BİR MATEMATİKSEL FİZİK DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ ÜZERİNE

MEHMET KULA

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Khanlar MAMMADOV

MERSİN
Haziran – 2008

ÖZ

Tezde $D=\{(x,t):0<x<1,0<t<T\}$ bölgesinde homojen olmayan

$$u_t=u_{xx}+f(x,t)$$

ısı iletimi denklemi için

$$u_x(0,t)=v(t),\ 0\le t\le T$$

$$\int_0^1 xu(x,t)\,dx=\mu(t),\ 0\le t\le T$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1$$

başlangıç koşulları göz önüne alınır. Lokal olmayan sınır koşulları noktasal klasik olmayan sınır değer problemine indirgenir ve değişkenlere ayırarak problemin çözümü bulunur. Çözümün varlığı gösterilirken karşılaşılan Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonları bulunur, özfonksiyonlara göre ayrışımı elde edilir. Bu biçimde sınır değer problemleri ile ısı değişimi, difüzyon olaylarında, ekonomi problemlerinde karşılaşılabilir.

Anahtar Kelimeler: Isı iletim denklemi, lokal olmayan sınır değer problemi, integral sınır koşulu.

ABSTRACT

In this work, it is considered non–homegenous heat equation

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

with the boundary conditions

$$u_x(0,t) = v(t),\ 0 \le t \le T$$

$$\int_0^1 xu(x,t)\,dx = \mu(t),\ 0 \le t \le T$$

and the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le 1$$

Non-local boundary conditions are reduced to pointwise non classical boundary value problem. It is applied the metod of separation variables to this problem. It is found eigenvalues and eigenfunctions of Sturm-Liouville problem which appears in the solution, the expansion according to eigenfunctions is obtained. It is shown the existence of solution of the boundary value problem which is consider. This kind of boundary value problems appears on heat variation, diffusion and economy problems.

Key Words: Heat equation, non-local boundary value problem, integral condition.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilimsel anlamda hiçbir özveriden kaçınmayan , desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Khanlar MAMMADOVA teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Yüksek Lisans ders ve tez aşamasında bilgilerini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Matematik bölümündeki diğer bütün hocalarıma ve arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$C^{(n)}$	Kendisi ve $n.$ dereceden türevi sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$\mathfrak{D}$	$y(x) \in C^{(n)}$ fonksiyonlar kümesi
D	$\{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
$l(y)$	Lineer diferansiyel ifade
$l^{*}(y)$	$l(y)$'nin eşlenik diferansiyel ifadesi
$U_k(y)$	Sınır koşulları
L	Diferansiyel operatör
L^{*}	L'nin eşlenik operatörü
λ	Özdeğer
δ_{jk}	Kronecker delta sembolü
u	Sıcaklık
u_t	Sıcaklık değişim hızı
u_{xx}	Sıcaklık eğrisinin kabarıklığı

1. GİRİŞ

Çubukta ısının dağılımı olayının matematiksel modeli daha öncelerden (1800 yıllarında) dikkat çekmiştir ve problemin 2. mertebeden parabolik tip denklemlerle ifadesine varılmıştır. Sınırda ısı değişimi ise farklı şekillerde ifade edilmiştir. Örneğin $[0,l]$ boyundaki homojen bir çubukta ısı dağılımı incelendiğinde, uçlardaki sıcaklık uygun olarak T_1, T_2 ise sınır koşulu:

$$u(0,t)=T_1,\ u(l,t)=T_2$$

olarak ifade edilir. Burada $u(x,t)$ ile t anında x noktasındaki sıcaklık gösterilir. Fakat, her bir fiziksel olay bir zaman içinde oluşur ve bu nedenle bir başlangıç anında olayı matematiksel olarak ifade etmek gerekir. Başlangıç olarak $t=0$ alınırsa ve bu anda çubuktaki sıcaklık dağılımının $\varphi(x)$ olduğu düşünülürse

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

şeklinde olan başlangıç koşulunun verilmesine gerek duyulur. Dolayısıyla, fiziksel olaya bağlı olarak çeşitli başlangıç ve sınır koşulları ile karşılaşılır.

Birçok ısı transferi, difüzyon ve ekonomi problemlerinde sınır koşulları sadece uç noktalarında değil bütün alana ait olarak integral biçiminde verilebilir. Örneğin, ısıtılmış ince çubukta toplam ısı miktarının değişimi $\mu(t)$ ile ifade edilirse, ısı dağılımı için

$$\int_0^l u(x,t)\,dx=\mu(t)$$

biçiminde sınır koşulu ile karşılaşılabilir.

Tezde ısı iletim denklemi için, sınır koşulu integral biçiminde verilmiş bir sınır değer problemi ele alınır. $D=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t<T\}$ bölgesinde

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+F(x,t) \tag{1.1}$$

denklemi için

$$\upsilon_x(0,t)=v(t)\,,0\le t\le T \tag{1.2}$$

$$\int_0^1 x\upsilon(x,t)\,dx=\mu(t)\,,0\le t\le T \tag{1.3}$$

sınır koşullarını ve

$$\upsilon(x,0)=\upsilon_0(x)\,,\ 0\le x\le 1 \tag{1.4}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözüm aranır. Görüldüğü gibi (1.3) sınır koşulu bizim alıştığımız uçlarda verilen adi sınır koşulu değildir. Bundan dolayı bilinen matematiksel fizik yöntemleri (1.1)-(1.4) probleminin çözümüne doğrudan uygulanamaz.

Tezde hedeflerimizden birisi (1.1)-(1.4) biçiminde sınır değer problemini değişken dönüşümü ve işlemler yaparak noktasal sınır koşuları ile verilmiş bir sınır değer problemine indirgemektir. Bunun için,

$$V(x,t)=\frac{1}{3}(3x-2)v(t)+4x^2\mu(t)$$

olmak üzere,

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)+V(x,t)$$

biçiminde olan bir değişken dönüşümü tanımlanır ve (1.1)-(1.4) sınır değer problemi aşağıdaki biçimde olan:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\,,\ (x,t)\in D \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0\,,\ 0\le t\le T \qquad (1,6)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}+u(0,t)-u(1,t)=0\,,\ 0\le t\le T \tag{1.7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1 \tag{1.8}$$

noktasal klasik olmayan bir sınır değer problemine indirgenir. Bu problemin çözümü aşağıdaki biçimde iki sınır değer probleminin toplamı biçiminde aranır.

I.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t)\in D,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ 0\le t\le T,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}+u(0,t)-u(1,t)=0,\ 0\le t\le T,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1$$

II.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ (x,t)\in D,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ 0\le t\le T,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}+u(0,t)-u(1,t)=0,\ 0\le t\le T,$$

$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le 1$$

Problemi çözmek için değişkenlere ayırma veya Fourier metodu uygulandığında aşağıdaki biçimde olan Sturm-Liouville problemi ile karşılaşırız:

$$\left.\begin{aligned} &X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<1\\ &X'(0)=0\\ &X'(1)+X(0)-X(1)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Elde edilen bu sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının incelenmesine gerek duyulur. Çükü (1.5)-(1.8) sınır değer probleminin çözümünün varlığı, (1.9) problemi için özdeğer ve özfonksiyonlara göre ayrışım problemi ile doğrudan bağılıdır. Gerçekten, $-\mu_n^2, n=1,2,\ldots$, (1.9) probleminin özdeğerleri ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlar da $X_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, ise, (1.5)-(1.8) probleminin çözümünün

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) e^{-\mu_n^2 t}$$

biçiminde olduğu elde edilir. Burada başlangıç koşulu sağlatılırsa

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik ise, başlangıçta verilen $\varphi(x)$ fonksiyonunun (1.9) probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışımıdır.

Dolayısılya (1.5)-(1.8) sınır değer probleminin çözümü sırasında, problemin başlangıç koşulunda verilen $\varphi(x)$ fonksiyonunun (1.9) Strum Liouville probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışımı ile karşılaşılır. Karşılaşılan bu ayrışım problemi ise ele alınan problemin özeşlenik olup olmaması ile yakından ilgilidir.

Tezde (1.9) problemine eşlenik sınır değer problemi inşa edilirse:

$$Y''(x)+\lambda Y(x)=0\,,\ 0<x<1$$

$$Y(1)-Y'(1)=0\,,$$

$$Y'(0)-Y(1)=0\,.$$

(1.9) probleminin özeşlenik olmadığı görülür. Özeşlenik durumda ayrışım problemi daha önceden çözülmüştür. Özeşlenik olmayan durumda ise sınır koşullarının regüler, hem de kuvvetli regüler olması ile ayrışım veya tabanlık problemi önem taşır.

