FUZZY İDEALLER ÜZERİNDE ROUGH YAKLAŞIMI

REŞAT SÖYLEMEZ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN - 2008

FUZZY İDEALLER ÜZERİNDE ROUGH YAKLAŞIMI

REŞAT SÖYLEMEZ

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

MERSİN
Haziran - 2008

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

Jüri Üyesi
Prof. Dr. Naime EKİCİ

Jüri Üyesi
Yrd. Doç. Dr. Hamza MENKEN

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..../........./........... tarih ve ..../.................. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

ÖZ

$U \neq \emptyset$ evrensel küme, θ, U da bir denklik bağıntısı olmak üzere (U, θ) ikilisine bir yaklaşım uzayı adı verilir.

Bu çalışmada rough kümeler, fuzzy kümeler ve halka teorisi arasındaki ilişki incelenecektir.

Evrensel kümeyi bir halka olarak alındı. Fuzzy ideallerden yararlanarak halkada alt-üst yaklaşımlar tanımları verildi. Ayrıca, halkada alt-üst yaklaşımların bazı özellikleri verildi.

Halkada alt-üst yaklaşımların homomorfi görüntüleri incelendi.

S değişme özelliğine sahip R halkasının bir çarpımsal alt kümesi olsun. Evrensel kümeyi bir RxS olarak alındı ve RxS de alt-üst yaklaşımları incelendi. Aynı zamanda bu alt-üst yaklaşımların bazı özellikleri verildi.

Özellikle, S değişme özelliğine sahip R halkasının bir çarpımsal alt kümesi halkında yeni fikir elde ettik. Ayrıca, rough ideallerin bazı özellikleri verildi.

Anahtar kelimeler: Rough Küme, Fuzzy Küme, Çarpımsal Küme, Alt-Üst Yaklaşımlar, Halka, İdeal, Fuzzy İdeal, Homorfi

ABSTRACT

Let U be a universal set. A pair (U,θ) is called an approximation space if $U \neq \emptyset$ and θ is an equivalence relation on U.

In this work, we give a relationship between rough sets, fuzzy sets and ring theory.

We consider a ring as a universal set and shall introduce the notion of fuzzy ideal of a ring for definitions of the lower[upper] approximations in a ring. Also, we shall give some properties of the lower[upper] approximations in a ring.

We will discuss homomorphism images of the lower[upper] approximations in a ring.

Let S be a multiplicative subset of a commutative ring R. We consider a RxS as a universal and introduce the notion of lower[upper] approximations in a RxS. We also give some properties of the lower[upper] approximations in a RxS.

Especially, we may gain new ideas on the multiplicative subset of a commutative ring R. Also, we give some properties of rough ideals.

Key Words: Fuzzy Set, Rough Set, Multiplicative Set, Lower[Upper] Approximations, Ring, İdeal, Fuzzy İdeal, Homomorphism.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca derslerini dinlediğim, başta Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ'a , Prof. Dr. Fahrettin ABDULLAH'a , tez konumun belirlenmesi ve hazırlanması aşamalarında yardımlarını gördüğüm danışmanım Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU' na ve bölümdeki öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

$:=$	Tanım olarak eşittir
U	Evrensel küme
Λ	herhangi bir örtü
$\overline{s}(X)$	$\{y \in U \mid X \subset U, \exists C \in \Lambda, y \in C \wedge C \cap X \neq \emptyset\}$
$\underline{s}(X)$	$\{y \in U \mid \exists C \in \Lambda, y \in C \wedge C \subseteq X\}$
θ	bir denklik bağıntısı
(U, θ)	yaklaşım uzayı
(U, θ, X)	$((\underline{U}, \theta, X), (\overline{U}, \theta, X))$
$(\underline{U}, \theta, X)$	$\{X \in U : [x]_\theta \subseteq X\}$
$(\overline{U}, \theta, X)$	$\{X \in U : [x]_\theta \cap X \neq \emptyset\}$
R	Herhangi bir halka
μ	R nin fuzzy alt kümesi
λ	R nin fuzzy alt kümesi
$(\mu \cap \lambda)(x)$	$\min\{\mu(x), \lambda(x)\}$
$(\mu + \lambda)(x)$	$\sup_{x=a+b}\{\min\{\mu(a), \lambda(b)\}\}$
$\lambda \subseteq \mu$	$\forall x \in R, \lambda(x) \leq \mu(x)$
$U(\mu, t)$	$\{(a,b) \in RxR : \mu(a,b) \geq t\}$, $t \in [0,1]$
$[x]_{(\mu,t)}$	$x \in R$ nin $U(\mu, t)$ bağıntısına göre denklik sınıfı
$U(\mu o \lambda, t)$	$\{(a,b) \in RxR : \exists c \in R \ni (a,c) \in U(\mu,t) \wedge (c,b) \in U(\lambda,t)\}$
A_λ	$\{x \in R : A(x) \geq \lambda\}$
A_λ^s	$\{x \in R : A(x) > \lambda\}$
$\overline{(r,s)_S}$	$\frac{r}{s}$
$S^{-1}R$	$\left\{\frac{r}{s} : r \in R, s \in S\right\}$

1.GİRİŞ

Rough küme teoresi ilk defa Pawlak'ın [16] çalışmaları ile başlamıştır. Bu teori Analiz, Mekanik ve Veri Analizinde pratik yaklaşımlar elde etmiştir.

$U \neq \varnothing$ evrensel küme, θ, U da bir denklik bağıntısı olmak üzere (U,θ) ikilisine bir yaklaşım uzayı adı verilir.

(U,θ) bir yaklaşım uzayı olmak üzere, (U,θ) da bir rough yaklaşımı ile

$$(U,\theta,-) : P(U) \to P(U)xP(U)$$

$$\forall X \in P(U), \qquad (U,\theta,X) = ((\underline{U},\theta,X),(\overline{U},\theta,X))$$

fonksiyonu anlaşılır.

$$(\underline{U},\theta,X) := \{X \in U : [x]_\theta \subseteq X\}$$
$$(\overline{U},\theta,X) := \{X \in U : [x]_\theta \cap X \neq \varnothing\}$$

kümelerine sırasıyla X in (U,θ) da bir alt rough yaklaşımı ve üst rough yaklaşımı adı verilir.

(U,θ) yaklaşım uzayı uzayı verilsin. $(A,B) \in P(U)xP(U)$ ikilisine (U,θ) da bir rough kümedir denir:$\Leftrightarrow \exists X \in P(U) \ni (A,B) = (U,\theta,X)$

$R \neq \varnothing$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem "+" ve "$\bullet$" olsun. Bu taktirde;

i. (R, +) değişmeli gruptur.

ii. $\forall a,b,c \in R,\ a(bc) = (ab)c$

iii. $\forall a,b,c \in R,\ a(b+c) = ab + ac \wedge (a+b)c = ac + bc$

koşulları sağlanıyorsa, R ye bir halka denir ve (R,+, $\bullet$) şeklinde gösterilir. R halkası,

$\forall a,b \in R,\ ab = ba$

özelliğine sahipse R ye değişmeli halka denir.

$\forall a \in R,\ a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa R ye birimli halka denir.

Bu çalışmada, "evresel kümeyi bir cebirsel yapı aldığımızda doğal olarak yaklaşım uzayı değişecektir. Bu değişim nasıl olacaktır?" sorusuna yanıt verilecektir.

Bu bağlamda, materyal ve metot bölümünde gerekli tanımlar, lemmalar, önermeler ve teoremler verilecek, bulgular ve tartışma bölümünde ise daha önceden incelenmiş olan çalışmaların bir derlemesi olarak; fuzzy idealer üzerinde rough yaklaşımlar, rough çarpımsal küme ele alınacaktır.

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

Rough küme teorisi ilk defa Pawlak'ın [16] çalışmaları ile başlamıştır. Bir evrensel kümenin alt kümesi olan rough küme, üst ve alt yaklaşımı adı verilen iki küme çifti tarafından tanımlanır.

Bir kümenin üst yaklaşımı, bu küme ile arakesiti boştan farklı olan bütün denklik sınıfların birleşimidir.

Bir kümenin alt yaklaşımı, bu küme tarafından kapsanan bütün denklik sınıfların birleşimidir.

Rough küme teorisi, küme teorisinin daha geniş halidir. Rough kümeler, keskin sınırlar hariç, bulanık kavramın matematik modelidir.[1,17,24,25, 26, 27, 28, 29,32]'de rough küme ile ilgili daha fazla bilgi bulunabilir.

"Rough küme ile cebirsel sistem arasında bir ilişki kuralabilir mi?" sorusu bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Örneğin, Bonikowaski [7], Iwinski [8], ve Pomykala ve Pomykala [9] rough kümelerin cebirsel özellikleri üzerinde çalışmışlardır. Pomykala ve Pomykala [9] klasik cebirde rough küme formları göstermiştir. Iwinski [8] kafeste teorisel yaklaşımları incelenmiştir. Comer [25] rough kümelerin ve çeşitli cebir dallarının cebirsel mantık çalışmalarının arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

"Evresel kümeyi bir cebirsel yapı olarak aldığımızda, doğal olarak yaklaşım uzayı değişecektir. Bu değişim nasıl olacaktır?" Biswas ve Nanda [6] rough altgruplar üzerinde çalışma yapmıştır. Kuroki [10] yarı gruplarda rough idealleri incelemiştir. Kuroki ve Wang [12] normal alt gruplar ile ilgili üst ve alt yaklaşımın bazı özelliklerini incelemiştir. Ayrıca, Kuroki ve Mordeson [11] rough gruplar ve rough kümelerin yapısı üzerinde çalışılmıştır. Mordeson [1] örtü yardımıyla üst ve alt yaklaşımı tanımlamıştır. Davvaz [5] rough kümeler ve halka teoresi arasındaki ilişkiyi incelemiş ve evrensel küme olarak bir halka göz önünde tutarak halkanın idealleri ile ilgili rough alt halkalar ve rough idealleri incelemiştir. Davvaz ve Mahdavipour [4] rough modulleri üzerinde çalışmıştır. [3]'da yarı gruplarda, rough asal idealler ve rough fuzzy asal idealler incelemiştir.

Rough küme teorisi ve fuzzy küme teorisi arasındaki farklılıklar ve benzerlikler ile ilgili bilgiler [13,20, 21, 29, 30, 31]'de bulunabilir.

3.MATERYAL VE METOD

Bu bölümde daha sonra kullanılacak kavramlar tanıtılarak, teoremler, verilecektir.

3.1.ÖRTÜ YARDIMIYLA ÜST - ALT YAKLAŞIMIN TANIMLANMASI

$U \neq \varnothing$ bir küme, $P(U)$, U nun kuvvet kümesi ve $s : P(U) \to P(U)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde;

(u1) $\forall X \in P(U)$, $X \subseteq s(X)$

(u2) $\forall X, Y \in P(U)$, $X \subseteq Y \Rightarrow s(X) \subseteq s(Y)$

(u3) $\forall X, Y \in P(U)$, $s(X \cup Y) = s(X) \cup s(Y)$

(u4) $\forall X \in P(U)$, $s(s(X)) = s(X)$

koşulları sağlanırsa s ye üst yaklaşım operatörü denir [1].

Tanım 3.1.1. $\Lambda \subseteq P(U) \setminus \{\varnothing\}$ olsun.

Λ ya U nun bir örtüsü denir $:\Leftrightarrow U \subseteq \bigcup_{C \in \Lambda} C$ dir [1]

Tanım 3.1.2. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu takdirde;

(i) Λ yarı indirgenebilir denir $:\Leftrightarrow \forall C, D \in \Lambda,\ C \subseteq D \Rightarrow C = D$

(ii) Λ indirgenebilir denir $:\Leftrightarrow \forall C \in \Lambda,\ \Lambda' \subseteq \Lambda \setminus \{C\} \ni C \subseteq \bigcup_{D \in \Lambda'} D$ olacak şekilde Λ' kümesi yoktur [1].

Tanım 3.1.3. Λ, U nun bir örtüsü olsun. $\overline{s} : P(U) \to P(U)$ fonksiyonu,

$\forall X \in P(U)$, $\overline{s}(X) = \{ y \in U \mid \exists C \in \Lambda, y \in C \wedge C \cap X \neq \varnothing \}$

şeklinde tanımlasın. $\forall X \in P(U)$, $\overline{s}(X)$ e Λ ile ilgili X in üst yaklaşımı denir [1].

$\overline{s}$ fonksiyonu geçişlidir : $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in U, x \in \overline{s}(\{y\}) \wedge y \in \overline{s}(\{z\}) \Rightarrow x \in \overline{s}(\{z\})$ [1].

Önerme 3.1.4. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar sağlanır [1].

i. $\forall x \in U, x \in \overline{s}(\{x\})$ ($\overline{s}$ yansıyan)

ii. $\forall x, y \in U, x \in \overline{s}(\{y\}) \Rightarrow y \in \overline{s}(\{x\})$ ($\overline{s}$ simetrik)

iii. $\forall x \in U, \forall C \in \Lambda, C \cap \{x\} \neq \varnothing \Rightarrow C \subseteq \overline{s}(\{x\})$

iv. $\overline{s}$ fonksiyonu (u1), (u2) ve (u3) özelliğini sağlar.

İspat. **i.** $x \in U$ keyfi verilsin. Λ, U nun bir örtüsü olduğundan $\exists C \in \Lambda \ni x \in C$ dir. Buradan $C \cap \{x\} \neq \varnothing$ ve $x \in \overline{s}(\{x\})$ olur.

ii. $x \in \overline{s}(\{y\})$ keyfi verilsin.

$$x \in \overline{s}(\{y\}) \Rightarrow \exists C \in \Lambda \ni x \in C \wedge C \cap \{y\} \neq \varnothing \Rightarrow y \in C \wedge C \cap \{x\} \neq \varnothing \Rightarrow y \in \overline{s}(\{x\})$$

iii. $C \cap \{x\} \neq \varnothing$ olsun.

$$C \cap \{x\} \neq \varnothing \Rightarrow \forall y \in C, y \in \overline{s}(\{x\}) \Rightarrow C \subseteq \overline{s}(\{x\})$$

iv. $x \in X$ keyfi verilsin.

$$x \in X \Rightarrow \exists C \in \Lambda \ni x \in C \wedge C \cap \{x\} \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{s}(X) \Rightarrow X \subseteq \overline{s}(X)$$

Böylece (u1) özelliği sağlanmış olur. $z \in \overline{s}(X)$ keyfi verilsin.

$$z \in \overline{s}(X) \Rightarrow \exists C \in \Lambda \ni z \in C \wedge C \cap X \neq \varnothing \Rightarrow C \cap Y \neq \varnothing \big(X \subseteq Y\big) \Rightarrow z \in \overline{s}(Y)$$

Buradan (u2) özelliği sağlanmış olur. Şimdi $z \in \overline{s}(X \cup Y)$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned} z \in \overline{s}(X \cup Y) &\Leftrightarrow \exists C \in \Lambda \ni z \in C \wedge C \cap (X \cup Y) \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \Lambda \ni z \in C \wedge (C \cap X) \cup (C \cap Y) \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow z \in \overline{s}(Y) \vee z \in \overline{s}(X) \Leftrightarrow z \in \overline{s}(Y) \cup z \in \overline{s}(X) \end{aligned}$$

Böylece (u3) özelliği sağlanmış olur. $s : P(U) \to P(U)$ fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu da sağlayabilir.

(u5) $\forall X \in P(U) \wedge x \in U, x \in s(X) \Rightarrow \exists X' \text{sonlu}\, X' \subseteq X \ni x \in s(X')$

(u6) $\forall \{X_\alpha | \alpha \in \Omega\} \subseteq P(U),\ s\left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} X_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} s(X_\alpha)$

Örnek 3.1.5. $U = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olsun. $s : P(U) \to P(U)$ fonksiyonu;

$$s(X)=\begin{cases} X\cup\{\infty\} \ , & X \text{ sonsuz} \\ X \ , & X \text{ sonlu}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. s, fonksiyonu (u1) ve (u2) özelliklerini sağlar. Şimdi (u3) özelliğinin sağlandığını gösterelim. $X, Y \in P(U)$ keyfi verilsin.

X, Y sonlu olsun. Bu durumda $X\cup Y$ sonlu olacağından,

$$s(X\cup Y)=X\cup Y=s(X)\cup s(Y)$$

elde edilir.

