DIRAC SİSTEMİ İÇİN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

UFUK KAYA

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Nazım KERİMOV

MERSİN
Haziran - 2008

ÖZ

Bu çalışmada Dirac sistemi için, denklemleri ve sınır koşullarından biri spektral parametre içeren aşağıdaki sınır değer problemi incelenmiştir:

$$u' - \{\lambda + P(x)\} w = 0,$$

$$w' + \{\lambda + R(x)\} u = 0,$$

$$u(0)\cos\alpha - w(0)\sin\alpha = 0,$$

$$(\lambda\cos\beta + a)u(1) - (\lambda\sin\beta + b)w(1) = 0.$$

Burada $0 \le x \le 1$, λ spektral parametre, $P(x)$ ve $R(x)$ reel değerli ve $C[0,1]$ sınıfından fonksiyonlar, $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ve $a\sin\beta - b\cos\beta < 0$'dır.

Bu çalışmada söz konusu problemin:

1. Özdeğerlerin sayılabilir olduğu, bu özdeğerlerin reelliği ve basitliği ispatlanmış;
2. Özvektör fonksiyonlarının salınım özellikleri incelenmiş;
3. Özdeğer ve özvektör fonksiyonları için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dirac denklemler sistemi, sınır değer problemi, özdeğer ve özvektör fonksiyonu, salınım, asimptotik formül.

ABSTRACT

In this work, we consider the following boundary value problem for the Dirac system with a spectral parameter in the equation and the boundary condition:

$$u'-\{\lambda+P(x)\}w=0,$$

$$w'+\{\lambda+R(x)\}u=0$$

$$u(0)\cos\alpha-w(0)\sin\alpha=0,$$

$$(\lambda\cos\beta+a)u(1)-(\lambda\sin\beta+b)w(1)=0.$$

Where $0\le x\le 1$, λ is the spectral parameter, $P(x)$ and $R(x)$ are real-valued functions from the class $C[0,1]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ and $a\sin\beta-b\cos\beta<0$.

We prove:

1. that there is a countable set of eigenvalues of the given problem and that they are real and simple;
2. oscillatory properties of the eigen-vector-functions;
3. asymptotik formulas for eigenvalues and eigen-vector-functions with remainder of the form $O\left(n^{-1}\right)$.

Keywords: Dirac equations system, boundary value problem, eigenvalue and eigen-vector-function, oscillation, asymptotik formula.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Nazım KERİMOV'a teşekkür ederim. Ayrıca, bu çalışma boyunca yardımını esirgemeyen bölüm hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	$\{1,2,3,...\}$ doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	$\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$ ’nin kendisiyle n kez kartezyen çarpımı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
I	Birim operatör
$\bar{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
$\arg z$	z kompleks sayısının argümenti
(f,g)	f ile g vektörlerinin bulundukları uzaydaki iç çarpımı
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
$C[a,b]$	$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların uzayı
$O(a_n)$	Landau sembolü
$f(x) \equiv g(x)$	Her bir $x \in [a,b]$ $([a,b),(a,b],[a,b])$ için $f(x) = g(x)$
f^{-1}	f fonksiyonunun (operatörünün) tersi
sup	Üst sınırların en küçüğü (supremum)
inf	Alt sınırların en büyüğü (infimum)

1. GİRİŞ

Lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin önemli problemlerinden biri, sınır koşulları spektral parametre içeren sınır değer probleminin bazı temel spektral özelliklerinin (özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının varlığı, onların asimptotik gösterimleri, özfonksiyonlarının salınım özellikleri vs.) incelenmesidir.

Bu tez çalışmasında

$$u' - \{\lambda + P(x)\} w = 0, \tag{1.1}$$

$$w' + \{\lambda + R(x)\} u = 0, \tag{1.2}$$

$$u(0)\cos\alpha - w(0)\sin\alpha = 0, \tag{1.3}$$

$$(\lambda\cos\beta + a)u(1) - (\lambda\sin\beta + b)w(1) = 0 \tag{1.4}$$

şeklindeki spektral problemin yukarıda gösterilmiş tür spektral özellikleri incelenecektir. Burada $0 \le x \le 1$, λ spektral parametre, $P(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları $[0,1]$ kapalı aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, a, b belirli reel sayılar ve $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$'dir.

(1.1) - (1.4) sınır değer probleminin spektral özelliklerinin incelenmesi

$$\sigma = a\sin\beta - b\cos\beta < 0 \tag{1.5}$$

koşulu dahilinde yapılacaktır.

Not 1.1. Belirtelim ki; $a_0, b_0, a_1, b_1, c_1, d_1$, $\left(a_0^2 + b_0^2 > 0,\ a_1^2 + c_1^2 > 0\right)$ belirli reel sayılar olmak üzere

$$a_0 u(0) - b_0 w(0) = 0,$$

$$(a_1\lambda + b_1)u(1) - (c_1\lambda + d_1)w(1) = 0$$

şekilli sınır koşulları (1.3) - (1.4) şekilli sınır koşullarına dönüştürülebilir. Bu durumda (1.5) koşulunun sağlanması için

$$b_1 c_1 - d_1 a_1 < 0 \tag{1.6}$$

olmalıdır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Lineer diferansiyel operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesi hakkında yapılan ilk temel çalışmalar [1-3] kaynaklarında düzenlenmiştir. Sturm - Liouville tipli diferansiyel operatörler için 1973 yılında J. Walter [4] sınır koşullarından biri, 1977 yılında C.T. Fulton [5] ve 1993 yılında P.J. Browne, P.A. Binding, K. Seddighi [15] sınır koşullarından her ikisi spektral parametre içeren sınır değer problemlerini incelemişlerdir. [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26] çalışmalarında sınır koşullarında spektral parametre içeren Sturm – Liouville tipli diferansiyel operatörler incelenmiştir. Özellikle [16] ve [17] çalışmalarında sınır koşullarından her ikisi de λ spektral parametresinin lineer olmayan kuadratik fonksiyonunu içerir.

[13] ve [14] çalışmalarında dördüncü mertebeden adi diferansiyel operatörler için dört sınır koşulundan biri spektral parametre içeren sınır değer problemi incelenmiş ve bir dizi sonuçlar elde edilmiştir.

[27] çalışmasında kısmi diferansiyel denklem olarak verilen ısı denklemi değişkenlere ayırma metodu kullanılarak sınır koşullarından biri spektral parametre içeren Sturm–Liouville tipli spektral probleme indirgenmiştir.

Dirac sistemi için 2002 yılında N.B. Kerimov [28] sınır koşullarından her ikisi spektral parametre içeren sınır değer probleminin spektral özelliklerine ait sonuçlar elde etmiştir.

3. MATERYAL VE METOD

3.1. ÖN BİLGİLER

3.1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 3.1.1.1 [29]. f, (a,b) açık aralığında tanımlı, reel değerli bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 3.1.1.2 [29]. f, (a,b) açık aralığında tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu (a,b) aralığının her bir noktasında sürekli ise f fonksiyonuna (a,b) aralığında süreklidir denir.

Tanım 3.1.1.3 [29]. f, (a,b) açık aralığında tanımlı, reel değerli bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 \le x - x_0 < \delta$ $(\delta < x - x_0 \le 0)$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonuna x_0 noktasında sağdan (soldan) süreklidir denir.

Tanım 3.1.1.4 [29]. f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. f, (a,b) açık aralığında sürekli, $x = a$ noktasında sağdan ve $x = b$ noktasında soldan sürekli ise f fonksiyonuna $[a,b]$ kapalı aralığında süreklidir denir.

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve reel değerli bütün fonksiyonların kümesi $C[a,b]$ gösterilir.

Tanım 3.1.1.5 [29]. f, (a,b) (ya da $[a,b]$) aralığında tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. Her bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $|x'-x''|<\delta$ koşulunu sağlayan her $x',x''\in(a,b)$ (ya da $x',x''\in[a,b]$) için $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonuna (a,b) (ya da $[a,b]$) aralığında düzgün süreklidir denir.

Teorem 3.1.1.1 [29] (Cantor Teoremi). Kapalı aralıkta sürekli olan her fonksiyon düzgün süreklidir.

Teorem 3.1.1.2 [29] (Ara Değer Teoremi). $f\in C[a,b]$ olsun. $[a,b]$'de $x_1<x_2$ ve $f(x_1)\neq f(x_2)$ olacak şekilde herhangi iki x_1,x_2 noktası verildiğinde f fonksiyonu (x_1,x_2) aralığında, $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.

Tanım 3.1.1.6 [30]. f, (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0\in(a,b)$ olsun. Eğer

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonuna x_0 noktasında türevlenebilirdir denir. Bu durumda

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

yazılır.

Teorem 3.1.1.3 [30] (Rolle Teoremi). f, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir fonksiyon ve $f(a)=f(b)$ olsun. Bu durumda $f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ vardır.

Teorem 3.1.1.4 [30] (Diferansiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi). f, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ vardır.

Tanım 3.1.1.7 [29]. f, $A\subset\mathbb{R}$ kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her bir $x\in A$ için $|f(x)|\leq M$ olacak şekilde en az bir $M>0$ sayısı varsa f fonksiyonuna A kümesi üzerinde sınırlıdır denir. Aksi durumda f fonksiyonuna A kümesi üzerinde sınırsızdır denir.

Tanım 3.1.1.8 [29]. Eğer $A\subset\mathbb{R}$ üstten (alttan) sınırlı bir küme ise A'nın üst sınırların en küçüğüne (alt sınırlarının en büyüğüne) A'nın supremumu (infimumu) denir ve $\sup A$ $(\inf A)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.1.5 [29] (Weierstrass Teoremi). $f\in C[a,b]$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlıdır.

Tanım 3.1.1.9 [29]. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyona dizi denir. f bir dizi ise her bir n doğal sayısına bir $a_n=f(n)$ elemanı karşılık geleceğinden f dizisi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklinde gösterilebilir.

3.1.2. Süreklilik Modülü

Tanım 3.1.2.1 [31]. f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olsun. $[0,b-a]$ aralığında tanımlı

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{a\leq x\leq b-h\\0\leq h\leq\delta}}|f(x+h)-f(x)|$$

ya da ona denk olan

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{|x_2-x_1|\le\delta\\ x_1,x_2\in[a,b]}}\left|f(x_2)-f(x_1)\right|$$

ile tanımlı $\omega(f,\delta)=\omega(\delta)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Bu tanıma göre $\omega(f,\delta)$ süreklilik modülü $\delta\in[0,b-a]$ olmak üzere f fonksiyonunun, uzunluğu δ'ya eşit olan $[a,b]$ kapalı aralığının bütün alt aralıklarındaki maksimum salınımını verir. Buradan her $x, x+h\in[a,b]$ için

$$\left|f(x+h)-f(x)\right|\le\omega(\delta)$$

ya da her $x_1,x_2\in[a,b]$ için

$$\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le\omega(|x_2-x_1|)$$

elde edilir.

Bu tanım, fonksiyonun düzgün sürekli olması koşuluyla $(-\infty,+\infty)$ aralığında da verilebilir.

