BAZI p-ADİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNE

ABDULKADİR AŞAN

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Hamza MENKEN

MERSİN
Haziran - 2008

ÖZ

Bu çalışmada $C_i \in \mathbb{Z}$ (veya daha genel olarak $C_i \in \mathbb{C}_p$) ve $P_k(n) = n^k + C_{k-1}n^{k-1} + ... + C_0$ n ye göre bir polinom olmak üzere, yakınsaklık bölgesi $|x|_p < p^{1/(p-1)}$ olan $F_k(x) = \sum_{n \geq 0} n!P_k(n)x^n$ biçimindeki analitik fonksiyonları çözüm kabul eden $p-$adik diferansiyel denklemler ele alınmaktadır. Bazı özel $P_k(n)$ sınıfları için tanımlanan $F_k(x)$ analitik fonksiyonlarına karşılık gelen diferansiyel denklemler verilmiş ve bu diferansiyel denklemlerdeki kat sayıların sağladığı bazı rekürans bağıntıları elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: $p-$adik Norm, $p-$adik Sayılar, $p-$adik Kuvvet Serileri, $p-$adik Diferansiyel Denklem.

ABSTRACT

In this thesis, some $p-$adic differential equations which have a solution in the form $F_k(x)=\sum_{n\geq 0} n!P_k(n)x^n$ are investigated where $P_k(n)=n^k+C_{k-1}n^{k-1}+...+C_0$ is a polynomial and $C_i \in \mathbb{Z}$ (or $C_i \in \mathbb{C}_p$). Here the region of convergence is $|x|_p < p^{1/(p-1)}$. For some special classes of $P_k(n)$, the forms of the corresponding differential equations are given and some recurrence relations for the coefficients of the corresponding differential equations are obtained.

Key words: $p-$adic Numbers, $p-$adic Norm, $p-$adic Power Series, $p-$adic Differential Equation.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalına Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmış olup tez konusu, 'Bazı $p-$Adik Diferansiyel Denklemler Üzerine' dir.

Yüksek Lisans öğrenimim ve çalışmanın hazırlanış sürecinde yardımlarını esirgemeyen, deneyimlerini paylaşan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Hamza Menken ve önerileriyle önemli katkı sağlayan Doç. Dr. Hanlar Memmedov'a, Matematik Bölümü'nün tüm öğretim üyelerine ve ayrıca beni destekleyen başta annem ve babam olmak üzere aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZ i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER VE KISALTMALAR v

1. GİRİŞ 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI 4

3. MATERYAL VE METOT 5
3.1. $p-$ADİK SAYILAR 5
3.1.1. Bir Cisim Üzerinde Norm 5
3.1.2. $p-$Adik Değerlendirme ve $p-$Adik Norm 6
3.1.2.1. $p-$Adik Değerlendirmenin Özellikleri 7
3.1.3. Metrik Uzay 9
3.1.4. $\mathbb{Q}$ Kümesinde Norm 13
3.1.5. $\mathbb{Q}_p$ Cisminin Özellikleri 16
3.2. $p-$ADİK ANALİZDE KUVVET SERİLERİ 20
3.2.1. Kuvvet Serileriyle Tanımlanan Fonksiyonlar 21
3.2.2. Bazı Elemanter Fonksiyonlar 23
3.2.3. $\mathbb{C}_p$ Kümesinin Özellikleri 25
3.2.4. $\mathbb{C}_p$ de Analiz 25
3.3. BAZI $p-$ADİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER 29
3.3.1. Bazı $p-$Adik Diferansiyel Denklemleri Varlığı 30
3.3.2. Bazı $p-$Adik Diferansiyel Denklemlerin İnşası 36

4. BULGULAR VE TARTIŞMA 40
4.1. $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!n^k x^n$ FONKSİYONLARININ SAĞLADIĞI DİFERANSİYEL DENKLEMLER 40
4.2. $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!\prod_{i=1}^{k}(n+\alpha_i)x^n,\ \alpha_i\in\mathbb{C}_p$ FONKSİYONLARININ SAĞLADIĞI DİFERANSİYEL DENKLEMLER 43

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 48

KAYNAKLAR 50

ÖZGEÇMİŞ 52

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}_p$	$p-$Adik sayılar cismi
v_p	$p-$Adik değerlendirme
$p \nmid a$	p, a yı bölmez.
$\mathbb{Z}_p$	$p-$Adik tam sayılar kümesi
$\vert\ \vert_\infty$	Mutlak değer normu
$\vert\ \vert_p$	$p-$Adik norm
$B(a,r)$	a merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\mathbb{C}_p$	$\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışının tamlaştırılmasıyla elde edilen cisim.
$\mathcal{O}$	$\mathbb{Q}_p$ nin değerlendirme halkası
$\mathfrak{D}$	$\mathbb{C}_p$ nin değerlendirme halkası
$\mathfrak{P}$	$\mathbb{C}_p$ nin değerlendirme ideali

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda, bilimsel deneylerde ve bilgisayardaki hesaplamalarda genelde tam sayılar ve kesirli sayılar, yani rasyonel sayılar kullanılmaktadır. Sonsuz periyodik olmayan kesirler olan irrasyonel sayılar bu tip hesaplamalarda kullanılmamaktadır. Bu nedenle bilimsel çalışmalarda rasyonel sayılar önemli bir yere sahiptir.

Şimdi $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde uzaklık kavramı olarak normun tanımını verelim.

$\mathbb{Q}$ üzerinde reel değerli bir $|\ |:\mathbb{Q}\to[0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa buna $\mathbb{Q}$ da bir norm denir:

Her $x, y\in\mathbb{Q}$ için,

1. $|x|\geq 0,\ |x|=0 \Leftrightarrow x=0$
2. $|xy|=|x||y|$
3. $|x+y|\leq|x|+|y|$

Burada, (3) koşulu 'üçgen eşitsizliği' olarak bilinir.

Genel $|\ |$ mutlak değer fonksiyonu $\mathbb{Q}$ da bir normdur.

Bilindiği gibi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi (trivial olmayan) hiçbir norma göre tam değildir.

Ostrowski Teoremi ile $\mathbb{Q}$da mümkün olan bütün normlar belirlidir. Bu teoreme göre $\mathbb{Q}$ üzerinde trivial olmayan herhangi bir norm ya mutlak değer normuna ya da p bir asal sayı olmak üzere, bir $|\ |_p$ $p-$adik normuna denktir $[13]$.

p sabit, fakat keyfi bir asal olmak üzere $|\ |_p$ $p-$adik normu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Herhangi bir $x\in\mathbb{Q},\ x\neq 0$ için,

$$x=p^{\alpha}.\frac{a}{b},\ \ p\nmid ab$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $\alpha\in\mathbb{Z}$ tam sayısı vardır ve bu durumda,

$$|x|_p = p^{-\alpha}$$

ile tanımlanır. Eğer $x = 0$ ise, $|0|_p = 0$ olarak alınır.

$|\ |_p$ $p-$adik normu, üçgen eşitsizliğinden daha güçlü olan

$$(3') \qquad |x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$$

eşitsizliğini sağlar.

$(3')$ koşuluna, *'ultrametrik eşitsizliği'* ve bu koşulu sağlayan norma ise non-Arşimedyan (Arşimedyan olmayan) norm denir. Hatırlatalım ki genel mutlak değer normu $(3')$ koşulunu sağlamadığından, Arşimedyan bir normdur.

Bilindiği gibi $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin genel mutlak değer normuna göre tamlaştırılması $\mathbb{R}$ reel sayılar cismidir.

$\mathbb{Q}$ nun bir $|\ |_p$ $p-$adik normuna göre tamlaştırılmasıyla, $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi elde edilir.

$\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi, ilk olarak 1904'te Kurt Hensel tarafından tanımlandı $[8]$. Bundan sonra, $p-$adik sayılar bir süre sayılar teorisinde uygulamadan yoksun olarak işlenmiştir.

1968'de iki pür matematikçi olan A.F. Monna ve F. Van der Blij, $p-$adik sayıları fizikte uygulamışlardır. Bu uygulama, kısıtlı olmasına karşın yeni bir bakış getirmiştir. Daha sonra 1972'de, E. Beltrametti ve G. Cosinelli $p-$adik sayıları kuantum mekaniğine uygulamak istemişler, fakat başarısız bir uygulama gerçekleştirdikleri için bu yöndeki çalışmalarına son vermişlerdir $[9]$.

1984'te V. S. Vladimirov ve I.V. Volovich $p-$adik sayıları süper cisim (super field) teorisine başarılı bir şekilde uygulamaları ile $p-$adik fizik veya non-Arşimedyan fizik diye adlandırılan yeni bir alan oluşmuştur. Böylece, $p-$adik evren modeli, $p-$adik kuantum teorisi, $p-$adik sicim teorisi gibi birçok alan gelişmiştir $[14]$.

Diğer taraftan matematikte $p-$adik analiz veya non-Arşimedyan Analiz diye bilinen bir alan oluşmuştur. Bu alanda $p-$adik fonksiyonel teorisinden, $p-$adik sayılar teorisine kadar birçok alanda çalışmalar yapılmaktadır.

Bu çalışmada, hipergeometrik serilerin özel şekli olan

$$\sum n!P_k(n)x^n$$

$p-$adik kuvvet serileri ele alınmaktadır.

Hipergeometrik serilerin genel teorisi $[6]$ da verilmiştir.

Bilindiği üzere $\sum n!P_k(n)x^n$ formundaki seriler, herhangi bir $0 \neq x \in \mathbb{R}$ için, mutlak değer normuna göre ıraksaktır.

Buna karşın, $P_k(n)$ rasyonel kat sayılı k. dereceden ve n değişkenine bağlı bir polinom olmak üzere, $\sum n!P_k(n)x^n$ kuvvet serisi

$$|x| < p^{1/(p-1)}$$

bölgesinde $p-$adik olarak yakınsaktır.

Bu tip seriler $[4]$ de ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha sonra, çözümü

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} n!P_k(n)x^n$$

olan birinci ve ikinci dereceden $p-$adik diferansiyel denklemlerin varlığı ve çeşitli özellikleri $[2]$ de incelenmiştir.

Bu tezde, çözümü

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} n!n^k x^n$$

kuvvet serisi olan ve varlığı bilinen $p-$adik diferansiyel denklemlerin bir biçimi ve katsayıları için rekürans bağıntıları verilmiştir. Benzer tartışma,

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} n!\prod_{i=1}^{k}(n+\alpha_i)x^n, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}_p$$

$p-$adik kuvvet serisiyle tanımlı fonksiyonlar için yapılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

$p-$adik hipergeometrik diferansiyel denklemlerin genel teorisi $[6]$ da verilmiştir. Bu çalışmada, $p-$adik hipergeometrik serilerin özel bir durumu incelenmektedir. Bu tip kuvvet serilerinin bazı özellikleri $[4]$ te verilmiştir.

$P_k(n)$ k. dereceden, kat sayıları $\mathbb{Q}$ veya genel olarak $\mathbb{C}_p$ den olan n ye bağlı bir polinom olmak üzere,

$$\sum_{n\geq 0} n!P_k(n)x^n$$

şeklindeki $p-$adik kuvvet serileriyle tanımlanan analitik fonksiyonları çözüm kabul eden birinci ve ikinci dereceden $p-$adik diferansiyel denklemlerin varlığı ve bu tipten bazı denklemlerin inşası $[2]$ de ele alınmıştır.

Belirtelim ki, bu biçimdeki kuvvet serileri $\mathbb{R}$ reel sayılar cisminde ıraksaktır.

Bu tezde, varlığı $[2]$ de verilmiş bu tipten kuvvet serileriyle tanımlanan bazı fonksiyonları çözüm kabul eden $p-$adik diferansiyel denklemlerin biçimi ve bu biçimdeki denklemlerdeki kat sayılar için rekürans bağıntıları incelenmektedir.