Tezde (1.9) sınır değer problemine ilişkin yukarıdaki sorular incelenir ve ele alınan (1.1)-(1.4) ısı transferi probleminin çözümünün varlığı gösterilir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Matematiksel modellerin bir çoğu özellikle ekonomi [16] ve ısı transferi ile ilgili problemler parabolik tip denklemler için integral biçiminde sınır koşulu ile ifade edilebilir. Örneğin, ince ısıtılmış çubukta ısı dağlımı

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \mu(t)$$

biçiminde sınır koşulu ile ifade edilir. Burada $u(x,t)$ t anında x noktasındaki ısıyı, $\mu(t)$ ise çubuktaki toplam ısı miktarındaki değişme kuralını belirtir [3], [17], [18].

Sınır koşulu integral biçiminde verildiğinde problemin çözümünü kolaylaştırmak için ele alınan problemi daha basit hale getirmek yani noktasal sınır koşullarına indirgemek önemlidir. Çünkü ancak bu durumda elde edilen karışık sınır değer problemine matematiksel fiziğin yöntemleri uygulanabilir. Tezde bu indirgeme sonucunda homojen olmayan ısı iletimi denklemi için çubuğun farklı uçlarında sınır koşulları bulunur. Ardından problemin lineerliği kullanılarak değişkenlere ayırma veya Fourier metodu uygulanır [22], [23].

Değişkenlere ayırma sonucunda problemin çözümü sırasında $2.$mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemi ile karşılaşılır. Çözümün varlığı için özdeğer ve özfonksiyon probleminin veya Sturm-Liouville probleminin incelenmesi gerekir. Bu şekilde olan problemler $n.$mertebeden adi diferansiyel denklemler için [1], [4]'da, $2.$mertebeden denklemler için ise [5], [6] ve başka kaynaklarda ele alınır. Bu çalışmalardan kullanılarak özdeğer ve özfonksiyon problemi incelenir.

Çözüm sırasında elde edilen Sturm-Liouville problemi özeşlenik değildir. Ancak sınır koşulları regüler, kuvvetli regülerdir [1]. Bu durumda başlangıç koşulda verilen fonksiyonun özfonksiyonlara göre ayrışımı için [1], [7], [8]'daki sonuçlardan kullanılır. Özeşlenik durumunda benzer problemler birçok çalışmada yapılmıştır [1], [9], [10]. Hatırlatalım ki, Strum-Liouville probleminde sınır koşulları regüler ancak kuvvetli regüler olmayan durumunda, özfonksiyonlara göre ayrışım problemleri veya özfonksiyonların tabanlığı problemleri [3], [11-15], çalışmalarında incelenir. Benzer problem bir ısı iletimi denklemi için [24]'de ele alınır.

Tezde ele alınan problem bir matematiksel fizik problemidir ve problemin konusuna ilişkin kısmi diferansiyel denklemlere ait [2], [19], [20], [22] kitaplardan yararlanılır. Tezde ele alınan problemin çözümü sırasında [21], [25], kaynakları da kulanılır.

3. METERYAL VE METOT

Bu bölümde sonraki kısımlarda kullanılacak temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilecektir.

3.1. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Tanım 3.1.1:

$$\ell(y) = p_0(x)\,y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\,y \qquad (3.1.1)$$

biçimindeki ifadeye *lineer diferansiyel ifade* denir. Burada n sayısı diferansiyel ifadenin *mertebesi* ve $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları da diferansiyel ifadenin *katsayısı* olarak adlandırılır [1].

y fonksiyonunun ve onun $[a,b]$ aralığında $(n-1)$. dereceden türevlerinin a ve b noktalarındaki değerlerini

$$y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)} \;,\; y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)} \qquad (3.1.2)$$

ile belirtelim. (3.1.2) değerleriyle oluşturulan

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + \dots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + \dots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} \qquad (3.1.3)$$

ifadesi bir lineer form belirtir.

Tanım 3.1.2: $k = 1,2,\dots,m$ ve $y(x) \in C^{(n)}$ için (3.1.3) biçimde $U_k(y)$ ile oluşturulan

$$U_k(y) = 0\,,\; k = 1,2,\dots,m \qquad (3.1.4)$$

eşitliklerine *sınır koşulları* denir [1].

(3.1.4) koşullarını sağlayan $y(x) \in C^{(n)}$ fonksiyonlarının kümesini $\mathfrak{D}$ ile belirtelim. O halde $\mathfrak{D} \subset C^{(n)}$ dir. Kabul edelim ki, $\ell(y)$ diferansiyel ifade ve (3.1.4) sınır koşuları ile oluşturulan $\mathfrak{D}$ alt kümesi verilmiş olsun. Her bir $y \in \mathfrak{D}$

fonksiyonuna bir $u = l(y)$ fonksiyonunu karşılık getiren dönüşüme; tanım bölgesi $\mathfrak{D}$ olan bir *lineer operatör* denir ve L ile gösterilir. O halde $y \in \mathfrak{D}$ ve $u = l(y)$ ise $u = Ly$ olur. Dolayısıyla L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.1.4) sınır koşulları ile oluşturulur.

$[a,b]$ aralığında

$$\ell(y) = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y$$

diferansiyel ifadesinin $p_k(x)$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ katsayılarının $(n-k)$ mertebeden sürekli türevleri var olsun. $y, z \in C^{(n)}$ keyfi fonksiyonlar olsun. $k-$defa kısmi integralleme ile

$$\begin{aligned}\int_a^b p_{n-k}\overline{z}y^k dx = {} & \left[p_{n-k}\overline{z}y^{(k-1)} - \left(p_{n-k}\overline{z}\right)' y^{(k-2)} + \ldots + (-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k-1)} y \right]\Bigg|_{x=a}^{x=b} \\ & + (-1)^k \int_a^b y\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k)} dx\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

elde edilir. Eğer (3.1.5)'de k yerine $k = n, n-1, \ldots, 0$ koyarsak ve elde edilen denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$\int_a^b \ell(y)\overline{z}dx = P(\eta,\xi) + \int_a^b y\overline{\ell^*(z)}dz \tag{3.1.6}$$

formu elde edilir. Burada

$$\ell^*(z) = (-1)^n\left(\overline{p}_0 z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{p}_1 z\right)^{(n-1)} + (-1)^{n-2}\left(\overline{p}_2 z\right)^{(n-2)} + \ldots + \overline{p}_n z \tag{3.1.7}$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 3.1.3: $l^*(z)$ diferansiyel ifadesine $l(y)$'ye *eşlenik diferansiyel ifade* denir. (3.1.6) eşitliğine ise *Lagrange Formülü* denir [1].

$P(\eta,\xi)$ ise $\eta=\left(y_a, y'_a,..., y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b,..., y_b^{(n-1)}\right)$, $\xi=\left(z_a, z'_a,..., z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b,..., z_b^{(n-1)}\right)$, ile belirli bilineer formdur.

$U_1,...,U_m$ ifadeleri $y_a, y'_a,..., y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b,..., y_b^{(n-1)}$ değişkenlerine göre lineer bağımsız fonksiyonlar olsunlar. Bu fonksiyonları $m<2n$ olduğunda $U_{m+1},...,U_{2n}$ fonksiyonları ile $2n$ sayıda lineer $U_1,...,U_{2n}$ fonksiyonlarına tümleyelim. Bu fonksiyonlar lineer bağımsız olduğuna göre $y_a, y'_a,..., y_a^{(n-1)},..., y_b, y'_b,..., y_b^{(n-1)}$ değişkenleri, $U_1,...,U_{2n}$ lineer fonksiyonlarının lineer kombinasyonu gibi ifade edilebilir. Bu ifadeleri Lagrange formülünde $P(\eta,\xi)$ ifadesinde yerine yazarsak, $P(\eta,\xi)$ $U_1,...,U_{2n}$ değişkenlerine göre lineer fonksiyon olur. O halde $U_1,...,U_{2n}$ değişkenlerinin katsayıları $z_a, z'_a,..., z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b,..., z_b^{(n-1)}$ değişkenlerine bağlı lineer homojen fonksiyon olur. Bu katsayıları $V_{2n},V_{2n-1},...,V_1$ olarak alırsak Lagrange formülü

$$\int_a^b \ell(y)\,\overline{z}dx = U_1V_{2n}+U_2V_{2n-1}+...+U_{2n}V_1+\int_a^b y\overline{\ell^*(z)}dx \qquad (3.1.8)$$

şeklinde olur. Bu ifadede $V_1,V_2,...,V_{2n}$ fonksiyoları lineer bağımsızdır.

Tanım 3.1.4:

$$V_1=0\ ,V_2=0,...,V_{2n-m}=0 \qquad (3.1.9)$$

sınır koşullarına

$$U_1=0\ ,U_2=0,...,U_m=0 \qquad (3.1.10)$$

sınır koşullarının *eşlenik sınır koşulu* denir. Eşlenik sınır koşullarına denk olan koşullara *özeşlenik sınır koşulları* denir [1].