Örnek 3.1.2.1 [31]. $a,b\in\mathbb{R}$ keyfi sabitler olmak üzere $f(x)=ax+b$, $x\in(-\infty,+\infty)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $\delta\ge 0$ için

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ 0\le h\le\delta}}\left|a(x+h)+b-ax-b\right|=\sup_{0\le h\le\delta}|ah|=|a|\delta$$

dir.

Örnek 3.1.2.2 [31]. $f(x)=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $\delta\ge 0$ için

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ 0\le h\le\delta}}\left|\sin(x+h)-\sin x\right|=2\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ 0\le h\le\delta}}\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right|=2\sup_{0\le h\le\delta}\left|\sin\frac{h}{2}\right|$$

bulunur. Buradan

$$\omega(\delta)=\begin{cases}2\sin\dfrac{\delta}{2}, & \delta<\pi\\ 2 & ,\ \delta\ge\pi\end{cases}$$

elde edilir.

Önerme 3.1.2.1 (Süreklilik Modülünün Özellikleri).

1. $\omega(0)=0$,
2. $\omega(\delta)$ azalmayan bir fonksiyondur,
3. $\omega(\delta)\in C[0,b-a]$,
4. $\omega(\delta)$ alt toplamsaldır; yani, her $\delta_1,\delta_2\geq 0$ için

$$\omega(\delta_1+\delta_2)\leq\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$$

sağlanır. Son eşitsizlikten

$$\omega(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n)\leq\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)+\cdots+\omega(\delta_n)$$

genel eşitsizliği elde edilir. Ayrıca bu genel eşitsizlikte $\delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_n=\delta$ yazılırsa

$$\omega(n\delta)\leq n\omega(\delta)$$

bulunur.

3.1.3. Tam Fonksiyonun Tanımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.1.3.1 [32]. $D\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f:D\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon, $z_0\in D$ olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonuna $z_0\in D$ noktasında $\mathbb{C}$-anlamında türevlenebilirdir denir.

Tanım 3.1.3.2 [32]. $D\subset\mathbb{C}$ bir bölge $f:D\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu D bölgesinin her noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonuna D bölgesinde analitiktir (holomorftur) denir.

D bölgesinde analitik olan bütün fonksiyonların kümesi $H(D)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3.3 [32]. Tüm $\mathbb{C}$'de analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir.

Teorem 3.1.3.1 [32] (Analitik Fonksiyonların Teklik Teoremi).

$D \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f, g \in H(D)$ olsun. Eğer f ve g fonksiyonları, D bölgesinde en az bir limit noktasına sahip olan bir küme üzerinde eşit oluyorlarsa, her $z \in D$ için $f(z) = g(z)$'dir.

Sonuç 3.1.3.1 [32]. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in H(D)$ özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon ise, f fonksiyonun D'de en fazla sayılabilir tane sıfırı vardır ve bu sıfırların D bölgesinde yerleşen bir limit noktası yoktur.

Sonuç 3.1.3.2 [32]. Özdeş olarak sıfır olmayan bir tam fonksiyonun $\mathbb{C}$'de en fazla sayılabilir tane sıfırı vardır ve bu sıfırlar sonlu limit noktasına sahip değildir.

3.2. BİR BOYUTLU DIRAC SİSTEMİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

3.2.1. Bir Boyutlu Dirac Sisteminin Kanonik Biçime İndirgenmesi

$p_{ik} : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ $(i, k = 1, 2)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$L \equiv \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x) \equiv p_{21}(x) \tag{3.1}$$

matris dönüşümünü göz önüne alalım. $y(x)$ ile iki komponente sahip

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonunu gösterelim. λ bir parametre, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\left(B \frac{d}{dx} + L - \lambda I \right) y = 0 \tag{3.2}$$

denklemini ele alalım. Bu denklem birinci mertebeden

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} + p_{11}(x) y_1 + p_{12}(x) y_2 &= \lambda y_1, \\ -\frac{dy_1}{dx} + p_{21}(x) y_1 + p_{22}(x) y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

denklemler sistemine denktir.

$$p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0,\ p_{11}(x) = V(x) + m,\ p_{22}(x) = V(x) - m$$

durumunda (3.3) denklemler sistemi, göreli kuantum teorisinde "Bir Boyutlu Durağan Dirac Sistemi" olarak bilinir. Burada $V(x)$ potansiyel fonksiyonu ve m parçacığın kütlesidir.

$H = H(x)$ ile $\mathbb{R}^2$'deki bir düzgün ortogonal dönüşümü gösterelim. Bilindiği gibi $\mathbb{R}^2$'deki her ortogonal dönüşüm

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

formundadır. Kolayca gösterilebilir ki $BH = HB$'dir ve H^{-1} vardır. $y = Hz$ yazalım. (3.2)'de $y = Hz$ yerine yazılır ve eşitliğin her iki tarafından H^{-1} dönüşümü uygulanırsa

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz) + H^{-1}LHz = H^{-1}\lambda Hz$$

ya da

$$B\frac{dz}{dx} + \left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH\right)z = \lambda z \tag{3.4}$$

elde edilir.

$$Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$$

yazalım. Kolayca gösterilebilir ki

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$H^{-1}LH=\begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

dir. Buradan Q matrisinin

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \varphi'+p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'+p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

formunda olduğu elde edilir. $\varphi(x)$ fonksiyonu öyle seçilmelidir ki, $q_{12}(x)\equiv 0$ olsun. O halde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x)+\frac{1}{2}\{p_{22}(x)-p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x)=0$$

olur. Buradan

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{22}(x)-p_{11}(x)}$$

bulunur. O halde $Q=Q(x)$ matrisi

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} -p(x) & 0 \\ 0 & -r(x) \end{pmatrix}$$

olarak düşünülebilir. Buradan (3.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} -p(x) & 0 \\ 0 & -r(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.5}$$

formunda yeniden yazılabilir. Şimdi $\varphi(x)$ fonksiyonunu $q_{11}(x)+q_{22}(x)=0$ olacak biçimde seçelim. Yani $2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)=0$ olsun. O halde

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\{p_{11}(t)+p_{22}(t)\}dt$$

olur. Buradan (3.4) denkleminin

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.6}$$

formunda olduğu elde edilir.

(3.5) ve (3.6) denklemlerine (3.2) denkleminin kanonik formu denir. (3.2) denkleminin çeşitli spektral özellikleri araştırılırken bu kanonik formlardan uygun olanı kullanılır. Örneğin (3.2) denkleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışlarını araştırırken veya keyfi bir vektör fonksiyonunun (3.2) denkleminin özvektör fonksiyonlarına göre ayrışım formüllerini incelerken (3.5) kanonik formunu kullanmak uygun olur. Buna karşılık (3.2) denkleminin özdeğerlerinin sayısının asimptotik davranışları ile ilgili problemlerde ve sonsuz aralıklar üzerindeki ters problemlerde (3.6) kanonik formunu kullanmak daha uygun olur [2].

3.2.2. Sınır Koşulları ile Verilen Dirac Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektör Fonksiyonlarının Bazı Temel Özellikleri

$p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli, reel değerli fonksiyonlar ve $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere (3.3) denklemler sistemi için (3.5) kanonik formunun kullanıldığı aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\} y_1 = 0, \ \ y_1' + \{\lambda + r(x)\} y_2 = 0, \tag{3.7}$$

$$y_2(0)\cos\alpha + y_1(0)\sin\alpha = 0, \tag{3.8}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0. \tag{3.9}$$

Varsayalım ki $\lambda = \lambda_1$ sayısı için (3.7) - (3.9) sınır değer problemi, aşikardan farklı

$$y(x,\lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}$$

çözümüne sahiptir. Bu durumda λ_1 sayısına özdeğer ve $y(x,\lambda_1)$ vektör fonksiyonuna da λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [2].

Lemma 3.2.2.1 [2]. (3.7) - (3.9) sınır değer probleminin farklı λ_1, λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ile $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldir. Yani

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx=0$$

dır.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ vektör fonksiyonları (3.7) denklemlerinin çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}
&y_2'(x,\lambda_1)-\{\lambda_1+p(x)\}y_1(x,\lambda_1)=0,\\
&y_1'(x,\lambda_1)+\{\lambda_1+r(x)\}y_2(x,\lambda_1)=0,\\
&z_2'(x,\lambda_2)-\{\lambda_2+p(x)\}z_1(x,\lambda_2)=0,\\
&z_1'(x,\lambda_2)+\{\lambda_2+r(x)\}z_2(x,\lambda_2)=0
\end{aligned}$$

sağlanır. Bu denklemler sırasıyla $z_1(x,\lambda_2),-z_2(x,\lambda_2),-y_1(x,\lambda_1),y_2(x,\lambda_1)$ fonksiyonları ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)-y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}\\
&\qquad=(\lambda_1-\lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin iki tarafı 0'dan π'ye integre edilirse

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx\\
&\qquad=\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)-y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}\Big|_0^\pi
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafı (3.8) - (3.9) sınır koşullarından dolayı 0 olur. O halde

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx=0 \tag{3.10}$$

dır. $\lambda_1\neq\lambda_2$ olduğundan (3.10) eşitliğinin her iki tarafı $(\lambda_1-\lambda_2)$ sayısına bölünürse

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx=0$$

elde edilir. Bu ise $y(x,\lambda_1)$ ile $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonlarının ortogonal olduğunu gösterir.

Lemma 3.2.2.2 [2]. (3.7) - (3.9) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: λ_0 sayısı (3.7) - (3.9) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $y(x,\lambda_0)$ bu özdeğere karşılık gelen özvektör fonksiyonu olsun. O halde $y(x,\lambda_0)\not\equiv 0$'dır. Kolayca gösterilebilir ki, $\overline{\lambda_0}$ sayısı da (3.7) - (3.9) sınır değer probleminin bir özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör fonksiyonu $\overline{y(x,\lambda_0)}$'dir. Bu bilgilere göre (3.10) denklemi

$$\left(\lambda_0-\overline{\lambda_0}\right)\int_0^{\pi}\left\{\left|y_1(x,\lambda_0)\right|^2+\left|y_2(x,\lambda_0)\right|^2\right\}dx=0$$

halini alır. $y(x,\lambda_0)\not\equiv 0$ olduğundan

$$\int_0^{\pi}\left\{\left|y_1(x,\lambda_0)\right|^2+\left|y_2(x,\lambda_0)\right|^2\right\}dx>0$$

dır. O halde $\lambda_0-\overline{\lambda_0}=0$, yani $\lambda_0=\overline{\lambda_0}$ ‘dir. Buradan $\lambda_0\in\mathbb{R}$ elde edilir.

3.3. (3.7) - (3.9) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZVEKTÖR FONKSİYONLARI İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

3.3.1. Operatör Dönüşümün Tanımı ve Genel İfadesi

Tanım 3.3.1.1 [2]. A ve B iki lineer diferansiyel operatör, Φ_1 ve Φ_2 iki lineer fonksiyon uzayı, X ise Φ_1'den Φ_2'ye bir sürekli lineer dönüşüm olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın:

1^o $AX=XB$'dir

2^o X^{-1} sürekli tersi vardır.

Bu durumda, X 'e bir operatör dönüşüm denir.

$$A \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \; B \equiv \begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

olsun. Burada $p_1(x)$, $p_2(x)$, $r_1(x)$ ve $r_2(x)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli ve reel değerli fonksiyonlardır.

