simetrik ağırlık matrisi
$R$	:	Pozitif tanımlı simetrik ağırlık matrisi
$S$	:	Ağırlık matrisi
$K$	:	Optimal geri-besleme kazancı
$x$	:	Durum vektörü
$u$	:	Giriş vektörü
$F$	:	Dönüş-fark matrisi
$Z$	:	Dönüş-oranı matrisi
$I_n$	:	$n*n$ boyutlu birim matris
$G$	:	Transfer fonksiyonu
$A$	:	Geçiş matrisi
$B$	:	Giriş matrisi
$C$	:	Çıkış matrisi
$\rho_i$	:	Dönüş-fark matrisinin öz-değerleri
$\psi$	:	Görüngesel yoğunluk matrisi
$\Delta$	:	Görüngesel ayrışım matrisi
$T$	:	Tekmodüler matrisi
$D$	:	A'nın karakteristik denklemi
$M_c$	:	Denetlenebilirlik Matrisi
$\alpha$	:	Disk yarıçapı
$\beta$	:	0 ile 1 arasında pozitif sabit sayı
$eig$	:	Bir matrisin Öz-değerleri
$adj$	:	Bir matrisin adjointi yani ek-matrisi
$diag$	:	Köşegen matris
$A_c$	:	Kapalı-çevrim sistemin geçiş matrisi

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada, optimal kontrol probleminin sıklık bölgesi tasarım yöntemleri kesikli sistemler için incelenmiş ve geliştirilen algoritmalar verilmiştir. Optimal kontrol modern kontrolün bir dalı olup tasarlanacak sistem için kararlılık ve verimlilik bağlamında en iyi çözümü getirmeyi hedefler. Ayrıca; gaz türbini problemi ele alınarak optimal tasarım gerçekleştirilmiştir. Daha sonra sistemin tepkisini iyileştirmek için **ters optimal** kontrol algoritması kullanılmıştır. İkinci etapta gaz türbinin kesikli sistem modeli bulunup sıklık bölgesi **ters optimal** kontrol algoritması kullanılarak sistemin tepkileri bulunmuştur.

İncelenen örneklerde yeni bir bölge seçilip, sistemin özdeğerlerinin bu bölgenin içerisine yerleştirmek için **yeni** algoritma geliştirilmiştir. Matris Riccati eşitliği çözülmeyen ağırlık matrisleri sıklık bölgesi için bulunmuştur.

Bu çalışmada, bölüm 2.1.'de optimal kontrolden ve zaman bölgesinde optimal kontrol probleminin çözümünden kısaca bahsedilecektir. Bölüm 2.2.'de sürekli-zaman optimal kontrol probleminin sıklık bölgesi çözüm yöntemi ayrıntılı bir şekilde ele alınacak ve çözüm algoritması verilecektir. Bölüm 2.3.'de ayrık-zamanlı optimal kontrol probleminin sıklık bölgesi çözüm yöntemi ayrıntılı olarak incelendikten sonra çözüm algoritması verilecektir.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1. OPTİMAL KONTROL PROBLEMİN TANIMI

Ters optimal kontrol ve optimal kontrol problemleri yapılan araştırmalar ve bilgisayar programlarındaki gelişmeler sayesinde yeni yazılımları ve sayısal çözümleme algoritmalarının geliştirilmesiyle oldukça yol kat etmiştir.

Kontrol sisteminin optimizasyon kavramı, başarımlı indisi seçimi ve fiziksel sınırlamalar dahilinde optimal kontrol sistemi tasarımı içerir. Bu tür optimal kontrol sistemleri idealden farklıdır; optimal sistemler fiziksel sınırlamalar dahilinde en iyiye ulaşabilmesine rağmen ideal sistemler en iyi amaca rahatlıkla ulaşamayabilir.

### Optimizasyon Probleminin Formülasyonu

Kontrol sisteminin optimizasyonu probleminde durum değişkenleri, kontrol değişkenleri ve sistemin parametreleri kullanılır. Sistem parametreleri, problemin özelliklerine göre belirlenen sabitlerdir. Genellikle kontrol sistemlerinin optimizasyon probleminin formüle edilmesinde aşağıdaki veriler kullanılır [2,3]:

- a- Sistem durum denklemleri veya çıkış eşitliği
- b- Kontrol vektörü
- c- Problemin sınırlamaları
- d- Başarımlı indisi
- e- Sistem parametreleri

Optimal kontrol problemi; kabul edilebilen kontrol vektörlerinin oluşturulduğu gruptan, en iyi kontrolü sağlayacak  $u(t)$  vektörünün hesaplanmasıdır.  $u(t)$  vektörü:

- a- Başlangıç durumu veya başlangıç çıkışına,
- b- İstenilen durum ve istenilen çıkışa,
- c- Sıralandırmalarının yapısına,
- d- Başarım indisinin yapısına

bağlıdır.

## 2.2. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN SIKLIK BÖLGESİ TASARIM YÖNTEMLERİ

Ayrık-zamanlı optimal kontrol problemi zaman bölgesinde Matris Riccati eşitliğinin çözümlenmeden elde edilen simetrik, gerçel ve pozitif tanımlı matris kullanılarak çözülmekteydi. Sürekli-zamanda olduğu gibi ayrık-zamanlıda da sıklık bölgesi optimal kontrol problemi çözüm yöntemleri önerilmiş ve Matris Riccati eşitliğinin sıklık bölgesi eşdeğeri elde edilmiştir.

Bu bölümde ayrık-zamanlı sistemin optimal geri-besleme kazancının hesaplanmasında, polinom matrislerin görüngenel ayrışımına (spectral factorization) dayalı yöntem incelenecektir. Bu çözüm yöntemlerinin bilgisayar uygulamaları için geliştirilen PC-MATLAB [2,...,8] yazılımları hazırlanmıştır.

### 2.2.1 Ayrık-Zamanlı Sistemin Dönüş-Fark ve Dönüş-Oranı Matrisleri

Ayrık-zamanlı sistem durum denklemleri,

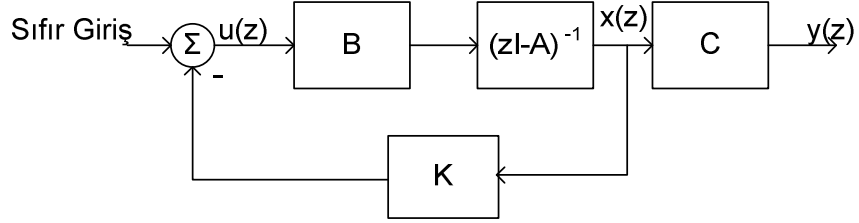
$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{2.1}$$

ve doğrusal kontrol yasası ,

$$u(k) = -K(k)x(k)\tag{2.2}$$

olarak verilir. Eğer  $k$  basamak indisi çok büyük ise  $K(k)$  geri-besleme kazanç matrisi sabit bir

$K$  matrisine düşecektir [4]. Böyle bir sistem şekil 2.1.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Ayrık-zamanlı optimal geri-beslemeli kontrol sistemi

Şekil 2.1.'de gösterilen geri-besleme döngüsünün, Şekil 2.2.'de gösterilen  $a$  noktasından çıkarak  $\alpha(z)$  sinyali uygulandığında,  $a$ ' noktasına geri dönen sinyal:

$$-K(zI-A)^{-1}B\alpha(z) \quad (2.3)$$

Ve uygulanan sinyal ile geri dönen sinyal arasındaki fark,

$$[I+K(zI-A)^{-1}]\alpha(z) = F(z)\alpha(z) \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. Burada ;

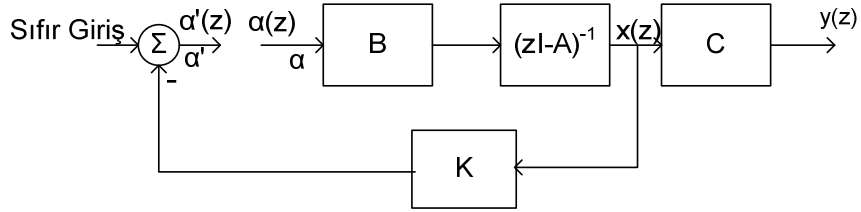
$$F(z) \triangleq I+K(zI-A)^{-1}B \quad (2.5)$$

geri besleme sisteminin dönüş-fark matrisi olarak tanımlanır.  $Z(z)$  ise aşağıdaki eşitlik ile verilecek dönüş-oran matrisi olarak tanımlanır.

$$Z(z) \triangleq K(zI-A)^{-1}B \quad (2.6)$$

Böylece sistemin dönüş-fark ve dönüş-oran matrisleri arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(z) = I + Z(z) \quad (2.7)$$



Şekil 2.2. Optimal kontrol sistemi için dönüş-fark matrisinin hesaplanması.

### 2.2.2. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Tasarımında Görüngesel Ayrışımın Kullanılması

Optimal sistemin başarımlı görümlü matrisinin görümlü ayrışımının, sistemin dönüş-fark matrisini verdiği gösterilmişti. Bu bölümde görümlü ayrışım kullanılarak, daha önce sürekli-zaman için elde edilen, optimal denetleyici tasarımı Matris Riccati eşitliği çözümlenmeden yapılacaktır.



### 2.2.3. Tanımlar ve gerekli tasarım yöntemleri

**Tanım 1:** Aynı-zamanlı sistemlerde aktarım fonksiyonu matrisi  $G(z)$ ,  $z \rightarrow \infty$  için  $G(z \rightarrow 0)$  koşulunu sağlıyor ise tanımlıdır (proper).

**Kanıt:**

Aynı-zamanlı sistem aktarım fonksiyonu eşitlik (2.91) ile verilmiştir. Leverrier algoritması kullanılarak  $(zI-A)^{-1}$  'in açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(zI-A)^{-1} = \frac{Z^{n-1}I_n + Z^{n-2}(AF_0 + d_1I) + \dots}{Z^n + d_1Z^{n-1} + \dots} \quad (2.8)$$

Sistem aktarım fonksiyonu matrisi,

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI-A)^{-1}B \\ G^T(z^{-1}) &= B^T(z^{-1}I-A^T)^{-1}C^T \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.9)'da kullanıldığında ve  $z \rightarrow \infty$  yapılırsa  $G(z \rightarrow 0)$  olarak elde edilir. Ayrık-zamanlı sistemi için, tek dönüş-fark matrisi  $F_u(z)$ , sürekli-zamanda olduğu gibi tanımlanır.

$$z \rightarrow \infty \text{ için } F_u(z) \rightarrow I \quad (2.10)$$

Başarım görüngenel yoğunluk matrisinin görüngenel ayrışımı tek olmadığından birçok dönüş-fark matrisi elde edilebilir. Bu durumda tek yörüngesel ayrışım  $\Phi(z)$ 'den elde edilen tek dönüş-fark  $F_u(z)$  olarak tanımlanır.

**Tanım 2:**

Herhangi bir  $\Phi_s(z)$  ayrışımı, ayrık-zamanlı başarımlı görüngenese yoğunluk matrisinin görüngenese ayrışımı sonucu elde edilmiş olsun. Tek dönüş-fark matrisi  $F_u(z)$ , aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F_u(z) = \Phi_s^{-1}(\infty)\Phi_s(z) \quad (2.11)$$

$$F_u(z) = F_u(z) = F_s^{-1}(\infty)F(z) \quad (2.12)$$

**Kanıt:** Bu önermenin kanıtı sürekli zaman ile aynıdır. Eşitlik (2.11)'de

$$F(z) = I + K(zI - A)^{-1}B \quad (2.13)$$

yerine;

$$F_u(z) = I + K(zI - A)^{-1}B = \Phi_s^{-1}(\infty)\Phi_s(z) \quad (2.14)$$

yazıldığında;

$$K(zI - A)^{-1}B = \Phi_s^{-1}(\infty)\Phi_s(z) - I = Z(z) \quad (2.15)$$

Eşitlikleri elde edilir. Burada  $Z(z)$ , ayrık-zamanlı dönüş-oranı matrisi olarak tanımlanmıştır.

Dönüş-oranı matrisi aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

- i)  $Z(z)$  tanımlı (proper)
- ii)  $[d(z)Z(z)]$ ,  $(n-1)$  derecesinde polinom bir matristir.

Burada  $d(z) = \det(zI - A)$  ve  $n$ ,  $A$  matrisinin boyutudur.

2.2.4. Optimal denetleyicinin görüngenel ayrışımı ile hesaplanması  
(Yöntem 1)

Sistemin  $A, B, C$  parametreleri ve başarıml indisi ağırlık matrisleri  $Q$  ve  $R$  verilmiş ise aşağıda verilen algoritma ile sıklık bölgesinde optimal kontrol problemi çözümlür. Algoritma sürekli-zaman alanındaki algoritma ile benzer işlem basamakları içerdiğinden ayrıntıya girilmeden verilecektir [4].

**Adım 1:**

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (2.16)$$

Sistem açık döngü aktarım matrisi kullanılarak görüngenel yoğunluk matrisi ;

$$\psi(z) = R + G^T(z^{-1})QG(z) \quad (2.17)$$

olarak hesaplanır.

**Adım 2:**  $\psi(z)$  görüngenel yoğunluk matrisi kullanılarak, görüngenel çarpanlarına ayrılır.

$$\psi(z) = \Phi^T(z^{-1})\Phi^T(z) \quad (2.18)$$

**Adım 3:** Optimal denetleyicinin dönüş-fark matrisi bulunur.

$$F(z) = \Phi^{-1}(\infty)\Phi(z) \quad (2.19)$$

**Adım 4:**

$$d(z) = \det(zI - A) = z^n + d_1z^{n-1} + \dots + d_n \quad (2.20)$$

$$Z(z)=F(z)-I \quad (2.21)$$

Olmak üzere;

$$d(z)Z(z)=Z_0z^{n-1}+Z_1z^{n-2}+\dots+Z_{n-1} \quad (2.22)$$

matris çok terimli hesaplanır.

**Adım 5:** [V] matrisi aşağıdaki yapıda hesaplanır.

$$[V]=[V_0 \mid V_1 \mid \dots \mid V_{n-1}] \quad (2.23)$$

burada;

$$V_0 = Z_0 \quad (2.24)$$

$$V_p = Z_p + \sum_{i=1}^p c_{j-1} Z_{p-j} \quad p=1,2,3,\dots,n-1$$

$$c_0 = -d_1$$

$$c_p = -d_{p+1} - \sum_{i=1}^p d_j c_{p-j} \quad p=1,2,3,\dots,n-1 \quad (2.25)$$

olarak hesaplanır.

**Adım 6:** Optimal denetleyici kazanç matrisi,

$$K = [V]M_c^T (M_c M_c^T)^{-1} \quad (2.26)$$

olarak hesaplanır.

Eğer sistem tek girişli ise  $M_c$  matrisi ( $n \times n$ ) boyutlu bir kare matris olacaktır kazanç matrisi

$$K = [V]M_c^{-1} \quad (2.27)$$

olacaktır. Böylece sistem  $A, B, C$  parametreleri ve  $Q, R$  ağırlık matrisleri ile optimal geri-besleme kazanç matrisi  $K$  hesaplanmış olur.

### 2.2.5 Optimal denetleyicinin görüngenel ayrışım ile hesaplanması (Yöntem 2)

Eğer sistemin başarımlı görüngenel yoğunluk matrisi verilmiş ise, başarımlı görüngenel matrisinin görüngenel ayrışımı ve minimal gerçekleştirimi kullanılarak optimal denetleyicinin tasarımı yapılabilir [4,32].

Başarımlı görüngenel yoğunluk matrisi  $\psi(z)$  ve  $A, B$  verilmiş ise

$$\psi(z) = \Phi(z)(z^{-1})\Phi(z) \quad (2.28)$$

$$F_u(z) = \Phi^{-1}(\infty)\Phi(z) \quad (2.29)$$

Dönüş-oramı matrisi ise;

$$Z(z) = F_u(z) - I = K(zI - A)^{-1}B \quad (2.30)$$

olarak yazılabilir. Sistem dönüş-oramı matrisi  $Z(z)$ 'in minimal gerçekleştirimi  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{K}$  sistem parametreleri elde edilebilir. Gerçek sistem parametreleri  $A, B$  ve bunlara bağlı olarak bulunan  $K$  matrisleri ile  $A, B, K$  matrisleri arasında aşağıda

verildiği gibi bir  $T$  dönüşüm matrisi vardır.

$$\begin{aligned}\bar{A} &= T^{-1}AT \\ \bar{B} &= TB \\ \bar{T} &= KT^{-1}\end{aligned}\tag{2.31}$$

$(n \times n)$  boyutlu  $T$  dönüşüm matrisi, (2.32) eşitliği ile hesaplanabilir.

$$T = (\bar{M}_c)(M_c^T)(M_c M_c^T)^{-1}\tag{2.32}$$

$M_c$  matrisi,  $\{A, B\}$  parametrelerinin oluşturduğu denetlenebilirlik matrisidir.

### 2.3. AYRIK – ZAMANLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNDE ÖZDEĞERLERİN SIKLIK BÖLGESİNDE YENİ BÖLGE İÇERİSİNE ÇEKİLMESİ

Kararlı hale getirilebilir ve algılanabilir bir sürekli-zaman sistemi için, Anderson ve Moore (1983) [1], kuadratik başarımların minimize edilmesinin ve aynı zamanda kapalı-çevrim sistemin, tüm gerçel kısımları bir gerçel  $\alpha$ 'dan daha küçük kutuplara sahip olacağını temin etmenin nasıl mümkün olduğunu göstermişlerdir. Benzer olarak, Franklin ve Powell (1975) [27], ayrık-zamanlı kuadratik başarımların minimize eden ve aynı zamanda kapalı-çevrim sistemin, tümü  $\alpha < 1$  olacağını garanti eden bir durum değişkeni geri-besleme kuralı bulmuşlardır. Bu açıklamaların amacı ayrık-zamanlı optimal kontrol problemini, kapalı çevrim kutuplarının hepsinin,  $|\alpha| + |\beta| = 1$  olmakla beraber  $\alpha$  yarıçaplı,  $(-\beta, 0)$  merkezli bir daire içerisinde olacağını garantileyen, doğrusal durum değişkenli geri-besleme kuralını verecek şekilde formüle etmektir.