X sonsuz veya Y sonsuz olsun. Bu durumda $X\cup Y$ sonsuz olacağından,

$$s(X\cup Y)=X\cup Y\cup\{\infty\}=s(X)\cup s(Y)$$

elde edilir. (u4) özelliğin sağlandığını gösterelim. $X\in P(U)$ keyfi verilsin.

X sonlu olsun. Bu durumda,

$$s(X)=X\Rightarrow s\big(s(X)\big)=s(X)$$

elde edilir.

X sonsuz olsun. Bu durumda $s(X)=X\cup\{\infty\}$ ve

$$s(s(X))=s(X\cup\{\infty\})=X\cup\{\infty\}=s(X)$$

olur. (u5) özelliğin sağlanmadığını gösterelim.

$\infty\in s(\mathbb{N})$ olmasına rağmen $\nexists X'$ sonlu $X'\subseteq\mathbb{N}\ni\infty\in s(X')$ dir.

$$s\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}\Big)=s\big(\mathbb{N}\big)=U\neq\mathbb{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}s(\{n\})$$

olduğundan (u6) özelliği sağlanmaz [1].

Teorem 3.1.6. $s: P(U)\to P(U)$ fonksiyonu (u2) özelliğini sağlansın. Bu takdirde;

s fonksiyonu (u3) ve (u5) özelliklerini sağlar. $\Leftrightarrow$ s fonksiyonu (u6) özelliğini sağlar [1].

İspat. "$\Rightarrow$" s, (u3) ve (u5) özelliklerini sağladığını varsayalım. $\{X_\alpha:\alpha\in\Omega\}\subseteq P(U)$ keyfi verilsin. (u2) özelliğinden;

$$\forall\alpha\in\Omega,\ s\left(\bigcup_{\alpha\in\Omega}X_\alpha\right)\supseteq s(X_\alpha)\Rightarrow s\left(\bigcup_{\alpha\in\Omega}X_\alpha\right)\supseteq\bigcup_{\alpha\in\Omega}s(X_\alpha)$$

ifadesi elde edilir. $x \in s\left(\bigcup_{\alpha\in\Omega} X_\alpha\right)$ keyfi verilsin. (u5) özelliğinden;

$$x \in s\left(\bigcup_{\alpha\in\Omega} X_\alpha\right) \Rightarrow \exists X' \text{ sonlu } X' \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Omega} X_\alpha \ni x \in s(X')$$

olur. Buradan $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Omega \ni X' \subseteq X_{\alpha_1} \cup ... \cup X_{\alpha_n}$ elde edilir. Böylece;

$$x \in s(X_{\alpha_1} \cup ... \cup X_{\alpha_n}) = s(X_{\alpha_1}) \cup ... \cup s(X_{\alpha_n}) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Omega} s(X_\alpha) \text{ ((u3) den)}$$

olur.

"$\Leftarrow$" (u6) özelliği sağlansın. $X \in P(U)$ olsun.

$y \in s(X)$ keyfi verilsin. Böylece;

$$y \in s(X) \Rightarrow y \in s\left(\bigcup_{x\in X} \{x\}\right) = \bigcup_{x\in X} s(\{x\}) \Rightarrow y \in s(\{x\}), \exists x \in X$$

elde edilir. (u3) özelliği kolayca elde edilir.

Sonuç 3.1.7. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu takdirde;

$\overline{s}$ (u4) özelliğini sağlar. $\Rightarrow \forall X \in P(U), \exists \Lambda_X \subseteq \Lambda \ni \overline{s}(X) = \bigcup_{C\in\Lambda_X} C$ [1].

İspat. $x \in X$ keyfi verilsin. Bu durumda,

$\forall C \in \Lambda,\ C \cap \{x\} \neq \varnothing \Rightarrow C \subseteq \overline{s}(\{x\})$

olur. $y \in \overline{s}(\{x\})$ keyfi verilsin. O zaman;

$y \in C \in \Lambda \Rightarrow C \subseteq \overline{s}(\{y\}) \subseteq \overline{s}(\overline{s}(\{x\})) = \overline{s}(\{x\})$ ((u4) den)

ifadesi sağlanır. (u6) dan $\overline{s}(X) = \bigcup_{x\in X} \overline{s}(\{x\})$ olur.

Sonuç 3.1.8. Λ, U nun indirgenebilir bir örtüsü olsun. Bu takdirde;

$\overline{s}$ (u4) özelliğini sağlar. $\Rightarrow \forall x \in U, \forall C \in \Lambda, C \cap \{x\} \neq \varnothing \Leftrightarrow C \subseteq \overline{s}(\{x\})$ [1].

İspat. $x \in U$ ve $C \in \Lambda$ verilsin. Kabul edelim ki $C \subseteq \overline{s}(\{x\})$ olsun. Sonuç 3.1.7 dan

$$C \subseteq \overline{s}(\{x\}) = \bigcup \{D \in \Lambda : x \in D\}$$

elde edilir.

$C \cap \{x\} = \varnothing$ olsun. Bu durumda, $C \notin \{D \in \Lambda : x \in D\}$ olur. Bu ise Λ, U nun indirgenebilir örtü olmasıyla çelişir. Buradan $C \cap \{x\} \neq \varnothing$ olur. Tersi $\overline{s}$ tanımından elde edilir.

Sonuç 3.1.9.(Değişim özelliği) Λ, U nun bir örtüsü ve $X \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

$$\forall x, y \in U, x \in \overline{s}(X \cup \{y\}) \wedge x \notin \overline{s}(X) \Rightarrow y \in \overline{s}(X \cup \{x\})$$

ifadesi sağlanır [1].

İspat. $x \in \overline{s}(X \cup \{y\}) \wedge x \notin \overline{s}(X)$ olsun. (u3) özelliğiden $x \in \overline{s}(\{y\})$ olur. Buradan $y \in \overline{s}(\{x\}) \subseteq \overline{s}(X \cup \{x\})$ (önerme 3.1.4 ün ii. ve (u2)) elde edilir.)

Sonuç 3.1.10. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu takdirde;

$\overline{s}$ (u4) özelliğini sağlar. Buradan, $\Phi = \left\{ \overline{s}(\{x\}) \middle| x \in U \right\}$ kümesi U nun bir parçalanışıdır. [1].

İspat. $x \in \overline{s}(\{x\})$ ve (u6)'dan

$U = \bigcup_{x \in U} \overline{s}(\{x\})$ olur. $\overline{s}(\{x\}) \cap \overline{s}(\{y\}) \neq \varnothing$

olduğunu varsayalım. $z \in \overline{s}(\{x\}) \cap \overline{s}(\{y\})$ keyfi verilsin. Bu durumda;

$$\overline{s}(\{z\}) \subseteq \overline{s}(\overline{s}(\{x\})) \cap \overline{s}(\overline{s}(\{y\})) = \overline{s}(\{x\}) \cap \overline{s}(\{y\})$$

olur. $x, y \in \overline{s}(\{z\})$ olmak üzere, önerme 3.1.4 ün (ii) koşullundan,

$$\overline{s}(\{x\}), \overline{s}(\{y\}) \subseteq \overline{s}(\{z\})$$

yazılabilir. Buradan

$$\overline{s}(\{x\}) = \overline{s}(\{y\}) = \overline{s}(\{z\})$$

olur. Böylece, Φ, U nun bir parçalanışıdır.

Örnek 3.1.11. $U = \{1,2,3\}$, $C_1 = \{1,2\}$, $C_2 = \{2,3\}$ ve $\Lambda = \{C_1, C_2\}$ verilsin. $\overline{s}(\varnothing) = \varnothing, \overline{s}(\{1\}) = \{1,2\}, \overline{s}(\{3\}) = \{2,3\}, \overline{s}(\{2\}) = U$ olsun. $X \in P(U), |X| = 2$ olmak üzere $\overline{s}(X) = U$ olarak alalım. $\overline{s}(\{1\}) \subset U = \overline{s}(\overline{s}(\{1\}))$ olacağından (u4) sağlanmaz.

$2 \in \overline{s}(\{3\}) = \{2,3\}$, $1 \in \overline{s}(\{2\})$ olmasına rağmen $1 \notin \overline{s}(\{3\})$ dir. Buradan $\overline{s}$ geçişli değildir. Λ indirgenebilirdir [1].

Örnek 3.1.12. $U = \{1,2\}$, $\Lambda = \{\{1\}, U\}$ ve $\overline{s}(\varnothing) = \varnothing$ olsun. $X \in P(U)$, $|X| \geq 1$ olmak üzere, $\overline{s}(X) = U$ olsun. $\forall X \in P(U), \overline{s}(\overline{s}(X)) = \overline{s}(X)$ olduğu görülür. $\overline{s}$, geçişlidir. Λ, U nun örtüsü olmasına rağmen parçalanışı değildir. Λ, yarı indirgenebilir değildir [1].

Teorem 3.1.13. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar denktir [1].

(1) Λ, indirgenebilir ve $\forall X \in P(U), \overline{s}(\overline{s}(X)) = \overline{s}(X)$ dir.

(2) Λ, U nun bir parçalanışıdır.

(3) Λ indirgenebilir ve $\overline{s}$ geçişlidir.

İspat. $(3) \Rightarrow (2)$: $C, D \in \Lambda$ kümeleri farklı ve $C \cap D \neq \varnothing$ olsun. $x \in C \cap D$ keyfi verilsin. Λ indirgenebilir olduğundan $C \setminus D \neq \varnothing \neq D \setminus C$ dir.

$\forall y \in C \setminus D$ ve $\forall z \in D \setminus C$,

$$C \cap \{x\} \neq \varnothing \Rightarrow y \in \overline{s}(\{x\})$$
$$D \cap \{z\} \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{s}(\{z\})$$

olur. $\overline{s}$, geçişli olduğundan, $y \in \overline{s}(\{z\})$ dir. Buradan $\exists C_{y,z} \in \Lambda \ni y, z \in C_{y,z}$ dir. Böylece;

$$(C \setminus D) \cup (D \setminus C) \subseteq \bigcup \{C_{y,z} : y \in C \setminus D, z \in D \setminus C\}$$
$$\forall y \in C \setminus D,\ \forall z \in D \setminus C,\ C \neq C_{y,z} \neq D$$

elde edilir. Buradan, $C \subseteq \bigcup \{C_{y,z} : y \in C \setminus D, z \in D \setminus C\} \cup D$ olur. Bu ise Λ nın indirgenebilir olmasıyla çelişir. Böylece, $C \cap D = \varnothing$ olacağından Λ, U nun parçalanışıdır.

$(2) \Rightarrow (1)$: $X \in P(U)$ keyfi verilsin. Sonuç 3.1.7 da $\Lambda_X = \{C \in \Lambda : C \subseteq \overline{s}(X)\}$ olmak üzere $\overline{s}(X) = \bigcup_{C \in \Lambda_X} C$ dir. Şimdi, $\forall C \in \Lambda, \overline{s}(C) = C$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim. $C \in \Lambda$ olmak üzere $y \in \overline{s}(C)$ keyfi verilsin. Buradan

$\exists D \in \Lambda \ni D \cap C \neq \varnothing \wedge y \in D$ olur. Λ, U nun bir parçalanışı olduğundan $D = C$ dir. Buradan, $\overline{s}(C) \subseteq C$ elde edilir. $\overline{s}$ tanımından $\overline{s}(C) \supseteq C$ olur. Böylece;

$$\overline{s}(\overline{s}(X)) = \overline{s}\left(\bigcup\nolimits_{C \in \Lambda_X} C\right) = \bigcup\nolimits_{C \in \Lambda_X} \overline{s}(C) = \bigcup\nolimits_{C \in \Lambda_X} C = \overline{s}(X)$$

ifadesi elde edilir.

(1) $\Rightarrow$ (3): $x \in \overline{s}(\{y\})$ ve $y \in \overline{s}(\{z\})$ keyfi verilsin. Böylece;

$$x \in \overline{s}(\{y\}) \subseteq \overline{s}(\overline{s}(\{z\})) = \overline{s}(\{z\})$$

olur. Buradan, $\overline{s}$ geçişlidir.

Örnek 3.1.14. $U = \{1,2,3\}$ ve $\Lambda = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ olarak verilsin. $\overline{s}$, fonksiyonu $\overline{s}(\varnothing) = \varnothing$ ve $\forall X \in P(U), X \neq \varnothing, \overline{s}(X) = U$ olarak tanımlayalım. $\overline{s}$, (u4) özelliğini sağlar ve geçişlidir. Λ, U nun parçalanışı değildir. Λ yarı indirgenebilir ancak indirgenebilir değildir [1]. (Not: $\{2,3\} \subseteq U = \overline{s}(\{1\})$ ve $\{2,3\} \cap \{1\} = \varnothing$)

Önerme 3.1.15. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu takdirde;
Λ yarı-indirgenebilir ve $\forall C \in \Lambda, \overline{s}(C) = C \Leftrightarrow \Lambda$, U nun bir parçalanışıdır.[1].

İspat. Λ yarı indirgenebilir ve $\forall C \in \Lambda, \overline{s}(C) = C$ olduğunu varsayalım. $C, D \in \Lambda \ni C \cap D \neq \varnothing$ olsun. $\overline{s}$, tanımından $\overline{s}(C) = C \supseteq C \cup D$ yazılabilir. Λ yarı indirgenebilir olduğundan $C = D$ olur. Böylece Λ, U nun bir parçalanışıdır.

Tersine Λ, U nun bir parçalanışı olduğunu varsayalım. $C \in \Lambda$ olmak üzere $y \in \overline{s}(C)$ keyfi verilsin. Buradan, $\exists D \in \Lambda \ni D \cap C \neq \varnothing \wedge y \in D$ olur. Λ, U nun bir parçalanışı olduğundan $D = C$ ve $\overline{s}(C) \subseteq C$ elde edilir. $\overline{s}$ tanımından $\overline{s}(C) \supseteq C$ olur. Λ yarı indirgenebilirdir.

$U \neq \varnothing$ bir küme, $P(U)$, U nın kuvvet kümesi ve $s : P(U) \to P(U)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde;

(11) $\forall X \in P(U),\ X \supseteq s(X)$

(12) $\forall X, Y \in P(U),\ X \subseteq Y \Rightarrow s(X) \subseteq s(Y)$

(13) $\forall X, Y \in P(U),\ s(X \cap Y) = s(X) \cap s(Y)$

(14) $\forall X \in P(U),\ s(s(X)) = s(X)$

koşulları sağlanırsa s ye alt yaklaşım operatörü denir [1].

Tanım 3.1.16. Λ, U nun bir örtüsü olsun. $\underline{s}:P(U)\to P(U)$ fonksiyonu,

$$\forall X\in P(U),\ \underline{s}(X)=\{y\in U \mid \exists C\in\Lambda, y\in C \wedge C\subseteq X\}$$

şeklinde tanımlasın. Bu takdirde; $\forall X\in P(U)$, $\underline{s}(X)$ ya Λ ile ilgili X in alt yaklaşımı adı verilir [1].

Önerme 3.1.17. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu durumda;

$$\forall X\in P(U),\ \underline{s}(X)\supseteq U\setminus\overline{s}(U\setminus X)$$

ifadesi sağlanır [1].

İspat. $X\in P(U)$ keyfi verilsin. Bu durumda;

$$\underline{s}(X)=\{y\in U \mid \exists C\in\Lambda, y\in C \wedge C\subseteq X\}=\bigcup\{C: C\in\Lambda, C\subseteq X\}=\bigcup\{C: C\in\Lambda, C\cap(U\setminus X)=\varnothing\}$$

$$\bigcup\{C: C\in\Lambda, C\cap(U\setminus X)=\varnothing\}\supseteq U\setminus\bigcup\{C: C\in\Lambda, C\cap(U\setminus X)\neq\varnothing\}=U\setminus\overline{s}(U\setminus X)$$

olur.

Önerme 3.1.18. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu durumda;

$\forall X\in P(U),\ U\setminus\underline{s}(X)=\overline{s}(U\setminus X)\Leftrightarrow \Lambda$ U nun parçalanışıdır.[1].

İspat. $\forall X\in P(U),\ U\setminus\underline{s}(X)=\overline{s}(U\setminus X)$ olduğunu varsayalım. $\Lambda=\{U\}$ ise Λ, U nun parçalanışıdır.