Tanım 3.1.5: $\ell^*(y)$ ve eşlenik (3.1.9) sınır koşullarının oluşturduğu operatöre L'*ye eşlenik operatör* denir ve L^* ile gösterilir [1].

(3.1.8) formülünden ve (3.1.9), (3.1.10) sınır koşullarından

$$\int_a^b Ly(x)\overline{z}(x)\,dx = \int_a^b y(x)\overline{L^*z(x)}\,dx \tag{3.1.11}$$

elde edilir. Eğer

$$(y,z) = \int_a^b y(x)\overline{z}(x)dx$$

ifadesi göz önüne alınırsa (3.1.11) eşitliği

$$(Ly,z) = (y,L^*z) \tag{3.1.12}$$

şeklinde yazılabilir.

Eşlenik operatörün tanımına göre L operatörü L^*'ın eşlenik operatörüdür. O halde

$$L^{**} = L$$

olur.

Tanım 3.1.6: $L^* = L$ ise L'ye *özeşlenik operatör* denir. L özeşleniktir ancak ve ancak L operatörü özeşlenik diferansiyel ifade ve özeşlenik sınır koşullarından oluşturulursa.

Tanım 3.1.7: L^* L'nin eşlenik operatörü ise $L^*z = 0$ sınır problemine $Ly = 0$ homojen sınır değer probleminin *eşlenik sınır değer problemi* denir. Eşlenik sınır problemi

$$L^*:\begin{cases} l^*(z) = 0 \\ V_k(z) = 0, \quad k = 1,2,...,2n-m \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir.

λ bir gerçel (veya karmaşık) parametre ve $p(x)$, $q(x)$ bir I aralığında yeterince düzgün fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,\ x\in I \tag{3.1.13}$$

şeklindeki diferansiyel denklem ailesini ele alalım. L diferansiyel operatörü

$$Ly=-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y \tag{3.1.14}$$

olarak tanımlanırsa, (3.1.13) denklemi bu operatör yardımıyla

$$Ly-\lambda\rho(x)y=0 \tag{3.1.15}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada L'ye ikinci mertebeden *lineer diferansiyel operatör,* λ sayısına *spektral parametre,* $q(x)$ fonksiyonuna ise *potansiyel fonksiyonu* denir.

Tanım 3.1.8: (3.1.13) veya (3.1.15) denkleminin

$$\left.\begin{aligned}U_1(y)=A_1y(a)+B_1y'(a)=0\\ U_2(y)=A_2y(b)+B_2y'(b)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.1.16}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına *Sturm – Liouville sınır değer problemi* adı verilir. Burada A_1, A_2, B_1, B_2 reel sabitler olup, $A_1^2+B_1^2\neq 0$, $A_2^2+B_2^2\neq 0$, koşulları sağlanmaktadır.

(3.1.13) ifadesi λ spektral parametresine bağlı bir denklemler ailesidir. Birçok önemli uygulamada ikinci mertebeden olan lineer denklemler karşımıza bizzat bu biçimde çıkmaktadır. $y(x)=0$ fonksiyonu λ'nın her bir değerinde denklemi ve verilmiş sınır koşullarını sağladığına göre trivial bir çözümdür. Eğer bu homojen denklemin, λ'nın herhangi bir değerinde (3.1.16) homojen sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı çözümü varsa, λ'nın bu değerine verilmiş sınır değer probleminin *özdeğeri*, bu özdeğere karşı gelen çözüme ise *özfonksiyon* denir. Özdeğerlerin oluşturduğu kümeye, verilmiş sınır değer probleminin *spektrumu* adı verilir.

Tanım 3.1.9: $n-1\geq k_1\geq k_2\geq ...\geq k_n\geq 0$, $k_{\upsilon+2}<k_\upsilon$ olmak üzere

$$U_\upsilon(y)\equiv\alpha_\upsilon y^{(k_\upsilon)}(0)+\beta_\upsilon y^{(k_\upsilon)}(1)+\sum_{j=0}^{k_\upsilon-1}\left[\alpha_{\upsilon j}y^{(j)}(0)+\beta_{\upsilon j}y^{(j)}(1)\right]=0 \quad (3.1.17)$$

koşullarına *normlaşmış sınır koşulları* denir [1]. Burada α_υ ve β_υ katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

Tüm ρ-düzlemini $\frac{\upsilon\pi}{n}\leq\arg\rho\leq\frac{(\upsilon+1)\pi}{n}$ eşitsizlikleri ile $2n$ tane S_υ, $\upsilon=0,1,2,...,2n-1$, dilimlere ayıralım. $\omega_1,\omega_2,...,\omega_n$ ise -1'in n.dereceden kökleri olsun ve $\rho\in S_\upsilon$ için $\operatorname{Re}(\rho\omega_1)\leq\operatorname{Re}(\rho\omega_2)\leq...\leq\operatorname{Re}(\rho\omega_n)$ sağlansın.

Tanım 3.1.10: $n=2m$ olduğunda

$$\frac{\theta_{-1}}{s}+\theta_0+\theta_1 s=\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1}...\alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1+s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \left(\alpha_1+\frac{1}{s}\beta_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1}...\beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2}...\alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2+s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \left(\alpha_2+\frac{1}{s}\beta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2}...\beta_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n}...\alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n+s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \left(\alpha_n+\frac{1}{s}\beta_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n}...\beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

eşitliğinden tanımlanan θ_{-1} ve θ_1 sayıları sıfırdan farklı ise (3.1.17) sınır koşullarına *regülerdir* denir [1].

Tanım 3.1.11: θ_0, θ_1, θ_{-1} sayıları için $\theta_0^2-4\theta_1\theta_{-1}\neq 0$ bağıntısı sağlanıyorsa (3.1.17) sınır koşuluna *kuvvetli regüler*, $\theta_0^2-4\theta_1\theta_{-1}=0$ bağıntısı sağlanıyorsa *zayıf regülerdir* denir [1].

$$\lambda=-\rho^n \text{ ve } l(y)=\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+...+p_n(x)y$$

olmak üzere

$$l(y)+\rho^n y=0 \quad (3.1.18)$$

denklemi verilsin.

Teorem 3.1.1: (3.1.18) denklemi ve regüler sınır koşullarıyla oluşturulan sınır değer probleminin özdeğerleri iki tane λ_k', λ_k'' sonsuz dizi oluşturur [1]. Bunlar λ_k', λ_k'', $(k = N, N+1, ...)$ olmak üzere aşağıdaki asimptotik gösterime sahiptirler.

n tek ve $n = 4q-1$ ise:

$$\lambda_k' = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \tag{3.1.19}$$

$$\lambda_k'' = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \tag{3.1.20}$$

n tek ve $n = 4q+1$ ise:

$$\lambda_k' = (2k\pi in)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \tag{3.1.21}$$

$$\lambda_k'' = (-2k\pi in)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \tag{3.1.22}$$

Burada $\xi^{(1)}$ ve $\xi^{(2)}$ (S_υ bölgesine uygun olarak) $\theta_1 \xi + \theta_0 = 0$ denkleminin kökleridir ve υ'nün tek ve çift değerlerine uygundurlar.

n çift, $n = 2\mu$ ve $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$ olduğunda:

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \tag{3.1.23}$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \tag{3.1.24}$$

Burada ξ' ve ξ'' $\theta_1\xi^2+\theta_0\xi+\theta_{-1}=0$ denkleminin kökleridir ve üst işaret çift μ'ye, alt işaret ise tek μ'ye uygundur.

n çift, $n=2\mu$ ve $\theta_0^2-4\theta_1\theta_{-1}=0$ olduğunda:

$$\lambda_k'=(-1)^{\mu}(2k\pi)^n\left[1\mp\frac{\mu\ln_0\xi}{k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\right] \tag{3.1.25}$$

$$\lambda_k''=(-1)^{\mu}(2k\pi)^n\left[1\mp\frac{\mu\ln_0\xi}{k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\right] \tag{3.1.26}$$

Burada ξ, $\theta_1\xi^2+\theta_0\xi+\theta_{-1}=0$ denkleminin iki katlı köküdür. $\mp$ işaretleri (3.1.25) ve (3.1.26) formundaki μ'lerin çift ya da tek olmasına uygundur.

İlk üç durumda özdeğerler bir N numarasından sonra basittirler. Dördüncü durumda ise bir N numarasından sonra ya basittirler ya da iki katlıdırlar.

Tanım 3.1.12: H-Hilbert uzayında $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizileri için $n,k=1,2,...$ olmak üzere

$$(\varphi_n,\psi_k)=\delta_{n,k}$$

ise, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizileri, H uzayında *biortogonal dizi oluştururlar* denir ve bunlardan birine diğerinin *biortogonal eşleneği* denir. Burada

$$\delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.13: H uzayının $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisinin her bir φ_j $(j=1,2,...)$ elemanı, diğer φ_k $k\neq j$ elemanlarının M_j kapalı lineer gerilimine dahil değilse, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi H'da *minimaldir* denir.

