TELEPARALLEL KURAMINDA GENİŞLEYEN VE DÖNEN EVREN MODELLERİ İÇİN KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN TARTIŞILMASI

ALİ KEMAL HAVARE

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ali HAVARE

MERSİN
Mayıs – 2007

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ali HAVARE

Jüri Üyesi	Jüri Üyesi
Doç. Dr. Khanlar MAMMADOV	Yrd. Doç. Dr. Aytekin AYDEMİR

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstit Yönetim Kurulu'nun ..../.........../............tarih ve ..../.................. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ÖZ

Kütlesel çekim etkileşimini betimleyen bir çok kuram vardır. Bu kuramlar arasında en çok kabul görenler, Genel Görelilik kuramı ile Teleparallel kuramıdır. Genel görelilik kuramı uzay-zamanı geometrize ederek kütlesel çekimi açıklamaya çalışırken Teleparallel kuramı ise bu etkileşimi bir kuvvetsel alan kavramı ile açıklar. Kavramsal anlamda bu iki kuram arasında çok ciddi farklar olmasına karşın her ikisinin aynı olguyu betimlemesi ve aynı sonuçları vermesi bu iki kuramın eşdeğerliliğini çağrıştırır.

Skaler ve spinli parçacıkların uzay-zaman ile nasıl etkileştiğini anlamak için bu parçacıkları betimleyen denklemler bu kuramlarda yazılıp değerlendirilirler.

Bu çalışmada; genel bir metrik için kütleli, skaler ve spin-0 parçacıkları betimleyen Klein-Gordon denkleminin hem Genel Görelilik kuramında hem de Teleparallel kuramında eşdeğer olduğu gösterilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Teleparallel, Genel Görelilik, Kelin-Gordon denklemi

ABSTRACT

There are several theories describing a gravitational intreaction. The theories which are the most acceptable in the literature are General Relativity and Teleparallel Theory. The Teleparallel Theory accounts for gravity as a force of field but the General Relativity tries to explain it by means of geometrize spacetime. Although there is a significant difference between these theories, description of the same concept and the same given result for these theories is shown to be equivalent.

In these theories, in order to understand how the geometry of spacetime effect on the scalar and spin particles which describe the particles equations must be written to evaluate.

In this work, the Klein-Gordon equation that represents particles with spin-0 and scalar is performed to be equivalent for a general metric both the General Relativity and the Teleparallel Theory.

Keywords: Teleparallel, General Relativity, Klein-Gordon equation

TEŞEKKÜR

Eğitim yaşamım boyunca örnek aldığım, bu tezin her aşamasında özveride bulunarak bana yardım eden, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Ali HAVARE ve eşi Esra HAVARE' ye çok teşekkür ederim.

Öğrencilerin koruyucu meleği, hocam Yrd. Doç. Dr. Hülya METİN'ne ve ayrıca bu çalışmanın bazı aşamalarında önerilerinden ve tartışmalarından yararlandığım değerli hocam Dr. Kenan SÖĞÜT ile çalışma arkadaşlarım Evrim Ersin KANGAL ve Meral BAĞCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman pozitif düşünen ve moral desteğini hiç eksik hissetmediğim arkadaşım Selma ERAT'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$g_{\mu\nu}$: Metrik Tensörü

Ψ : Dalga Fonksiyonu

$h^{a}{}_{\mu}$: Dört Ayaklar

$\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}$: Weitzenböck Bağlantıları

$\dot{T}^{\rho}{}_{\mu\nu}$: Teleparallel Kuramında Burulma (Torsion) Tensörü

$\dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu}$: Kıvrılma (Contortion) Tensörü

$\dot{R}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu}$: Weitzenböck Uzay-zamanında Eğrilik

$\overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu}$: Riemann Uzay-zamanında Eğrilik

$\dot{D}_{\mu}$: Teleparallel Kovaryant Türev

$\overset{\circ}{\nabla}_{\mu}$: Kovaryant Türev

$\dot{\Box}$: Laplace-Beltrami işlemcisi

$\Gamma_{[\alpha\beta]}{}^{\mu}$: Affine Bağlantısı

$N^{\beta}{}_{\mu\nu}$: Metriksizlik Tensörü

$Q^{\beta}{}_{\mu\nu}$: Genel Görelilikte Burulma (Torsion) Tensörü

$\overset{\circ}{D}_{\mu}$: Fock-Ivanenko Kovaryant Türev

γ^{α} : Eğri Uzay-Zamandaki 4x4’ lük Dirac Gama Matrisleri

$\tilde{\gamma}^{i}$: Düz Uzay-Zamandaki 4x4’ lük Dirac Gama Matrisleri

$\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu}$ **:** Spin Bağlantı Katsayıları

$S^{\mu\nu}$ **:** Spin Tenserü

$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ **:** Christoffel Sembolleri

∂_x **:** $\dfrac{\partial}{\partial x}$

K-G **:** Klein-Gordon

<u>Not</u> :

(i) Bu çalışmada çizgi elemanı için kullanılan işaret anlaşması (-,+,+,+,) şeklinde olup özel olarak belirtilmedikçe indisler (0,1,2,3) değerlerini almaktadırlar.

(ii) Denklemlerdeki terimlerin veya katsayıların üzerindeki $\circ$ işareti, Genel Görelilikte kullanılan nicelikleri betimlerken, $\bullet$ işareti ise Teleparallel kuramında kullanılan nicelikleri ya da katsayıları betimlemektedir.

(ii) Denklemlerdeki terim veya katsayıların kesme işareti (A' gibi) konuma göre türevi, nokta işareti ($\dot{A}$ gibi) ise zamana göre türevi betimlemektedir.

1. GİRİŞ

Klasik Fizik, doğayı ve maddeyi anlamak adına birbirinden bağımsız iki bakış açısı geliştirmiştir. Bunlardan biri parçacık olarak doğayı anlama, diğeri ise bu parçacıkların yarattığı kuvvetsel alan olarak olgulara bakmaktır. Bu bağlamda; doğaya kuvvetsel alan yaklaşımıyla bakıldığında, kütlesel çekim alanı, elektromanyetik alan, güçlü çekirdek kuvvetsel alanı ve zayıf çekirdek kuvvetsel alan olmak üzere evreni oluşturan dört temel kuvvetsel alanın var olduğu olgusu ortaya çıkmaktadır. Bunlardan evrenin oluşumundan sorumlu olan kütlesel çekim kuvvetinin anlaşılması için ilk kuram Newton tarafından ortaya konulmuştur. Newton kuramına göre, uzay üç boyutlu, düz (öklidyen), öncesiz , sonrasız, mutlak ve değişmezdir. Zaman, benzer şekilde, öncesiz, sonrasız, mutlak ve değişmez bir parametredir. Madde ise uzay ve zamandan bağımsız bir biçimde uzayda ve akıp giden zaman içerisinde hareket eden kütleli nesnelerdir. Newton kuramında bir olayın etki hızı sonsuz olması nedeniyle maddeler arası etkileşime ‘‘ani etkileşme’’ adı verilir. Ani etkileşme modeli daha sonra elektromanyetizma olgularını anlayabilmek için yetersiz kalmıştır. Elektromanyetizma olgularının bu bağlamdaki sorunu Einstein’ın 1905 yılında ortaya koyduğu Özel Görelilik kuramıyla çözülmüştür. Bu kurama göre etki hızı sonlu olup en fazla ışık hızına eşit olabilir. Bu kuramda ayrıca zaman bir parametre değil uzay gibi bir boyut olarak tanımlanmaktadır. Özel Görelilik kuramı, zamanın uzaya bir boyut olarak katılmasıyla birlikte dört boyutlu düz uzay (Minkowski) geometrisine dayanmaktadır. Bu geometride değişmez kalan uzay-zaman ikilisidir. Madde, bu kuramda uzay-zaman ikilisiyle etkileşmeden bu uzay-zamanın oluşturduğu geometride hareket eder.

Newton kuramının ışık hızına yakın hızlardaki nesneler için kütlesel çekimi betimlemedeki yetersizlikleri Einstein’ın Genel Görelilik kuramını ortaya atmasına neden olmuştur. Einstein’ın Genel Görelilik kuramıyla birlikte uzay-zaman ve madde kavramlarına olan yaklaşımımızı tümüyle değiştiren kavramsal bir devrim gerçekleşmiş oldu. Einstein, bu kuramda kütlesel çekim alanı kavramı yerine uzay-zaman geometrisini kullanarak fiziğe geometrik bir bakış açısı kazandırmıştır. Bu kurama göre madde kendi çevresindeki uzay zamanı eğer ve bu eğrilen uzay-zamanda var olan kütleler bu uzay-zaman içerisinde doğrusal yollar izleyerek hareket ederler. Böylece Newton kuramı ve Einstein'ın Özel Görelilik kuramında maddeyle uzay-zaman arasında bir etkileşme yokken Einstein'ın Genel Görelilik kuramında bu etkileşim görülmektedir [1]. "Doğayı anlamak için, ilk olarak geometriyle başlamak ve sonunda fizikle bitirmek gerekir" sözü ile özetlenebilecek geometri olarak fiziğe bakma felsefesi 20. yüzyılın başlarında Einstein tarafından ortaya koyulan bir yaklaşımdır [2].

Kütlesel çekim etkileşimi, Einstein tarafından Genel Görelilik kuramının ortaya konulmasıyla birlikte Genel Göreliliği izleyen Teleparallel kuramı, Einstein-Cartan ve Poincare kuramlarıyla daha genel bir temel üzerine oturtulmaya çalışılmıştır [3]. Einstein-Cartan ve Poincare kuramlarında kütlesel çekim etkileşimini betimlemek için hem burulma (torsion) hem de eğrilik kavramları birlikte kullanılmıştır. Genel Görelilikte kütlesel çekim etkileşimi geometrize edilerek yalnızca eğrilik kavramıyla betimlenirken, Teleparallel kuramında ise bu etkileşim yalnızca burulma kavramıyla açıklanmaya çalışılmıştır. Genel Görelilik kuramında eğrilik, kütlenin uzay-zamanı eğmesiyle (bükmesi) oluşur. Kütleli cisimler eğrilen uzay-zamanda oluşan jeodezikler boyunca hareket eden spinsiz parçacıklardır. Dolasıyla yörüngeler kuvvet denklemleri ile belirlenmez, jeodezikler ile belirlenir. Teleparallel kuramı ise uzay-zamanı geometrize etmek yerine bir kuvvet alanı tanımlayarak kütlesel çekim etkileşimini açıklamaya çalışır. Bu kurama göre kütleli cisimlerin izledikleri yörüngeler jeodezik denklemleriyle değil, elektrodinamikteki Lorenz kuvvet denklemine benzer kuvvet denklemleri ile betimlenirler.

Genel Görelilik ve Teleparallel kuramlarının çağdaş fizikteki uygulamaları en büyük ölçeklerde, astrofizik ve kozmolojiyle ilişkili iken, en küçük ölçeklerde ise kuantum ve temel parçaçık fiziğiyle bağlantılıdır. Bu bağlamda eğri uzay-zamanda kuantum etkilerini incelemek için tek parçacık durumlarının dikkatli bir biçimde incelenmesi ve dolayısıyla parçacığı kuantum mekaniksel olarak betimleyen diferansiyel denklemlerinin tartışılması gerekir.

Son 10 yılda bu alanda yapılan çalışmalara bakıldığında Einstein'ın Genel Görelilik kuramı ile Teleparallel kuramının eşdeğer olduğu düşüncesi yaygın bir şekilde yer almaktadır. Litaratürdeki çalışmaların pek çoğu incelendiğinde, eşdeğerliliğin kapalı biçimsel denklemler üzerine yapıldığı görülür.