Farzedelimki $\Lambda\neq\{U\}$ olsun. Bu durumda, $\exists C_1, C_2\in\Lambda \ni C_1\not\subseteq C_2$ olur. $\underline{s}$, tanımından $\underline{s}(C_2)=C_2$ dir. Buradan, $\overline{s}(U\setminus C_2)=U\setminus\underline{s}(C_2)=U\setminus C_2$ olur. $C_1\not\subseteq C_2$ olduğundan, $C_1\subseteq\overline{s}(U\setminus C_2)=U\setminus\underline{s}(C_2)=U\setminus C_2$ olur. O zaman, $C_1\cap C_2=\varnothing$ olur. Böylece Λ, U nun parçalanışıdır. Ters durum Önerme.3.1.17 dan ispat edilir.

Önerme 3.1.19. Λ, U nun bir örtüsü olsun. Bu takdirde,

(1) $\underline{s}$ fonksiyonu (11) ve (12) özelliğine sahiptir.

(2) $\forall X, Y \in P(U)$, $\underline{s}\left(X \cap Y\right) \subseteq \underline{s}(X) \cap \underline{s}(Y)$

(3) $\forall X \in P(U)$, $\underline{s}(X) \supseteq \underline{s}(\underline{s}(X))$

koşulları sağlanır [1].

İspat. $X, Y \in P(U) \ni X \subseteq Y$ verilsin. $\underline{s}(X) = \varnothing$ olsun. Bu durumda (11) ve (12) sağlanır. $\underline{s}(X) \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $y \in \underline{s}(X)$ keyfi verilsin. Buradan, $\exists C \in \Lambda \ni y \in C \subseteq X \subseteq Y$ elde edilir. Böylece (1) sağlanır.(11) ve (12) özelliklerden (2), (3) koşulları elde edilir.

Tanım 3.1.20. Λ, U nun bir örtüsü ve $\overline{s}$, (u4) özelliğine sahip olsun. $X \subseteq U$ olmak üzere;

(1) $A \subseteq U$ olmak üzere, A ya U nun bir alt uzayıdır denir:$\Leftrightarrow A = \overline{s}(A)$

(2) X bağımsızdır denir:$\Leftrightarrow \forall x \in X, x \notin \overline{s}(X \setminus \{x\})$

(3) X, U nun bir A alt uzayının üretecisidir denir:$\Leftrightarrow A = \overline{s}(X)$

(4) X, U nun bir A alt uzayının tabanıdır denir:$\Leftrightarrow$ X, A nın üreticisi ve X, bağımsızdır [1].

Teorem 3.1.21.(Kuroki ve Mordeson[11]) Λ, U nun bir örtüsü ve $\overline{s}$, (u4) özelliğine sahip olsun. $X \subseteq U$ olmak üzere;

i. X, U nun minimal üretecisidir.

ii. X, U nun maksimal bağımsız altkümesidir.

iii. X, U nun bir tabanıdır.

koşulları denktir [1].

Teorem 3.1.22.(Kuroki ve Mordeson[11]) Λ U nun bir örtüsü ve $\overline{s}$, (u4) özelliğine sahip olsun. Bu durumda U bir tabana sahip ve tabanın kardinalitesi tektir [1].

3.2.YAKLAŞIM UZAYLARI

U evrensel küme, θ U da bir denklik bağıntısı ve $x \in U$ olsun. x’e θ ile bağlı tüm elemanların kümesine x’in denlik sınıfı adı verilir, ve $[x]_\theta$ ile gösterilir.

U nun θ ya göre oluşan tüm denklik sınıflarının kümesi U/θ ile gösterilir. Herhangi bir $X \subseteq U$, X in U daki tümleyeni X^c ile gösterilir. $U \neq \emptyset$ ve θ U da bir denklik bağıntısı olmak üzere (U,θ) ikilisine bir yaklaşım uzayı adı verilir [2].

Tanım 3.2.1. (U,θ) bir yaklaşım uzayı olmak üzere, (U,θ) da bir rough yaklaşımı ile

$$(U,\theta,-) : P(U) \rightarrow P(U)xP(U)$$

$$\forall X \in P(U), \quad (U,\theta,X) = ((\underline{U},\theta,X),(\overline{U},\theta,X))$$

fonksiyonu anlaşılır [2].

$$(\underline{U},\theta,X) := \{x \in U : [x]_\theta \subseteq X\}$$
$$(\overline{U},\theta,X) := \{x \in U : [x]_\theta \cap X \neq \emptyset\}$$

kümelerine sırasıyla X in (U,θ) da bir alt rough yaklaşımı ve üst rough yaklaşımı adı verilir [2].

(U,θ) yaklaşım uzayı uzayı verilsin. $(A,B) \in P(U)xP(U)$ ikilisine (U,θ) da bir rough kümedir denir $:\Leftrightarrow \exists X \in P(U) \ni (A,B) = (U,\theta,X)$ [2].

Tanım 3.2.2. (U,θ,A) ve (U,θ,B), (U,θ) yaklaşım uzayında herhangi iki rough kümeleri olmak üzere;

i. $(U,\theta,A) \bigcup (U,\theta,B) := \big((\underline{U},\theta,A) \cup (\underline{U},\theta,B),(\overline{U},\theta,A) \cup (\overline{U},\theta,B)\big)$

ii. $(U,\theta,A) \bigcap (U,\theta,B) := \big((\underline{U},\theta,A) \cap (\underline{U},\theta,B),(\overline{U},\theta,A) \cap (\overline{U},\theta,B)\big)$

iii. $(U,\theta,A) \sqsubseteq (U,\theta,B) \Leftrightarrow (U,\theta,A) \cap (U,\theta,B) = (U,\theta,A)$

$(U,\theta,A) \sqsubseteq (U,\theta,B)$ ise (U,θ,A) ya (U,θ,B) nın rough alt kümesi adı verilir.

iii'. $(U,\theta,A) \sqsubseteq (U,\theta,B) \Leftrightarrow (\underline{U},\theta,A) \subseteq (\underline{U},\theta,B) \wedge (\overline{U},\theta,A) \subseteq (\overline{U},\theta,B)$

(U,θ,A) rough kümesinin tümleyeni $(U,\theta,A)^c$ ile gösterilir ve

$$(U,\theta,A)^c := \left((\overline{U},\theta,A)^c,(\underline{U},\theta,A)^c\right)$$

şeklinde tanımlanır.

iv. $(U,\theta,A)\setminus(U,\theta,B) := (U,\theta,A)\cap(U,\theta,B)^c$

$$:= \left((\underline{U},\theta,A)\setminus(\overline{U},\theta,B),(\overline{U},\theta,A)\setminus(\underline{U},\theta,B)\right)$$ [3].

Tanım 3.2.3. (U,θ) bir yaklaşım uzayı ve $\varnothing \neq X \subseteq U$ olsun.

i. $(\underline{U},\theta,X) = (\overline{U},\theta,X)$ ise X e tanımlanabilir küme

ii. $(\underline{U},\theta,X) = \varnothing$ ise X e boş iç küme

iii. $(\overline{U},\theta,X) = U$ ise X e boş dış küme

adları verilir [2].

X in (U,θ) da alt rough yaklaşımı X de içerilen U da en büyük tanımlanabilir kümedir.

X in (U,θ) da üst rough yaklaşımı X i içeren U da en küçük tanımlanabilir kümedir. Böylece;

$$(\underline{U},\theta,X) := \bigcup \left\{ S : S \subseteq X, S \text{ tanımlanabilir küme} \right\}$$

$$(\overline{U},\theta,X) := \bigcap \left\{ S : X \subseteq S, S \text{ tanımlanabilir küme} \right\}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

X in bir rough kümesi, X in aynı alt ve üst yaklaşıma sahip olan U nun tüm alt kümelerin bir ailesidir [2].

3.3.FUZZY İDEALLER VE KONGRUANS BAĞINTILARI

R halkası verilsin. R nin bir μ fuzzy alt kümesi, Zadeh tarafından $\mu : R \to [0,1]$ fonksiyonu olarak tanımlandı.

μ ve λ R nin iki fuzzy alt kümesi olsun.

$\lambda \subseteq \mu :\Leftrightarrow \forall x \in R, \lambda(x) \leq \mu(x)$

$\forall x \in R$, $(\mu \cap \lambda)(x) := \min\{\mu(x), \lambda(x)\}$

$\forall x \in R$, $(\mu+\lambda)(x) := \sup_{x=a+b} \{ \min\{ \mu(a), \lambda(b) \} \}$

μ ye R nin fuzzy alt kümesi olmak üzere μ ye R nin bir fuzzy ideali denir:$\Leftrightarrow$

(i) $\forall x, y \in R,\ \mu(x-y) \geq \min\{ \mu(x), \mu(y) \}$

(ii) $\forall x, y \in R,\ \mu(xy) \geq \max\{ \mu(x), \mu(y) \}$

μ R nin bir fuzzy ideali olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $\forall x \in R$, $\mu(x) \leq \mu(0)$ ve $\mu(x) = \mu(-x)$

(0, R nin toplamaya göre birim elemanı)

2) $\mu(x-y) = \mu(0) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y),\ (x, y \in R)$

μ ve λ R nin iki fuzzy idealeri ise $\mu \cap \lambda$ da R nin fuzzy idealidir.

μ R nin herhangi bir fuzzy alt kümesi olmak üzere,

$\mu_t := \{x \in R : \mu(x) \geq t\}$, $t \in [0,1]$

kümesine μ nin t-seviye alt kümesi adı verilir.

Fuzzy küme ile klasik küme arasındaki bağıntı açısından t-seviye alt küme kavramı çok önemlidir.

Her bir fuzzy küme, onun tüm t-seviye alt kümelerinin bir ailesi tarafından tektürlü tanımlanabilir [2].

Önerme 3.3.1. μ R nin bir fuzzy alt kümesi olmak üzere; R nin bir fuzzy idealidir $\Leftrightarrow t \in \operatorname{Im}\mu$,μ_t kümeleri R nin idealidir [2].

İspat: "$\Rightarrow$" $\mu_t = \{x \in R : \mu(x) \geq t\}$, $t \in [0,1]$

$x, y \in \mu_t$ keyfi verilsin.

$x, y \in \mu_t \Rightarrow \mu(x) \geq t$,$\mu(y) \geq t$

$\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \min\{t, t\} = t \Rightarrow x - y \in \mu_t$

$r \in R$ keyfi verilsin.

$\mu(rx) \geq \max\{\mu(x), \mu(r)\} \geq t \Rightarrow rx \in \mu_t$ $\quad (x \in \mu_t \Rightarrow \mu(x) \geq t)$

Benzer şekilde $xr \in \mu_t$ olduğu görülür.

"$\Leftarrow$" $t \in \operatorname{Im}\mu$,μ_t R nin ideali olsun.

1) $x, y \in R$ keyfi verilsin.

$\mu(y) \in \operatorname{Im}\mu \Rightarrow \exists t_2 \in \operatorname{Im}\mu \ni \mu(y) = t_2$

$\mu(x) \in \operatorname{Im}\mu \Rightarrow \exists t_1 \in \operatorname{Im}\mu \ni \mu(x) = t_1$

$\mu(x-y) \in \operatorname{Im}\mu \Rightarrow \exists t_3 \in \operatorname{Im}\mu \ni \mu(x-y) = t_3$

Kabul edelim ki $t_1 \leq t_2$ olsun.

$x \in \mu_{t_1} \wedge y \in \mu_{t_1} \Rightarrow x - y \in \mu_{t_1} \Rightarrow \mu(x-y) \geq t_1$

$\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq t_1$

2) $x, y \in R$ keyfi verilsin.

$x \in \mu_{t_1} \wedge y \in R \Rightarrow xy \in \mu_{t_1} \Rightarrow \mu(xy) \geq \mu(x) = t_1$

$y \in \mu_{t_2} \wedge x \in R \Rightarrow xy \in \mu_{t_2} \Rightarrow \mu(xy) \geq \mu(y) = t_2$

$\Rightarrow \mu(xy) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$

Tanım 3.3.2. μ R nin fuzzy ideali olsun.

$$\forall t \in [0,1], \quad U(\mu, t) = \{(a,b) \in RxR : \mu(a-b) \geq t\}$$

kümesine μ nin t-seviye bağıntısı adı verilir[2]

θ R de bir denklik bağıntısı olmak üzere; θ ya kongruans bağıntısıdır denir.$:\Leftrightarrow (a,b) \in \theta \Rightarrow \forall x \in R$, $(a+x, b+x) \in \theta \wedge (x+a, x+b) \in \theta$

Lemma 3.3.3. μ ,R de bir fuzzy ideal ve $t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde; $U(\mu, t)$ R de bir kongruans bağıntısıdır [2].

İspat. $(0,0) \in RxR$, $\mu(0-0) = \mu(0) \geq t \Rightarrow (0,0) \in U(\mu,t) \Rightarrow U(\mu,t) \neq \varnothing$

$a \in R$ keyfi verilsin.

$\mu(a-a) = \mu(0) \geq t \Rightarrow (a,a) \in U(\mu,t)$

$(a,b) \in U(\mu,t)$ keyfi verilsin.

$(a,b) \in U(\mu,t) \Rightarrow \mu(a-b) \geq t$

μ R nin fuzzy ideali olduğudan $\mu(b-a) = \mu(-(b-a)) = \mu(a-b) \geq t$ dir. Buradan $(b,a) \in U(\mu,t)$ elde edilir. $(a,b) \in U(\mu,t) \wedge (b,c) \in U(\mu,t)$ keyfi verilsin.

$\mu(a-c) = \mu(a-b+b-c) \geq \min\{\mu(a-b), \mu(b-c)\} \geq \min\{t,t\} = t \Rightarrow (a,c) \in U(\mu,t)$

Böylece $U(\mu,t)$ R de bir denklik bağıntısıdır.

$(a,b)\in U(\mu,t)$ ve $x\in R$ keyfi verilsin.

$\mu((a+x)-(b+x))=\mu((a+x)+(-x-b))=\mu(a+(x-x)-b)=\mu(a+0-b)=\mu(a-b)\geq t\Rightarrow (a+x,b+x)\in U(\mu,t)$

$(R,+)$ abelyen grup olduğundan $(x+a,x+b)\in U(\mu,t)$ olur. Buradan, $U(\mu,t)$ R de bir kongruans bağıntısı olur.

Bu durum ‘ $a\equiv_t b \pmod{\mu} :\Leftrightarrow \mu(a-b)\geq t$ ’ şeklinde yazılır.

Lemma 3.3.4. μ, λ R nin iki fuzzy ideali ve $t\in[0,1]$ olsun. O zaman

$$U(\mu\cap\lambda,t)=U(\mu,t)\cap U(\lambda,t)$$

ifadesi sağlanır [2].

İspat. $U(\mu\cap\lambda,t)=\{(a,b)\in RxR:(\mu\cap\lambda)(a-b)\geq t\}$

$$\begin{aligned}&=\{(a,b)\in RxR:\min\{\mu(a-b),\lambda(a-b)\}\geq t\}\\&=\{(a,b)\in RxR:\mu(a-b)\geq t\}\ \wedge\ \{(a,b)\in RxR:\lambda(a-b)\geq t\}\\&=U(\mu,t)\bigcap U(\lambda,t)\end{aligned}$$

$x\in R$ nin $U(\mu,t)$ bağıntısına göre denklik sınıfını $[x]_{(\mu,t)}$ ile göstereceğiz.

Lemma 3.3.5. μ, R nin bir fuzzy ideali, $a,b\in R$ ve $t\in[0,1]$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır [2].

(i) $[a]_{(\mu,t)}+[b]_{(\mu,t)}=[a+b]_{(\mu,t)}$

(ii) $[-a]_{(\mu,t)}=-\left([a]_{(\mu,t)}\right)$

***(iii)** $[a]_{(\mu,t)}+[b]_{(\lambda,t)}\subseteq[a+b]_{(\mu+\lambda,t)}$

İspat. **(i)** $x\in[a]_{(\mu,t)}+[b]_{(\mu,t)}$ keyfi verilsin.