Önerme 3.1.1: H uzayında verilen $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine biortogonal eşlenik $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin varlığı için gerekli ve yeterli koşul bu dizinin H'da minimal dizi oluşturmasıdır.

Tanım 3.1.14: $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ H-Hilbert uzayında bir dizi olsun. Herhangi bir $f \in H$ vektörü tek türlü olarak

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \tag{3.1.27}$$

serisine ayrışabiliyor ise, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine H-Hilbert uzayının *tabanı* denir. Burada (3.1.27) serisi H uzayının normu anlamında yakınsaktır.

Önerme 3.1.2: $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi H'da $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal eşlenik ise, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi H'da tamdır [2].

Teorem 3.1.2: H-Hilbert uzayında $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal eşlenik $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi H uzayında tabandır [2].

Tanım 3.1.15: $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ H-Hilbert uzayında ortonormal taban ve A sınırlı tersi olan lineer operatör olduğunda

$$A\varphi_k = \psi_k$$

biçiminde elde edilen $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine H uzayında *Riesz tabanı* denir [2].

Önerme 3.1.3: Riesz tabanına biortogonal eşlenik taban Riesz tabanıdır.

Tanım 3.1.16: Hilbert uzayında $\forall\ x, y \in H$ için

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* denir [18].

3.2. FOURİER METODUNUN ESASLANDIRILMASI

Genel olarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + ... + p_n(x)u\ , \ a \le x \le b \quad (3.2.1)$$

denklemi

$$u\big|_{t=0} = f(x)\ ,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)\ , \quad (3.2.2)$$

başlangıç koşulları ve

$$\sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{jv}\left(\frac{\partial^v u}{\partial x^v}\right)_{x=a} + \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{jv}\left(\frac{\partial^v u}{\partial x^v}\right)_{x=b} = 0\ ,\ j = 1, 2, ..., n \quad (3.2.3)$$

sınır koşulları ile verilen sınır değer problemini Fourier metodu ile çözümünü bulalım. Burada (3.2.1) denklemini ve (3.2.3) sınır koşullarını sağlayan

$$u = y(x)\left(A\cos\rho t + B\sin\rho t\right) \quad (3.2.4)$$

şeklinde olan bir çözüm aranır.

(3.2.4) ifadesi (3.2.1) denkleminde ve (3.2.3) sınır koşullarında yazılırsa, $y(x)$ fonksiyonunun

$$l(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + p_n(x)\, y = -\rho^2 y \quad (3.2.5)$$

diferansiyel denklemini ve

$$U_j(y) \equiv \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{jv}\, y_a^{(v)} + \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{jv}\, y_b^{(v)} = 0 \quad (3.2.6)$$

sınır koşullarını sağladığı görülür.

Eğer $y(x) \neq 0$ ise, $y(x)$ fonksiyonu (3.2.5)-(3.2.6) sınır-değer probleminin $-\rho^2$ özdeğerine uygun özfonksiyonu olur. (3.2.5)-(3.2.6) sınır-değer probleminin bütün özdeğerleri

$$-\rho_1^2, -\rho_2^2, -\rho_3^2, \ldots$$

ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonları da

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$$

şekline sıralanırlar.

(3.2.2) başlangıç koşullarını sağlatmak için aşağıdaki seri oluşturulur.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\left(A_n \cos \rho_n t + B_n \sin \rho_n t\right).$$

Bu seri formal olarak (3.2.1) denklemini ve (3.2.3) sınır koşularını sağalar. (3.2.2) başlangıç koşullarından birincisi sağlatılırsa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere $f(x)$ fonksiyonu, (3.2.5)-(3.2.6) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre açılımdan oluşur. Dolayısıyla Fourier metodunun esaslandırılması; “ $f(x)$ fonksiyonun hangi şartlar altında (3.2.5)-(3.2.6) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre açılıma sahiptir?” sorusuna indirgenir [1].

3.3. ISI İLETİM DENKLEMİ VE PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN FOURİER METODU

Isı iletimi ve difüzyon olaylarının incelenmesinde parabolik tip denklemler karşımıza çıkar. Bunlardan en basiti

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

şeklindedir ve bu denkleme ısı iletim denklemi adı verilir.

Bu denklemin tek çözümünü bulmak için başlangıç ve sınır koşulları verilmelidir. Örneğin aşağıdaki problemi göz önüne alalım ve Fourier metodu ile çözümünü bulalım.

$D=\{(x,t)|0<x<l,0<t<T\}$ bölgesinde homojen olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{3.3.1}$$

ısı iletim denklemi için

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ 0\le t\le T \tag{3.3.2}$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l \tag{3.3.3}$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım.

Amacımız aşağıdaki gibi tanımlanan bir çözüm bulmaktır.

Tanım 3.3.1: Aşağıdaki koşulları sağlayan çözüme (3.3.1)-(3.3.3) sınır değer probleminin klasik çözümü denir. Bu çözüm;

1) $\overline{D}=\{(x,t)|0\le x\le l,0\le t\le T\}$ bölgesinde süreklidir.

2) D bölgesinde t'ye göre $1.$mertebeden ve x'e göre $2.$mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

3) (3.3.1) denklemini ve (3.3.2), (3.3.3) koşullarını sağlar.

(3.3.1)-(3.3.3) sınır değer problemi lineer olduğundan bu problemin çözümü aşağıdaki biçimde iki ($f(x,t)=0$, $\varphi(x)\neq 0$ ve $f(x,t)\neq 0$, $\varphi(x)=0$) sınır değer probleminin çözümleri toplamı biçiminde gösterilebilir.

I.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.3.4}$$

$$u(0,t)=0\,,\ u(l,t)=0\,,\ 0\le t\le T \tag{3.3.5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ 0\le x\le l \tag{3.3.6}$$

II.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{3.3.7}$$

$$u(0,t)=0\,,\ u(l,t)=0\,,\ 0\le t\le T \tag{3.3.8}$$

$$u(x,0)=0\,,\ 0\le x\le l \tag{3.3.9}$$

Böylece I.sınır değer probleminin çözümü $u_1(x,t)$, II.sınır değer probleminin çözümü $u_2(x,t)$ ise, (3.3.1)-(3.3.3) sınır değer probleminin çözümü $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$ olarak bulunur.

Önce homojen olan I.sınır değer problemini göz önüne alıp çözümü bulmak için Fourier metodunu uygulayalım.

(3.3.4)-(3.3.6) sınır değer probleminin sıfır olmayan özel çözümü

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{3.3.10}$$

biçiminde aranır. (3.3.10) ifadesi (3.3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$$

veya

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı sadece t'ye, sağ tarafı ise sadece x'e bağlı ve t, x birbirine bağlı olmayan bağımsız değişkenler olduğundan bu eşitliğin her iki tarafı aynı bir sabite eşittir. O halde

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

yazılabilir ve buradan aşağıdaki şekilde olan iki denklem elde edilir.

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{3.3.11}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{3.3.12}$$

(3.3.5) sınır koşulları (3.3.10)'da sağlatılırsa

$$X(0)=0,\ X(l)=0 \tag{3.3.13}$$

koşulları elde edilir.

Böylece (3.3.5)-(3.3.6) sınır ve başlangıç koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $u(x,t)$ fonksiyonunu bulma işlemi,

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{3.3.12}$$

$$X(0)=0,\ X(l)=0 \tag{3.3.13}$$

şeklinde olan Sturm-Liouville probleminin sıfırdan farklı $X(x)$ özfonksiyonlarının bulunması problemine indirgenir.

(3.3.12)-(3.3.13) Sturm-Liouville probleminin $\lambda>0$ için $X(x)\neq 0$ şeklinde çözümü vardır. Bu çözümler

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n=1,2,...$$

özdeğerlerine karşılık gelen

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,...$$

özfonksiyonlarıdır.

(3.3.11) denkleminin $\lambda=\lambda_n$ değerlerine karşılık gelen çözümleri de

$$T_n(t)=A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

şeklindedir. Buradaki A_n ’ler keyfi sabitlerdir.

Bu durumda (3.3.10)’e göre her bir

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$$

$$u_n(x,t)=A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,...$$

fonksiyonu, (3.3.4) denklemini ve (3.3.5) sınır koşullarını sağlayan birer özel çözüm olacaktır.

Şöyle bir seri oluşturalım:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.3.14}$$

$u(x,t)$ fonksiyonunun (3.3.6) başlangıç koşulunu sağlaması için

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.3.15}$$

olmalıdır.