Φ_1 ve Φ_2 sırasıyla

$$\begin{aligned} f_2(0)\cos\gamma + f_1(0)\sin\gamma = 0, \\ g_2(0)\cos\delta + g_1(0)\sin\delta = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

sınır koşullarını sağlayan ve

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \; g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

sürekli türevlere sahip olan fonksiyonların uzayı olsun. Burada γ ve δ keyfi reel sayılardır [2].

Lemma 3.3.1.1 [2]. Bir X operatör dönüşümü $g(x) = X\left[f(x)\right]$ şeklinde verilir. Yani

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \alpha(x) f_1(x) + \beta(x) f_2(x) + \int_0^x \left\{P(x,s) f_1(s) + R(x,s) f_2(s)\right\} ds, \\ g_2(x) &= -\beta(x) f_1(x) + \alpha(x) f_2(x) + \int_0^x \left\{Q(x,s) f_1(s) + H(x,s) f_2(s)\right\} ds \end{aligned} \tag{3.13}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{\chi}\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x \left[p_1(t) + r_1(t) - p_2(t) - r_2(t)\right] dt + \arcsin\frac{1}{\chi}\right\}, \\ \beta(x) &= \frac{1}{\chi}\cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x \left[p_1(t) + r_1(t) - p_2(t) - r_2(t)\right] dt + \arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

dır. Ayrıca $\chi = \sec(\delta - \gamma)$ ve $P(x,s)$, $R(x,s)$, $Q(x,s)$, $H(x,s)$ sürekli türeve sahip fonksiyonlardır.

Bu iddianın ispatı [2, pp:367-372]'da yapılmıştır.

3.3.2. Operatör Dönüşümün Yardımı ile Asimptotik Formüllerin Elde Edilmesi

$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu (3.7) denklemler sisteminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\cos\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda)=-\sin\alpha \tag{3.15}$$

koşullarını sağlayan çözümü olsun. $p(x)=r(x)\equiv 0$ için

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos(\lambda x-\alpha),\ \varphi_2(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha) \tag{3.16}$$

olduğunu göstermek zor değildir. Şimdi (3.7) - (3.8) probleminin çözümlerine bir operatör dönüşümü uygulayalım. (3.7) denklemler sistemi

$$A_1 y=\begin{pmatrix}-p(x) & \dfrac{d}{dx}\\ -\dfrac{d}{dx} & -r(x)\end{pmatrix}y=\lambda y \tag{3.17}$$

formundadır. (3.16) fonksiyonu, yani

$$\begin{pmatrix}\cos(\lambda x-\alpha)\\ \sin(\lambda x-\alpha)\end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonu

$$B_1 y=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{d}{dx}\\ -\dfrac{d}{dx} & 0\end{pmatrix}y=\lambda y \tag{3.18}$$

denkleminin çözümüdür. Eğer $\psi(x,\lambda)$ vektör fonksiyonu $B_1\psi=\lambda\psi$ denkleminin bir çözümü ise X operatör dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$A_1X[\psi]=XB_1[\psi]=X[\lambda\psi]=\lambda X[\psi]$$

olduğu elde edilir. Yani $\varphi=X[\psi]$ vektör fonksiyonu $A_1\varphi=\lambda\varphi$ denkleminin bir çözümüdür. Böylece

$$\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\cos(\lambda x-\alpha)\\ \sin(\lambda x-\alpha)\end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonu (3.18) denkleminin bir çözümü ise $\varphi(x,\lambda)=X\left[\psi(x,\lambda)\right]$ vektör fonksiyonu da (3.17) denkleminin bir çözümüdür. Ele alınan bu durumda, $p_1(x)=-p(x)$, $r_1(x)=-r(x)$, $p_2(x)=r_2(x)\equiv 0$'dır ve (3.12) sınır koşullarının yerine, (3.15) sınır koşulları alındığından $\gamma=\delta$ olur. Yani $\chi=1$'dir. (3.14) 'ten

$$\begin{aligned}\alpha(x)&=\cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x\left[p(t)+r(t)\right]dt\right\},\\ \beta(x)&=\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x\left[p(t)+r(t)\right]dt\right\}\end{aligned}\tag{3.19}$$

elde edilir. (3.13) formülünden (3.7), (3.15) probleminin

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

çözümü için aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,\lambda)&=\alpha(x)\cos(\lambda x-\alpha)+\beta(x)\sin(\lambda x-\alpha)\\ &\quad+\int_0^x\left\{P(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+R(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds,\\ \varphi_2(x,\lambda)&=\alpha(x)\sin(\lambda x-\alpha)-\beta(x)\cos(\lambda x-\alpha)\\ &\quad+\int_0^x\left\{Q(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+H(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds.\end{aligned}$$

Ya da (3.19)'daki $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,\lambda)&=\cos\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}\\ &\quad+\int_0^x\left\{P(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+R(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds\end{aligned}\tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x,\lambda)&=\sin\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}\\ &\quad+\int_0^x\left\{Q(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+H(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds\end{aligned}\tag{3.21}$$

elde edilir. Burada

$$\xi(x,\lambda)=\lambda x-\frac{1}{2}\int_0^x\left\{p(t)+r(t)\right\}dt\tag{3.22}$$

dir.

Lemma 3.3.2.1. [2]. Aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,\lambda) &= \cos\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \\ \varphi_2(x,\lambda) &= \sin\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1(x,\lambda)}{\partial\lambda} &= -x\sin\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O(1), \\ \frac{\partial\varphi_2(x,\lambda)}{\partial\lambda} &= x\cos\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O(1). \end{aligned} \tag{3.24}$$

İspat: (3.23)'ü elde etmek için (3.20) ve (3.21)'in sağ tarafındaki integrallerde kısmi integrasyon yöntemini kullanmak yeterlidir. ($P(x,s)$, $R(x,s)$, $Q(x,s)$ ve $H(x,s)$ fonksiyonları diferansiyellenebilir olduğundan kısmi integrasyon metodu uygulanabilir). (3.24) ise (3.20) ve (3.21)'in iki yanından türev alınarak benzer bir yolla ispatlanabilir.

Lemma 3.3.2.2 [2]. (3.7) - (3.9) sınır değer probleminin özdeğerleri sadece

$$\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta+\varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta$$

fonksiyonunun sıfırlarıdır ve bu fonksiyonun bütün sıfırları basittir.

İspat: $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ fonksiyonları (3.8) sınır koşullarını sağladığından (3.7) - (3.9) sınır değer probleminin özdeğerlerini bulmak için $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarına (3.9) sınır koşulları sağlatılmalı ve ardından bu denklemin sıfırları araştırılmalıdır.

$$D(\lambda)=\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta+\varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta$$

yazılırsa

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\partial\varphi_2(\pi,\lambda)}{\partial\lambda}\cos\beta+\frac{\partial\varphi_1(\pi,\lambda)}{\partial\lambda}\sin\beta$$

elde edilir. Varsayalım ki, λ_1 sayısı $D(\lambda)$ fonksiyonunun çok katlı köküdür ve

$$\varphi(x,\lambda_1)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda_1)\\ \varphi_2(x,\lambda_1)\end{pmatrix}$$

λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektör fonksiyonudur. O halde $D(\lambda_1)=0$ ve $\dfrac{dD(\lambda_1)}{d\lambda}=0$ denklemlerinin ikisi aynı anda sağlanır. Yani

$$\varphi_2(\pi,\lambda_1)\cos\beta+\varphi_1(\pi,\lambda_1)\sin\beta=0$$

ve

$$\frac{\partial\varphi_2(\pi,\lambda_1)}{\partial\lambda}\cos\beta+\frac{\partial\varphi_1(\pi,\lambda_1)}{\partial\lambda}\sin\beta=0$$

dır. Bu iki denklemden

$$\varphi_2(\pi,\lambda_1)\frac{\partial\varphi_1(\pi,\lambda_1)}{\partial\lambda}-\varphi_1(\pi,\lambda_1)\frac{\partial\varphi_2(\pi,\lambda_1)}{\partial\lambda}=0 \qquad (3.25)$$

elde edilir. (3.7) denkleminin her iki tarafından λ'ya göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}\right)_x'-\{\lambda+p(x)\}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda}&=y_1,\\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial\lambda}\right)_x'+\{\lambda+r(x)\}\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}&=-y_2\end{aligned} \qquad (3.26)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.26) denklemleri sırasıyla $\dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda}$, $-\dfrac{\partial y_2}{\partial\lambda}$, $-y_1$ ve y_2 ile çarpılıp taraf tarafa toplanır ve daha sonra 0'dan π'ye integre edilirse

$$\left\{y_2(x,\lambda)\frac{\partial y_1}{\partial\lambda}-y_1(x,\lambda)\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}\right\}\Bigg|_0^\pi=-\int_0^\pi\left\{y_1^2(x,\lambda)+y_2^2(x,\lambda)\right\}dx$$

elde edilir. $\lambda=\lambda_1$ değeri yerine yazılırsa (3.15)'ten

$$\left.\frac{\partial\varphi_1(x,\lambda_1)}{\partial\lambda}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\varphi_2(x,\lambda_1)}{\partial\lambda}\right|_{x=0}=0$$

olacağından (3.25) denkleminden

$$-\int_0^\pi\left\{\varphi_1^2(x,\lambda_1)+\varphi_2^2(x,\lambda_1)\right\}dx=\varphi_2(\pi,\lambda_1)\frac{\partial\varphi_1(\pi,\lambda_1)}{\partial\lambda}-\varphi_1(\pi,\lambda_1)\frac{\partial\varphi_2(\pi,\lambda_1)}{\partial\lambda}=0$$

elde edilir. Buradan $\varphi_1(x,\lambda_1)=\varphi_2(x,\lambda_1)\equiv 0$ bulunur. Bu ise λ_1'in (3.7) - (3.9) sınır değer probleminin özdeğeri olması ile çelişir. O halde λ_1 basit özdeğerdir.

Daha önce de bahsedildiği gibi (3.7) - (3.9) sınır değer probleminin özdeğerleri ile

$$\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta+\varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta=0$$

denkleminin kökleri çakışmaktadır. Bu denklemde (3.23)'ten $\varphi_1(\pi,\lambda)$ ve $\varphi_2(\pi,\lambda)$ değerleri yerine yazılırsa

$$\sin(\lambda\pi-\nu)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0 \tag{3.27}$$

elde edilir. Burada ν'nün değeri (3.22)'den

$$\nu=\beta-\alpha-\frac{1}{2}\int_0^\pi\{p(t)+r(t)\}dt \tag{3.28}$$

şeklinde bulunur. (3.27) denkleminden $|\lambda|$'nın büyük değerlerinde

$$\lambda_n\pi-\nu=n\pi+\delta_n \quad (n=0,\pm1,\pm2,...)$$

olduğunu göstermek zor değildir. Bu değerler (3.27)'de yerine yazılırsa $\sin\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ yani $\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ bulunur. Sonuç olarak

$$\lambda_n=n+\frac{\nu}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n=0,\pm1,\pm2,...) \tag{3.29}$$

asimptotik formülü elde edilir.