$x\in[a]_{(\mu,t)}+[b]_{(\mu,t)} \Rightarrow \exists y\in[a]_{(\mu,t)}\wedge\exists z\in[b]_{(\mu,t)}\ni x=y+z$

$$(b,z),(a,y) \in U(\mu,t) \Rightarrow (a+b,y+z) \in U(\mu,t) \vee (a+b,x) \in U(\mu,t)$$

Buradan $x \in [a+b]_{(\mu,t)}$ olur. Diğer taraftan; $x \in [a+b]_{(\mu,t)}$ keyfi verilsin.

$$x \in [a+b]_{(\mu,t)} \Rightarrow (x,a+b) \in U(\mu,t) \Rightarrow (x-b,a) \in U(\mu,t)$$

$$\Rightarrow x-b \in [a]_{[(\mu,t)]} \vee \ x \in [a]_{(\mu,t)} + [b]_{(\mu,t)}$$

(ii) $x \in [-a]_{(\mu,t)}$ keyfi verilsin.

$$x \in [-a]_{[(\mu,t)]} \Leftrightarrow (x,-a) \in U(\mu,t) \Leftrightarrow (0,-a-x) \in U(\mu,t) \Leftrightarrow (a,-x) \in U(\mu,t)$$

$$\Leftrightarrow -x \in [a]_{(\mu,t)}$$

$$\Leftrightarrow x \in -([a]_{(\mu,t)})$$

(iii) $y \in [a]_{(\mu,t)} + [b]_{(\lambda,t)}$ keyfi verilsin.

$$y \in [a]_{(\mu,t)} + [b]_{(\lambda,t)} \Rightarrow \exists k \in [a]_{(\mu,t)} \wedge \exists c \in [b]_{(\lambda,t)} \ni y = k + c$$

$$\Rightarrow \mu(k-a) \geq t \ , \ \lambda(b-c) \geq t$$

$$(\mu+\lambda)(y-a-b) = \sup_{u+v=y-a-b} \{\min\{\mu(u),\lambda(v)\}\} \geq \min\{\mu(k-a),\lambda(b-c)\} \geq \min\{t,t\} = t$$

$$\Rightarrow (y,a+b) \in U(\mu+\lambda,t) \Rightarrow y \in [a+b]_{(\mu+\lambda,t)}$$

Lemma 3.3.6. μ, R nin bir fuzzy ideali ve $t \in [0,1]$ olsun. Herhangi bir $a \in R$,

$$a + [0]_{(\mu,t)} = [a]_{(\mu,t)}$$

özelliği sağlanır [2].

İspat. $a \in R$ keyfi verilsin

$$x \in a + [0]_{(\mu,t)} \Leftrightarrow x - a \in [0]_{(\mu,t)} .$$

$$\Leftrightarrow (x-a,0) \in U(\mu,t)$$

$$\Leftrightarrow (x,a) \in U(\mu,t)$$

$$\Leftrightarrow x \in [a]_{(\mu,t)}$$

Lemma 3.3.7. μ, λ R nin iki fuzzy ideali öyleki $\lambda \subseteq \mu$ ve $t \in [0,1]$ olsun.Bu takdirde;

$$\forall x \in R,\ [x]_{(\lambda,t)} \subseteq [x]_{(\mu,t)}$$

özelliği sağlanır [2].

İspat. $y \in [x]_{(\lambda,t)} \Rightarrow (x,y) \in U(\lambda,t) \Rightarrow \lambda(x-y) \geq t$

$$\Rightarrow \mu(x-y) \geq t, (\lambda \subseteq \mu)$$

$$\Rightarrow (x,y) \in U(\mu,t)$$

$$\Rightarrow y \in [x]_{(\mu,t)}$$

μ, λ R nin iki fuzzy ideali olsun. $U(\mu,t)$, $U(\lambda,t)$ kongruans bağıntılarının bileşimi

$$U(\mu,t)oU(\lambda,t) = \{(a,b) \in RxR : \exists c \in R \ni (a,c) \in U(\mu,t) \wedge (c,b) \in U(\lambda,t)\}$$

olarak tanımlanan ifadesi bir kongruans bağıntısıdır. $U(\mu,t)oU(\lambda,t)$ gösterimi yerine $U(\mu o \lambda,t)$ ifadesini kullanacağız [2].

Lemma 3.3.8. μ, λ R nin iki fuzzy ideali ve $t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde;

$$U(\mu o \lambda,t) \subseteq U(\mu+\lambda,t)$$

özelliği sağlanır [2].

İspat. $(a,b) \in U(\mu o \lambda,t)$ keyfi verilsin.

$(a,b) \in U(\mu o \lambda,t) \Rightarrow \exists c \in R \ni (a,c) \in U(\mu,t) \wedge (c,b) \in U(\lambda,t)$

$(\mu+\lambda)(a-b) = \sup\limits_{u+v=a-b} \{\min\{\mu(u),\lambda(v)\}\} \geq \min\{\mu(a-c),\lambda(c-b)\} \geq \min\{t,t\} = t$

$\Rightarrow (a,b) \in U(\mu+\lambda,t)$

Lemma 3.3.9. μ, λ R nin iki fuzzy ideali, $\mathrm{Im}\mu$, $\mathrm{Im}\lambda$ sonlu ve $t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde;

$$U(\mu o \lambda,t) = U(\mu+\lambda,t)$$

ifadesi sağlanır [2].

İspat. $(x,y) \in U(\mu+\lambda,t)$ keyfi verilsin.

$$(\mu+\lambda)(x-y) = \sup_{x-y=a+b} \left\{ \min\{\mu(a),\lambda(b)\} \right\} \geq t$$

$\operatorname{Im}\mu$, $\operatorname{Im}\lambda$ sonlu olduğundan,

$\exists\ a_o, b_o \in R \ \ni\ x-y = a_o + b_o \wedge \min\{\mu(a_o),\lambda(b_o)\} \geq t \Rightarrow \mu(a_o) \geq t\,,\ \lambda(b_o) \geq t$

$\mu(a_o - 0\ ) \geq t\ \wedge \lambda(b_o - 0\ ) \geq t \Rightarrow (a_o, 0\ ) \in U(\mu,t)\ \wedge\ (x-y, a_o) \in U(\lambda,t)$

$$\Rightarrow (x-y,0) \in U(\mu o \lambda, t)$$

$$\Rightarrow (x,y) \in U(\mu o \lambda, t)$$

$$\Rightarrow U(\mu o \lambda, t) \supseteq U(\mu+\lambda, t)$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. FUZZY İDEALLER ÜZERİNDE ROUGH YAKLAŞIMLAR

μ, R halkasının bir fuzzy ideali ve $t \in [0,1]$ olsun. Lemma.3.3.3. den $U(\mu, t)$ R de bir kongruans bağıntısıdır. $U = R$ ve θ U da denklik bağıntısı olmak üzere (U, θ) yaklaşım uzayı yerine (R, μ, t) ifadesini kullanacağız.

μ, R nin bir fuzzy ideali, $U(\mu, t)$ μ nin R de t-seviye kongruans bağıntısı ve $\varnothing \neq X \subseteq R$ olsun.

$$\underline{U}(\mu, t, X) := \{x \in R : [x]_{(\mu,t)} \subseteq X\}$$

$$\overline{U}(\mu, t, X) := \{x \in R : [x]_{(\mu,t)} \cap X \neq \varnothing\}$$

kümelerine,her biri söylendiği sıraya göre, X kümesinin $U(\mu, t)$ ile ilgili olarak alt ve üst rough yaklaşımları diye adlandırılır [2].

Önerme 4.1.1. (R, μ, t) herhangi bir yaklaşım uzayı ve her $A, B \subseteq R$, aşağıdakiler sağlanır [2].

1) $\underline{U}(\mu, t, A) \subseteq A \subseteq \overline{U}(\mu, t, A)$

2) $\underline{U}(\mu, t, \varnothing) = \varnothing = \overline{U}(\mu, t, \varnothing)$

3) $\underline{U}(\mu, t, R) = R = \overline{U}(\mu, t, R)$

4) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{U}(\mu, t, A) \subseteq \underline{U}(\mu, t, B) \wedge \overline{U}(\mu, t, A) \subseteq \overline{U}(\mu, t, B)$

5) $\underline{U}(\mu, t, \underline{U}(\mu, t, A)) = \underline{U}(\mu, t, A)$

6) $\overline{U}(\mu, t, \overline{U}(\mu, t, A)) = \overline{U}(\mu, t, A)$

7) $\overline{U}(\mu, t, \underline{U}(\mu, t, A)) = \underline{U}(\mu, t, A)$

8) $\underline{U}(\mu, t, \overline{U}(\mu, t, A)) = \overline{U}(\mu, t, A)$

9) $\underline{U}(\mu, t, A) = \left(\overline{U}(\mu, t, A^c)\right)^c$

10) $\overline{U}(\mu, t, A) = \left(\underline{U}(\mu, t, A^c)\right)^c$

11) $\underline{U}(\mu, t, A \cap B) = \underline{U}(\mu, t, A) \cap \underline{U}(\mu, t, B)$

12) $\overline{U}(\mu, t, A \cap B) \subseteq \overline{U}(\mu, t, A) \cap \overline{U}(\mu, t, B)$

13) $\underline{U}(\mu,t,A\cup B)\supseteq \underline{U}(\mu,t,A)\cup \underline{U}(\mu,t,B)$

14) $\overline{U}(\mu,t,A\cup B)=\overline{U}(\mu,t,A)\cup \overline{U}(\mu,t,B)$

15) $\forall x\in R$, $\underline{U}(\mu,t,[x]_{(\mu,t)})=\overline{U}(\mu,t,[x]_{(\mu,t)})$

İspat. **1)** $y\in \underline{U}(\mu,t,A)$ keyfi verilsin.

$$y\in \underline{U}(\mu,t,A)\Rightarrow [y]_{(\mu,t)}\subseteq A\Rightarrow [y]_{(\mu,t)}\cap A\neq\varnothing\Rightarrow y\in \overline{U}(\mu,t,A)$$

2) Tanımdan açıktır.

3) Tanımdan açıktır.

4) $A\subseteq B$ olmak üzere, $y\in \underline{U}(\mu,t,A)$ keyfi verilsin.

$$y\in \underline{U}(\mu,t,A)\Rightarrow [y]_{(\mu,t)}\subseteq A\subseteq B\Rightarrow y\in \underline{U}(\mu,t,B)$$

$y\in \overline{U}(\mu,t,A)$ keyfi verilsin.

$$y\in \overline{U}(\mu,t,A)\Rightarrow [y]_{(\mu,t)}\cap A\neq\varnothing\Rightarrow [y]_{(\mu,t)}\cap B\neq\varnothing\Rightarrow y\in \overline{U}(\mu,t,B)$$

5) $y\in \underline{U}(\mu,t,\underline{U}(\mu,t,A))$ keyfi verilsin.

$$y\in \underline{U}(\mu,t,\underline{U}(\mu,t,A))\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\subseteq \underline{U}(\mu,t,A)\Leftrightarrow y\in \underline{U}(\mu,t,A)$$

6) $y\in \overline{U}(\mu,t,\overline{U}(\mu,t,A))$ keyfi verilsin.

$$y\in \overline{U}(\mu,t,\overline{U}(\mu,t,A))\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\cap \overline{U}(\mu,t,A)\neq\varnothing\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow y\in \overline{U}(\mu,t,A)$$

7) $y\in \overline{U}(\mu,t,\underline{U}(\mu,t,A))$ keyfi verilsin.

$$y\in \underline{U}(\mu,t,\overline{U}(\mu,t,A))\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\subseteq \overline{U}(\mu,t,A)\Leftrightarrow y\in \overline{U}(\mu,t,A)$$

8) $y\in \underline{U}(\mu,t,\overline{U}(\mu,t,A))$ keyfi verilsin.

$$y\in \underline{U}(\mu,t,\overline{U}(\mu,t,A))\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\subseteq \overline{U}(\mu,t,A)\Leftrightarrow y\in \overline{U}(\mu,t,A)$$

9) $y\in \underline{U}(\mu,t,A)$ keyfi verilsin.

$$y\in \underline{U}(\mu,t,A)\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\subseteq A\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\cap A^c=\varnothing\Leftrightarrow y\in \left(\overline{U}(\mu,t,A^c)\right)^c$$

10) $y\in \overline{U}(\mu,t,A)$ keyfi verilsin.

$$y\in \overline{U}(\mu,t,A)\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)}\nsubseteq A^c\Leftrightarrow y\notin \underline{U}(\mu,t,A^c)\Leftrightarrow y\in \left(\underline{U}(\mu,t,A^c)\right)^c$$

11) $y\in \underline{U}(\mu,t,A\cap B)$ keyfi verilsin.

$$y \in \underline{U}(\mu,t,A\cap B) \Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)} \subseteq A\cap B \Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)} \subseteq A \wedge [y]_{(\mu,t)} \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow y \in \underline{U}(\mu,t,A) \cap \underline{U}(\mu,t,B)$$

12) $y \in \overline{U}(\mu,t,A\cap B)$ keyfi verilsin.

$$y \in \overline{U}(\mu,t,A\cap B) \Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap (A\cap B) \neq \varnothing \Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing \wedge [y]_{(\mu,t)} \cap B \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow y \in \overline{U}(\mu,t,A) \cap \overline{U}(\mu,t,B)$$

13) $y \in \underline{U}(\mu,t,A) \cup \underline{U}(\mu,t,B)$ keyfi verilsin.

$$y \in \underline{U}(\mu,t,A) \cup \underline{U}(\mu,t,B) \Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \subseteq A \vee [y]_{(\mu,t)} \subseteq B \Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \subseteq A\cup B \Rightarrow y \in \underline{U}(\mu,t,A\cup B)$$

14) $y \in \overline{U}(\mu,t,A\cup B)$ keyfi verilsin.

$$y \in \overline{U}(\mu,t,A\cup B) \Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap (A\cup B) \neq \varnothing$$

$$\Leftrightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing \vee [y]_{(\mu,t)} \cap B \neq \varnothing$$

$$\Leftrightarrow y \in \overline{U}(\mu,t,A) \cup \overline{U}(\mu,t,B)$$

15) Tanımdan açıktır.

Önerme 4.1.2. (R,μ,t) herhangi bir yaklaşım uzayı ve her $A,B \subseteq R$, aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\overline{U}(\mu,t,A) \setminus \overline{U}(\mu,t,B) \subseteq \overline{U}(\mu,t,A\setminus B)$

(ii) $\underline{U}(\mu,t,A) \cap \overline{U}(\mu,t,B) \subseteq \overline{U}(\mu,t,A\cap B)$

İspat. **(i)** $y \in \overline{U}(\mu,t,A) \setminus \overline{U}(\mu,t,B)$ keyfi verilsin.

$$y \in \overline{U}(\mu,t,A) \setminus \overline{U}(\mu,t,B) \Rightarrow y \in \overline{U}(\mu,t,A) \wedge y \notin \overline{U}(\mu,t,B)$$

$$y \in \overline{U}(\mu,t,A) \Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing$$

$$y \notin \overline{U}(\mu,t,B) \Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap B = \varnothing$$

$$\Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing \wedge [y]_{(\mu,t)} \subseteq B^c$$

$$\Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap (A \cap B^c) = [y]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow y \in \overline{U}(\mu,t,A\cap B^c)$$

(ii) $y \in \underline{U}(\mu,t,A) \cap \overline{U}(\mu,t,B)$ keyfi verilsin.

$$y \in \underline{U}(\mu,t,A) \cap \overline{U}(\mu,t,B) \Rightarrow y \in \underline{U}(\mu,t,A) \wedge y \in \overline{U}(\mu,t,B)$$

$$y \in \underline{U}(\mu,t,A) \Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \subseteq A$$

$$y \in \overline{U}(\mu,t,B) \Rightarrow [y]_{(\mu,t)} \cap B \neq \varnothing$$

$$[y]_{(\mu,t)} \cap (A \cap B) = [y]_{(\mu,t)} \cap B \neq \varnothing \Rightarrow y \in \overline{U}(\mu,t,A \cap B)$$

Önerme.4.1.1 in 12), 13), (i), (ii) koşullarının tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.1.3. $R = \{o, a, b, c\}$ olsun. Cayley tablosu

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	a	b	c
c	0	0	0	0

$(R,+,\bullet)$ bir halka ve $a=-a$, $b=-b$, $c=-c$ dir. $t_i \in [0,1]$, $i=0,1,2$ ve $t_2 < t_1 < t_0$ olacak şekilde μ fonksiyonu $\mu(0)=t_0$, $\mu(c)=t_1$, $\mu(a)=\mu(b)=t_2$ şeklinde tanımlasın.

$$U(\mu,t_0)=\{(o,o),(a,a),(b,b),(c,c)\}$$

$$U(\mu,t_1)=\{(o,o),(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(o,c),(c,o)\}$$

$$U(\mu,t_2)=RxR$$

$A=\{o,a\}$, $B=\{o,b,c\}$ olsun.

$$\overline{U}(\mu,t_1,B)=R,\ \overline{U}(\mu,t_1,A\cap B)=\{o,c\},\ \underline{U}(\mu,t_1,A)=\varnothing,\ \underline{U}(\mu,t_1,B)=\{o,c\}$$

$$\underline{U}(\mu,t_1,A\cup B)=\underline{U}(\mu,t_1,R)=R,\ \overline{U}(\mu,t_1,A)=R$$

Böylece;

$$\overline{U}(\mu,t_1,A)\cap\overline{U}(\mu,t_1,B) \subsetneq \overline{U}(\mu,t_1,A\cap B)$$

$$\underline{U}(\mu,t_1,A)\cap\underline{U}(\mu,t_1,B) \supsetneq \underline{U}(\mu,t_1,A\cup B)$$

elde edilir [2].