Yazdığımız bu son seri $\varphi(x)$ fonksiyonunun sinüs fonksiyonuna göre $(0,l)$ aralığında Fourier açılımıdır ve A_n katsayıları

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\; n = 1,2,... \qquad (3.3.16)$$

şeklinde elde edilir.

Burada (3.3.15) serisi D bölgesinde $\varphi(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Bunu gösterebilmek için $\varphi(x)$ fonksiyonun bazı koşulları sağlaması gerekir. Bu koşullar:

$$\begin{aligned} &i)\;\; \varphi(x) \in C^2[0,l] \\ &ii)\; \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \end{aligned} \qquad (3.3.17)$$

şeklindedir. Gerçekten (3.3.16) ifadesinde (3.3.7) koşulları dikkate alınarak iki defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$A_n = -\frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^l \varphi''(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\; n = 1,2,...$$

elde edilir ve

$$|A_n| < \frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^l |\varphi''(x)|\left|\sin\frac{n\pi x}{l}\right|dx$$

$$|A_n| < \frac{2lB}{n^2\pi^2} \qquad (3.3.18)$$

yazılabilir.

(3.3.18)'den dolayı $\sum_{n=1}^{\infty}\left|A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right|$ serisi, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2lB}{n^2\pi^2}$ yakınsak serisi ile üstten sınırlıdır. Dolayısıyla Weierstrass kriterine göre (3.3.15) serisi mutlak ve düzgün yakınsak olur.

$u(x,t)$ fonksiyonunun başlangıç koşulunu sağladığı gösterildikten sonra (3.3.5) sınır koşullarının da sağlanması için, (3.3.14) serisinin toplamı olan $u(x,t)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek gerekir. Bunun için (3.3.14) serisinin

D bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu göstermek gerekir. Yukarıda gösterdiğimize benzer biçimde $t \geq 0$ için

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \leq 1$$

olduğundan, (3.3.14) serisi D bölgesinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

$u(x,t)$ fonksiyonunun denklemi sağlaması için $u(x,t)$ fonksiyonunu oluşturan serinin bir kez t'ye göre, iki kez x'e göre türevlenebilir olması gerekir. Bunun için $t \geq \varepsilon > 0$ olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ serilerinin düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Bunları gösterecek olursak:

$t \geq \varepsilon > 0$ ve yeterince büyük n'ler için

$$0 < \frac{n^2\pi^2 a^2}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1,$$

$$0 < \frac{n^2\pi^2 a^2}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \varepsilon} < 1$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| = \left|-A_n \frac{n^2\pi^2 a^2}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}\right|$$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < |A_n| < \frac{2lB}{n^2\pi^2} \tag{3.3.19}$$

yazılabilir. (3.3.19)'dan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|$ serileri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2lB}{n^2\pi^2}$ yakınsak serisi ile üstten sınırlıdır. Dolayısıyla Weierstrass kriterine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ serileri düzgün yakınsak olurlar.

Böylece

$$u_1(x,t)=u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

şeklinde (3.3.4)-(3.3.6) sınır değer probleminin çözümü elde edilmiş olur.

Şimdi de homojen olmayan (3.3.7)-(3.3.9) sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $f(x,t)$ fonksiyonunun birinci türevi kısmi süreklidir ve tüm $t>0$'ler için

$$f(0,t)=f(l,t)=0$$

koşullarının sağlandığı varsayılır.

(3.3.12)-(3.3.13) probleminin özfonksiyonları kullanılarak (3.3.7)-(3.3.9) sınır değer probleminin $u(x,t)$ çözümü aşağıdaki biçimde aranır.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (3.3.20)$$

$f(x,t)$ fonksiyonu sinüse göre Fourier serisine açılırsa

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (3.3.21)$$

bulunur ki burada

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n=1,2,... \qquad (3.3.22)$$

şeklindedir.

(3.3.20) serisi (3.3.7) denkleminde yazılır ve (3.3.21)'i dikkate alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t),\ n=1,2,... \tag{3.3.23}$$

denklemi elde edilir.

(3.3.9) başlangıç koşulu (3.3.20)'de sağlatılırsa

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

veya

$$T_n(t)=0 \tag{3.3.24}$$

başlangıç koşulu elde edilir. (3.3.23) denkleminin (3.3.24) başlangıç koşulunu sağlayan çözümü aşağıdaki gibidir:

$$T_n(t)=\int_0^l e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\,. \tag{3.3.25}$$

(3.3.25) ifadesi (3.3.20) serisinde yerine yazılarak (3.3.7)-(3.3.9) probleminin çözümü

$$u_2(x,t)=u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

şeklinde bulunur ki bu aranan çözümdür.

Böylece (3.3.1)-(3.3.3) sınır değer probleminin çözümü $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$ olarak bulunur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. ISI İLETİMİ DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

$D=\{(x,t):0<x<1,\,0<t<T\}$ bölgesinde homojen olmayan

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+F(x,t) \tag{4.1.1}$$

ısı iletim denklemi için

$$\upsilon_x(0,t)=v(t),\; 0\le t\le T \tag{4.1.2}$$

$$\int_0^1 x\upsilon(x,t)\,dx=\mu(t),\; 0\le t\le T \tag{4.1.3}$$

sınır koşulları ve

$$\upsilon(x,0)=\upsilon_0(x),\; 0\le x\le 1 \tag{4.1.4}$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım.

Amacımız (4.1.1) denkleminin $\overline{D}=\{(x,t)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le t\le T\}$ bölgesinde sürekli ve (4.1.2)-(4.1.4) koşullarını sağlayan çözümünü bulmaktır.

Varsayalım ki $F(x,t)$, $v(t)$, $\mu(t)$, $\upsilon_0(x)$ verilen D bölgesinde tanımlı, sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

Önce (4.1.1)-(4.1.4) sınır değer problemi için klasik çözümü tanımlayalım.

4.1.1. Tanım: Aşağıdaki koşulları sağlayan çözüme (4.1.1)-(4.1.4) sınır değer probleminin klasik çözümü denir. Bu çözüm;

1) $\overline{D}$ bölgesinde süreklidir.

2) D bölgesinde t'ye göre 1. mertebeden ve x'e göre 2. mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

3) (4.1.1) denklemini ve (4.1.2)-(4.1.4) koşullarını sağlar.

Böyle bir çözümün varlığı için

$$\int_0^1 x\upsilon_0(x)\,dx = \mu(0) \text{ ve } \frac{d\upsilon_0(0)}{dx} = \nu(0) \tag{4.1.5}$$

uyum koşullarının sağlandığı varsayılır.

(4.1.1)-(4.1.4) sınır değer problemini incelemek için önce (4.1.2), (4.1.4) koşulları homojen biçime indirgenir. $\mu(t)$ ve $\nu(t)$ fonksiyonlarının türevlenebilir olduğu göz önüne alınarak;

$$V(x,t) = \frac{1}{3}(3x-2)\nu(t) + 4x^2\mu(t) \tag{4.1.6}$$

olmak üzere

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) + V(x,t) \tag{4.1.7}$$

biçiminde bir dönüşüm yapalım. O halde

$$\upsilon_x(0,t) = u_x(0,t) + V_x(0,t)$$

veya (4.1.2)'ye göre

$$\nu(t) = u_x(0,t) + \nu(t) \text{ ve } u_x(0,t) = 0$$

elde edilir. (4.1.7)'yi (4.1.3)'de yazarak

$$\int_0^1 x\upsilon(x,t)\,dx = \int_0^1 xu(x,t)\,dx + \int_0^1 xV(x,t)\,dx$$

veya

$$\mu(t) = \int_0^1 xu(x,t)\,dx + \int_0^1 \frac{1}{3}(3x^2-2x)\nu(t)\,dx + \int_0^1 4x^3\mu(t)\,dx .$$

Sonuçta:

$$\int_0^1 xu(x,t)\,dx = 0$$

bulunur.

Bunlar dikkate alınırsa $\overline{D}$ bölgesinde $u(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki sınır değer problemini sağladığı görülür:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{4.1.8}$$

$$u_x(0,t) = 0, \tag{4.1.9}$$

$$\int_0^1 xu(x,t)\,dx = 0, \tag{4.1.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{4.1.11}$$

Burada

$$f(x,t) = F(x,t) + 8\mu(t) + \frac{1}{3}(2-3x)\frac{\partial v(t)}{\partial t} - 4x^2\frac{\partial \mu(t)}{\partial t},$$

$$\varphi(x) = \upsilon_0(x) + \frac{1}{3}(2-3x)v(0) - 4x^2\mu(0)$$

şeklindedir.