(3.29) formülü kullanılarak, $\varphi_1(x,\lambda_n)=u_n(x)$ ve $\varphi_2(x,\lambda_n)=v_n(x)$ yazılırsa

$$u_n(x)=\cos(\xi_n-\alpha)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.30}$$

$$v_n(x)=\sin(\xi_n-\alpha)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.31}$$

asimptotik formülleri elde edilir. Burada

$$\xi_n=\xi_n(x,\lambda_n)=\lambda_n x-\frac{1}{2}\int_0^x\{p(t)+r(t)\}dt$$

dir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. (1.1) - (1.4) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Lemma 4.1.1. (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: Aksini varsayalım. λ_0, (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin reel olmayan bir özdeğeri, $\left(u(x), w(x)\right)$ de bu özdeğere karşılık gelen özvektör fonksiyonu olsun. Belirtelim ki, her bir $x \in [0,1]$ için $|u(x)| + |w(x)| > 0$'dır.

(1.1) - (1.2) denklemlerine göre

$$\frac{d}{dx}\left\{u(x)\overline{w(x)} - \overline{u(x)}w(x)\right\} = \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\left\{|u(x)|^2 + |w(x)|^2\right\} \tag{4.1}$$

eşitliği doğrudur. Gerçekten de (1.1) - (1.2) denklemlerine göre

$$\frac{d}{dx}\left\{u(x)\overline{w(x)} - \overline{u(x)}w(x)\right\} = u'(x)\overline{w(x)} + u(x)\overline{w'(x)} - \overline{u'(x)}w(x) - \overline{u(x)}w'(x)$$

$$= \left\{\lambda_0 + P(x)\right\}|w(x)|^2 - \left\{\overline{\lambda_0} + R(x)\right\}|u(x)|^2 - \left\{\overline{\lambda_0} + P(x)\right\}|w(x)|^2 + \left\{\lambda_0 + R(x)\right\}|u(x)|^2$$

$$= \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\left\{|u(x)|^2 + |w(x)|^2\right\}$$

olur.

(4.1) özdeşliği x değişkenine göre 0'dan 1'e integre edilirse

$$\left\{u(1)\overline{w(1)} - \overline{u(1)}w(1)\right\} - \left\{u(0)\overline{w(0)} - \overline{u(0)}w(0)\right\} = \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\int_0^1 \left\{|u(x)|^2 + |w(x)|^2\right\}dx \tag{4.2}$$

elde edilir. (1.5) koşuluna göre $\lambda_0 \cos\beta + a = 0$ olamaz. Varsayalım ki $\lambda_0 \cos\beta + a = 0$'dır. $\cos\beta \neq 0$ durumunda $\lambda_0 = -\frac{a}{\cos\beta}$ elde edilir. Bu ise λ_0 özdeğerinin reel olmaması ile çelişir. $\cos\beta = 0$ durumunda ise $a = 0$ olur ve $\sigma = a\sin\beta - b\cos\beta = 0$ elde edilir ki, bu da (1.5) koşulu ile çelişir. Demek ki $\lambda_0 \cos\beta + a \neq 0$'dır. Böylece (1.4) sınır koşulundan

$$u(1)=\frac{\lambda_0\sin\beta+b}{\lambda_0\cos\beta+a}w(1) \tag{4.3}$$

elde edilir. $\cos\alpha=0$ olduğunda (1.3) koşuluna göre

$$w(0)=0$$

olur. Sonuncuya ve (4.3)'e göre (4.2) eşitliği

$$\frac{\left(\lambda_0-\overline{\lambda_0}\right)\sigma\left|w(1)\right|^2}{\left|\lambda_0\cos\beta+a\right|^2}=\left(\lambda_0-\overline{\lambda_0}\right)\int_0^1\left\{\left|u(x)\right|^2+\left|w(x)\right|^2\right\}dx \tag{4.4}$$

biçimini alır. λ_0 reel olmadığından (4.4)

$$\frac{\sigma\left|w(1)\right|^2}{\left|\lambda_0\cos\beta+a\right|^2}=\int_0^1\left\{\left|u(x)\right|^2+\left|w(x)\right|^2\right\}dx \tag{4.5}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuncu eşitlik $\sigma<0$ ve $\int_0^1\left\{\left|u(x)\right|^2+\left|w(x)\right|^2\right\}dx>0$ eşitsizlikleri ile çelişir. Demek ki; $\cos\alpha=0$ olduğunda λ_0 reeldir.

$\cos\alpha\neq 0$ olduğunda ise (1.3) göre $u(0)=w(0)\tan\alpha$ olur. Sonuncuyu ve (4.3)'ü (4.2)'de dikkate alırsak yine (4.5) çelişkisi elde edilir. Lemma 4.1.1 ispat edildi.

Kolayca gösterilebilir ki (1.1) - (1.2) denklemler sisteminin

$$u(0,\lambda)=\sin\alpha,\ \ w(0,\lambda)=\cos\alpha \tag{4.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan tek türlü belirli $\left(u(x,\lambda),w(x,\lambda)\right)$ çözümü vardır. Ayrıca her bir sabitlenmiş $x\in[0,1]$ için $u(x,\lambda)$ ve $w(x,\lambda)$ fonksiyonları λ argümentinin tam fonksiyonlarıdır. Bu hükmün ispatı [2, pp:14]'deki Teorem 1.1'in ispatına benzer biçimde yapılır.

Belirtelim ki, (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$(\lambda\cos\beta+a)u(1,\lambda)-(\lambda\sin\beta+b)w(1,\lambda)=0 \tag{4.7}$$

denkleminin kökleridir.

Lemma 4.1.2. (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri en fazla sayılabilir tanedir ve bu özdeğerlerin oluşturduğu küme sonlu limit noktasına sahip değildir. Ayrıca (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin tüm özdeğerleri basittir.

İspat: (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri (4.7) denkleminin sol tarafındaki tam fonksiyonun sıfırlarıdır. Lemma 4.1.1'e göre λ parametresinin reel olmayan değerlerinde bu fonksiyon sıfırdan farklıdır. Özdeş olarak sıfır olmayan tam fonksiyonun sıfırları en fazla sayılabilir tanedir ve sonlu limit noktasına sahip değildir.

Şimdi (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerlerinin basit olduğunu ispatlayalım. Önce gösterelim ki;

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left\{u(x,\lambda)w(x,\mu)-u(x,\mu)w(x,\lambda)\right\}\\ &=(\lambda-\mu)\left\{u(x,\lambda)u(x,\mu)+w(x,\lambda)w(x,\mu)\right\}\end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliği doğrudur. Gerçekten de (1.1) - (1.2) denklemlerine göre

$$\frac{d}{dx}\left\{u(x,\lambda)w(x,\mu)-u(x,\mu)w(x,\lambda)\right\}$$

$$=\left\{u'(x,\lambda)w(x,\mu)+u(x,\lambda)w'(x,\mu)\right\}-\left\{u'(x,\mu)w(x,\lambda)+u(x,\mu)w'(x,\lambda)\right\}$$

$$\left\{\lambda+P(x)\right\}w(x,\lambda)w(x,\mu)-\left\{\mu+R(x)\right\}u(x,\lambda)u(x,\mu)$$

$$-\left\{\mu+P(x)\right\}w(x,\lambda)w(x,\mu)+\left\{\lambda+R(x)\right\}u(x,\lambda)u(x,\mu)$$

$$=(\lambda-\mu)\left\{u(x,\lambda)u(x,\mu)+w(x,\lambda)w(x,\mu)\right\}$$

elde edilir. (4.8)'in her iki tarafı 0'dan 1'e integre edilip (4.6) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&u(1,\lambda)w(1,\mu)-u(1,\mu)w(1,\lambda)\\ &=(\lambda-\mu)\int_0^1\left\{u(x,\lambda)u(x,\mu)+w(x,\lambda)w(x,\mu)\right\}dx\end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. $\lambda\neq\mu$ kabul edelim. Bu durumda (4.9)'dan

$$\frac{u(1,\lambda)w(1,\mu)-u(1,\mu)w(1,\lambda)}{\lambda-\mu}=\int_0^1\left\{u(x,\lambda)u(x,\mu)+w(x,\lambda)w(x,\mu)\right\}dx$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikte $\mu\to\lambda$ iken limite geçilirse,

$$w(1,\lambda)\frac{\partial u(1,\lambda)}{\partial\lambda}-u(1,\lambda)\frac{\partial w(1,\lambda)}{\partial\lambda}=\int_0^1\left\{\left\{u(x,\lambda)\right\}^2+\left\{w(x,\lambda)\right\}^2\right\}dx \tag{4.10}$$

bulunur.

Gösterelim ki, (4.7) denkleminin yalnızca basit kökleri vardır. Aksini varsayalım. Yani $\lambda=\lambda^*$ (4.7) denkleminin çok katlı kökü olsun. Bu durumda,

$$\left(\lambda^* \cos\beta + a\right) u\left(1,\lambda^*\right) - \left(\lambda^* \sin\beta + b\right) w\left(1,\lambda^*\right) = 0, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} & u\left(1,\lambda^*\right)\cos\beta + \left(\lambda^* \cos\beta + a\right)\frac{\partial u\left(1,\lambda^*\right)}{\partial\lambda} \\ & -w\left(1,\lambda^*\right)\sin\beta - \left(\lambda^* \sin\beta + b\right)\frac{\partial w\left(1,\lambda^*\right)}{\partial\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

olur.

İspatlayalım ki, $\lambda^* \cos\beta + a$ ve $\lambda^* \sin\beta + b$ sayıları aynı anda sıfır olamaz. Aksini varsayalım. Yani $\lambda^* \cos\beta + a = 0$ ve $\lambda^* \sin\beta + b = 0$ olsun. $\cos\beta = 0$ (veya $\sin\beta = 0$) olduğunda $a = 0$ (uygun olarak $b = 0$) olur ve $\sigma = 0$ elde edilir. Sonuncu ise (1.5) ile çelişir. $\cos\beta.\sin\beta \neq 0$ durumunda ise $\lambda^* = -\dfrac{b}{\sin\beta} = -\dfrac{a}{\cos\beta}$ yani, $\sigma = a\sin\beta - b\cos\beta = 0$ olur. Sonuncu yine (1.5) ile çelişir. Böylece

$$\left(\lambda^* \cos\beta + a\right)^2 + \left(\lambda^* \sin\beta + b\right)^2 > 0$$

olur.

$\lambda^* \cos\beta + a \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.11) ve (4.12)'den

$$u\left(1,\lambda^*\right) = \frac{\lambda^* \sin\beta + b}{\lambda^* \cos\beta + a} w\left(1,\lambda^*\right),$$

$$\frac{\partial u\left(1,\lambda^*\right)}{\partial\lambda} = \frac{\sigma w\left(1,\lambda^*\right)}{\left(\lambda^* \cos\beta + a\right)^2} + \frac{\lambda^* \sin\beta + b}{\lambda^* \cos\beta + a}\frac{\partial w\left(1,\lambda^*\right)}{\partial\lambda}$$

elde edilir. Bu eşitlikler $\lambda = \lambda^*$ için (4.10)'da yerine yazılırsa

$$\frac{\sigma\left\{w\left(1,\lambda^*\right)\right\}^2}{\left(\lambda^* \cos\beta + a\right)^2} = \int_0^1 \left\{\left\{u\left(x,\lambda^*\right)\right\}^2 + \left\{w\left(x,\lambda^*\right)\right\}^2\right\} dx$$

elde edilir. Bu ise $\sigma < 0$ olması ile çelişir. O halde (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin bütün özdeğerleri basittir.