Bu çalışmada amaç, Klein-Gordon (K-G) denklemini hem dönmeyi hem de genişlemeyi içeren genel bir metrikte Teleparallel kuramı ile Genel Görelilik kuramı için eşdeğer olduğunu göstermektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Einstein, 1928 yılında elektromanyetizma ve kütlesel çekimi birleştirmek amacıyla yeni bir yaklaşım geliştirdi. Bu öneri, günümüzde ayar kuramı olarak bilinen kütlesel çekim ile elektromanyetizmayı birleştirecek kuramın ilk tohumlarının 1918'de Herman Weyl tarafından ortaya konmasından sonra geldi [4]. Genel Görelilik kuramında kullanılan Riemann geometrisinde bir bağlantı katsayısı, bir eğrilik tensörü ve iki yörünge (jeodezik ve null jeodezik) denklemi yer almaktadır. Ayrıca bu kuramda tanımlanan metrik tensörünün simetrik olması nedeniyle yalnızca 10 bileşeni kütlesel çekimi betimlemektedir. Yukarıda ifade edilen nedenlerden ötürü Genel Görelilik kuramının temelini oluşturan Riemann geometrisi, kütlesel çekim ile elektromanyetizmanın birleşimini betimleyecek yapıya sahip değildir. Bu nedenle Einstein hem kütlesel çekimi hemde elektromanyetizmayı bir arada betimleyecek bir geometriye gereksinim duyar. Bu geometriyi oluşturan dört boyutlu uzay-zamanın her noktasında bir dikboylandırılmış (ortonormal) alanın teğet uzayı olarak tanımlanan dörtayak (tetrat) alanlarını betimleyen nicelik 16 bağımsız bileşenden oluşmaktadır. Einstein'na göre; bu niceliğin 10 bileşeni kütlesel çekim alanını geri kalan 6 bileşeni ise elektromanyetik alanı betimler. Bu oluşan kurama litaratürde mutlak (absulute) paralellizm ve geometriye Weitzenböck geometrisi adı verilmektedir. O yıllarda umut verici olarak görülen ve Einstein tarafından ortaya konulan bu girişim, kuramın öngördüğü denklemlerin Schwarzschild çözümlerini vermemesi nedeniyle başarısız olarak değerlendirilmiştir [5].

Daha sonraki 30 yıl boyunca önemli yeni bir gelişme olmamıştır. 1961' de Moller, Einstein'ın orjinal düşüncesini ayar kuramı bağlamında kütlesel çekim için yeniden ele almıştır [6]. Bunu izleyen çalışma Pellegrini ve Plebanski [7] ise Teleparallel kuramı için Langranjiyen formülasyonunu ortaya koymuşlardır. Moller buradaki bir problemi daha sonraki bir zamanda tekrar gözden geçirmiştir [8]. 1967'de Hayashi ve Nakano [9], daha sonra da Hayashi tarafından gerçekleştirilecek olan [10], dönüşüm grupları için bir ayar kuramı formalizmi ortaya koymuşlardır. Bir kaç yıl sonra

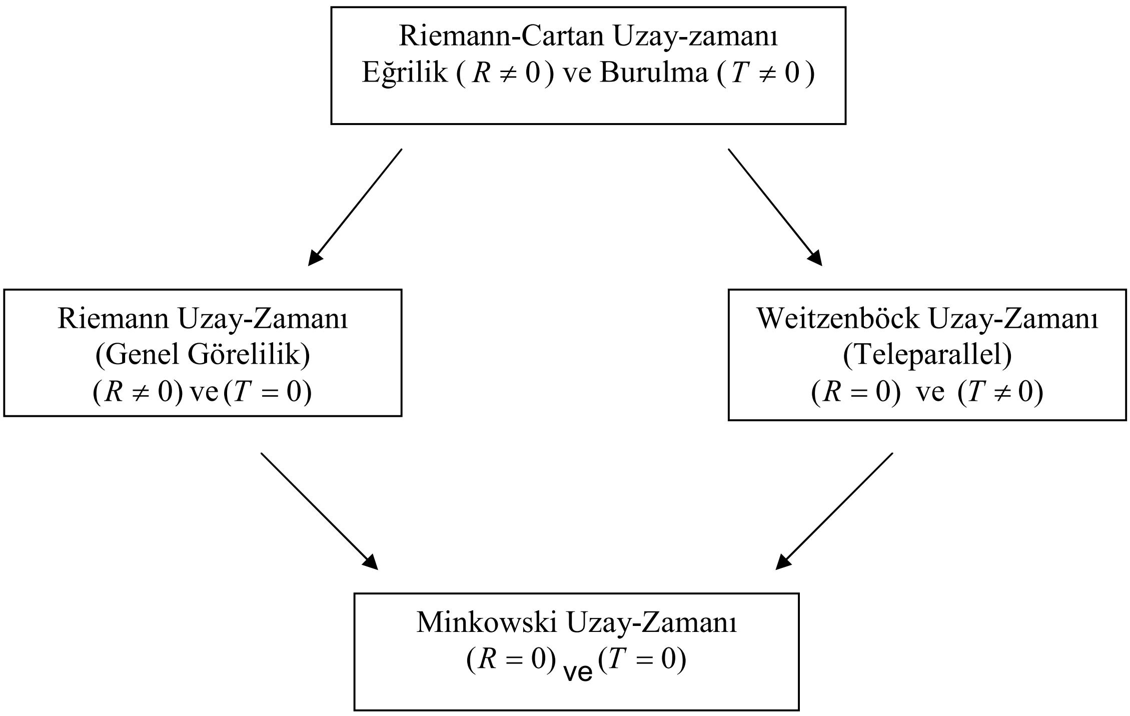
Hayashi [11] yukarıda sayılan gelişmeleri Teleparallel kuramı ile ilişkilendirmiştir ve 1979'da Shirafuji [12] ile birlikte bu iki yeni gelişmeyi birleştirmeye çalışmıştır.

Günümüze kadar süregelen bu çalışmalarda, temel olarak kütlesel çekim etkileşiminin bir ayar kuramı olarak ele alındığı görülür [13]. Kütlesel çekimin Teleparallel kuramı, dönüşüm grupları için ayar kuramı olarak tanımlanabilir [14,15]. Bu yaklaşımda kütlesel çekim etkileşimi, elektrodinamiğin Lorenz kuvvetine benzer bir kuvvet olarak tanımlanan burulma (Torsion) tensörü ile betimlenir. Dolayısıyla Teleparallel kuramı, Genel Görelilik kuramındaki eğrilik yerine burulmanın ele alındığı kütlesel çekim alanını betimleyen alternetif bir kuram olarak ele alınır [16].

Teleparallel kuramının en temel özelliği dönüşüm grupları için bir ayar kuramı olmasıdır. Ayar kuramı genel (global) ve yerel (local) olarak uygulanan simetri dönüşümleri düşüncesini temel alan kuramların bir kümesidir. Fizikte bir çok kuram Lagranjiyen formalizmiyle tanımlanır. Lagranjiyen formalizmi, fizik yasalarının simetri dönüşümleri altında değişmez kalması temeline dayanır. Ayar kuramı, Lagranjiyeni yerel simetriye sahip olduğunu ve simetri dönüşümlerinin, uzay-zamanın belirli bölgelerinde tanımlanan yasaların başka bölgelerde ne olduğundan etkilenmeden gerçekleştiğini gösterir. Bu düşünce Genel Göreliliğin eşdeğerlilik ilkesinin genelleştirilmiş bir biçimidir.

Ayar alanı kuramı ilk olarak elektrodinamiğin Maxwell formalizmiyle ortaya konulmuştur. Maxwell'in elektromanyetik kuramı iki önemli simetri içerir; bunlar Lorentz değişmezi ve ayar simetrisidir. Ayar değişmezinin tam olarak anlaşılması kuantum mekaniği ve Genel Göreliliğin ortaya konmasıyla olmuştur. Einstein Genel Görelilik kuramının temel dinamiğini uzay-zaman geometrisi üzerine kurmasına karşılık, Herman Weyl zaman içinde uzayın bir noktasından diğer bir noktasına olan varyasyonu uzunluk ölçeğini temel alan bir kuram oluşturmak istemiştir. Buradaki amacı kütlesel çekim ve elektromanyetizmayı birleştirerek elektrodinamik için geometrik bir altyapı oluşturmaktır [17].

Kütlesel çekim etkileşimini büyük ve küçük ölçeklerde betimlemek için ortaya konulan modellerde genel olarak üç temel geometrisel yapı gözlemlenir; Riemann-Cartan geometrisi eğrilik ve burulma kavramları ile açıklanırken Genel Görelilik kuramının temelini oluşturan Riemann geometrisi ise eğrilik kavramına dayanır. Genel Görelilik kuramına seçenek olarak sunulan Teleparallel kuramının temelini oluşturan Weitzenböck geometrisi ise burulma kavramını temel alır. Kütlesel çekimin bulunmadığı durumlarda uzay-zamanın geometrisi Minkowski geometrisine indirgenir Bu genel çerçeve şekil-1'de özetlenmektedir [12,18].



Şekil 1. Bazı kuramlara göre Eğrilik ve Burulma Tensörleri

2.1. TELEPARALLEL KURAMININ TEMELLERİ [16,18]

Teleparallel kuramının en temel özelliği dönüşüm grupları için bir ayar kuramı olarak anlaşılmasıdır. Dönüşümlerin bazı karekteristik özelliklerinden dolayı, bu dönüşümleri içeren bir çok ayar kuramı diğer kuramlardan bir kaç nokta itibariyle farklılaşır. Bu bağlamda, Teleparallel kuramı dörtayak (tetrat) alanları düşüncesini ön plana çıkarır. Bu çerçevede iç ve dış alanlar bu dörtayak alanlarıyla ilişkilendirilir.

Teleparallel kütlesel çekiminin temel alanını betimleyen bir ayar potansiyeli B_μ olmak üzere,

$$B_\mu = B^a{}_\mu P_a \tag{2.1}$$

biçiminde bir dönüşüm tanımlanır. Burada

$$\left[P_a, P_b\right] = 0 \tag{2.2}$$

bağıntısını sağlayan $P_a = \partial / \partial x^a$ ya dönüşüm üreteçleri adı verilir. Bir ayar dönüşümü, teğet (tanjant) uzayın koordinatlarının yerel (bağlı nokta) bir dönüşümü

$$x^{a'} = x^a + \alpha^a \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır. Burada $\alpha^a \equiv \alpha^a(x^\mu)$ ve

$$\delta x^a = \alpha^b P_b x^a \tag{2.4}$$

şeklindedir. Genel bir kaynak alanı $\psi = \psi(x^\mu)$ olmak üzere spine bağlı olmayan ayar dönüşümünün küçük değişimleri

$$\delta\psi = -\alpha^{a} P_{a}\psi \tag{2.5}$$

şeklinde verilir. Bu noktada dönüşüm üreteçleri kaynak alanıyla ilgili önemli rol üstlenir.

$$h_{\mu} = \partial_{\mu} - B^{a}{}_{\mu}\frac{\delta}{\delta\alpha^{a}} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan kovaryant türev herhangi bir dalga fonksiyonu ψ 'ye uygulanarak dönüşümsel kovaryant türev aşağıdaki biçimde olur:

$$h_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi - B^{a}{}_{\mu}P_{a}\psi \tag{2.7}$$

Bu bağıntı

$$h_{\mu}\psi = h^{a}{}_{\mu}\partial_{a}\psi \tag{2.8}$$

biçiminde yazılırsa [19] holonom olmayan dörtayak alanı için

$$h^{a}{}_{\mu} = \partial_{\mu}x^{a} + B^{a}{}_{\mu} \equiv h_{\mu}x^{a} \tag{2.9}$$

ifadesi elde edilir. Doğadaki her kaynak alanı dönüşümsel ayar potansiyeliyle etkileşir. Bu bağlamda $B^{a}{}_{\mu}$ ve ψ 'nin etkileşimi her alan için aynı olup, aynı kütlesel çekimi ile çiftlenirler. Eşdeğerlilik kavramının Teleparallel kuramdaki karşılığı bu temel üzerine kurulur.