Örnek 4.1.4. $R = \mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ olsun.

$\mu(0) = t_0$, $\mu(1) = t_1$, $\mu(2) = t_2$, $t_1 < t_2 < t_0$ olacak şekilde μ tanımlansın.

$A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$ olarak verilsin.

$$\begin{aligned} U(\mu, t_1) &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}_3 x \mathbb{Z}_3 : \mu(a-b) \geq t_1\} \\ &= \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(1,0),(2,0),(0,2),(1,2),(2,1)\} \end{aligned}$$

$$\underline{U}(\mu, t_1, A) = \varnothing,\ \overline{U}(\mu, t_1, B) = \mathbb{Z}_3,\ \overline{U}(\mu, t_1, \{1\}) = \mathbb{Z}_3,\ \overline{U}(\mu, t_1, A) = \mathbb{Z}_3$$

$$A \cap B^c = \{0\},\ \overline{U}(\mu, t_1, A \cap B^c) = \mathbb{Z}_3$$

Böylece;

$$\underline{U}(\mu, t_1, A) \cap \overline{U}(\mu, t_1, B) \supsetneq \overline{U}(\mu, t_1, A \cap B)$$

$$\overline{U}(\mu, t_1, A) \cap \overline{U}(\mu, t_1, B)^c \supsetneq \overline{U}(\mu, t_1, A \cap B^c)$$

elde edilir.

Önerme 4.1.5. μ, λ R nin iki fuzzy ideali, $t \in [0,1]$ ve $\varnothing \neq X \subseteq R$ olsun. Bu takdirde;

$$\overline{U}(\mu \cap \lambda, t, X) \subseteq \overline{U}(\mu, t, X) \cap \overline{U}(\lambda, t, X)$$

sağlanır [2].

İspat. $x \in \overline{U}(\mu \cap \lambda, t, X)$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned} x \in \overline{U}(\mu \cap \lambda, t, X) &\Rightarrow [x]_{(\mu \cap \lambda, t)} \cap X \neq \varnothing \\ &\Rightarrow \exists a \in [x]_{(\mu \cap \lambda, t)} \cap X \\ &\Rightarrow (a,x) \in U(\mu \cap \lambda, t) \wedge a \in X \\ &\Rightarrow (\mu \cap \lambda)(a-x) \geq t \wedge a \in X \\ &\Rightarrow \min\{\mu(a-x), \lambda(a-x)\} \geq t \wedge a \in X \\ &\Rightarrow \mu(a-x) \geq t \wedge \lambda(a-x) \geq t \wedge a \in X \\ &\Rightarrow (a,x) \in U(\mu, t) \wedge (a,x) \in U(\lambda, t) \wedge a \in X \\ &\Rightarrow a \in [x]_{(\mu, t)} \cap X \wedge a \in [x]_{(\lambda, t)} \cap X \\ &\Rightarrow [x]_{(\mu, t)} \cap X \neq \varnothing \wedge [x]_{(\lambda, t)} \cap X \neq \varnothing \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in \overline{U}(\mu, t, X) \cap \overline{U}(\lambda, t, X).$$

Böylece $\overline{U}(\mu \cap \lambda, t, X) \subseteq \overline{U}(\mu, t, X) \cap \overline{U}(\lambda, t, X)$ elde edilmiş olur.

Örnek 4.1.6. $R = \mathbb{Z}_6$ verilsin.

$$\mu(0) = t_0,\ \mu(1) = \mu(2) = \mu(4) = \mu(5) = t_3,\ \mu(3) = t_2$$

$$\lambda(0) = t_1,\ \lambda(1) = \lambda(3) = \lambda(5) = t_4,\ \lambda(2) = \lambda(4) = t_2$$

$$t_i \in [0,1],\ 0 \le i \le 4 \wedge t_4 < t_3 < t_2 < t_1 < t_0$$

olacak şekilde R nin $\mu : \mathbb{Z}_6 \to [0,1]$, $\lambda : \mathbb{Z}_6 \to [0,1]$ fuzzy alt kümelerini tanımlayalım. μ ve λ R nin fuzzy idealleridir.

$$(\mu \cap \lambda)(0) = t_1,\ (\mu \cap \lambda)(2) = (\mu \cap \lambda)(4) = t_3,\ (\mu \cap \lambda)(1) = (\mu \cap \lambda)(3) = (\mu \cap \lambda)(5) = t_4$$

$$U(\mu, t_0) = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

$$U(\mu, t_2) = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,2), (2,5), (4,1), (1,4), (0,3), (3,0)\}$$

$$U(\mu, t_3) = \mathbb{Z}_6 x \mathbb{Z}_6$$

$$U(\lambda, t_1) = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

$$\begin{aligned} U(\lambda, t_2) = \{&(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), \\ &(5,3), (3,5), (4,2), (2,4), (1,3), (3,1), \\ &(0,2), (2,0), (5,1), (1,5), (0,4), (4,0)\} \end{aligned}$$

$$U(\lambda, t_4) = \mathbb{Z}_6 x \mathbb{Z}_6$$

$$\begin{aligned} U(\mu \cap \lambda, t_3) = \{&(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), \\ &(5,3), (3,5), (4,2), (2,4), (1,3), (3,1), \\ &(0,2), (2,0), (5,1), (1,5), (0,4), (4,0)\} \end{aligned}$$

$$U(\mu \cap \lambda, t_1) = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

$$U(\mu \cap \lambda, t_4) = \mathbb{Z}_6 x \mathbb{Z}_6$$

$X = \{1,2,3\}$ olsun. $\overline{U}(\mu, t_2, X) = \mathbb{Z}_6$, $\overline{U}(\lambda, t_2, X) = \mathbb{Z}_6$, $\overline{U}(\mu \cap \lambda, t_2, X) = X$ olacağından $\overline{U}(\mu \cap \lambda, t, X) \neq \overline{U}(\mu, t, X) \cap \overline{U}(\lambda, t, X)$ olur [2].

Önerme 4.1.7. μ, λ R nin iki fuzzy ideali , $t \in [0,1]$ ve $\varnothing \neq X \subseteq R$ olsun. Bu takdirde;

$$\underline{U}(\mu \cap \lambda, t, X) \supseteq \underline{U}(\mu, t, X) \cap \underline{U}(\lambda, t, X)$$

dır [2].

İspat. $x \in \underline{U}(\mu, t, X) \cap \underline{U}(\lambda, t, X)$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned} x \in \underline{U}(\mu, t, X) \cap \underline{U}(\lambda, t, X) &\Rightarrow x \in \underline{U}(\mu, t, X) \wedge x \in \underline{U}(\lambda, t, X) \\ &\Rightarrow [x]_{(\mu,t)} \subseteq X \wedge [x]_{(\lambda,t)} \subseteq X \\ &\Rightarrow [x]_{(\mu\cap\lambda,t)} \subseteq X \\ &\Rightarrow x \in \underline{U}(\mu \cap \lambda, t, X) \end{aligned}$$

Burada genelde '$\supseteq$' içerme işareti yerine '=' simgesi yazılamaz.

Örnek 4.1.8. Örnek 4.1.6 da $Y = \{1,2,3,4\}$ olsun

$\underline{U}(\mu, t_2, Y) = \{1,4\}$, $\underline{U}(\lambda, t_2, Y) = \varnothing$, $\underline{U}(\mu \cap \lambda, t_2, Y) = Y$

$\Rightarrow \underline{U}(\mu \cap \lambda, t_2, Y) \not\subset \underline{U}(\mu, t_2, Y) \cap \underline{U}(\lambda, t_2, Y)$ [2].

[12] Önerme 6.7.(Kuroki ve Wang). μ, λ G grubun iki fuzzy alt grupları , $t \in [0,1]$ ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. Bu takdirde;

$$\mu_{t\_}(A) \cap \lambda_{t\_}(A) = (\mu \cap \lambda)_{t\_}(A)$$

(Bizim notasyonumuz: $\underline{U}(\mu, t, A) \cap \underline{U}(\lambda, t, A) = \underline{U}(\mu \cap \lambda, t, A)$)

$(R, t, \bullet)$ bir halka olduğunda $(R, +)$ bir grup ve $(R, t, \bullet)$ nın her fuzzy ideali $(R, +)$ nın fuzzy idealleridir. Böylece örnek.4.1.8. [12].önerme 6.7 nin genelde doğru olmadığını göstermektedir [2].

[2] Sonuç 4.1.9. μ, λ G grubun iki fuzzy alt grupları, $t \in [0,1]$ ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. Bu takdirde;

$$\mu_{t\_}(A) \cap \lambda_{t\_}(A) \subseteq (\mu \cap \lambda)_{t\_}(A)$$

(Bizim notasyonumuz: $\underline{U}(\mu, t, A) \cap \underline{U}(\lambda, t, A) \subseteq \underline{U}(\mu \cap \lambda, t, A)$)

Sonuç 4.1.10. H, N G grubun normal altgrupları ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. Bu takdirde;

$$H_{-}(A) \cap N_{-}(A) \subseteq (H \cap N)_{-}(A)$$

sağlanır [2].

Sonuç 4.1.11. ρ, λ, S yarıgrubunda kongruans bağıntıları ve $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun. Bu takdirde;

$$\rho_{-}(A) \cap \lambda_{-}(A) \subseteq (\rho \cap \lambda)_{-}(A)$$

ifadesi sağlanır [2].

R bir halka olmak üzere, $\varnothing \neq A \subseteq R$ alt kümesine R nin üst rough ideali adı verilir $:\Leftrightarrow \overline{U}(\mu, t, A), R$ nin bir idealidir [2].

R bir halka olmak üzere, $\varnothing \neq A \subseteq R$ alt kümesine R nin alt rough ideali adı verilir$:\Leftrightarrow \underline{U}(\mu, t, A), R$ nin bir idealidir [2].

R bir halka olmak üzere, $\varnothing \neq A \subseteq R$ alt kümesine R nin üst rough maksimal ideali adı verilir $:\Leftrightarrow \overline{U}(\mu, t, A), R$ nin bir maksimal idealidir.

R bir halka olmak üzere, $\varnothing \neq A \subseteq R$ alt kümesine R nin alt rough maksimal ideali adı verilir $:\Leftrightarrow \underline{U}(\mu, t, A), R$ nin bir maksimal idealidir.

R bir halka olmak üzere, $\varnothing \neq A \subseteq R$ alt kümesine R nin üst rough asal ideali adı verilir $:\Leftrightarrow \overline{U}(\mu, t, A), R$ nin bir asal idealidir.

R bir halka olmak üzere, $\varnothing \neq A \subseteq R$ alt kümesine R nin alt rough asal ideali adı verilir $:\Leftrightarrow \underline{U}(\mu, t, A), R$ nin bir asal idealidir.

Önerme 4.1.12. μ, R nin bir fuzzy ideali ve $t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde;

A, R nin bir ideali ise A, R nin üst rough idealidir [2].

İspat. $a, b \in \overline{U}(\mu, t, A)$ ve $r \in R$ keyfi verilsin.

$$a, b \in \overline{U}(\mu, t, A) \Rightarrow [a]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing \wedge [b]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow \exists x \in [a]_{(\mu,t)} \cap A \wedge \exists y \in [b]_{(\mu,t)} \cap A$$

$$\Rightarrow x - y \in [a]_{(\mu,t)} - [b]_{(\mu,t)}$$

$$\Rightarrow x - y \in [a-b]_{(\mu,t)} \wedge (x-y) \in A,\ rx \in A$$

$$\Rightarrow [a-b]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow a - b \in \overline{U}(\mu, t, A)$$

$$(x, a) \in U(\mu, t) \Rightarrow \mu(x-a) \geq t$$

$$\mu(rx - ra) = \mu(r(x-a)) \geq \max\{\mu(r), \mu(x-a)\} \geq \mu(x-a) \geq t$$

$$\Rightarrow (rx, ra) \in U(\mu, t) \vee rx \in [ra]_{(\mu,t)}$$

$$\Rightarrow rx \in [ra]_{(\mu,t)} \cap A \Rightarrow [ra]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow ra \in \overline{U}(\mu, t, A)$$

Benzer şekilde $ar \in \overline{U}(\mu, t, A)$ elde edilir. Böylece $\overline{U}(\mu, t, A)$ R nin bir idealidir.

Lemma 4.1.13. μ, R nin bir fuzzy ideali ve $t \in [0,1]$ ve $A < (R, t)$ olsun. Bu takdirde;

$$\underline{U}(\mu, t, A) \neq \varnothing \Rightarrow [0]_{(\mu,t)} \subseteq A$$

sağlanır [2].

İspat. Kabul edelim ki, $\underline{U}(\mu, t, A) \neq \varnothing$ olsun.

$$\underline{U}(\mu, t, A) \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in \underline{U}(\mu, t, A)$$

$$\Rightarrow [x]_{(\mu,t)} \subseteq A$$

$$-\left([x]_{(\mu,t)}\right) \subseteq -A = \{-a \mid a \in A\} = A$$

$$[0]_{(\mu,t)} = [x + (-x)]_{(\mu,t)}$$

$=[x]_{(\mu,t)}+[-x]_{(\mu,t)}$ (Lemma 3.3.5 i)

$=[x]_{(\mu,t)}+(-[x]_{(\mu,t)})\subseteq A+A=A$ (Lemma 3.3.5.ii)

Önerme 4.1.14. μ, R nin bir fuzzy ideali ve $t\in[0,1]$ ve A, R nin bir ideali olsun. Bu takdirde;

$$\underline{U}(\mu,t,A)\neq\varnothing\Rightarrow\underline{U}(\mu,t,A)=A \text{ dir [2].}$$

İspat. Önerme 4.1.1 1) den $\underline{U}(\mu,t,A)\subseteq A$ dır. Şimdi $A\subseteq\underline{U}(\mu,t,A)$ olduğunu gösterelim. $a\in A$ keyfi verilsin. Lemma 4.1.13 den $[0]_{(\mu,t)}\subseteq A$ dir. A ideal olduğundan $a+[0]_{(\mu,t)}\subseteq a+A\subseteq A$ ifadesi doğrudur. Lemma 3.3.6 dan $[a]_{(\mu,t)}\subseteq A$ dır. Buradan $A\subseteq\underline{U}(\mu,t,A)$ elde edilir.

Sonuç 4.1.15. Lemma.4.1.13 ve Önerme.4.1.14 [12]'in Önerme.6.9 ile değiştirilebilir [2]

[12] Önerme 6.9. μ, G grubun bir fuzzy alt grubu, $t\in[0,1]$ olsun. A, G nin alt grubu (normal) öyleki $[e]_\mu\subseteq A$ ise $\mu_{t\_}\ (=\underline{U}(\mu,t,A))$, G nin alt grubu(normal) dır.

μ, R nin bir fuzzy ideali ve $(\underline{U}(\mu,t,A),\overline{U}(\mu,t,A))$, (R,μ,t) yaklaşım uzayında bir rough küme olsun.

$(\underline{U}(\mu,t,A),\overline{U}(\mu,t,A))$ bir rough idealdır :$\Leftrightarrow$ $\underline{U}(\mu,t,A)$, $\overline{U}(\mu,t,A)$ R nin idealleridir [2].

Sonuç 4.1.16. μ, R nin bir fuzzy ideali , $t\in[0,1]$ olsun.Bu takdirde;

A R nin bir ideali ise $(\underline{U}(\mu,t,A),\overline{U}(\mu,t,A))$ R nin rough idealidir [2].

İspat. Önerme 4.1.12 ve Önerme 4.1.14 den açıktır.

Önerme 4.1.17. $\{I_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ R nin boştan farklı alt rough ideallerin kümesi olsun. Bu takdirde:

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \neq \varnothing \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \text{ R nin alt rough idealidir.}$$

İspat. $\underline{U}(\mu, t, A\cap B) = \underline{U}(\mu, t, A) \cap \underline{U}(\mu, t, B)$

Önerme 4.1.18. Üsteki ifade üst rough ideal için genelde doğru değildir.