Problemin incelenmesi esnasında $p-$adik analizin temel kavramları (olan $p-$adik sayılar, $p-$adik kuvvet serileri ve yakınsaklık bölgeleri, türev, vb…) için $[4],[7],[8],[9],[11],[13],[14]$ kaynaklarından; $p-$adik hipergeometrik serilerin bazı özellikleri için $[4]$ ten yararlanılmıştır.

$P_k(n)$ bir polinom olmak üzere, $p-$adik yakınsaklık bölgesi $|x|_p < p^{1/(p-1)}$ olan,

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} n!P_k(n)x^n$$

analitik çözümüne sahip $p-$adik diferansiyel denklemlerin varlığı ve bazı özel $P_k(n)$ polinomları için $p-$adik diferansiyel denklemlerin inşasında $[2]$ den faydalanılmıştır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. p-ADİK SAYILAR

3.1.1. Bir Cisim Üzerinde Norm

Tanım 3.1.1. K bir cisim olmak üzere, $|\ |: K \to [0,\infty)$ fonksiyonu,

i. Her $x \in K$ için, $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. Her $x, y \in K$ için, $|xy| = |x||y|$

iii. Her $x, y \in K$ için, $|x+y| \leq |x| + |y|$

şeklindeki üç koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona bir norm denir.

Eğer bu fonksiyon,

iv. Her $x, y \in K$ için, $|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}$

koşulunu da sağlarsa bu norma K üzerinde bir non-Arşimedyan (Arşimed olmayan) norm denir.

(iv) koşulu, (iii) koşulundan daha güçlüdür. Çünkü, $\max\{|x|,|y|\} \leq |x| + |y|$ eşitsizliği $\forall x, y \in K$ için sağlanır.

Örnek 3.1.1. $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde $x \in \mathbb{Q}$ olmak üzere,

$$|x| = \begin{cases} x\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan genel mutlak değer normu bir arşimedyan normdur. Çünkü $x = 1$, $y = 1$ için, $|1+1| \leq \max\{|1|,|1|\}$ eşitsizliği doğru olmadığından, (iv) koşulunu sağlamaz.

Örnek 3.1.2. K bir cisim olmak üzere, $x \in K$ için

$$|x| = \begin{cases} 1\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlı norm herhangi bir K cismi için non-Arşimedyan bir normdur. Bu norma trivial norm denir.

Lemma 3.1.1. Bir K cismi üzerinde herhangi bir $|\ |$ normu için aşağıdakiler sağlanır:

i. $|1| = 1$

ii. $x \in K$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $|x^n| = 1$ ise $|x| = 1$

iii. $|-1| = 1$

iv. Her $x \in K$ için $|-x| = |x|$

v. Eğer K sonlu bir cisim ise $|\ |$ normu trivialdir.

3.1.2. $p-$Adik Değerlendirme ve $p-$Adik Norm

Tanım 3.1.2. p herhangi bir asal sayı olsun. Sıfırdan farklı bir $n \in \mathbb{Z}$ için, n yi bölen p nin en büyük kuvvetine n nin derecesi denir ve $v_p(n)$ ile gösterilir.

$$v_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^+$$

dönüşümüne $\mathbb{Z}$ de $p-$*adik değerlendirme* denir.

Örnek 3.1.3. $p = 5$ için 150 sayısı, $150 = 5^2.6$ olduğundan, $v_5(150) = 2$ bulunur.

3.1.2.1. $p-$Adik Değerlendirmenin Özellikleri

i. $n=0$ ise, $\nu_p(0)=+\infty$

ii. $n=ab$ biçiminde bir sayı ise,

$$\nu_p(n)=\nu_p(ab)=\nu_p(a)+\nu_p(b) \tag{3.i}$$

iii. $n=a+b$ ise,

$$\nu_p(a+b)\geq \min\{\nu_p(a)+\nu_p(b)\} \tag{3.ii}$$

iv. $n=\dfrac{a}{b}$ biçiminde herhangi bir rasyonel sayı ise,

$$\nu_p(n)=\nu_p(\frac{a}{b})=\nu_p(a)-\nu_p(b) \tag{3.iii}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifade n'nin kesir olarak $\dfrac{a}{b}$ gösteriminden bağımsızdır. Böylece, ν_p $p-$adik değerlendirmesi $\mathbb{Q}$'ya genişletilebilir.

Örnek 3.1.4. $p=5$ için $\nu_5(1)=0$, $\nu_5(125)=3$ ve böylece

$$\nu_5\left(\frac{1}{125}\right)=\nu_5(1)-\nu_5(125)=0-3=-3$$

bulunur.

Tanım 3.1.3. Her $x\in\mathbb{Q}$ için

$$|x|_p=\begin{cases} p^{-\nu_p(x)}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} \tag{3.iv}$$

ile tanımlı $|\ |_p:\mathbb{Q}\to[0,\infty)$ fonksiyonu bir normdur. $\mathbb{Q}$ daki bu norma $p-$adik norm denir. Bu şekilde tanımlı olan $|\ |_p$ fonksiyonu $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde, non-Arşimedyan bir normdur.

Önerme 3.1.1. $|\ |_p$ fonksiyonu (normu), $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde Arşimed olmayan normdur $[7-14]$.

Örnek 3.1.5. $\dfrac{21}{45}$ rasyonel sayısının $3-$adik değeri kaçtır?

$\dfrac{21}{45} \neq 0$ olduğundan, $(3.\text{iv})$ ten,

$$\left|\frac{21}{45}\right|_3 = (3)^{-v_3\left(\frac{21}{45}\right)}$$

dir. $(3.\text{iii})$ den,

$$\left|\frac{21}{45}\right|_3 = 3^{-v_3\left(\frac{21}{45}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{v_3\left(\frac{21}{45}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{v_3(21)-v_3(45)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

bulunur.

Bir normun Arşimed olmayan olduğu nasıl anlaşılır?

Teorem 3.1.1. Keyfi bir K cismi için, $\varphi : \mathbb{Z} \to K$

$$n \to \begin{cases} \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ kez}, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ \underbrace{-(1+1+\ldots+1)}_{-n\ kez}, & n < 0 \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın.

$A = \varphi(\mathbb{Z}) \subset K$ kümesine K'nın tam sayıları denir. K da bir $|\ |$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in A$ için $|a| \leq 1$ olmasıdır.

Özel olarak, $\mathbb{Q}$ da bir $|\ |$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $n \in \mathbb{Z}$ için $|n| \leq 1$ olmasıdır $[10-13]$.

Arşimed Özelliği: K bir cisim olsun.
$\forall x, y \in K$, $x \neq 0$ için, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ vardır öyle ki $|nx| > |y|$ dir.

Uyarı: Arşimed özelliği $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer için geçerlidir.

Sonuç 3.1.1. Bir $|\ |$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, $\sup\{|n| : n \in \mathbb{Z}\} = 1$ olmasıdır $[10-13]$.

3.1.3. Metrik Uzay

Tanım 3.1.4. K bir cisim ve $|\ |$, K da bir norm olsun. $\forall x, y \in K$ için,

$$d(x, y) = |x - y|$$

ile tanımlı

$$d : K \times K \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$$

fonksiyonuna $|\ |$ *normuyla üretilen metrik* denir.

$d(x, y)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. Her $x, y \in K$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. Her $x, y \in K$ için $d(x, y) = d(y, x)$

iii. Her $x, y, z \in K$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

Tanım 3.1.5. Bir küme üzerinde bir metrik tanımlı ise bu metrik ile birlikte bu kümeye bir *metrik uzay* denir.

Lemma 3.1.2. $|\ |$, K cismi üzerinde bir norm ve metrik $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlı olsun. Bu takdirde $|\ |$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $x, y, z \in K$ için,

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \text{ (ultra metrik eşitsizliği)}$$

olmasıdır $[11,13,14]$.

Tanım 3.1.6. Lemma 3.1.2 deki ultra metrik eşitsizliğini sağlayan metriğe *ultra metrik* denir.

Önerme 3.1.2. K bir cisim ve $|\ |$, K da non-Arşimedyan norm olsun. Eğer $x, y \in K$ ve $|x| \neq |y|$ ise bu takdirde,

$$|x+y| = \max\{|x|,|y|\}$$

dir $[7,9-14]$.

Sonuç 3.1.2. Bir ultra metrik uzayda bütün üçgenler ikizkenardır $[7,13]$.

Örnek 3.1.6. $p=3$ için $\mathbb{Q}$ da $3-$adik norm ile köşeleri

$$x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3} \text{ ve } z = \frac{5}{12}$$

olan üçgenin kenar uzunlukları

$$|x-y|_3 = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right|_3 = \left|\frac{1}{3}\right|_3 = 3$$

$$|y-z|_3 = \left|\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\right|_3 = \left|\frac{1}{12}\right|_3 = 3$$

$$|x-z|_3 = \left|\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right|_3 = \left|\frac{1}{4}\right|_3 = 1$$

dir. İki kenar uzunluğu eşit olduğundan, bu üçgen bir ikizkenar üçgendir.

Tanım 3.1.7. $K = \mathbb{Q}$ ve $|\ |_p$, $p-$adik norm, $a \in \mathbb{Q}$ ve $r \in \mathbb{R}_+$ olsun. $a-$merkezli ve $r-$yarıçaplı açık yuvar;

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{Q} : d(x,a) < r\} = \{x \in \mathbb{Q} : |x-a|_p < r\}$$

$a-$merkezli ve $r-$yarıçaplı kapalı yuvar;

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{Q} : d(x,a) \leq r\} = \{x \in \mathbb{Q} : |x-a|_p \leq r\}.$$

Önerme 3.1.3. $K=\mathbb{Q}$ ve $|\ |_p$, $p-$ adik norm olsun.

i. Eğer $b\in B(a,r)$ ise $B(a,r)=B(b,r)$ dir.

Başka bir deyişle, bir açık yuvarda içerilen her nokta bu açık yuvarın merkezidir.

ii. Eğer $b\in \overline{B}(a,r)$ ise $\overline{B}(a,r)=\overline{B}(b,r)$

Başka bir deyişle, bir kapalı yuvarda içerilen her nokta bu kapalı yuvarın merkezidir.

iii. $B(a,r)$ kümesi hem açık hem de kapalıdır.

iv. $r\neq 0$ ise $\overline{B}(a,r)$ hem açık hem de kapalıdır.

v. $a,b\in\mathbb{Q}$ ve $r,s\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ ise

$$B(a,r)\cap B(b,s)\neq\varnothing \Leftrightarrow B(a,r)\subset B(b,s) \text{ veya } B(b,s)\subset B(a,r)$$

Başka bir deyişle, iki açık (kapalı) yuvar, ya ayrıktır ya da iç içedir $[7,13]$.

Tanım 3.1.8. K bir cisim ve $|\ |$, K da bir norm olsun. Bir $S\subset K$ kümesi hem açık hem de kapalı ise S ye *kapalı-açık (clopen) küme* denir.

Tanım 3.1.9. $K=\mathbb{Q}$ ve $|\ |_p$, $p-$adik norm olsun.

i. $U_1\cap U_2=\varnothing$

ii. $S=(S\cap U_1)\cup(S\cap U_2)$

iii. $S\cap U_1\neq\varnothing$ ve $S\cap U_2\neq\varnothing$

olacak şekilde U_1, U_2 açık kümeleri varsa $S\subset\mathbb{Q}$ kümesine *bağlantısız küme* denir.

S kümesinin bağlantısız küme olması, S nin iki açık ayrık kümenin birleşimi olarak ifade edebilmesi demektir.

Tanım 3.1.10. $x\in\mathbb{Q}$ olsun. x noktasını içeren bütün bağlantılı kümelerin birleşimine x *in bağlantılı bileşeni* denir.