$$\left[h_\mu, h_\nu\right]\psi = \dot{T}^{\alpha}{}_{\mu\nu} P_a \psi \tag{2.10}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\dot{T}_{\mu\nu} = \dot{T}^{a}{}_{\mu\nu} P_a$ ifadesine kuvvetsel alan denir ve bu dönüşüm gruplarındaki alanı betimler. Bu alanın açık biçimi aşağıdaki bağıntıyla verilir:

$$\dot{T}^{a}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu \equiv \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu \tag{2.11}$$

$h_\mu \psi$ 'nin değişmez kalmasından dolayı ayar potansiyelinin dönüşümü

$$B^{a'}{}_\mu = B^a{}_\mu - \partial_\mu \alpha^a \tag{2.12}$$

biçiminde olur. (2.3) ve (2.12) denklemlerinde verilen dönüşümler kullanılarak dörtayakların ayar değişmezi

$$h^{a'}_\mu = h^a{}_\mu \tag{2.13}$$

elde edilir. Buna göre kuvvetsel alan $\dot{T}^{a}{}_{\mu\nu}$, ayar dönüşümleri altında değişmez kaldığı görülür. Teleparallel kuramında bağlantı katsayıları Weitzenböck bağlantıları olarak adlandırılır ve

$$\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu \tag{2.14}$$

biçiminde ifade edilir. Dörtayak alanlarının kovaryant türevinin sıfır olma koşuluna Mutlak Paralellizim adı verilir ve aşağıdaki bağıntıyla betimlenir:

$$\overset{\bullet}{\nabla}_{\nu} h^{a}{}_{\mu} \equiv \partial_{\nu} h^{a}{}_{\mu} - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} h^{a}{}_{\rho} = 0 \tag{2.15}$$

Weitzenböck ve Levi Civita (Christoffel sembolleri) bağlantıları arasında

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

biçiminde bir ilişki vardır. Burada $\overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}$

$$\overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\overset{\bullet}{T}{}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + \overset{\bullet}{T}{}_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}) \tag{2.17}$$

olarak verilir ve kıvrılma (contortion) tensörü diye adlandırılır. Weitzenböck bağlantıları kullanılarak burulma tensörü (kuvvet alanı)

$$\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{2.18}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu tensörden dörtayak tabanlı burulma tensörüne

$$\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu} = h^{a}{}_{\rho} \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{2.19}$$

biçiminde verilen bağıntıyla geçilir. Bu durumda denklem (2.10)' daki sıra değişim bağıntısına geri dönülerek orada yeralan dört ayak tabanlı burulma tensörü yerine burulma tensörü yazılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$[h_{\mu}, h_{\nu}] = \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} h_{\rho} \tag{2.20}$$

Daha önce belirtildiği gibi bu kuramda Weitzenböck bağlantılarının eğriliği sıfırdır ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\dot{R}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \partial_{\mu} \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\theta\nu} - \partial_{\nu} \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\theta\mu} + \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu} \dot{\Gamma}^{\sigma}{}_{\theta\nu} - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\nu} \dot{\Gamma}^{\sigma}{}_{\theta\mu} = 0 \qquad (2.21)$$

Denklem (2.16)'da verilen ilişki göz önüne alındığında

$$\dot{R}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} + \dot{Q}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = 0 \qquad (2.22)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\mathring{R}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu}$ Riemann geometrisindeki eğriliği betimler ve ikinci terim

$$\dot{Q}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \dot{D}_{\mu} \dot{K}^{\rho}{}_{\theta\nu} - \dot{D}_{\nu} \dot{K}^{\rho}{}_{\theta\mu} + \dot{K}^{\rho}{}_{\theta\nu} \dot{K}^{\rho}{}_{\sigma\mu} - \dot{K}^{\sigma}{}_{\theta\mu} \dot{K}^{\rho}{}_{\sigma\nu} \qquad (2.23)$$

biçiminde yazılır. Bu terimde $\dot{D}_{\mu}$ Teleparallel kovaryant türevi betimler. Bu türev, bir uzay-zaman vektörüne uygulandığında

$$\dot{D}_{\mu} V^{\rho} = \partial_{\mu} V^{\rho} + (\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \dot{K}^{\rho}{}_{\lambda\mu}) V^{\lambda} \qquad (2.24)$$

sonucu elde edilir.

2.2. GENEL GÖRELİLİK İLE TELEPARALLELDE K-G DENKLEMİ [20,21]

Einstein-Cartan kuramına göre sadece spin dağılımları burulmayı üretebilir veya spin burulmayla etkileşebilir [22] buna karşın bir skaler alan, sadece eğriliği hissedebilir [23]. Teleparallel kuramına göre ise kütlesel çekim alanın başka alanlarla etkileşimi burulma ya da eğrilikle tanımlanabilir. Skaler alanın eğrilik ya da burulmayla nasıl etkileştiğini anlayabilmek için Minkowski alanında, ϕ olarak tanımlanan serbest bir skaler alanın Lagrenjiyeni,

$$L_\phi = \frac{1}{2}\left[\eta^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - \mu^2\phi^2\right] \tag{2.25}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\mu = mc/\hbar$ şeklindedir. Minimal etkileşim modeline göre bu serbest lagranjiyen, Riemann uzay-zamanında tanımlanan lagranjiyene aşağıda verilen dönüşümlerle geçilebilir:

$$\eta^{ab} \longrightarrow g^{\mu\nu} \tag{2.26}$$

$$\partial_a \longrightarrow \overset{\circ}{\nabla}_\mu \tag{2.27}$$

Burada $g^{\mu\nu}$, Riemann metrik tensörünü ve $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$ ise Levi-Civita kovaryant türevini betimler. Buna göre bir skaler alanın kütlesel çekim alanıyla etkileşimini tanımlayan lagranjiyen,

$$L_\phi = \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \mu^2\phi^2\right] \tag{2.28}$$

biçimine dönüşür.

$$\partial_{\mu}\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\rho\lambda}\partial_{\mu} g_{\rho\lambda} \equiv \sqrt{-g}\,\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\rho} \tag{2.29}$$

özdeşliği kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Box}\phi + \mu^{2}\phi = 0 \tag{2.30}$$

K-G denklemi elde edilir.Burada $\overset{\circ}{\Box}\phi$,

$$\overset{\circ}{\Box}\phi = \overset{\circ}{\nabla}_{\mu}\partial^{\mu}\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\rho\mu}\partial_{\rho}\phi\right) \tag{2.31}$$

olarak ifade edilen ϕ'nin Laplace-Beltrami türevidir ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\mu} = \partial_{\mu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\rho} \tag{2.32}$$

ile verilir. Denklem (2.31)'deki $\partial^{\mu}\phi$'nin Levi-Civita kovaryant sapması olarak tanımlanır. Yerel eylemsiz koordinat sisteminde Levi-Civita bağlantıları sıfırlanırken Laplace-Beltrami, serbest alan işlemcisi olan d'Alamberte işlemcisine dönüşür. Bu durum Genel Görelilikte güçlü eşdeğerlik ilkesi olarak bilinir.

Benzer şekilde minimal etkileşim yaklaşımıyla serbest lagranjiyeden yola çıkılarak Teleparallel uzay-zamanı cinsinden yazılan lagranjiyen elde edilir. Bunun için

$$\eta^{ab} \longrightarrow \eta^{ab} \tag{2.33}$$

$$\partial_{a} \longrightarrow \overset{\bullet}{D}_{a} = h_{a}{}^{\mu}\,\overset{\bullet}{D}_{\mu} \tag{2.34}$$

dönüşümleri yapılır. Burada

$$\overset{\bullet}{D}_{\mu} = \nabla_{\mu} - \overset{\bullet}{K}_{\mu} \tag{2.35}$$

dür. Buna göre Teleparallel kuramındaki lagranjiyen,

$$L_{\phi} = \frac{h}{2}\left[\eta^{ab}\dot{D}_{a}\phi\dot{D}_{b}\phi - \mu^{2}\phi^{2}\right] \tag{2.36}$$

şeklinde yazılır ve bu lagranjiyen kullanılarak skaler alan için

$$\overset{\bullet}{\Box}\phi + \mu^{2}\phi = 0 \tag{2.37}$$

denklemi elde edilir. Burada

$$\overset{\bullet}{\Box}\phi = \left(\partial_{\mu} + \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\rho\mu}\right)\partial^{\mu}\phi \equiv h^{-1}\partial_{\rho}\left(h\partial^{\rho}\phi\right) \tag{2.38}$$

olarak tanımlanan Laplace-Beltrami işlemcisinin teleparallel biçimidir. $\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\rho\mu}$ son iki indise göre simetrik olmaması nedeniyle, $\left(\partial_{\mu} + \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\rho\mu}\right)$ terimi $\partial^{\mu}\phi$'nin Cartan kovaryant sapması olarak tanımlanamaz. Ayrıca denklem (2.18) kullanılarak

$$\overset{\bullet}{\Box}\phi = \left(\overset{\bullet}{\nabla}_{\mu} + \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\rho}\right)\partial^{\mu}\phi \tag{2.39}$$

olduğu görülür. Bu bağıntıda parantez içindeki birinci işlemci

$$\dot{\nabla}_{\mu} = \partial_{\mu} + \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\rho} \qquad (2.40)$$

biçimindedir. Bu denklem (2.39) de yerine yazılırsa

$$\dot{\Box}\phi = \left(\partial_{\mu} + \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\rho} + \dot{T}^{\rho}{}_{\mu\rho}\right)\partial^{\mu}\phi \qquad (2.41)$$

elde edilir.

$$\dot{T}^{\rho}{}_{\mu\rho} = -\dot{K}^{\rho}{}_{\mu\rho} \qquad (2.42)$$

özdeşliği kullanılırsa (2.41) denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\dot{D}_{\mu}\,\partial^{\mu}\phi + \mu^{2}\phi = 0 \qquad (2.43)$$

Bu denklem Klein-Gordon denkleminin Teleparallel biçimi olarak adlandırılır. Bu denklemde $\dot{D}_{\mu}$ Teleparallel kovaryant türevi betimler ve

$$\dot{D}_{\mu}\,\partial^{\mu} = \left(\partial_{\mu} + \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\rho} - \dot{K}^{\rho}{}_{\mu\rho}\right)\partial^{\mu} \qquad (2.44)$$

şeklinde verilir. Ayrıca bu denklem

$$\dot{\nabla}_{\mu}\,\partial^{\mu}\phi + \mu^{2}\phi = -\dot{T}^{\rho}{}_{\mu\rho}\partial^{\mu}\phi \equiv \dot{K}^{\rho}{}_{\mu\rho}\partial^{\mu}\phi \qquad (2.45)$$

biçiminde de yazılabilir. Skaler alanın türevi olan $\partial^{\mu}\phi$ burulmayla etkileşir. Bu noktada burulmanın elektromanyetizmadaki kuvvet denklemine benzer bir rol üstlendiği görülür. Yerel eylemsiz koordinatlarda $\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\rho}$ bağlantısı ilk iki indise göre simetrik olduğundan sıfırlanır. Dolayısıyla Laplace-Beltrami işlemcisi, serbest alan işlemcisi olan d'Alamberte işlemcisine dönüşür. Bu durum güçlü eşdeğerlik ilkesinin Teleparallel biçimini oluşturur.

3. MATERYAL ve METOT

3.1. METRİK TENSÖRÜ VE BAĞLANTI KATSAYILARI [3]

Uzay-zamanın geometrisini betimleyen metrik tensörü ile bağlantı katsayılarının seçimine göre oluşturulan kuramlar için dört durumla karşılaşılır.

Durum-1: Metrik tensörünün kovaryant türevinin $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$ biçiminde olduğu ve bağlantı katsayılarının antisimetrik parçasının $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{[\alpha\beta]}^{\mu} = 0$ koşulunu sağladığı durumdur. Burada $\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\mu}$ yapısal (affine) bağlantısının antisimetrik parçasıdır. Einstein'ın Genel Görelilik Kuramı bu koşulları sağlar.

Durum-2: Metrik tensörünün kovatyant türevinin sıfırdan farklı ve yapısal bağlantısının antisimetrik kısmının sıfır olduğu durumdur. Bunun için, açık olarak, koşullar $g_{\mu\nu;\alpha} \neq 0$ *ve* $\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\mu} = 0$ biçiminde verilir. Bu koşulları sağlayan kurama Weyl Kuramı'nı adı verilir.

Durum-3: Einstein-Cartan Kuramı olarak bilinen bu durum için $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$ *ve* $\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\mu} \neq 0$ biçimindeki, metrik tensörünün kovaryant türevinin sıfır ve yapısal bağlantı katsayılarının antisimetrik kısmının sıfırdan farklı olduğu koşullar geçerlidir.

Durum-4: Metrik tensörünün kovaryant türevinin sıfırdan farklı ve yapısal bağlantı katsayılarının da sıfırdan farklı olduğu genel durumdur. Bunun koşulları da matematiksel olarak $g_{\mu\nu;\alpha} \neq 0$ *ve* $\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\mu} \neq 0$ biçiminde verilmektedir. Bu, Yapısal (Affine) Kuramı ya da Genel Kuram olarak adlandırılır.

3.2. YAPISAL BAĞLANTILARIN KURAMLARA GÖRE BULUNMASI [3]

Metrik tensörünün kovaryant türevinin açılımı

$$g_{\mu\nu;\alpha} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}{}^{\beta} g_{\mu\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}{}^{\beta} g_{\beta\nu} = 0 \tag{3.1}$$

biçimindedir. Bu açılım metrik tensörünün indislerine göre sırayla değişimi yapıldığında aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$g_{\alpha\mu;\nu} = \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\nu\alpha}{}^{\beta} g_{\beta\mu} = 0 \tag{3.2}$$

$$g_{\nu\alpha;\mu} = \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\beta} g_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\beta} g_{\beta\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

Denklem (3.1)'i $\frac{1}{2}$, (3.2) ve (3.3)'i - $\frac{1}{2}$ ile çarpıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(g_{\mu\nu;\alpha} - g_{\alpha\mu;\nu} - g_{\nu\alpha;\mu}) &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \\ &+ \frac{1}{2}(-\Gamma_{\alpha\nu}{}^{\beta} g_{\mu\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}{}^{\beta} g_{\beta\nu} + \Gamma_{\nu\mu}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} \\ &+ \Gamma_{\nu\alpha}{}^{\beta} g_{\beta\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\beta} g_{\nu\beta} + \Gamma_{\mu\nu}{}^{\beta} g_{\beta\alpha}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Denklem (3.4) düzenlenirse

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(g_{\mu\nu;\alpha} - g_{\alpha\mu;\nu} - g_{\nu\alpha;\mu}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) + \\ &\frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\alpha}{}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}{}^{\beta}) g_{\mu\beta} + \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\beta} + \Gamma_{\nu\mu}{}^{\beta}) g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\alpha}{}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}{}^{\beta}) g_{\beta\nu} \end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur. Bağlantı katsayılarının simerik ve antisimetrik özellikleri kullanılarak,

$$\frac{1}{2}(g_{\mu\nu;\alpha} - g_{\alpha\mu;\nu} - g_{\nu\alpha;\mu}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) +$$

$$\Gamma_{(\mu\nu)}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} + \Gamma_{[\nu\alpha]}{}^{\beta} g_{\mu\beta} + \Gamma_{[\mu\alpha]}{}^{\beta} g_{\beta\nu} \qquad (3.6)$$

denklemi yazılır. Burada, $\Gamma_{(\mu\nu)}{}^{\beta}$, yapısal bağlantının ($\mu\nu$)'ye göre simetrik parçası ve $\Gamma_{[\nu\alpha]}{}^{\beta}$, yapısal bağlantının ilk iki indise göre anti simetrik parçasını göstermektedir. Denklem (3.6) daha önce ifade edilen kuramlara göre incelenecek olursa aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

(i) Genel Görelilik Kuramı

Denklem (3.6) $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$, $\overset{\circ}{\Gamma}_{[\mu\nu]}{}^{\beta} = 0$ koşullarına göre değerlendirildiğinde

$$\tfrac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) + \overset{\circ}{\Gamma}_{(\mu\nu)}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} = 0 \qquad (3.7)$$

bulunur. Denklem (3.7) yeniden düzenlenirse,

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{(\mu\nu)}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(-\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \qquad (3.8)$$

ve denklem (3.8)'in her iki tarafı $g^{\alpha\beta}$ ile çarpılırsa

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{(\mu\nu)}{}^{\beta} = g^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\Gamma}_{(\mu\nu)\alpha} = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(-\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \qquad (3.9)$$

elde edilir. Buna Christoffel Sembolleri adı verilir ve Genel Görelilik Kuramının yapısal bağlantıları olarak bilinirler.

(ii) Weyl Kuramı

Denklem (3.6) $g_{\mu\nu;\alpha} \neq 0 \quad ve \quad \Gamma_{[\alpha\beta]}{}^{\mu} = 0$ koşulları altında ele alındığında

$$\tfrac{1}{2}(g_{\mu\nu;\alpha} - g_{\alpha\mu;\nu} - g_{\nu\alpha;\mu}) = \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) + \Gamma_{(\mu\nu)}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada metriksizlik koşulu olarak bilinen

$$g_{\mu\nu;\alpha} = N_{\mu\nu\alpha} \tag{3.11}$$

ifadesi denklem (3.10)'de yerine yazılırsa,

$$\tfrac{1}{2}(N_{\mu\nu\alpha} - N_{\alpha\mu\nu} - N_{\nu;\mu}) = \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) + \Gamma_{(\mu\nu)\alpha} \tag{3.12}$$

bulunur. Denklem (3.12)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\Gamma_{(\mu\nu)\alpha} = \tfrac{1}{2}(N_{\mu\nu\alpha} - N_{\alpha\mu\nu} - N_{\alpha\nu;\mu}) - \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \tag{3.13}$$

Bu denklemin her iki tarafı da $g^{\alpha\beta}$ ile çarpılırsa,

$$g^{\alpha\beta}\Gamma_{(\mu\nu)\alpha} = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(N_{\mu\nu\alpha} - N_{\alpha\mu\nu} - N_{\alpha\nu;\mu}) - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \tag{3.14}$$

bulunur ve $g^{\alpha\beta}\Gamma_{(\mu\nu)\alpha} = \Gamma_{(\mu\nu)}{}^{\beta}$ eşitliği denklem (3.14)'de kullanılırsa,

$$\Gamma_{(\mu\nu)}{}^{\beta} = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(N_{\mu\nu\alpha} - N_{\alpha\mu\nu} - N_{\alpha\nu;\mu}) - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \tag{3.15}$$

sonucu elde edilir. Burada

$$V_{\mu\nu}{}^{\beta} = \tfrac{1}{2}(N_{\mu\nu}{}^{\beta} - N^{\beta}{}_{\mu\nu} - N_{\nu}{}^{\beta}{}_{\mu}) \tag{3.16}$$

tanımı yapılırsa denklem (3.15)

$$\Gamma_{(\mu\nu)}^{\ \ \beta} = V_{\mu\nu}{}^{\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\alpha}) \tag{3.17}$$

biçimini alır. Buna Weyl Kuramındaki yapısal bağlantılar adı verilir.

(iii) Einstein-Cartan Kuramı

Denklem (3.6) $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$ $\quad ve$ $\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\ \ \mu} \neq 0$ koşulları için incelendiğinde

$$\tfrac{1}{2}(\partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\alpha}) + \Gamma_{(\mu\nu)}^{\ \ \beta} g_{\alpha\beta} + \Gamma_{[\nu\alpha]}^{\ \ \beta} g_{\mu\beta} + \Gamma_{[\mu\alpha]}^{\ \ \beta} g_{\beta\nu} = 0 \tag{3.18}$$

elde edilir. Burada

$$\Gamma_{[\mu\alpha]}^{\ \ \beta} = Q_{[\mu\alpha]}^{\ \ \beta} \tag{3.19}$$

eşitliği tanımlanır ve $Q_{[\mu\alpha]}^{\ \ \beta}$ ‘ya burulma (torsion) denir. $\Gamma_{[\nu\alpha]}^{\ \ \beta} g_{\mu\beta} + \Gamma_{[\mu\alpha]}^{\ \ \beta} g_{\beta\nu}$ terimleri eşitliğin sağ tarafına geçirilir ve bağlantıların antisimetrik parçasının

$$\Gamma_{[\nu\alpha]}^{\ \ \beta} = -\Gamma_{[\alpha\nu]}^{\ \ \beta} \tag{3.20}$$

özelliğini kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir

$$\Gamma_{[\alpha\nu]}^{\ \ \beta} g_{\mu\beta} - \Gamma_{[\mu\alpha]}^{\ \ \beta} g_{\beta\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\alpha}) + \Gamma_{(\mu\nu)}^{\ \ \beta} g_{\alpha\beta} \tag{3.21}$$

Bu denklem Einstein-Cartan kuramının yapısal bağlantıları olarak bilinir.

(iv) Yapısal (Affine) Kuram

Denklem (3.6) $g_{\mu\nu;\alpha} \neq 0$ *ve* $\Gamma_{[\alpha\beta]}{}^{\mu} \neq 0$ koşullarına göre değerlendirildiğinde

$$\tfrac{1}{2}(g_{\mu\nu;\alpha} - g_{\alpha\mu;\nu} - g_{\nu\alpha;\mu}) = \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha})$$
$$+ \Gamma_{(\mu\nu)}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} + \Gamma_{[\nu\alpha]}{}^{\beta} g_{\mu\beta} + \Gamma_{[\mu\alpha]}{}^{\beta} g_{\beta\nu} \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada

$$K_{\mu\nu}{}^{\beta} = -Q_{\mu\nu}{}^{\beta} - Q^{\beta}{}_{\mu\nu} - Q_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu} \tag{3.23}$$

eşitliği tanımlanır ve bu eşitlik denklem (3.19)'da kullanılarak

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta \\ \mu\nu \end{Bmatrix} - K_{\mu\nu}{}^{\beta} - V_{\mu\nu}{}^{\beta} \tag{3.24}$$

elde edilir. Denklem (3.24) Genel Kuramın yapısal bağlantılarını vermektedir. Bu bağıntıdaki birinci terim Christoffel sembollerini, ikinci terim kıvrılma (contortion) sembollerini ve üçüncü terim ise metriksizlik koşulundan elde edilen tensörü göstermektedir. Eğer burulma yoksa denklem (3.24), genel yapısal bağlantı katsayılarının metriksizlikten gelen katkıyla, Christoffel sembollerinden gelen katkıyı içerir. Eğer metrik tensörünün kovaryant türevi sıfır ve burulma yoksa genel yapısal bağlantı katsayıları Christoffel sembollerine ($\begin{Bmatrix} \beta \\ \mu\nu \end{Bmatrix}$) indirgenir.