Örnek 4.1.19. $R = \mathbb{Z}_6$ olsun. $\mu : \mathbb{Z}_6 \to [0,1]$ fonksiyonu,

$\mu(0) = t_0, \mu(1) = \mu(2) = \mu(4) = \mu(5) = t_1, \mu(3) = t_2$, $t_i \in [0,1], i = 0,1,2$ ve $t_1 < t_2 < t_0$ olacak şekilde tanımlasın.

$U(\mu, t_2) = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(5,2),(2,5),(1,4),(4,1),(0,3),(3,0)\}$

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,1,5,3\}$ alalım.

$\overline{U}(\mu, t_2, A\cap B) = \{0,1,3,4\}$, $\overline{U}(\mu, t_2, A) = \mathbb{Z}_6$, $\overline{U}(\mu, t_2, B) = \mathbb{Z}_6$

A ve B üst rough ideal olmasına rağmen $A\cap B$ üst rough ideal değildir. Gerçekten;

$4 \in \overline{U}(\mu, t_2, A\cap B)$, $5 \in \mathbb{Z}_6$ olmasına rağmen $4.5 = 20 \equiv 2 \pmod 6$, $2 \notin \overline{U}(\mu, t_2, A\cap B)$ dir.

Önerme 4.1.20. $\{I_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ R nin boştan farklı üst rough ideallerin bir kümesi olmak üzere;

$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$, $(\alpha \neq \beta \Rightarrow I_\alpha \subseteq I_\beta \vee I_\beta \subseteq I_\alpha)$

ifadesi sağlansın. Bu takdirde; $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ R nin üst rough idealdır.

İspat. $a, b \in \overline{U}(\mu, t, \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha)$ keyfi verilsin.

$$\overline{U}(\mu, t, \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{U}(\mu, t, I_\alpha)$$

olduğunu biliyoruz.

$$a,b \in \overline{U}(\mu,t,\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha) \Rightarrow \exists \alpha,\beta \in \Lambda \ni a \in \overline{U}(\mu,t,I_\alpha) \wedge b \in \overline{U}(\mu,t,I_\beta)$$

i) $\alpha = \beta$ olsun. $b,a \in \overline{U}(\mu,t,I_\alpha) \Rightarrow a-b \in \overline{U}(\mu,t,I_\alpha) \Rightarrow a-b \in \overline{U}(\mu,t,\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha)$

2i) $\alpha \neq \beta$ olsun.

Hipotezden;

$$I_\alpha \subseteq I_\beta \Rightarrow \overline{U}(\mu,t,I_\alpha) \subseteq \overline{U}(\mu,t,I_\beta) \Rightarrow a-b \in \overline{U}(\mu,t,I_\beta)$$

$$\Rightarrow a-b \in \overline{U}(\mu,t,\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha)$$

$r \in R$ keyfi verilsin.

$$ra \in \overline{U}(\mu,t,I_\alpha) \Rightarrow ra \in \overline{U}(\mu,t,\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha)$$

$$ar \in \overline{U}(\mu,t,I_\alpha) \Rightarrow ar \in \overline{U}(\mu,t,\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha)$$

Önerme 4.1.21. Rough ideallerin herhangi sayıda arakesiti rough ideal olmayabilir.

İspat. Gerçekten;

$$U(\mu,t,A) \bigcap U(\mu,t,B) = \left(\underline{U}(\mu,t,A) \cap \underline{U}(\mu,t,B), \overline{U}(\mu,t,A) \cap \overline{U}(\mu,t,B)\right)$$

olur.

Önerme 4.1.22. μ, λ R nin iki fuzzy ideali öyleki $\lambda \subseteq \mu$ ve $t \in [0,1]$ olsun. $\varnothing \neq A \subseteq R$ olmak üzere;

i. $\overline{U}(\lambda,t,A) \subseteq \overline{U}(\mu,t,A)$

ii. $\underline{U}(\mu,t,A) \subseteq \underline{U}(\lambda,t,A)$

koşulları sağlanır [2].

İspat. **i)** $x \in \overline{U}(\lambda,t,A)$ keyfi verilsin.

$$x \in \overline{U}(\lambda,t,A) \Rightarrow [x]_{(\lambda,t)} \cap A \neq \varnothing$$

Lemma.3.3.7 dan $[x]_{(\lambda,t)} \subseteq [x]_{(\mu,t)}$ olduğundan $[x]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing$ olur. Buradan $x \in \overline{U}(\mu,t,A)$ bulunur.

ii) $x \in \underline{U}(\mu,t,A)$ keyfi verilsin.

$$x \in \underline{U}(\mu,t,A) \Rightarrow [x]_{(\mu,t)} \subseteq A$$
$$\Rightarrow [x]_{(\lambda,t)} \subseteq A \text{ (lemma.3.3.7)}$$
$$\Rightarrow x \in \underline{U}(\lambda,t,A)$$

Lemma 4.1.23. μ,λ R nin iki fuzzy ideali, $t \in [0,1]$ ve $\varnothing \neq X \subseteq R$, $U(\lambda,t) \subseteq U(\mu,t)$ olmak üzere;

i. $\overline{U}(\lambda,t,X) \subseteq \overline{U}(\mu,t,X)$

ii. $\underline{U}(\mu,t,X) \subseteq \underline{U}(\lambda,t,X)$

koşulları sağlanır [2].

İspat. i) $x \in \overline{U}(\lambda,t,X)$ keyfi verilsin.

$$x \in \overline{U}(\lambda,t,X) \Rightarrow [x]_{(\lambda,t)} \cap X \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow \exists a \in [x]_{(\lambda,t)} \cap X$$
$$\Rightarrow (a,x) \in U(\lambda,t)$$
$$\Rightarrow (a,x) \in U(\mu,t)$$
$$\Rightarrow a \in [x]_{(\mu,t)} \cap X$$
$$\Rightarrow x \in \overline{U}(\mu,t,X)$$

ii) $x \in \underline{U}(\mu,t,X)$ keyfi verilsin.

$$x \in \underline{U}(\mu,t,X) \Rightarrow [x]_{(\mu,t)} \subseteq X$$
$$\Rightarrow [x]_{(\lambda,t)} \subseteq X \ ([x]_{(\lambda,t)} \subseteq [x]_{(\mu,t)})$$
$$\Rightarrow x \in \underline{U}(\lambda,t,X)$$

Önerme 4.1.24. μ,λ R nin iki fuzzy ideali, $t \in [0,1]$ ve $\varnothing \neq X \subseteq R$ olsun. Bu takdirde;

1. $\overline{U}(\mu\circ\lambda, t, X) \subseteq \overline{U}(\mu+\lambda, t, X)$

2. $\underline{U}(\mu+\lambda, t, X) \subseteq \underline{U}(\mu\circ\lambda, t, X)$

koşulları sağlanır [2].

İspat. lemma 3.3.8 ve 4.1.23 den ispat edilir.

Önerme 4.1.25. μ, λ R nin iki fuzzy idealleri öyleki $\mathrm{Im}\mu, \mathrm{Im}\lambda$ sonlu , $t \in [0,1]$ ve $\varnothing \neq X \subseteq R$ olsun. Bu takdirde;

i. $\overline{U}(\mu\circ\lambda, t, X) = \overline{U}(\mu+\lambda, t, X)$

ii. $\underline{U}(\mu+\lambda, t, X) = \underline{U}(\mu\circ\lambda, t, X)$

koşulları sağlanır [2].

İspat. Lemma 3.3.9 den açıktır.

$\varnothing \neq A, B \subseteq R$ olmak üzere; A.B kümesi

$$A.B = \{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n : n \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B\}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Önerme 4.1.26. μ, λ R nin iki fuzzy idealleri, $t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde;

A, R nin (alt-halka) idealidir. $\Rightarrow$ $\overline{U}(\mu, t, A).\overline{U}(\lambda, t, A) \subseteq \overline{U}(\mu\circ\lambda, t, A)$ [2].

İspat. $z \in \overline{U}(\mu, t, A).\overline{U}(\lambda, t, A)$ keyfi verilsin.

$$z \in \overline{U}(\mu, t, A).\overline{U}(\lambda, t, A) \Rightarrow z = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \text{ , } \exists a_i, b_i \ni a_i \in \overline{U}(\mu, t, A) \wedge b_i \in \overline{U}(\lambda, t, A)$$

$$\Rightarrow [a_i]_{(\mu,t)} \cap A \neq \varnothing \wedge [b_i]_{(\lambda,t)} \cap A \neq \varnothing \quad i=1,2,..,n$$

$$\Rightarrow \exists x_i, y_i \in R \ni x_i \in [a_i]_{(\mu,t)} \cap A \wedge y_i \in [b_i]_{(\lambda,t)} \cap A \quad i=1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow (x_i, a_i) \in U(\mu, t) \wedge (y_i, b_i) \in U(\lambda, t)$$

$$\Rightarrow \mu(x_i - a_i) \geq t \wedge \lambda(y_i - b_i) \geq t$$

$$\Rightarrow \mu(x_ib_i - a_ib_i) = \mu((x_i - a_i)b_i) \geq \max\{\mu(x_i - a_i), \mu(b_i)\}$$

$$\geq \mu(x_i - a_i) \geq t$$

$$\lambda(x_i y_i - x_i b_i) = \lambda(x_i(y_i - b_i)) \geq \max\{\lambda(y_i - b_i), \lambda(x_i)\}$$

$$\geq \lambda(y_i - b_i) \geq t$$

$$\Rightarrow (x_i b_i, a_i b_i) \in U(\mu, t) \wedge (x_i y_i, x_i b_i) \in U(\lambda, t)$$

$$\Rightarrow (x_i y_i, a_i b_i) \in U(\mu o \lambda, t) \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i) \in U(\mu o \lambda, t)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in [\sum_{i=1}^{n} a_i b_i]_{(\mu o \lambda, t)}$$

$$\Rightarrow [\sum_{i=1}^{n} a_i b_i]_{(\mu o \lambda, t)} \cap A \neq \varnothing \text{ (A , Rnin ideali)}$$

$$\Rightarrow z = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \overline{U}(\mu o \lambda, t, A)$$

Sonuç 4.1.27. μ, λ R nin iki fuzzy idealleri, $t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde;

A, R nin (alt-halka) idealidir. $\Rightarrow$ $\overline{U}(\mu, t, A).\overline{U}(\lambda, t, A) \subseteq \overline{U}(\mu + \lambda, t, A)$ dir. [2].

Önerme.4.1.26 nın tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.1.28. $R = \mathbb{Z}_{15}$ olmak üzere;

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \text{ ve } \lambda(x) = \begin{cases} 1, & x = 0,5,10 \\ 0, & x \neq 0,5,10 \end{cases}$$

A={0,3,6,9,12} olsun.

$\overline{U}(\mu, \frac{1}{2}, A) = A$, $\overline{U}(\lambda, \frac{1}{2}, A) = \mathbb{Z}_{15}$

$\overline{U}(\mu, \frac{1}{2}, A).\overline{U}(\lambda, \frac{1}{2}, A) = A.\mathbb{Z}_{15} = A$, $U(\mu o \lambda, \frac{1}{2}) = U(\lambda, \frac{1}{2})$ ve buradan $\overline{U}(\mu o \lambda, \frac{1}{2}, A) = \mathbb{Z}_{15}$ elde edilir.

Bu ise $\overline{U}(\mu, t, A).\overline{U}(\lambda, t, A) = \overline{U}(\mu o \lambda, t, A)$ genelde doğru olmadığını gösterir.

Önerme 4.1.29. μ, λ R nin iki fuzzy idealleri, $t \in [0,1]$ olsun.

A , (R,+) nın altgrubudur. $\Rightarrow$ $\overline{U}(\mu, t, A) + \overline{U}(\lambda, t, A) = \overline{U}(\mu o \lambda, t, A)$ dır [2].

İspat. $z \in \overline{U}(\mu, t, A) + \overline{U}(\lambda, t, A)$ keyfi verilsin.

$$z \in \overline{U}(\mu,t,A)+\overline{U}(\lambda,t,A) \Rightarrow \exists a,b \ni a \in \overline{U}(\mu,t,A) \wedge b \in \overline{U}(\lambda,t,A) \;\; z=a+b$$

$$\Rightarrow [a]_{(\mu,t)} \cap A \neq \emptyset \;\wedge [b]_{(\lambda,t)} \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists x,y \in R \ni x \in [a]_{(\mu,t)} \cap A \;\wedge\; y \in [b]_{(\lambda,t)} \cap A$$

$$\Rightarrow (x,a) \in U(\mu,t) \wedge (y,b) \in U(\lambda,t)$$

$$\Rightarrow (x-a,0) \in U(\mu,t) \wedge (0,b-y) \in U(\lambda,t)$$

$$\Rightarrow (x-a,b-y) \in U(\mu o \lambda,t) \wedge (x+y,a+b) \in U(\mu o \lambda,t)$$

$$\Rightarrow x+y \in [a+b]_{(\mu o \lambda,t)}$$

$$\Rightarrow x+y \in [z]_{(\mu o \lambda,t)} \cap A \;\; \text{(A altgrup)}$$

$$\Rightarrow z \in \overline{U}(\mu o \lambda,t,A)$$

$$\Rightarrow \overline{U}(\mu,t,A)+\overline{U}(\lambda,t,A) \subseteq \overline{U}(\mu o \lambda,t,A)$$

Tersine; $x \in \overline{U}(\mu o \lambda,t,A)$ keyfi verilsin.

$$x \in \overline{U}(\mu o \lambda,t,A) \Rightarrow [x]_{(\mu o \lambda,t)} \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists a \in R \ni, a \in [x]_{(\mu o \lambda,t)} \cap A$$

$$\Rightarrow (a,x) \in U(\mu o \lambda,t)$$

$$\Rightarrow \exists y \in R \ni (a,y) \in U(\mu,t) \wedge (y,x) \in U(\lambda,t)$$

$$\Rightarrow \exists a \in R \ni a \in [y]_{(\mu,t)} \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow y \in \overline{U}(\mu,t,A) \wedge (y,x) \in U(\lambda,t)\;,\; (x-y,0) \in U(\lambda,t) \vee 0 \in [x-y]_{(\lambda,t)}$$

$$\Rightarrow 0 \in [x-y]_{(\lambda,t)} \cap A$$

$$\Rightarrow x-y \in \overline{U}(\lambda,t,A)$$

$$\Rightarrow x = y+(x-y) \in \overline{U}(\mu,t,A)+\overline{U}(\lambda,t,A)$$

$$\Rightarrow \overline{U}(\mu,t,A)+\overline{U}(\lambda,t,A) \supseteq \overline{U}(\mu o \lambda,t,A)$$

4.2. BÖLÜM HALKASINDA ROUGH KÜMELER

A, R nin bir fuzzy alt kümesi olmak üzere;

$$\underline{U}(\mu,t,A)(x) = \bigwedge_{y \in [x]_{(\mu,t)}} A(y)$$

$$\overline{U}(\mu, t, A)(x) = \bigvee_{y \in [x]_{(\mu,t)}} A(y)$$

kümelerine sırasıyla A nın $U(\mu, t)$ alt ve üst yaklaşımları adı verilir.

A, Rnin bir fuzzy alt kümesi ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere,

$$A_\lambda = \{x \in R : A(x) \geq \lambda\}$$

$$A_\lambda^s = \{x \in R : A(x) > \lambda\}$$

kümelerine sırasıyla λ seviye ve kesin adı verilir.

$A \subseteq S$ yarı grubunun bir fuzzy alt kümesine fuzzy ideal denir:$\Leftrightarrow \forall x, y \in S,\ A(xy) \geq A(x) \vee A(y)$

Teorem 4.2.1. A, S yarı grubunun fuzzy alt kümesi olsun. A, S nin bir fuzzy ideali (fuzzy asal ideali)$\Leftrightarrow \forall \lambda \in [0,1], A_\lambda, A_\lambda^s (\neq \emptyset)$ S nin ideali(asal) dir.

R bir halka, $U(\mu, t)$ R de kongruans bağıntısı ve $A \subseteq R$ olmak üzere,

$$\underline{U}(\mu, t, A)/U(\mu, t) := \{X \in R/U(\mu, t) : X \subseteq A\}$$

$$\overline{U}(\mu, t, A)/U(\mu, t) := \{X \in R/U(\mu, t) : X \cap A \neq \emptyset\}$$

Lemma 4.2.2. A, R nin fuzzy alt kümesi ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere,

1) $(\underline{U}(\mu, t, A))_\lambda = \underline{U}(\mu, t, A_\lambda)$

2) $(\overline{U}(\mu, t, A))_\lambda^s = \overline{U}(\mu, t, A_\lambda^s)$

koşulları sağlanır.