Doğrusal, zamanla değişmeyen ayrık-zamanlı denetlenebilir bir sistem ele alınırsa:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.33a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2.33b)$$

Burada ele alınan problem, başarımlı indisini minimize eden optimal kontrol, aynı zamanda kapalı-çevrim kutuplarını şekilde görüldüğü gibi diskin içine yerleştirecek bir optimal kontrol problemini formüle etmektir. Eşitlik (2.33a)' da sistem dinamiği  $Q = Q^T \geq 0$  ve  $R = R^T > 0$  olmak üzere ;

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{2k} \{x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)\} \quad (2.34)$$

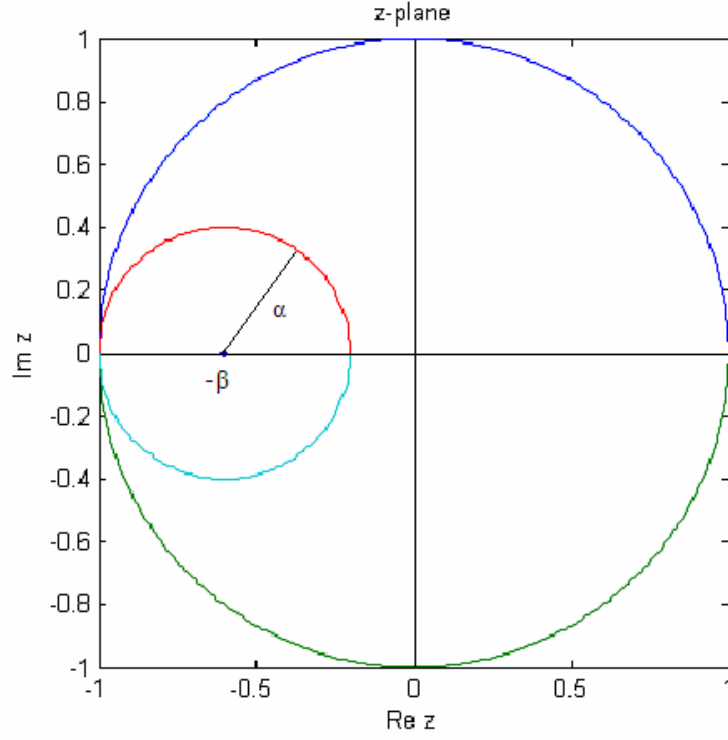
Başarımlı indisi verildiğinde bunu minimize edecek optimal kontrolün  $r = \alpha$  yarıçaplı orijin merkezli disk üzerinde kapalı-çevrim kutuplara sahip olacaktır .

Başarımlı indisini minimize eden, geri-besleme kontrolü ile tüm kutupları  $\beta$  kadar kaydırılırsa, o zaman tüm kutupların dairesel bir bölgenin içinde olacağı açıktır. Yani eğer,

$$x(k+1) = A_{\beta} x(k) + Bu(k) \quad (2.35)$$

$$A_{\beta} = A + \beta I \quad (2.36)$$

verilen başarımlı indisini minimize eden optimal kontrol, tümü Şekil 2.3'deki diskin içerisinde olan kutuplara sahip olacaktır [34]. Böylece eşitlik (2.33a) için oluşan optimal kontrol, eşitlik (2.35) göz önüne alınarak yapılan eşitlik (2.36)'daki başarımlı indisinin minimize eden optimal kontrole denk olacak şekilde bir başarımlı indisinin bulunmasına dönüşür.



Şekil 2.3.  $|\alpha| + |\beta| = 1$  seçildiği takdirde ayrık-zamanlı optimal kontrolde kutup yerleştirme için belirlenen I. bölge

**Kuram 1:**

Verilen sistem denklemleri (2.35, 2.36) optimal kontrol problemi için  $J$  başarımlı indisi aşağıdaki eşitlikle ifade edilir [27]:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{2k} \left\{ \left[ \sum_{i=0}^k d_{k,i} x(i) \right]^T Q \left[ \sum_{i=0}^k d_{k,i} x(i) \right] + \left[ \sum_{i=0}^k d_{k,j} u(i) \right]^T R \left[ \sum_{i=0}^k d_{k,i} u(i) \right] \right\} \quad (2.37)$$

$$d_{k,i} = C_1^k (\beta)^{k-1}, C_1^k = \frac{k!}{(k-i)!i!} \quad (2.38)$$

Kuram 1'in kanıtı için aşağıdaki ön kuram 1 yazılabilir [34, 27].



Ön Kuram 1:

$$\bar{x}(k) = \sum_{j=0}^k C_j^k (\beta)^{k-j} x(j) \quad (2.39)$$

$$\bar{u}(k) = \sum_{j=0}^k C_j^k (\beta)^{k-j} u(j) \quad (2.40)$$

burada ;

$$C_j^k = \frac{k!}{(k-j)!j!} \quad (2.41)$$

dönüşümleri ile ;

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.42)$$

olan sistem dinamiği aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$\bar{x}(k+1) = (A + \beta I)\bar{x}(k) + B\bar{u}(k) = A_\beta \bar{x}(k) + B\bar{u}(k) \quad (2.43a)$$

Eşitlik (2.41) ve (2.42)'den  $\bar{X}(0) = X(0)$  ve  $\bar{u}(0) = u(0)$  olduğu görülür.

**Kanıt:** Eşitlik 2.43a'dan ;

$$\bar{x}(1) = x(1) + \beta x(0) = Ax(0) + \beta x(0) + Bu(0) = A + \beta I x(0) + Bu(0) \quad (2.43b)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.43)'te  $k=0$  yazıldığı takdirde denklem doğrudur.. Aşağıda eşitlik (2.43)'ün  $I$  için geçerli olduğunu ispat edeceğiz. Eşitlik (2.43)'te  $k=p$  ( $p=1,2,\dots$ ) yazılırsa;

$$\bar{x}(p+1) = (A + \beta I)\bar{x}(p) + B\bar{u}(p) \quad (2.44)$$

(2.44) eşitliğinin sol tarafında (2.42) eşitliği kullanıldığında;

$$\bar{x}(p+1) = \sum_{j=0}^{p+1} C_j^{p+1}(\beta)^{p+1-j} x(j) = x(k+1) + \sum_{j=1}^p C_j^{p+1}(\beta)^{p+1-j} x(j) + (\beta)^{p+1} x(0) \quad (2.45)$$

şeklinde yazılabilir.  $c_j^{p+1} = c_j^p + c_{j-1}^p$  olduğunu hatırlayınız. Bu denklem göz önünde bulundurulursa aşağıdaki (2.46) yazılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{x}(p+1) &= Ax(p) + Bu(p) + \sum_{j=1}^p C_{j-1}^p(\beta)^{p+1-j} x(j) \\ &+ \sum_{j=1}^p C_j^p(\beta)^{p+1-j} x(j) + \beta C_0^p(\beta)^{p+1} x(0) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\sum_{j=1}^p C_j^p(\beta)^{p+1-j} x(j) + \beta C_0^p(\beta)^p x(0) = \beta \sum_{j=0}^p C_j^p(\beta)^{p-1} c(j) = \beta \bar{x}(p) \quad (2.47)$$

Yukarıdaki eşitlik dikkate alındığında ;

$$\begin{aligned} \bar{x}(p+1) &= AC_p^p x(p) + BC_p^p u(p) + \sum_{j=1}^p C_{j-1}^p(\beta)^{p+1-j} \\ &.(Ax(j-1) + Bu(j-1)) + \beta \bar{x}(p) \\ &= AC_p^p x(p) + BC_p^p u(p) + \sum_{j=0}^{p-1} (\beta)^{p-j} (Ax(j) + Bu(j)) + \beta \bar{x}(p) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Bu eşitlik aşağıdaki şekilde kısaltılabilir:

$$\bar{x}(p+1) = A \sum_{j=0}^p C_j^p(\beta)^{p-j} x(j) + B \sum_{j=0}^p C_j^p(\beta)^{p-j} u(j) + \beta \bar{x}(p) \quad (2.49)$$

Böylece ;

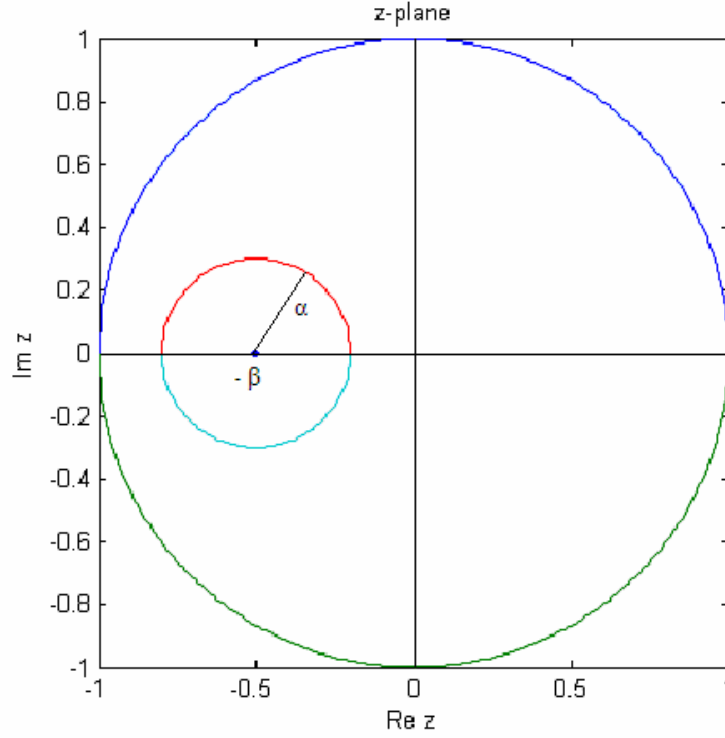
$$\bar{x}(p+1) = (A + \beta I) \bar{x}(p) + B \bar{u}(p) \quad (2.50)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik köklerin seçilmiş olan bölge içerisine atılmasını sağlamıştır. Seçilen  $\beta, \alpha$  değerlerine göre kökler birim çemberin soluna dayalı ve ya dayalı olmayan bir diskin içerisine yerleştirilirler.

### 3. MATERYAL VE METOT

#### 3.1. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNDE İNCELENEN II. YENİ BÖLGE

Bir evvelki seçilen I. Bölgede  $|\alpha|+|\beta|<1$  alındığında aşağıdaki II. Yeni Bölge tarif edilebilir.



Şekil 3.1.  $|\alpha|+|\beta|<1$  seçildiği takdirde ayrık-zamanlı optimal kontrolde kutup yerleştirme için belirlenen II.Bölge

#### 3.2. PROBLEM FORMÜLASYONU

Buradaki amaç, optimal sistemin özdeğerlerinin tarif edilen yeni bölgelerde yerleştirilmesini sağlayan  $Q_I$ ,  $R_I$  ve  $S_I$  ağırlık matrislerinin bulunmasıdır.

Kesikli zamandan sürekli-zamana geçiş için verilen dönüşüm [33]

$$x_{k+1} = -\dot{x}(t) - x(t) \quad (3.1)$$

$$x_k = -\dot{x}(t) + x(t) \quad (3.2)$$

Eğer dönüştürülen sürekli zaman sistem aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) \quad (3.3)$$

(3.2) ve (3.3)'deki transformasyon kullanılarak  $\bar{A}$  ve  $\bar{B}$  şu şekilde bulunabilir. Şu şekilde kesikli-zaman sistem ele alındığında

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3.4)$$

(3.5) no'lu denklemden (3.2) no'lu denklem çıkarılırsa

$$\dot{x}(t) = (A - I)^{-1}(A + I)x(t) + (A - I)^{-1}Bu(t) \quad (3.5)$$

(3.6) ile (3.4) karşılaştırıldığında,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (A - I)^{-1}(A + I) \\ \bar{B} &= (A - I)^{-1}B \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\bar{P}$ 'ın Riccati denkleminin çözümü olduğu kabul edilirse,

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T\bar{P} - \bar{P}\bar{B}\bar{P}^{-1}\bar{B}^T\bar{P} + \bar{Q} = 0 \quad (3.7)$$

$$p(t) = \bar{P}x(t) \quad (3.8)$$

ise sürekli-zaman Hamilton denklemi [33]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & -\bar{B}\bar{R}^{-1}\bar{B}^T \\ -\bar{Q} & -\bar{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

olur.

(3.2) ve (3.7)'yi, (3.10)'da kullanırsak,

$$\begin{pmatrix} I & 2\bar{U}^{-1}\bar{B}\bar{R}^{-1}\bar{B}^T(\bar{A}^T - I)^{-1} \\ 0 & (I + 2\bar{U}^{-1})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{I} + 2\bar{U}^{-1} & 0 \\ -2(\bar{A}^T - I)\bar{Q}\bar{U}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Burada ;

$$\bar{U} = (\bar{A} - I) + \bar{B}\bar{R}^{-1}\bar{B}^T(\bar{A} - I)^{-1}\bar{Q} \quad (3.11)$$

$p_k, p_{k+1}$  (3.2)'ye benzer olarak tanımlanır.

Kesikli Riccati denklemin tek (unique) pozitif definite çözümü;

$$P = A^T P A + Q - (A^T P B + S)(B^T P B + R)^{-1}(B^T P A + S^T) \quad (3.12)$$

$P$  olup

$$P_k = P x_k \quad (3.13)$$

[33]'de verilen kesikli zaman Hamilton denklemi,

$$\begin{pmatrix} I & BR^{-1}B^T \\ 0 & A^T - SR^{-1}B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABR^{-1}S^T & 0 \\ -Q + SR^{-1}S^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

olarak verilir.

(3.10) ve (3.14)

$$\begin{aligned} A - BR^{-1}S^T &= I + 2\bar{U}^{-1} \\ BR^{-1}B^T &= 2\bar{U}^{-1}\bar{B}\bar{R}^{-1}\bar{B}^T(\bar{A}^T - I)^{-1} \\ Q - SR^{-1}S^T &= 2(\bar{A}^T - I)\bar{Q}\bar{U}^{-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

durumları için özdeşdir. Eşitlik (3.15) kullanılarak:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(A - I)^T \bar{Q}(A - I) \\ R_1 &= 2\bar{R} + \frac{1}{2}B^T \bar{Q}B \\ S_1 &= \frac{1}{2}(A - I)^T \bar{Q}B \end{aligned} \quad (3.16)$$

$Q_1, R_1, S_1$  ağırlık matrisleri yukarıdaki eşitliklerden bulunur.

### 3.3. BULUNAN $Q_1$ AĞIRLIK MATRİSİNİN POZİTİF VEYA POZİTİF YARI-TANIMLI OLDUĞUNUN İRDELENMESİ

- i) Bulunan simetrik  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif veya pozitif yarı-tanımlı olması için  $\det(Q_1) \geq 0$  ifadesinde, özdeğerlerinin sıfır veya sıfırdan büyük olması lazımdır [9, 23, 26].

ii) Alt matris determinantlarının sıfır veya sıfırdan büyük olması lazımdır [35].

$$q_{11} \geq 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (3.18)$$

$$Q_1 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1k} \\ q_{12} & \dots & \dots & q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1k} & \dots & \dots & q_{kk} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (3.19)$$

Şayet köşegen ve alt determinantlar sıfır veya pozitif ise  $Q_1$  pozitif veya yarı-pozitif tanımlı matristir.

$Q_1 = Q_1^T$  ise simetrik matris

$Q_1^T = -Q_1$  ise ters simetrik matris/antimetrik matris (köşegenler 0'dır)

$Q_1^* = Q_1^T = Q_1$  ise Hermitian matris

$Q_1^* = Q_1^T = -Q_1$  ise ters Hermitian matristir [23, 26].

Bulunan  $Q_1$  matrisleri aynı zamanda Hermitian matrislerdir .

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. I. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER

Bu bölge için  $|\alpha| + |\beta| = 1$ 'dir.

**Örnek:4.1.1.** Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [33] 1988 yılında ele aldıkları örnek incelendiğinde:

Ele alınan sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0.2000 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0.9000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & -0.4000 & -0.2000 \end{bmatrix} \quad (4.19a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19b)$$

$$C = \text{eye}(4) \quad (4.19c)$$

$$Q = \text{eye}(4) \quad (4.19d)$$

$$R = \text{eye}(2) \quad (4.19e)$$

olarak verilen örneğimizde yarıçap ve merkez seçimlerimize göre uyarladığımız algoritmamızdan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

$\alpha=0.3$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.7$  merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik (2.36)'dan:

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} 1.6000 & 0.2000 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 1.6000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & -0.4000 & 0.5000 \end{bmatrix} \quad (4.20a)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 12.4447 & -27.6206 & -6.2093 & -20.8305 \\ -27.6206 & 260.2366 & 80.3804 & 146.3263 \\ -6.2093 & 80.3804 & 25.3942 & 43.9028 \\ -20.8305 & 146.3263 & 43.9028 & 85.229 \end{bmatrix} \quad (4.20b)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7145 & 2.8922 & -9.9331 & 13.2183 \\ 2.8922 & 2.1025 & -6.4462 & 9.4233 \\ -9.9331 & -6.4462 & 21.3068 & -29.2615 \\ 13.2183 & 9.4233 & -29.2615 & 42.3233 \end{bmatrix} \quad (4.20c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 69.3350 \\ 1.1122 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = -2.2323e-029$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.