(4.1.5) uzlaşma koşullarına göre

$$\int_0^1 x\varphi(x)dx = \int_0^1 x\upsilon_0(x)\,dx + \frac{v(0)}{3}\int_0^1 \left(2x-3x^2\right)dx - \mu(0)\int_0^1 4x^3 dx$$

$$= \mu(0) - \mu(0)$$

$$\int_0^1 x\varphi(x)\,dx = 0$$

ve

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{d\upsilon_0(x)}{dx}-v(0)-8x\mu(0).$$

Yukarıdaki son eşitlikte $x=0$ alınırsa

$$\frac{d\varphi(0)}{dx}=\frac{d\upsilon_0(0)}{dx}-v(0),$$

$$\frac{d\varphi(0)}{dx}=v(0)-v(0),$$

$$\frac{d\varphi(0)}{dx}=0$$

bulunur.

(4.1.8)-(4.1.11) problemi lineer olduğundan bu problemin çözümü aşağıdaki biçimde iki ($f(x,t)=0,\varphi(x)\neq 0$, $f(x,t)\neq 0,\varphi(x)=0$) sınır değer probleminin çözümleri toplamı biçiminde gösterilebilir.

I.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t)\in D \tag{4.1.12}$$

$$u_x(0,t)=0,\ 0\le t\le T \tag{4.1.13}$$

$$\int_0^1 xu(x,t)\,dx=0,\ 0\le t\le T \tag{4.1.14}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1 \tag{4.1.15}$$

II.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{4.1.16}$$

$$u_x(0,t)=0,\ 0\le t\le T \tag{4.1.17}$$

$$\int_0^1 xu(x,t)\,dx = 0,\ 0 \le t \le T \tag{4.1.18}$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1 \tag{4.1.19}$$

Böylece I.sınır değer probleminin çözümü $u_1(x,t)$, II.sınır değer probleminin çözümü $u_2(x,t)$ ise, (4.1.8)-(4.1.11) sınır değer probleminin çözümü $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ olarak bulunur. Burada homojen olmayan (4.1.16) denkleminin oluşturduğu II.sınır değer probleminin çözümü, uygun homojen (4.1.12) denkleminin oluşturdğu I.sınır değer probleminin özfonksiyonlarına açılarak bulunabilir.

I. ve II.sınır değer problemlerini incelemeden önce lokal biçimde verilmemiş (4.1.14), (4.1.18) sınır koşullarını noktasal biçime indirelim. (4.1.12) denkleminden

$$\int_0^1 xu_t(x,t)\,dx = \int_0^1 xu_{xx}(x,t)\,dx$$

veya

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 xu(x,t)\,dx\right) = \int_0^1 xu_{xx}(x,t)\,dx$$

bulunur. Burada $u(x,t)$ her iki değişkene göre sürekli türevlenebilir fonksiyondur. (4.1.14)'e göre

$$u_x(1,t) + u(0,t) - u(1,t) = 0$$

biçiminde, her iki uçta verilen klasik olmayan bir sınır koşulu elde edilir. Dolayısıyla, (4.1.12)-(4.1.15) sınır değer problemi ona denk olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t) \in D \tag{4.1.20}$$

$$u_x(0,t) = 0,\ 0 \le t \le T \tag{4.1.21}$$

$$u_x(1,t)+u(0,t)-u(1,t)=0,\ 0\le t\le T \tag{4.1.22}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1 \tag{4.1.23}$$

karışık sınır değer problemine dönüşür.

4.2. DEĞİŞKENLERİN AYRILMASI. STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİ

I.sınır değer problemine denk olan

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t)\in D \tag{4.2.1}$$

$$u_x(0,t)=0,\ 0\le t\le T \tag{4.2.2}$$

$$u_x(1,t)+u(0,t)-u(1,t)=0,\ 0\le t\le T \tag{4.2.3}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1 \tag{4.2.4}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $\varphi(x)$ fonksiyonunu daha önceki bölümde tanımladık. Bu problemi çözmek için değişkenlere ayırma veya Fourier yöntemini kullanalım. (4.2.1)-(4.2.4) sınır değer probleminin sıfır olmayan çözümünün

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{4.2.5}$$

biçiminde arayalım. (4.2.5)'i (4.2.1) denkleminde yazarak

$$X(x)T'(t)=X''(x)T(t)$$

veya

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı sadece t'ye, sağ tarafı ise sadece x'e bağlı ve t, x birbirine bağlı olmayan bağımsız değişkenler olduğundan bu eşitliğin her iki tarafı aynı bir sabite eşittir.

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

olsun. O halde

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{4.2.6}$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{4.2.7}$$

denklemleri elde edilir.

(4.2.5)'i (4.2.2), (4.2.3) sınır koşullarında yazarak

$$X'(0) = 0, \ X'(1) + X(0) - X(1) = 0$$

koşulları elde edilir. Dolayısıyla, $X(x)$ fonksiyonu

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ 0 < x < 1 \tag{4.2.8}$$

denklemini ve

$$X'(0) = 0 \tag{4.2.9}$$

$$X'(1) + X(0) - X(1) = 0 \tag{4.2.10}$$

sınır koşullarını sağlar.

$u(x,t)$ fonksiyonu (4.2.1)-(4.2.4) sınır değer probleminin sıfır olmayan çözümü olduğundan $X(x)$ fonksiyonu, (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer probleminin özfonksiyonu olmalıdır. Bundan dolayı (4.2.8)-(4.2.10) Sturm-Liouville problemi için özdeğer ve özfonksiyon probleminin incelenmesine gerek duyulur.

(4.2.1)-(4.2.4) sınır değer problemine Fourier yönteminin uygulanmasını esaslandırmak için (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının tabanlığı problemi önemlidir. Çünkü bu yöntemin uygulanması sırasında (4.2.4) koşulunda verilen başlangıç $\varphi(x)$ fonksiyonuna uygun (4.2.8)-(4.2.10) Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım problemi ile karşılaşılır. Bundan dolayı aşağıdaki teoremden yararlanılır.

Teorem 4.2.1: Özeşlenik olmayan L lineer diferansiyel operatörünü oluşturan regüler sınır koşulları kuvvetli regüler ise, (operatörün mertebesi çift sayı ise) L operatörünün özfonksiyonları $L_2(0,1)$ uzayında Riesz tabanı oluşturur [1], [7], [8].

Bu teoremden dolayı (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer probleminin sınır koşullarının regülerliğinin ve özeşlenik olup olmadığının belirtilmesi gerekir.

Bilinir ki 2. mertebeden diferansiyel operatörü oluşturan sınır koşulları genel olarak

$$a_0X(0)+a_1X'(0)+b_0X(1)+b_1X'(1)=0 \tag{4.2.11}$$

$$c_0X(0)+c_1X'(0)+d_0X(1)+d_1X'(1)=0 \tag{4.2.12}$$

biçiminde yazılabilir.

Varsayalım ki

$$a_1d_1-b_1c_1\neq 0$$

olsun. O halde (4.2.11), (4.2.12)'den $X'(0)$ ve $X'(1)$ bulunabilir ve sınır koşulları

$$X'(0)+\alpha_0X(0)+\beta_0X(1)=0$$

$$X'(1)+\alpha_1X(0)+\beta_1X(1)=0$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\alpha_0 = \frac{a_0 d_1 - c_0 b_1}{a_1 d_1 - b_1 c_1}, \; \beta_0 = \frac{b_0 d_1 - c_0 b_1}{a_1 d_1 - b_1 c_1}, \; \alpha_1 = \frac{a_1 c_0 - a_0 c_1}{a_1 d_1 - b_1 c_1}, \; \beta_1 = \frac{a_1 d_0 - b_0 c_1}{a_1 d_1 - b_1 c_1}$$

O halde Tanım 3.1.10'da tanımlanan θ_{-1}, θ_0, θ_1 sayıları için aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} i & -i \\ si & -\dfrac{i}{s} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{s} - s$$

Buradan açıktır ki, $\theta_{-1} = 1$, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = -1$ ve bu sayılar için $\theta_{-1} \neq 0, \theta_1 \neq 0$ olduğunda (4.2.11), (4.2.12) sınır koşulları regülerdir. Ayrıca $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$ olduğunda ise kuvvetli regülerdir [1].

Açıktır ki, (4.2.9), (4.2.10) sınır koşulları (4.2.11), (4.2.12) sınır koşullarının özel bir durumudur ve bu durumda $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$'dir. O halde aşağıdaki önermeyi yazabiliriz.

Önerme 4.2.1: (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer probleminde sınır koşulları regüler, hem de kuvvetli regülerdir.