İspat: 1) $x \in (\underline{U}(\mu, t, A))_\lambda \Leftrightarrow \underline{U}(\mu, t, A)(x) \geq \lambda$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{y \in [x]_{(\mu,t)}} A(y) \geq \lambda$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in [x]_{(\mu,t)},\ A(x) \geq \lambda$$

$$\Leftrightarrow [x]_{(\mu,t)} \subseteq A_\lambda$$

$$\Leftrightarrow x \in \underline{U}(\mu, t, A_\lambda)$$

2) $x \in (\overline{U}(\mu, t, A))_\lambda^s \Leftrightarrow \overline{U}(\mu, t, A)(x) > \lambda$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{y\in[x]_{(\mu,t)}} A(y) > \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in [x]_{(\mu,t)}, A(x) > \lambda$$

$$\Leftrightarrow [x]_{(\mu,t)} \cap A_\lambda^s \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \bar{U}(\mu,t,A_\lambda^s)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{U}(\mu,t,A_\lambda^s)$$

elde edilir.

4.3. HOMORFİ PROBLEMİ

Lemma 4.3.1. R, S iki halka ve $A \subseteq R$, $f : R \to S$ ye epimorfi, $U(\mu,t)$ S de bir kongruans bağıntısı olmak üzere;

(i) $\rho := \{(x_1,x_2) \in RxR \mid (f(x_1), f(x_2)) \in U(\mu,t)\}$ R de kongruans bağıntısıdır.

(ii) $f((\bar{U},\rho,A)) = \bar{U}(\mu,t,f(A))$

(iii) $f((\underline{U},\rho,A)) \subseteq \underline{U}(\mu,t,f(A))$ f, tek değerli ise $f((\underline{U},\rho,A)) = \underline{U}(\mu,t,f(A))$ dir.

koşulları sağlanır.

İspat. **(i).** $f(1_R) = 1_S \Rightarrow (1_R, 1_S) \in U(\mu,t) \Rightarrow \rho \neq \emptyset$.

$a \in R$ keyfi verilsin. $(f(a), f(a)) \in U(\mu,t) \Rightarrow (a,a) \in \rho$ dir. $(a,b) \in \rho$ keyfi verilsin. Bu durumda;

$$(a,b) \in \rho \Rightarrow (f(a), f(b)) \in U(\mu,t) \Rightarrow (f(b), f(a)) \in U(\mu,t) \Rightarrow (b,a) \in \rho$$

elde edilir. $(a,b),(b,c) \in \rho$ keyfi verilsin.

$$(a,b),(b,c) \in \rho \Rightarrow (f(a), f(b)) \in U(\mu,t) \wedge (f(b), f(c)) \in U(\mu,t) \Rightarrow (f(a), f(c)) \in U(\mu,t)$$

$$\Rightarrow (a,c) \in \rho$$

$x \in R$ keyfi verilsin.

$$(a,b) \in \rho \Rightarrow (f(a), f(b)) \in U(\mu,t)$$

$$f(b+x)=f(b)+f(x)$$

$$f(a+x)=f(a)+f(x)$$

$$\begin{aligned}
\big(f(a),f(b)\big)\in U(\mu,t) &\Rightarrow \big(f(a)+f(x),f(b)+f(x)\big)\in U(\mu,t)\\
&\Rightarrow \big(f(a+x),f(b+x)\big)\in U(\mu,t)\\
&\Rightarrow (a+x,b+x)\in\rho
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $(x+a,x+b)\in\rho$ elde edilir.

(ii) $y\in f\big((\overline{U},\rho,A)\big)$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned}
y\in f\big((\overline{U},\rho,A)\big) &\Rightarrow \exists x\in(\overline{U},\rho,A)\ni f(x)=y\\
&\Rightarrow [x]_\rho\cap A\neq\varnothing\wedge f(x)=y\\
&\Rightarrow \exists z\in[x]_\rho\cap A\wedge f(x)=y\\
&\Rightarrow f(z)\in f(A)\wedge f(x)=y\\
&\Rightarrow f(z)\in[f(x)]_{(\mu,t)}\\
&\Rightarrow [f(x)]_{(\mu,t)}\cap f(A)\neq\varnothing\\
&\Rightarrow y=f(x)\in\overline{U}\big(\mu,t,f(A)\big)
\end{aligned}$$

Tersine, $y\in\overline{U}\big(\mu,t,f(A)\big)$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned}
y\in\overline{U}\big(\mu,t,f(A)\big) &\Rightarrow \exists x\in R\ni f(x)=y\\
&\Rightarrow [f(x)]_{(\mu,t)}\cap f(A)\neq\varnothing\\
&\Rightarrow \exists z\in A\ni f(z)\in f(A)\ \wedge\ f(z)\in[f(x)]_{(\mu,t)}\\
&\Rightarrow z\in[x]_\rho\Rightarrow[x]_\rho\cap A\neq\varnothing\Rightarrow x\in(\overline{U},\rho,A)\\
&\Rightarrow y\in f\big((\overline{U},\rho,A)\big)
\end{aligned}$$

(iii). $y\in f\big((\underline{U},\rho,A)\big)$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned}
y\in f\big((\underline{U},\rho,A)\big) &\Rightarrow \exists x\in(\underline{U},\rho,A)\ni f(x)=y\Rightarrow[x]_\rho\subseteq A\\
&\Rightarrow z\in[f(x)]_{(\mu,t)}\Rightarrow\exists a\in R\ni f(a)=z\wedge f(a)\in[f(x)]_{(\mu,t)}\\
&\Rightarrow \exists a\in[x]_\rho\subseteq A\Rightarrow z=f(a)\in f(A)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [f(x)]_{(\mu,t)} \subseteq f(A)$$

$$\Rightarrow y \in \underline{U}(\mu,t,f(A))$$

$$\Rightarrow f((\underline{U},\rho,A)) \subseteq \underline{U}(\mu,t,f(A))$$

f, tek değerli olsun.

$y \in \underline{U}(\mu,t,f(A)) \Rightarrow \exists x \in R \ni f(x) = y \wedge [f(x)]_{(\mu,t)} \subseteq f(A)$

$$z \in [x]_\rho \Rightarrow f(z) \in [f(x)]_{(\mu,t)} \subseteq f(A) \Rightarrow [x]_\rho \subseteq A \Rightarrow z \in (\underline{U},\rho,A)$$

$$\Rightarrow f(x) \in f((\underline{U},\rho,A)$$

$$\Rightarrow f((\underline{U},\rho,A)) \supseteq \underline{U}(\mu,t,f(A)) \Rightarrow f((\underline{U},\rho,A)) = \underline{U}(\mu,t,f(A))$$

Teorem 4.3.2. R, S iki halka ve $f: R \to S$ ye epimorfi, $U(\mu,t)$ S de bir kongruansı ve $\rho := \{(x_1, x_2) \in RxR \mid (f(x_1), f(x_2)) \in U(\mu,t)\}$ olsun. Bu takdirde;

$$(\bar{U},\rho,A) \text{ R nin idealidir.} \Leftrightarrow \bar{U}(\mu,t,f(A)) \text{ S nin idealidir.}$$

İspat. "$\Rightarrow$" Lemma 4.3.1'den $f((\bar{U},\rho,A)) = \bar{U}(\mu,t,f(A))$ dir. $a\ ,\ b \in \bar{U}(\mu,t,f(A))$ keyfi verilsin.

$$a\ ,\ b \in \bar{U}(\mu,t,f(A)) \Rightarrow a,b \in f((\bar{U},\rho,A))$$

$$\Rightarrow \exists x,t \in (\bar{U},\rho,A) \ni a = f(x), b = f(t)$$

$$\Rightarrow a - b = f(x) - f(t) = f(x-t) \Rightarrow a - b \in f((\bar{U},\rho,A))$$

$r \in S$ keyfi verilsin.

$$ra = r.f(x) = f(rx) \Rightarrow ra \in f((\bar{U},\rho,A))$$

Benzer şekilde $ar \in f((\bar{U},\rho,A))$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" $a,b \in (\bar{U},\rho,A)$ keyfi verilsin.

$$f(a), f(b) \in f((\bar{U},\rho,A)) \Rightarrow f(a), f(b) \in \bar{U}(\mu,t,f(A))$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = f(a-b) \in \bar{U}(\mu,t,f(A))$$

$$\Rightarrow f(a-b) \in f\left((\overline{U}, \rho, A)\right) \Rightarrow a-b \in \left(\overline{U}, \rho, A\right)$$

$r \in R$ keyfi verilsin.

$$r.f(a) = f(ra) \in \overline{U}\left(\mu, t, f(A)\right) \Rightarrow ra \in \left(\overline{U}, \rho, A\right)$$

Benzer şekilde $ar \in \left(\overline{U}, \rho, A\right)$ elde edilir.

Teorem 4.3.3. R, S iki halka ve $f: R \to S$ ye izomorfi, $U(\mu, t)$, S de bir kongruansı ve $\rho := \left\{(x_1, x_2) \in RxR \mid \left(f(x_1), f(x_2)\right) \in U(\mu, t)\right\}$ olsun. Bu takdirde;

$$\left(\underline{U}, \rho, A\right) \text{ R'nin idealidir.} \Leftrightarrow \underline{U}\left(\mu, t, f(A)\right) \text{ S'nin idealidir.}$$

İspat. Lemma.4.3.1 den $f\left((\underline{U}, \rho, A)\right) = \underline{U}\left(\mu, t, f(A)\right)$ olduğundan teorem 4.3.2 ispatına benzer şekilde ispat yapılır.

4.4. ROUGH ÇARPIMSAL KÜME

R bir halka , $\varnothing \neq S \subseteq R$ olmak üzere;

$$a, b \in S \Rightarrow ab \in S$$

koşullu sağlanıyorsa, S ye çarpımsal küme denir. R değişmeli bir halka, $S \subseteq R$, R nin çarpımsal alt kümesi olsun. RxS üzerinde tanımlanan,

$$(r,s) \sim (r',s') \Leftrightarrow \exists y \in S \ni y(rs' - r's) = 0$$

" ~ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $(r,s) \in RxS$ elemanın denklik sınıfı $\overline{(r,s)}_S = \frac{r}{s}$ ile gösterilir. Tüm denklik sınıfların kümesini $S^{-1}R := \left\{\frac{r}{s} : r \in R, s \in S\right\}$ şeklinde göstereceğiz. $X \subseteq RxS$ olmak üzere ;

$$\underline{S}(X) := \left\{(r,s) \in RxS : \overline{(r,s)} \subseteq X\right\}$$

$$\overline{S}(X) := \left\{(r,s) \in RxS : \overline{(r,s)} \cap X \neq \varnothing\right\}$$

kümeleri sırasıyla $(RxS,\sim)$ yaklaşım uzayında X in alt ve üst rough çarpımsal yaklaşımı adı verilir.

Önerme 4.4.1. $(RxS,\sim)$ herhangi bir yaklaşım uzayı ve her $A,B \subseteq RXS$, aşağıdakiler sağlanır.

1. $\underline{S}(A) \subseteq A \subseteq \overline{S}(A)$

2. $\underline{S}(\varnothing) = \varnothing = \overline{S}(\varnothing)$

3. $\underline{S}(RxS) = RxS = \overline{S}(RxS)$

4. $A \subseteq B \Rightarrow \underline{S}(A) \subseteq \underline{S}(B) \wedge \overline{S}(A) \subseteq \overline{S}(B)$

5. $\underline{S}(\underline{S}(A)) = \underline{S}(A)$

6. $\overline{S}(\overline{S}(A)) = \overline{S}(A)$

7. $\overline{S}(\underline{S}(A)) = \underline{S}(A)$

8. $\underline{S}(\overline{S}(A)) = \overline{S}(A)$

9. $\underline{S}(A) = \left(\overline{S}(A^c)\right)^c$

10. $\overline{S}(A) = \left(\underline{S}(A^c)\right)^c$

11. $\underline{S}(A \cap B) = \underline{S}(A) \cap \underline{S}(B)$

12. $\overline{S}(A \cap B) \subseteq \overline{S}(A) \cap \overline{S}(B)$

13. $\underline{S}(A \cup B) \supseteq \underline{S}(A) \cup \underline{S}(B)$

14. $\overline{S}(A \cup B) = \overline{S}(A) \cup \overline{S}(B)$

15. $\forall (r,s) \in RxS,\ \underline{S}\left(\overline{(r,s)_S}\right) = \overline{S}(\overline{(r,s)_S})$

16. $\overline{S}(A) \setminus \overline{S}(B) \subseteq \overline{S}(A \setminus B)$

17. $\underline{S}(A) \cap \overline{S}(B) \subseteq \overline{S}(A \cap B)$

İspat. 1) $(r,s) \in \underline{S}(A)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{S}(A) \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq A \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \cap A \neq \varnothing \Rightarrow y \in \overline{S}(A)$$

2) Tanımdan açıktır.

3) Tanımdan açıktır

4) $A \subseteq B$ olmak üzere, $(r,s) \in \underline{S}(A)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{S}(A) \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq A \subseteq B \Rightarrow y \in \underline{S}(B)$$

$(r,s) \in \overline{S}(A)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \overline{S}(A) \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \cap B \neq \varnothing \Rightarrow (r,s) \in \overline{S}(B)$$

5) $(r,s) \in \underline{S}(\underline{S}(A))$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{S}(\underline{S}(A)) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq \underline{S}(A) \Leftrightarrow (r,s) \in \underline{S}(A)$$

6) $(r,s) \in \overline{S}(\overline{S}(A))$

$$(r,s) \in \overline{S}(\overline{S}(A)) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \cap \overline{S}(A) \neq \varnothing \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow (r,s) \in \overline{S}(A)$$

7) $(r,s) \in \overline{S}(\underline{S}(A))$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \overline{S}(\underline{S}(A)) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \cap \underline{S}(A) \neq \varnothing \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq A \Leftrightarrow (r,s) \in \underline{S}(A)$$

8) $(r,s) \in \underline{S}(\overline{S}(A))$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{S}(\overline{S}(A)) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq \overline{S}(A) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow (r,s) \in \overline{S}(A)$$

9) $(r,s) \in \underline{S}(A)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{S}(A) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq A \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \cap A^c = \varnothing \Leftrightarrow (r,s) \notin \overline{S}(A^c) \Leftrightarrow (r,s) \in (\overline{S}(A^c))^c$$

10) $(r,s) \in \overline{S}(A)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \overline{S}(A) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \not\subseteq A^c \Leftrightarrow (r,s) \notin \underline{S}(A^c) \Leftrightarrow (r,s) \in (\underline{S}(A^c))^c$$

11) $(r,s) \in \underline{S}(A \cap B)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{S}(A \cap B) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq (A \cap B) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq A \wedge \overline{(r,s)}_S \subseteq B \Leftrightarrow (r,s) \in \underline{S}(A) \wedge (r,s) \in \underline{S}(B)$$

12) $(r,s) \in \overline{S}(A \cap B)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \overline{S}(A \cap B) \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \cap (A \cap B) \neq \varnothing \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \cap A \neq \varnothing \wedge \overline{(r,s)}_S \cap B \neq \varnothing \Rightarrow (r,s) \in \overline{S}(A) \cap \overline{S}(B)$$

13) $(r,s) \in \underline{S}(A) \cup \underline{S}(B)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{S}(A) \cup \underline{S}(B) \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq A \vee \overline{(r,s)}_S \subseteq B \Rightarrow \overline{(r,s)}_S \subseteq (A \cup B) \Rightarrow (r,s) \in \underline{S}(A \cup B)$$

14) $(r,s) \in \overline{S}(A \cup B)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \overline{S}(A \cup B) \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \cap (A \cup B) \neq \varnothing \Leftrightarrow \overline{(r,s)}_S \cap A \neq \varnothing \vee \overline{(r,s)}_S \cap B \neq \varnothing \Leftrightarrow (r,s) \in \overline{S}(A) \cup \overline{S}(B)$$

15) Tanımdan açıktır.