$\lambda^* \sin\beta + b \neq 0$ durumu ise benzer biçimde yapılır.

4.2. BAZI YARDIMCI İDDİALAR

I. $P_\nu(x)$ ve $R_\nu(x)$ $(\nu=1,2)$, $[0,1]$ aralığında sürekli ve bu aralıkta $P_2(x)>P_1(x)>0$, $R_2(x)>R_1(x)>0$ koşullarını sağlayan fonksiyonlar olsun.

Aşağıdaki iki denklemler sistemini göz önüne alalım:

$$\begin{cases}\varphi_1'-P_1(x)\psi_1=0,\\ \psi_1'+R_1(x)\varphi_1=0,\end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases}\varphi_2'-P_2(x)\psi_2=0,\\ \psi_2'+R_2(x)\varphi_2=0.\end{cases} \tag{4.14}$$

$(\varphi_1(x),\psi_1(x))$ vektör fonksiyonu (4.13) denklemler sisteminin, $(\varphi_2(x),\psi_2(x))$ vektör fonksiyonu ise (4.14) denklemler sisteminin aşikardan farklı çözümü olsun.

Aşağıdaki iki lemma [3, pp:152-153]'deki karşılaştırma teoremlerinden kolayca elde edilir.

Lemma 4.2.1. Eğer $\varphi_1(0)=0$ veya $\varphi_1(0)\neq 0$, $\varphi_2(0)\neq 0$, $\dfrac{\psi_1(0)}{\varphi_1(0)}\geq\dfrac{\psi_2(0)}{\varphi_2(0)}$ ise $(0,1]$ yarı - açık aralığında $\varphi_2(x)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı, $\varphi_1(x)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısından az değildir ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonunun k. sıfırı, $\varphi_1(x)$ fonksiyonunun k. sıfırından küçüktür. Eğer $\psi_1(0)=0$ veya $\psi_1(0)\neq 0$, $\psi_2(0)\neq 0$, $\dfrac{\varphi_1(0)}{\psi_1(0)}\leq\dfrac{\varphi_2(0)}{\psi_2(0)}$ ise $(0,1]$ yarı - açık aralığında $\psi_2(x)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı, $\psi_1(x)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısından az değildir ve $\psi_2(x)$ fonksiyonunun k. sıfırı, $\psi_1(x)$ fonksiyonunun k. sıfırından küçüktür.

Lemma 4.2.2. Eğer $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonlarının $(0,1)$ aralığında sıfırlarının sayısı eşit ve $\varphi_1(1)\neq 0, \varphi_2(1)\neq 0$ ise $\dfrac{\psi_1(1)}{\varphi_1(1)} > \dfrac{\psi_2(1)}{\varphi_2(1)}$ eşitsizliği doğrudur. Eğer $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ fonksiyonlarının $(0,1)$ aralığında sıfırlarının sayısı eşit ve $\psi_1(1)\neq 0, \psi_2(1)\neq 0$ ise $\dfrac{\varphi_1(1)}{\psi_1(1)} < \dfrac{\varphi_2(1)}{\psi_2(1)}$ eşitsizliği doğrudur.

II. $(\varphi(x),\psi(x))$ vektör fonksiyonu

$$\begin{cases} \varphi' - p(x)\psi = 0, \\ \psi' + r(x)\varphi = 0 \end{cases}$$

denklemler sisteminin aşikardan farklı çözümü olsun. Burada $p(x), r(x)\in C[0,1]$ ve $p(x)>0$, $r(x)>0$ $(0\leq x\leq 1)$'dır.

$x^{(0)}(f)$ (uygun olarak $x^{(1)}(f)$) ile $f(x)\in C[0,1]$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığındaki en küçük (uygun olarak en büyük) sıfırını gösterelim.

Lemma 4.2.3 [28]. $\varphi(x)$ (uygun olarak $\psi(x)$) fonksiyonunun ardışık iki sıfırı arasına $\psi(x)$ (uygun olarak $\varphi(x)$) fonksiyonunun tek bir sıfırı yerleşir. Ayrıca $x^{(0)}(\varphi)$ (uygun olarak $x^{(0)}(\psi)$) var ve $\varphi(0)\psi(0)>0$ (uygun olarak $\varphi(0)\psi(0)<0$) ise $x^{(0)}(\psi)$ (uygun olarak $x^{(0)}(\varphi)$) de vardır ve $x^{(0)}(\psi)<x^{(0)}(\varphi)$ (uygun olarak $x^{(0)}(\varphi)<x^{(0)}(\psi)$)'dir. Benzer biçimde $x^{(1)}(\psi)$ (uygun olarak $x^{(1)}(\varphi)$) var ve $\varphi(1)\psi(1)>0$ (uygun olarak $\varphi(1)\psi(1)<0$) ise $x^{(1)}(\varphi)$ (uygun olarak $x^{(1)}(\psi)$) de vardır ve $x^{(1)}(\psi)<x^{(1)}(\varphi)$ (uygun olarak $x^{(1)}(\varphi)<x^{(1)}(\psi)$)'dir.

$f(x)\in C[0,1]$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığındaki sıfırlarının sayısı $N(f)$ olsun. Bu fonksiyonun $[0,1)$ yarı – açık aralığındaki sıfırlarını $t_j(f)$ $(j=1,2,...,N(f))$ ile gösterelim:

$$0\leq t_1(f)<t_2(f)<\cdots<t_{N(f)}(f)<1.$$

Lemma 4.2.3'ten aşağıdaki sonuç direk elde edilir.

Sonuç 4.2.1 [28]. Aşağıdaki iddialar doğrudur.

1^o $\varphi(0)\psi(0)>0$ ve $\varphi(1)\psi(1)>0$ ise,

$$N(\varphi)=N(\psi) \text{ ve } 0<t_1(\psi)<t_1(\varphi)<\cdots<t_{N(\psi)}(\psi)<t_{N(\varphi)}(\varphi)<1 \text{ dir;}$$

2^o $\varphi(0)\psi(0)<0$ ve $\varphi(1)\psi(1)<0$ ise,

$$N(\varphi)=N(\psi) \text{ ve } 0<t_1(\varphi)<t_1(\psi)<\cdots<t_{N(\varphi)}(\varphi)<t_{N(\psi)}(\psi)<1 \text{ dir;}$$

3^o $\varphi(0)\psi(0)>0$ ve $\varphi(1)\psi(1)<0$ ise,

$$N(\psi)=N(\varphi)+1 \text{ ve } 0<t_1(\psi)<t_1(\varphi)<\cdots<t_{N(\varphi)}(\varphi)<t_{N(\psi)}(\psi)<1 \text{ dir;}$$

4^o $\varphi(0)\psi(0)<0$ ve $\varphi(1)\psi(1)>0$ ise,

$$N(\varphi)=N(\psi)+1 \text{ ve } 0<t_1(\varphi)<t_1(\psi)<\cdots<t_{N(\psi)}(\psi)<t_{N(\varphi)}(\varphi)<1 \text{ dir;}$$

5^o $\varphi(0)=0$ ve $\varphi(1)\psi(1)<0$ ise,

$$N(\varphi)=N(\psi) \text{ ve } 0=t_1(\varphi)<t_1(\psi)<\cdots<t_{N(\varphi)}(\varphi)<t_{N(\psi)}(\psi)<1 \text{ dir;}$$

6^o $\varphi(0)=0$ ve $\varphi(1)\psi(1)>0$ ise,

$$N(\varphi)=N(\psi)+1 \text{ ve } 0=t_1(\varphi)<t_1(\psi)<\cdots<t_{N(\psi)}(\psi)<t_{N(\varphi)}(\varphi)<1 \text{ dir;}$$

7^o $\psi(0)=0$ ve $\varphi(1)\psi(1)>0$ ise,

$$N(\varphi)=N(\psi) \text{ ve } 0=t_1(\psi)<t_1(\varphi)<\cdots<t_{N(\psi)}(\psi)<t_{N(\varphi)}(\varphi)<1 \text{ dir;}$$

8^o $\psi(0)=0$ ve $\varphi(1)\psi(1)<0$ ise,

$$N(\psi)=N(\varphi)+1 \text{ ve } 0=t_1(\psi)<t_1(\varphi)<\cdots<t_{N(\varphi)}(\varphi)<t_{N(\psi)}(\psi)<1 \text{ dir.}$$

4.3. (1.1) - (1.4) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZFONKSİYONLARININ SALINIM ÖZELLİKLERİ

$\left(u(x,\lambda), w(x,\lambda)\right)$ vektör fonksiyonu (1.1) - (1.2) denklemler sisteminin (4.6) başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. G kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$G = \{\mu : \mu\cos\beta + a = 0 \vee \mu\sin\beta + b = 0\}.$$

Kolayca gösterilebilir ki, G kümesi boş değildir ve en fazla iki elemana sahiptir.

Kabul edelim ki,

$$\mu_* = \min G,\ \ \mu^* = \max G,$$

$$M = \max\left\{\max_{0\le x\le 1}\left|P(x)\right|, \max_{0\le x\le 1}\left|R(x)\right|\right\},$$

$$\widetilde{\lambda}_* = \min\{\mu_*, -M\},\ \ \widetilde{\lambda}^* = \max\{\mu^*, M\}$$

dir. Aşağıdaki sonuç Lemma 4.2.1'den direk elde edilir:

Sonuç 4.3.1. $\lambda'' > \lambda' > \widetilde{\lambda}^*$ veya $\lambda'' < \lambda' < \widetilde{\lambda}_*$ koşullarından biri sağlandığında $(0,1]$ yarı – açık aralığında $u(x,\lambda'')$ (uygun olarak $w(x,\lambda'')$) fonksiyonunun sıfırlarının sayısı, $u(x,\lambda')$ (uygun olarak $w(x,\lambda')$) fonksiyonunun sıfırlarının sayısından az değildir ve $u(x,\lambda'')$ (uygun olarak $w(x,\lambda'')$) fonksiyonunun k. sıfırı, $u(x,\lambda')$ (uygun olarak $w(x,\lambda')$) fonksiyonunun k. sıfırından küçüktür.

Şimdi, $0 \le x \le 1$ olmak üzere $u(x,\lambda) = 0$ (veya $w(x,\lambda) = 0$) denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin çözümlerinin λ'ya bağlı olduğu açıktır.

Aşağıdaki iki iddiada $\lambda \notin \left[\widetilde{\lambda}_*, \widetilde{\lambda}^*\right]$ kabul edilecektir.

Lemma 4.3.1. Eğer $x_0 \in [0,1]$ sayısı $u(x,\lambda_0)$ (uygun olarak $w(x,\lambda_0)$) fonksiyonunun bir sıfırı ise yeteri kadar küçük herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ koşulunun sağlandığı her bir λ için $u(x,\lambda)$

(uygun olarak $w(x,\lambda)$) fonksiyonunun $|x-x_0|<\varepsilon$ açık aralığında tek bir sıfırı vardır.