Önerme 3.1.4. K, üzerinde non-Arşimedyan norm tanımlı bir cisim olsun. Herhangi bir $x \in K$ noktasının bağlantılı bileşeni tek noktalı $\{x\}$ kümesidir $[12]$.

Tanım 3.1.11. K bir cisim olsun. Her $x \in K$ noktasının bağlantılı bileşeni
$\{x\}$ kümesi ise K ya *tamamen bağlantısız küme* denir.

Önerme 3.1.5. K bir cisim ve $|\ |$, K da bir non-Arşimedyan norm olsun.

$$\mathcal{O} = \overline{B}(0,1) = \{x \in K : |x| \leq 1\}$$

kümesi K nın bir alt halkasıdır.

$$\mathfrak{P} = B(0,1) = \{x \in K : |x| < 1\}$$

$\mathcal{O}$ nın bir idealidir. Üstelik, $\mathfrak{P}$, $\mathcal{O}$ nun bir maksimal idealidir ve $\mathcal{O}/\mathfrak{P}$ nın her elemanı da tersinirdir $[7,13]$.

Tanım 3.1.12. K bir cisim ve $|\ |$, K da bir non-Arşimedyan norm olsun.

$$\mathcal{O} = \overline{B}(0,1) = \{x \in K : |x| \leq 1\} \subset K$$

alt halkasına, $|\ |$ non-Arşimedyan normunun *değerlendirme halkası* denir.

$$\mathfrak{P} = B(0,1) = \{x \in K : |x| < 1\} \subset \mathcal{O}$$

idealine, $|\ |$ non-Arşimedyan normunun *değerlendirme ideali* denir.

$$\mathcal{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{P}$$

bölümüne, $|\ |$ non-Arşimedyan normunun *kalan (rezidü) cismi* denir.

Önerme 3.1.6. $K = \mathbb{Q}$ ve $|\ |_p$, $p-$adik norm olsun. Bu takdirde,

i. $|\ |_p$ nin değerlendirme halkası;

$$\mathcal{O} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b\right\}$$

ii. $|\ |_p$ nin değerlendirme ideali;

$$\mathfrak{P} = p\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} : p \nmid b \text{ ve } p \mid a \right\}$$

iii. Kalan cismi p elemanlı $\mathcal{K} = \mathbb{F}_p$ dir $[7,13]$.

3.1.4. $\mathbb{Q}$ Kümesinde Norm

Tanım 3.1.13. Bir K cismi üzerinde $|\ |_1$ ve $|\ |_2$ normları için bir norma göre açık olan her küme diğerine göre de açıksa, $|\ |_1$ ve $|\ |_2$ ye *denk normlar* denir.

Lemma 3.1.3. $|\ |_1$ ve $|\ |_2$ bir K cisminde iki norm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir $[1]$:

i. $|\ |_1$ ve $|\ |_2$ denk normlardır.

ii. Her $x \in K$ için, $|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1$

iii. $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ öyle ki her $x \in K$ için, $|x|_1 = |x|_2^{\alpha}$

Teorem 3.1.2 (Ostrowski). $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı her trivial olmayan norm, $p = \infty$ veya p bir asal sayı olmak üzere bir $|\ |_p$ normuna denktir $[7,9-14]$.

Önerme 3.1.7. Her $x \in \mathbb{Q}^*$ için $p = \infty$ veya p bir asal sayı olmak üzere,

$$\prod_{p \leq \infty} |x|_p = 1$$

dir $[7,9]$.

Tanım 3.1.14. K bir cisim ve $|\ |$, K da bir norm olsun.

1. $(x_n) \subset K$ da bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ var ki her $n, m \geq N$ iken $|x_n - x_m| < \varepsilon$ ise (x_n) ye bir *Cauchy dizisi* denir.

2. K nın her Cauchy dizisi (K da) bir limite sahipse K ya *tamdır* denir.

3. $S \subset K$ olsun. Her $x \in K$ ve her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$ ise S ye, K da
bir *yoğun alt küme* denir.

Lemma 3.1.4. $\mathbb{Q}$ cismi, trivial olmayan herhangi bir norma göre tam değildir $[7,9,13]$.

Lemma 3.1.5. $\mathbb{Q}$ nun bir (x_n) dizisinin $p-$adik norma göre bir Cauchy dizisi olması gerek ve yeter koşul, $|x_{n+1} - x_n|_p \to 0$, $n \to \infty$ olmasıdır $[7,9,13]$.

Uyarı: Lemma 3.1.5 $\mathbb{R}$'nin genel mutlak değer normuna göre doğru değildir. Örneğin,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

dizisi Lemma 3.1.5 in sağ koşulunu sağlar, fakat Cauchy dizisi değildir.

Analizden biliyoruz ki;

i. $|\ |_\infty$, $\mathbb{R}$ ye genişletilebilir.

ii. $\mathbb{R}$, $|\ |_\infty$ normuna göre tam uzaydır.

iii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur.

Başka bir deyişle, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ nun $|\ |_\infty$ normuna göre tamlaştırılmasıdır.

Şimdi $\mathbb{Q}$ nun $|\ |_p$ $p-$adik normuna göre tamlaştırılmasını elde edelim.

Tanım 3.1.15. $|\ | = |\ |_p$, $\mathbb{Q}$ da bir Arşimed olmayan norm olsun. $\mathbb{Q}$ nun bütün Cauchy dizilerinin kümesi $\mathcal{C}$ veya $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \left\{(x_n) : (x_n),\ |\ |_p \text{ ye göre bir Cauchy dizisidir}\right\}$$

ile gösterilir.

Önerme 3.1.8.

$$(x_n)+(y_n)\to(x_n+y_n)$$
$$(x_n).(y_n)\to(x_n.y_n)$$

tanımları ile bir birimli halkadır $[7,13]$.

Tanım 3.1.16. $\mathcal{N}=\{(x_n)\in\mathcal{C}: x_n\to 0\}=\left\{(x_n): \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|_p=0\right\}$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.1.6. $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$ nin bir maksimal idealidir.

$\mathcal{N}$ maksimal ideal olduğundan, $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ cismi tanımlanabilir $[7]$.

Tanım 3.1.17. $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi, $\mathcal{C}$ halkasının $\mathcal{N}$ maksimal idealinin bölüm cismi olarak tanımlanır:

$$\mathbb{Q}_p=\mathcal{C}/\mathcal{N}$$

$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}_p$ dir ve $|\ |_p$, $\mathbb{Q}_p$ ye genişletilebilir.

Lemma 3.1.7. $(x_n)\in\mathcal{C}$ ve $(x_n)\notin\mathcal{N}$ olsun. $|x_n|_p$ reel sayı dizisi belli bir n den sonra sabittir. Yani bir $N\in\mathbb{N}$ vardır ki her $n,m\geq N$ için $|x_n|_p=|x_m|_p$ dir $[7]$.

Tanım 3.1.18. $\lambda\in\mathbb{Q}_p$ ve (x_n), λ ya karşılık gelen Cauchy dizisi ise,

$$|\lambda|_p=\lim_{n\to\infty}|x_n|_p$$

ile tanımlanır.

Önerme 3.1.9. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ nin yoğun bir alt kümesidir $[11]$.

Teorem 3.1.3. Her $p\in\mathbb{Z}$ asal sayısı için, $|\ |_p$, non-Arşimedyan norma sahip öyle bir $\mathbb{Q}_p$ cismi vardır ki,

i. $|\ |_p$ nin $\mathbb{Q}$ ya kısıtlanışı $|\ |_p$ $p-$adik normunu verir.

ii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ de yoğundur.

iii. $\mathbb{Q}_p$, $|\ |_p$ ye göre tamdır.

i, ii ve iii koşullarını sağlayan $\mathbb{Q}_p$ cismi normu koruyan izomorfi hariç tek türlü belirlidir $[7]$.

3.1.5. $\mathbb{Q}_p$ Cisminin Özellikleri

$\mathbb{Q}_p$ için aşağıdaki özellikler verilebilir:

i. $\mathbb{Q}_p$ de bir $|\ |=|\ |_p$ normu var ve $\mathbb{Q}_p$ bu norma göre tamdır.

ii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ de yoğun ve $|\ |_p$ nin $\mathbb{Q}$ ya kısıtlanışı $p-$adik norm ile çakışır.

iii. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}_p$ nin $|\ |_p$ altındaki değer kümeleri eşittir.

iv. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ nin bir alt cismi olarak düşünülebilir.

Lemma 3.1.8. Her $x\in \mathbb{Q}_p$, $x\neq 0$ için $|x|_p = p^{-n}$ olacak şekilde bir $n\in \mathbb{Z}$ vardır.

Lemma 3.1.9. Her $x\in \mathbb{Q}_p$, $x\neq 0$ için,

$$|x| = p^{-\nu_p(x)}$$

olacak şekilde $\nu_p(x)$ tam sayısı vardır.

Başka bir deyişle ν_p $p-$adik değerlendirmesi $\mathbb{Q}_p$ ye genişletilebilir.

Tanım 3.1.19. $p-$adik değerlendirme halkası

$$\mathbb{Z}_p = \left\{x\in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\right\}$$

dir. $\mathbb{Z}_p$, $0-$merkezli ve $1-$yarıçaplı kapalı birim yuvardır ve bu yuvar, hem açık hem de kapalıdır.

Önerme 3.1.10. $\mathbb{Z}_p$ $p-$adik tam sayılar halkası esas ideali

$$p\mathbb{Z}_p=\left\{x\in\mathbb{Q}_p:|x|_p<1\right\}=\langle p\rangle=\left\{px:x\in\mathbb{Z}_p\right\}$$

olan bir yerel halkadır. Ayrıca,

i. $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_p=\mathbb{Z}_{(p)}=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}:p\nmid b\right\}$

ii. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ de yoğundur. Ayrıca verilen her $x\in\mathbb{Z}_p$ ve $n\geq 0$ için

$0\leq\alpha\leq p^n-1$ ve $|x-\alpha|_p\leq p^{-n}$

olacak şekilde $\alpha\in\mathbb{Z}$ vardır. α tam sayısı bu özelliklerle tek türlü belirlidir.

iii. Her $x\in\mathbb{Z}_p$ için öyle bir α_n Cauchy dizisi vardır ki $\alpha_n\to x$ dir ve aşağıdaki özellikler gerçeklenir:

a. $\alpha_n\in\mathbb{Z},\ \ 0\leq\alpha\leq p^n-1$

b. Her $n\in\mathbb{Z}^+$ için $\alpha_n\equiv\alpha_{n-1}(\mathrm{mod}\ p^{n-1})$.

(α_n) dizisi bu özelliklerle tek türlü belirlidir.

Sonuç 3.1.3. $\mathbb{Q}_p=\mathbb{Z}_p[1/p]$ dir. Yani her $x\in\mathbb{Q}_p$ için $p^n x\in\mathbb{Z}_p$ olacak biçimde $n\geq 0$ tam sayısı vardır.

Sonuç 3.1.4. $\mathbb{Q}_p$ tamamen bağlantısız bir Hausdorff topolojik uzayıdır.

Sonuç 3.1.5. $\mathbb{Z}_p$ kompakt ve $\mathbb{Q}_p$ yerel kompakttır.

Lemma 3.1.10. Her $x\in\mathbb{Z}_p$, $0\leq b_i\leq p-1$ olmak üzere,

$$x=b_0+b_1p+b_2p^2+...+b_np^n+...$$

biçiminde tek türlü yazılır $[1]$.

Örnek 3.1.6. $x=p^{3!}+p^{4!}+...+p^{n!}+...$ ise

$$|x|_p=\left(\frac{1}{p}\right)^{3!}=\frac{1}{p^6}\ \text{dır.}$$

Sonuç 3.1.6. Her $x \in \mathbb{Q}_p$ için $y \in \mathbb{Z}_p$ olmak üzere,

$$x = \frac{y}{p^m} = yp^{-m}$$

biçiminde yazılır $[7]$.