16) $(r,s)\in \overline{S}(A)\setminus \overline{S}(B)$ keyfi verilsin.

$$(r,s)\in \overline{S}(A)\setminus \overline{S}(B)\Rightarrow (r,s)\in \overline{S}(A)\wedge (r,s)\notin \overline{S}(B)$$

$$(r,s)\in \overline{S}(A)\Rightarrow \overline{(r,s)_S}\cap A\neq \varnothing$$

$$(r,s)\notin \overline{S}(B)\Rightarrow \overline{(r,s)_S}\cap B=\varnothing$$

$$\Rightarrow \overline{(r,s)_S}\cap A\neq \varnothing \ \wedge \ \overline{(r,s)_S}\subseteq B^c$$

$$\Rightarrow \overline{(r,s)_S}\cap (A\cap B^c)=\overline{(r,s)_S}\cap A\neq \varnothing$$

$$\Rightarrow (r,s)\in \overline{S}(A\setminus B)$$

17) $(r,s)\in \underline{S}(A)\cap \overline{S}(B)$ keyfi verilsin.

$$(r,s)\in \underline{S}(A)\cap \overline{S}(B)\Rightarrow (r,s)\in \underline{S}(A)\wedge (r,s)\in \overline{S}(B)$$

$$(r,s)\in \underline{S}(A)\Rightarrow \overline{(r,s)_S}\subseteq A$$

$$(r,s)\in \overline{S}(B)\Rightarrow \overline{(r,s)_S}\cap B\neq \varnothing$$

$$\overline{(r,s)_S}\cap (A\cap B)=\overline{(r,s)_S}\cap B\neq \varnothing \Rightarrow (r,s)\in \overline{S}(A\cap B)$$

Önerme 4.4.1 in 12), 13), 16), 17) koşullarının tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.4.2. $R=\mathbb{Z}_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ olmak üzere, $S=\{\overline{1},\overline{2}\}$ kümesi aşağıdaki tabloya göre çarpımsal kümedir.

.	1	2
1	1	2
2	2	1

$$S^{-1}R=\left\{\frac{r}{s}\ :\ r\in R, s\in S\right\}=\left\{\frac{r}{s}\ :\ r,s\in \mathbb{Z}_3, s\neq 0\right\}$$

$$\frac{0}{1}=\frac{0}{2}\Rightarrow \overline{0}=\left\{\frac{0}{1},\frac{0}{2}\right\},\ 2=\frac{2}{1}\Rightarrow \overline{2}=\left\{\frac{2}{1}\right\},\quad \frac{1}{2}=\left\{\frac{1}{2}\right\},\quad \frac{1}{1}=\frac{2}{2}\Rightarrow \overline{1}=\left\{\frac{1}{1},\frac{2}{2}\right\}$$

$RxS=\{(0,1),\ (0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, $A=\{(0,1),(0,2)\}$, $B=\{(1,1),(2,2)\}$

olmak üzere,

$$\overline{S}(A)=A,\ \overline{S}(B)=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}, \overline{S}(A\cap B)=\varnothing$$

olur. Buradan 12) nin tersinin doğru olmadığı görülür.

$C=\{(0,1)\}$, $D=\{(0,2)\}$ olmak üzere; $\underline{S}(C)=\varnothing,\ \underline{S}(D)=\varnothing,\ \underline{S}(C\cup D)=\{(0,1),(0,2)\}$

dir. Bu 13) nin tersinin doğru olmadığı gösterir.

Örnek 4.4.3. $R=\mathbb{Z}_5=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4}\}$ olmak üzere, $S=\{\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ kümesi çarpımsal kümedir.

$$S^{-1}R=\left\{\frac{r}{s}\ :\ r\in R, s\in S\right\}=\left\{\frac{r}{s}\ :\ r,s\in\mathbb{Z}_5, s\neq 0\right\}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4}\right\},\ \frac{1}{3}=\left\{\frac{1}{3}\right\},\ \frac{1}{4}=\left\{\frac{1}{4}\right\},\ \frac{2}{1}=\frac{4}{2}\Rightarrow\overline{2}=\frac{2}{1}=\left\{\frac{2}{1},\frac{4}{2}\right\},\ \frac{2}{3}=\left\{\frac{2}{3}\right\},$$

$$\frac{3}{1}=\overline{3}=\left\{\frac{3}{1}\right\},\ \frac{3}{2}=\left\{\frac{3}{2}\right\},\ \overline{1}=\left\{\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{4}{4}\right\},\ \overline{0}=\left\{\frac{0}{1},\frac{0}{2},\frac{0}{3},\frac{0}{4}\right\},\ \frac{4}{3}=\left\{\frac{4}{3}\right\},\ \frac{4}{1}=4=\{4\}$$

$A=\{(1,4),(2,3)\}$, $B=\{(3,1),(2,3)\}$ olmak üzere;

$\underline{S}(A)=\varnothing,\ \overline{S}(B)=\{(3,1),(2,3)\}, \underline{S}(A)\cap\overline{S}(B)=\varnothing,\ \overline{S}(A\cap B)=\{(2,3)\}$ olacağından 17) nin tersi sağlanmaz.

$A=\{(0,1),(4,2)\}$, $B=\{(2,1)\}$ olmak üzere,

$\overline{S}(A)=\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(4,2),(2,1)\}$, $\overline{S}(B)=\{(4,2),(2,1)\}$,

$\overline{S}(A)\setminus\overline{S}(B)=\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$, $\overline{S}(A\setminus B)=\overline{S}(A)$

olur. Buradan 16) nın tersinin doğru olmadığı görülür.

Lemma 4.4.4. A, B R nin idealleri ve $\varnothing\neq X,\quad X\subseteq RxAB$ olmak üzere;

i. $\underline{A\cap B}(X)\subseteq\underline{AB}(X)$

ii. $\overline{AB}(X)\subseteq\overline{A\cap B}(X)$

koşulları sağlanır.

İspat. A, B R nin idealeri ise AB de R nin ideali ve $AB\subseteq A\cap B$ dir.

Lemma 4.4.5. R bir tamlık bölgesi ve A, B, R nin iki ideali , R=A+B olmak üzere;

i. $\underline{A \cap B}(X) = \underline{AB}(X)$

ii. $\overline{AB}(X) = \overline{A \cap B}(X)$

koşulları sağlanır.

İspat. R bir tamlık bölgesi ve A, B, R nin iki ideali olsun. R=A+B ise $AB = A \cap B$ dir.

Lemma 4.4.6. A, B, R halkasının çarpımsal altkümeleri ve $A \subseteq B \wedge \varnothing \neq X \subseteq RxB$ olsun.

i. $\underline{B}(X) \subseteq \underline{A}(X)$

ii. $\overline{A}(X) \subseteq \overline{B}(X)$

koşulları sağlanır.

İspat. İddia:A, B, R halkasının çarpımsal alt kümeleri ve $A \subseteq B$ olsun.Bu takdirde $\overline{(r,s)_A} \subseteq \overline{(r,s)_B}$ dir.Gerçekten;

$(x,y) \in \overline{(r,s)_A}$ keyfi verilsin.

$$(x,y) \in \overline{(r,s)_A} \Rightarrow \exists z \in A \ni z(xs - ry) = 0$$
$$\Rightarrow \exists z \in B \ni z(xs - ry) = 0$$
$$\Rightarrow (x,y) \in \overline{(r,s)_B}$$

i. $(r,s) \in \underline{B}(X)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{B}(X) \Rightarrow \overline{(r,s)_B} \subseteq X \Rightarrow \overline{(r,s)_A} \subseteq \overline{(r,s)_B} \subseteq X \Rightarrow (r,s) \in \underline{A}(X)$$

ii. $(r,s) \in \overline{A}(X)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \overline{A}(X) \Rightarrow \overline{(r,s)_A} \cap X \neq \varnothing$$
$$\overline{(r,s)_A} \cap X \neq \varnothing \Rightarrow \exists (x,y) \ni (x,y) \in \overline{(r,s)_A} \wedge (x,y) \in X$$
$$\Rightarrow \exists (x,y) \ni (x,y) \in \overline{(r,s)_B} \wedge (x,y) \in X$$

$$\Rightarrow \overline{(r,s)_B} \cap X \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow (r,s) \in \overline{B}(X)$$

Sonuç 4.4.7. A, B, R nin çarpımsal alt kümeleri, $A \subseteq B$ ve $\varnothing \neq X \subseteq Rx(A \cap B)$ olsun.Bu takdirde;

i. $\underline{A}(X) \cap \underline{B}(X) \subseteq \underline{(A \cap B)}(X)$

ii. $\overline{(A \cap B)}(X) \subseteq \overline{A}(X) \cap \overline{B}(X)$

koşulları sağlanır.

İspat. **i.** $(r,s) \in \underline{A}(X) \cap \underline{B}(X)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \underline{A}(X) \cap \underline{B}(X) \Rightarrow (r,s) \in \underline{A}(X) \wedge (r,s) \in \underline{B}(X)$$

$$\Rightarrow \overline{(r,s)_A} \subseteq X \;\wedge\; \overline{(r,s)_B} \subseteq X$$

$$\Rightarrow \overline{(r,s)_{A \cap B}} \subseteq \overline{(r,s)_A} \subseteq X \Rightarrow (r,s) \in \underline{(A \cap B)}(X)$$

ii. $(r,s) \in \overline{(A \cap B)}(X)$ keyfi verilsin.

$$(r,s) \in \overline{(A \cap B)}(X) \Rightarrow \overline{(r,s)_{A \cap B}} \cap X \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow \exists (x,y) \ni (x,y) \in \overline{(r,s)_{A \cap B}} \wedge (x,y) \in X$$

$$\Rightarrow \exists (x,y) \ni (x,y) \in \overline{(r,s)_B} \wedge (x,y) \in \overline{(r,s)_A} \wedge (x,y) \in X$$

$$\Rightarrow \overline{(r,s)_B} \cap X \neq \varnothing \wedge \overline{(r,s)_A} \cap X \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow (r,s) \in \overline{A}(X) \cap \overline{B}(X)$$

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde ele alınan konu ile ilgili sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde,

4.1. Fuzzy İdealler Üzerinde Rough Yaklaşımlar

4.2. Bölüm Halkasında Rough Kümeler

4.3. Homorfi Problemi

4.4. Rough Çarpımsal Küme

Başlıkları altında toplanmıştır.

Bulgular ve Tartışma'da elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

1) Önerme 4.1.1'de (R, μ, t) yaklaşım uzayının özellikleri incelenmiştir.

2) Önerme 4.1.17'de (R, μ, t) yaklaşım uzayında, bir takım alt rough idealerin arakesiti alt rough ideal olduğu elde edildi.

3) Önerme 4.1.18'de (R, μ, t) yaklaşım uzayında, bir takım üst rough idealerin arakesiti üst rough ideal olamayabileceği elde edildi.

4) Önerme 4.1.21'de (R, μ, t) yaklaşım uzayında, bir takım rough idealerin arakesiti rough ideal olamayabileceği elde edildi.

5) Evrensel kümeyi çarpım kümesi alınarak, rough çarpımsal küme incelenmiştir.

5.2.ÖNERİLER

Bundan sonraki aşamada, aşağıdaki soruların cevapları araştırılabilir.

1) $U(\mu, t)$ kongruans bağıntısı "$\forall x, y \in R, \quad [x]_{(\mu,t)}[y]_{(\mu,t)} = [xy]_{(\mu,t)}$" özelliğini sağlar mı?

2) (R, μ, t) yaklaşım uzayı olmak üzere, A R nin bir asal ideali olmak üzere, A alt-üst asal ideal olabilmesi için $U(\mu, t)$ kongruans bağıntısı hangi özelliği sağlanmalıdır.

3) Rough çarpımsal kümenin daha başka özellikleri bulunabilir mi?

KAYNAKLAR

[1] Mordeson, J.N. "Rough sets theory applied to (fuzzy) ideal theory", Fuzzy Sets and System, **121:** 315-324 ,(2001).

[2] Davvaz, B._"Roughness based on fuzzy ideals", _Inform.Sci., **176:** 2417-2437, (2006).

[3] Xiao, Q.M, Zhang, Z.L. "Rough prime ideals and rough fuzzy prime ideals in semigroups", Inform. Sci., **176:** 725-733, (2006).

[4] Davvaz, B., Mahdavipour, M. "Roughness in modules", Inform. Sci., **176 :** 3658-3674, (2006)

[5] Davvaz, B. "Roughness in rings", _Inform. Sci. **164 :**147-163, (2004).

[6] Biswas, R., Nanda, S." Rough groups and rough subgroups", Bull. Polish Acad. Sci. Math. **42:** 251-254, (1994).

[7] Bonikowaski, Z.,"Algebraic structures of rough sets", in:Ziarko, W.P.(Ed.) "Rough Sets Fuzzy Sets", Knowledge Discovery, Springer-Verlag, Berlin, pp.242-247, (1995).

[8] Iwinski, T. "Algebraic approach to rough sets", Bull. Polish Acad. Sci. Math., **35:** 673-683, (1987).

[9] Pomykala, J., Pomykala, J.A "The Stone algebra of rough sets", Bull. Polish Acad. Sci. Math., **36:** 495-508, (1988).

[10] Kuroki, N. "Rough ideals in semigroups", İnform. Sci., **100:** 139-163, (1997).

[11] Kuroki, N., Mordeson, J.N. "Structure of rough sets and rough groups", J.Fuzzy Math., **5 (1):** 183-191, (1997).

[12] Kuroki, N., Wang, P.P. "The lower and upper approximations in a fuzzy group", Inform. Sci., **90:** 203-220, (1996).

[13] Dubois, D., Prade, H. "Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets", Int. J. General Syst., **17(2-3):** 191-209, (1990).

[14] Zhu, W., Wang, Y."Reduction and axiomization of covering generalized rough sets" İnform.Sci., **152:** 217-230, (2003).

[15] Zadeh, L.A. "Fuzzy sets", Inform. Cont., **8:** 338-353, (1965).

[16] Pawlak, Z. "Rough sets", Int.J.Inf.Comp.Sci., **11:** 341-356, (1981).

[17] Pawlak, Z. “Rough Sets-Theoretical Aspects of Reasoning About Data”, Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, (1991).

[18] Qin, K., Pei, Z. “On the topological properties of fuzzy rough sets”, Fuzzy Sets Syst., **151 (3):** 601-613, (2005).

[19] Yao, Y.Y. “Relational interpretation of neighborhood operators and rough set approximation operator, Inform.Sci., **111:**239-259, (1998).

[20] Banerjee, M., Pal, S.K. “Roughness of a fuzzy set”, Inform.Sci.**93 (3-4):** 235-246, (1996).

[21] Chakrabarty, K., Biswas, R., Nanda, S. “Fuzzines in rough sets”, Fuzzy Sets Syst., **110:**247-251, (2000).

[22] Jun, Y.B. “Roughnessof gamma-subsemigroups/ideals iğn gamma-semigroups”, Bull. Korean Math.Soc., **40 (3):**531-536, (2003).

[23] Rosenfeld, A. “Fuzzy groups”, J.Math.Anal.Appl.,**35:**512-517, (1971).

[24] Shafer, G. “<u>A Mathematical Theory of Evidence</u>”, Princeton University Pres, (1976).

[25] Comer, D.S. “On connecttions between information systems, rough sets and algebraic logic”, Algebraic Methods in Logic and Computer Science, **Vol.28:** Banach Center Publications, 117-124, (1993).

[26] Bonikowaski, Z., Bryniarski, E., Wybraniec-Scardowska, U. “Extensions and intentions in the rough set theory”, Inform.Sci., **107:**149-167, (1998)

[27] Iranshahi, S., Davvaz, B. “Empty interior and empty exterior subsets in an approximation space”, Jour,Inst.math.,Comp.Sci.(Math.Ser.) **16 (2):** 101-103,(2003).

[28] Jarvinen, J. “On the Structure of rough approximations”, Fundamental Informatica,**53:**135-153, (2002).

[29] Radzikowska, A.M., Kere, E.E. “A comprative study of fuzzy rough sets”, Fuzzy sets and Systems **126:** 137-155, (2002).

[30] Davvaz, B. “Fuzzy sets and probabilistic rough sets”, Int.J., Technol.Univ.Kashan,**1:** 23-28, (2000).

[31] Mi, J.S., Zhang, W.X. “An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets”, Inform.Sci., **160:** 235-249, (2004).

[32] Zhang, H., Liang, H., Liu, D. "Two new operators in rough set theory with applicationsw to fuzzy sets", Inform.Sci., **166:** 147-165, (2004).

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılı İskenderun'da doğdu. İlköğretim eğitimini İskenderun'da ve orta öğrenimini Mersin'de tamamladı. 2004 yılında Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programını bitirerek, aynı yıl Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansa başladı.