Bu iddianın ispatı [2, pp:30]'daki Lemma 3.1'in ispatının tamamıyla aynısıdır.

Bu lemmadan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.3.2. λ parametresi değiştiğinde $u(x,\lambda)$ (veya $w(x,\lambda)$) fonksiyonunun sıfır kazanması veya kaybetmesi yalnızca 0 ve 1 bitim noktalarından bir sıfırın dâhil olması ile mümkündür.

(1.1) - (1.4) sınır değer probleminin sayılabilir sayıda özdeğerlerinin varlığı aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 4.3.1. (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin sınırsız azalan $\{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ negatif özdeğerler dizisi ve sınırsız artan $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan özdeğerler dizisi vardır:

$$\cdots\lambda_{-n}<\lambda_{-n+1}<\cdots<\lambda_{-1}<\lambda_1<\cdots<\lambda_{n-1}<\lambda_n<\cdots$$

Buna ek olarak öyle $n^*,n_*,k^*,k_*\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ sayıları vardır ki $\lambda_n\,(n>n^*)$ özdeğerine karşılık gelen $(u_n(x),w_n(x))$ özvektör fonksiyonu ve $\lambda_{-n}\,(n>n_*)$ özdeğerine karşılık gelen $(u_{-n}(x),w_{-n}(x))$ özvektör fonksiyonu aşağıdaki salınım özelliklerine sahiptir:

1^o $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ ve $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ise,

$$N(u_n)=N(w_n)+1=n+k^*-n^*,\ x^{(0)}(u_n)<x^{(0)}(w_n)\ \text{dir;}$$

2^o $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ve $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ise,

$$N(w_n)=N(u_n)=n+k^*-n^*,\ x^{(0)}(w_n)<x^{(0)}(u_n)\ \text{dir;}$$

3^o $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ve $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ise,

$$N(u_n) = N(w_n) = n + k^* - n^*, \; x^{(0)}(u_n) < x^{(0)}(w_n) \text{ dir;}$$

4^o $\alpha \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ve $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ise,

$$N(w_n) = N(u_n) + 1 = n + k^* - n^* + 1, \; x^{(0)}(w_n) < x^{(0)}(u_n) \text{ dir;}$$

5^o $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ve $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ise,

$$N(u_{-n}) = N(w_{-n}) = n + k_* - n_*, \; x^{(0)}(u_{-n}) < x^{(0)}(w_{-n}) \text{ dir;}$$

6^o $\alpha \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ve $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ise,

$$N(w_{-n}) = N(u_{-n}) + 1 = n + k_* - n_* + 1, \; x^{(0)}(w_{-n}) < x^{(0)}(u_{-n}) \text{ dir;}$$

7^o $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ve $\beta \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ise,

$$N(u_{-n}) = N(w_{-n}) + 1 = n + k_* - n_*, \; x^{(0)}(u_{-n}) < x^{(0)}(w_{-n}) \text{ dir;}$$

8^o $\alpha \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ve $\beta \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ise,

$$N(w_{-n}) = N(u_{-n}) = n + k_* - n_*, \; x^{(0)}(w_{-n}) < x^{(0)}(u_{-n}) \text{ dir.}$$

İspat: Biz (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin yalnızca negatif olmayan özdeğerler dizisinin varlığını ve uygun $(u_n(x), w_n(x))$ özvektör fonksiyonlarının salınım özelliklerini inceleyeceğiz. Negatif özdeğerlerle ilgili olan iddialar tamamıyla benzer bir yolla ispatlanır.

$\widetilde{\lambda^*}$ bu bölümün başında tanımlanmış sayı olmak üzere $\lambda \geq \lambda^* = \widetilde{\lambda^*} + 1$ olsun. $(u(x,\lambda), w(x,\lambda))$ vektör fonksiyonu (1.1) - (1.2) denklemler sisteminin (4.6) başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. Sonuç 4.3.1'e göre $u(x,\lambda)$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığında sıfırlarının sayısı, λ parametresinin azalmayan fonksiyonudur.

$(\varphi(x), \psi(x))$ vektör fonksiyonu,

$$\varphi' - \left(\lambda - M - \frac{1}{2}\right)\psi = 0, \tag{4.15}$$

$$\psi' + \left(\lambda - M - \frac{1}{2}\right)\varphi = 0 \tag{4.16}$$

denklemler sisteminin

$$\varphi(0,\lambda) = \sin\alpha, \ \psi(0,\lambda) = \cos\alpha \tag{4.17}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. Kolayca gösterilebilir ki,

$$\varphi(x,\lambda) = \sin\left(\left(\lambda - M - \frac{1}{2}\right)x + \alpha\right)$$

dır.

$\lambda \to +\infty$ iken $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığındaki sıfırlarının sayısı sınırsız artar. (1.1), (1.2), (4.6) sınır değer problemini (4.15) - (4.17) sınır değer problemi ile karşılaştıralım. Lemma 4.2.1'den $\lambda \to +\infty$ iken $u(x,\lambda)$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığında sıfırlarının sayısının sonsuz arttığı elde edilir.

$\lambda \geq \lambda^*$ koşulu sağlandığında

$$u(x,\lambda) = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Lemma 4.3.1'e göre bu denklemin kökleri λ parametresinin sürekli fonksiyonudur. Öte yandan Sonuç 4.3.1'e göre $\alpha \neq 0$ olduğunda λ artarken $u(x,\lambda)$ fonksiyonunun her bir sıfırı sola hareket eder ve $x = 0$ noktasından geçmez. Zira sıfırların sayısı azalmaz; $\alpha = 0$ olduğunda ise her bir $\lambda \geq \lambda^*$ için $u(0,\lambda) = 0$'dır ve λ artarken $u(x,\lambda)$ fonksiyonunun $x = 0$'dan farklı her bir sıfırı sola hareket eder fakat $x = 0$ noktasından yine geçemez. Zira bu durumda da sıfırların sayısı azalmaz. Sonuç 4.3.2'ye göre sıfırlar yalnızca $x=1$ noktasından dahil olabilirler.

$\lambda=\tilde{\lambda}_0$ sayısı $\lambda\geq\lambda^*$ ve $u(1,\lambda)=0$ koşullarını sağlayan ilk sayı, yani $\tilde{\lambda}_0=\min\{\lambda:\lambda\geq\lambda^*\wedge u(1,\lambda)=0\}$ olsun. Açıktır ki,

böyle bir değer vardır.

Kabul edelim ki, $u(x,\tilde{\lambda}_0)$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığında k^* tane sıfırı vardır.

$\lambda=\tilde{\lambda}_1$ sayısı $\lambda>\tilde{\lambda}_0$ ve $u(1,\lambda)=0$ koşullarını sağlayan ilk sayı, yani $\tilde{\lambda}_1=\min\{\lambda:\lambda>\tilde{\lambda}_0\wedge u(1,\lambda)=0\}$ olsun. $u(x,\tilde{\lambda}_1)$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığında k^*+1 tane sıfırının olduğu açıktır. Bu yöntemle aşağıdaki özelliğe sahip $\tilde{\lambda}_0,\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,...$ dizisini elde ederiz: $\tilde{\lambda}_{k-1}<\lambda\leq\tilde{\lambda}_k$ olduğunda $u(x,\lambda)$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığında tam k^*+k tane sıfırı vardır ve ek olarak $u(1,\tilde{\lambda}_k)=0$'dır. Kolayca görülür ki, $\tilde{\lambda}_k$ $(k=0,1,2,...)$ sayıları (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri değildir.

Lemma 4.2.2'ye göre $\dfrac{w(1,\lambda)}{u(1,\lambda)}$ fonksiyonu $(\tilde{\lambda}_{k-1},\tilde{\lambda}_k)$ aralığında kesin azalandır. Öte yandan

$$u(x,\tilde{\lambda}_{k-1})=u(x,\tilde{\lambda}_k)=0$$

olduğundan $\dfrac{w(1,\lambda)}{u(1,\lambda)}$ fonksiyonu $(\tilde{\lambda}_{k-1},\tilde{\lambda}_k)$ aralığında $+\infty$'dan $-\infty$'a kadar kesin azalır.

$T(\lambda)=\dfrac{\lambda\cos\beta+a}{\lambda\sin\beta+b}$ olsun. $T'(\lambda)=-\dfrac{\sigma}{(\lambda\sin\beta+b)^2}$ ve $\sigma<0$ olduğundan $T(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda\sin\beta+b\neq0$ koşulunun sağlandığı her bir aralıkta kesin artandır.

n^* sayısı (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin $\left[0,\tilde{\lambda}_0\right]$ aralığında yerleşen özdeğerlerinin sayısı olsun. $\dfrac{w(1,\lambda)}{u(1,\lambda)}$ fonksiyonu $\left(\tilde{\lambda}_{k-1},\tilde{\lambda}_k\right)$ aralığında $+\infty$'dan $-\infty$'a kesin azalan olduğundan

$$\frac{w(1,\lambda)}{u(1,\lambda)}=T(\lambda)$$

denkleminin $\left(\tilde{\lambda}_{k-1},\tilde{\lambda}_k\right)$ aralığında tek bir çözümü vardır. Bu çözümü λ_{n^*+k} ile gösterelim: $\lambda_{n^*+k}\in\left(\tilde{\lambda}_{k-1},\tilde{\lambda}_k\right)$. $\lambda=\lambda_{n^*+k}$ değerinin (1.4) koşulunu sağladığı açıktır. Demek ki λ_{n^*+k}, (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğeridir ve ona karşılık gelen $\left(u\left(x,\lambda_{n^*+k}\right),w\left(x,\lambda_{n^*+k}\right)\right)$ özvektör fonksiyonunun birinci komponentinin $[0,1)$ yarı – açık aralığındaki sıfırlarının sayısı $u\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)$ fonksiyonunun bu aralıktaki sıfırlarının sayısı ile aynıdır. Yani $k+k^*$'a eşittir.

4.4. $\theta_n(x)$ FONKSİYONUNUN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

n^* sayısı Teorem 4.3.1'in ispatında tanımlanmış negatif olmayan tamsayı olmak üzere, bu bölüm boyunca $n>n^*$ kabul edeceğiz.

$\left(u_n(x),w_n(x)\right)$, (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin λ_n özdeğerine karşılık gelen özvektör fonksiyonu olsun.

$\theta_n(x)=\operatorname{Arctan}\dfrac{u_n(x)}{w_n(x)}$ olarak tanımlayalım. Daha kesin olarak

$$\theta_n(x)=\arg\left\{w_n(x)+iu_n(x)\right\}\tag{4.18}$$

yazabiliriz. (1.3) koşuluna göre $\theta_n(x)$ fonksiyonu başlangıç değerini

$$\theta_n(0)=\alpha+\frac{1-l_0}{2}\pi\tag{4.19}$$

olarak alır. Burada

$$l_0=\begin{cases}1, & \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ -1, & \alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]\end{cases}\tag{4.20}$$

dır.

x değişkeninin diğer değerlerinde $\theta_n(x)$ fonksiyonu $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ kesinlik ile (4.18)'in yardımı ile verilir. Zira $u_n(x)$ ve $w_n(x)$ fonksiyonları aynı noktada sıfır olamaz. $\theta_n(x)$ fonksiyonu (4.19) koşulunu sağlayacak ve x değişkenine göre sürekli olacak şekilde tek değerli olarak seçilebilir.