Sonuç 3.1.7. Her $x \in \mathbb{Q}_p$, $0 \le b_n \le p-1$ ve $-n_0 = \nu_p(x)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= b_{-n_o} p^{-n_o} + \ldots + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n + \ldots \\ &= \sum_{n \ge -n_0} b_n p^n \end{aligned}$$

şeklinde tek türlü yazılır $[1]$.

Lemma 3.1.11. $\mathbb{Q}_p$ de bir (a_n) dizisinin bir Cauchy dizisi veya buna denk olarak yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{n \to \infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

olmasıdır $[7]$.

Örnek 3.1.7. $a_n = n$ dizisi için,

$$\lim_{n \to \infty} |n + 1 - n|_p = \lim_{n \to \infty} |1|_p = 1 \ne 0$$

olduğundan bu dizi yakınsak değildir.

Örnek 3.1.8. $a_n = p^n$ dizisi için,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left| p^{n+1} - p^n \right|_p &= \lim_{n \to \infty} \left| p^n (p-1) \right|_p \\ &= \lim_{n \to \infty} \left| p^n \right|_p \lim_{n \to \infty} |p-1|_p = 0 \end{aligned}$$

olduğundan dizi yakınsaktır ve limiti 0 dır.

Sonuç 3.1.8. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\mathbb{Q}_p$ de bir seri olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

dır. Bu durumda,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \max_n |a_n|$$

dir $[7]$.

Lemma 3.1.12. $b_{ij} \in \mathbb{Q}_p$ ve varsayalım ki,

i. $\forall\ i$ için, $\lim_{j\to\infty} b_{ij} = 0$ ve

ii. $\lim_{i\to\infty} b_{ij} = 0$ (j üzerinde düzgün olarak)

olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\max(i, j) \geq N \Rightarrow |b_{ij}| < \varepsilon$$

olacak şekilde sadece ε a bağlı bir $N = N(\varepsilon)$ tam sayısı vardır $[7]$.

Önerme 3.1.11. $b_{ij} \in \mathbb{Q}_p$ ve

i. $\forall\ i$ için, $\lim_{j\to\infty} b_{ij} = 0$,

ii. $\lim_{i\to\infty} b_{ij} = 0$ (j üzerinde düzgün olarak)

olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\right) \text{ ve } \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij}\right)$$

serilerinin ikisi de yakınsaktır ve toplamları eşittir $[7]$.

3.2. $p-$ADİK ANALİZDE KUVVET SERİLERİ

$f(X)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ formal kuvvet serisi verilsin. Eğer bu seri bir $x \in \mathbb{Q}_p$ için yakınsak ise $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde yazacağız. $x \in \mathbb{Q}_p$ için, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, $\left|a_n x^n\right| \to 0$ $(n \to \infty)$ olmasıdır. Klasik durumdaki gibi böyle x'lerin kümesi bir disktir. Bu diske yakınsaklık bölgesi denir.

Önerme 3.2.1. $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ ve $\rho = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, $(0 \le \rho \le \infty)$ olsun.

1. $\rho = 0$ ise, $f(x)$ sadece $x=0$ için yakınsaktır.

2. $\rho = \infty$ ise, $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{Q}_p$ için yakınsaktır.

3. $0 < \rho < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} |a_n| \rho^n = 0$ ise, $f(x)$ yakınsaktır $\Leftrightarrow |x| \le \rho$

4. $0 < \rho < \infty$ ve $|a_n| \rho^n \not\to 0$ $(n \to \infty)$ ise, $f(x)$ yakınsaktır $\Leftrightarrow |x| < \rho$

[7].

Lemma 3.2.1. $f(X)$ ve $g(X)$ formal kuvvet serileri verisin. $x \in \mathbb{Q}_p$ için, $f(x)$ ve $g(x)$ her ikisi de yakınsak ise bu takdirde,

1. $(f+g)(x)$ yakınsak ve $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ dir.

2. $(fg)(x)$ yakınsak ve $(fg)(x) = f(x)g(x)$ dir [7].

Teorem 3.2.1. $f(X)$, $g(X)$ formal kuvvet serileri ve $g(0)=0$ olmak üzere, $h(X) = f[g(X)]$ olsun. Eğer,

i. $g(x)$ yakınsak,

ii. $f[g(x)]$ yakınsak,

iii. $\forall\, n$ için, $\left|b_n x^n\right| \leq \left|g(x)\right|$

oluyor ise bu takdirde, $h(x)$ de yakınsaktır ve $f[g(x)] = h(x)$ dir $[7]$.

3.2.1. Kuvvet Serileriyle Tanımlanan Fonksiyonlar

Lemma 3.2.2. $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ katsayıları $\mathbb{Q}_p$ den olan formal kuvvet serisi ve $D \subset \mathbb{Q}_p$ bu kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesi olsun. Bu takdirde, $f : D \to \mathbb{Q}_p$, $x \to f(x)$ şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu D bölgesinde süreklidir $[7]$.

Önerme 3.2.2. $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ $\mathbb{Q}_p$ de formal bir kuvvet serisi ve $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ için $f(\alpha)$ yakınsak olsun. Her bir $m \geq 0$ için,

$$b_m = \sum_{n \geq m} \binom{n}{m} a_n \alpha^{n-m} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$g(X) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(X - \alpha\right)^m$$

formal kuvvet serisini göz önüne alalım. Bu takdirde,

i. b_m serisi, her m için yakınsaktır ve böylece b_m iyi tanımlıdır.

ii. $f(X)$ ve $g(X)$ kuvvet serileri aynı yakınsaklık bölgesine sahiptir.

'$f(\lambda)$ yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $g(\lambda)$ yakınsaktır.'

iii. Yakınsaklık bölgesinde alınan bir λ için $f(\lambda) = g(\lambda)$ dır $[7]$.

Önerme 3.2.3. $f(X)$ ve $g(X)$ formal kuvvet serileri, sabit olmayan bir $(x_m) \in \mathbb{Q}_p$ dizisi verilsin ve $x_m \to 0$ olsun.

Her m için $f(x_m) = g(x_m)$ oluyorsa, $f(X) = g(X)$ dir $[7]$.

Lemma 3.2.3. $f(X)=\sum a_n X^n$ formal kuvvet serisi sıfırdan farklı yarıçaplı bir yakınsaklık bölgesine sahip ve $f'(X)$, $f(X)$ in formal türevi olsun. $x\in\mathbb{Q}_p$ için $f(x)$ yakınsak ise aynı x için $f'(x)$ de yakınsak ve

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

dir $[7]$.

Lemma 3.2.4. $f(X)$ ve $g(X)$ formal kuvvet serileri verilsin ve varsayalım ki her ikisi de $|x|<\rho$ için yakınsak olsun. Eğer $|x|<\rho$ olan her x için, $f'(x)=g'(x)$ ise, öyle bir $c\in\mathbb{Q}_p$ sayısı vardır ki formal kuvvet serileri olarak,

$$f(X)=g(X)+c$$

sağlanır.

Özellikle, $f(x)$ ve $g(x)$ aynı yakınsaklık diskine sahiptir ve yakınsaklık bölgesinden alınan her x için, $f(x)=g(x)+c$ dir $[7]$.

Teorem 3.2.2. (STRASSMAN)

$$f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n=a_0+a_1\,X+a_2X^2+\ldots$$

katsayıları $\mathbb{Q}_p$ de sıfırdan farklı formal bir kuvvet serisi ve $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, yani her $x\in\mathbb{Z}_p$ için $f(x)$ yakınsak olsun. N tam sayısı,

$$|a_N|=\max_n|a_n| \quad \text{ve} \quad |a_n|<|a_N|,\ n>N$$

koşulları ile tanımlansın. Bu takdirde $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$, $x\to f(x)$ ile tanımlı fonksiyon en fazla N tane sıfır yerine sahiptir $[7]$.

3.2.2. Bazı Elemanter Fonksiyonlar

Lemma 3.2.5.

$$f(X)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{X^n}{n}=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+...$$

serisi $|x|<1$ için yakınsak, diğer durumlar için ıraksaktır. Yani serinin yakınsaklık bölgesi $0-$merkezli $r=1$ yarıçaplı açık yuvardır. Böylece $f(x)$ $B(0,1)$ de bir fonksiyon tanımlar: $f(x)=\log_p(1+x)$.

Tanım 3.2.1. $B=B(1,1)=\left\{x\in\mathbb{Z}_p : |x-1|<1\right\}=1+p\mathbb{Z}_p$ olmak üzere; $x\in B$ için $p-$adik logaritma fonksiyonu

$$\log_p(x)=\log_p(1+(x-1))=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{(x-1)^n}{n}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 3.2.4. $a,b\in 1+p\mathbb{Z}_p$ olsun. Bu takdirde,

$$\log_p(ab)=\log_p(a)+\log_p(b)$$

sağlanır $[7]$.

Lemma 3.2.6. p bir asal sayı olsun.

$$v_p(n!)=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]<\frac{n}{p-1}$$

sağlanır ve özellikle, $|n!|_p>p^{-n/(p-1)}$ dir.

Lemma 3.2.7.

$$g(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}=1+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+\frac{X^4}{4!}+...$$

serisini alalım. Bu takdirde, $g(x)$ yakınsaktır $\Leftrightarrow |x|<p^{-1/(p-1)}$.

Tanım 3.2.2. $D = B(0, p^{-1/(p-1)}) = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : |x| < p^{-1/(p-1)} \right\}$ olsun.

$p-$adik üstel fonksiyon,

$$\exp_p(x) : D \to \mathbb{Q}_p, \quad \exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ile tanımlanır.

Önerme 3.2.5. Eğer $x, y \in D$ ise, $x + y \in D$ ve

$$\exp_p(x + y) = \exp_p(x) \exp_p(y)$$

eşitliği sağlanır [7].

Lemma 3.2.8. $x \in \mathbb{Z}_p$ ve $|x|_p < p^{-1/(p-1)}$ olsun. Bu takdirde;

$$\left| \exp_{\mathrm{p}}(x) - 1 \right| < 1$$

dir. Yani $\exp_p(x)$, $\log_p$ nin tanımlandığı bölgededir ve

$$\log_p(\exp_p(x)) = x$$

dir.

Tersine olarak, eğer $|x|_p < p^{-1/(p-1)}$ ise bu takdirde,

$$\left| \log_p(1 + x) \right| < p^{-1/(p-1)}$$

dir. Yani $\log_p(1 + x) \in D(\exp_p)$ ve

$$\exp_p(\log_p(1 + x)) = 1 + x$$

dir [7].

$\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi cebirsel kapalı değildir. $\mathbb{Q}_p$ cisminin cebirsel kapanışı olan $\overline{\mathbb{Q}}_p$, $|\ |_p$ normuna göre tam değildir. $\overline{\mathbb{Q}}_p$ nin $|\ |_p$ normuna tamlaştırılmasıyla $\mathbb{C}_p$ cismi elde edilir.

3.2.3. $\mathbb{C}_p$ Kümesinin Özellikleri

Önerme 3.2.6. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathbb{C}_p$ cismi ve onun üzerinde tanımlı bir $|\ |$ normu vardır:

- **i.** $\mathbb{C}_p$ cismi $\overline{\mathbb{Q}}_p$ yi kapsar ve $\mathbb{C}_p$ deki $|\ |$ normunun $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ye kısıtlanışı $p-$adik normu verir.
- **ii.** $\mathbb{C}_p$ cismi $|\ |$ normuna göre tamdır.
- **iii.** $\overline{\mathbb{Q}}_p$, $\mathbb{C}_p$ de yoğundur.

Önerme 3.2.7. $\mathbb{C}_p$ cebirsel kapalıdır $[11]$.

3.2.4. $\mathbb{C}_p$ de Analiz

$\mathbb{C}_p$ nin değerlendirme halkası veya $\mathbb{C}_p$ nin tam sayılar halkası,

$$\mathfrak{O} = \{x \in \mathbb{C}_p : |x| \leq 1\}$$

kümesidir.

$\mathbb{C}_p$ nin değerlendirme ideali ise,

$$\mathfrak{P} = \{x \in \mathbb{C}_p : |x| < 1\}$$

kümesidir.

$$\mathbb{F} = \mathfrak{O} / \mathfrak{P}$$

rezidü cismi ise $\mathbb{F}_p$ nin cebirsel bir kapanışıdır.

$\mathbb{Q}_p$ için bulunan sonuçlar $\mathbb{C}_p$ için de geçerlidir:

i. Bir $(a_n) \subset \mathbb{C}_p$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

ii. Yakınsak bir $(a_n) \subset \mathbb{C}_p$ dizisi sıfırdan farklı a limitine sahipse, yeterince büyük n sayısı için $|a_n| = |a|$ eşitliği sağlanır.

iii. $a_n \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere, bir $\sum a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek.ve yeter koşul,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$$

olmasıdır.

iv. $a_n \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere, $f(X) = \sum a_n X^n$ kuvvet serisi $\rho = 1 \big/ \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ yarıçaplı açık yuvar içinde sürekli bir fonksiyon tanımlar. Bu fonksiyon, $|a_n| \rho^n \to 0 (n \to \infty)$ olması durumunda ρ yarıçaplı kapalı yuvarda da tanımlanır.

v. Yakınsaklık yarıçapı ρ olan bir $f(X) = \sum a_n X^n$ kuvvet serisi verildiğinde, ρ yarıçaplı açık (veya kapalı) yuvarda $\alpha \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere,

$$f(x) = \sum a_n (x-\alpha)^n,\ x \in B(\alpha, \rho)\ \left(\text{veya } \overline{B}(\alpha, \rho)\right)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlanabilir.

vi. Lemma 3.2.1 ve Teorem 3.2.1, $\mathbb{C}_p$ deki kuvvet serileri için de geçerlidir.

vii. Kuvvet serileriyle tanımlanan fonksiyonlar diferansiyellenebilir olup bunların türevleri, orijinal serinin formal türevleri yardımıyla tanımlanır.

viii. $f(x)=\sum a_n x^n$ ve $g(x)=\sum b_n x^n$, $\mathbb{C}_p$ de iki kuvvet serisi, (x_m), bu serilerin yakınsaklık disklerinin arakesitlerinde içerilen yakınsak bir dizi olmak üzere, her m için, $f(x_m)=g(x_m)$ oluyorsa bu takdirde her n için $a_n=b_n$ eşitliği sağlanır.

ix. Strassmann Teoremi ve sonuçları $\mathbb{Q}_p$ yerine $\mathbb{C}_p$ ve $\mathbb{Z}_p$ yerine $\mathfrak{D}$ alınmasıyla geçerlidir.

x. $B=\{x\in\mathfrak{D}:|x-1|<1\}=B(1,1)=1+\mathfrak{P}$ olmak üzere, B de yakınsak olan kuvvet serisi

$$\log_p : B\to\mathbb{C}_p$$

biçiminde $p-$adik logaritma fonksiyonu tanımlar. Bu fonksiyon,

$$\log_p(xy)=\log_p(x)+\log_p(y),\ \forall x,y\in B$$

eşitliğini sağlar.

xi. $D=\left\{x\in\mathfrak{D}:|x|<p^{-1/(p-1)}\right\}=B\left(0,p^{-1/(p-1)}\right)$ olmak üzere, yakınsaklık bölgesi D olan bir kuvvet serisi,

$$\exp_p : D\to\mathbb{C}_p$$

biçiminde $p-$adik üstel fonksiyon tanımlar. Bu fonksiyon,

$$\exp_p(x+y)=\exp_p(x)\exp_p(y)\ ,\ \ \forall x,y\in D$$

eşitliğini sağlar.

xii. Eğer $x\in D$ ise $\left|\exp_p(x)-1\right|<p^{-1/(p-1)}$ dir ve böylece $\exp_p(x)\in B$ olduğundan,

$$\log_p\left(\exp_p(x)\right)=x$$

olur.

xiii. Eğer $|x-1|<p^{-1/(p-1)}$ (yani, $x\in\ 1+D$) oluyor ise bu takdirde,

$\log_p(x)\in D$ ve

$$\exp_p\left(\log_p(x)\right)=x$$

bulunur.

xiv. $p-$adik logaritma fonksiyonu $B=B(1,1)=1+\mathfrak{P}$ çarpımsal grubundan, $1+\mathfrak{P}=B(0,1)$ toplamsal grubuna bir homomorfizm verir.

xv. $p-$adik logaritma fonksiyonu $1+D=B\left(1,p^{-1/(p-1)}\right)$ çarpımsal grubundan, $D=B\left(0,p^{-1/(p-1)}\right)$ toplamsal grubuna bir izomorfizm tanımlar $[7]$.

3.3. BAZI $p-$ADİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu kesimde, $P_k(n)=n^k+C_{k-1}n^{k-1}+...+C_0$, $C_i\in\mathbb{Z}$ (genel olarak $C_i\in\mathbb{Q}$ veya $C_i\in\mathbb{C}_p$) bir polinom olmak üzere, yakınsaklık bölgesi $|x|_p<p^{1/(p-1)}$ olan

$$F_k(x)=\sum_{n\geq 0}n!P_k(n)x^n$$

formundaki fonksiyonların sağladığı $p-$adik diferansiyel denklemlerin çeşitli özelikleri üzerinde durulacaktır.

$P_k(n)$ polinomlarının bazı özel sınıfları ve daha genel durumları için bu polinomlar yardımıyla tanımlanan $F_k(x)$ fonksiyonlarının sağladığı birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin varlığı gösterilecek ve bazı durumlar için böyle diferansiyel denklemlerin inşası verilecektir.

Homojen olmayan birinci mertebeden diferansiyel denklemlerle benzer analitik çözümlere sahip sonsuz sayıda homojen olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklem inşa edilebilir.

$P_k(n)=n^k+C_{k-1}n^{k-1}+...+C_0$, $C_i\in\mathbb{Z}$ bir polinom olmak üzere;

$$F_k(x)=\sum_{n\geq 0}n!P_k(n)x^n \tag{3.1}$$

biçimindeki $p-$adik serileri, değişik açılardan ele alan bir çok çalışma yayınlanmıştır $([3],[5])$. Örneğin,

$$F_0(x)=\sum n!x^n$$

fonksiyonu,

$$x^2w''(x)+(3x-1)w'(x)+w(x)=0 \tag{3.3}$$

biçimindeki $p-$adik diferansiyel denklemin bir analitik çözümüdür $[5]$. Burada,

$$P_k(n)=n^k+C_{k-1}n^{k-1}+...+C_0,\ C_i\in\mathbb{Q} \tag{3.4}$$

olmak üzere, çözümü (3.1) de verilen formdaki analitik fonksiyon olan diferansiyel
denklemlerin inşası ve çeşitli özelikleri incelenecektir.

Esas olarak, çözümü bilinen bir diferansiyel denklemi inşa etmek üzerinde durulacaktır.

$$F_k(x) = \sum_{n \geq 0} n! P_k(n) x^n \tag{3.1}$$

kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesi,

$$D_p = \left\{ x \in \mathbb{C}_p : |x|_p < p^{1/(p-1)} \right\}$$

dir. Burada $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışıdır[13]. $\mathbb{Q}_p$ ye kısıtlanması durumunda, her p asal sayısı için, $D_p = \mathbb{Z}_p$ olur. Ayrıca, (3.1) serisi reel durumda herhangi bir $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ için yakınsak değildir.

3.3.1 Bazı $p-$Adik Diferansiyel Denklemlerin Varlığı

$$F_k(x) = \sum_{n \geq 0} n! P_k(n) x^n \tag{3.1}$$

şeklindeki fonksiyonunun basit durumu olan

$$F_0(x) = \sum_{n \geq 0} n! x^n \tag{3.2}$$

serisi, (3.3) denklemini sağlamakla beraber aynı zamanda

$$x^2 w'(x) + (x-1) w(x) = -1 \tag{3.5}$$

homojen olmayan birinci mertebeden diferansiyel denkleminin de çözümü olduğunu doğrulamak zor değildir. Burada, (3.5) denkleminin diferansiyellenmesiyle (3.3) elde edilir.

(3.3) ve (3.5) denklemleri birlikte düşünülerek, $R(x)$ tam kat sayılı bir rasyonel fonksiyon olmak üzere,

$$x^2 w'' + (3x-1) w' + w + R(x)\left[x^2 w' + (x-1) w + 1 \right] = 0 \tag{3.6}$$

biçiminde yazılabilir.

Böylece (3.2) çözümüne benzer analitik çözüme sahip sonsuz sayıda ikinci mertebeden homojen olmayan lineer $p-$adik diferansiyel denklem kurulabilir.

Biz ise $P_i(x)$, $(1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$P_1(x)w'' + P_2(x)w' + P_3(x)w = P_4(x) \tag{3.7}$$

genel formundaki diferansiyel denklemler üzerinde duracağız.

Buradaki polinomlar x değişkenine bağlı, tam (veya $p-$adik) kat sayılı olup w ise, (3.4) de verilen $P_k(n)$ polinomuyla birlikte tanımlanan $w = F_k(x)$ biçimindeki fonksiyonlardır.

Önerme 3.3.1. $A(x)$ ve $B(x)$ birer rasyonel kat sayılı fonksiyonlar olsun.

Eğer,

$$F_v(x) = \sum_{n \geq 0} n!P_v(n)x^n \tag{3.8}$$

biçimindeki analitik çözüme sahip

$$A(x)F_v'(x) + B(x)F_v(x) = C,\ C \in \mathbb{Q} \tag{3.9}$$

$$A(x)F_v''(x) + \left[A'(x) + B(x)\right]F_v'(x) + B'(x)F_v(x) = 0 \tag{3.10}$$

şeklinde diferansiyel denklemler varsa, benzer olarak

$$F_{\mu+v}(x) = \sum_{n \geq 0} n!\prod_{i=1}^{\mu}(n+i)^2 P_v(n+\mu)x^n \ ,\ \mu \in \mathbb{Z}_+ \tag{3.11}$$

şeklindeki çözüme sahip olan birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler de vardır $[2]$.

İspat:

$$A(x)F_v'(x) + B(x)F_v(x) = C,\ C \in \mathbb{Q} \tag{3.9}$$

denklemi

$$\frac{A(x)}{B(x)}F_v^{'}(x)+F_v(x)=\frac{C}{B(x)}$$

formunda yazılıp elde edilen eşitliğin birinci türevi alınırsa,

$$A_1(x)=-\frac{A(x)B(x)}{B^{'}(x)} \quad \text{ve} \quad B_1(x)=\frac{A(x)B^{'}(x)-A^{'}(x)B(x)-B^2(x)}{B^{'}(x)} \quad \text{yeni}$$

rasyonel fonksiyonlar olmak üzere,

$$A_1(x)F_v^{''}(x)+B_1(x)F_v^{'}(x)=C$$

biçiminde (3.9) e benzer formda yeni bir diferansiyel denklem elde edilir.

Bu işlemin μ defa tekrar edilmesiyle,

$$A_\mu(x)F_v^{(\mu+1)}(x)+B_\mu(x)F_v^{\mu}(x)=C$$

denklemi elde edilir.