$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 69.3350 \\ 1.1122 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 8.2223 & -3.1046 \\ -3.1046 & 14.6971 \end{bmatrix} \quad (4.20d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2.1398 & -7.7276 \\ 2.6255 & -4.6399 \\ -5.9187 & 16.1731 \\ 11.2564 & -21.2628 \end{bmatrix} \quad (4.20e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 1.7629 & -1.4743 & -0.6615 & -0.4714 \\ -0.4157 & 3.2145 & 2.3864 & 0.5544 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

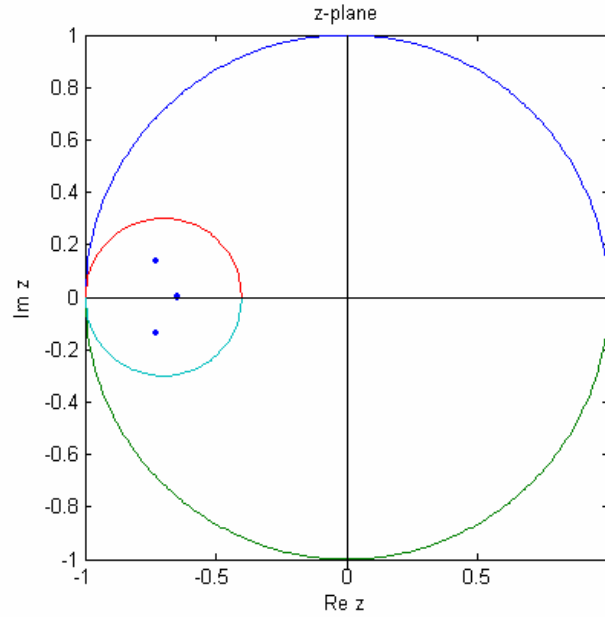
$$K = \begin{bmatrix} 1.7629 & -1.4743 & -0.6615 & -0.4714 \\ -0.4157 & 3.2145 & 2.3864 & 0.5544 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.22), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.21) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.7279 + 0.1368i \\ -0.7279 - 0.1368i \\ -0.6467 + 0.0008i \\ -0.6467 - 0.0008i \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

olur. Şekil 4.1.1.'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.1.1.  $\alpha=0.3$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.7$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.1.2.** Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [33] 1988 yılında ele aldıkları örnekte  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.8$  merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik (2.36)'dan:

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1.7000 & 0.2000 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 1.7000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & -0.4000 & 0.6000 \end{bmatrix} \quad (4.23a)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q, R, S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 15.3365 & -40.7450 & -8.5047 & -32.8029 \\ -40.7450 & 389.5290 & 111.2214 & 241.6991 \\ -8.5047 & 111.2214 & 32.6409 & 66.8868 \\ -32.8029 & 241.6991 & 66.8868 & 155.0797 \end{bmatrix} \quad (4.23b)$$

olarak hesaplanır. (3.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler algoritmamızda kullanıldığında, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0524 & 4.3531 & -15.0675 & 22.7570 \\ 4.3531 & 3.0693 & -9.7110 & 15.8737 \\ -15.0675 & -9.7110 & 32.6327 & -50.5824 \\ 22.7570 & 15.8737 & -50.5824 & 82.1630 \end{bmatrix} \quad (4.23c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = 1.0e+002 * \begin{bmatrix} 1.2333 \\ 0.0159 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = -5.6008e-028$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 123.3276 \\ 1.5897 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 9.6683 & -4.2523 \\ -4.2523 & 18.3205 \end{bmatrix} \quad (4.24d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 3.3077 & -10.6969 \\ 3.5709 & -6.4115 \\ -8.7091 & 22.6488 \\ 17.9808 & -33.6039 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 2.1593 & -3.8413 & -1.4833 & -1.3371 \\ -0.3757 & 3.1515 & 2.4133 & 0.4617 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

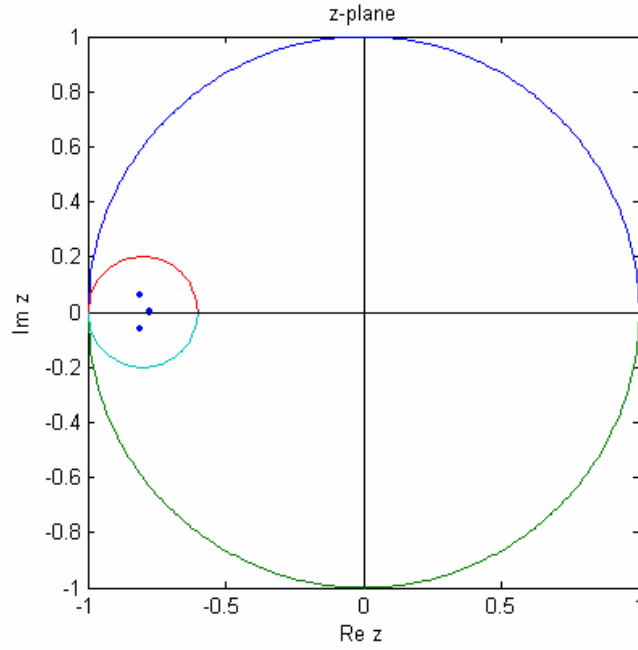
$$K = \begin{bmatrix} 2.1593 & -3.8413 & -1.4833 & -1.3371 \\ -0.3757 & 3.1515 & 2.4133 & 0.4617 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.26), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$ (4.25) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.8087 + 0.0612i \\ -0.8087 - 0.0612i \\ -0.7777 + 0.0003i \\ -0.7777 - 0.0003i \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

olur. Şekil 4.1.2.'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.1.2.  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.8$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.1.3.** Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [33] 1988 yılında ele aldıkları aynı örneği  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik (2.36)'dan:

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1.5000 & 0.2000 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 1.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & -0.4000 & 0.4000 \end{bmatrix} \quad (4.28a)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 9.9591 & -18.1259 & -4.3905 & -12.7069 \\ -18.1259 & 169.0959 & 56.5782 & 84.8125 \\ -4.3905 & 56.5782 & 19.2803 & 27.6224 \\ -12.7069 & 84.8125 & 27.6224 & 44.1697 \end{bmatrix} \quad (4.28b)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0692 & 1.8633 & -6.3390 & 7.2398 \\ 1.8633 & 1.4072 & -4.1413 & 5.3064 \\ -6.3390 & -4.1413 & 13.4033 & -15.9201 \\ 7.2398 & 5.3064 & -15.9201 & 20.0858 \end{bmatrix} \quad (4.28c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 37.1961 \\ 0.7695 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = 4.9386e-029$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 37.1961 \\ 0.7695 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 6.9796 & -2.1952 \\ -2.1952 & 11.6402 \end{bmatrix} \quad (4.28d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1.3146 & -5.4383 \\ 1.9022 & -3.2680 \\ -3.8873 & 11.1964 \\ 6.7460 & -12.7174 \end{bmatrix} \quad (4.28e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 1.5111 & -0.5895 & -0.3336 & -0.1748 \\ -0.4161 & 2.9107 & 2.2094 & 0.5266 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

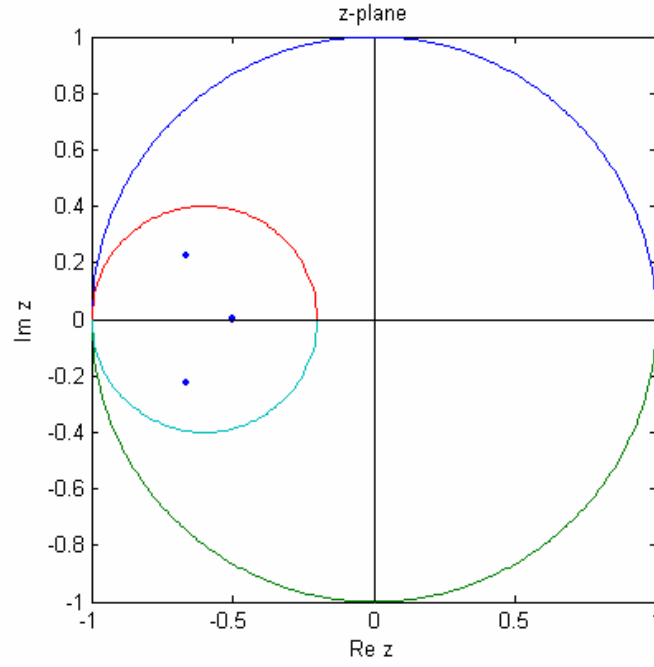
$$K = \begin{bmatrix} 1.5111 & -0.5895 & -0.3336 & -0.1748 \\ -0.4161 & 2.9107 & 2.2094 & 0.5266 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.30), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.29) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.6610 - 0.2259i \\ -0.6610 + 0.2259i \\ -0.4993 - 0.0017i \\ -0.4993 + 0.0017i \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

olur. Şekil 4.1.3.'te gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.1.3.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.1.4.** L.S. Shieh, M.M.Mehio ve S. Ganesan [20]'de ele alınan sistem incelenmiştir. Ele alınan sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8220 & -0.4400 & 0.0080 & 0.0741 & 0.0620 \\ 1.2440 & 0.7250 & 0.2490 & 0 & 0.1240 \\ -0.1570 & 0.0980 & 0.7520 & -0.3710 & -0.0140 \\ 0.0370 & 0.1760 & 0.2840 & 0.7240 & -0.2500 \\ -0.6550 & -0.2750 & -0.1310 & 0 & 0.1360 \end{bmatrix} \quad (4.32a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2710 & 0.0170 \\ -0.1750 & -0.3050 \\ -0.0990 & 0.1960 \\ 0.0680 & 0.0100 \\ 0.0920 & 0.2130 \end{bmatrix} \quad (4.32b)$$

$$C = \text{eye}(5) \quad (4.32c)$$



$$Q=eye(5) \quad (4.32d)$$

$$R=eye(2) \quad (4.32e)$$

olarak verilen örneğimizde yarıçap ve merkez seçimlerine göre uyarlanan sıklık bölgesi algoritmasından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-beta=-0.6$  merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik (2.36)'dan:

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} 1.4220 & -0.4400 & 0.0080 & 0.0741 & 0.0620 \\ 1.2440 & 1.3250 & 0.2490 & 0 & 0.1240 \\ -0.1570 & 0.0980 & 1.3520 & -0.3710 & -0.0140 \\ 0.0370 & 0.1760 & 0.2840 & 1.3240 & -0.2500 \\ -0.6550 & -0.2750 & -0.1310 & 0 & 0.7360 \end{bmatrix} \quad (4.33a)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = 1.0e+004 * \begin{bmatrix} 0.8682 & 0.3156 & 1.3818 & 1.0419 & -0.7504 \\ 0.3156 & 0.4806 & 0.3242 & 0.4772 & 0.3332 \\ 1.3818 & 0.3242 & 2.2860 & 1.6104 & -1.4893 \\ 1.0419 & 0.4772 & 1.6104 & 1.2770 & -0.7375 \\ -0.7504 & 0.3332 & -1.4893 & -0.7375 & 1.6520 \end{bmatrix} \quad (4.33b)$$

olarak hesaplanır.

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.8600 & -0.1495 & 0.5381 & -2.2881 & 0.8502 \\ -0.1495 & 0.9952 & -0.2619 & -0.3810 & 1.9777 \\ 0.5381 & -0.2619 & 0.2043 & -0.5363 & -0.2091 \\ -2.2881 & -0.3810 & -0.5363 & 3.1394 & -2.2217 \\ 0.8502 & 1.9777 & -0.2091 & -2.2217 & 4.6465 \end{bmatrix} \quad (4.33c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 7.4783 \\ 3.3671 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = -2.5078e-031$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 7.4783 \\ 3.3671 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

MATLAB  $svd(Q_1)$  komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 17.2134 & 6.7543 \\ 6.7543 & 14.8819 \end{bmatrix} \quad (4.33d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 162.7583 & 106.5120 \\ -43.9794 & 73.0970 \\ 53.9562 & 12.6492 \\ -182.4702 & -177.9537 \\ 10.1049 & 218.6256 \end{bmatrix} \quad (4.33e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 19.5778 & 10.1997 & 13.2943 & 7.9296 & 5.6177 \\ 12.5678 & -4.4888 & 22.0906 & -1.7884 & -15.1796 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

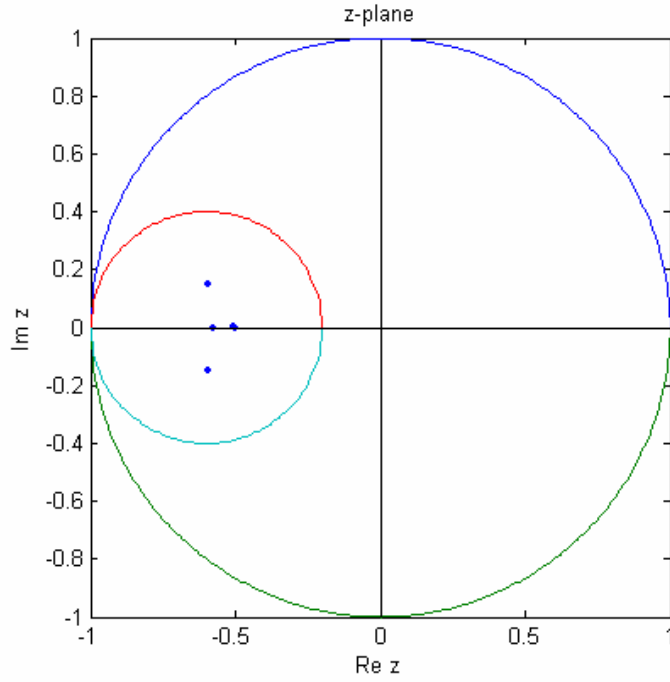
$$K = \begin{bmatrix} 19.5778 & 10.1997 & 13.2943 & 7.9296 & 5.6177 \\ 12.5678 & -4.4888 & 22.0906 & -1.7884 & -15.1796 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.35), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.34) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.5929 - 0.1499i \\ -0.5929 + 0.1499i \\ -0.5740 - 0.0000i \\ -0.4981 - 0.0000i \\ -0.5051 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

olur. Şekil 4.1.4.'te gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.1.4.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.1.5.** L.S. Shieh, M.M.Mehio ve S. Ganesan [20]'ın ele aldıkları örneği  $\alpha=0.5$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli bölge için incelendiğinde:

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1.3220 & -0.4400 & 0.0080 & 0.0741 & 0.0620 \\ 1.2440 & 1.2250 & 0.2490 & 0 & 0.1240 \\ -0.1570 & 0.0980 & 1.2520 & -0.3710 & -0.0140 \\ 0.0370 & 0.1760 & 0.2840 & 1.2240 & -0.2500 \\ -0.6550 & -0.2750 & -0.1310 & 0 & 0.6360 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q, R, S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = 1.0e+004 * \begin{bmatrix} 0.5865 & 0.2126 & 0.9141 & 0.6625 & -0.4826 \\ 0.2126 & 0.3073 & 0.2148 & 0.3057 & 0.2058 \\ 0.9141 & 0.2148 & 1.4839 & 0.9993 & -0.9450 \\ 0.6625 & 0.3057 & 0.9993 & 0.7669 & -0.4367 \\ -0.4826 & 0.2058 & -0.9450 & -0.4367 & 1.0268 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.1601 & -0.1424 & 0.3195 & -1.4256 & 0.5223 \\ -0.1424 & 0.6166 & -0.1848 & -0.1830 & 1.2068 \\ 0.3195 & -0.1848 & 0.1234 & -0.3056 & -0.1650 \\ -1.4256 & -0.1830 & -0.3056 & 1.9659 & -1.4013 \\ 0.5223 & 1.2068 & -0.1650 & -1.4013 & 2.9312 \end{bmatrix} \quad (4.39a)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 4.6574 \\ 0 \\ 2.1398 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = 1.3728e-032$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 4.6574 \\ 2.1398 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 13.1711 & 5.0033 \\ 5.0033 & 11.5245 \end{bmatrix} \quad (4.39b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 110.5450 & 71.4618 \\ -33.1045 & 46.6245 \\ 35.1935 & 6.2192 \\ -124.1757 & -120.9259 \\ 8.3253 & 149.6904 \end{bmatrix} \quad (4.39c)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 16.2623 & 6.9240 & 10.3297 & 5.5902 & 3.7190 \\ 10.4902 & -2.8059 & 17.8189 & -2.5739 & -9.9303 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

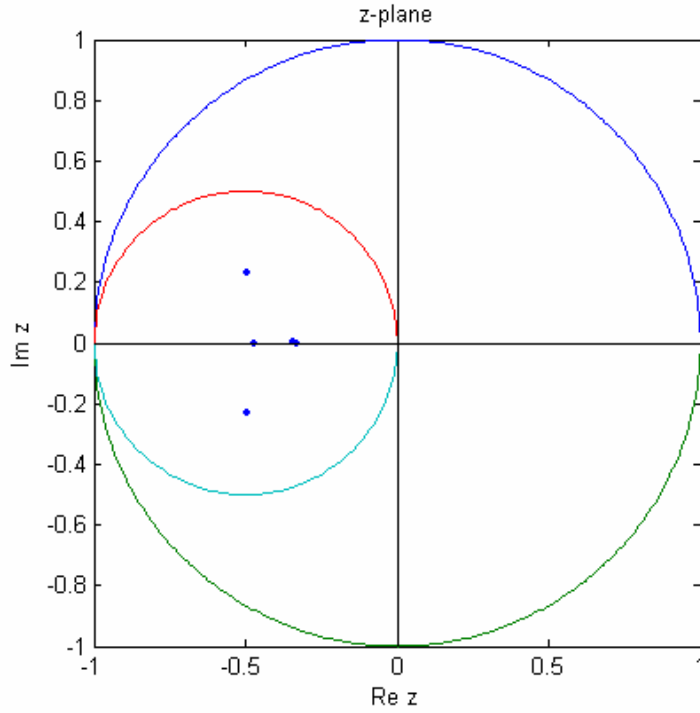
$$K = \begin{bmatrix} 16.2623 & 6.9240 & 10.3297 & 5.5902 & 3.7190 \\ 10.4902 & -2.8059 & 17.8189 & -2.5739 & -9.9303 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.41), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.40) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.4921 + 0.2282i \\ -0.4921 - 0.2282i \\ -0.4681 - 0.0000i \\ -0.3297 - 0.0000i \\ -0.3398 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

olur. Şekil 4.1.5.'te gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.1.5.  $\alpha=0.5$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.1.6.** L.S. Shieh, M.M.Mehio ve S. Ganesan [20] tarafından ele alınan sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} -2.8000 & 2.4000 & 0.6000 \\ -4.2000 & 3.8000 & 0.6000 \\ -1.8000 & 0.6000 & 0.8000 \end{bmatrix} \quad (4.43a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.43b)$$

$$C = \text{eye}(3) \quad (4.43c)$$

$$Q = 15 * \text{eye}(3) \quad (4.43d)$$

$$R = 5 * \text{eye}(2) \quad (4.43e)$$

olarak verilen örneğimizde yarıçap ve merkez seçimlerimize göre uyarladığımız algoritmamızdan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-beta=-0.8$  merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik (2.36)'dan:

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} -2.0000 & 2.4000 & 0.6000 \\ -4.2000 & 4.6000 & 0.6000 \\ -1.8000 & 0.6000 & 1.6000 \end{bmatrix} \quad (4.44a)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q, R, S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 141.3706 & -195.7641 & -81.2812 \\ -195.7641 & 320.4568 & 81.1375 \\ -81.2812 & 81.1375 & 66.7254 \end{bmatrix} \quad (4.44b)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 888.2605 & -575.3231 & -79.8251 \\ -575.3231 & 379.0798 & 58.3381 \\ -79.8251 & 58.3381 & 14.0056 \end{bmatrix} \quad (4.44c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.2706 \\ 0.0108 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = 2.0941e-010$$



sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.2706 \\ 0.0108 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB  $svd(Q_1)$  komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 122.4536 & 7.2060 \\ 7.2060 & 43.3627 \end{bmatrix} \quad (4.44d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 298.0240 & 76.0072 \\ -201.9913 & -36.0726 \\ -36.0097 & 6.7157 \end{bmatrix} \quad (4.44e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 2.9214 & -3.0598 & -0.2207 \\ 3.2143 & -1.8735 & -1.3510 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Öte yandan, MATLAB  $dlqr$  komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

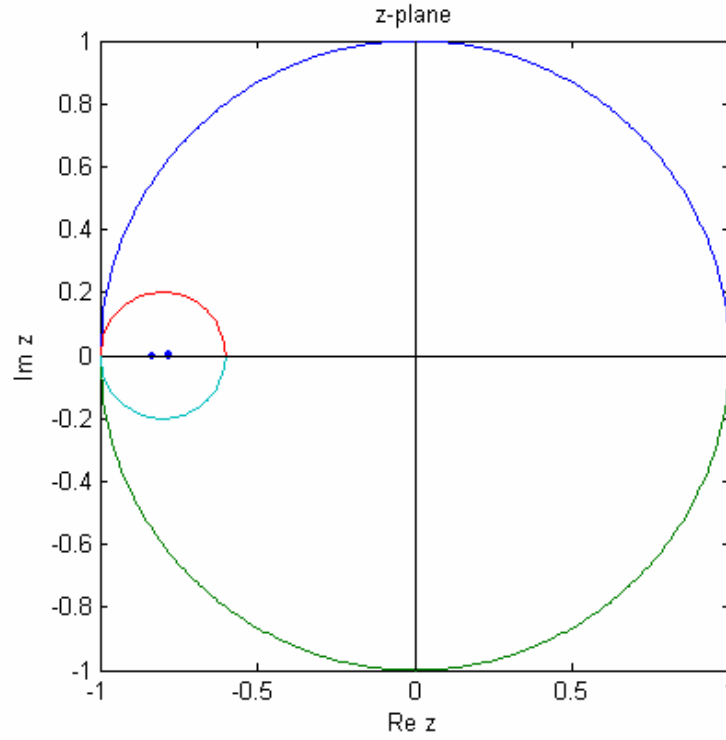
$$K = \begin{bmatrix} 2.9214 & -3.0598 & -0.2207 \\ 3.2143 & -1.8735 & -1.3510 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Zaman bölgesi MATLAB  $dlqr$  komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.46), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.45) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$\text{eig}(A_c) = \begin{bmatrix} -0.8339 - 0.0000i \\ -0.7781 + 0.0009i \\ -0.7781 - 0.0009i \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

olur. Şekil 4.1.6.'da gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.1.6.  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.8$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.1.7.** L.S. Shieh, M.M.Mehio ve S. Ganesan [20]'ın ele aldıkları örnek  $alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-beta=-0.6$  merkezli bölge için incelendiğinde:

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} -2.2000 & 2.4000 & 0.6000 \\ -4.2000 & 4.4000 & 0.6000 \\ -1.8000 & 0.6000 & 1.4000 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q, R, S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 87.4405 & -127.5439 & -53.1345 \\ -127.5439 & 218.6334 & 53.4544 \\ -53.1345 & 53.4544 & 50.0333 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 645.7957 & -416.6701 & -57.9619 \\ -416.6701 & 274.0723 & 42.4814 \\ -57.9619 & 42.4814 & 10.1398 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 921.8243 \\ 8.1835 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = 1.0509e-010$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 921.8243 \\ 8.1835 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 90.8789 & 1.7106 \\ 1.7106 & 35.0166 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 208.5770 & 56.3286 \\ -142.9856 & -26.0847 \\ -26.8888 & 4.9074 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 2.5989 & -2.6275 & -0.1825 \\ 2.8070 & -1.5784 & -1.0652 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

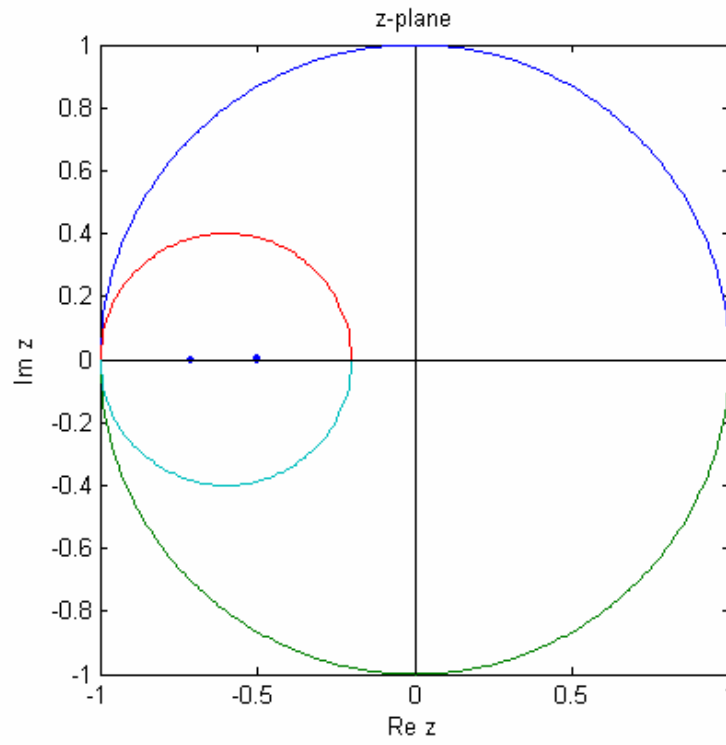
$$K = \begin{bmatrix} 2.5989 & -2.6275 & -0.1825 \\ 2.8070 & -1.5784 & -1.0652 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.54), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.53) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.7077 - 0.0000i \\ -0.5012 + 0.0046i \\ -0.5012 - 0.0046i \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

olur. Şekil 4.1.7.'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.1.7.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

## 4.2. II. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER

Bu bölge için  $|\alpha|+|\beta|<1$  'dir.

**Örnek:4.2.1.** Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [33] 1988 yılında ele aldıkları örnek bulunan II. Bölge için incelendiğinde:

Ele alınan sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0.2000 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0.9000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & -0.4000 & -0.2000 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.56b)$$

$$C = \text{eye}(4) \quad (4.56c)$$

$$Q = \text{eye}(4) \quad (4.56d)$$

$$R = \text{eye}(2) \quad (4.56e)$$

Yukarıdaki şekilde verilen sistemde, yarıçap ve merkez seçimlerine göre uyarlanan sıklık bölgesi algoritmasından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

Bu örnekte  $\alpha=0.3$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik (2.36)'dan:

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1.5000 & 0.2000 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 1.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & -0.4000 & 0.4000 \end{bmatrix} \quad (4.57a)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$Q_I$ ,  $R_I$ ,  $S_I$  ağırlık matrislerinin hesaplanmasında kullanılan  $\bar{Q}$  ; eşitlik (4.11)'den

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 10.7449 & -19.5210 & -4.9683 & -13.3296 \\ -19.5210 & 176.0988 & 60.7120 & 86.6375 \\ -4.9683 & 60.7120 & 21.2929 & 29.1043 \\ -13.3296 & 86.6375 & 29.1043 & 44.2417 \end{bmatrix} \quad (4.57b)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1853 & 1.9464 & -6.4476 & 7.2676 \\ 1.9464 & 1.4858 & -4.2522 & 5.3848 \\ -6.4476 & -4.2522 & 13.3802 & -15.7056 \\ 7.2676 & 5.3848 & -15.7056 & 19.5874 \end{bmatrix} \quad (4.57c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 36.8548 \\ 0.7839 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = 4.8082e-029$$

sifırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 36.8548 \\ 0.7839 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 7.3725 & -2.4842 \\ -2.4842 & 12.6464 \end{bmatrix} \quad (4.57d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1.4148 & -5.8228 \\ 2.0505 & -3.5324 \\ -4.1136 & 11.7594 \\ 7.0041 & -13.2040 \end{bmatrix} \quad (4.57e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 1.5900 & -0.8621 & -0.4640 & -0.2346 \\ -0.3870 & 2.7920 & 2.1673 & 0.4945 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

$$K = \begin{bmatrix} 1.5900 & -0.8621 & -0.4640 & -0.2346 \\ -0.3870 & 2.7920 & 2.1673 & 0.4945 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

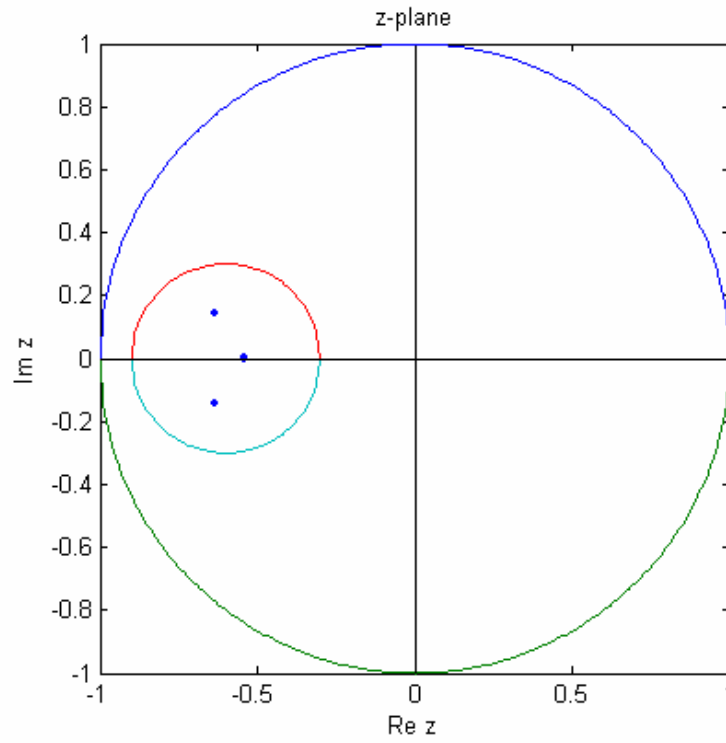
Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.59), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.58) ile aynı değerdedir.



Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.6353 + 0.1444i \\ -0.6353 - 0.1444i \\ -0.5433 + 0.0010i \\ -0.5433 - 0.0010i \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

olur. Şekil 4.2.1.'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.2.1.  $\alpha=0.3$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.6$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.2.2.** Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [33] 1988 yılında ele aldıkları örneği  $alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-beta=-0.5$  merkezli bölge için incelendiğinde:

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} 1.4000 & 0.2000 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 1.4000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & -0.4000 & 0.3000 \end{bmatrix} \quad (4.61a)$$

olarak bulunur.

$Q_1, R_1, S_1$  ağırlık matrislerinin hesaplanmasında kullanılan  $\bar{Q}$  ; eşitlik (4.11)'den:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 8.5312 & -12.4973 & -3.4493 & -7.8190 \\ -12.4973 & 111.9710 & 41.9363 & 48.0473 \\ -3.4493 & 41.9363 & 15.9188 & 17.5713 \\ -7.8190 & 48.0473 & 17.5713 & 21.4628 \end{bmatrix} \quad (4.61b)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0321 & 1.2219 & -3.9813 & 3.6881 \\ 1.2219 & 0.9804 & -2.6445 & 2.8444 \\ -3.9813 & -2.6445 & 8.0558 & -7.8649 \\ 3.6881 & 2.8444 & -7.8649 & 8.2925 \end{bmatrix} \quad (4.61c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 18.8211 \\ 0.5397 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = 3.0024e-030$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 18.8211 \\ 0.5397 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 6.2656 & -1.7247 \\ -1.7247 & 9.9594 \end{bmatrix} \quad (4.61d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.8232 & -4.0212 \\ 1.4780 & -2.4417 \\ -2.6153 & 7.9026 \\ 4.0015 & -7.3590 \end{bmatrix} \quad (4.61e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 1.3649 & -0.2763 & -0.2189 & -0.0744 \\ -0.3820 & 2.4684 & 1.9686 & 0.4637 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

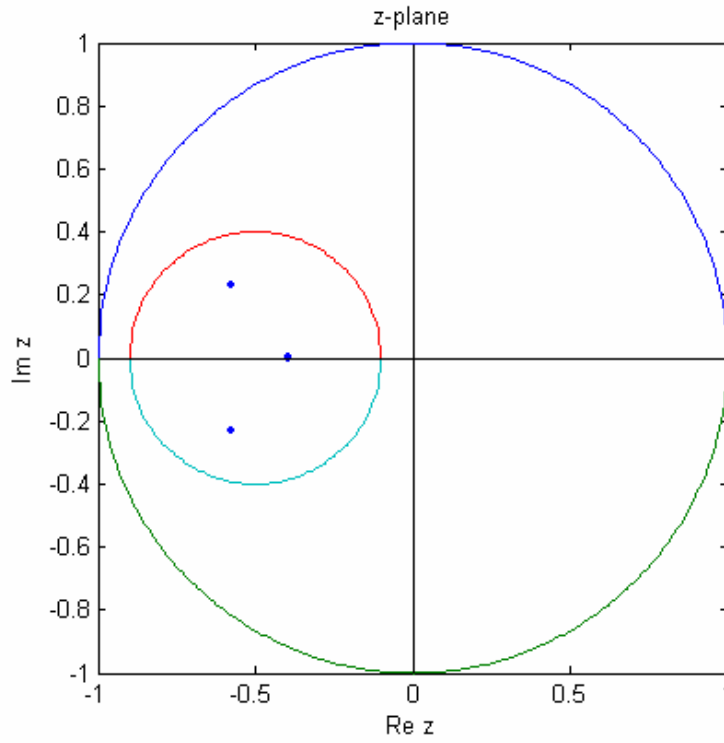
$$K = \begin{bmatrix} 1.3649 & -0.2763 & -0.2189 & -0.0744 \\ -0.3820 & 2.4684 & 1.9686 & 0.4637 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.64), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.63) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.5743 - 0.2322i \\ -0.5743 + 0.2322i \\ -0.3924 - 0.0021i \\ -0.3924 + 0.0021i \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

olur. Şekil 4.2.2.'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.2.2.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.2.3.** L.S. Shieh, M.M.Mehio ve S. Ganesan [20] tarafından ele alınan sistemin durum denklemlerini II. Bölge için incelendiğinde :

$$A = \begin{bmatrix} 0.8220 & -0.4400 & 0.0080 & 0.0741 & 0.0620 \\ 1.2440 & 0.7250 & 0.2490 & 0 & 0.1240 \\ -0.1570 & 0.0980 & 0.7520 & -0.3710 & -0.0140 \\ 0.0370 & 0.1760 & 0.2840 & 0.7240 & -0.2500 \\ -0.6550 & -0.2750 & -0.1310 & 0 & 0.1360 \end{bmatrix} \quad (4.66a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2710 & 0.0170 \\ -0.1750 & -0.3050 \\ -0.0990 & 0.1960 \\ 0.0680 & 0.0100 \\ 0.0920 & 0.2130 \end{bmatrix} \quad (4.66b)$$

$$C = \text{eye}(5) \quad (4.66c)$$

$$Q = \text{eye}(5) \quad (4.66d)$$

$$R = \text{eye}(2) \quad (4.66e)$$

olarak verilen örnekte yarıçap ve merkez seçimlerine göre uyarlanan algoritmadan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik (2.36)'dan:

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} 1.3220 & -0.4400 & 0.0080 & 0.0741 & 0.0620 \\ 1.2440 & 1.2250 & 0.2490 & 0 & 0.1240 \\ -0.1570 & 0.0980 & 1.2520 & -0.3710 & -0.0140 \\ 0.0370 & 0.1760 & 0.2840 & 1.2240 & -0.2500 \\ -0.6550 & -0.2750 & -0.1310 & 0 & 0.6360 \end{bmatrix} \quad (4.67a)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q, R, S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = 1.0e+004 * \begin{bmatrix} 0.6278 & 0.2268 & 0.9680 & 0.6906 & -0.5020 \\ 0.2268 & 0.3155 & 0.2273 & 0.3170 & 0.2059 \\ 0.9680 & 0.2273 & 1.5566 & 1.0293 & -0.9769 \\ 0.6906 & 0.3170 & 1.0293 & 0.7791 & -0.4401 \\ -0.5020 & 0.2059 & -0.9769 & -0.4401 & 1.0436 \end{bmatrix} \quad (4.67b)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.1801 & -0.1672 & 0.3187 & -1.4603 & 0.5316 \\ -0.1672 & 0.6268 & -0.1978 & -0.1613 & 1.2131 \\ 0.3187 & -0.1978 & 0.1247 & -0.3013 & -0.1825 \\ -1.4603 & -0.1613 & -0.3013 & 2.0319 & -1.4444 \\ 0.5316 & 1.2131 & -0.1825 & -1.4444 & 2.9917 \end{bmatrix} \quad (4.67c)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} & q_{35} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} & q_{45} \\ q_{15} & q_{25} & q_{35} & q_{45} & q_{55} \end{bmatrix}$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 4.7574 \\ 0 \\ 2.1978 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = -8.1272e-033$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 4.7574 \\ 2.1978 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 14.7926 & 5.8380 \\ 5.8380 & 12.8649 \end{bmatrix} \quad (4.67d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 119.4522 & 77.5399 \\ -37.4842 & 48.0040 \\ 37.4688 & 6.0152 \\ -135.2663 & -131.9694 \\ 9.8853 & 160.9462 \end{bmatrix} \quad (4.67e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 16.8960 & 7.5335 & 10.8156 & 5.9231 & 4.1667 \\ 10.4504 & -3.3379 & 18.1090 & -2.6912 & -10.8099 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

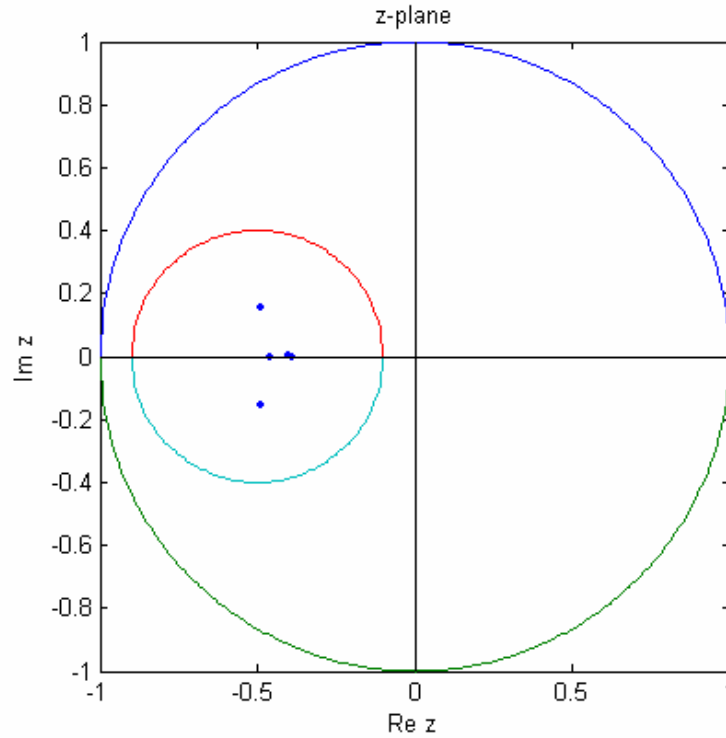
$$K = \begin{bmatrix} 16.8960 & 7.5335 & 10.8156 & 5.9231 & 4.1667 \\ 10.4504 & -3.3379 & 18.1090 & -2.6912 & -10.8099 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.69), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.68) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.4898 - 0.1556i \\ -0.4898 + 0.1556i \\ -0.4620 - 0.0000i \\ -0.3906 - 0.0000i \\ -0.4003 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

olur. Şekil 4.2.3.'te gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.2.3.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi



**Örnek:4.2.4.** L.S. Shieh, M.M.Mehio ve S. Ganesan [20] tarafından ele alınan sistemin durum denklemleri II. Bölge için incelendiğinde :

$$A = \begin{bmatrix} -2.8000 & 2.4000 & 0.6000 \\ -4.2000 & 3.8000 & 0.6000 \\ -1.8000 & 0.6000 & 0.8000 \end{bmatrix} \quad (4.71a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.71b)$$

$$C = \text{eye}(3) \quad (4.71c)$$

$$Q = 15 * \text{eye}(3) \quad (4.71d)$$

$$R = 5 * \text{eye}(2) \quad (4.71e)$$

olarak verilen örnekte yarıçap ve merkez seçimlerine göre uyarlanan sıklık bölgesi algoritmasından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli bölge seçildiği takdirde :

$$A_\beta = \begin{bmatrix} -2.3000 & 2.4000 & 0.6000 \\ -4.2000 & 4.3000 & 0.6000 \\ -1.8000 & 0.6000 & 1.3000 \end{bmatrix} \quad (4.72a)$$

olarak bulunur.

Verilen  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  ağırlık matrislerinden  $\bar{Q}$  eşitlik (4.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 116.8210 & -157.3302 & -59.3567 \\ -157.3302 & 240.7897 & 56.2729 \\ -59.3567 & 56.2729 & 49.5377 \end{bmatrix} \quad (4.72b)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 555.8974 & -362.1914 & -47.3175 \\ -362.1914 & 241.0629 & 35.9013 \\ -47.3175 & 35.9013 & 9.0919 \end{bmatrix} \quad (4.72c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 797.8531 \\ 8.1992 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = -1.2038e-010$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 797.8531 \\ 8.1992 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 98.8908 & 3.3676 \\ 3.3676 & 34.7689 \end{bmatrix} \quad (4.72d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 207.3974 & 49.9792 \\ -142.7759 & -22.4153 \\ -25.2895 & 5.8789 \end{bmatrix} \quad (4.72e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 2.4318 & -2.4487 & -0.1441 \\ 2.5250 & -1.2915 & -0.9767 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

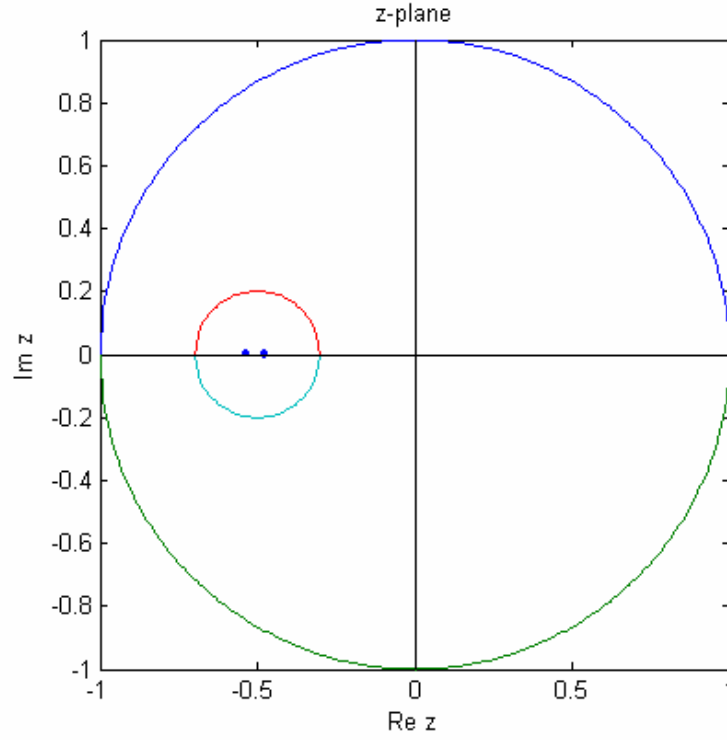
$$K = \begin{bmatrix} 2.4318 & -2.4487 & -0.1441 \\ 2.5250 & -1.2915 & -0.9767 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.74), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.73) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.5335 - 0.0000i \\ -0.4739 + 0.0013i \\ -0.4739 - 0.0013i \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

olur. Şekil 4.2.4.'te gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.2.4.  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.2.5.** L.S. Shieh, M.M.Mehio ve S. Ganesan [20] tarafından ele alınan örneği  $\alpha=0.5$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.3$  merkezli bölge için incelendiği:

$$A_\beta = \begin{bmatrix} -2.5000 & 2.4000 & 0.6000 \\ -4.2000 & 4.1000 & 0.6000 \\ -1.8000 & 0.6000 & 1.1000 \end{bmatrix} \quad (4.76a)$$

olarak verilen örneğimizde yarıçap ve merkez seçimlerimize göre uyarladığımız algoritmamızdan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

$Q_I, R_I, S_I$  ağırlık matrislerinin hesaplanmasında kullanılan  $\bar{Q}$  ; eşitlik (4.11)'den:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 51.0819 & -79.1847 & -30.3688 \\ -79.1847 & 139.8121 & 30.5395 \\ -30.3688 & 30.5395 & 34.0805 \end{bmatrix} \quad (4.76b)$$

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 416.5327 & -268.3008 & -37.0245 \\ -268.3008 & 176.7678 & 27.4163 \\ -37.0245 & 27.4163 & 6.5155 \end{bmatrix} \quad (4.76c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 594.1144 \\ 5.7017 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = -3.7240e-011$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 594.1144 \\ 5.7017 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB  $svd(Q_1)$  komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 66.4068 & -1.7705 \\ -1.7705 & 27.0403 \end{bmatrix} \quad (4.76d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 133.5352 & 37.1048 \\ -93.3402 & -16.5370 \\ -18.4911 & 3.3568 \end{bmatrix} \quad (4.76e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 2.0170 & -1.9580 & -0.1134 \\ 2.0357 & -1.0011 & -0.6202 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

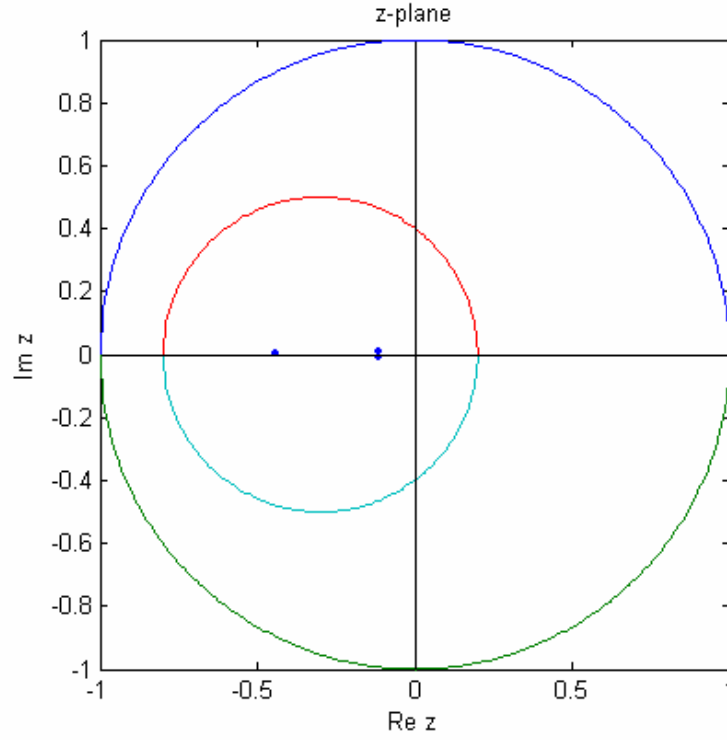
$$K = \begin{bmatrix} 2.0170 & -1.9580 & -0.1134 \\ 2.0357 & -1.0011 & -0.6202 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.78), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.77) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.4389 - 0.0000i \\ -0.1130 + 0.0102i \\ -0.1130 - 0.0102i \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

olur. Şekil 4.2.5.'te gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.2.5.  $\alpha=0.5$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.3$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek:4.2.6.** Referans [27]'de verilen örnek ele alınır ; sistem denklemleri :

$$A = \begin{bmatrix} 3.6800 & 2.7200 & -3.0400 \\ -1.4400 & 0.2400 & 2.3200 \\ -0.9600 & 0.1600 & 2.8800 \end{bmatrix} \quad (4.80a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.80b)$$

$$C = \text{eye}(3) \quad (4.80c)$$

$$Q = \text{eye}(3) \quad (4.80d)$$

$$R = \text{eye}(2) \quad (4.80e)$$

olan örnekte yarıçap ve merkez seçimlerine göre uyarlanan sıklık bölgesi algoritmasından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-beta=-0.5$  merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik (2.36)'dan :

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} 4.1800 & 2.7200 & -3.0400 \\ -1.4400 & 0.7400 & 2.3200 \\ -0.9600 & 0.1600 & 3.3800 \end{bmatrix} \quad (4.81a)$$

$Q_I, R_I, S_I$  ağırlık matrislerinin hesaplanmasında kullanılan  $\bar{Q}$  ; eşitlik (4.11)'den

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 24.3289 & 6.1357 & -13.1499 \\ 6.1357 & 1.7467 & -1.6428 \\ -13.1499 & -1.6428 & 21.1597 \end{bmatrix} \quad (4.81b)$$

olarak hesaplanır.

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8135 & 83.6791 & -136.8765 \\ 83.6791 & 72.5659 & -102.0505 \\ -136.8765 & -102.0505 & 179.2285 \end{bmatrix} \quad (4.81c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 347.8289 \\ 0 \\ 10.7791 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = -3.9594e-011$$



sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 347.8289 \\ 10.7791 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 24.0737 & 9.3631 \\ 9.3631 & 37.8942 \end{bmatrix} \quad (4.81d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 23.4057 & 61.0897 \\ 29.2356 & 45.2706 \\ -21.9396 & -80.1958 \end{bmatrix} \quad (4.81e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 0.6264 & 0.9824 & 0.5520 \\ 2.0751 & 1.0605 & -2.9649 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

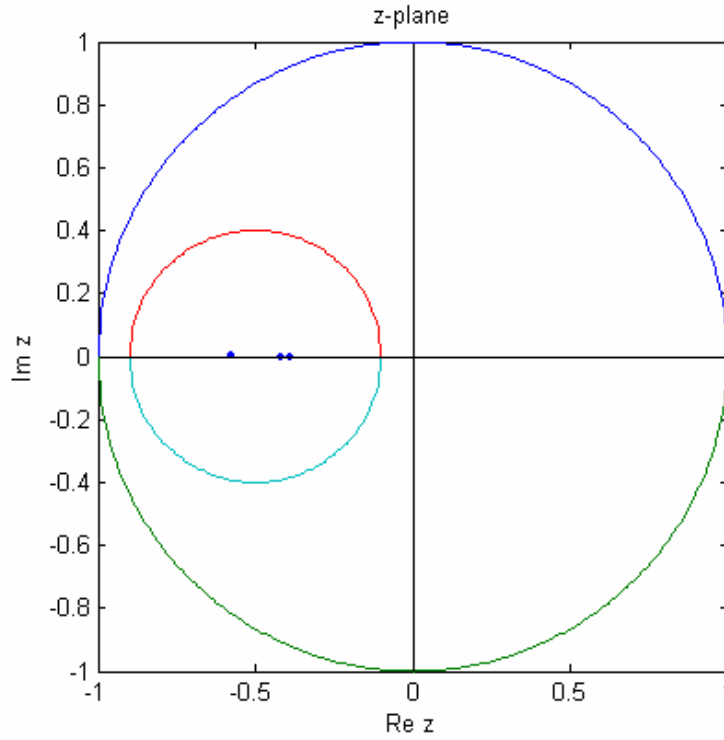
$$K = \begin{bmatrix} 0.6264 & 0.9824 & 0.5520 \\ 2.0751 & 1.0605 & -2.9649 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.83), sıklık bölgesindeki alitmadan [32] bulunan  $K$  (4.82) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.5765 + 0.0000i \\ -0.3915 - 0.0000i \\ -0.4153 - 0.0000i \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

olur. Şekil 4.2.6.'da gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.2.6.  $\alpha=0.4$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.5$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

**Örnek 4.2.7.** Örnek 3.2.6  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.3$  merkezli bölge için incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 3.9800 & 2.7200 & -3.0400 \\ -1.4400 & 0.5400 & 2.3200 \\ -0.9600 & 0.1600 & 3.1800 \end{bmatrix} \quad (4.85a)$$

$Q_I, R_I, S_I$  ağırlık matrislerinin hesaplanmasında kullanılan  $\bar{Q}$  ; eşitlik (4.11)'den:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 24.5052 & 7.7939 & -16.4918 \\ 7.7939 & 2.7954 & -3.1346 \\ -16.4918 & -3.1346 & 25.1702 \end{bmatrix} \quad (4.85b)$$

olarak hesaplanır.

(4.15) ve (4.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, kökleri belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110.5185 & 82.9258 & -143.7959 \\ 82.9258 & 68.8715 & -102.8963 \\ -143.7959 & -102.8963 & 190.8509 \end{bmatrix} \quad (4.85c)$$

$Q_1$  ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında :

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 359.9428 \\ 0 \\ 10.2981 \end{bmatrix} \quad \det(Q_1) = 1.0348e-011$$

sıfırdan büyük ve ya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (4.17) ve (4.18) numaralı denklemlerden  $Q_1$  ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 359.9428 \\ 10.2981 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB **svd**( $Q_1$ ) komutuyla singular value decomposition değerleri,  $Q_1$  matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 25.2551 & 10.5960 \\ 10.5960 & 43.3295 \end{bmatrix} \quad (4.85d)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 23.0890 & 67.0653 \\ 28.3951 & 48.2701 \\ -21.7190 & -88.8007 \end{bmatrix} \quad (4.85e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi  $K$ , yukarıdaki ağırlık matrisleri kullanılarak sıklık bölgesi algoritmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \begin{bmatrix} 0.4776 & 0.8962 & 0.5651 \\ 1.9747 & 1.0225 & -2.8582 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Öte yandan, MATLAB **dlqr** komutu ile elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  aşağıda verilmiştir:

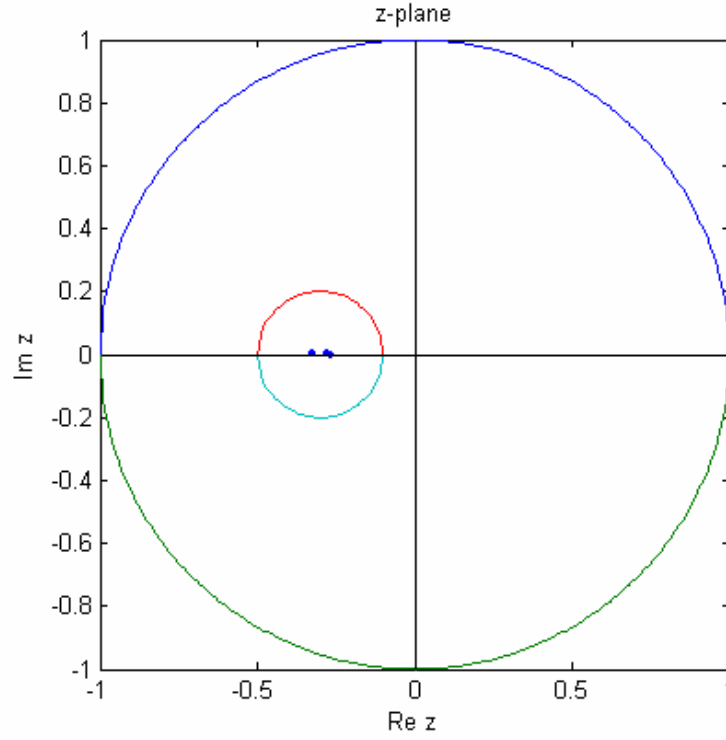
$$K = \begin{bmatrix} 0.4776 & 0.8962 & 0.5651 \\ 1.9747 & 1.0225 & -2.8582 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Zaman bölgesi MATLAB **dlqr** komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi  $K$  (4.87), sıklık bölgesindeki algoritmadan [32] bulunan  $K$  (4.86) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.3236 + 0.0000i \\ -0.2684 - 0.0000i \\ -0.2761 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

olur. Şekil 4.2.7.'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



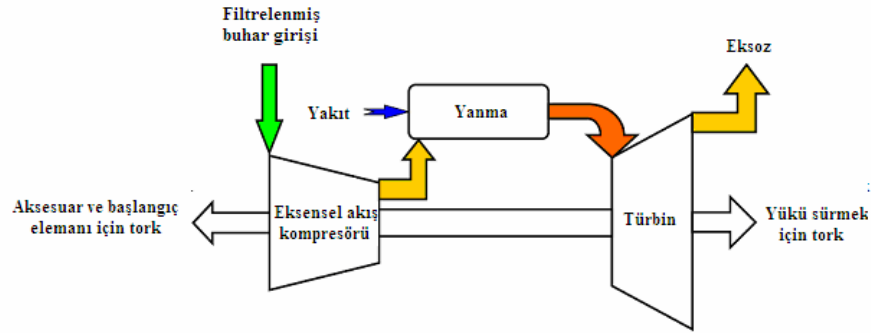
Şekil 4.2.7.  $\alpha=0.2$  yarıçaplı ve  $-\beta=-0.3$  merkezli disk için  $A_c$  özdeğerlerinin grafiksel gösterilimi

### 4.3. GAZ TÜRBİNİN GENEL TANIMI

Gaz türbini, içten yanmalı bir tür motordur. Gazı (havayı) sıkıştırıp, (yakıtın yanması sonucu) ona ısı ilâve ederek genişlemesini, dönme hareketine çevirir. Bu hareket devamlı ve düzenli olarak ortaya çıkar. Gaz türbini bu özelliği yönünden benzin ve dizel motorlarından farklıdır. Benzin ve dizel motorlarında dönme hareketini elde etmek için ihtiyaç duyulan krank miline gaz türbininde gerek yoktur. Gaz türbinleri hemen hemen bütün güç motorlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca elektrik elde edilmesinde, gazların boru ile iletilmesinde gaz türbinlerinin önemli bir yeri vardır.

En yaygın ve basit gaz türbini “açık devreli” olanıdır. Türbinde hava bir

kompresöre çekilerek basıncı birkaç atmosfere yükseltilir. Sıcaklığı yanma odasında sıvı veya gaz yakıt kullanılarak artırılır. Basıncı yüksek gaz, atmosfer basıncına düşürülürken, türbini döndürür. Jet motorlarında bu genişleme bir lülede gerçekleştirilir. Türbin ve kompresör bir malle birleştirilmiş olup, türbin aynı zamanda kompresörü çalıştırır. Sıkıştırma ve genişleme basınçları oranları hemen hemen aynıdır. Türbine giren gaz yüksek sıcaklıktadır ve genişlemesi sonucu, sıkıştırma için gerekli olandan daha fazla iş ortaya çıkar. Bu fazlalık motorda kullanılır.



Şekil 4.3.1 Gaz türbini basitleştirilmiş akış diyagramı

“Kapalı devreli” gaz türbininde çoğu zaman havadan daha uygun özelliklere sahip olan belirli miktardaki gaz sistemde mevcuttur ve devreder. Bu tür motorlarda türbini terk eden ve kompresöre girecek olan gazın soğutulması gerekmektedir. Ancak gazın iç basıncı normal olarak atmosferik basınçtan daha büyük olduğu için daha fazla güç ortaya çıkar.

Gaz türbinlerinin diğer içten yanmalı motorlara nazaran en önemli üstünlüğü, onun dönme hareketinin motor parçalarının daha yüksek hızla dönmesini sağlamasıdır.

Bu sebepten verilen bir büyüklükten daha fazla güç elde edilir. Buharlı türbinlere göre ise, yakıt hızlı hareket eden bir akımda yüksek basınçta yandığı için,

daha küçük yanma odasına ve yüksek saflıktaki su yerine, havaya ihtiyaç duyar.