3.3. GENEL GÖRELİLİKTE KÖŞEGENEL METRİK İÇİN DİRAC DENKLEMİ[24]

Genel Görelilik kuramında spin- ½ parcaçıklarının dinamiğini veren Dirac denklemi

$$i\gamma^{\mu}\overset{\circ}{D}_{\mu}\Psi - mc\Psi = 0 \tag{3.25}$$

biçiminde verilir. Burada $\overset{\circ}{D}_{\mu}$

$$\overset{\circ}{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu} \tag{3.26}$$

şeklindedir ve Fock-Ivanenko kovaryant türevi olarak bilinir [25]. Spin bağlantıları olarak tanımlanan $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu}$ Christoffel sembollerine,

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{ab}{}_{\mu} S_{ab} \tag{3.27}$$

şeklinde bağlıdır. Bu bağıntıdaki S_{ab}, Dirac matrisleri cinsinden

$$S_{ab} = \frac{i}{4}\left[\gamma_{a},\gamma_{b}\right] \tag{3.28}$$

biçiminde verilir.

$$ds^{2} = -A^{2}(t,x)dt^{2} + B^{2}(t,x)dx^{2} + C^{2}(t,x)dy^{2} + D^{2}(t,x)dz^{2} \tag{3.29}$$

şeklinde verilen köşegenel bir metrik için denklem (3.9) kullanılarak Christoffel sembolleri aşağıdaki biçinde elde edilir:

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}=\frac{\dot{A}}{A},\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{01}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{10}=\frac{A'}{A},\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{11}=\frac{B\dot{B}}{A^{2}},$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{22}=\frac{C\dot{C}}{A^{2}},\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{33}=\frac{D\dot{D}}{A^{2}},\ \ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{01}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{10}=\frac{\dot{B}}{B},$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{11}=\frac{B'}{B},\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{00}=\frac{AA'}{B^{2}},\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{22}=-\frac{CC'}{B^{2}},\tag{3.30}$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}{}_{02}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}{}_{20}=\frac{\dot{C}}{C},\qquad \overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}{}_{12}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}{}_{21}=\frac{C'}{C},$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{33}=-\frac{DD'}{B^{2}},\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{03}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{30}=\frac{\dot{D}}{D},\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{13}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{31}=\frac{D'}{D}$$

denklem (3.27) aracılığıyla spin bağlantıları gama matrisleri cinsinden

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{0}=\frac{1}{2}\frac{A'}{B}\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{1},\ \overset{\circ}{\Gamma}_{1}=\frac{1}{2}\frac{\dot{B}}{A}\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{1},$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{2}=\frac{1}{2}\frac{\dot{C}}{A}\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{2}+\frac{1}{2}\frac{C'}{B}\tilde{\gamma}^{1}\tilde{\gamma}^{2},\tag{3.31}$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{3}=\frac{1}{2}\frac{\dot{D}}{A}\tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{3}+\frac{1}{2}\frac{D'}{B}\tilde{\gamma}^{1}\tilde{\gamma}^{3}$$

olarak bulunur. Denklem (3.30) ile denklem (3.31)’te bulunan sonuçlar denklem (3.25)’da verilen Dirac denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} i\Big\{ &-\frac{1}{A}\tilde{\gamma}_{0}\partial_{0}+\frac{1}{B}\tilde{\gamma}_{1}\partial_{1}+\frac{1}{C}\tilde{\gamma}_{2}\partial_{2}+\frac{1}{D}\tilde{\gamma}_{3}\partial_{3} \\ &-\frac{1}{2AB}A'\tilde{\gamma}_{1}-\frac{1}{2AB}\dot{B}\tilde{\gamma}_{0}-\frac{1}{2AC}\dot{C}\tilde{\gamma} \\ &+\frac{1}{2CB}C'\tilde{\gamma}_{1}-\frac{1}{2AD}\dot{D}\tilde{\gamma}_{0}-\frac{1}{2DB}D'\tilde{\gamma}_{1}+imc\Big\}\Psi=0 \end{aligned}\tag{3.32}$$

denklemi elde edilir.

3.4. TELEPARALEL KURAMINDA KÖŞEGENEL METRİK İÇİN DİRAC DENKLEMİ [24]

Teleparallel kuramında Dirac denklemi

$$i\gamma^{\mu} \overset{\bullet}{D}_{\mu} \Psi - m\Psi = 0 \tag{3.33}$$

biçiminde verilir. Burada $\overset{\bullet}{D}_{\mu}$,

$$\overset{\bullet}{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{i}{2} \overset{\bullet}{K}{}^{ab}{}_{\mu} S_{ab} \tag{3.34}$$

olarak verilen Fock-Ivanenko türevinin Teleparallel eşdeğeridir. Denklem (2.1.14) kullanılarak Weitzenböck bağlantıları,

$$\begin{aligned} &\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{0}{}_{00} = \frac{\dot{A}}{A}, \ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{0}{}_{01} = \frac{A'}{A}, \ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{1}{}_{10} = \frac{\dot{B}}{B}, \ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{1}{}_{11} = \frac{B'}{B} \\ &\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{2}{}_{20} = \frac{\dot{C}}{C}, \ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{2}{}_{21} = \frac{C'}{C}, \ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{3}{}_{30} = \frac{\dot{D}}{D}, \ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{3}{}_{31} = \frac{D'}{D} \end{aligned} \tag{3.35}$$

şeklinde bulunur. Burulma (Torsion) tensörünün bileşenleri denklem (2.18)' den

$$\begin{aligned} &\overset{\bullet}{T}{}^{0}{}_{10} = \frac{A'}{A}, \ \overset{\bullet}{T}{}^{1}{}_{01} = \frac{\dot{B}}{B}, \ \overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{02} = \frac{\dot{C}}{C}, \\ &\overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{21} = \frac{C'}{C}, \ \overset{\bullet}{T}{}^{3}{}_{03} = \frac{\dot{D}}{D}, \ \overset{\bullet}{T}{}^{3}{}_{13} = \frac{D'}{D} \end{aligned} \tag{3.36}$$

olarak elde edilir. Bu bağıntılar Denklem (2.17)' de yerine konularak, kıvrılma tensörünün bileşenleri aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\overset{\bullet}{K}{}^{0}{}_{10}=-\frac{\dot{A}}{A},\ \overset{\bullet}{K}{}^{0}{}_{11}=-\frac{B\dot{B}}{A^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{0}{}_{22}=-\frac{C\dot{C}}{A^2},$$
$$\overset{\bullet}{K}{}^{0}{}_{33}=-\frac{D\dot{D}}{A^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{00}=-\frac{AA'}{B^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{01}=-\frac{\dot{B}}{B^2},$$
$$\overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{22}=\frac{CC'}{B^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{33}=\frac{DD'}{B^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{2}{}_{02}=-\frac{\dot{C}}{C},\qquad (3.37)$$
$$\overset{\bullet}{K}{}^{2}{}_{12}=-\frac{C'}{C},\ \overset{\bullet}{K}{}^{3}{}_{03}=-\frac{\dot{D}}{D},\ \overset{\bullet}{K}{}^{3}{}_{13}=-\frac{D'}{D}$$

Bu sonuçlar denklem (3.33)'de verilen Teleparallel kuramındaki Dirac denkleminde yerine yazılırsa, Teleparalel kuramındaki Dirac denkleminin köşegenel metrik için ifadesi aşağıdaki biçimde olur:

$$i\left\{-\frac{1}{A}\tilde{\gamma}_0\partial_0+\frac{1}{B}\tilde{\gamma}_1\partial_1+\frac{1}{C}\tilde{\gamma}_2\partial_2+\frac{1}{D}\tilde{\gamma}_3\partial_3\right.$$
$$-\frac{1}{2AB}A'\tilde{\gamma}_1-\frac{1}{2AB}\dot{B}\tilde{\gamma}_0-\frac{1}{2AC}\dot{C}\tilde{\gamma}$$
$$\left.+\frac{1}{2CB}C'\tilde{\gamma}_1-\frac{1}{2AD}\dot{D}\tilde{\gamma}_0-\frac{1}{2DB}D'\tilde{\gamma}_1+imc\right\}\Psi=0 \qquad (3.38)$$

Denklem (3.38) ve denklem (3.32) karşılaştırıldığında aynı oldukları görülür. Bu sonuç bize uzay-zamanın eğriliği özelliğine dayalı Genel Görelilik kuramının kütlesel çekim olgusundaki betiminin uzay-zamanın burulma özelliğine dayalı Teleparalel kuramının kütle çekim olgusundaki betimiyle aynı olduğunu göstermektedir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. ÇİZGİ ELEMANI ve METRİK TENSÖRÜ

Her bir evren modelinin geometrik yapısıyla ilgili özellikleri içeren bir kavram olan çizgi elemanı,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $g_{\mu\nu}$, uzay-zamanın geometrini betimleyen metrik tensörüdür. Bu çalışmada

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{00}(x^0,x^1)(dx^0)^2 + g_{11}(x^0,x^1)(dx^1)^2 + g_{22}(x^0,x^1)(dx^2)^2 \\ &\quad + g_{33}(x^0,x^1)(dx^3)^2 - 2g_{02}(x^0,x^1)dx^0dx^2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

biçiminde verilen çizgi elemanı göz önüne alınmaktadır. Bu çizgi elemanı, bazı dönen ve/veya genişleyen evren modellerini kapsayan yapıdadır. Denklem (4.2) ile verilen bağıntıda x^0 zamana (t), x^1 ise uzaya (x) bağlılığı temsil etmektedir. Bu bağıntı ayrıca aşağıdaki biçimde de yazılabilir:

$$ds^2 = -\mathrm{A}^2(x,t)dt^2 + B^2(x,t)dx^2 + C^2(x,t)dy^2 + D^2(x,t)dz^2 - 2E(x,t)dtdy \tag{4.3}$$

Denklem (4.3) ile verilen genel çizgi elemanı için metrik tensörü

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\mathrm{A}^2 & 0 & -E & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & 0 \\ -E & 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^2 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

biçiminde olur. Bu metrik tensörünün tersi için

$$g^{\mu\nu} = \frac{Cofacg_{\mu\nu}}{\det g_{\mu\nu}} \tag{4.5}$$

bağıntısı kullanılarak

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{C^2}{F^2} & 0 & -\frac{E}{F^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} & 0 & 0 \\ -\frac{E}{F^2} & 0 & \frac{A^2}{F^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada $F^2 = \mathrm{A}^2C^2 + E^2$ şeklinde tanımlanır.

4.2. DÖRTAYAKLAR (TETRATLAR)

Eğri uzay-zaman geometrisini betimleyen ifadeler ile düz uzay-zaman geometrisindeki karşılıkları arasında ilişki kurulmasını sağlayan dörtayaklar, metrik tensörünün bileşenleri cinsinden

$$g_{\mu\nu} = h^{(i)}{}_{\mu}\, h^{(j)}{}_{\nu}\, \eta_{ij} \tag{4.7}$$

ile verilir. Burada Minkowski metriği için

$$\eta_{(i)(j)} = (-1,+1,+1,+1) \tag{4.8}$$

seçimi yapılır. Denklem (4.2)'de verilen genel çizgi elemanın öğeleri, dörtayakların bileşenleri cinsinden aşağıdaki biçimde ifade edilirler:

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -(h^{(0)}{}_0)^2 + (h^{(2)}{}_0)^2 , \\
g_{11} &= (h^{(1)}{}_1)^2 \\
g_{02} &= -h^{(0)}{}_0 h^{(0)}{}_2 + h^{(2)}{}_0 h^{(2)}{}_2 \\
g_{22} &= -(h^{(0)}{}_2)^2 + (h^{(2)}{}_2)^2 , \\
g_{33} &= (h^{(3)}{}_3)^2 ,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Çizgi elemanın öğelerinin bilinmesi durumunda bu denklem dizgesinin çözümü aranır. Bu dizgede dörtayakların bileşenleri olan ($h^{(0)}{}_0$ $h^{(2)}{}_0$ $,h^{(1)}{}_1$ $,h^{(2)}{}_2$ $h^{(0)}{}_2$ $,h^{(3)}{}_3$) niceliklerinin metrik tensörünün öğeleri cinsinden belirlenebilmeleri için denklem sayısının yeterli olması gerekir. Oysa denklem (4.9) verilen denklem dizgesinde bilinenlerin sayısı metrik tensörünün öğelerinin sayısına eşit ve beş adet iken bilinmeyenlerin sayısı ise dörtayakların öğeleri olan yukarıda verilen kümenin altı elemanıdır. Bu durumda dizgenin çözümünün olabilmesi için dörtayakların bileşenlerinde özel seçimler yapılabilir. Aşağıda bu seçimlerden iki tanesi gözden geçirilmektedir.