(3.8) ve (3.11) de verilen $F_v(x)$ ve $F_{\mu+v}(x)$ fonksiyonları için,

$$F_v^{(\mu)}(x)=F_{\mu+v}(x)$$

eşitliği göz önüne alınarak $F_{\mu+v}$ için,

$$A_\mu(x)F_{\mu+v}^{'}(x)+B_\mu(x)F_{\mu+v}(x)=C \tag{3.12}$$

biçiminde, (3.9) tekine benzer bir denklem elde edilir. Bu fonksiyonun sağladığı ikinci mertebeden diferansiyel denklem ise,

$$A_\mu(x)F_{\mu+v}^{''}(x)+\left[A_\mu^{'}(x)+B_\mu(x)\right]F_{\mu+v}^{'}(x)+B_\mu^{'}(x)F_{\mu+v}(x)=0 \tag{3.13}$$

olur.

Önerme 3.3.1 in ispatından aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.1.

$$A(x)F_v^{'}(x)+B(x)F_v(x)=C,\ C\in\mathbb{Q} \tag{3.9}$$

$$A(x)F_v^{''}(x)+\left[A^{'}(x)+B(x)\right]F_v^{'}(x)+B^{'}(x)F_v(x)=0 \tag{3.10}$$

diferansiyel denklemlerini sağlayan

$$F_v(x)=\sum_{n\geq 0} n!P_v(n)x^n \tag{3.8}$$

fonksiyonunun herhangi bir mertebeden türevlerini çözüm kabul eden (3.9) ve (3.10) denklemlerine benzer şekilde birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler kurulabilir $[2]$.

Önerme 3.3.2. Eğer,

$$F_v(x) = \sum_{n\geq 0} n!P_v(n)x^n \tag{3.8}$$

analitik çözümüne sahip olan

$$A(x)F_v'(x) + B(x)F_v(x) = C,\ C \in \mathbb{Q} \tag{3.9}$$

$$A(x)F_v''(x) + \left[A'(x) + B(x)\right]F_v'(x) + B'(x)F_v(x) = 0 \tag{3.10}$$

diferansiyel denklemleri varsa bu takdirde benzer olarak,

$$G_v(x) = x^m F_v(x) = x^m \sum_{n\geq 0} n!P_v(n)x^n,\ m \in \mathbb{N} \tag{3.14}$$

analitik çözümüne sahip diferansiyel denklemler de vardır $[2]$.

İspat:

$$G_v(x) = x^m F_v(x),\ m \in \mathbb{N} \tag{3.14}$$

ise,

$$F_v(x) = x^{-m}G_v(x) \quad \text{ve} \quad F_v'(x) = x^{-m}G_v'(x) - mx^{-m-1}G_v(x)$$

dir. Bulunan bu eşitlikler (3.9) da yerlerine yazılırsa,

$$A_1(x) = \frac{A(x)}{x^m} \quad \text{ve} \quad B_1(x) = \frac{B(x)}{x^m} - \frac{mA(x)}{x^{m+1}}$$

olmak üzere,

$$A_1(x)G_v'(x) + B_1(x)G_v(x) = C \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) in diferansiyellenmesiyle,

$$A_1(x)G_v''(x) + \left[A_1'(x) + B_1(x)\right]G_v'(x) + B_1'(x)G_v(x) = 0 \tag{3.16}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi bulunur.

Önerme 3.3.3.

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} n!n^k x^n,\ k = 1, 2, ... \tag{3.17}$$

analitik çözümüne sahip birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler vardır $[2]$.

İspat: Sonuç 3.3.1 e göre,

$$x^2 w'(x) + (x-1)w(x) = -1 \tag{3.5}$$

ve

$$x^2 w'' + (3x-1)w' + w + R(x)\left[x^2 w' + (x-1)w + 1\right] = 0 \tag{3.6}$$

denklemlerinin çözümü olan

$$F_0(x) = \sum_{n\geq 0} n!x^n \tag{3.2}$$

fonksiyonunun,

$$F_0'(x) = \sum_{n\geq 0} n!nx^{n-1}$$

şeklindeki türev fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemler vardır. Yine Önerme 3.3.2 ile,

$$F_1(x) = xF_0'(x) = \sum_{n\geq 0} n!nx^n$$

fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemler de vardır.

Bu adımların k defa tekrarıyla, elde edilecek;

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} n!n^k x^n$$

fonksiyonunun da sağladığı birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin var olduğu sonucuna varılır.

Önerme 3.3.4.

$$\Phi_\alpha(x) = \sum_{n\geq 0} n!(n+\alpha)x^n,\ \alpha \in \mathbb{Q} \tag{3.18}$$

analitik çözümüne sahip birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler vardır $[2]$.

İspat: $G_\alpha(x) = x^\alpha F_0(x) = \sum_{n\geq 0} n!x^{n+\alpha}$

fonksiyonunu tanımlayalım. Önerme 3.3.2 ye göre eğer $\alpha \in \mathbb{N}$ ise, $G_\alpha(x)$ analitik fonksiyonunun sağladığı birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler vardır. Aynı yolla $\alpha \in \mathbb{Q}$ veya $\alpha \in \mathbb{C}_p$ olması durumunda da $G_\alpha(x)$ in birinci mertebeden diferansiyel bir denklemin çözümü olduğu gösterilebilir. $G_\alpha(x)$ için elde edilen eşitliğin diferansiyellenmesiyle $G_\alpha^{'}(x)$ in sağladığı birinci mertebeden diferansiyel denklem elde edilebilir (Sonuç 3.3.1 ile). Önerme 3.3.2 dekine benzer metotla,

$$\Phi_\alpha(x) = x^{-\alpha} G_\alpha^{'}(x) = \sum_{n\geq 0} n!(n+\alpha)x^n$$

fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler için analitik bir çözüm olduğu görülebilir.

Açıktır ki,

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} n! \prod_{i=1}^{l} (n+\alpha_i)^{k_i} x^n,\ k_1 + k_2 + \ldots k_l = k,\ \alpha_i \in \mathbb{Q} \qquad (3.19)$$

formundaki $p-$adik kuvvet serisi, birinci mertebeden ve dolayısıyla ikinci mertebeden bir homojen diferansiyel denklemin analitik çözümüdür.

(3.19) da $\alpha_i \in \mathbb{Q}_p$ (veya $\alpha_i \in \mathbb{C}_p$) olarak alındığında, ele alınan küme $\mathbb{Q}_p$ (veya $\mathbb{C}_p$) ye kısıtlanmış olur. Bununla birlikte $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ alınırsa, herhangi bir p asal sayısı için $\mathbb{C}_p$ de geçerli sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.3.1.

$$P_k(n) = n^k + C_{k-1}n^{k-1} + \ldots + C_0,\ C_i \in \mathbb{Q},\ \left(\text{veya } C_i \in \mathbb{C}_p\right)$$

olmak üzere,

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} n! P_k(n) x^n$$

biçiminde tanımlanan her bir $F_k(x)$ fonksiyonunun sağladığı birinci ve dolayısıyla ikinci mertebeden diferansiyel bir denklem vardır $[2]$.

İspat: $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışı olduğundan $P_k(n)$ polinomu

$$P_k(n)=\prod_{i=1}^{k}(n+\alpha_i),\ \alpha_i\in\mathbb{C}_p,$$

biçiminde yazılırsa, istenen elde edilebilir.

3.3.2. Bazı $p-$Adik Diferansiyel Denklemlerin İnşası

$P_k(n)$ polinomunun basit formları yardımıyla tanımlanan $F_k(x)=\sum n!P_k(n)x^n$ fonksiyonlarının sağladığı diferansiyel denklemleri inşa etmenin birçok yolu vardır.

$U_k(x)$ ve $V_{k-1}(x)$ tam kat sayılı polinomlar olmak üzere;

$$\sum n!n^k x^n,\ k=0,1,2,...$$

biçimindeki fonksiyonlar için aşağıdaki bağıntılar sağlanır $[5]$:

$$x^k\sum n!n^k x^n+U_{k-1}(x)\sum n!x^n=V_{k-1}(x) \tag{3.20}$$

Bu bağıntıların ilk üçü:

$$x\sum_{n\geq 0}n!nx^n+(x-1)\sum_{n\geq 0}n!x^n=-1 \tag{3.21}$$

$$x^2\sum_{n\geq 0}n!n^2x^n+\left(-x^2+3x-1\right)\sum_{n\geq 0}n!x^n=2x-1 \tag{3.22}$$

$$x^3\sum_{n\geq 0}n!n^3x^n+\left(x^3-7x^2+6x-1\right)\sum_{n\geq 0}n!x^n=-3x^2+5x-1 \tag{3.23}$$

şeklindedir.

Bu bağıntılar $F_k(x)$ fonksiyonun bazı basit durumlarının sağladığı yeni diferansiyel denklemler inşa etmede kullanılabilir.

Örnek 3.3.1. $F_0(x)=\sum n!x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemler:

$F_0(x)=\sum n!x^n$ ise, $F_0^{'}(x)=\sum n!nx^{n-1}$ dir.

$$x\sum_{n\geq 0} n!nx^n + (x-1)\sum_{n\geq 0} n!x^n = -1 \qquad (3.21)$$

bağıntısı düzenlenerek,

$$x.x\sum_{n\geq 1} n!nx^{n-1} + (x-1)\sum_{n\geq 0} n!x^n = -1$$

$$x^2\sum_{n\geq 1} n!nx^{n-1} + (x-1)\sum_{n\geq 0} n!x^n = -1$$

$$x^2 F_0^{'}(x) + (x-1)F_0(x) = -1 \qquad (3.24)$$

biçiminde (3.5) denklemi, (3.24) ün diferansiyellenmesiyle,

$$x^2 F_0^{''}(x) + (3x-1)F_0^{'}(x) + F_0(x) = 0 \qquad (3.25)$$

şeklinde (3.3) denklemi elde edilir.

Örnek 3.3.2. $F_1(x) = \sum n!nx^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemler:

$$F_1^{'}(x) = \sum n!n^2x^{n-1}$$

dir. (3.21) den,

$$\sum_{n\geq 0} n!x^n = -\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1}\sum_{n\geq 0} n!nx^n$$

bulunur. Bu eşitlik (3.22) de kullanılırsa,

$$x^2(x-1)\sum_{n\geq 1} n!n^2x^{n-1} + \left(x^2-3x+1\right)\sum_{n\geq 0} n!nx^n = x$$

ve

$$x^2(x-1)F_1^{'}(x) + \left(x^2-3x+1\right)F_1(x) = x \qquad (3.26)$$

Bulunan bu eşitlik x ile bölünür ve türevi alınırsa,

$$x^3F_1^{''}(x) + x(3x-1)F_1^{'}(x) + (x+1)F_1(x) = 0 \qquad (3.27)$$

elde edilir.

Örnek 3.3.3. $F_1(x) = \sum n!(n+1)x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemler:

$F_1^{'}(x)=\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)x^{n-1}$ dir. (3.21) eşitliği x ile çarpılır ve (3.22) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa,

$$x^2\sum_{n\geq 0} n!n(n+1)x^n+(2x-1)\sum_{n\geq 0} n!x^n=x-1,$$

$$x^2x\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)x^{n-1}+(2x-1)\sum_{n\geq 0} n!x^n=x-1,$$

$$x^2x\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)x^{n-1}+(2x-1)\sum_{n\geq 1} n!x^n+(2x-1)=x-1,$$

$$x^2x\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)x^{n-1}+(2x-1)\sum_{n\geq 1} n!x^n+(2x-1)=x-1,$$

$$x^2x\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)x^{n-1}+(2x-1)\sum_{n\geq 1} n!x^n=-x$$

olur. İki taraf x ile bölünür ve ikinci toplamda $n\rightarrow n+1$ değişken değişimi yapılırsa,

$$x^2\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)x^{n-1}+(2x-1)\sum_{n\geq 1} n!x^{n-1}=-1,$$

$$x^2\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)x^{n-1}+(2x-1)\sum_{n\geq 0} n!(n+1)x^n=-1$$

$$x^2F_1^{'}(x)+(2x-1)F_1(x)=-1 \qquad (3.28)$$

Bu eşitliğin türevlenmesiyle,

$$x^2F_1^{"}(x)+(4x-1)F_1^{'}(x)+2F_1(x)=0 \qquad (3.29)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi elde edilir.