Ancak en önemli mahzuru, diğer içten yanmalı motorlara nispetle daha düşük verime sahip olmasıdır. Sebebi de, türbinin kanatlarının devamlı olarak yüksek sıcaklığa maruz kalması ve bunun sonucu olarak müsade edilen malzeme gerilmelerinin düşük olmasıdır. Ayrıca her devrede alınan hava ile piston ve silindir soğutulur. Bu da verimin düşmesine sebep olur.

Gaz türbinleri, kısmî yüklemeli işlemlere pek uygun değildir. Çünkü yüklenme düştükçe verim hızla düşer. Sebebi, basınç oranları ve sıcaklık azalmasının sonucu olduğu gibi, parçalarının veriminin kısmî yüklemeye düşük olmasından doğar. Gaz türbininin verimi, sıkıştırmanın gaz (hava) ile yapılması yönünden, sıvı (su) pompalayan buhar türbinlerine göre daha düşüktür. Aynı şartlarda, bir gazın sıkıştırılması, bir sıvının pompa edilmesinden çok daha fazla iş gerektirir.

#### 4.3.1 Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemlerin Sıklık Bölgesinde Tasarımı

##### **Problemin Belirlenmesi :**

Sistem denklemleri aşağıdaki şekilde verildiğinde:

$$x(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

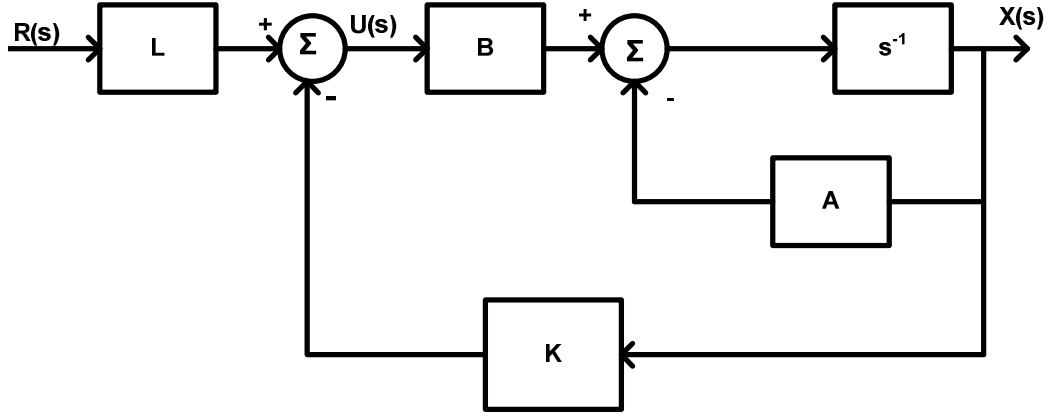
$$y(t)=Cx(t)$$

$$u(t)=-Kx(t)+Lr(t) \quad [r(t) \text{ Referans girişidir.}]$$

$$Q \geq 0 \text{ ve } R > 0 \text{ (} Q \text{ yarı kesin ve } R \text{ kesin pozitif ağırlık matrisleri )}$$

Amacımız başarımlı indisini ( $J$ ) minimize edecek pozitif ağırlık matrisleri  $Q$  ve  $R$  seçmektir.

$$J = \int_0^T [y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (4.1)$$



Şekil 4.3.2. Optimal LSVF (linear state variable feedback) sistemi

#### 4.3.2. Kare Olmayan Aktarım Fonksiyonuna Uyarlanan Algoritma Arcasoy [3]

$$U(s) = LR(s) - K(sI-A)^{-1}BU(s) \quad (4.2)$$

$$U(s) = [I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}LR(s) \quad (4.3)$$

$$F(s) = [I+K(sI-A)^{-1}B] \text{ (Optimal Dönüş Fark Matrisi)} \quad (4.4)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (4.5)$$

$$Y(s) = G(s)F^{-1}(s)LR(s) = T(s)R(s) \quad (4.6)$$

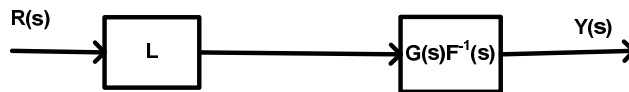
$$T(s) = G(s)F^{-1}(s)L \quad (4.7)$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B \text{ (Aktarım İşlevi Matrisi)} \quad (4.8)$$

$$Z(s) = F(s) - I \quad (4.9)$$

$G(s)$  Transfer fonksiyonunun çıkışı  $l$ , girişi de  $m$  olarak kabul edilirse:

**$m < l$  olduğu durumda sistem:**



Şekil 4.3.3.  $G(s)$ 'in çıkışlarının sayısı girişten fazla olduğu durumdaki sistem



$m > l$  olduğu durumda sistem:



Şekil 4.3.4.  $G(s)$ 'in girişlerinin sayısı çıkıştan fazla olduğu durumdaki sistem

Transfer fonksiyon matrisi kare ise,  $l=m$  olacak şekilde:

$$M = L = S^{-1} \stackrel{\Delta}{=} F(0)G^{-1}(0)$$

Çıkış sinyali  $y(t)$  ve giriş sinyali  $u(t)$ ,  $m$  ve  $l$  durumlarına göre aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

i.  $m < l$  için:

$$u(t) = L^{-1}\{F^{-1}(s)LR(s)\}$$

$$y(t) = L^{-1}\{G(s)F^{-1}(s)LR(s)\}$$

ii.  $m > l$  için:

$$u(t) = L^{-1}\{F^{-1}(s)R(s)\}$$

$$y(t) = L^{-1}\{MG(s)F^{-1}(s)R(s)\}$$

$m = l$  için yukarıdaki denklemler çıkış sinyali  $y(t)$  ve giriş sinyali  $u(t)$  için duruma göre kullanılır.

#### 4.3.3. Optimal Tasarım Algoritması [3]

$A$ ,  $B$ ,  $C$  sistem parametreleri,  $Q$  ve  $R$  ağırlık matrisleridir.

**1.Adım:** Sistem aktarım matrisi  $G(s)$  :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.11)$$

$$\Psi(s) = R + G^T(-s)QG(s) \quad (4.12)$$

**2. Adım:** Görüngeşel yoğunluk matrisi  $\psi(s)$  :

$$\Psi(s) = \Delta^T(-s)\Delta(s) \quad (4.13)$$

**3. Adım:** Dönüş oran matrisi  $F(s)$ :

$$F(s) = \Delta^{-1}(\infty)\Delta(s) \quad (4.14)$$

**4. Adım:**  $S$  matrisi :

$$S \stackrel{\Delta}{=} G(0)F^{-1}(0) \quad (4.15)$$

Eğer  $m < l$  ve  $S$ 'in rankı  $m$  ise,  $L_{m \times m} = S_{m \times l}^+ \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}_{l \times m}$

Eğer  $m > l$  ve  $S$ 'in rankı  $l$  ise,  $M_{l \times l} = [I_l \quad 0]_{l \times m} S_{m \times l}^+$  olur.

Eğer  $m = l$  ise  $L = M = S^{-1}$

**5. Adım:** Giriş sinyali  $u(t)$  ve çıkış sinyali  $y(t)$  olacak şekilde belirlenirse:

1.  $m < l$  için:
2.  $u(t) = L^{-1}\{F^{-1}(s)LR(s)\}$
3.  $y(t) = L^{-1}\{G(s)F^{-1}(s)LR(s)\}$

1.  $m > l$  için:
2.  $u(t) = L^{-1}\{F^{-1}(s)R(s)\}$
3.  $y(t) = L^{-1}\{MG(s)F^{-1}(s)R(s)\}$

$m = l$  için: Yukardaki durumlardaki denklemler kullanılabilir

**6. Adım:** Dönüş Oranı Matrisi  $Z(s)$  :

$$Z(s) = F(s) - I$$

$$d(s)Z(s) = Z_0 s^{n-1} + Z_1 s^{n-2} + \dots + Z_{n-1} \quad (4.16)$$

$$d(s) = \det(sI - A) \quad (4.17)$$

**7. Adım:** Denetlenebilirlik matrisi  $M_c$  :

$$M_c \stackrel{\Delta}{=} [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] \quad (4.18)$$

**8. Adım:**  $[V]$  matrisi :

$$V = [V_0 : V_1 : V_2 : \dots : V_{n-1}] \quad (4.19)$$

$$V_0 = Z_0$$

$$V_p = Z_p + \sum_{j=1}^p c_{j-1} Z_{p-j}, p = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.20)$$

**9. Adım:** Optimal kazanç matrisi  $K$ :

$$K_{m \times n} = [V] \times M_{c_{m \times n}}^+ \quad (4.21)$$

$M_{c_{m \times n}}^+ = [M_c^T]_{nm \times n} [M_c \times M_c^T]_{n \times n}^{-1}$  olduğu bilinerekten  $K$  eşitlik (4.21)'deki şekilde bulunur.

**Örnek 4.1** Arcasoy C.C.[3] & Rosenbrock H.H. and McMorran P.D.[31] incelenen örneklerin sistem matrisleri ele alınır:

$$A = \begin{bmatrix} -1.268 & -0.4528 & 1.498 & 951.5 \\ 1.002 & -1.9570 & 8.52 & 1240.0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$C = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1]$  , olarak verilen sisteme algoritma uyarlanıp MATLAB komutlarıyla dosyaları istenen giriş-çıkış değerlerine göre çalıştırdığımızda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\text{Adım 1: Sistem aktarım matrisi : } G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$g_{11} = 14.98s^2 + 15.23s + 2545.8 \quad (4.23)$$

$$g_{12} = -2.8422 \times 10^{-14} s^3 + 9.515 \times 10^4 s^2 + 1.1321 \times 10^6 s + 1.8059 \times 10^6 \quad (4.24)$$

$$g_{21} = 85.2s^2 + 8643 + 12304 \quad (4.25)$$

$$g_{22} = -1.4211 \times 10^{-14} s^3 + 1.24 \times 10^5 s^2 + 1.4926 \times 10^6 s + 2.5257 \times 10^6 \quad (4.26)$$

$$g_{31} = 10s^3 + 1032.3s^2 + 3250.3s + 252.68 \quad (4.27)$$

$$g_{32} = -9.049 \times 10^{-13} s \quad (4.28)$$

$$g_{41} = 0 \quad (4.29)$$

$$g_{42} = 100s^3 + 1322.5s^2 + 3477.7s + 2526.8 \quad (4.30)$$

(4.16)'dan  $d(s) = s^4 + 113.22s^3 + 1357.3s^2 + 3503s + 2528.8$  bulunur.

$$\psi(s) = \frac{1}{d(s)d(-s)} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\varphi_{11} = 50s^8 - 5.0627 \times 10^5 s^6 + 6.2781 \times 10^7 s^4 - 1.0725 \times 10^9 s^2 + 1.9619 \times 10^9 \quad (4.32)$$

$$\varphi_{12} = 1.199 \times 10^8 s^4 - 1.0726 \times 10^{10} s^3 - 1.2615 \times 10^{11} s^2 - 3.334 \times 10^{10} s + 3.5675 \times 10^{11} \quad (4.33)$$

$$\varphi_{21} = 1.199 \times 10^8 s^4 - 1.0726 \times 10^{10} s^3 - 1.2615 \times 10^{11} s^2 + 3.334 \times 10^{10} s + 3.5675 \times 10^{11} \quad (4.34)$$

$$\varphi_{22} = 10s^8 - 2.0105 \times 10^5 s^6 + 2.4432 \times 10^{11} s^4 - 2.5394 \times 10^{13} s^2 + 96407 \times 10^{13} \quad (4.35)$$

olarak bulunur.

**Adım 2:** Eşitlik 4.13'ten :

$$\Delta(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\delta_{11} = 7.0711s^4 + 81.081s^3 + 1.0687s^2 + 3.1987 \times 10^4 s + 2.571 \times 10^4 \quad (4.37)$$

$$\delta_{12} = -1.0891 \times 10^{-4} s^4 + 0.42588s^3 + 164.63s^2 + 1.2007 \times 10^4 s + 1.0404 \times 10^5 \quad (4.38)$$

$$\delta_{21} = 1.0174s^3 + 347.96s^2 + 2.4982 \times 10^4 s + 3.6063 \times 10^4 \quad (4.39)$$

$$\delta_{22} = 3.1623s^4 + 1861.6s^3 + 5.1619 \times 10^5 s^2 + 5.9607 \times 10^6 s + 9.8182 \times 10^5 \quad (4.40)$$

olarak bulunur.

**Adım 3:** Eşitlik 4.14'ten :

$$\text{Dönüş Oran Matrisi : } F(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$f_{11} = s^4 + 114.67s^3 + 1511.4s^2 + 4523.8s + 3637 \quad (4.42)$$

$$f_{12} = 0.069295s^3 + 25.796s^2 + 1727.1s + 14761 \quad (4.43)$$

$$f_{21} = 0.32172s^3 + 110.03s^2 + 7900.1s + 11404 \quad (4.44)$$

$$f_{22} = s^4 + 588.7s^3 + 1.632 \times 10^5 s^2 + 1.8849 \times 10^6 s + 3.1048 \times 10^6 \quad (4.45)$$

**Adım 4:** Eşitlik 4.15'ten :

$$S \text{ matrisi : } S = \begin{bmatrix} -1.1409 & 0.587091 \\ 0.8449 & 0.80948 \\ 0.7052 & -3.3531 \times 10^{-3} \\ -2.5906 \times 10^3 & 8.2617 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$L$  matrisi:

$$L = \begin{bmatrix} -0.45678 & 0.33245 \\ 0.59249 & 0.80562 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

**Adım 5:**

Giriş dönüşüm işareti  $U(s)$  ve çıkış dönüşüm işareti  $Y(s)$  ise,

$$U(s) = \frac{d(s)}{Den(s)} * \left[ \begin{array}{c} -1.2433s^4 - 73.29s^3 - 2.0331 \times 10s^2 - 2.3677 \times 10s - 4.0665 \times 10 \\ 13.981s^4 + 1603.5s^3 + 21268s^2 + 73070s + 65028 \end{array} \right] \quad (4.48a)$$

$$Y(s) = \frac{1}{Den(s)} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{41} \end{bmatrix} \quad (4.48b)$$

$$y_{11} = -3.9737x10^{-13}s^7 + 1.3303x10^6s^6 + 1.6839x10^8s^8 + 3.8601x10^9s^4 + 3.3579x10^{10}s^3 + 1.2313x10^{11}s^2 + 1.9336x10^{11}s + 1.0708x10^{11} \quad (4.49)$$

$$y_{21} = -1.9868x10^{-13}s^7 + 1.7335x10^6s^6 + 2.1963x10^8s^5 + 5.0423x10^9s^4 + 4.2887x10^{10}s^3 + 4.2887x10^{10}s^3 + 1.4753x10^{11}s^2 + 2.1733x10^{11}s + 1.1421x10^{11} \quad (4.50)$$

$$y_{31} = -12.433s^7 - 8.6124x10^3s^6 - 2.7936x10^6s^5 - 2.3592x10^8s^4 - 3.1473x10^9s^3 - 1.2407x10^{10}s^2 - 1.92x10^{10}s - 1.0275x10^{10} \quad (4.51)$$

$$y_{41} = 1398.1s^7 + 1.7884x10^5s^6 + 4.296x10^6s^5 + 4.1046x10^7s^4 + 1.8115x10^8s^3 + 3.9386x10^8s + 1.6432x10^8 \quad (4.52)$$

$$Den(s) = s^8 + 703.37s^7 + 23225x10^5s^6 + 4.2961x10^6s^5 + 4.1046x10^7s^4 + 4.6861x10^8s^3 + 3.9451x10^9s^2 + 1.3798x10^{10}s + 2.0765x10^{10} + 1.1124x10^{10} \quad (4.53)$$

olarak bulunur.

**Adım 6:** Eşitlik 4.16'dan :

$$\text{Dönüş oran matrisi } Z(s) : Z(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \text{ olarak belirlenirse; } \quad (4.54)$$

$$z_{11} = 1.4404s^3 + 154.13s^2 + 1020.9s + 1110.2 \quad (4.55)$$

$$z_{12} = 0.069295s^3 + 25.796s^2 + 1727.1s + 14761 \quad (4.56)$$

$$z_{21} = 0.32172s^3 + 110.03s^2 + 7900.1s + 11404 \quad (4.57)$$

$$z_{22} = 475.48s^3 + 1.6187x10^5s^2 + 1.8814x10^6s + 3.1022x10^6 \quad (4.58)$$

$$Z(s)d(s) = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

**Adım 7:** Eşitlik 4.18'den :

$M_c$  kontrol edilebilirlik matrisi:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 14.98 & 9.515x10^4 & -172.65 & -9.6413x10^6 & 1762.4 & 9.6429x10^8 \\ 0 & 0 & 85.2 & 1.24x10^5 & -1003.7 & -1.254x10^7 & 10311 & 1.2549x10^9 \\ 10 & 0 & -100 & 0 & 1000 & 0 & -10000 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & -10000 & 0 & 1x10^6 & 0 & -1x10^8 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

**Adım 8.** Eşitlik 4.20'den :

$$V = \begin{bmatrix} 1.4404 & 0.069295 & -8.9511 & 17.95 & 79.389 & -399.26 & -775.02 & 35362 \\ 0.32172 & 475.48 & 73.606 & 1.0804x10^5 & -870.58 & -1.0997x10^7 & 8944.8 & 1.09999x10^9 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

**Adım 9.**

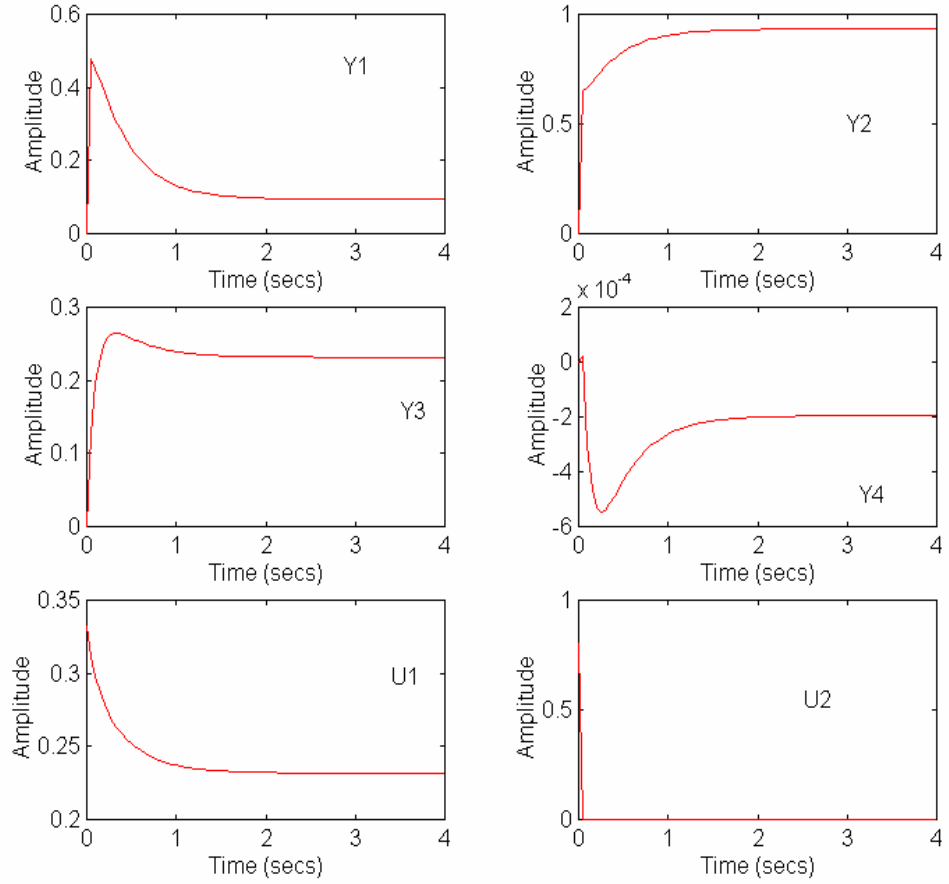
Optimal kazanç matrisi  $K$  :

$$K = \begin{bmatrix} -1.0786e-001 & 8.2965e-002 & 1.4404e-001 & 6.9514e-004 \\ 5.9693e-001 & 7.9668e-001 & 3.2195e-002 & 4.7547e+000 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

şeklinde bulunur.

