TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLAR ÜZERİNDE ANALİTİK İŞLEMLER

ERDENER KAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2007

TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLAR ÜZERİNDE ANALİTİK İŞLEMLER

ERDENER KAYA

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

MERSİN
Haziran - 2007

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Jüri Üyesi
Prof. Dr. Nazim KERİMOV

Jüri Üyesi
Doç. Dr. Hayrullah AYIK

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..../........./............tarih ve ..../................... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ÖZ

G üzerinde tanımlı ∂ aritmetik fonksiyonu ile toplamsal aritmetik yarı grup olmak üzere

$$G(n) := \#\{g \in G : \partial(g) = n\}$$

olsun.

$A > 0, q > 1, 0 \le \nu < 1$ sayıları G yarı grubuna bağlı sabitler olmak üzere $n \to \infty$ iken

$$G(n) = A \cdot q^n + O(q^{\nu n})$$

ifadesine $G(n)$ için bir asimptotik gösterim denir.

Bu çalışmada, G yarı grubunun

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^n$$

üretici fonksiyonunun yardımıyla

$$H(z) = (1 - qz) \cdot F(z)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon üzerine koyulacak koşullar altında von Mangolt fonksiyonunun Taylor katsayısı $\lambda(n)$ için asimptotik ifadeler elde edildi. Ayrıca,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda(n) q^{-n} - 1)$$

serisinin kalan kısmı için asimptotik değerlendirme verildi.

Ters Möbiüs dönüşümünden yararlanarak benzer asimptotik değerlendirmeler $\pi(n)$ ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi(n) n}{q^n} - 1 \right)$$

serisinin kalan kısmı için verildi.

Anahtar Kelimeler: Derece fonksiyonu, Toplamsal aritmetik yarı grup, *Aksiyom* $A^{\#}$

ABSTRACT

Let G be a semi group with ∂ arithmetic function and let

$$G(n) := \#\{g \in G : \delta(g) = n\}.$$

The expression

$$G(n) = A \cdot q^n + O(q^{\nu n}),\ n \to \infty$$

is called asymptotic expression for $G(n)$ when $A > 0,\ q > 1,\ 0 \le \nu < 1$ real numbers depending semi group G.

In this thesis, By using generating function

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^n$$

of G

$$H(z) = (1 - qz) \cdot F(z)$$

is defined and under the restriction conditions on $H(z)$ some asymptotic expression is obtained for $\lambda(n)$ the coefficient of taylor series of von Mangolt functions. Also, asymptotic expression is obtained the rest of

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda(n) q^{-n} - 1).$$

Similar asymptotic results for $\pi(n)$ and the rest of the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi(n) n}{q^n} - 1 \right)$$

is obtained by using Möbiüs inversion formula.

Key Words: Degree function, Additive arithmetical semi group, *Aksiyom* $A^{\#}$

TEŞEKKÜR

Akademik hayata atılmama destek olan ve çalışmalarımın her aşamasında bana yol gösteren Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e, bu çalışma boyunca önerilerini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca başta, sağladığı imkanlar için Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ'a ve bölümdeki bütün öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$:=$	Tanım olarak eşit
$A \Subset \Omega$	A bölgesi kompakt olarak Ω bölgesinin içindedir
$\operatorname{int}\gamma$	γ eğrisinin içi
D	Birim daire
$H(A)$	A bölgesinde analitik fonksiyonların kümesi
∂	Derece fonksiyonu
P	Asal elemanların kümesi
G	Yarı grup
μ	Möbius fonksiyonu
f_r	$f\left(re^{i\theta}\right)$
H^p	Hardy uzayı
$G(n)$	G yarı grubunda derecesi n'ye eşit olan elemanların sayısı
$\pi(n)$	G yarı grubunda derecesi n'ye eşit olan asal elemanların sayısı
Λ	Von Mangoldt fonksiyonu
$\lambda(n)$	Von Mangoldt fonksiyonunun taylor katsayısı
F	Üretici fonksiyon
P_G	Asal üretici fonksiyon
$\omega(a)$	Asal bölen fonksiyonu
#	Kümenin eleman sayısı
r	Yakınsaklık yarıçapı
$U_\delta(z_0)$	$\{z : \lvert z-z_0\rvert < \delta\}$
V	$\{z : r_1 < \lvert z-z_0\rvert < r_2, 0 \le r_1 < r_2 < \infty\}$
(.,.)	İç çarpım
$\operatorname{Re}s(f,z)$	z noktasında f fonksiyonunun kalıntısı (rezidüsü)

1. GİRİŞ

Sayılar Teorisi ve Analitik Teori'de toplamsal aritmetik yarı gruplar üzerinde tanımlanan fonksiyonların analitik özelliklerinin incelenmesi en temel problemlerden biridir.

Bu bağlamda, yarı gruplar üzerine konan belli koşullar altında tanımlanan fonksiyonların analitik özelliklerinin bilinmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

$P \neq \varnothing$ ve $(G,\cdot)$ sayılabilir P kümesinin asal elemanları tarafından üretilen ve birim elemanı 1_G olan değişmeli yarı grup olsun. G üzerinde

$$\partial : G \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

şeklinde tanımlanan ve

(i) $\forall p \in P$ için $\partial(p) > 0$ ve $\partial(1) = 0$,

(ii) $\forall a, b \in G$ için $\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b)$,

(iii) $\forall n \geq 0$ için $G(n) = \#\{a \in G : \partial(a) = n\}$ kümesi sonlu,

koşullarını sağlayan ∂ fonksiyonuna derece fonksiyonu denir.

Ayrıca, $(G,\cdot,\partial)$ toplamsal aritmetik yarı grubunda P'nin G'yi üreten asal elemanları ile oluşturulan

$$\pi(n) = \#\{p \in P : \partial(p) = n\}$$

kümesi de sonludur.

Diğer taraftan, G toplamsal aritmetik yarı grup olmak üzere G'ye bağlı olarak $A > 0$, $q > 1$ ve $0 \leq \nu < 1$ sabitleri için $n \to \infty$ iken

$$G(n) = Aq^n + O\left(q^{\nu n}\right) \tag{1.1}$$

sağlansın. (1.1) ile verilen $G(n)$ üzerindeki bu koşula G toplamsal aritmetik yarı grubu için *Aksiyom* $A^{\#}$ denir.

$G(n)$ sayılarının yardımıyla tanımlanan

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^n$$

fonksiyonuna G yarı grubunun üretici fonksiyonu denir.

$(G,\cdot,\partial)$ toplamsal aritmetik yarı grubu $Aksiyom\, A^{\#}$'ı sağladığında üretici fonksiyon

$$F(z)=\frac{A}{1-qz}+\sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n$$

biçiminde de yazılabilir. Böylece,

$$H(z):=(1-qz)F(z)$$

biçiminde yeni bir fonksiyon tanımlanır.

Bu çalışmada, üretici fonksiyon yardımı ile tanımlanan $H(z)$ fonksiyonu üzerine belirli koşullar koymakla $Aksiyom\, A^{\#}$'dan farklı yeni aksiyomlar tanımlanacak ve bu yeni tanımlanan aksiyomlar altında

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right) \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty}\left(n\pi(n)q^{-n}-1\right)$$

serilerinin genel terimlerinin ve kuyruk kısımlarının asimptotik gösterimi karmaşık analizin yöntemleri kullanılarak elde edilecektir.

Bu bağlamda, Materyal ve Metot kısmında esas teoremlerin ispatları için yardımcı lemma ve teoremler, gerekli tanım ve kavramlar verilecektir. Bulgular ve Tartışma kısmında yer alan teoremlerden 4.1.2. Teorem'in ifadesi [3] çalışmasında yer almasına rağmen onun ispatı [3]'de verilen ispattan farklı olarak karmaşık analizin yöntemleri kullanılarak yeniden verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Sayılar Teorisi ve Analitik Teori'de toplamsal aritmetik yarı gruplar üzerinde tanımlanan fonksiyonların analitik özelliklerinin incelenmesi 1979 yılında John Knopfmacher [5] tarafından E. Fogels'ın [13] çalışmasından esinlenerek $Aksiyom\, A^{\#}$'ı sağlayan toplamsal aritmetik yarı grupların üretici fonksiyonun analitik özellikleri hakkında bilgiler verilmesi ile başlamıştır.

Bunun için John Knopfmacher tarafından [5]'de $(G,\cdot)$ sayılabilir $P \neq \emptyset$ kümesinin asal elemanları tarafından üretilen ve birim elemanı 1_G olan değişmeli yarı grup olmak üzere

(i) $\forall p \in P$ için $\partial(p) > 0$ ve $\partial(1) = 0$,

(ii) $\forall a,b \in G$ için $\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b)$,

(iii) $\forall n \geq 0$ için $G(n) = \#\{a \in G : \partial(a) = n\}$ kümesi sonlu,

koşullarını sağlayan

$$\partial : G \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

fonksiyonunu tanımlamıştır ve ∂'yı derece fonksiyonu olarak adlandırmıştır.
∂ derece fonksiyonu ve P'nin G'yi üreten asal elemanları ile oluşturulan

$$\pi(n) = \#\{p \in P : \partial(p) = n\}$$

doğal sayısı için $q > 1$ ve her $\alpha > 1$ olmak üzere $n \to \infty$ iken

$$\pi(n) = \frac{q^n}{n} + O\left(n^{-\alpha} q^n\right)$$

asimptotik gösterimini vermiştir. $\pi(n)$ için bu biçimde verilen asimptotik gösterime kaynaklarda **"Abstract Prime Number Teorem"** denir.

K.- H. Indlekofer, E. Manstavicius ve R. Warlimant [16] çalısmalarıyla toplamsal aritmetik yarı gruplar üzerinde tanımlanan

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^n$$

üretici fonksiyonu ve

$$H(z) := (1 - qz) F(z)$$

fonksiyonunun $z=-q^{-1}$ noktasında sıfıra eşit olduğunu göstermişlerdir.

K.- H. Indlekofer [12] çalışmasında *Aksiyom* $\overline{A}^{\#}$ ile gösterdiği yeni aksiyom ve $H(z)$ fonksiyonun yardımı ile tanımlanan $\overline{H}(z)$ fonksiyonunun Nevanlinna sınıfından olduğunu göstermiştir.

K.- H. Indlekofer [3] çalışmasında *Aksiyom* A_1 ve *Aksiyom* A_2 olarak adlandırdığı yeni aksiyomlar ile

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)$$

serisinin genel teriminin ve kısmi toplamının asimptotik gösterimini vermiştir.
Buna ek olarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n\pi(n)q^{-n}-1\right)$$

serisinin de genel terimi ve kısmi toplamı için asimptotik gösterim vermiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde gerekli temel tanım ve yardımcı teoremler verilecektir.

3.1 TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak kavramlar ve bazı temel teoremler verilecektir.

3.1.1.Tanım $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ olsun.

(i) $\delta > 0$ sayısı için $|z - z_0| < \delta$ ($0 < |z - z_0| < \delta$) koşulunu sağlayan noktaların kümesine z_0 noktasının (delinmiş) $\delta -$ **komşuluğu** denir.

(ii) z_0 noktasının her delinmiş $\delta -$komşuluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir **yığılma noktası** denir.

3.1.2.Tanım

$A \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 noktası A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ reel sayısı bulunabilir öyle ki $|z - z_0| < \delta$ koşulunu sağlayan noktalar için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında **süreklidir** denir [1].

3.1.3. Tanım: f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğunda tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **türevlenebilirdir** denir. Bu limit $f'(z_0)$ ile gösterilir [2].

3.1.4. Tanım: f fonksiyonu z_0 noktasında ve onun herhangi bir komşuluğundaki bütün noktalarda türevlenebilirse f fonksiyonuna z_0 noktasında **analitiktir** denir [2].

Eğer f fonksiyonu her $z \in A$ noktasında analitik ise f fonksiyonuna A'de analitiktir denir.

3.1.5. Tanım: f kompleks değerli fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse, z_0 noktasına f'in **aykırı (singüler)** noktası denir [11].

3.1.6. Tanım: z_0 noktası f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun. O halde,

(i) $\lim_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$ ise z_0 noktasına **kaldırılabilir singüler nokta**,

(ii) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına **kutup noktası**,

(iii) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut değil ise, z_0 noktasına **esaslı singüler nokta,**

denir.

3.1.7. Tanım: $a_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, $r \in \mathbb{R}^+$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r$$

serisine **kuvvet serisi** denir.

Burada r kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapıdır ve

$$r^{-1} = \limsup_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

formülü ile hesaplanır.

3.1.8. Tanım: (i) $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ olsun. $z=z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ sürekli fonksiyon olmak üzere $\gamma:=\{z(t):t\in[a,b]\}$ kümesine başlangıç noktası $z(a)$, bitim noktası $z(b)$ olan bir **eğri** denir.

(ii) Bir γ eğrisi verildiğinde z' var ve sürekli ise γ eğşine **diferansiyellenebilir eğri** denir.

(iii) $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ için $t_1\neq t_2$ olduğunda $z(t_1)\neq z(t_2)$ ise γ eğrisine **basit (Jordan) eğri,** eğer $z(a)=z(b)$ ise γ eğrisine **kapalı Jordan eğrisi** denir.

(iv) $z'(t)\neq 0$ ise, γ'ya **düzgün eğri** denir [6].

3.1.9. Tanım: $[a,b]$ aralığının $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ şeklindeki tüm bölüntülerinin ailesi $\wp$ ile gösterilsin ve $\ell_n(P):=\sum_{k=1}^{n}\left|z(t_k)-z(t_{k-1})\right|$ olsun.

O halde

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{\ell_n(P):P\in\wp\}<\infty$$

ise γ eğrisine **ölçülebilir eğri** denir.

3.1.10. Teorem: (Cauchy İntegral Formülü) $\Omega\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f\in H(\Omega)$ olsun. γ eğrisi $\operatorname{int}\gamma$ ile Ω bölgesinde yerleşen ölçülebilir Jordan eğrisi ise her $z\in\operatorname{int}\gamma$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

dir [7].

3.1.11. Teorem: (Cauchy Türev Formülü) $\Omega\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f\in H(\Omega)$ olsun. γ eğrisi $\operatorname{int}\gamma$ ile Ω bölgesinde yerleşen ölçülebilir Jordan eğrisi olsun.

Bu durumda, $\forall z\in\operatorname{int}\gamma$ ve her $n=0,1,2,...$ için

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi,$$

dır[7].

3.1.12. Teorem(Taylor Teoremi): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının δ komşuluğunda analitik olan f fonksiyonu bu komşulukta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r$$

açılımına sahiptir. Bu kuvvet serisine f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasında Taylor açılımı denir 11].

3.1.13.Teorem(Laurent Teoremi): $V := \{z : r_1 < |z - z_0| < r_2, 0 \le r_1 < r_2 < \infty\}$ olmak üzere $f \in H(V)$ olsun. f fonksiyonunun bir z_0 noktasında ayrık singülerliği varsa, f fonksiyonu V halkasında

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

açılımına sahiptir.

Burada,

$$\gamma = \{z : |z - z_0| = r,\ r_1 < r < r_2\}$$

olmak üzere,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

dir[11]

3.1.14. Tanım: $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası f fonksiyonunun ayrık singüler noktası ve

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

serisi $0 < |z - z_0| < r$ halkasında f fonksiyonunun Laurent serisi olsun. Bu durumda bazı pozitif m tam sayıları için $a_{-m} \neq 0$ ve her $j < -m$ için $a_j = 0$ ise z_0 noktasına f fonksiyonunun $m.$dereceden kutup yeri denir[7].

Özel olarak $m = 1$ durumunda bu kutup yerine **basit kutup** yeri denir.

3.1.15. Tanım: $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası f fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun. f fonksiyonunun z_0 noktasındaki Laurent açılımında a_{-1} katsayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki **kalıntısı(rezidüsü)** denir ve $Res(f;z_0)$ ile gösterilir[7].

3.1.16. Teorem: (Cauchy Rezidü Teoremi) Γ basit kapalı pozitif yönlü eğri ve f fonksiyonu Γ eğrisi üzerinde ve $z_1,...,z_n \in \operatorname{int}\Gamma$ noktaları dışında Γ eğrisinin içinde analitik olsun. Bu durumda,

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f;z_k)$$

sağlanır. [7]

3.1.17. Teorem: Eğer z_0 noktası f fonksiyonunun m'inci dereceden kutup yeri ise

$$Res(f;z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

formülü ile hesaplanır [7].

3.1.18. Sonuç: Eğer z_0 noktası f fonksiyonunun basit kutup yeri ise

$$Res(f;z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

dir [7].

3.1.19. Tanım: X bir lineer uzay, $(.,.): X\times X \to \mathbb{C}$ fonksiyonu

(a) $\forall x\in X$ için, $(x,x)\geq 0$ ve $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

(b) $\forall x,y\in X$ için, $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(c) $\forall x,y,z\in X$ için, $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

(d) $\forall \alpha\in \mathbb{C}$ ve $\forall x,y\in X$ için, $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$

koşullarını sağlarsa, bu fonksiyona X de bir iç çarpım ve $(X,(.,.))$ ikilisine de bir **iç çarpım uzayı** denir [8].

(b) şıkkında $\overline{(y,x)}$ ile (y,x)'nin kompleks eşleniği gösterilmektedir.

3.1.20 Teorem: (Schwarz Eşitsizliği) X bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $\forall x,y\in X$ için

$$\left|(x,y)\right|\leq (x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği doğrudur [8].

3.2 TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUP VE ÖZELLİKLERİ

3.2.1 Tanım: $G\neq\emptyset$ olmak üzere G üzerinde

$$G\times G\rightarrow G$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona bir **ikili işlem** denir [10].

(a,b) elemanının ikili işlem altındaki görüntüsü işlem kolaylığı bakımından

ab (Çarpımsal notasyon)

$a+b$ (Toplamsal notasyon)

şeklinde gösterilir.

3.2.2. Tanım: $G\neq\emptyset$ üzerinde tanımlanan ikili işlem $\forall a,b,c\in G$ için

$$a(bc)=(ab)c$$

koşulunu sağlıyorsa $(G,\cdot)$ ikilisine G'de bir **yarı grup** denir.

Her $a\in G$ için

$$ae=ea=a$$

koşulunu sağlayan e elemanına G yarı grubunun birim(etkisiz) elemanı denir. $(G,\cdot)$ yarı grubu birim elemana sahip ise $(G,\cdot)$ ikilisine G'de bir **Monoid** denir.

$a^{-1}\in G$ olmak üzere her bir $a\in G$ için

$$a^{-1}a=aa^{-1}=e$$

koşulunu sağlayan $(G,\cdot)$ ikilisine G'de bir **Grup** denir.

$\forall a,b\in G$ için

$$ab=ba$$

ise $(G,\cdot)$ ikilisine **değişmeli grup** denir [9].

3.2.3. Tanım: $P \neq \varnothing$ ve $(G,\cdot)$ sayılabilir P kümesinin elemanları tarafından üretilen birim elemanı 1_G olan bir değişmeli yarı grup olsun. G üzerinde

$$\partial : G \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

şeklinde tanımlanan ve

(i) $\forall p \in P$ için $\partial(p) > 0$ ve $\partial(1) = 0$,

(ii) $\forall a,b \in G$ için $\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b)$,

(iii) $\forall n \geq 0$ için $G(n) = \#\{a \in G : \partial(a) = n\}$ sonlu,

koşullarını sağlayan ∂ fonksiyonuna **derece fonksiyonu** ve $(G,\cdot,\partial)$ yapısına ise **toplamsal aritmetik yarı grup** denir [10].

3.2.4.Tanım: $P \neq \varnothing$ sayılabilir kümesinin G 'yi üreten elemanlarına P 'nin **asal elemanları** denir. P kümesinin asal elemanları için

$$\pi(n) = \#\{p \in P : \partial(p) = n\}$$

şeklinde tanımlanan $\pi(n)$ sonludur [10].

3.2.5. *Aksiyom* $A^{\#}$**:** G toplamsal aritmetik yarı grup olmak üzere $A > 0, q > 1$ ve $0 \leq \nu < 1$ sabitleri vardır öyle ki $n \to \infty$ iken

$$G(n) = Aq^n + O\left(q^{\nu n}\right)$$

dir.

Burada, $A > 0, q > 1$ ve $0 \leq \nu < 1$ sabitleri G 'ye bağlıdır. Bu ifade literatürde *Aksiyom* $A^{\#}$ 'ın tanımı olarak bilinir.

3.3. *AKSİYOM* $A^{\#}$ 'I SAĞLAYAN TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, *Aksiyom* $A^{\#}$ 'ı sağlayan (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grubu üzerinde tanımlanan fonksiyonların temel özellikleri verilecektir. Bundan sonra, (G,∂) ikilisi toplamsal aritmetik yarı grup olarak kabul edilecektir.

3.3.1. Tanım: (G,∂) yarı grubu *Aksiyom* $A^{\#}$ 'ı sağlasın.

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^{n} \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna G yarı grubunun **üretici fonksiyonu (Zeta fonksiyonu)** denir [3].

3.3.2. Tanım: (G,∂) yarı grup olmak üzere

$$P_G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) z^{n}$$

şeklinde tanımlanan $P_G(z)$ fonksiyonuna G yarı grubunun **asal üretici fonksiyonu** denir [3].

3.3.3. Tanım(von Mangoldt Fonksiyonu): (G,∂) yarı grubunda

$$\Lambda(\mathrm{a})=\begin{cases}\partial(\mathrm{p}), & \text{eğer } \mathrm{a}=\mathrm{p}^{\mathrm{r}}\ \mathrm{r}\geq 1,\ \mathrm{p} \text{ asal},\\ 0, & \text{diğer durumlarda},\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **von Mangoldt Fonksiyonu** denir [12].

3.3.4. Tanım: $p\in P$ olmak üzere

$$\omega(a):=\sum_{p|a} 1, \quad a\in G,$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona **Asal Bölen Fonksiyonu** denir. Burada toplam a 'yı bölen p 'ler üzerinden alınmıştır.

Ayrıca, asal bölen fonksiyonu yardımıyla

$$\mu(\mathrm{a}) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \mathrm{p}^2 \mid \mathrm{a} \text{ ise,} \\ (-1)^{\omega(\mathrm{a})}, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **Möbius fonksiyonu** denir [10].

3.3.5. Tanım: $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$F(n) = \sum_{\substack{a \in G \\ \partial(a) = n}} f(a)$$

şeklinde tanımlanan $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun **toplam fonksiyonu** denir [10].

3.3.6. Teorem(Ters Möbius formülü): F fonksiyonu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun toplam fonksiyonu olmak üzere

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$$

dir [16]. Burada toplam n'yi bölen d'ler üzerinden alınmıştır.

3.3.7. Teorem: (G, ∂) yarı grubu *Aksiyom* $A^{\#}$'ı sağlasın. (3.3.1)'de tanımlanan Zeta fonksiyonunun yakınsaklık yarıçapı q^{-1} dir.

İspat: (G, ∂) yarı grubu *Aksiyom* $A^{\#}$'ı sağladığından $n \to \infty$ iken

$$G(n) = Aq^n + O(q^{\nu n})$$

eşitliği doğrudur. Bu son eşitlik (3.3.1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(Aq^n + O(q^{\nu n})\right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Aq^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} O(q^{\nu n}) z^n$$

elde edilir. $r_n := G(n) - Aq^n$ işaretlemesi ile bu son eşitlik

$$F(z) = A\sum_{n=0}^{\infty} (qz)^n + \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n = I + II \qquad (3.3.2)$$

şeklinde yazılır. (3.3.2)'yi iki kısma ayırarak yakınsaklığını inceleyelim:

(3.3.2)'de I serisi bir geometrik seri olduğundan $|z| < \dfrac{1}{q}$ dairesinde yakınsaktır ve toplamı $\dfrac{A}{1-qz}$ dir.

Şimdi (3.3.2)'de II serinin yakınsaklık yarıçapını hesaplayalım:

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{O\left(q^{\nu(n+1)}\right)}{O\left(q^{\nu n}\right)}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{q^{\nu(n+1)}O(1)}{q^{\nu n}O(1)} = q^{\nu}$$

$$R = q^{-\nu}$$

olarak elde edilir.

$q > 1$ ve $0 \le \nu < 1$ olduğundan

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{q^{\nu}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Dolayısıyla Zeta fonksiyonunun yakınsaklık yarıçapı $\dfrac{1}{q}$ ve

$$F(z) = \frac{A}{1-qz} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n$$

dir.

3.3.8. Teorem: Zeta fonksiyonu yakınsaklık bölgesinde

$$F(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{\pi(n)} \tag{3.3.3}$$

biçiminde gösterilir [10].

(3.3.3) gösterimine kaynaklarda **Zeta fonksiyonunun Euler Çarpımı** denir.

3.3.9. Teorem: Zeta fonksiyonu analitiklik bölgesinde sıfırdan faklıdır.

İspat: (3.3.3) ifadesinden Zeta fonksiyonu

$$F(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{\pi(n)}$$

dir. Bu son eşitlikten $\forall z \in \left\{ |z| < \frac{1}{q} \right\}$ için $F(z) \neq 0$'dır.

3.3.10. Teorem: Zeta fonksiyonu $z \neq \frac{1}{q}$ olmak üzere $|z| < q^{-v}$ dairesine analitik genişler.

İspat: Zeta fonksiyonu

$$F(z) = \frac{A}{1-qz} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n , \qquad |z| < \frac{1}{q}$$

biçimindeki gösteriminden onun $|z| < q^{-v}$ dairesinde $z = \frac{1}{q}$ noktası dışında singüler noktaya sahip olmadığı görülür.

O halde Zeta fonksiyonu $z \neq \frac{1}{q}$ olmak üzere $|z| < q^{-v}$ dairesine analitik genişler.

3.3.11. Teorem: Zeta fonksiyonu $z = \frac{1}{q}$ noktasında basit kutup yerine sahiptir ve bu noktada kalıntısı $-q^{-1}A$ değerine eşittir.

İspat: Zeta fonksiyonunun

$$F(z) = \frac{A}{1-qz} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n , \qquad |z| < \frac{1}{q}$$

biçimindeki gösteriminden $z = \frac{1}{q}$ noktasının onun basit kutup yeri olduğu kolayca görülür.

Diğer taraftan, Zeta fonksiyonunun $z = \frac{1}{q}$ noktasındaki kalıntısı

$$\operatorname{Re} s\left(F(z), \frac{1}{q} \right) = \lim_{z \to q^{-1}} \left(z - \frac{1}{q} \right) F(z) \tag{3.3.4}$$

formülü ile hesaplanır. Zeta fonksiyonu (3.3.4) ifadesinde yerine yazılır ise

$$\lim_{z \to q^{-1}} \left(z - \frac{1}{q} \right) F(z) = \lim_{z \to q^{-1}} \left[\frac{qz-1}{q} \frac{A}{1-qz} + \frac{qz-1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n \right]$$

$$= -q^{-1}A + \lim_{z \to q^{-1}} \frac{qz-1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n$$

$$= -q^{-1}A + \frac{q\frac{1}{q}-1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} r_n q^{-n}$$

$$= -q^{-1}A + 0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r_n q^{-n}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte yer alan

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n$$

serisinin yakınsaklık bölgesi $|z| < q^{-\nu}$ olduğundan $z = \frac{1}{q}$ noktasında bu seri sonlu bir değere sahiptir. O halde

$$\operatorname{Re}s\left(F(z), \frac{1}{q}\right) = -q^{-1}A$$

olarak bulunur.

3.4 H^P SINIFININ TANIMI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde adını G. H. Hardy'den alan, kompleks analizde ve özellikle sayılar teorisinde oldukça geniş uygulama alanına sahip olan H^P uzaylarının bazı önemli özellikleri verilecektir.

3.4.1. Tanım: $0 \le r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ ve $f_r\left(e^{i\theta}\right) := f\left(re^{i\theta}\right)$ olmak üzere p'ye göre

$$\|f_r\|_p := \begin{cases} \left\{ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty \ ise \\ \displaystyle\sup_{\theta \in [0,2\pi]} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|, & p = \infty \ ise \\ \exp\left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta \right), & p = 0 \ ise \end{cases}$$

fonksiyonları tanımlıdır.

$p>1$ için $\|f_r\|_p$ fonksiyonu

1) $\|f_r\|_p \geq 0$ ve $\|f_r\|_p = 0 \Leftrightarrow f_r = 0$

2) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\|\alpha f_r\|_p = |\alpha| \|f_r\|_p$

3) $\|f_r + g_r\|_p \leq \|f_r\|_p + \|g_r\|_p$

koşullarını sağladığından bir normdur [8].

Burada,

$$\log^+|f| := \begin{cases} \log|f|, & |f|>1 \ ise \\ 0, & |f| \leq 1 \ ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3.4.2. Tanım: $f \in H(D)$ ve $0 \leq p \leq \infty$ için

$$\|f\|_p := \sup\left\{\|f_r\|_p : 0 \leq r < 1\right\}$$

olmak üzere H^P sınıfı

$$H^p := \left\{f : f \in H(D) \text{ ve } \|f\|_p < \infty\right\},\ 0 < p \leq \infty$$

biçiminde tanımlanır.

$p=0$ için H^P sınıfı özel olarak Nevanlinna sınıfı olarak adlandırılır ve

$$N = \left\{f : f \in H(D) \text{ve } \|f\|_0 < \infty\right\}$$

şeklinde gösterilir [8].

3.4.3. Sonuç: $0 < s < p < \infty$ için

$$H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset N$$

içermesi doğrudur [8].

3.4.4. Teorem: $f \in H(D)$ olsun.

(a) $p \leq \infty$ için $\|f_r\|_p$ r'nin azalmayan bir fonksiyonudur.

(b) $1 \leq p < \infty$ için $\|f\|_p$ üçgen eşitsizliğini sağladığından H^P uzayı bir normlu lineer uzaydır.

(c) $p < 1$ için üçgen eşitsizliği sağlanmadığından H^P uzayı normlu lineer uzay değildir.

(d) $1 \leq p \leq \infty$ için H^P uzayı bir Banach uzayıdır [8].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLAR İLE İLGİLİ TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde, $G \neq \varnothing$ bir küme $(G,\cdot)$ yarı grup, $\partial : G \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ **3.2.3.Tanım**'ı sağlayan derece fonksiyonu olmak üzere $(G,\cdot,\partial)$ yapısı toplamsal aritmetik yarı grup olsun. Bundan sonra (G,∂) ikilisinden toplamsal aritmetik yarı grup anlaşılacaktır. **3.2.3. Tanım** ve **3.2.4. Tanım**'dan

$$G(n) = \#\{a \in G : \partial(a) = n\}$$

ve

$$\pi(n) = \#\{p \in P : \partial(p) = n\}$$

dir.

G yarı grubunun üretici fonksiyonu **3.3.1 Tanım**'dan

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^n$$

biçimindedir.

(G,∂) ikilisi **3.2.5.** ile verilen $Aksiyom\, A^{\#}$'ı sağlasın. Bu durumda, **3.3.4.Teorem**'den

$$F(z) = \frac{A}{1-qz} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n$$

biçiminde de yazılabilir. Üretici fonksiyondan yararlanarak

$$H(z) := (1-qz) F(z)$$

fonksiyonu tanımlayalım.

$H(z)$ fonksiyonu üzerine koşullar koyularak aşağıdaki aksiyomu tanımlayalım:

$Aksiyom\, A_1$:

(G,∂) ikilisi için $q > 1$ sabiti vardır öyle ki,

(i) $A := H\left(q^{-1}\right) > 0$ olmak üzere $|z| < q^{-1}$ dairesinde $H(z)$ fonksiyonu analitik ve $|z| \leq q^{-1}$'de sürekli,

(ii) $|z| < q^{-1}$ dairesinde $H(z)$ fonksiyonunun türevi H' sınırlı,

koşulları sağlanır.

Aksiyom A_1'i sağlayan (G, ∂) ikilisi için aşağıdaki Teorem elde edilmiştir.

4.1.1.Teorem: (G, ∂) *Aksiyom* A_1'i sağlasın. Bu durumda $n \to \infty$ iken aşağıdakiler doğrudur:

(i) $H\left(-q^{-1}\right) \neq 0$ ise

$$\frac{\lambda(n)}{q^n} = 1 + o(1), \tag{4.1.1}$$

$$\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m} - 1\right) = \frac{1}{H\left(q^{-1}\right)}\left\{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right) + o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \tag{4.1.2}$$

ve bazı $C_1 \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\sum_{m>n}\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda(m)}{q^m} - 1\right) + C_1 = \left[\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{qn} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right].\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)} \tag{4.1.3}$$

(ii) $H\left(-q^{-1}\right) = 0$ ise

$$\frac{\lambda(n)}{q^n} + \frac{\lambda(n-1)}{q^{n-1}} = 2 + o(1) \tag{4.1.4}$$

$$\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m} - 1\right) = \frac{1}{2f\left(q^{-1}\right)}\left[q^{-1}H'\left(q^{-1}\right) + o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right] \tag{4.1.5}$$

ve bazı $C_2 \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\sum_{m>n}\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda(m)}{q^m} + \frac{\lambda(m-1)}{q^{m-1}} - 2\right) + C_2 = \left[\frac{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)}{n \cdot f\left(q^{-1}\right)} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \tag{4.1.6}$$

4.1.1.Sonuç: (G,∂) *Aksiyom* A_1'i sağlasın. Bu durumda $n\to\infty$ iken aşağıdakiler doğrudur.

(i) $H\left(-q^{-1}\right)\neq 0$ ise

$$\frac{n\pi(n)}{q^n}=1+o(1),$$

$$\sum_{m>n}\left(m\pi(m)q^{-m}-1\right)=\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)}\left\{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right\}$$

ve bazı $C_1\in\mathbb{R}$ sayıları için

$$\sum_{m>n}\frac{1}{m}\left(\frac{m\pi(m)}{q^m}-1\right)+C_1=\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)}\left[\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{qn}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

(ii) $H\left(-q^{-1}\right)=0$ ise

$$\frac{n\pi(n)}{q^n}+\frac{(n-1)\pi(n-1)}{q^{n-1}}=2+o(1),$$

$$\sum_{m>n}\left(m\pi(m)q^{-m}-1\right)=\frac{1}{2f\left(q^{-1}\right)}\left[q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

ve bazı $C_2\in\mathbb{R}$ sayıları için

$$\sum_{m>n}\frac{1}{m}\left(\frac{m\pi(m)}{q^m}+\frac{m\pi(m-1)}{q^{m-1}}-2\right)+C_2=\left[\frac{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)}{nf\left(q^{-1}\right)}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

Aksiom A_1'e ek olarak $H(z)$ fonksiyonu üzerine koyulacak yeni koşul ile aşağıdaki aksiyom elde edilir.

Aksiyom A_2 :

Aksiyom A_1 'in koşulları sağlansın ve onlara ek olarak $|z| \le q^{-1}$ dairesinde H' fonksiyonunun kuvvet serisi mutlak yakınsak olsun.

Aksiyom A_2 'i sağlayan (G, ∂) ikilisi için aşağıdaki Teorem elde edilmiştir.

4.1.2.Teorem: (G, ∂) *Aksiyom* A_2 'i sağlasın Bu durumda $n \to \infty$ iken aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $H\left(-q^{-1}\right) \neq 0$ ise

$$\frac{\lambda(n)}{q^n} = 1 + o(1),$$

(ii) $H\left(-q^{-1}\right) = 0$ ise, $\nu < \theta < 1$ koşulunu sağlayan her θ için

$$\frac{\lambda(n)}{q^n} = 1 - (-1)^n + O\left(q^{\theta n}\right)$$

4.1.2.Sonuç: (G, ∂) *Aksiyom* A_2 'i sağlasın. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(i) $H\left(-q^{-1}\right) \neq 0$ ise

$$\frac{n\pi(n)}{q^n} = 1 + o(1),$$

(ii) $H\left(-q^{-1}\right) = 0$ ise, $\nu < \theta < 1$ koşulunu sağlayan her θ için

$$\frac{n\pi(n)}{q^n} = 1 - (-1)^n + O\left(q^{\theta n}\right)$$

4.2 YARDIMCI SONUÇLAR

Bu bölümde 4.1'de verilmiş olan teoremlerin ispatı için gerekli olan yardımcı sonuçlar ve ispatları verilecektir.

4.2.1. Teorem: (G,∂) *Aksiyom* A_1'i sağlasın. Bu durumda $|z| \le q^{-1}$ dairesinde $H(z)$ fonksiyonu ya sıfırdan faklıdır ya da

$$f(z) := \frac{H(z)}{1+qz}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $|z| \le q^{-1}$ dairesinde sürekli ve sıfırdan faklıdır.

İspat: *Aksiyom* A_1'den dolayı $H' \in H^{\infty}$ olduğundan $|z| = q^{-1}$ çemberinin $z = -q^{-1}$ dışındaki her bir noktası için $H(z) \ne 0$'dır [6].

Şimdi $H(-q^{-1}) = 0$ ise her $0 < r < q^{-1}$ için öyle bir r' vardır ki $r' < r < q^{-1}$ için

$$f(-r) = \frac{H(-r) - H(-q^{-1})}{1-qr} = -q^{-1} H(-r')$$

dir. $H' \in H^{\infty}$ olduğundan

$$\sup_{r<q^{-1}} \left| f(-r) \right| < \infty \tag{4.2.1}$$

sağlanır.

$$F(z) = \frac{H(z)}{1-qz}$$

olmak üzere

$$g(z) := \prod_{\substack{n=1 \\ n\ \text{çift}}}^{\infty} \left(\frac{1+z^n}{1-z^n} \right)^{\pi(n)} \tag{4.2.2}$$

işaretlemesi altında

$$F(z) \cdot F(-z) = g(z) \cdot F(z^2)$$

elde edilir.

g fonksiyonu $|z| < q^{-1}$ dairesinde analitik olduğundan $z = 0$ noktasının komşuluğunda kuvvet serisine açılımı $g(0) = 1$ olmak üzere

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n, \qquad |z| < q^{-1}$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan,

$$\frac{1+z^n}{1-z^n} = \left(1+z^n\right)\sum_{k=0}^{\infty} z^{nk}$$

eşitliği ve $\pi(n) \in \mathbb{N}_0$ olduğundan (4.2.2) ifadesindeki sonsuz çarpımın her bir katsayısı $\mathbb{N}_0$'ın elemanıdır.

$|z| \le q^{-1}$ dairesinde $F\left(z^2\right) \neq 0$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{F(z)F(-z)}{F\left(z^2\right)} = \frac{f(z)f(-z)}{F\left(z^2\right)}$$

biçiminde yazılır. (4.2.1) ifadesinden yararlanarak $z = q^{-1}$ noktasında $g(z)$ fonksiyonunun yakınsak olduğu görülür. O halde

$$\lim_{r \to q^{-1}} f(-r) =: f\left(-q^{-1}\right) \neq 0$$

eşitliği doğrudur. Böylece, f fonksiyonu $|z| \le q^{-1}$ dairesinde süreklidir.

4.2.2. Lemma: *Aksiyom* A_1'i sağlayan toplamsal aritmetik yarı gruplar için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $H(z)$ fonksiyonu $|z| = q^{-1}$ çemberi boyunca mutlak yakınsaktır.

(ii) $n \to \infty$ iken

$$\sum_{m \ge n} |h(m)| q^{-m} = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\sum_{m \le n} m h(m) q^{-m} = o\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \tag{4.2.3}$$

dır.

İspat: **(i)** (G, ∂) *Axiom* A_1'i sağladığından $H(z)$ fonksiyonunun türevi H^{∞} sınıfındandır. Parseval eşitliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 h^2(n) q^{-2n} < \infty$$

ifadesi doğrudur. Schwarz eşitsizliği ile birlikte

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h(n)| q^{-n} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 h^2(n) q^{-2n} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{4.2.4}$$

bulunur. Böylece $H(z)$ fonksiyonunun $|z| = q^{-1}$ çemberi boyunca mutlak yakınsak olduğu açıkça görülür.

(ii) (4.2.4) ifadesinin yardımı ile

$$\sum_{m \ge n} |h(m)| q^{-m} \le \left(\sum_{m \ge n} m^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m \ge n} m^2 h^2(m) q^{-2m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu son eşitsizlikten

$$\sum_{m \ge n} |h(m)| q^{-m} \le \left(\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m \ge n} m^2 h^2(m) q^{-2m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada

$$\left(\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(n^{-\frac{1}{2}} \right)$$

ve

$$\left(\sum_{m \ge n} m^2 h^2(m) q^{-2m} \right)^{\frac{1}{2}} = o(1)$$

asimptotik gösterimlerinden dolayı $n \to \infty$ iken

$$\sum_{m \ge n} |h(m)| q^{-m} = O\left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot o(1) = o\left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \tag{4.2.5}$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan kısmi toplam formülü yardımı ile

$$\sum_{m \le n} m h(m) q^{-m} = \sum_{m \le n} h(m) q^{-m} \cdot n - \int_{1}^{n} \sum_{m \le u} h(m) q^{-m} \cdot 1 \cdot du$$

dır. Bu son eşitlikte (4.2.5) kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$= n \cdot \sum_{m \le n} h(m) q^{-m} - \int_1^n \left(\sum_{u=1}^{\infty} h(u) q^{-u} - \sum_{u \ge n} h(u) q^{-u} \right) du$$

$$= O(n) - \int_1^n \left(\sum_{u=1}^{\infty} h(u) q^{-u} - o\left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \right) du$$

$$= O(n) + o\left(n^{\frac{1}{2}} \right) - \int_1^n O(1)\, du$$

bulunur. Böylece

$$\sum_{m \le n} m h(m) q^{-m} = o\left(n^{\frac{1}{2}} \right)$$

olduğu görülür.

4.3. TEOREMLERİN İSPATI

4.1.1. Teoremin İspatı:

(i) $H\left(-q^{-1}\right) \neq 0$ olsun.

Von Mangoldt fonksiyonu

$$\Lambda(z) := \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d\pi(d) \right) z^{n-1} =: \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) z^{n-1} 0 \qquad (4.3.1)$$

biçiminde yazılır [5]. (4.3.1)'in her iki tarafı z ile çarpılırsa

$$z.\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) z^n \qquad (4.3.2)$$

elde edilir.

$H(z) = (1 - qz) F(z)$ eşitliğinden $F(z)$ fonksiyonu

$$F(z) = \frac{H(z)}{1 - qz} \qquad (4.3.3)$$

şeklinde yazılır ve (4.3.3) ifadesinin türevi alınırsa

$$F'(z) = \frac{H'(z)(1 - qz) + qH(z)}{(1 - qz)^2} \qquad (4.3.4)$$

bulunur. (4.3.4)'de elde edilen ifade (4.3.2)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)z^n=\frac{\dfrac{z\cdot H'(z)\cdot(1-qz)+qz\cdot H(z)}{(1-qz)^2}}{\dfrac{H(z)}{1-qz}}=z\frac{H'(z)}{H(z)}+\frac{qz}{1-qz}$$

bulunur. Burada $\dfrac{qz}{1-qz}$ ifadesi eşitliğin sol tarafına geçirilirse

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)z^n-\frac{qz}{1-qz}=z\cdot\frac{H'(z)}{H(z)}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $\dfrac{1}{1-qz}$ fonksiyonu $z=0$ noktasında Taylor serisine açılır ve yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)z^n-\sum_{n=1}^{\infty}(qz)^n=z\cdot\frac{H'(z)}{H(z)}$$

eşitliği bulunur ve buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)q^nz^n=z\cdot\frac{H'(z)}{H(z)} \tag{4.3.5}$$

eşitliği elde edilir.

$|z|\le q^{-1}$ dairesinde $H(z)\neq 0$ ve $H'\in H^{\infty}$ olduğundan $\dfrac{H'}{H}\in H^{\infty}$'dur. Bu ise (4.3.5)'in sol tarafında yer alan serinin yakınsak olduğunu söyler.

Yakınsak her serinin genel teriminin limiti sıfır olacağından

$$\frac{\lambda(n)}{q^n}=1+o(1)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise (4.1.1)'in ispatını verir.

Şimdi (4.1.2)'nin ispatını verelim: bunun için (4.3.5)'de $z=q^{-1}$ yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)q^nq^{-n}=q^{-1}\cdot\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{H\left(q^{-1}\right)}$$

bulunur, gerekli sadeleştirmeler sonunda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)=q^{-1}\cdot\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{H\left(q^{-1}\right)} \tag{4.3.6}$$

elde edilir.

$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n$ fonksiyonu $|z|<q^{-1}$ dairesinde analitik ve

Aksiyom A_1'den sınırında sürekli olduğundan $H(z)$ fonksiyonunun türevinin $z=q^{-1}$ noktasında değeri incelenebilir:

$$H'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nh(n)z^{n-1}.$$

Burada, $z=q^{-1}$ noktası yerine yazılır

$$H'\left(q^{-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} nh(n)q^{1-n}$$

ve eşitliğin her iki tarafı q^{-1} ile çarpılırsa

$$q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} nh(n)q^{-n} \tag{4.3.7}$$

eşitliği elde edilir. (4.3.6) eşitliğinde (4.3.7) kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty} nh(n)q^{-n}\cdot\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)}$$

elde edilir.

Bu eşitlikten yararlanarak $n\to\infty$ iken

$$\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}-1\right)=\sum_{m>n} mh(m)q^{-m}\cdot\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)} \tag{4.3.8}$$

eşitliği elde edilir.

$$q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} nh(n)q^{-n}=\sum_{m\le n} mh(m)q^{-m}+\sum_{m>n} mh(m)q^{-m} \tag{4.3.9}$$

(4.3.9) ve (4.2.3) ifadesinden yararlanarak

$$q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)=\sum_{m>n} mh(m)q^{-m},\ \left(n\to\infty\right) \tag{4.3.10}$$

elde edilir. (4.3.10) ifadesi (4.3.8) ifadesinde yerine yazılır

$$\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}-1\right)=\left[q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right]\cdot\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)},\ \left(n\to\infty\right)$$

ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}-1\right)=\frac{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)}{H\left(q^{-1}\right)}+\frac{o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)}{H\left(q^{-1}\right)},\ \left(n\to\infty\right) \qquad (4.3.11)$$

bulunur. Bu ise (4.1.2)'nin ispatıdır.

(4.1.3)'ün ispatı için (4.3.11)'in her iki tarafı n ile bölünürse;

$$\frac{1}{n}\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}-1\right)=\frac{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)}{H\left(q^{-1}\right)n}+\frac{o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)}{H\left(q^{-1}\right)n},\ \left(n\to\infty\right)$$

elde edilir. Bu son eşitlik

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda(n+1)}{q^{n+1}}-1\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda(n+2)}{q^{n+2}}-1\right)+\ldots=\left[\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{qn}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)}$$

biçiminde de yazılabilir.

Her bir $m>n$ için $\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$ olduğundan

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{\lambda(n+1)}{q^{n+1}}-1\right)+\frac{1}{n+2}\left(\frac{\lambda(n+2)}{q^{n+2}}-1\right)+\ldots\leq$$

$$\leq\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda(n+1)}{q^{n+1}}-1\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda(n+2)}{q^{n+2}}-1\right)+\ldots$$

sağlanır. Bu son eşitsizliğin sağ tarafı (4.3.11) ile aynı olduğundan

$$\sum_{m>n}\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda(m)}{q^m}-1\right)\leq\left[\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{qn}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)}$$

bulunur. Öyle bir $C_1\in\mathbb{R}$ sayısı bulunabilir ki yeterince büyük n'ler için

$$\sum_{m>n}\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda(m)}{q^m}-1\right)+C_1=\left[\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{qn}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\frac{1}{H\left(q^{-1}\right)}$$

eşitliği doğrudur. Bu ise (4.1.3) ifadesinin ispatıdır.

(ii) $H\left(-q^{-1}\right)=0$ olsun. **4.2.1. Teorem'**inden

$$f(z)=\frac{H(z)}{1+qz}$$

fonksiyonu $|z| \le q^{-1}$ dairesinde sürekli ve sıfırdan farklıdır. (4.3.5)'in her iki yanı $1+qz$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)q^n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)q^{n+1}z^{n+1}=zH'(z)\frac{1+qz}{H(z)}$$

elde edilir. Bu ifade

$$\left(\frac{\lambda(1)}{q}-1\right)qz+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)q^n z^n+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda(n-1)q^{-n+1}-1\right)q^n z^n=z\cdot\frac{H'(z)}{f(z)}$$

biçimine çevrilir ve $z=q^{-1}$ yazılırsa

$$q^{-1}\cdot\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{f\left(q^{-1}\right)}=\left(\frac{\lambda(1)}{q}-1\right)qq^{-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1+\lambda(n-1)q^{-n+1}-1\right)q^n q^{-n}=$$

$$=\left(\frac{\lambda(1)}{q}-1\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}+\lambda(n-1)q^{-n+1}-2\right) \qquad (4.3.12)$$

$\frac{H'}{f}$ fonksiyonu $|z|=q^{-1}$ çemberinde mutlak yakınsak olduğundan (4.3.12)'un sağ tarafında yer alan serinin yakınsak olduğunu söyler.

Yakınsak her serinin genel teriminin limiti sıfır olacağından

$$\frac{\lambda(n)}{q^n}+\frac{\lambda(n-1)}{q^{n+1}}=2+o(1)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise (4.1.4)'ün ispatını verir.

Şimdi (4.1.5)'in ispatını verelim: bunun için (4.3.5)'de $z=q^{-1}$ yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)q^n q^{-n}=q^{-1}\cdot\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{H\left(q^{-1}\right)}$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)=q^{-1}\cdot\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{H\left(q^{-1}\right)} \qquad (4.3.13)$$

elde edilir. $f(z)=\frac{H(z)}{1+qz}$ eşitliğinde $z=q^{-1}$ noktası yerine yazılır

$$H\left(q^{-1}\right)=f\left(q^{-1}\right)\left(1+qq^{-1}\right)$$

ve gerekli işlemler sonunda

$$H\left(q^{-1}\right)=2f\left(q^{-1}\right)$$

elde edilir. Bu son eşitlik (4.3.13)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)=q^{-1}\cdot\frac{H'\left(q^{-1}\right)}{2f\left(q^{-1}\right)} \tag{4.3.14}$$

eşitliği elde edilir. (4.3.14) eşitliğinde (4.3.7) kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}-1\right)=\frac{1}{2f\left(q^{-1}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}nh(n)q^{-n}$$

bulunur.

Bu eşitlikten yararlanarak $n\to\infty$ iken

$$\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}-1\right)=\frac{1}{2f\left(q^{-1}\right)}\sum_{m>n}mh(m)q^{-m} \tag{4.3.15}$$

eşitliği elde edilir. (4.3.15)'de (4.3.10) ifadesi yerine yazılırsa

$$\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}-1\right)=\frac{1}{2f\left(q^{-1}\right)}\left[q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right],\ \left(n\to\infty\right)$$

ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}-1\right)=\frac{1}{2f\left(q^{-1}\right)}\left\{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right\},\ \left(n\to\infty\right)$$

bulunur. Bu ise (4.1.5)'in ispatıdır.

Şimdi (4.1.6)'nın ispatını verelim:

(4.3.7) göz önünde tutularak (4.3.12) eşitliği

$$\frac{1}{f\left(q^{-1}\right)}\left[\sum_{n=1}^{\infty}nh(n)q^{-n}\right]=\left(\frac{\lambda(1)}{q}-1\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda(n)q^{-n}+\lambda(n-1)q^{-n+1}-2\right)$$

biçiminde yazılır.

Bu eşitlikten $n\to\infty$ iken

$$\frac{1}{f\left(q^{-1}\right)}\left[\sum_{m>n}mh(m)q^{-m}\right]=\left(\frac{\lambda(1)}{q}-1\right)+\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}+\lambda(m-1)q^{-m+1}-2\right) \tag{4.3.16}$$

eşitliği elde edilir.

(4.3.10) ifadesi (4.3.16) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{f\left(q^{-1}\right)}\left[q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right]=\left(\frac{\lambda(1)}{q}-1\right)+\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}+\lambda(m-1)q^{-m+1}-2\right)$$

eşitliği alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{1}{f\left(q^{-1}\right)}\left[q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right]+\left(1-\frac{\lambda(1)}{q}\right)=\sum_{m>n}\left(\lambda(m)q^{-m}+\lambda(m-1)q^{-m+1}-2\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikte $C:=1-\dfrac{\lambda(1)}{q}$ şeklinde işaretlenir ve eşitliğin her iki tarafı n ile bölünürse:

$$\frac{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)}{n\cdot f\left(q^{-1}\right)}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)+\frac{C}{n}=\frac{1}{n}\left(\sum_{m>n}\lambda(m)q^{-m}+\lambda(m-1)q^{-m+1}-2\right) \qquad (4.3.17)$$

elde edilir. Bu ise

$$\frac{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)}{n\cdot f\left(q^{-1}\right)}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)+\frac{C}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda(m+1)}{q^{m+1}}+\frac{\lambda(m)}{q^{m}}-2\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda(m+2)}{q^{m+2}}+\frac{\lambda(m+1)}{q^{m+1}}-2\right)+\dots$$

biçiminde de yazılabilir.

Her bir $m>n$ için $\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$ olduğundan

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{\lambda(m+1)}{q^{m+1}}+\frac{\lambda(m)}{q^{m}}-2\right)+\frac{1}{n+2}\left(\frac{\lambda(m+2)}{q^{m+2}}+\frac{\lambda(m+1)}{q^{m+1}}-2\right)+\dots\leq$$

$$\leq\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda(m+1)}{q^{m+1}}+\frac{\lambda(m)}{q^{m}}-2\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda(m+2)}{q^{m+2}}+\frac{\lambda(m+1)}{q^{m+1}}-2\right)+\dots$$

eşitsizliği doğrudur. Bu son eşitsizliğin sağ tarafı (4.3.17) ile aynı olduğundan

$$\sum_{m>n}\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda(m)}{q^{m}}+\frac{\lambda(m-1)}{q^{m-1}}-2\right)\leq\frac{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)}{n\cdot f\left(q^{-1}\right)}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)+\frac{C}{n}$$

bulunur. Öyle bir $C_2\in\mathbb{R}$ sayısı bulunabilir ki yeterince büyük n'ler için

$$\sum_{m>n}\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda(m)}{q^{m}}+\frac{\lambda(m-1)}{q^{m-1}}-2\right)+C_2=\frac{q^{-1}H'\left(q^{-1}\right)}{n\cdot f\left(q^{-1}\right)}+o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

eşitliği doğrudur. Bu ise (4.1.6) ifadesinin ispatıdır.

4.1.1. Sonucun İspatı:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\pi(n)$ G yarı grubu üzerinde derecesi n'ye eşit olan asal elemanların sayısını göstersin. $\lambda(n)$ von Mangoldt fonksiyonunun katsayısı (4.3.1)'den yararlanarak

$$\lambda(n) = \sum_{d|n} d\pi(d)$$

biçimindedir. Möbius ters dönüşüm formülü yardımı ile

$$n\pi(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

biçiminde yazılabilir [3].

Bu son eşitlik **4.1.1 Teorem**'de verilen eşitliklerde yerine yazılarak istenilen elde edilir.

4.1.2 Teorem'in İspatı:

(i) $H\left(-q^{-1}\right) \neq 0$ olsun. (4.1.11) eşitliğinin sağ tarafında yer alan

$$z \cdot \frac{H'(z)}{H(z)}$$

fonksiyonu $Aksiom\, A_2$'den $|z| \leq q^{-1}$ dairesinde mutlak yakınsaktır[3]. O halde (4.3.5)'in sol tarafında yer alan serinin yakınsak olduğunu söyler.

Yakınsak her serinin genel teriminin limiti sıfır olacağından

$$\frac{\lambda(n)}{q^n} = 1 + o(1)$$

dir.

(ii) (4.3.1) eşitliğinin her iki tarafı z ile çarpılırsa

$$z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) z^n \tag{4.3.18}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğin sol tarafını

$$\varsigma(z) := z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)}$$

biçiminde işaretleyelim.

(4.3.18) eşitliğinden $\lambda(n)$'nin aynı zamanda $\varsigma(z)$ fonksiyonunun $z=0$ noktasında Taylor katsayısı olduğu açıktır. O halde,

$$\lambda(n)=\frac{\varsigma^{(n)}(0)}{n!}$$

dir. Ayrıca, Cauchy türev formülüne göre

$$\varsigma^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\varsigma(z)}{z^{n+1}}dz,\ (0<r<q^{-1})$$

eşitliği yazılabilir. $\varsigma^{(n)}(0)=n!\lambda(n)$ olduğundan

$$\lambda(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\varsigma(z)}{z^{n+1}}dz$$

olarak ta hesaplanabilir. Bu son eşitlikte $\varsigma(z)$ fonksiyonu yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{F'(z)}{F(z)}z^{-n}dz \tag{4.3.19}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (4.3.19) ifadesinde bulunan $\frac{F'(z)}{F(z)}$ fonksiyonunu açık olarak hesaplayalım:

$H(-q^{-1})=0$ olduğundan

$$f(z)=\frac{H(z)}{1+qz} \tag{4.3.20}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon **4.2.1.Teorem**'den $|z|\le q^{-1}$ dairesinde sürekli ve sıfırdan farklıdır. Diğer taraftan $H(z)=F(z)(1-qz)$ olduğundan (4.3.20) eşitliği

$$f(z)=\frac{F(z)(1-qz)}{(1+qz)}$$

biçiminde yazılabilir. Bu son eşitliğin her iki tarafının logaritması alınırsa

$$\log f(z)=\log\left[\frac{F(z)(1-qz)}{(1+qz)}\right]$$

elde edilir ve logaritma fonksiyonunun özelliklerinden

$$\log f(z)=\log F(z)+\log(1-qz)-\log(1+qz)$$

bulunur. Bu son eşitlikte her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{F'(z)}{F(z)}-\frac{q}{1-qz}-\frac{q}{1+qz}$$

elde edilir.

Buradan,

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}+\frac{q}{1-qz}+\frac{q}{1+qz} \tag{4.3.21}$$

dir. (4.3.21) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla z^{-n} ile çarpılır ve $0<r<q^{-1}$ olmak üzere $|z|=r$ boyunca integrallenirse

$$\lambda(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{F'(z)}{F(z)}z^{-n}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}z^{-n}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{q}{1-qz}z^{-n}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{q}{1+qz}z^{-n}dz$$

eşitliği bulunur.

Şimdi bu son eşitliğin sağ tarafında yer alan her bir integrali Cauchy türev formülünden yararlanarak hesaplayalım:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{q}{1-qz}z^{-n}dz=\frac{q}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{1}{1-qz}z^{-n}dz=\frac{q}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{1}{(1-qz)z^{n}}dz$$

$$=q\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\overline{\dfrac{1}{(1-qz)}}}{z^{n}}dz$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlik

$$=\frac{q}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\overline{\dfrac{1}{(1-qz)}}}{z^{n}}dz$$

şeklinde yazılır ve

$$\xi_1(z):=\frac{1}{1-qz}$$

işaretlemesi yapılırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{q}{1-qz}z^{-n}dz=\frac{q}{(n-1)!}\xi_1^{(n-1)}(0)$$

olarak bulunur. Şimdi $\xi_1^{(n-1)}(z)$'yi hesaplayalım:

$$\xi_1'(z)=\frac{q}{(1-qz)^2},\ \xi_1''(z)=\frac{1\cdot 2\cdot q^2}{(1-qz)^3},\ \xi_1'''(z)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot q^2}{(1-qz)^4},\ldots,\ \xi_1^{(n)}(z)=\frac{n!q^n}{(1-qz)^{n+1}}$$

olarak bulunur.

Buradan

$$\xi_1^{(n-1)}(z)=\frac{(n-1)!q^{n-1}}{(1-qz)^n}$$

ve

$$\xi_1^{(n-1)}(0)=(n-1)!q^{n-1}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{q}{1+qz}z^{-n}dz=\frac{q}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{1}{1+qz}z^{-n}dz=\frac{q}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{1}{(1+qz)z^n}dz$$

$$=q\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\frac{1}{(1+qz)}}{z^n}dz$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlik

$$=\frac{q}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\frac{1}{(1+qz)}}{z^n}dz$$

şeklinde yazılır ve

$$\xi_2(z):=\frac{1}{1+qz}$$

işaretlemesi yapılırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{q}{1+qz}z^{-n}dz=\frac{q}{(n-1)!}\xi_2^{(n-1)}(0)$$

olarak bulunur. Şimdi $\xi_2^{(n-1)}(z)$'i hesaplayalım:

$$\xi_2'(z) = -\frac{q}{(1+qz)^2}, \ \xi_2''(z) = \frac{1\cdot 2\cdot q^2}{(1+qz)^3},$$

$$\xi_2'''(z) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot q^2}{(1+qz)^3}, \ldots, \xi_2^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!q^n}{(1+qz)^{n+1}}$$

olarak bulunur.

Buradan

$$\xi_2^{(n-1)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!q^{n-1}}{(1+qz)^n}$$

ve

$$\xi_2^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!q^{n-1}$$

olarak bulunur.

Son olarak $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} z^{-n} dz = O\left(q^{n\theta}\right) \ ,\left(0 \le \nu < \theta < 1\right)$$

dır [5].

4.1.2. Sonucun İspatı:

Möbius ters dönüşüm formülü yardımı ile

$$n\pi(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

dir [3].

Bu son eşitlik **4.1.2. Teorem**'de verilen eşitliklerde yerine yazılarak istenilen elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde ele alınan problem ile ilgili sonuçlar, Bulgular ve Tartışma bölümünde

4.1 Toplamsal aritmetik yarı grupların özellikleri

başlığı altında toplanmıştır. Ayrıca

4.2 Yardımcı Sonuçlar

bölümünde de esas teoremlerin ispatında kullanılacak lemmalar ve ispatları verilmiştir.

1) 4.1.1. Teorem'de $\left(G,\partial\right)$ *Aksiyom* A_1 'i sağladığında $H\left(-q^{-1}\right)=0$ için $n\to\infty$ iken von Mangoldt fonksiyonunun Taylor katsayısı olarak bilinen $\lambda\left(n\right)$ için bir asimptotik değerlendirme verildi.

Ayrıca,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda\left(n\right)q^{-n}-1\right)$$

serisinin kalan kısmı için bir asimptotik değerlendirme yapıldı.

Aynı özellikler $H\left(-q^{-1}\right)\neq 0$ olduğunda da incelendi.

2) 4.1.1. Sonuç'ta (G,∂) *Aksiyom* A_1'i sağladığında $H\left(-q^{-1}\right)=0$ için $n\to\infty$ iken Möbius ters dönüşüm formülü yardımı ile $\pi(n)$ için bir asimptotik değerlendirme verildi. Ayrıca,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n\pi(n)q^{-n}-1\right)$$

serisinin kalan kısmı için bir asimptotik değerlendirme yapıldı.

Bu özellikler $H\left(-q^{-1}\right)\neq 0$ olduğu durum içinde incelendi.

3) 4.1.2 Teorem'de (G,∂) *Aksiyom* A_2'i sağladığında $H\left(-q^{-1}\right)\neq 0$ olduğunda $n\to\infty$ iken $\lambda(n)$ için bir asimptotik değerlendirme verildi.

Ayrıca, $H\left(-q^{-1}\right)=0$ ise $n\to\infty$ iken

$$\frac{\lambda(n)}{q^n}=1-(-1)^n+O(q^{\theta n})$$

asimptotik gösterimi elde edildi.

4) 4.1.2. Sonuç'ta (G,∂) *Aksiyom* A_2'i sağladığında $H\left(-q^{-1}\right)\neq 0$ için $n\to\infty$ iken Möbius ters dönüşüm formülü yardımı ile $\pi(n)$ için

$$\frac{n\pi(n)}{q^n}=1+o(1)$$

asimptotik değerlendirmesi verildi.

Ayrıca, $H\left(-q^{-1}\right)=0$ ise $\nu<\theta<1$ olmak üzere $n\to\infty$ iken

$$\frac{n\pi(n)}{q^n}=1-(-1)^n+O\left(q^{\theta n}\right)$$

asimptotik değerlendirmesi yapıldı.

5.2 ÖNERİLER

Bu çalışmanın devamında aşağıdaki problemler de incelenebilir:

1) (G,∂) ikilisi üzerine koyulacak yeni aksiyomlar ile aynı problem incelenebilir.

2) (G,∂) ikilisi üzerinde tanımlanan aksiyomlar altında **3.3.1.Tanım** ve **3.3.2.Tanım**'da verilen fonksiyonların H^p, $(1 < p \leq \infty)$ üzerinde tanımlanan norm ile yaklaşım hızı yarı grup üzerine koyulan aksiyomun parametrelerine bağlı olarak incelenebilir.

3) Ω karmaşık düzlemde basit bağlantılı bir bölge olmak üzere Riemann dönüşüm teoremi kullanılarak bu çalışmada incelenen problem Ω bölgesine taşınabilir ve Ω bölgesini sınırlayan eğrinin geometrik özelliklerine bağlı olarak asimptotik gösterim elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Wunsch, A.D., "Complex Variables with Applications", Addison Wesley Publishing Company, U.S.A., 696 s. , (2005)

[2] Zill, D.G., Shanahan, P.D. "A First Course in Complex Analysis with Applications", Jones and Bartlett Publishers, U.S.A., 449 s. , (2003)

[3] Indlekofer, K.-H, "Some remarks on additive arithmetical semigroups", Lietuvos Matematikos Rinkins, **Vol 42(2):**185-204, (2002)

[4] Knopfmacher J., Zhang W.-B., "Number Theory arising from finite Fields. Analytic and Probabilistic Theory", Marcel Dekker, New York, 190 s. , (2001)

[5] Knopfmacher J., "Analytic arithmetic of algebraic function fields", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 50, Marcel Dekker, New York, 144 s. , (1979)

[6] Depree, J.D., Gehring, C.C. "Elements of Complex Analysis", Addisiom Wesley Publishing Company, USA, 258 s. , (1969)

[7] Saff, E.B., Snider, A.D. "Fundamentals of Complex Analysis", Prentice Hall, Upper saddle River, New Jersey, 528 s. , (1993)

[8] Walter R., "Reelle und Komplexe Analysis", Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 416 s. , (1999)

[9] Hungerford Thomas W., "Algebra", Springer Science+Business Media,LLC, 550 s. , (1974)

[10] Wehmeier S., "Arithmetical Semigroups", Dr. Hut, München, s. 213, (2005)

[11] Remmert R., Schmacher G., "Fuktionentheorie 1", Springer –Verlag Berlin Heidelberg New York, 390 s. , (2001)

[12] Indlekofer K.-H, "The abstract prime number theorem for function fields", Acta Math. Hungar., **Vol 62**, 137-148, (1993)

[13] Fogels E., "On the abstract theory of primes. I-III", Acta Arith., **Vol. 10**, 132-182, (1964)

[14] J. Knopfmacher., " An Abstract prime Number Theorem Relating Algebraic Function Fields", Arch. Math. **Vol 29**, (271-279), (1977)

[15] Indlekofer K.- H, Manstavicius E., Warlimont R., "On a vertain of infinite products with an application to arithmetical semigroups", Arch. Math., **Vol. 56**, (446-453), (1991)

[16] Bundschuh P., "Einführung in die Zahlentheorie", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 336 s. , (1996)

[17] Markushevich, A.I., "Theory of functions of a complex variable", Chelsea publishing company, **Vol. 1(3)**, 367 s. , (1985)

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında İskenderun'da doğdum. İlköğrenim ve ortaöğrenimimi İskenderun'da tamamladım. 2002 yılında Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programını bitirdim. 2002-2005 yılları arasında Almanya Paderborn Üniversitesi Matematik Bölümünde Bilişim üzerine dersler aldım. 2005 yılından bu yana Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans öğrencisiyim.