Örnek 3.3.4. $F_2(x)=\sum n!(n+1)(n+2)x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemler:

$F_2^{'}(x)=\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)(n+2)x^{n-1}$, $\quad xF_2^{'}(x)=\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)(n+2)x^n$ ve $x^2F_2^{'}(x)=x\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)(n+2)x^n$ dir.

(3.21) $2x^2$ ile (3.26) $3x$ ile çarpılır ve elde edilen yeni eşitlikler, (3.23) ile taraf tarafa toplanırsa,

$$x^3\sum_{n\geq 0} n!n(n+1)(n+2)x^n+(3x-1)\sum_{n\geq 0} n!x^n=x^2+2x-1$$

bulunur. Buradan,

$$x\sum_{n\geq 0} n!n(n+1)(n+2)x^{n+2}+(3x-1)\sum_{n\geq 0} n!x^{n}=x^{2}+2x-1,$$

yazılır ve ilk toplamda $n\to n-2$ değişimi yapılır, ikinci toplamın $n=0$ ve $n=1$ değerleri açık yazılırsa,

$$x\sum_{n\geq 2} n!(n-2)x^{n}+(3x-1)\sum_{n\geq 2} n!x^{n}=-2x^{2}$$

buradan, iki taraf x^2 ile bölündüğünde,

$$x\sum_{n\geq 2} n!(n-2)x^{n-2}+(3x-1)\sum_{n\geq 2} n!x^{n-2}=-2$$

elde edilir. Son olarak, her iki toplamda $n\to n+2$ değişimi yapılır ve bulunan eşitlikte, $F_2(x)$, $F_2^{'}(x)$, $xF_2^{'}(x)$, $x^2F_2^{'}(x)$ in yukarıdaki değerleri kullanılırsa,

$$x\sum_{n\geq 0} n!n(n+1)(n+2)x^{n}+(3x-1)\sum_{n\geq 0} n!(n+1)(n+2)x^{n}=-2,$$

$$x^{2}\sum_{n\geq 1} n!n(n+1)(n+2)x^{n-1}+(3x-1)\sum_{n\geq 0} n!(n+1)(n+2)x^{n}=-2$$

ve böylece

$$x^{2}F_2^{'}(x)+(3x-1)F_2(x)=-2 \tag{3.30}$$

bulunur. Bu eşitlikte türev alındığında,

$$x^{2}F_2^{''}(x)+(5x-1)F_2^{'}(x)+3F_2(x)=0 \tag{3.31}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!n^k x^n$ FONKSİYONLARININ SAĞLADIĞI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bir önceki bölümden $k \geq 0$ olmak üzere, $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!n^k x^n$ fonksiyonlarının sağladığı diferansiyel denklemlerin varlığını biliyoruz. Şimdi ise, $F_k(x)$ fonksiyonlarını çözüm kabul eden

$$x^2U_k(x)F_k^{'}(x)+\left[-U_{k+1}(x)\right]F_k(x)=A_k(x)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerdeki $U_k(x)$, $A_k(x)$ polinom katsayılarının sağladığı bağıntıları inceleyelim.

$k=0$ için, $F_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem, Örnek 3.3.1 ile

$$x^2(-1)F_0^{'}(x)+(-x+1)F_0(x)=1$$

dir. Burada, $U_0(x)=-1$, $-U_1(x)=-x+1$ ve $A_0(x)=1$ dir.

$k=1$ için, $F_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!nx^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem, Örnek 3.3 2 ile

$$x^2(x-1)F_1^{'}(x)+\left(x^2-3x+1\right)F_1(x)=x$$

dir. Burada, $U_1(x)=x-1$, $-U_2(x)=x^2-3x+1$ ve $A_1(x)=x$ dir.

$k=2$ için, $F_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!n^2x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem ise

$$x^2\left(-x^2+3x-1\right)F_2^{'}(x)+\left(-x^3+7x^2-6x+1\right)F_2(x)=x(x+1)$$

şeklinde belirlenebilir. Burada $U_2(x)=-x^2+3x-1$, $-U_3(x)=-x^3+7x^2-6x+1$ ve $A_2(x)=x(x+1)$ dir.

$k\geq 0$ için, $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!n^k x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem:

$$x^2U_k(x)F_k^{'}(x)+\left[-U_{k+1}(x)\right]F_k(x)=A_k(x)$$

olsun.

Şimdi $k+1$ için $F_{k+1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!n^{k+1}x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemi oluşturalım.

$$F_{k+1}(x)=xF_k^{'}(x),\ \ F_k^{'}(x)=x^{-1}F_{k+1}(x)\ \text{ ve }\ F_k^{''}(x)=x^{-1}F^{'}_{k+1}(x)-x^{-2}F_{k+1} \tag{1}$$

sağlanır.

$F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!n^k x^n$ fonksiyonunun sağladığı

$$x^2U_k(x)F_k^{'}(x)+\left[-U_{k+1}(x)\right]F_k(x)=A_k(x)$$

denkleminin türevi alınırsa:

$$x^2U_k(x)F_k^{''}(x)+\left\{\left[x^2U_k(x)\right]^{'}-U_{k+1}(x)\right\}F_k^{'}(x)-U_{k+1}^{'}(x)F_k(x)=A_k^{'}(x) \tag{2}$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!n^k x^n$ fonksiyonunun sağladığı

$$x^2U_k(x)F_k^{'}(x)+\left[-U_{k+1}(x)\right]F_k(x)=A_k(x)$$

denkleminden,

$$U_{k+1}(x)F_k(x)=x^2U_k(x)F_k^{'}(x)-A_k(x) \tag{3}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, (2) eşitliği $U_{k+1}(x)$ ile çarpılıp (3) eşitliği kullanılırsa, x değişkenine bağlı $U_k(x)$ ve $A_k(x)$ polinomları için,

$$x^2U_kU_{k+1}F_k'' + \left\{\left[x^2U_k\right]' - U_{k+1}\right\}U_{k+1}F_k' - \left[x^2U_kF_k' - A_k\right]U_{k+1}' = U_{k+1}A_k'$$

bulunur. Buradan, (1) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$x^2U_{k+1}F_{k+1}' + \left\{\frac{x^2\left[U_k'U_{k+1} - U_kU_{k+1}'\right] + xU_kU_{k+1} - U_{k+1}^2}{U_k}\right\}F_{k+1} = x\frac{A_k'U_{k+1} - A_kU_{k+1}'}{U_k}$$

elde edilir. Böylece,

$$-U_{k+2} = \frac{x^2\left[U_k'U_{k+1} - U_kU_{k+1}'\right] + xU_kU_{k+1} - U_{k+1}^2}{U_k} \quad \text{ve} \quad A_{k+1} = x\frac{A_k'U_{k+1} - A_kU_{k+1}'}{U_k}$$

olarak alınırsa,

$$F_{k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!n^{k+1}x^n$$

fonksiyonun sağladığı diferansiyel denklem

$$x^2U_{k+1}(x)F_{k+1}'(x) + \left[-U_{k+2}(x)\right]F_{k+1}(x) = A_{k+1}(x)$$

olarak bulunur.

Yukarıdaki tartışmadan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.1. $k \geq 0$ olmak koşuluyla,

$$F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!n^kx^n$$

fonksiyonlarını çözüm kabul eden

$$x^2U_k(x)F_k'(x) + \left[-U_{k+1}(x)\right]F_k(x) = A_k(x)$$

biçiminde diferansiyel denklemler vardır. Bu diferansiyel denklemlerde, x değişkenine bağlı $U_k(x)$ ve $A_k(x)$ fonksiyonları için, $U_0(x) = -1$, $U_1(x) = -x+1$ ve $k \geq 2$ olmak üzere; aşağıdaki rekürans formülleri geçerlidir:

$$-U_k(x)=\frac{x^2\left[U'_{k-2}(x)U_{k-1}(x)-U_{k-2}(x)U'_{k-1}(x)\right]+xU_{k-2}(x)U_{k-1}(x)-U^2_{k-1}(x)}{U_{k-2}(x)}$$

ve

$$A_k(x)=x\frac{A'_{k-1}(x)U_k(x)-A_{k-1}(x)U'_k(x)}{U_{k-1}(x)}.$$

4.2. $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!\prod_{i=1}^{k}(n+\alpha_i)x^n,\ \alpha_i\in\mathbb{C}_p$ FONKSİYONLARININ SAĞLADIĞI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu kesimde $\alpha_i\in\mathbb{C}_p$ olmak üzere, $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!\prod_{i=1}^{k}(n+\alpha_i)x^n$ fonksiyonlarını çözüm kabul eden

$$A_k(x)F'_k(x)+B_k(x)F_k(x)=C_k(x)$$

formundaki diferansiyel denklemi inşa edeceğiz.

$k=1$ için, $F_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!(n+\alpha_1)x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem:

$k=0$ için, $F_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem Örnek 3.3.1 den;

$$x^2F'_0(x)+(x-1)F_0(x)=-1$$

olmak üzere,

$$G_1(x)=x^{\alpha_1}F_0(x)=\sum n!x^{n+\alpha_1}$$

olarak tanımlandığında,

$$F_0(x)=x^{-\alpha_1}G_1(x)\ \text{ ve }\ F'_0(x)=x^{-\alpha_1}G'_1(x)-\alpha_1x^{-\alpha_1-1}G_1(x)$$

eşitlikleri denklemde, yerlerine yazılırsa,

$$x^2G'_1(x)-\left[(\alpha_1-1)x+1\right]G_1(x)=x^{\alpha_1}$$

elde edilir. Bu denklemin diferansiyellenmesiyle elde edilecek yeni denklemde

$$G_1^{'}(x)=x^{\alpha_1-1}F_1(x) \text{ ve } G_1^{''}(x)=x^{\alpha_1-1}F_1^{'}(x)+(\alpha_1-1)x^{\alpha_1-2}F_1(x)$$

eşitlikleri kullanılırsa, $F_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!(n+\alpha_1)x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem:

$$x^2\left[(\alpha_1-1)x+1\right]F_1^{'}(x)+\left[(\alpha_1-1)x^2+(\alpha_1-3)x-1\right]F_1(x)=-(\alpha_1-1)^2x-1$$

olarak bulunur. Burada,

$A_1(x)=x^2\left[(\alpha_1-1)x+1\right]$,

$B_1=(\alpha_1-1)x^2+(\alpha_1-3)x-1$ ve $C_1(x)=-(\alpha_1-1)^2x-1$

dir.