4.3. EŞLENİK SINIR DEĞER PROBLEMİ

Lagrange formülünü kullanarak (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer problemine eşlenik sınır değer problemini inşa edelim. Bunun için materyal ve metot bölümündeki (3.1.8) formülünü uygulayalım. O halde

$$\int_0^1 X''\overline{Y}dx = X'(0)\left[-\overline{Y}(0)\right] + \left[X'(1) + X(0) - X(1)\right]\overline{Y}(1) +$$

$$+X(0)\left[\overline{Y}'(0) - \overline{Y}(1)\right] + X(1)\left[\overline{Y}(1) - \overline{Y}'(1)\right] + \int_0^1 X\overline{Y}''dx$$

Eşlenik sınır değer problemi

$$\bar{Y}''(x)+\bar{\lambda}\bar{Y}(x)=0,\ 0<x<1$$

$$\bar{Y}(1)-\bar{Y}'(1)=0$$

$$\bar{Y}'(0)-\bar{Y}(1)=0$$

veya

$$Y''(x)+\lambda Y(x)=0,\ 0<x<1 \tag{4.3.1}$$

$$Y(1)-Y'(1)=0 \tag{4.3.2}$$

$$Y'(0)-Y(1)=0 \tag{4.3.3}$$

biçiminde elde edilir.

Görüldüğü gibi (4.3.1)-(4.3.3) eşlenik sınır değer probleminin sınır koşullarının (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer probleminin sınır koşullarından farklı olması sebebi ile (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer problemi özeşlenik değildir. Dolayısıyla Önerme 4.2.1 ve Teorem 4.2.1'den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3.1: (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer probleminin özfonksiyonları $L_2(0,1)$ uzayında Riesz tabanı oluşturur.

4.4. ÇÖZÜMÜN VARLIĞI

(4.1.1)-(4.1.4) sınır değer probleminin klasik çözümünün varlığını gösterelim. Önce (4.1.12)-(4.1.15) sınır değer problemini göz önüne alalım. Sınır koşulları kuvvetli regüler olduğundan uygun Sturm-Liouville probleminin ek özfonksiyonların sayısı olsa olsa sonlu sayıda olabilir. Gösterilebilir ki (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer problemi ek özfonksiyonlara sahip değildir.

$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi (4.2.8)-(4.2.10) sınır değer probleminin $\{\lambda_n\}$ özdeğerler dizisine uygun özfonksiyonlar dizisi olsun.

$\lambda=\lambda_n$ olduğunda (4.2.7) denkleminden elde edilir ki,

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n t} \tag{4.4.1}$$

Burada φ_n'ler keyfi sabitlerdir. Dolayısıyla, (4.2.1) denkleminin özel çözümleri

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \tag{4.4.2$'$}$$

biçiminde bulunur.

Aşağıdaki seriyi oluşturalım.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \tag{4.4.2}$$

(4.2.4) başlangıç koşulu sağlatılırsa

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \tag{4.4.3}$$

elde edilir.

Teoremde 4.3.1'den elde edilir ki, $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $L_2(0,1)$'de Riesz tabanı oluşturur ve $\{Y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bu diziye biortogonal eşlenik dizidir. Buradaki $\{Y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi (4.3.1)-(4.3.3) eşlenik sınır değer probleminin özfonksiyonları tarafından oluşturulur. O halde (4.4.3) eşitliğinden elde edilir ki

$$\varphi_n = \left(\varphi(x), Y_n(x)\right)$$

ve (4.4.3) serisi yakınsaktır.

$u_n(x,t)$ özel çözümlerini (4.2.1) denkleminde ve (4.2.2), (4.2.3) sınır koşullarında yazarak denklemin ve sınır koşullarının sağlandığı elde edilir. (4.2.4) başlangıç koşulunun sağlandığı biraz önce elde edildi.

Gösterelim ki, $t \geq \varepsilon > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

serileri düzgün yakınsaktır. λ_n özdeğerleri için Teorem 3.1.1'deki asimptotik formüller dikkate alınırsa, bu seriler mutlak yakınsak olan $\sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{-M_\varepsilon n^2}$ biçimindeki seri ile üstten sınırlıdırlar. Burada $M_n > 0$ ve $M_\varepsilon > 0$ dır. Dolayısıyla Weiestrass kriterine göre bu sersiler $t \geq \varepsilon$ için sürekli $u(x,t)$, $u_t(x,t), u_{xx}(x,t)$ fonksiyonlarını tanımlarlar.

(4.4.2) serisinin $\overline{D}$ bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Gerçekten

$\left|X_n(x)\right| \leq M$ olduğundan bu seri $\sum_{n=1}^{\infty} M\left|\varphi_n\right|$ sayısal serisi ile üstten sınırlıdır. Couchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left|\varphi_n\right| = M\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n||\varphi_n|\frac{1}{|\lambda_n|} \leq M\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n\varphi_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.4.4}$$

elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n\varphi_n|^2$ serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. $\left\{Y_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ serisi Riesz tabanı oluşturduğundan:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n\varphi_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\lambda_n\left(\varphi(x), Y_n(x)\right)\right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|-\left(\varphi(x), Y_n''(x)\right)\right|^2$$

$$\leq c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\varphi''(x), Y_n(x)\right)\right|^2 \leq c\left\|\varphi''(x)\right\|^2 < \infty$$

($c > c_1 > 0$ olmak üzere sabitlerdir.)

Dolayısıyla (4.4.2) serisini üstten sınırlayan (4.4.4) serisi mutlak yakınsaktır. Bundan dolayı, (4.4.2) serisi $\overline{D}$ bölgesinde düzgün yakınsaktır ve sürekli $u(x,t)$ fonksiyonunu tanımlar. Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 4.4.1: $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ olsun ve (4.2.2), (4.2.3) sınır koşulları sağlansın. O halde

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

fonksiyonu (4.2.1)-(4.2.4) sınır değer probleminin klasik çözümüdür. Burada $\varphi_n = (\varphi(x), Y_n(x))$ ve $\{Y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin biortogonal eşlenik dizisidir.

(4.2.1)-(4.2.4) sınır değer probleminin çözümünü bilerek (4.1.16)-(4.1.19) sınır değer probleminin çözümünü elde etmek mümkündür. Bu çözüm aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau X_n(x).$$

Burada

$$f_n(\tau) = \int_0^1 f(x,\tau) \overline{Y_n}(x) dx$$

şeklindedir.

Dolayısıyla (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin D bölgesinde klasik çözümü vardır ve bu problemin çözümü

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

olmak üzere $\quad \upsilon(x,t) = u(x,t) + V(x,t)$

biçimindedir.

4.5. ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLAR İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

(4.2.1)-(4.2.3) sınır değer problemine değişkenlere ayırma yöntemi uygulanırsa aşağıdaki biçimde olan

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0\le x\le 1 \tag{4.5.1}$$

$$X'(0)=0, \tag{4.5.2}$$

$$X'(1)+X(0)-X(1)=0 \tag{4.5.3}$$

sınır değer problemi elde edilir.

(4.5.1)-(4.5.3) sınır değer probleminin veya Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim.

$\lambda<0$ olduğunda bu problemin sadece $X(x)\equiv 0$ çözümü vardır. Yani özfonksiyona sahip değildir.

$\lambda>0$ olduğu durumu inceleyelim.

(4.5.1) denkleminin çözümü

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x \tag{4.5.4}$$

biçiminde aranır.

(4.5.2) sınır koşulu (4.5.4)'te sağlatıldığında

$$c_2\sqrt{\lambda}=0$$

olur ve $\lambda\neq 0$ olduğundan $c_2=0$ bulunur. (4.5.3) koşuluna göre ise

$$c_1\left(-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+1-\cos\sqrt{\lambda}\right)=0$$

ve $X(x)\neq 0$ olduğundan dolayı

$$\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+\cos\sqrt{\lambda}-1=0$$

olması gerekir. $\sqrt{\lambda}=\mu$ alınır ise

$$\sin\mu+\cos\mu-1=0$$

veya

$$\sin\frac{\mu}{2}\left(\mu\cos\frac{\mu}{2}-\sin\frac{\mu}{2}\right)=0$$

denklemi elde edilir.

$\mu\cos\frac{\mu}{2}-\sin\frac{\mu}{2}=0$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklem $\tan\frac{\mu}{2}=\mu$ denklemine denktir. Burada $y=\mu$ ve $y=\tan\frac{\mu}{2}$ denklemlerinin grafiklerinden görülür ki, (4.5.1)-(4.5.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$\lambda=\lambda_n'=\mu_n^2,\ n=1,2,...$ ve $\mu_n\in\left(2n\pi,(2n+1)\pi\right)$ aralıklarında yerleşir.