Lemma 4.4.1 [28]. $\theta_n(x)$ fonksiyonu

$$\theta_n'(x)=\lambda_n+P(x)\cos^2\theta_n(x)+R(x)\sin^2\theta_n(x)$$

diferansiyel denklemini sağlar ve buna göre $[0,1]$ aralığında kesin artandır.

(4.18) formülü gereğince $u_n(x)$ fonksiyonunun sıfırları öyle noktalardır ki bu noktalarda $\theta_n(x)$ fonksiyonu π'nin katlarına eşit değerler alır.

$0<\theta_n(0)\le\pi$ ve $\theta_n(x)$ fonksiyonu artan olduğundan x; 0'dan 1'e değiştiğinde bu fonksiyon sonlu sayıda $\pi,2\pi,...$ değerlerini alır.

$x_{n,k}$ $(k=1,2,...k_n)$ ile $u_n(x)$ fonksiyonunun $[0,1)$ yarı – açık aralığındaki sıfırlarını gösterelim:

$$0\le x_{n,1}<x_{n,2}<\cdots<x_{n,k_n}<1.$$

Salınım özellikleri hakkındaki Teorem 4.3.1'e göre $n>n^*$ olduğunda, $k_n=n+k^*-n^*$ olur. Böylece

$$\theta_n(x_{n,k})=k\pi\,(k=1,2,...k_n),\tag{4.21}$$

$$\theta_n(1)=\arctan\frac{\lambda_n\sin\beta+b}{\lambda_n\cos\beta+a}+\frac{1-l_1}{2}\pi,\tag{4.22}$$

$$l_1=\begin{cases}1, & \beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -1, & \beta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\end{cases}\tag{4.23}$$

olur.

Lemma 4.4.2 [28]. $x_{n,0}=0$ ve $x_{n,k_n+1}=1$ olmak üzere, aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur:

$$\lambda_n = n\pi + O(1),\ \Delta x_{n,k} = x_{n,k+1} - x_{n,k} = O\left(n^{-1}\right)\ \left(k=0,1,...k_n\right) \tag{4.24}$$

Lemma 4.4.3 [28]. $w_f^*(\delta)$, $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki süreklilik modülü ve $w_f(\delta)=\delta+w_f^*(\delta)$ olmak üzere her bir $f(x)\in C[0,1]$ fonksiyonu için

$$\int_0^1 f(x)\cos 2\theta_n(x)\,dx = O\left(w_f\left(n^{-1}\right)\right)$$

formülü doğrudur.

4.5. (1.1) - (1.4) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZVEKTÖR FONKSİYONLARI İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

Bu bölüm boyunca n sayısının mutlak değer olarak yeterince büyük bir tamsayı olduğunu kabul edeceğiz.

$\left(\Phi_n(x),\Psi_n(x)\right)$, (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin bir özvektör fonksiyonu ve $\Phi_n(x)$, $[0,1)$ yarı – açık aralığında $|n|$ sayıda sıfıra sahip olsun. μ_n ile $\left(\Phi_n(x),\Psi_n(x)\right)$ özvektör fonksiyonuna karşılık gelen özdeğeri gösterelim. Salınım özellikleri ile ilgili Teorem 4.3.1'den $n>0$ ise $\mu_n=\lambda_{n-k^*+n^*}$ ve $n<0$ ise $\mu_n=\lambda_{n-k_*+n_*}$'dır.

Teorem 4.5.1. Aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur.

$$\begin{aligned}\mu_n &= n\pi+\beta-\alpha-\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\beta+\operatorname{sgn}(-\alpha)\right)\\ &-\frac{1}{2}\int_0^1\left(P(x)+R(x)\right)dx+O\left(w\left(n^{-1}\right)\right)\ (n>0),\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\mu_n=(n+1)\pi+\beta-\alpha+\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sgn}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(P(x)+R(x)\right)dx+O\left(w\left(|n|^{-1}\right)\right)\ (n<0), \tag{4.26}$$

$$\Phi_n(x)=\sin\left(\xi_n(x)+\alpha\right)+O\left(|n|^{-1}\right), \tag{4.27}$$

$$\Psi_n(x)=\cos\left(\xi_n(x)+\alpha\right)+O\left(|n|^{-1}\right). \tag{4.28}$$

Burada $t\geq 0$ için $\operatorname{sgn} t=1$, $t<0$ için $\operatorname{sgn} t=-1$’dir. $w(\delta)=\delta+w_1(\delta)$ ve $w_1(\delta)$ $P(x)-R(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki süreklilik modülüdür. Ayrıca

$$\xi_n(x)=\lambda_n x-\frac{1}{2}\int_0^x\left(P(t)+R(t)\right)dt \tag{4.29}$$

dir.

İspat: Önce (4.25)’i ispatlayalım. $\tilde{\theta}_n(x)=\arg\left(\Psi_n(x)+i\Phi_n(x)\right)$ fonksiyonunu ele alalım. Lemma 4.4.1’den $\tilde{\theta}_n(x)$ fonksiyonu

$$\tilde{\theta}'(x)=\mu_n+\frac{1}{2}\left(P(x)+R(x)\right)+\frac{1}{2}\left(P(x)-R(x)\right)\cos 2\theta_n(x) \tag{4.30}$$

diferansiyel denklemini sağlar ve buna göre $[0,1]$ aralığında kesin artandır. $\tilde{\theta}_n(0)$ ve $\tilde{\theta}_n(1)$, (4.19) ve (4.22)’de verildiği gibidir ve λ_n ile k_n yerine sırasıyla μ_n ile n yazılır.

Kolayca gösterilebilir ki,

$$\tilde{\theta}_n(0)=\alpha+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(-\alpha)$$
$$\tilde{\theta}_n(1)=n\pi+\beta+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.31}$$

(4.30) özdeşliğinin her iki tarafını 0’dan 1’e integre edip (4.31) değerlerini yerine yazarsak

$$n\pi+\beta-\alpha-\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\beta+\operatorname{sgn}(-\alpha)\right)+O\left(n^{-1}\right)$$

$$= \mu_n + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x)+R(x)\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x)-R(x)\right)\cos 2\theta_n(x)\,dx$$

elde ederiz. Buradan

$$\mu_n = n\pi + \beta - \alpha - \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\beta + \operatorname{sgn}(-\alpha)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x)+R(x)\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x)-R(x)\right)\cos 2\theta_n(x)\,dx + O\left(n^{-1}\right)$$

bulunur. Lemma 4.4.3'ten $\frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x)+R(x)\right)dx = O\left(w\left(n^{-1}\right)\right)$ değerlendirmesi yerine yazılırsa $O\left(w\left(n^{-1}\right)\right)+O\left(n^{-1}\right)=O\left(w\left(n^{-1}\right)\right)$ olduğundan

$$\mu_n = n\pi + \beta - \alpha - \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\beta + \operatorname{sgn}(-\alpha)\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x)+R(x)\right)dx + O\left(w\left(n^{-1}\right)\right)$$

elde edilir. (4.25) ispat edildi.

Şimdi (4.26)'yı ispatlayalım. $n<0$ kabul edelim ve aşağıdaki problemi inceleyelim. (1.1) - (1.4) sınır değer probleminde λ spektral parametresi yerine $\mu=-\delta$ alalım ve $\mu<0$ olduğunda negatif özdeğerler için asimptotik formüller elde edelim. $\mu<0$ olduğundan $\delta>0$ olur. $P_1(x)=-R(x)$, $R_1(x)=-P(x)$, $a_1=-b$, $b_1=-a$, $a_1^*=b$, $b_1^*=a$, $U(x)=w(x)$ ve $W(x)=u(x)$ yazalım.

1^o $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$ olsun.

O halde (1.1) - (1.4) sınır değer problemi

$$U' - \left\{\delta + P_1(x)\right\}W = 0, \tag{4.32}$$

$$W' + \left\{\delta + R_1(x)\right\}U = 0, \tag{4.33}$$

$$U(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - W(0)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 0, \tag{4.34}$$

$$\left(\delta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+a_1\right)U(1) - \left(\delta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+b_1\right)W(1) = 0 \tag{4.35}$$

sınır değer problemine dönüşür ve

$$\sigma^* = a_1\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - b_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = a\sin\beta - b\cos\beta = \sigma < 0$$

yine sağlanır. $\delta > 0$ olduğundan (4.25)'e göre

$$\delta_{-n} = -n\pi + \alpha - \beta - \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \operatorname{sgn}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x) + R(x)\right)dx + O\left(w\left(\left|n^{-1}\right|\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\mu_n = -\delta_{-n} = n\pi + \beta - \alpha + \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \operatorname{sgn}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x) + R(x)\right)dx + O\left(w\left(\left|n^{-1}\right|\right)\right) \qquad (4.36)$$

bulunur.

2^o $-\frac{\pi}{2} \le \alpha < 0$, $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ olsun.

O halde (1.1) - (1.4) sınır değer problemi (4.32) - (4.33) denklemleri ile

$$U(0)\cos\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - W(0)\sin\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (4.37)$$

ve (4.35) sınır koşulları ile verilmiş sınır değer problemine dönüşür. (4.25)'e göre

$$\delta_{-n} = -n\pi + \pi + \alpha - \beta - \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \operatorname{sgn}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x) + R(x)\right)dx + O\left(w\left(\left|n^{-1}\right|\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\mu_n = -\delta_{-n} = n\pi - \pi + \beta - \alpha + \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \operatorname{sgn}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x) + R(x)\right)dx + O\left(w\left(\left|n^{-1}\right|\right)\right) \qquad (4.38)$$

bulunur.

3^o $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \beta < 0$ olsun.

O halde (1.1) - (1.4) sınır değer problemi (4.32) - (4.33) denklemleri ile (4.34) ve

$$\left(\delta\cos\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)+a_1^*\right)U(1)-\left(\delta\sin\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)+b_1^*\right)W(1)=0 \qquad (4.39)$$

sınır koşulları ile verilmiş sınır değer problemine dönüşür. Burada

$$\sigma^{**}=a_1^*\sin\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)-b_1^*\cos\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\beta-b\cos\beta=\sigma<0$$

yine sağlanır. (4.25)'e göre

$$\delta_{-n}=-n\pi-\pi+\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sgn}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left(P(x)+R(x)\right)dx+O\left(w\left(\left|n^{-1}\right|\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\mu_n=-\delta_{-n}=n\pi+\pi+\beta-\alpha+\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sgn}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(P(x)+R(x)\right)dx+O\left(w\left(\left|n^{-1}\right|\right)\right) \qquad (4.40)$$

bulunur.

4^o $-\frac{\pi}{2}\le\alpha<0$, $-\frac{\pi}{2}\le\beta<0$ olsun.

O halde (1.1) - (1.4) sınır değer problemi (4.32) - (4.33) - (4.37) - (4.39) sınır değer problemine dönüşür. (4.25)'e göre

$$\delta_{-n}=-n\pi+\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sgn}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left(P(x)+R(x)\right)dx+O\left(w\left(\left|n^{-1}\right|\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\mu_n=-\delta_{-n}=n\pi+\beta-\alpha+\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sgn}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(P(x)+R(x)\right)dx+O\left(w\left(\left|n^{-1}\right|\right)\right) \qquad (4.41)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.36) - (4.38) - (4.40) - (4.41) asimptotik formülleri (4.26) da verilen

$$\mu_n = (n+1)\pi + \beta - \alpha + \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(-\beta - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sgn}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \left(P(x) + R(x)\right) dx + O\left(w\left(|n|^{-1}\right)\right)$$

şeklinde genel biçimde yazılabilir. (4.26)'nın ispatı bitti. (4.27) ve (4.28) asimptotik formüllerinin hesaplanması tamamıyla [2, pp:52-57]'deki gibidir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde ele alınan sonuçlar, *Bulgular ve Tartışma* bölümünde
4.1 (1.1) - (1.4) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Bazı Özellikleri,
4.2 Bazı Yardımcı İddialar,
4.3 (1.1) - (1.4) Sınır Değer Probleminin Özfonksiyonlarının Salınım Özellikleri,
4.4 $\theta_n(x)$ Fonksiyonunun Tanımı ve Özellikleri,
4.5 (1.1) - (1.4) Sınır Değer Probleminin Özdeğerleri ve Özvektör Fonksiyonları için Asimptotik Formüller,
başlıkları altında toplanmıştır.

4.1'de

$$u'-\{\lambda+P(x)\}w=0,$$

$$w'+\{\lambda+R(x)\}u=0,$$

$$u(0)\cos\alpha-w(0)\sin\alpha=0,$$

$$(\lambda\cos\beta+a)u(1)-(\lambda\sin\beta+b)w(1)=0$$

sınır değer problemi ele alındı ve $\sigma=a\sin\beta-b\cos\beta<0$ durumda bu problemin özdeğerlerinin:

1. Reel olduğu,
2. Basit olduğu,
3. En fazla sayılabilir bir küme oluşturduğu ve bu kümenin sonlu limit noktasının bulunmadığı ispatlandı.

4.2'de

$$\begin{cases}\varphi_1'-P_1(x)\psi_1=0,\\ \psi_1'+R_1(x)\varphi_1=0\end{cases}$$

ve

$$\begin{cases}\varphi_2'-P_2(x)\psi_2=0,\\ \psi_2'+R_2(x)\varphi_2=0\end{cases}$$

şeklinde iki denklemler sistemi ele alındı ve $P_2(x) > P_1(x) > 0$, $R_2(x) > R_1(x) > 0$ $(x \in [0,1])$ durumunda çözüm fonksiyonlarının birinci ve ikinci komponentlerinin sıfırlarının dizilişi hakkında bir takım sonuçlar elde edildi.

Ayrıca bu kısımda,

$$\begin{cases} \varphi' - p(x)\psi = 0, \\ \psi' + r(x)\varphi = 0 \end{cases}$$

şeklinde verilen denklemler sisteminin çözüm fonksiyonlarının birinci ve ikinci komponentlerinin sıfırlarının birbirine göre durumları, 0 ve 1 bitim noktalarındaki işaretlerinin davranışlarına göre belirlendi.

4.2'de elde edilen bu sonuçlar (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özvektör fonksiyonlarının komponentlerinin salınım özelliklerinin incelenmesinde büyük rol oynamaktadır.

4.3'de (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin sonsuz sayıda negatif özdeğerinin ve sonsuz sayıda negatif olmayan özdeğerinin varlığı ispat edildi. Bununla beraber α ve β sayılarının durumuna göre (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özvektör fonksiyonlarının komponentlerinin salınım özellikleri incelendi.

4.4'de $\theta_n(x)$ fonksiyonunun tanımı ve bazı özellikleri verildi ve bundan yararlanılarak (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri ve özvektör fonksiyonlarının komponentlerinin sıfırları arasındaki farklar için asimptotik değerlendirmeler yapıldı. Ayrıca bu kısımda (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerlerinin süreklilik modülüne bağlı asimptotik formüllerinin verilebileceği ispatlandı. Bu kısımda elde edilen sonuçlar (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri ve özvektör fonksiyonlarının komponentleri için asimptotik formüllerin elde edilmesinde büyük rol oynamaktadır.

4.5'te (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri ve özvektör fonksiyonlarının komponentleri için asimptotik formüller elde edildi.

Bu tez çalışmasında, araştırmanın amacında belirtilen ana hedeflere ulaşılmıştır. (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin spektral özelliklerinin incelenmesi bazı problemleri de yanında getirmiştir. Bu problemler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

a) (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin spektral özellikleri $\sigma = a\sin\beta - b\cos\beta < 0$ koşulu dahilinde incelenmiştir. $\sigma > 0$ durumunda da (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri reel ve basit olur mu?

b) (1.1) - (1.4) sınır değer probleminin farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlığı ile ilgili hangi sonuçları elde etmek mümkündür?

Tezde incelenmiş problemlerin doğal sonucu olarak bu iki problemin de araştırılması önerilir.

KAYNAKLAR

[1] Naimark, M.A. “Linear Differential Operators” 2nd ed., Nauka, Moskow, (1969) (in Russian); English Trans. of 1st ed., Parts I,II, Ungar, New York, (1967), (1968).

[2] Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S. “An Introduction to Spectral Theory. Selfadjoint Ordinary Differential Operators” (in Russian), Nauka, Moscow (1970); Amer. Math. Soc. (1975) (Translated from Russian).

[3] Kamke E.W.H. “Differentialgleichungen”, (in German) Leipzig (1959), Translated under the title “Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam”, Moskow, (1981)

[4] Walter, J. “Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition.” Mathematische Zeitschrift, **133** (4): 301-312, (1973)

[5] Fulton, C.T. “Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions”, Proc.Roy.Soc.Endinburg Sect.A, **77**: 293-308, (1977)

[6] Scheneider, A. “A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions”, Mathematische Zeitschrift, **136** (2): 163-167, (1974)

[7] Hinton, D.B. “An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Baundary Condition”, Quart.J.Math. Oxford, **30** (2): 33-42, (1979)

[8] Russakovskii, E.M. “Operator Treatment of Boundary Problems with Spectral Parameters Entering Via Polynomials in the Boundary Conditions”, Functional Analysis and Its Applications, **9** (4): 358-359, (1975)

[9] Shkalikov, A.A. “Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in the Boundary Conditions”, Functional Analysis and Its Applications, **16** (4): 324-326, (1982)

[10] Shkalikov, A.A. “Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in the Boundary Conditions”, Trudy Seminara im. Petrovskogo, (9): 190-229, (1983)

[11] Makhmudov, A. P. “Basics of Non-linear Spectral Analysis”, Dokl. Akad Nauk SSSR., **277** (6): 1318-1323, (1984)

[12] Meleshko, S.V. and Pokornyi, Yu. V. “On a Vibrational Boundary Value Problem”, Differentsial’nye Uravneniya, **23** (8): 1466-1467, (1987)

[13] Kerimov, N.B. and Allakhverdiyev, T.I. “On a Baundary Value Problem I” Differentsial’nye Uravneniya, **29** (1): 54-60, (1993) (in Russian), Trans. in Differential Equations, **29** (1): 45-50, (1993)

[14] Kerimov, N.B. and Allakhverdiyev, T.I. “On a Baundary Value Problem II” Differentsial’nye Uravneniya, **29** (6): 952-960, (1993) (in Russian), Trans. in Differential Equations, **29** (6): 814-821 (1993)

[15] Binding, P.A., Browne, P.J. and Seddighi, K. “Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Depent Boundary Conditions”, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2),**37** (1): 57-72 (1993)

[16] Binding, P.A. and Browne, P.J. “Oscillation Theory for Indefinite Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-Dependent Boundary Conditions”, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **127** (6): 1123-1136 (1997)

[17] Kerimov, N. B. and Mamedov, Kh. R. “On One Boundary Value Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions”, Siberian Mathematical Journal **40** (2): 281-290 (1999)

[18] Kerimov, N.B. and Poladov, R.G. “On Basisity in $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ of the System of Eigenfunctions of One Boundary Value Problem I” Proc. of Institue of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan **22**: 53-64 (2005)

[19] Kerimov, N.B. and Poladov, R.G. “On Basisity in $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ of the System of Eigenfunctions of One Boundary Value Problem II” Proc. of Institue of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan **23**: 65-76 (2005)

[20] Kerimov, N. B. and Aliev, Z. S. "Basis Properties of a Spectral Problem with Spectral Parameter in the Boundary Condition" Sbornik: Mathematics **197** (10): 1467-1487 (2006)

[21] Kerimov, N. B. and Aliev, Z. S. “On the Basis Property of the System of Eigenfunctions of a Spectral Problem with Spectral Parameter in the Boundary Condition” Differential Equations **43** (7): 905-915 (2007)

[22] Kerimov, N.B. and Mirzoev, V.S. "On the Basis Properties of One Spectral Problem with a Spectral Parameter in Boundary Conditions" Sibirsk. Math. Zh. **44**: 1041-1045 (2003) (in Russian), English Trans. Siberian Math. J. **44**: 813-816. (2003)

[23] Kapustin, N.Yu. and Moiseev, E.I. "A Remark on the Convergence Problem for Spectral Expansions Corresponding to a Classical Problem with Spectral Parameter in the Boundary Condition" Differential Equations **37** (12): 1677-1683 (2001)

[24] Kapustin, N.Yu. and Moiseev, E.I. "The Basis Property in L_p of the Systems of Eigenfunctions Corresponding to Two Problems with a Spectral Parameter in the Boundary Condition" Differential Equations **36** (10): 1498-1501 (2000)

[25] Kapustin, N.Yu. and Moiseev, E.I. "Convergence of Spectral Expansions for Functions of the Hölder Class for Two Problems with a Spectral Parameter in the Boundary Condition" Differential Equations **36** (8): 1182-1188 (2000)

[26] Kapustin, N.Yu. "On a Spectral Problem Arising in a Mathematical Model of Torsional Vibrations of a Rod with Pulleys at the Ends" Differential Equations **41** (10): 1490-1492 (2005)

[27] Kapustin, N.Yu. "An a Priori Estimate for the Solution of a Mixed Problem for the Heat Equation" Differential Equations **42** (10): 1447-1452 (2006)

[28] Kerimov, N.B. "A Boundary Value Problem for the Dirac System with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions" Differential Equations **38** (2): 164-174 (2002) Translated from Differentsial'nye Uravneniya **38** (2): 155-164 (2002)

[29] Balcı, M. "Matematik Analiz" Ertem Matbaası, 124-138 (1984)

[30] Thomas, G.B. and Finney, R.L. "<u>Calculus and Analytic Geometry</u>" Addison-Wesley Publishing Company, (1984)

[31] Shevchuk, I.A. "<u>Approximation by Polinomials and Trace of Functions Continuous on a Segment</u>" Naukova Dymka, Kiev (1992)

[32] Ahlfors L.V. "Complex Analysis" McGraw-Hill Book Company (Third Edition), Singapore (1979)

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Mersin'de doğdum. İlk ve orta öğrenimimi bu şehirde yaptım. 2002-2006 yılları arasında Mersin Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2006 yılında Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına başladım. 25 Aralık 2006 tarihinden bu yana Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosuna bağlı olarak Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.