Öte yandan **lqr** komutu ile sürekli sistem optimal kazanç  $K_{ric}$  değeri yukarıda sıklık bölgesinde bulunan  $K$  kazancı ile aynıdır.

$$K_{ric} = \begin{bmatrix} -1.0786e-001 & 8.2965e-002 & 1.4404e-001 & 6.9514e-004 \\ 5.9693e-001 & 7.9668e-001 & 3.2195e-002 & 4.7547e+000 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

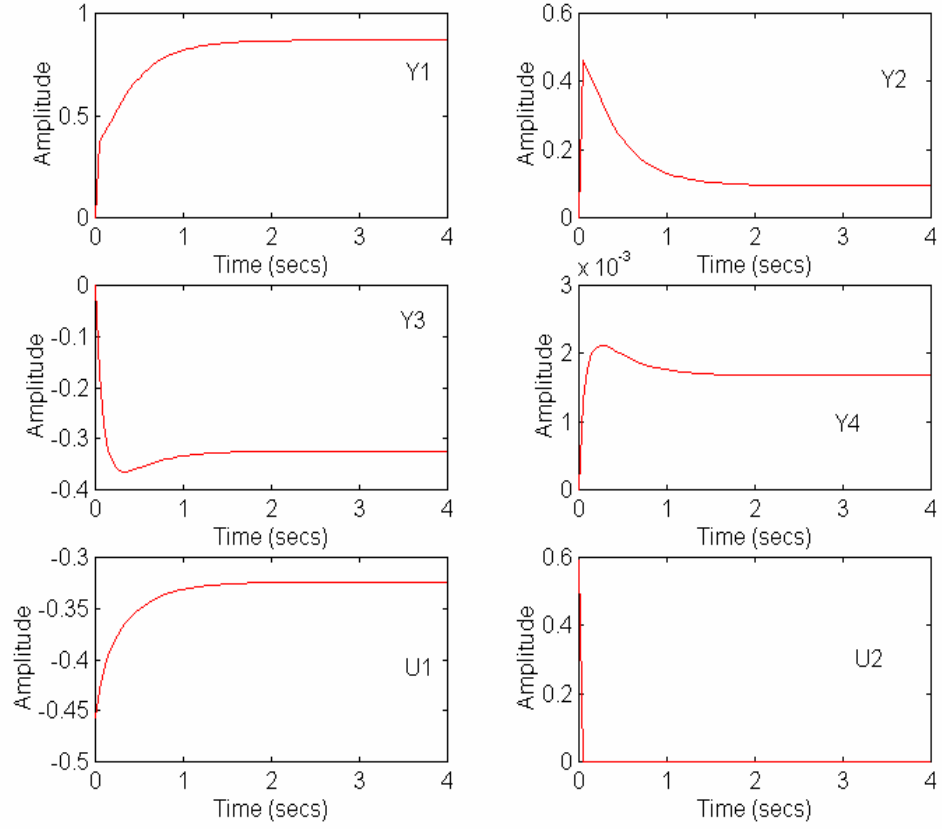


Şekil 4.3.5. Sistem çıkış ve girişleri :  $\rho_1=50, \rho_2=50, R(s)=R_1(s)$

Optimal kazanç matrisi  $K$  :

$$K = \begin{bmatrix} -1.0786e-001 & 8.2965e-002 & 1.4404e-001 & 6.9514e-004 \\ 5.9693e-001 & 7.9668e-001 & 3.2195e-002 & 4.7547e+000 \end{bmatrix}$$

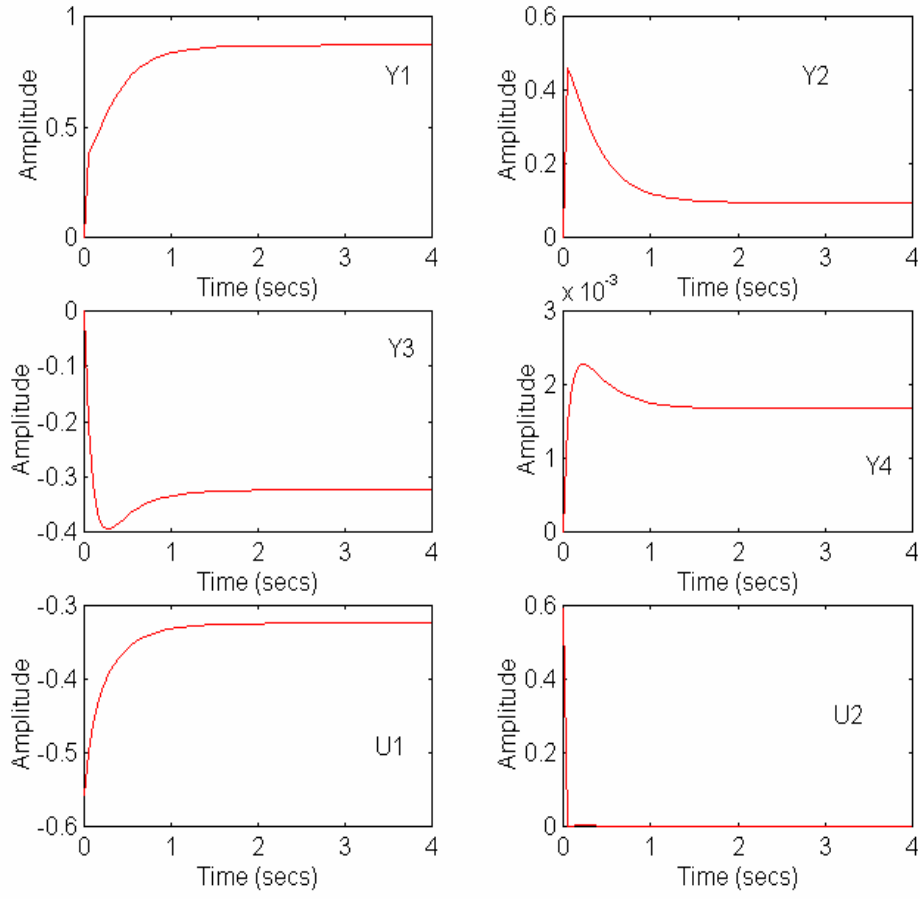




Şekil 4.3.6. Sistem çıkış ve girişleri :  $\rho_1=50, \rho_2=50, R(s)=R_2(s)$

Optimal kazanç matrisi  $K$  :

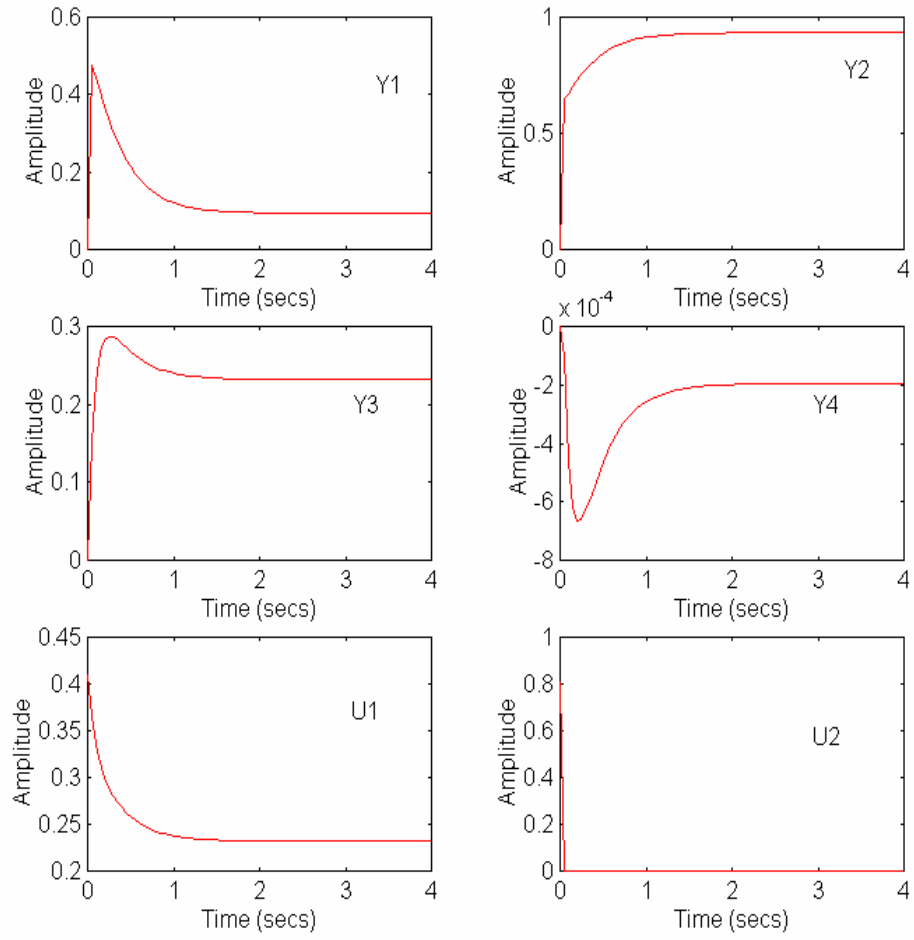
$$K = \begin{bmatrix} -1.0786e-001 & 8.2965e-002 & 1.4404e-001 & 6.9514e-004 \\ 5.9693e-001 & 7.9668e-001 & 3.2195e-002 & 4.7547e+000 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.3.7. Sistem çıkış ve girişleri :  $\rho_1=25$ ,  $\rho_2=10$ ,  $R(s)=R_2(s)$

Optimal kazanç matrisi  $K$  :

$$K = \begin{bmatrix} -1.8795e-001 & 1.4461e-001 & 2.6082e-001 & 1.3670e-003 \\ 5.9766e-001 & 7.9612e-001 & 3.1457e-002 & 4.7547e+000 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.3.8. Sistem çıkış ve girişleri :  $\rho_1=25$ ,  $\rho_2=10$ ,  $R(s)=R_I(s)$

Optimal kazanç matrisi  $K$  :

$$K = \begin{bmatrix} -1.8795e-001 & 1.4461e-001 & 2.6082e-001 & 1.3670e-003 \\ 5.9766e-001 & 7.9612e-001 & 3.1457e-002 & 4.7547e+000 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

Öte yandan **lqr** komutu ile sürekli sistem optimal kazanç  $K_{ric}$  değeri yukarıda sıklık bölgesinde bulunan  $K$  kazancı ile aynıdır.

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada incelenen yeni iki bölge için, sistemin özdeğerlerinin seçilmiş olan bölgeler içerisine yerleştirecek sıklık bölgesinde yeni algoritma geliştirilmiştir. Optimal kontrol probleminde sistemin özdeğerleri belirli bir yerdedir. Sistemin geçici tepkisinin (transient response) daha iyileştirilmesi gerekmektedir. Sistemin geçici tepkisini daha iyileştirebilmek için köklerin belirli bölgelere yerleştirilmesi gerekmektedir ki bu da ters optimal kontrol problemidir. Literatürde sıklık bölgesinde ele alınmamış olan iki yeni bölge seçilmiş ve sıklık bölgesi algoritmaları kullanılarak ters optimal kontrol problemi halledilmiştir. Bu yeni bölgelerde, ters optimal kontrol probleminin çözümü için pozitif/pozitif yarı tanımlı  $Q$  ağırlık matrisleri bulunmuştur. İncelenen optimal sistemin özdeğerlerinin seçilen bölgeler içine girdiği görülmüştür.

Gaz türbini problemi sürekli sistemde ele alınarak optimal tasarım gerçekleştirilmiştir. Daha sonra sistemin tepkisini iyileştirmek için ters optimal kontrol algoritması kullanılmıştır. Seçilen giriş-çıkış değerlerine göre grafiklerin ve sıklık bölgesi sonuçların ; zaman bölgesindeki sonuçlarla doğruluğu gösterilmiştir.

## Kaynaklar

- [1] Anderson B.D.O. and J.B.MOORE: "Optimal Control LQ Methods", USA, P.377, Prentice Hall, (1979).
  
- [2] Arcasoy C.C. and F.J.T. Shouman, "Linear quadratic regulators and eigenvalue placement in specified regions: Frequency domain solution" Proc.of II.Asian Control Conference, Seoul, Korea, pp.167-170, (1997).
  
- [3] Arcasoy C.C. "Multivariable Optimal Control System Design in Frequency Domain", Proc.of the IASTED International Conference on Control and Applications, Banff, Canada, pp.95-100, (July 25-30, 1999).
  
- [4] Arcasoy C.C. "Discrete-time optimal regulator and eigenvalue placement in a prescribed region: Frequency domain solution" Proc. Symposium on Quantitative Feedback theory and other Frequency Domain methods and Applications, University of Strathclyde, Glasgow, UK. Pp.93-95, (August 1997).
  
- [5] Arcasoy C.C. "Return-difference matrix properties for optimal stationary discrete Kalman Filter", Proc. IEE, **vol.118**, No.12, pp.1831-1834, (December 1971).
  
- [6] Athans M. And Falb P.L.: "Optimal Control", McGraw-Hill, USA, P.411,(1966).
  
- [7] Björn Wittenmark, Robin J. Evans, Yeng C. Soh, "Constrained Pole-placement using Transformation and LQ- design", Automatica. **Vol.23**. No. 6. pp.767-769 Printed in Great Britain, (1987).
  
- [8] Chen C.T.: "Linear System Theory and Design", Holt Sounders, China, p.312,Int. Edition, (1984).

- [9] "Computational Mathematics", B.P. Demidovich, I.A. Moron, Mir Publishers, (1987).
- [10] D.S.Naidu :"Optimal Control Systems", CRC pres, USA, p.433, (2003).
- [11] Endrikat C. and Hartmann I. "Optimal design of discrete-time MIMO systems in the frequency domain", *Int.J. Control*, **vol.48**, No.4, pp. 1569-1582, (1998).
- [12] Friedland B.: "Control System Design", McGraw-Hill, USA, p.287, (1986).
- [13] G. Enea, J. Duplaix, M.Franceschi, "Discrete Optimal Control with Aggregative Pole Placement" *IEE PROCEEDINGS-D*, **Vol 140**, No.5, (September 1993).
- [14] G.P.Liu and S. Daley, "Stable Dynamical Controller Design for Robust Polynomial Pole Assignment" *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, **Vol.145**, No.3, (May 1993).
- [15] Grimble M.J. and Johanson M.A.: "Optimal and Stochastic Estimation Theory and Applications", John Wiley, USA, p.536, (1988).
- [16] Hadi Saadat: "Computational Aids in Control Systems Using Matlab", McGraw-Hill, New York, p.140, (1993).
- [17] Jezek J. and Kucera V. "Efficient Algorithm for Matrix Factorization", *Automatica*, **vol.21**, no.6, pp.663-669, (1985).
- [18] Kenji Sugimoto and Yukata Yamamoto, "On Successive Pole Assignment by Linear-Quadratic Optimal Feedbacks" pp.697-723, (1989).

- [19] Kwakernaak H. “MATLAB Macros for polynomial  $H_\infty$  control system optimization”, Memo. 881, University of Twente, Dept.Applied Mathematics, (1990).
- [20] L.S. Shieh and M.M. Mehio and S. Ganesan, “Discrete Linear Quadratic Regulators with Eigenvalue Placement in Specified Region”, *INT.J.SYSTEMS SCI.*, **Vol.20**, no.9, pp.1713-1728, (1989).
- [21] Lewis F.L. :”Optimal Control”, John Wiley, USA, p.362, (1986).
- [22] Lewis F.L. :”Optimal Estimation”, John Wiley, USA, p.376, (1986).
- [23] Linear Algebra, H.D. Ikramov: ” Problems Book”, Mir Publishers, Moscow, (1983).
- [24] MacFarlane A.G.J. :”Frequency Response Methods in Control Systems”, *IEEE Press*, p.426, (1979).
- [25] MacFarlane A.G.J. :”Return- Difference and Return-Ratio Matrices and Their Use In Analysis and Design of Multivariable Feedback Control Systems, Proc. *IEE*, **Vol.117**,No.10, pp.2037-2049, (1970).
- [26] “Matrix Computations”, Gene H. Golub, Charles F van Loan, The John Hopkins University Press, p.684, London.
- [27] M. Leventoğlu, Sıklık Bölgesinde Optimal Kontrol ve Ters Optimal Kontrol Problemi ve Nükleer Reaktör Problemine Uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (2005).
- [28] Ogata K. :”Modern Control Engineering”, Prentice Hall, USA, p.963,(1990).
- [29] R. Kondo and K. Furuta, “On the Bilinear Transformation of Riccati Equations” *IEEE Transactions on Automatic Control*. **Vol.AC-31**, No.1, (January 1986).

- [30] R.A. Perez , K.-N. Lou :”Decentralised Multivariable Control and Stability of a Gas Turbine Engine” *IEE Proc. Control Theory Appl.*, **Vol.141**, No:6, (November 1994).
- [31] Rosenbrock H.H. and McMorran P.D. “State-space analysis of cascaded controller” *Proc. IEE*, **vol.117**, No.5, pp. 1026-1030, (May 1970).
- [32] Shouman F.J.T. “Inverse Optimal Control”, MSc.Thesis, Eastern Mediterreanean University, Elec.Eng. Dept. Famagusta, Turkey, (1995).
- [33] Toru Fujinaka and Tohru Katayama, “Discrete-Time Optimal Regulator With Closed-Loop Poles In Prescribed Region”, *Int.J. Control*, **Vol.47**, no.5 pp.1307-1321, (1988).
- [34] Tsu-Tian LEE and Shiow-Harn LEE, “Discrete Optimal Control with Eigenvalue Assigned Inside a Circular Region”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol.Ac-31**, No.10, pp.958-962, (October 1986).
- [35] Wolovich W.A., “Frequency Domain State Feedback And Estimation”, *Int. J. Control*, **Vol.17**, No.2,pp.417-428, (1973).
- [36] Y.Ochi and B. Wie,”Pole Assignment for Optimal Regulators with a Nonnegative Definite Weighting Matrix”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 0731-5090, **vol.19**, no.4 (967-969), (1996).



## EKLER

### Sıklık Bölgesi Tasarımı için Kullanılan Kodlar

#### Seçilen I. Bölgede Kullanılan Algoritma :

Örnek 3.1.1. için kullanılan kod yazılmıştır.  $\alpha$  yarıçap ve  $-\beta$  merkez değiştirildiği taktirde sistem denklemlerine göre I. Bölge için optimal kontrol sistemin özdeğerlerinin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmüştür

```
clf
A=[.9 .2 0 0;-.2 .9 1 0;0 0 -.2 .4;0 0 -.4 -.2];
b=[1 0;0 0;0 1;0 0];
q=eye(4)
r=eye(2)
alpha=0.3
c=eye(4)
I=eye(4)
beta=.7
abeta=A+beta*eye(4)
ay=abeta/alpha
by=b/alpha
k=coptks(ay,by,I,q,r)
%[K1,S,E] = LQR(ay,by,q,r,0) %coptks ile aynı değeri veriyor
q_bar=copt1k(A,by,k,r)
Q1=.5.*(A-I)'*q_bar*(A-I)
R1=2.*r+.5.*b'*q_bar*b
S1=.5.*(A-I)'*q_bar*b
[k,o] = doptks(ay,by,c,Q1,R1,S1)
%[K,S,E] = DLQR(ay,by,c,Q1,R1,S1) %doptks ile aynı değeri veriyor
v=eig(A-b*k)
drc_cir(-beta,alpha,v)
```

#### Seçilen II. Bölgede Kullanılan Algoritma :

Örnek 3.2.1. için kullanılan kod yazılmıştır.  $\alpha$  yarıçap ve  $-\beta$  merkez değiştirildiği taktirde sistem denklemlerine göre II. Bölge için optimal kontrol sistemin özdeğerlerinin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmüştür.

```
clf
A=[.9 .2 0 0;-.2 .9 1 0;0 0 -.2 .4;0 0 -.4 -.2];
b=[1 0;0 0;0 1;0 0];
q=eye(4)
r=eye(2)
alpha=0.3
```

```

c=eye(4)
I=eye(4)
beta=.6
abeta=A+beta*eye(4)
ay=abeta/alpha
by=b/alpha
k=coptks(ay,by,I,q,r)
%[K1,S,E] = LQR(ay,by,q,r,0) %coptks ile aynı değeri veriyor
q_bar=copt1k(A,by,k,r)
Q1=.5.*(A-I)'*q_bar*(A-I)
R1=2.*r+.5.*b'*q_bar*b
S1=.5.*(A-I)'*q_bar*b
[k,o] = doptks(ay,by,c,Q1,R1,S1)
%[K,S,E] = DLQR(ay,by,c,Q1,R1,S1) doptks ile aynı değeri veriyor
v=eig(A-b*k)
drc_cir(-beta,alpha,v)

```

### Sıklık Bölgesi Tasarımı için Kullanılan Kodlar [32]

```

function [QQ,o,VV] = copt1k(a,b,KK,r)

```

```

end
[rc,mc] = size(KK);
[n,m] = size(b)
[rrr,mrr]=size(r);
d=zeros(rc,m);
if (rc ~= m) | (mc~=n)|(rrr ~= mrr) | (rrr ~= m)
error('size of input matrix are wrong')
end
cg = zeros(m,rc*(n+1));
num = zeros(m,m*(2*n+1));
rd = zeros(m,m*(n+1));
c = zeros(1,n);
v = zeros(m,m*n);
[g1,di] = mvss2tf(a,b,KK,d);
[l1,l2]=size(g1);
iden=eye(l1);
for i=1:m
for j=1:m
g(i,(j-1)*(n+1)+1:j*(n+1))=iden(i,j).*di(1:n+1)+g1(i,(j-1)*(n+1)+1:j*(n+1));
end
end
for k=0:n
k1=(rc-1)*(n+1)+1+k;
cg(1:m,k+1:n+1:k1)=((-1)^(n-k).*g(1:rc,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k))*r;

```

```

cdi(k+1) = (-1)^(n-k).*di(k+1);
end
gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(cdi,di);
nn = 2*n+1;
for i=1:m
    for j=1:m
        num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = -r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
    end
end
NUM=num
pause
if (m ~=1)
    num1=semp(num);
    num=num1
end
pause
[s1,s2]=size(num);
g1=(s2/m-1)/2;
g2=((s2/m+1)/2-1)/2;
num=s2k(num,g1,m);
else
num=num(3:length(num));
end
E=eig(a)
if (m==1)
[o,do,JJ]=jspec(num,length(num)-1,E);
else
degNUM=(2*n-2)*ones(1,m);
[o,do,JJ]=jspec(num,degNUM,E);
o=k2s(o,g2,m);
end
for i=1:n
c(i) =-di(i+1);
k1 = (i-1)*m +1;
[u1,u2]=size(o);
v(1:m,k1:i*m) = o(1:m,i:(n-1)+1:(m-1)*((n-1)+1)+i);
for l=1:i-1
v(1:m,k1:i*m)=v(1:m,k1:i*m)+c(l).*o(1:m,i-l:(n-1)+1:(m-1)*((n-1)+1)+i-1);
c(i) = c(i) - di(l+1)*c(i-l);
end
end
VV=v;
mc = ctrb(a,b);
if m == 1
QQ = (v * inv(mc))'*(v*inv(mc));
else
QQ = (v * pinv(mc))'*(v*pinv(mc));
end
end

```

**function [k,o] = coptks(a,b,cc,q,r)**

```

%COPT Linear quadratic regulator design for continuous-time case
% [K,O] = COPTk(A,B,C,Q,R,S) calculates the optimal gain matrix K
% such that the feedback law  $u = -Kx$  minimizes the cost function:
%
%  $J = \int_0^{\infty} \{x'Qx + x'Su + u'Ru\} dt$ 
%
% subject to constraint equation :
%
%  $\dot{x} = Ax + Bu$ 
%
% Also returned is O, spectral factor of performance spectrum matrix
%
%  $W(s) = R + G'(-s)QG(s) = F'(-s)RF(s)$ 
%
% where  $G(s) = C \text{inv}(sI-A)B$  ; system transfer matrix and
%  $F(s)$  optimal return-difference matrix
%

if (nargin ~= 5)&(nargin ~=6)
    error('number of input equal to 5 or 6')
end
[rc,mc] = size(cc);
[n,m] = size(b);
[rq,mq] = size(q);
[rrr,mrr]=size(r);
d = zeros(rc,m);
if (rq ~= mq)|(rq ~= rc)|(rrr ~= mrr)|(rrr ~= m)
    error('size of input matrices are wrong');
end
if (nargin ==6)
    [rs,cs]=size(s);
    if (rs ~= n)|(cs ~=m)
        error('size B should equal to size S');
    end
end
cg = zeros(m,rc*(n+1));
num = zeros(m,m*(2*n+1));
rd = zeros(m,m*(n+1));
c = zeros(1,n);
v = zeros(m,m*n);
[g,di] = mvss2tf(a,b,cc,d);
for k=0:n
    k1=(rc-1)*(n+1)+1+k;
    cg(1:m,k+1:n+1:k1) = ((-1)^(n-k). *g(1:rc,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k)) * q;
end

```

```

cdi(k+1) = (-1)^(n-k).*di(k+1);
end
gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(cdi,di);
%*****BEGIN
if(nargin==6)
[r1,c1]=size(s');
[r2,c2]=size(b);
dd=zeros(r1,c2);
[tt,d1]=mvss2tf(a,b,s',dd); % d1=d(s)
tt1=cparaher(tt,n);
d2=cdi; % d2=d1(-s)
for i1=1:m
for j1=1:m
T1(i1,(j1-1)*(2*n+1)+1:j1*(2*n+1))=...
conv(d2,tt(i1,(j1-1)*(n+1)+1:j1*(n+1)));
end
end
for i1=1:m
for j1=1:m
T2(i1,(j1-1)*(2*n+1)+1:j1*(2*n+1))=...
conv(d1,tt1(i1,(j1-1)*(n+1)+1:j1*(n+1)));
end
end
end
%*****END
nn = 2*n+1;
for i=1:m
for j=1:m
num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
end
end
NUM=num
%*****BEGIN
if (nargin==6)
num=num+T1+T2;
end
%*****END
R=roots(detpm(num,2*n));
if(m==1)
E=eig(a);
[o,do,JJ]=jspec(num,length(num)-1,E);
else
E=eig(a);
num=s2k(num,n,m);
degNUM=2*n*ones(1,m);
[o,do,jj]=jspec(num,degNUM,E);
o=k2s(o,n/2,m);

```

```

end
so = inv(o(1:m,1:(n)+1:(m-1)*((n)+1)+1));
for k=0:n
rd(1:m,k+1:(n)+1:(m-1)*((n)+1)+1+k)=so*o(1:m,k+1:(n)+1:(m-1)*((n)+1)+1+k);
end
for i=1:m
rd(i,(i-1)*((n)+1)+1:i*((n)+1))=rd(i,(i-1)*((n)+1)+1:i*((n)+1))-di(1:(n)+1);
end
RD=rd;
for i=1:n
c(i) =-di(i+1);
k1 = (i-1)*m +1;
v(1:m,k1:i*m) = rd(1:m,i+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+i);
for l=1:i-1
v(1:m,k1:i*m) =v(1:m,k1:i*m)+c(l). *rd(1:m,i+1-l:n+1:(m-1)*(n+1)+i+1-l);
c(i) = c(i)-di(l+1)*c(i-l);
end
end
VV=v;
mc = ctrb(a,b);
if m == 1
k = v * inv(mc);
else
k = v * pinv(mc);
end
end

```

**function [k,o,NUM] = doptk(a,b,cc,q,r)**

```

%DOPT Linear quadratic regulator design for discrete-time system
% [K,O] = DOPTk(A,B,C,Q,R) calculates the optimal feedback
% gain matrix K such that the feedback law  $u = -Kx$ 
% minimizes the cost function :
%
%  $J = \text{Sum} \{x'Qx + u'Ru\}$ 
%
% subject to the constraint equaiton:
%
%  $x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$ 
%
% Also returned is 0, spectral factor of performance spectrum matrix
% which
%  $W(z) = R + G'(1/z)QG(z) = F'(1/z)rF(z)$ 
%
% where  $G(z) = C * \text{inv}(zI-a) * B$  ; system transfer matrix and
%  $F(z)$  is optimal return difference matrix

```

```

if nargin ~= 5
    error('number of input equal to 5')
end
[rc,mc] = size(cc);
[n,m] = size(b);
[rq,mq] = size(q);
d = zeros(rc,m);
cg = zeros(m,rc*(n+1));
num = zeros(m,m*(2*n+1));
c = zeros(1,n);
v = zeros(m,m*n);
rd = zeros(m,m*(n+1));
[g,di] = mvss2tf(a,b,cc,d);
for k=0:n
    cg(1:m,k+1:n+1:(rc-1)*(n+1)+1+k) = g(1:rc,n+1-k:n+1:m*(n+1)-k)' * q;
end
gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(di(n+1:-1:1),di);
nn = 2*n+1;
for i=1:m
    for j=1:m
        num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
    end
end
NUM=num

[Ac,Bc,Cc,Dc]=d2cm(a,b,cc,d,2,'tustin');
Ac
E=eig(Ac)
if(m==1)
    [N1,D1]=d2cm(num,com,2,'tustin');
    num=N1;
else
    [snum1,snum2]=size(num);
    for i=1:snum1
        for j=0:2*n+1:snum2-2*n-1
            [N1,D1]=d2cm(num(i,j+1:j+2*n+1),com,2,'tustin');
            num(i,j+1:j+2*n+1)=N1;
        end
    end
end
num=s2k(num,n,m);
if(m==1)
    [o1] = jspec(num,2*n,E);
else
    degNUM=2*n*ones(1,m);
    [o1]=jspec(num,degNUM,E);
end

```

```

end
o=k2s(o1,n/2,m);
[D22,N22]=d2cm(1,di,2,'tustin');
if (m==1)
[N2,D2]=c2dm(o,N22,2,'tustin');
else
[so1,so2]=size(o);
for i=1:so1
for j=0:2*n/2+1:so2-2*n/2-1
[N222,D2]=c2dm(o(i,j+1:j+2*n/2+1),N22,2,'tustin');
N2(i,j+1:j+2*n/2+1)=N222;
end
end
end
o=N2;
y1=dparaher(o,n);
y2=multpm(y1,o,n,n);
so = inv(o(1:m,1:n+1:(m-1)*(n+1)+1));
for k=0:n
rd(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k) = so * o(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k);
end
RD=rd;
for i=1:m
rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) = rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) - di(1:n+1);
end
RD=rd;
for i=1:n
c(i) =-di(i+1);
k1 = (i-1)*m +1;
v(1:m,k1:i*m) = rd(1:m,i+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+i);
for l=1:i-1
v(1:m,k1:i*m) = v(1:m,k1:i*m) + c(l).*rd(1:m,i+1-l:n+1:(m-1)*(n+1)+i+1-l);
c(i) = c(i) - di(l+1)*c(i-l);
end
end
mc = ctrb(a,b);
if m == 1
k = v * inv(mc);
else
k = v * pinv(mc);
end
end%

```



**function [k,o] = doptks(a,b,cc,q,r,s)**

```

%DOPTKS Linear quadratic regulator design for discrete-time system
% [K,O] = DOPTk(A,B,C,Q,R,S) calculates the optimal feedback
% gain matrix K such that the feedback law  $u = -Kx$ 
% minimizes the cost function :
%
%  $J = \text{Sum} \{x'Qx + 2x'Su + u'Ru\}$ 
%
% subject to the constraint equation:
%
%  $x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$ 
%
% Also returned is O, spectral factor of performance spectrum matrix
% which
%  $W(z) = R + G'(1/z)QG(z) + S'^* \text{inv}(zI-A)B + B'^* \text{inv}(1/Z-A)S$ 
%  $= F'(1/z)(R+B'PB)F(z)$ 
%
% where  $G(z) = C * \text{inv}(zI-A)B$  ; system transfer matrix and
%  $F(z) = I + K^* \text{inv}(ZI-A)B$ , is optimal return difference matrix

if( nargin ~= 5 & nargin ~=6)
    error('number of input equal to 5 or 6')
end
[rc,mc] = size(cc);
[n,m] = size(b);
[rq,mq] = size(q);
d = zeros(rc,m);
cg = zeros(m,rc*(n+1));
num = zeros(m,m*(2*n+1));
c = zeros(1,n);
v = zeros(m,m*n);
rd = zeros(m,m*(n+1));
[g,di] = mvss2tf(a,b,cc,d);
for k=0:n
    cg(1:m,k+1:n+1:(rc-1)*(n+1)+1+k) = g(1:rc,n+1-k:n+1:m*(n+1)-k)' * q;
end
gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(di(n+1:-1:1),di);

%*****BEGIN
if(nargin==6)
    [r1,c1]=size(s');
    [r2,c2]=size(b);
    dd=zeros(r1,c2);
    [tt,d1]=mvss2tf(a,b,s',dd); % d1=d(z)
    tt1=dparaher(tt,n);

```

```

d2=d1(n+1:-1:1);          % d2=d1(z_inverse)
for i1=1:m
    for j1=1:m
        T1(i1,(j1-1)*(2*n+1)+1:j1*(2*n+1))=...
        conv(d2,tt(i1,(j1-1)*(n+1)+1:j1*(n+1)));
    end
end
for i1=1:m
    for j1=1:m
        T2(i1,(j1-1)*(2*n+1)+1:j1*(2*n+1))=...
        conv(d1,tt1(i1,(j1-1)*(n+1)+1:j1*(n+1)));
    end
end
end
%*****END
nn = 2*n+1;
for i=1:m
    for j=1:m
        num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
    end
end

%*****BEGIN
if (nargin==6)
    num=num+T1+T2;
end
%*****END
NUM=num

[Ac,Bc,Cc,Dc]=d2cm(a,b,cc,d,2,'tustin');
Ac
E=eig(Ac)
if(m==1)
    [N1,D1]=d2cm(num,com,2,'tustin');
    num=N1;
else
    [snum1,snum2]=size(num);
    for i=1:snum1
        for j=0:2*n+1:snum2-2*n-1
            [N1,D1]=d2cm(num(i,j+1:j+2*n+1),com,2,'tustin');
            num(i,j+1:j+2*n+1)=N1;
        end
    end
end
num=s2k(num,n,m);
if(m==1)
    [o1] = jspec(num,2*n,E);
else

```

```

degNUM=2*n*ones(1,m);
[o1]=jspec(num,degNUM,E);
end
o=k2s(o1,n/2,m);
[D22,N22]=d2cm(1,di,2,'tustin');
if (m==1)
[N2,D2]=c2dm(o,N22,2,'tustin');
else
[so1,so2]=size(o);
for i=1:so1
for j=0:2*n/2+1:so2-2*n/2-1
[N22,D2]=c2dm(o(i,j+1:j+2*n/2+1),N22,2,'tustin');
N2(i,j+1:j+2*n/2+1)=N22;
end
end
end
o=N2;
so = inv(o(1:m,1:n+1:(m-1)*(n+1)+1));
for k=0:n
rd(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k) = so * o(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k);
end
RD=rd;
for i=1:m
rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) = rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) - di(1:n+1);
end
RD=rd;
for i=1:n
c(i) =-di(i+1);
k1 = (i-1)*m + 1;
v(1:m,k1:i*m) = rd(1:m,i+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+i);
for l=1:i-1
v(1:m,k1:i*m) = v(1:m,k1:i*m) + c(l).*rd(1:m,i+1-l:n+1:(m-1)*(n+1)+i+1-l);
c(i) = c(i) - di(l+1)*c(i-l);
end
end
mc = ctrb(a,b);
if m == 1
k = v * inv(mc);
else
k = v * pinv(mc);
end

```

**function drc\_cir(Beta,r2,v)**

```

%using :
% drc_cir(beta,r2,eigen_values)
% v: Closed-loop poles
%r2: radius of destination disc, 0<r2<=1,

```

```
% plot the closed-loop poles inside a disc with radius r2
```

```
clf
x=-1:0.01:1;
x2=-r2:0.01:r2;
y1=sqrt(1-x.^2);
y2=sqrt(r2^2-x2.^2);
x2=x2+Beta;
plot(x,y1,x,-y1,x2,y2,x2,-y2);
hold
axis('square');
plot(real(v),imag(v),'.');
axis('square');
hold
break
    i=0;
    for x1=-r2:r2/200:r2
        i=i+1;
        xx1(i)=x1;
        y1(i)=sqrt(r2^2-x1^2);
    end

x1=xx-alpha*ones(1,length(xx));
x2=xx-alpha*ones(1,length(xx));
x3=xx1+1-r2*ones(1,length(xx1));
x4=xx1+1-r2*ones(1,length(xx1));
plot(x1,abs(y),x2,-abs(y),x3,abs(y1),x4,-abs(y1));
axis('square');
title('z-plane');
xlabel('Re z');
ylabel('Im z');
```