$k=2$ için, $F_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemi inşa edelim.

$$G_2(x)=x^{\alpha_2}F_1(x)=\sum n!(n+\alpha_1)x^{n+\alpha_1}$$

olarak tanımlandığında,

$$F_1(x)=x^{-\alpha_2}G_2(x) \text{ ve } F_1^{'}(x)=x^{-\alpha_2}G_2^{'}(x)-\alpha_2x^{-\alpha_2-1}G_2(x)$$

eşitlikleri, $F_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!(n+\alpha_1)x^n$ fonksiyonunun sağladığı denklemde yerlerine yazılıp elde edilen $G_2(x)$ e bağlı diferansiyel denklem türevlenir ve yeni eşitlikte

$$G_2^{'}(x)=x^{\alpha_2-1}F_2(x) \text{ ve } G_2^{''}(x)=x^{\alpha_2-1}F_2^{'}(x)+(\alpha_2-1)x^{\alpha_2-2}F_2(x)$$

eşitlikleri kullanılırsa, $F_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem:

$$x^2\left[(\alpha_1-1)x+1\right]\left[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\right]F_2^{'}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big\{x(\alpha_2-1)\big[(\alpha_1-1)x+1\big]\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big]\\
&\quad +x\big[3(\alpha_1-1)x+2\big]\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big]\\
&\quad -x^2\big[(\alpha_1-1)x+1\big]\big[2(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x+\alpha_1+\alpha_2-3\big]\\
&\quad -\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big]^2\Big\}F_2(x)\\
&=x\big[(\alpha_1-1)^2x+\alpha_1\big]\big[2(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x+\alpha_1+\alpha_2-3\big]\\
&-\big[(\alpha_1-1)^2(\alpha_2+1)x+\alpha_1\alpha_2\big]\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big]
\end{aligned}
$$

olur. Burada,

$$A_2(x)=x^2\big[(\alpha_1-1)x+1\big]\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big],$$

$$
\begin{aligned}
B_2(x)=x(\alpha_2-1)&\big[(\alpha_1-1)x+1\big]\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big]\\
&+x\big[3(\alpha_1-1)x+2\big]\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big]\\
&-x^2\big[(\alpha_1-1)x+1\big]\big[2(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x+\alpha_1+\alpha_2-3\big]\\
&-\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big]^2
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
C_2(x)=x&\big[(\alpha_1-1)^2x+\alpha_1\big]\big[2(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x+\alpha_1+\alpha_2-3\big]\\
&-\big[(\alpha_1-1)^2(\alpha_2+1)x+\alpha_1\alpha_2\big]\big[(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)x^2+(\alpha_1+\alpha_2-3)x+1\big]
\end{aligned}
$$

$k\geq 1$ için, $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!\prod_{i=1}^{k}(n+\alpha_i)x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem $A_k(x)$, $B_k(x)$ ve $C_k(x)$ polinomları x değişkenine bağlı olmak üzere;

$$A_k(x)F_k^{'}(x)+B_k(x)F_k(x)=C_k(x)$$

olsun.

$k+1$ için, $F_{k+1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!\prod_{i=1}^{k+1}(n+\alpha_i)x^n$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem:

$$G_{k+1}(x)=x^{\alpha_{k+1}}F_k(x)=\sum n!\prod_{k=1}^{k}(n+\alpha_i)x^{n+\alpha_{k+1}}$$

tanımlandığında,

$$F_k(x)=x^{-\alpha_{k+1}}G_{k+1}(x),\quad F_k'(x)=x^{-\alpha_{k+1}}G_{k+1}'(x)-\alpha_{k+1}x^{-\alpha_{k+1}-1}G_{k+1}(x) \tag{1}$$

ve

$$G_{k+1}'(x)=x^{\alpha_{k+1}-1}F_{k+1}(x),\quad G_{k+1}''(x)=x^{\alpha_{k+1}-1}F_{k+1}'(x)+(\alpha_{k+1}-1)x^{\alpha_{k+1}-2}F_{k+1}(x) \tag{2}$$

olur.

$F_k(x)$ in sağladığı

$$A_k(x)F_k'(x)+B_k(x)F_k(x)=C_k(x)$$

denkleminde (1) değerleri yerlerine yazılırsa,

$$A_k(x)G_{k+1}'(x)+\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]G_{k+1}(x)=x^{\alpha_{k+1}}C_k(x)$$

olur. Bu denklem,

$$\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]G_{k+1}(x)=x^{\alpha_{k+1}}C_k(x)-A_k(x)G_{k+1}'(x)$$

olduğu dikkate alınıp diferansiyellenirse,

$$\begin{aligned}
&A_k(x)\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]G_{k+1}''(x)\\
&\quad+\Big\{A_k'(x)\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]-A_k(x)\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]'\\
&\quad+\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]^2\Big\}G_{k+1}'(x)\\
&=\left[x^{\alpha_{k+1}}C_k(x)\right]'\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]-\left[x^{\alpha_{k+1}}C_k(x)\right]\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]'
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (2) değerleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&A_k(x)\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]F_{k+1}'(x)\\
&\quad+\Big\{x^{-1}(\alpha_{k+1}-1)A_k(x)\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]+A_k'(x)\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]\\
&\quad-A_k(x)\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]'+\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]^2\Big\}F_{k+1}(x)\\
&=x^{1-\alpha_{k+1}}\Big\{\left[x^{\alpha_{k+1}}C_k(x)\right]'\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]-\left[x^{\alpha_{k+1}}C_k(x)\right]\left[B_k(x)-x^{-1}\alpha_{k+1}A_k(x)\right]'\Big\}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bu tartışma ile aşağıdaki teorem elde edilmiş olur:

Teorem 4.2.1. $k \geq 1$ olmak koşuluyla,

$$F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \prod_{i=1}^{k} (n+\alpha_i) x^n$$

fonksiyonlarını çözüm kabul eden

$$A_k(x) F_k^{'}(x) + B_k(x) F_k(x) = C_k(x)$$

biçiminde diferansiyel denklemler vardır. Bu denklemlerde $A_0(x) = x^2$, $B_0(x) = x-1$, $C_0(x) = -1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere, x değişkenine bağlı $A_k(x)$, $B_k(x)$ ve $C_k(x)$ polinomları için aşağıdaki rekürans formülleri sağlanır:

$$A_k(x) = A_{k-1}(x)\left[B_{k-1}(x) - x^{-1}\alpha_k A_{k-1}(x)\right],$$

$$B_k(x) = x^{-1}(\alpha_k - 1) A_{k-1}(x)\left[B_{k-1}(x) - x^{-1}\alpha_k A_{k-1}(x)\right] + A_{k-1}^{'}(x)\left[B_{k-1}(x) - x^{-1}\alpha_k A_{k-1}(x)\right]$$
$$- A_{k-1}(x)\left[B_{k-1}(x) - x^{-1}\alpha_k A_{k-1}(x)\right]^{'} + \left[B_{k-1}(x) - x^{-1}\alpha_k A_{k-1}(x)\right]^2$$

ve

$$C_k(x) = x^{1-\alpha_k}\left\{\left[x^{\alpha_k} C_{k-1}(x)\right]^{'}\left[B_{k-1}(x) - x^{-1}\alpha_k A_{k-1}(x)\right] - \left[x^{\alpha_k} C_{k-1}(x)\right]\left[B_{k-1}(x) - x^{-1}\alpha_k A_{k-1}(x)\right]^{'}\right\}$$

dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) $k \geq 0$ olmak koşuluyla, $F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! n^k x^n$ fonksiyonlarını çözüm kabul eden

$$x^2 U_k(x) F_k^{'}(x) + \left[-U_{k+1}(x) \right] F_k(x) = A_k(x)$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerde, x değişkenine bağlı $U_k(x)$ ve $A_k(x)$ fonksiyonları için, $U_0(x) = -1$, $U_1(x) = -x+1$ ve $k \geq 2$ olmak üzere; aşağıdaki rekürans formüllerinin gerçeklendiği gösterilmiştir:

$$-U_k(x) = \frac{x^2 \left[U_{k-2}^{'}(x) U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x) U_{k-1}^{'}(x) \right] + x U_{k-2}(x) U_{k-1}(x) - U_{k-1}^2(x)}{U_{k-2}(x)}$$

ve

$$A_k(x) = x \frac{A_{k-1}^{'}(x) U_k(x) - A_{k-1}(x) U_k^{'}(x)}{U_{k-1}(x)}.$$

2) $k \geq 1$ olmak koşuluyla, $F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \prod_{i=1}^{k} (n+\alpha_i) x^n$ fonksiyonlarını çözüm kabul eden

$$A_k(x) F_k^{'}(x) + B_k(x) F_k(x) = C_k(x)$$

formundaki diferansiyel denklemlerde, $k \geq 1$ olmak üzere; x değişkenine bağlı $A_k(x)$, $B_k(x)$ ve $C_k(x)$ kat sayıları için aşağıdaki rekürans formüllerinin sağlandığı gösterilmiştir:

$$A_k(x) = A_{k-1}(x) \left[B_{k-1}(x) - x^{-1} \alpha_k A_{k-1}(x) \right],$$

$$B_k(x) = x^{-1}(\alpha_k - 1) A_{k-1}(x) \left[B_{k-1}(x) - x^{-1} \alpha_k A_{k-1}(x) \right] + A_{k-1}^{'}(x) \left[B_{k-1}(x) - x^{-1} \alpha_k A_{k-1}(x) \right]$$
$$- A_{k-1}(x) \left[B_{k-1}(x) - x^{-1} \alpha_k A_{k-1}(x) \right]^{'} + \left[B_{k-1}(x) - x^{-1} \alpha_k A_{k-1}(x) \right]^2$$

ve

$$C_k(x) = x^{1-\alpha_k} \left\{ \left[x^{\alpha_k} C_{k-1}(x) \right]^{'} \left[B_{k-1}(x) - x^{-1} \alpha_k A_{k-1}(x) \right] - \left[x^{\alpha_k} C_{k-1}(x) \right] \left[B_{k-1}(x) - x^{-1} \alpha_k A_{k-1}(x) \right]^{'} \right\}$$

.

5.2. ÖNERİLER

Bu çalışmada $P_k(n)$ polinomu özel seçilerek çözümü $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!P_k(n)x^n$ biçiminde olan $p-$adik diferansiyel denklemlerin varlığı ve inşası incelenmiştir. $P_k(n)$ keyfi bir polinom olmak üzere, çözümü $F_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!P_k(n)x^n$ kuvvet serisi olan ve varlığı $[2]$ ile bilinen $p-$adik diferansiyel denklemlerin biçimi incelenebilir.

Ayrıca, çözümü genel $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi ile verilen $p-$adik diferansiyel denklemlerin varlığı ve biçimi araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Bachman, G. "Introduction to *p*-Adic Numbers and Valution Theory", Academic Pres, New York and London, 173 p., (1964).

[2] de Gosson, M., Dragovich, B., Khrennikov, A. "Some *p*-Adic Differential Equations", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, New York: Marcel Dekker, (2001).

[3] Dragovich, B. "On Some *p*-Adic Series with Factorials", In: WH Schikhof, C Perez-Garcia, J Kakol, eds., *p*-Adic Functional Analysis, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. **192**, New York: Marcel Dekker, 95-105 pp., (1997).

[4] Dragovich, B. "On *p*-Adic Power Series", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, (1998).

[5] Dragovich, B. "On *p*-Adic Power Series", In: WH Schikhof, C Perez-Garcia, J Kakol, eds., *p*-Adic Functional Analysis, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. **207**, New York: Marcel Dekker, 65-75 pp., (1999).

[6] Dwork, B. "Lectures on *p*-Adic Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 310 p., (1982).

[7] Gouvêa, F. Q. "*p*-Adic Numbers An Introduction", Springer-Verlag, Berlin, 298 p., (1997).

[8] Hensel, K. "Zahlentheorie", Göschen, Berlin and Leipzig, 356 p., (1913).

[9] Khrennikov, A. "*p*-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics", Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 261 p., (1994).

[10] Koblitz, N. "*p*-Adic Numbers, p-Adic Analysis and Zeta Functions", Springer-Verlag, New York, 150 p., (1984).

[11] Mahler, K. "*p*-Adic Numbers and Their Functions", Cambridge University Press, London, 320 p., (1981).

[12] Robert, M. "A Course in p-Adic Analysis", Springer-Verlag, New York, 436 p., (2000).

[13] Schikhof, WH. "Ultrametric Calculus: An Introduction to *p*-Adic Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, 306 p., (1984).

[14] Vladimirov, V. S., , Volovich, I. V. and Zelenov E. I. "p-adic Analysis and Mathematical Physics", World Scientific, Singapore, 319 p., (1998).

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Bingöl'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da bitirdi. Lisans öğrenimini ise Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde 2002'de tamamladı. Aynı yıl MEB'na bağlı öğretmen olarak atandı. 2005'te Mersin iline atandıktan sonra Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ABD'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen, 2006 itibariyle atandığı Mersin Tevfik Sırrı Gür Anadolu Lisesi'nde Matematik Öğretmenliği görevini sürdürmektedir.