I. Seçim $h^{(0)}{}_2 = 0$ durumu: bu seçim ile dörtayakların bileşenleri, denklem (4.9) ve metrik tensörü için de denklem (4.4) ile denklem (4.6) kullanılarak,

$$
h^{(i)}{}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{F}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ -\frac{E}{C} & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}
\tag{4.10}
$$

şeklinde bulunur. Dörtayakların tersi ise,

$$
h_{(i)}{}^{\mu} = \frac{Cofac\left|h^{(i)}{}_\mu\right|}{\det\left|h^{(i)}{}_\mu\right|}
\tag{4.11}
$$

ifadesi aracılığıyla

$$h_{(i)}{}^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{C}{F} & 0 & \frac{E}{CF} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir.

II. Seçim $h^{(2)}{}_0 = 0$ durumu: birinci seçimde yapılanlara benzer işlemler yapılırsa dörtayakların bileşenleri

$$h^{(i)}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 & \frac{E}{\mathrm{A}} & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{\mathrm{A}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

biçimde bulunur ve dörtayaların tersi de

$$h^{(i)}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{A}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} & 0 & 0 \\ -\frac{E}{\mathrm{A}F} & 0 & \frac{\mathrm{A}}{F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

şeklinde elde edilir.

4.3. CHRİSTOFFEL SEMBOLLERİ

Eğri uzay-zaman geometrisi ile ilgili bilgileri içeren ve Christoffel sembolleri olarak adlandırılan katsayılar, denklem (3.9) aracılığıyla, denklem (4.3) de verilen metrik için, aşağıdaki biçimde bulunurlar:

$\alpha = 0$ için ;

$$
\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{00} = \frac{\mathrm{A}C^{2}\dot{\mathrm{A}} + E\dot{E}}{F^{2}} ,\\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{01} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{10} = \frac{\mathrm{A}C^{2}\mathrm{A}'}{F^{2}} + \frac{1}{2}\frac{EE'}{F^{2}} ,\\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{02} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{20} = -\frac{EC\dot{C}}{F^{2}} ,\\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{11} = \frac{BC^{2}\dot{B}}{F^{2}} \qquad\qquad (4.15)\\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{12} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{21} = -\frac{ECC'}{F^{2}} + \frac{1}{2}\frac{C^{2}E'}{F^{2}} ,\\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{22} = \frac{C^{3}\dot{C}}{F^{2}}\\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{33} = \frac{C^{2}D\dot{D}}{F^{2}}\\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{03} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{30} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{13} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{31} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{23} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{32} = 0
\end{aligned}
$$

$\alpha = 1$ için ;

$$
\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{00} = \frac{\mathrm{A}\mathrm{A}'}{B^{2}}\\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{01} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{10} = \frac{\dot{B}}{B}
\end{aligned}
$$

$$\mathring{\Gamma}^{1}{}_{02} = \mathring{\Gamma}^{1}{}_{20} = \frac{1}{2}\frac{E'}{B^2} \tag{4.16}$$

$$\mathring{\Gamma}^{1}{}_{11} = \frac{B'}{B}$$

$$\mathring{\Gamma}^{1}{}_{22} = -\frac{CC'}{B^2}$$

$$\mathring{\Gamma}^{1}{}_{33} = -\frac{DD'}{B^2}$$

$$\mathring{\Gamma}^{1}{}_{03} = \mathring{\Gamma}^{1}{}_{30} = \mathring{\Gamma}^{1}{}_{12} = \mathring{\Gamma}^{1}{}_{21} = \mathring{\Gamma}^{1}{}_{13} = \mathring{\Gamma}^{1}{}_{31} = \mathring{\Gamma}^{1}{}_{23} = \mathring{\Gamma}^{1}{}_{32} = 0$$

$\alpha = 2$ için ;

$$\mathring{\Gamma}^{2}{}_{00} = \frac{\mathrm{A}E\dot{\mathrm{A}} - \mathrm{A}^2\dot{E}}{F^2}$$

$$\mathring{\Gamma}^{2}{}_{01} = \mathring{\Gamma}^{2}{}_{10} = \frac{E\mathrm{A}\mathrm{A}'}{F^2} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{A}^2E'}{F^2}$$

$$\mathring{\Gamma}^{2}{}_{02} = \mathring{\Gamma}^{2}{}_{20} = \frac{\mathrm{A}^2C\dot{C}}{F^2}$$

$$\mathring{\Gamma}^{2}{}_{11} = \frac{EB\dot{B}}{F^2} \tag{4.17}$$

$$\mathring{\Gamma}^{2}{}_{12} = \mathring{\Gamma}^{2}{}_{21} = \frac{\mathrm{A}^2CC'}{F^2} + \frac{1}{2}\frac{EE'}{F^2}$$

$$\mathring{\Gamma}^{2}{}_{22} = \frac{CE\dot{C}}{F^2}$$

$$\mathring{\Gamma}^{2}{}_{33} = \frac{DE\dot{D}}{F^2}$$

$$\mathring{\Gamma}^{2}{}_{03} = \mathring{\Gamma}^{2}{}_{30} = \mathring{\Gamma}^{2}{}_{13} = \mathring{\Gamma}^{2}{}_{31} = \mathring{\Gamma}^{2}{}_{23} = \mathring{\Gamma}^{2}{}_{32} = 0$$

$\alpha = 3$ için ;

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{03} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{30} = \frac{\dot{D}}{D}$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{13} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{31} = \frac{D'}{D} \tag{4.18}$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{00} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{01} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{10} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{11} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{02} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{20}$$

$$= \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{22} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{12} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{21} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{23} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{32} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{33} = 0$$

Yukarıda elde edilen Chirstoffel sembolleri matris biçimde sırasıyla şöyle yazılır:

$\alpha = 0$ için

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{A}C^2\dot{\mathrm{A}} + E\dot{E}}{F^2} & \frac{\mathrm{A}C^2\mathrm{A}'}{F^2} + \frac{1}{2}\frac{EE'}{F^2} & -\frac{EC\dot{C}}{F^2} & 0 \\ \frac{\mathrm{A}C^2\mathrm{A}'}{F^2} + \frac{1}{2}\frac{EE'}{F^2} & \frac{BC^2\dot{B}}{F^2} & -\frac{ECC'}{F^2} + \frac{1}{2}\frac{C^2E'}{F^2} & 0 \\ -\frac{EC\dot{C}}{F^2} & -\frac{ECC'}{F^2} + \frac{1}{2}\frac{C^2E'}{F^2} & \frac{C^3\dot{C}}{F^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C^2D\dot{D}}{F^2} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

$\alpha = 1$ için

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{A}\mathrm{A}'}{B^2} & \frac{\dot{B}}{B} & \frac{1}{2}\frac{E'}{B^2} & 0 \\ \frac{\dot{B}}{B} & \frac{B'}{B} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{E'}{B^2} & 0 & -\frac{CC'}{B^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{DD'}{B^2} \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

$\alpha = 2$ için

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}{}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \dfrac{AE\dot{A}-A^{2}\dot{E}}{F^{2}} & \dfrac{EAA'}{F^{2}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{A^{2}E'}{F^{2}} & \dfrac{A^{2}C\dot{C}}{F^{2}} & 0 \\ \dfrac{EAA'}{F^{2}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{A^{2}E'}{F^{2}} & \dfrac{EB\dot{B}}{F^{2}} & \dfrac{A^{2}CC'}{F^{2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{EE'}{F^{2}} & 0 \\ \dfrac{A^{2}C\dot{C}}{F^{2}} & \dfrac{A^{2}CC'}{F^{2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{EE'}{F^{2}} & \dfrac{CE\dot{C}}{F^{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{DE\dot{D}}{F^{2}} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

$\alpha = 3$ için

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{\dot{D}}{D} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{D'}{D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\dot{D}}{D} & \dfrac{D'}{D} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

4.4. WEİTZENBÖCK BAĞLANTILARI

Teleparallel kuramında Weitzenböck bağlantıları olarak adlandırılan ve uzay-zamanının yapısıyla ilişkili olan bağlantılar, denklem (2.14) ile denklem (4.12) ve (4.14) ile verilen dörtayaklar dikkate alınarak

$$\begin{gathered} \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}=\frac{\dot{F}}{F}-\frac{\dot{C}}{C},\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{0}{}_{01}=\frac{F'}{F}-\frac{C'}{C},\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{1}{}_{10}=\frac{\dot{B}}{B}, \\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{1}{}_{11}=\frac{B'}{B},\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{2}{}_{00}=\frac{E}{C^{2}}\left(\frac{\dot{F}}{F}-\frac{\dot{E}}{E}\right),\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{2}{}_{01}=\frac{E}{C^{2}}\left(\frac{F'}{F}-\frac{E'}{E}\right), \\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{2}{}_{20}=\frac{\dot{C}}{C},\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{2}{}_{21}=\frac{C'}{C},\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{3}{}_{30}=\frac{\dot{D}}{D},\ \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{3}{}_{31}=\frac{D'}{D} \end{gathered} \tag{4.23}$$

4.5. BURULMA TENSÖRÜ

Burulma tensörünün Weitzenböck sembolleri ile olan ilişkisi denklem (2.18) ile ifade edilmektedir. Elde edilen Weitzenböck sembolleri bu denklemde yerine yazılırsa burulma tensörünün bileşenleri bulunur. Bu bileşenler alt iki indise göre anti simetrik olduğundan

$$\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = -\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} \tag{4.24}$$

olarak yazılır. Burulma tensörünün bileşenleri,

$$\begin{gathered}
\overset{\bullet}{T}{}^{0}{}_{01} = \frac{C'}{C} - \frac{F'}{F}\ , \overset{\bullet}{T}{}^{0}{}_{10} = \frac{F'}{F} - \frac{C'}{C}, \quad \overset{\bullet}{T}{}^{1}{}_{10} = -\frac{\dot{B}}{B}\ ,\ \overset{\bullet}{T}{}^{1}{}_{01} = \frac{\dot{B}}{B} \\
\overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{01} = \frac{E}{C^2}\left(\frac{E'}{E} - \frac{F'}{F}\right), \overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{10} = \frac{E}{C^2}\left(\frac{F'}{F} - \frac{E'}{E}\right), \\
\overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{20} = -\frac{\dot{C}}{C}, \quad \overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{02} = \frac{\dot{C}}{C}\ , \overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{21} = -\frac{C'}{C}, \ \overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{12} = \frac{C'}{C} \\
\overset{\bullet}{T}{}^{3}{}_{30} = -\frac{\dot{D}}{D}\ , \ \overset{\bullet}{T}{}^{3}{}_{03} = \frac{\dot{D}}{D}, \overset{\bullet}{T}{}^{3}{}_{31} = -\frac{D'}{D}\ , \overset{\bullet}{T}{}^{3}{}_{13} = \frac{D'}{D}
\end{gathered} \tag{4.25}$$

şeklinde bulunur.

4.6. KIVRILMA TENSÖRÜ

Denklem (2.17) kıvrılma tensörlerinin burulma tensörleriyle olan ilişkisini betimler. Ayrıca bu katsayıların Weitzenböck ve Christoffel sembolleri ile olan ilişkisi

$$\overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{4.26}$$

şeklinde ifade edilir. Kıvrılma tensörörünün

$$\overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu}g^{\sigma\rho}\mathrm{T}^{\alpha}{}_{\sigma\nu}+g_{\beta\nu}g^{\sigma\rho}\mathrm{T}^{\beta}{}_{\sigma\mu}-\mathrm{T}^{\rho}{}_{\mu\nu}\right) \tag{4.27}$$

ifadesi kullanılarak kıvrılma tensörünün bileşenleri

$$\overset{\bullet}{K}{}^{0}{}_{00}=\frac{\mathrm{A}^2C\dot{C}}{F^2}-\frac{\dot{C}}{C},\ \overset{\bullet}{K}{}^{0}{}_{10}=-\frac{\mathrm{A}C^2\mathrm{A}'}{F^2}-\frac{1}{2}\frac{EE'}{F^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{0}{}_{20}=\frac{CE\dot{C}}{F^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{01}=-\frac{\dot{B}}{B}$$
$$\overset{\bullet}{K}{}^{2}{}_{02}=-\frac{\mathrm{A}^2C\dot{C}}{F^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{2}{}_{12}=-\frac{1}{2}\frac{EE'}{F^2}-\frac{\mathrm{A}^2CC'}{F^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{2}{}_{22}=-\frac{CE\dot{C}}{F^2},\ \overset{\bullet}{K}{}^{3}{}_{03}=-\frac{\dot{D}}{D}$$
$$\overset{\bullet}{K}{}^{3}{}_{13}=-\frac{D'}{D},\overset{\bullet}{K}{}^{0}{}_{30}=\overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{11}=\overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{21}=\overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{31}=\overset{\bullet}{K}{}^{2}{}_{32}=\overset{\bullet}{K}{}^{3}{}_{23}=\overset{\bullet}{K}{}^{3}{}_{33}=0 \tag{4.28}$$

olarak bulunur.

4.7. GENEL GÖRELİLİKTE GENEL METRİK İÇİN KLEİN-GORDON DENKLEMİ

Klein-Gordon denkleminin elektromanyetik etkileşimlerin gözardı edildiği eğri uzay-zamandaki genelleştirilmiş kovaryant biçimi

$$g^{\alpha\beta}\left(\nabla_a\nabla_\beta\right)\Phi-\left(m^2+\xi R\right)\Phi=0 \tag{4.29}$$

ile verilir. burada ∇_α, kovaryant türevi, R skaler eğriliği ve ξ de boyutsuz bir sabiti ifade etmektedir. Bu denklem ayrıca

$$\left\{\partial_\mu\partial^\mu+\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\rho}\partial^\mu+m^2+\xi R\right\}\Phi=0 \tag{4.30}$$

biçiminde de ifade edilir. ξ sıfır alınır ve denklem (4.30) açık olarak şu şekilde yazılır:

$$\Big\{\partial_0\left(g^{00}\partial_0\right)+\partial_1\left(g^{11}\partial_1\right)+\partial_2\left(g^{22}\partial_2\right)+\partial_3\left(g^{33}\partial_3\right)$$

$$+\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}+\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{01}+\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}{}_{02}+\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{03}\right)g^{00}\partial_0$$

$$+\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{10}+\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}{}_{11}+\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}{}_{12}+\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}{}_{13}\right)g^{11}\partial_1$$

$$+\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^{0}{}_{20}+\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}{}_{22}\right)g^{22}\partial_2+m^2\Big\}\Phi=0 \tag{4.31}$$

(4.22), (4.23), (4.24) ve (4.25) denklemlerindeki Christoffel sembollerinin değerleri (4.31)’da yerine konulursa, denklem (4.31) aşağıdaki biçimi alır:

$$\left\{\partial_0\left(-\frac{C^2}{F^2}\partial_0\right)+\partial_1\left(\frac{1}{B^2}\partial_1\right)+\partial_2\left(\frac{A^2}{F^2}\partial_2\right)+\partial_3\left(\frac{1}{D^2}\partial_3\right)\right.$$

$$-\left[\frac{1}{F^2}\left(AC^2\dot{A}+A^2C\dot{C}+E\dot{E}\right)+\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{D}}{D}\right]\left(\frac{C^2}{F^2}\right)\partial_0$$

$$\left.+\left[\frac{1}{F^2}\left(AC^2A'+A^2CC'+EE'\right)+\frac{B'}{B}+\frac{D'}{D}\right]\left(\frac{1}{B^2}\right)\partial_1+m^2\right\}\Phi=0 \tag{4.32}$$

bu denklemde gerekli türev işlemleri alınır ve sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\left\{-\frac{C^2}{F^2}\partial_0{}^2+\frac{1}{B^2}\partial_1{}^2+\frac{A^2}{F^2}\partial_2{}^2+\frac{1}{D^2}\partial_3{}^2\right.$$

$$-\left(\frac{C^2}{F^2}\right)\left(\frac{AC^2\dot{A}}{F^2}+\frac{A^2C\dot{C}}{F^2}+\frac{E\dot{E}}{F^2}+\frac{2\dot{C}}{C}-\frac{2\dot{F}}{F}+\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{D}}{D}\right)\partial_0$$

$$\left.+\left(\frac{1}{B^2}\right)\left(\frac{AC^2A'}{F^2}+\frac{A^2CC'}{F^2}+\frac{EE'}{F^2}-\frac{B'}{B}+\frac{D'}{D}\right)\partial_1+m^2\right\}\Phi=0 \tag{4.33}$$

denklemi elde edilir. Burada $\dot{F}=\dfrac{AC^2\dot{A}+A^2C\dot{C}+E\dot{E}}{F}$ ifadesinin kullanılmasıyla

$$\left\{-\frac{C^2}{F^2}\partial_0{}^2+\frac{1}{B^2}\partial_1{}^2+\frac{\mathrm{A}^2}{F^2}\partial_2{}^2+\frac{1}{D^2}\partial_3{}^2\right.$$

$$-\left(\frac{C^2}{F^2}\right)\left(\frac{\mathrm{A}C^2\dot{\mathrm{A}}}{F^2}+\frac{\mathrm{A}^2C\dot{C}}{F^2}+\frac{E\dot{E}}{F^2}+\frac{2\dot{C}}{C}+\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{D}}{D}\right)\partial_0$$

$$\left.+\left(\frac{1}{B^2}\right)\left(\frac{\mathrm{A}C^2\mathrm{A}'}{F^2}+\frac{\mathrm{A}^2CC'}{F^2}+\frac{EE'}{F^2}-\frac{B'}{B}+\frac{D'}{D}\right)\partial_1+m^2\right\}\Phi=0 \qquad (4.34)$$

sonucu elde edilir.

4.8.TELEPARALLEL KURAMINDA GENEL METRİK İÇİN K-G DENKLEMİ

Klein-Gordon denkleminin eğri uzay-zamanda Teleparallel kuramındaki biçimi denklem (2.43) ile verilir. Burada $\overset{\bullet}{D}_\mu$, teleparallel kovaryant türevi temsil etmektedir ve

$$\overset{\bullet}{D}_\mu \partial^\mu = \partial_\mu \partial^\mu + \left(\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\mu{}_{\lambda\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^\mu{}_{\lambda\mu}\right)\partial^\lambda \qquad (4.35)$$

olarak ifade edilir. Teleparallel kovaryant türev ile birlikte Klein-Gordon denklemi

$$\left\{\partial_\mu \partial^\mu + \left(\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\mu{}_{\lambda\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^\mu{}_{\lambda\mu}\right)\partial^\lambda + m^2\right\}\Phi = 0 \qquad (4.36)$$

biçimini alır. Bu denklem

$$\left\{\overset{\bullet}{D}_0\partial^0 + \overset{\bullet}{D}_1\partial^1 + \overset{\bullet}{D}_2\partial^2 + \overset{\bullet}{D}_3\partial^3 + m^2\right\}\varPhi = 0 \qquad (4.37)$$

şeklinde açılır ve teleparallel kovaryant türev;

$$\dot{D}_0\,\partial^0 = \partial_0\partial^0 + \left(\dot{\Gamma}^{0}{}_{\lambda 0} - \dot{K}^{0}{}_{\lambda 0}\right)\partial^\lambda$$

$$\dot{D}_1\,\partial^1 = \partial_1\partial^1 + \left(\dot{\Gamma}^{1}{}_{\lambda 1} - \dot{K}^{1}{}_{\lambda 1}\right)\partial^\lambda \qquad (4.38)$$

$$\dot{D}_2\,\partial^2 = \partial_2\partial^2 + \left(\dot{\Gamma}^{2}{}_{\lambda 2} - \dot{K}^{2}{}_{\lambda 2}\right)\partial^\lambda$$

$$\dot{D}_3\,\partial^3 = \partial_3\partial^3 + \left(\dot{\Gamma}^{3}{}_{\lambda 3} - \dot{K}^{3}{}_{\lambda 3}\right)\partial^\lambda$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler denklem (4.45) yerine yazılırsa

$$\Big\{\partial_0\partial^0 + \partial_1\partial^1 + \partial_2\partial^2 + \partial_3\partial^3 + \Big[\left(\dot{\Gamma}^{0}{}_{\lambda 0} - \dot{K}^{0}{}_{\lambda 0}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{1}{}_{\lambda 0} - \dot{K}^{1}{}_{\lambda 1}\right)$$

$$+ \left(\dot{\Gamma}^{2}{}_{\lambda 2} - \dot{K}^{2}{}_{\lambda 2}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{3}{}_{\lambda 3} - \dot{K}^{3}{}_{\lambda 3}\right)\Big]\partial^\lambda + m^2\Big\}\Phi = 0 \qquad (4.39)$$

şeklini alır. Denklem (4.39) λ üzerinden açılırsa,

$$\Big\{\partial_0\partial^0 + \partial_1\partial^1 + \partial_2\partial^2 + \partial_3\partial^3 +$$

$$+ \Big[\left(\dot{\Gamma}^{0}{}_{00} - \dot{K}^{0}{}_{00}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{1}{}_{01} - \dot{K}^{1}{}_{01}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{2}{}_{02} - \dot{K}^{2}{}_{02}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{3}{}_{03} - \dot{K}^{3}{}_{03}\right)\Big]\partial^0$$

$$+ \Big[\left(\dot{\Gamma}^{0}{}_{10} - \dot{K}^{0}{}_{10}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{1}{}_{11} - \dot{K}^{1}{}_{11}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{2}{}_{12} - \dot{K}^{2}{}_{12}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{3}{}_{13} - \dot{K}^{3}{}_{13}\right)\Big]\partial^1 \qquad (4.40)$$

$$+ \Big[\left(\dot{\Gamma}^{0}{}_{20} - \dot{K}^{0}{}_{20}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{1}{}_{21} - \dot{K}^{1}{}_{21}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{2}{}_{22} - \dot{K}^{2}{}_{22}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{3}{}_{23} - \dot{K}^{3}{}_{23}\right)\Big]\partial^2$$

$$+ \Big[\left(\dot{\Gamma}^{0}{}_{30} - \dot{K}^{0}{}_{30}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{1}{}_{31} - \dot{K}^{1}{}_{31}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{2}{}_{32} - \dot{K}^{2}{}_{32}\right) + \left(\dot{\Gamma}^{3}{}_{33} - \dot{K}^{3}{}_{33}\right)\Big]\partial^3 + m^2\Big\}\Phi = 0$$

biçimini alır. Sıfır olamayan Weitzenböck bağlantıları ve Kıvrılma tensörleri dikkate alınırsa denklem (4.40) aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\Big\{\partial_0\left(g^{00}\partial_0\right)+\partial_1\left(g^{11}\partial_1\right)+\partial_2\left(g^{22}\partial_2\right)+\partial_3\left(g^{33}\partial_3\right)$$

$$+\left(\dot{\Gamma}^0{}_{00}-\dot{K}^0{}_{00}-\dot{K}^1{}_{01}-\dot{K}^2{}_{02}-\dot{K}^3{}_{03}\right)\left(g^{00}\partial_0\right)$$

$$+\left(\dot{\Gamma}^1{}_{11}-\dot{K}^0{}_{10}-\dot{K}^2{}_{12}-\dot{K}^3{}_{13}\right)\left(g^{11}\partial_1\right)-\left(\dot{K}^0{}_{20}+\dot{K}^2{}_{12}\right)\left(g^{22}\partial_2\right)+m^2\Big\}\Phi=0 \quad (4.41)$$

denklem (4.23)’de verilen Weitzenböck katsayıları ve denklem (4.28)’de elde edilen Kıvrılma bileşenleri denklem (4.41)’de yerlerine konulduğunda

$$\left\{\partial_0\left(-\frac{C^2}{F^2}\partial_0\right)+\partial_1\left(\frac{1}{B^2}\partial_1\right)+\partial_2\left(\frac{\mathrm{A}^2}{F^2}\partial_2\right)+\partial_3\left(\frac{1}{D^2}\partial_3\right)\right.$$

$$-\left[\frac{1}{F^2}\left(\mathrm{A}C^2\dot{\mathrm{A}}+\mathrm{A}^2C\dot{C}+\mathrm{E}\dot{\mathrm{E}}\right)+\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{D}}{D}\right]\left(\frac{C^2}{F^2}\right)\partial_0$$

$$\left.+\left[\frac{1}{F^2}\left(\mathrm{A}C^2\mathrm{A}'+\mathrm{A}^2CC'+\mathrm{E}\mathrm{E}'\right)+\frac{B'}{B}+\frac{D'}{D}\right]\left(\frac{1}{B^2}\right)\partial_1+m^2\right\}\Phi=0 \qquad (4.42)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapıldıktan sonra aşağıdaki denklem

$$\left\{-\frac{C^2}{F^2}\partial_0{}^2+\frac{1}{B^2}\partial_1{}^2+\frac{\mathrm{A}^2}{F^2}\partial_2{}^2+\frac{1}{D^2}\partial_3{}^2\right.$$

$$-\left(\frac{C^2}{F^2}\right)\left(\frac{\mathrm{A}C^2\dot{\mathrm{A}}}{F^2}+\frac{\mathrm{A}^2C\dot{C}}{F^2}+\frac{E\dot{E}}{F^2}+\frac{2\dot{C}}{C}-\frac{2\dot{F}}{F}+\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{D}}{D}\right)\partial_0$$

$$\left.+\left(\frac{1}{B^2}\right)\left(\frac{\mathrm{A}C^2\mathrm{A}'}{F^2}+\frac{\mathrm{A}^2CC'}{F^2}+\frac{EE'}{F^2}-\frac{B'}{B}+\frac{D'}{D}\right)\partial_1+m^2\right\}\Phi=0 \qquad (4.43)$$

bulunur. Bu denklemde $\dot{F}=\dfrac{C^2\mathrm{A}\dot{\mathrm{A}}+\mathrm{A}^2C\dot{C}+E\dot{E}}{F}$ ifadesi yerine yazılırsa denklem

$$
\left\{-\frac{C^2}{F^2}\partial_0{}^2+\frac{1}{B^2}\partial_1{}^2+\frac{\mathrm{A}^2}{F^2}\partial_2{}^2+\frac{1}{D^2}\partial_3{}^2\right.
$$

$$
-\left(\frac{C^2}{F^2}\right)\left(\frac{\mathrm{A}C^2\dot{\mathrm{A}}}{F^2}+\frac{\mathrm{A}^2C\dot{C}}{F^2}+\frac{E\dot{E}}{F^2}+\frac{2\dot{C}}{C}+\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{D}}{D}\right)\partial_0
$$

$$
\left.+\left(\frac{1}{B^2}\right)\left(\frac{\mathrm{A}C^2\mathrm{A}'}{F^2}+\frac{\mathrm{A}^2CC'}{F^2}+\frac{EE'}{F^2}-\frac{B'}{B}+\frac{D'}{D}\right)\partial_1+m^2\right\}\Phi=0 \qquad (4.44)
$$

biçimine dönüşür.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Doğayı anlayabilmek için temel olarak dört kuvvetsel alan üzerinde durulmaktadır. Son dönemlerdeki yaklaşım bu kuvvetsel alanları birleştirecek bir alan kuramı ortaya koymak olmuştur. Bu kuvvetsel alanlardan zayıf, güçlü ve elektromanyetik kuvvetsel alanlar göreli kuantum alanlarıyla betimlenirken kütlesel çekim alanını betimlemenin başarılı yollarından biri ise alan kavramından farklı olarak uzay-zamanı geometrize eden eğrilik kavramını kullanmaktır. Kütlesel çekim etkileşimini tanımlamanın diğer bir yolu ise bir kuvvet alanı olan burulmayı kullanmaktır.

Bu çalışmada, kütlesel çekim etkileşimi olgusu açıklanırken uzay-zamanın eğrilik özelliğine dayalı Genel Görelilik kuramının bakış açısı ile uzay-zamanın burulma özelliğine dayalı Teleparallel kuramının kütle çekim olgusundaki bakış açısı karşılaştırılmaktadır. Bu tezde, her iki kuramın, bu olguyu farklı kavramlarla betimlemesine karşın, aynı sonuçları verdiği gösterilmektedir.

Tezin kaynak araştırması bölümünde Teleparallel kuramının temelleri tartışılmaktadır. Burada özellikle dörtayak alanları kavramıyla ilişkili olarak Weitzenböck bağlantıları yardımıyla kütlesel çekime bir alan olarak bakma düşüncesi ön plana çıkarılmaktadır. Ayrıca Lagranjiyen formalizmi kullanılarak K-G denkleminin Genel Görelilik ve Teleparallel kuramlarında nasıl yazıldığı üzerinde durulmaktadır.

Tezin materyal ve metod bölümünde uzay-zamanın geometrisini betimleyen metrik tensörü ile bağlantı katsayılarının seçimine göre oluşturulan Genel Görelilik, Weyl, Einstein-Cartan ve Affine kuramlarının bağlantı katsayılarının, bu kuramlara göre nasıl bulunduğu gösterilmektedir. Dirac denkleminin köşegenel bir metrik için Genel Görelilik ve Teleparallel kuramlarında eşdeğer olduğu ortaya konulmaktadır.

Bu çalışmanın temelini oluşturan bulgular ve tartışma bölümünde, önce köşegenel olmayan genel bir metrik için dörtayaklar, Christoffel sembolleri, Weitzenböck bağlantıları, burulma ve kıvrılma tensörleri elde edilmektedir ve sonra elde edilen bu sonuçlar, kütleli, skaler ve spin-0 parçacıkları betimleyen Klein-Gordon denkleminin hem Genel Görelilik kuramında hem de Teleparallel kuramında yazılan ifadelerinde yerlerine konularak , her iki ifadenin eşdeğer olduğu gösterilmektedir.

Her iki kuramda, kütlesel çekim olgusu her ne kadar farklı kavramlarla açıklansa da, yazılan denklemlerin genel metrikler için eşdeğer olduklarının gösterilmesi, bundan sonra bu alanda yapılacak çalışmalarda bu iki kuramın her konuda eşdeğerliliği üzerinde durulması büyük önem arzedecektir. Bu bakış açısı Teleparallel kuramına üstünlük sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Hartle, J.B., "Gravity, An Introduction to Eisntein's General Relativity", Publishing As Addison Wesley, San Francisco, 582s, (2003)

[2] Wanas, M.I. "Absolute Parallelism Geometry: Developments, Applications and Problems", General Relativity and Quantum Cosmology, **10**: 297-309 (2001)

[3] De Sabbata, V., and Gasperini, M. ''Introduction to Gravitation'', World Scientific Publishing, Singapore, 346s, (1985)

[4] O'Raifeartaigh,L., ''The Dawning of Gauge Theory'' , Princeton University Press, Princeton, (1998)

[5] Eintein, A., Mayer, W. Sitzungsber., "Zwei strenge statische Lösungen der Feldgleichungen der einheitlichen Feldtheorie" Preuss. Akad Wiss., **110:** 110-120 (1930)

[6] Moller, C., ''Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity'', Mat. Fys. Skr. Danske. Vid. Selsk., **1(10):** 1–50 (1961)

[7] Pellegrini C., Plebanski, J., ''A Theory of Gravitation'', Math.- Fys. Skr. Dan. Vid. Selskab., **2(2),** (1962)

[8] Moller, C., ''On the Crisis in the Theory of Gravitation and a Possible Solution'' Math.Fys. Skr. Dan. Vid. Selskab. **39(13),** (1978)

[9] Hayashi, K., Nakano, T., ''Extended Translation Invariance and Associated Gauge Fields'', Prog. Theor. Phys., **38(2):** 491-507, (1967)

[10] Hayashi, K., ''Gravitational Interactions Of The Proton And The Electron - The Possible Existence Of A Massless Scalar Particle'' Nuovo Cimento A **16,** 639-673 (1973)

[11] Hayashi, K., ''The Gauge Theory of The Translation Group and Underlying Geometry '' Phys. Lett. B, **69(4):** 441-444, (1977)

[12] Hayashi, K., Shirafuji, T., '' New General Relativity '' Phys. Rev. D**, 19(12):** 3524-3553, (1979)

[13] Hehl, F. W., McCrea, J. D., Mielke and Ne'emann Y., ''Metric-Affine Gauge Theory of Gravity: Field Equations, Noether Identities, World Spinors, and Breaking of Dilation Invariance'', Phys. Rep., **258**: 1-171 (1995)

[14] Hammond, R. T., ‘‘Torsion gravity’’, Rep. Prog. Phys., **65(5)**: 599-649, (2002)

[15] Aldrovandi, R. Pereira, J. G., Vu, K. H., ‘‘ Selected Topics in Teleparallel Gravity ’’ Braz. J. Phys., **34(4)**: 1374-1380, (2004)

[16] Aldrovandi, R., Pereira, J.G., ‘‘An Introduction to Teleparallel Gravity’’ Instituto de Fisica Teorica, UNESP, (2005)

[17] Gross, D. J., ‘‘Gauge Theory: Past, Present and Future’’, Chinese Journal of Physics, **30(7)**: 955-972, (1992)

[18] Aldrovandi, R., Pereira, J. G., ‘‘An Introduction to Geometrical Physics’’, World Scientific, Singapore, 683s, (1995)

[19] De Andrade, V. C., Pereira, J. G., ‘‘Gravitational Lorentz force and the description of the gravitational interaction’’, Phys. Rev. **D 56(8)**: 4689 - 4695 (1997)

[20] De Andrade, V. C., Pereira, J. G., ‘‘Gravitational Lorentz Force the Description of the Gravitational Interaction’’ Phys. Rev. D, **56(8)**: 4689 – 4695, (1997)

[21] De Andrade, V. C., Pereira, J. G., ‘‘Riemannian and Teleparallel Descriptions of the Scalar Field Gravitational Interaction’’, Gen. Rel. Grav., **30(2)**: 263-273, (1998)

[22] Hammond, R. T., ‘‘Gravitation, torsion, and string theory ’’ Gen. Rel. Grav. **28(6)**: 749-757 (1996)

[23] Hehl, F. H., Von der Hegde, P., Kerlick, G. D. and Nester, J. M., ‘‘General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects **’’,** Rev. Mod. Phys. **48(3)**: 393-416, (1976)

[24] Bağcı, M., Havare, A., ve Söğüt, K., ‘‘ On the Equivalence of the Dirac Equation Between General Relativity and Teleparallel Gravity ’’, Sixth International Conference of the Balkan Physical Union, American Intstitute of Physics, (2007)

[25] De Andrade, V. C., Guillen L.C. T. ve Pereira, ‘‘ Teleparallel Spin Connection ’’, Phys. Rev. D, **64(2):** (2001)

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Hatay'ın Samandağ ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladı. Samandağ Lisesinden 1997 yılında mezun oldu. ÖYS'ye (Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavı) 1998 yılında girerek Muğla Üniversitesi Fen-Eebiyat Fakültesi Fizik Bölümüne yerleştirildi. 2001 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümüne yatay geçiş yaparak öğrenimini sürdürdü. Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünden 2003 yılında dereceyle mezun oldu. 2004 yılında Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında Yüksek Lisans yapmaya başladı. Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında yapmış olduğu Yüksek Lisansı 2007 yılında başarıyla tamamladı.