$\mu_n=(2n+1)\pi-\varepsilon_n$ olsun. $\tan\frac{\mu}{2}=\mu$ denkleminden

$$\tan\frac{(2n+1)\pi-\varepsilon_n}{2}=(2n+1)\pi-\varepsilon_n$$

veya

$$\cot\frac{\varepsilon_n}{2}=(2n+1)\pi-\varepsilon_n$$

bulunur. Burada

$$\cot\frac{\varepsilon_n}{2}=\frac{2}{\varepsilon_n}-\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_n}{2}-\frac{1}{45}\frac{\varepsilon_n^{\,2}}{4}-...$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{2}{\varepsilon_n}-\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_n}{2}-\frac{1}{45}\frac{\varepsilon_n^{\,2}}{4}-...=(2n+1)\pi-\varepsilon_n$$

veya $n\to\infty$ için

$$2-\frac{\varepsilon_n^{\,2}}{6}+\mathrm{O}\left(\varepsilon_n^{\,3}\right)=\varepsilon_n(2n+1)\pi-\varepsilon_n^{\,2}$$

elde edilir. Böylece

$$\varepsilon_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),\ n\to\infty$$

$$\mu_n = (2n+1)\pi - \frac{2}{(2n+1)\pi} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),\ n \to \infty$$

$$\lambda_n' = \left[(2n+1)\pi\right]^2 \left[1 - \frac{4}{\left[(2n+1)\pi\right]^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right],\ n \to \infty$$

olarak bulunur. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$X_{2n+1}(x) = \cos \mu_n x,\ n = 1,2,...$$

veya $\mu_n = (2n+1)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$ alınıp yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} X_{2n+1}(x) &= \cos \mu_n x \\ &= \cos\left[(2n+1)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]x \\ &= \cos\left[(2n+1)\pi x\right]\cos\left[O\left(\frac{1}{n}\right)x\right] - \sin\left[(2n+1)\pi x\right]\sin\left[O\left(\frac{1}{n}\right)x\right] \\ &= \cos\left[(2n+1)\pi x\right] + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi de $\sin\frac{\mu}{2} = 0$ denkleminden $\lambda = \lambda_n'' = \mu_n^2,\ n = 0,1,2,...$ olmak üzere, (4.5.1)-(4.5.3) sınır değer probleminin özdeğerleri:

$$\mu_n = 2n\pi \ \text{ ve } \ \lambda_n'' = (2n\pi)^2,\ n = 0,1,2,...$$

şeklindedir ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise:

$$X_{2n}(x) = \cos 2n\pi x,\ n = 0,1,2,...$$

şeklinde olur.

$\lambda = 0$ durumunu inceleyelim.

Gösterilebilir ki, $\lambda_0 = 0$ basit özdeğerdir. Gerçekten $\lambda_0 = 0$ basit özdeğer ise

$$X_0'' = 0$$

$$X_0'(0) = 0,\ X_0'(1) + X_0(0) - X_0(1) = 0$$

bağıntılarından $X_0(x) = c$ elde edilir. $X_1(x)$ fonksiyonu $\lambda_0 = 0$'a ek özfonksiyon olsun. O halde

$$X_1'' + \lambda_0 X_1 = X_0,$$

$$X_1'(0) = 0,\ X_1'(1) + X_1(0) - X_1(1) = 0$$

bağıntılarından $X_1(x) = c$ olduğu elde edilir ki, buradan $\lambda_0 = 0$ sayısının basit özdeğer olduğu elde edilir. Burada $c \neq 0$'dır ve özel olarak $c = 1$ alabiliriz.

Dolayısıyla, (4.5.1)-(4.5.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\lambda_n' = \left[(2n+1)\pi\right]^2 \left[1 - \frac{4}{\left[(2n+1)\pi\right]^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right],\ n = 1,2,...$$

$$\lambda_n'' = (2n\pi)^2,\ n = 0,1,2,...$$

ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlar sırasıyla

$$X_{2n+1}(x) = \cos\left[(2n+1)\pi x\right] + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n = 1,2,...$$

$$X_{2n}(x) = \cos 2n\pi x,\ n = 0,1,2,...$$

şeklinde olurlar.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezde daha önceleri incelenmemiş lokal biçimde verilmeyen bir sınır değer problemi ele alınır. Sınır koşulu $\int_0^1 u(x,t)\,dx = \mu(t)$ biçiminde verilen durumdan farklı olarak burada ilk kez $\int_0^1 xu(x,t)\,dx = \mu(t)$, $0 \le t \le T$ biçiminde bir sınır koşulu ile oluşturulan sınır değer problemi göz önüne alınır. Bu koşul için önerme ve teoremler elde edilmiştir. $\int_0^1 u(x,t)\,dx = \mu(t)$ koşulundan farklı olarak bu durumda regüler, hem de kuvvetli regüler sınır koşulları ile karşılaşılır.

Tezde elde edilen sonuçlardan kullanarak ve başka bilgilerden de yararlanarak lokal biçimde verilmeyen başka sınır koşulları da incelenebilir. Bunların yanında verilen problemi diskrete biçime indirerek, (yani farklar denklemleri ile ifade ederek) programlar yazılabilir ve sayısal çözümler bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Naimark, M. A. "Lineer Differential Operators Part I", Frederick Ungar Publishing Co., New York, 144 p., (1967).

[2] Gohberg, I. C. and Krein, M. G. "Introduction to the Theory of Lineer Nonselfadjoint Operators", Vol. 18 American Mathematical Society, Providence, R. I. 378 p., (1969).

[3] Ionkin, N. I. "Solution of Boundary Value Problem in Heat Conductions Theory with Nonlocal Boundary Conditions", Differential Equations, **13(2)**: 294-304, (1977).

[4] Coddington, E. A. and Levinson, N. "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, New York, 429 p., (1955).

[5] Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S. "Introduction to Spectral Theory", Nauka, Moscow, 672 p. (in Russian), (1975).

[6] Kostyuchenko, A. G. and Sargsyan, I. S. "The Distribution of Eigenvalues", Nauka, Moscow, 400 p. (in Russian), (1979).

[7] Keselman, G. M. "On the Absolute Convergence of Expansions in Eigenfunctions of Certain Differential Operators", Izv. Vuz SSSR, Mat., **2**: 82-93, (1964).

[8] Mikhailov, V. P. "On Riesz Bases in $L^2(0,1)$", Dokl. Akad. Nauk SSSR, **144(5)**: 981-984, (1962).

[9] Marchenko, V. A. "Sturm-Liouville Operators and Applications", Birkhauser Verlag, Basel Boston Stuttgart, 367 p., (1986).

[10] Dunford, N. and Schwartz, J. T. "Lineer Operators Part III", Wiley, New York, 660 p., (1971).

[11] Walker, W. P. "A Nonspectral Birkhoff-Regular Differential Operator", American Mathematical Society, **66(1)**: 187-188**,** (1977).

[12] Mamedov, Kh. R. and Kerimov, N. B. "On the Riesz Basis Property of the Root Functions in Certain Regular Boundary Value Problems", Mat. Zametki, **64(4)**: 558-563, (1998).

[13] Mamedov, Kh. R. and Menken H. "On the Riesz Basis Property of the Root Functions in Non Strongly Regular Boundary Value Problems", International

Mathematical Conference VI th Bogolubov Readings, Augt. 26-30, Chernivtsi, Ukraine, (2003).

[14] Mamedov, Kh. R. and Menken H. “On the Basisness in $L_2(0,1)$ of the Root Functions in Not Strongly Regular Boundary Value Problems”, European Journal of Pure and Applied Mathematics, **1(2)**, (2008).

[15] Kurbanov, V. M. “A Theorem on Equivalent Bases for a Differential Operator”, Dokl. Akad. Nauk, **406(1)**: 17-20, (2006).

[16] Ciegis, R. “Economical Difference Schemes for the Solution of a Two-Dimensional Parabolic Problem with an Integral Condition”, Differential Equations, **41(7)**: 1025-1029, (2005).

[17] Lin, Y. and Tait, R. J. “On a Class of Non-Local Parabolic Boundary Value Problems”, Int. J. of Engng Sci., **32**: 395-407, (1994).

[18] Jumothon, B. and Kee, S. Mc. “On a Heat Equation with Non Lineer and Non Local Boundary Conditions”, J. Math. Anal. Applications, **190**: 806-820, (1985).

[19] Petrovski, I.G. “Lectures on Differential Equations”, Translated from the Russian by A.Shenitser, New York, 303 p., (1962).

[20] Tychonov, A. N. and Samarski, A. A. “Partial Differential Equation of Mathematical Physics”, Vol. I, San Fransisko, 724 p., (1962).

[21] Kızmaz, H. “Fonksiyonel Analize Giriş”, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, Trabzon, 322 s., (1993).

[22] Tuncer, T. “Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler”, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Basım Atölyesi, İstanbul , 544 s., (1992).

[23] Aliyev, G. G. “Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler”, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 231 s., (1995).

[24] Palamut, N. “Isı Geçirme Denklemi İçin Klasik Olmayan Bir Sınır Koşulu İle İlişkili Özdeğer ve Özfonksiyon Problemi”, Yuksek Lisans Tezi, Mersin Universitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Çiftlikköy Kampüsü Mersin, 62 s., (2004).

[25] Başkan, T. “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, Ceylan Matbaacılık, Bursa, 360 s., (1996).

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Bulgaristan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Mersin'de yüksek öğrenimini de 2003 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı.