ALAN ÜZERE ORTOGONAL POLİNOMLAR VE ONLARIN ASİMPTOTİK ÖZELLİKLERİ

SERBUN UFUK DEĞER

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ

MERSİN
Haziran – 2008

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ

Jüri Üyesi	Jüri Üyesi
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	Yrd. Doç. Dr. İbrahim KÜÇÜKKARA

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..../........./........... tarih ve ..../.................. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

ÖZ

Bu tez çalışmasında, yarıkonform eğri ile sınırlı çeşitli bölgelerde, hem sınırın hem de ağırlık fonksiyonunun singüleriteye sahip olduğu durumda, ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan polinomların modülünün artışının, sınır eğrisi ve ağırlık fonksiyonu singüleriteye sahip olmadığı durumdaki modülünün artışı ile aynı kalması için, ağırlık fonksiyonu ve sınır eğrisi arasında hangi koşulun sağlanmasının gerektiği ile ilgili yapılan çalışmalar ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ortogonal Polinomlar, Ağırlık Fonksiyonu, Yarıkonform Dönüşüm ve Yarıkonform Eğri

ABSTRACT

In this thesis, it is considered some estimates for the rate of tending to zero of modulu of polynomials that are orthonormal with weight function, in case of that both counter and weight function has singularity, in various regions bounded with quasiconformal curve. Which conditions should satisfy between counter and the weight function to be same with the estimates in case that they don't have singularity?

Key Words: Orthogonal Polynomials, Weight Function, Quasiconformal Mapping and Quasiconformal Curve

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında danışmanım Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ'a teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca desteklerini benden hiçbir zaman eksik etmeyen başta değerli hocam Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV olmak üzere, bölüm hocalarıma ve araştırma görevlilerine sonsuz şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
∂G	G bölgesinin sınırı
$:=$	Tanım olarak eşittir
$d\sigma_z$	$dxdy: \ z = x + iy$
$A \Subset G$	A bölgesi kompakt olarak G bölgesinin içerisindedir.
$int\gamma$	γ eğrisinin içi
$ext\gamma$	γ eğrisinin dışı
$mes\gamma$	γ eğrisinin uzunluğu
$mesG$	G bölgesinin alanı
$D(z,\delta)$	$\{\xi : \lvert\xi - z\rvert < \delta\}$
$D'(z_0,\varepsilon)$	$z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının ε-delinmiş komşuluğu
$\mathbb{D}$	$D(0,1)$
Ω	$ext\overline{G}$ ($\overline{\mathbb{C}}$ a göre)
$\Omega(z,\delta)$	$\Omega \cap D(z,\delta)$
$\Delta(z,\delta)$	$ext\overline{D(z,\delta)}$
Δ	$ext\overline{\mathbb{D}}$
$C([a,b])$	$[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar sınıfı
C^1	Kendisi ve türevi sürekli fonksiyonlar sınıfı
$a \preceq b$	$a \le cb, \quad c > 0$ sabit
$a \asymp b$	$a \preceq b$ ve $b \preceq a$
$d(z_0, L)$	$\inf\{\lvert z - z_0\rvert : z \in L\}$

$\delta(z_0)$	$d(z_0, L)$
$k=\overline{1,m}$	$k=1,2,...,m \quad (m \geq 1, m \in \mathbb{N})$
$A(G)$	G bölgesinde analitik fonksiyonların kümesi
$A(\overline{G})$	G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ ’da sürekli fonksiyonların kümesi
$L^p(G)$	$\left\{ f : \iint\limits_G \lvert f(z) \rvert^p d\sigma_z < \infty,\ p > 0 \right\}$
$A_p(G)$	$\left\{ f : f \in A(G) \cap L^p(G), p > 0 \right\}$

1. GİRİŞ

$G \subset \mathbb{C},\ L = \partial G$, Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu basit bağlantılı bir bölge, $h(z)$, G'de tanımlı negatif olmayan, G'nin alanı üzerinde integrallenebilir ve hemen hemen her yerde sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun. $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg K_n = n$ polinomlar sistemi için

$$\iint h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)} d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

sağlanıyorsa bu sisteme G bölgesinin alanı üzerinde $h(z)$ ağırlıklı bir ortonormal polinomlar sistemi denir. $p > 0$ olmak üzere, $A_p(h, G)$ ile G'de analitik ve

$$\|f\|_{A_p(G,h)}^p := \iint_G h(z) \left| f(z) \right|^p d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı gösterilir.

Ağırlıklı ortogonal polinomların özelliklerinden iyi bilinir ki, bölge ve ağırlık fonksiyonu verildiğinde bölgenin içinde ve sınırında bu polinomların modülünün artışı bakılan bölgenin ve ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak değişir. Basit olarak, $h(z) \equiv 1$ ve L düzgün eğri olsun. Bu durumda bölgenin sınırına göre $\alpha_n := \max_{z \in L} |K_n(z)|$ olmak üzere, aşikardır ki $\alpha_n \to \infty$, $n \to \infty$ dir. L eğrisi parçalı düzgün ve $h(z)$ fonksiyonu da L'nin üzerinde singüler noktalara sahip ise bölgenin sınırında α_n-nin artışı doğal olarak değişecektir. Bu değişim nasıl olacaktır? Bu durumda $|K_n(z)|$ nin değerlendirilmesinde, α_n hızının sabit kalması için L eğrisi ve $h(z)$ fonksiyonu hangi karşılıklı koşulları sağlamalıdır?

Ağırlıklı ortogonal polinomların modülünün değerlendirilmesinde ağırlık fonksiyonu ve bölge arasındaki bu ilişki, ortogonal polinomlar teorisinde incelenmesi gereken önemli problemlerden biridir.

Bu problem göz önünde tutularak, bu tez çalışmasının 3. Bölümünde öncelikle gerekli tanım ve teoremler verilecektir. Daha sonra sınırı $C(1,\alpha)$ sınıfından olan bölgelerde, ağırlık fonksiyonu en basit türden singülerliğe sahip olduğu durumda bir bölge üzerinde ortogonal polinomlar ele alınacak ve Suetin'in yapmış olduğu çalışmalar verilecektir. Bundan başka, yine bu bölümde F.G. Abdullayev tarafından yarıkonform eğri ile sınırlı çeşitli bölgeler için, ortogonal polinomların ve daha sonra keyfi polinomların modülünün değerlendirilmesi ile ilgili elde ettiği çalışmalar verilecektir.

4. Bölüm'de ise yukarıda belirtilen problem doğrultusunda bu tez çalışmasının ana konusu olan yarıkonform eğri ile sınırlı çeşitli bölgelerde, ortogonal ve keyfi polinomların modülünün değerlendirilmesi ele alınacaktır.

5. Bölüm'de ise elde edilen sonuçlar özetlenerek, burada yapılan çalışma ile ilgili öneriler verilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

$G \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge; $h(z) \geq 0$, G'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. $K_n(z) := a_n z^n + ... + a_0$, $a_n > 0$, biçiminde verilen $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ polinomlar sistemine

$$\iint_G h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)} d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

koşulu altında (G,h) çifti için ortonormal polinomlar sistemi denir.

Klasik ortogonal polinomlar olarak bilinen Tschebyscheff-Hermit, Tschebyscheff-Laguerre, Jacobi ve onların özel halleri olan 1. ve 2. tür Tschebyscheff-Legendre polinomları analizin, fiziğin ve mekaniğin çeşitli dallarında kullanılan önemli bir materyaldir.

Ortogonal polinomlar birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Eğri üzerinde ortogonal polinomların incelenmesi ilk olarak 1921 yılında Szegö tarafından yapılmıştır [1]. Bölge üzerinde ortogonal polinomlar ise, $h(z) \equiv 1$ olduğu durumda Carleman tarafından incelenmiştir [2]. Aynı yıllarda Bochner tarafından, Carleman'ın çalışmasına benzer bir çalışma yapılmıştır [3]. Bu çalışma da, G bölgesi üzerinde ortogonal olan analitik fonksiyonlar sınıfı incelenmiştir.

$w = \Phi(z)$ fonksiyonu, $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$ ile Ω da bire-bir ve analitik olan $\Omega \to \Delta$ ya konform dönüşüm ve $z = \psi(w)$ onun ters dönüşümü olsun. Ayrıca $q < 1$ olmak üzere Ω_q bölgesi, $\Delta(0,q)$ bölgesinin $z = \psi(w)$ dönüşümü altındaki görüntüsü olsun. L düzgün analitik eğri ve $h(z) \equiv 1$ olduğunda, Carleman tarafından $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal polinomları için asimptotik gösterimler elde edilmiştir. L düzgün analitik eğri ve $g(z)$ fonksiyonu Ω_q da analitik, sıfırdan farklı ve sonsuzda pozitif olan bir fonksiyon olmak üzere, $z \in \Omega_q - \Omega$ için L nin iç komşuluğunda $h(z)$ fonksiyonu $\left|\frac{\Phi'(z)}{g(z)}\right|^2$ olarak alındığında ise; Korovkin, Carleman'nın metodunu kullanarak $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal polinomları için asimptotik formüller elde etmiştir [4].

Daha sonraki yıllarda, yine bölge üzerinde ağırlıklı ortogonal polinomlar ile ilgili Dzrbasjan tarafından çeşitli problemler ele alınmıştır [5].

Asimptotik gösterimler ile ilgili benzer çalışmalardan biri, 1955 yılında $h(z)\equiv 1$ ve L düzgün bir eğri olarak alındığında Rosembloom ve Warschawskii tarafından yapılmıştır [6]. A. L. Kuzmina parçalı analitik bir eğri boyunca ortogonal polinomların asimptotik gösteriminin nasıl olacağını incelemiştir [7].

Ağırlık fonksiyonu ve çemberin singüler noktalara sahip olduğu durumda, bir çember üzerinde ortogonal polinomların özellikleri Suetin tarafından incelenmiştir [8], [9].

$\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ polinomlar sistemi bölge ve ağırlık fonksiyonuna göre tek türlü tanımlandığından bu polinomlar ile oluşturulan Fourier serilerinin herhangi bir fonksiyona yakınsaması bölgenin ve ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlıdır. 1968 yılında, Smirnov ve Lebedev, Korovkin'in yapmış olduğu çalışmaları $g(z)$ fonksiyonu sonsuzda keyfi mertebeden kutba sahip olduğunda ele almış ve $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal polinomları ile oluşturulan seriler ve özellikle $\overline{G}$ da analitik olan fonksiyonlar için Fourier serilerinin yakınsaklığını incelemiştir [10].

Ortogonal polinomlar teorisinde, eğri üzerinde ortogonallikte karşımıza çıkmayan ancak bir bölge üzerinde ortogonallik söz konusu olduğunda karşılaşılan önemli bir problem; bölgenin sınırının komşuluğunda, ağırlık fonksiyonunun özellikleri ile ortogonal polinomların nasıl etkilendiği sorusudur. Bu çerçevede Suetin tarafından, birim dairede ve bölgede, ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak ortonormal polinomlar için çeşitli değerlendirmeler elde edilmiştir [11].

Bu çalışmada da bölgenin sınırı yarıkonform eğri olduğu durumda ortonormal polinomların modülünün ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak nasıl değerlendirildiği ele alınmıştır.

1935 yılında Lavrentiyev tarafından literatüre giren yarıkonform dönüşümler teorisi, analitik fonksiyonların teorisi ile yakından bağlantılıdır [12]. Yarıkonform dönüşümler konform dönüşümlerin bir genelleştirilmesidir. Konform dönüşümler üzerine pek çok teoremde sadece yarıkonformluk kullanılır. Böylece konformluğun gerekli olduğu ya da olmadığı durumları belirlemede yarıkonformluk önem kazanır. Yarıkonform dönüşümler konform dönüşümlerden daha esnek olduğundan kullanılması daha kolaydır. Yarıkonform dönüşümlü ekstremal problemler, bizi bölge ile bağlantılı analitik fonksiyonlara götürür. Ayrıca konform dönüşümler çok değerli fonksiyonlara genelleştirildiğinde özelliklerini kaybederken, yarıkonform dönüşümler değişmez. Yarıkonform dönüşümlerin önemli bir kısmı integrasyon teorisindeki problemlerden oluşur [12].

Yarıkonform eğri ile sınırlı bölgelerde analitik fonksiyonlar için integral gösterimi V. I. Belyi tarafından elde edilmiş ve buna dayanarak yarıkonform eğri ile sınırlı çeşitli bölgelerde ortogonal polinomlar için bazı sonuçlar elde edilmiştir [13].

F.G. Abdullayev, V.V. Andrievskii K-yarıkonform eğri ile sınırlı olan bölgelerde ortogonal polinomları incelemiştir [14], [15].

Daha sonraki yıllarda ise yarıkonform eğri ile sınırlı çeşitli bölgelerde F.G. Abdullayev tarafından ortogonal polinomların modülünün artışı, asimptotik ve yaklaşım özellikleri geniş çapta incelenmiştir [16]-[21].

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde öncelikle temel tanımlar ve teoremler, üzerinde çalışılacak olan uzaylar ve farklı eğriler sınıfları ele alınacak ve daha sonra bu konu ile ilgili P.K. Suetin ve F.G. Abdullayev tarafından yapılan çalışmalar verilecektir [11], [16-20].

3.1.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

$G \subset \mathbb{C}$, sonlu bir bölge, $z_0 \in G$ keyfi bir nokta ve $f : G \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

Tanım 3.1. $\forall K \Subset D$ kompaktı için $\exists M = M(K)$ sayısı vardır ki, $\forall z \in K$ ve $\forall f \in \{f\}$ için $|f(z)| \le M$ ise D bölgesinde analitik olan $\{f\}$ fonksiyonlar ailesine D'nin içinde **düzgün sınırlıdır** denir.

Tanım 3.2. Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının ε- komşuluğu**,** $D(z_0,\varepsilon) := \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ olarak tanımlanır. $D(z_0,\varepsilon)$**'**a bazen açık disk de denir. Bunun yanı sıra,

$\overline{D}(z_0,\varepsilon) = \{z : |z - z_0| \le \varepsilon\}$ kümesine kapalı disk denir.

$D(\infty,\varepsilon) = \{z : |z| > \rho\} \cup \{\infty\}$ kümesine ∞ noktasının komşuluğu denir.

Bir $D(z_0,\varepsilon)$ komşuluğu verildiğinde, $D(z_0,\varepsilon) \backslash \{z_0\} =: D'(z_0,\varepsilon)$ kümesine z_0'ın ε-**delinmiş komşuluğu** denir [32].

Tanım 3.3. $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta := \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı vardır öyle ki $0 < |z - z_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $z \in G$ için $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ ise, $\ell \in \mathbb{C}$ sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki **limiti** denir ve $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \ell$ şeklinde gösterilir [32].

Tanım 3.4. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **süreklidir** denir. Eğer her $z \in G$'de f sürekli ise, o zaman f fonksiyonuna G'de **süreklidir** denir ve böyle fonksiyonlar sınıfı $C(G)$ ile gösterilir [32].

Tanım 3.5. $E, F \subset \mathbb{C}$; $f : E \to F$ bire-bir örten bir dönüşüm olsun. f E üzerinde sürekli ve onun f^{-1} ters görüntüsü F kümesi üzerinde sürekli ise, o zaman bu dönüşüme bir **Homeomorfizm'**dir denir [32].

Tanım 3.6. $\alpha \in [0, 2\pi)$ sayısı için,

$$\partial_\alpha f(z_0) := \lim_{r \to 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\alpha}) - f(z_0)}{re^{i\alpha}}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonuna z_0 noktasında α**-yönünde türevlenebilir** denir.

z_0 noktasında α-yönünde tüm türevler var ve birbirine eşit ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **türevlenebilir'**dir denir ve

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ile gösterilir.

f fonksiyonu her $z \in G$ noktasında türevlenebilirse, o zaman f fonksiyonuna G'de **türevlenebilir'**dir denir.

Tanım 3.7. f fonksiyonu belli bir $D(z_0; r) \subset G$ komşuğunun her noktasında türevlenebilir ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında **analitiktir** denir [32].

f fonksiyonu her $z \in G$ noktasında analitik ise, f fonksiyonuna G'de analitiktir denir. G'de analitik tüm fonksiyonların kümesi $A(G)$ ile, G'de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli olan fonksiyonların kümesi $A(\overline{G})$ ile gösterilir.

$f(z)$ ve $g(z)$ iki analitik fonksiyon olmak üzere, $f(z) + g(z)$ ve $f(z)g(z)$ fonksiyonları da analitik fonksiyondur. $g(z) \neq 0$ olmak üzere, $f(z)/g(z)$ fonksiyonu da analitiktir [33].

Tanım 3.8. Bir $f : G \to \mathbb{C}$ karmaşık fonksiyonu, $z_0 \in G$ noktasının bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğunda analitik fakat z_0'da analitik değilse, f'nin z_0'da **aykırılığı (singüleritesi)** var denir [32].

Bir f karmaşık fonksiyonu, z_0 noktasının bir $D'(z_0,\varepsilon)$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0'da analitik değilse, f, z_0'da bir **ayrık singüler noktaya** sahiptir denir [32].

$r>0$ olmak üzere, f bir $\Delta(0,r):=\{z:|z|>r\}$ kümesi üzerinde analitik fakat $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z=0$ noktasında ayrık singülerliğe sahipse, f'nin $z=\infty$**'da bir ayrık singülerliği** vardır denir [32].

Tanım 3.9. z_0, f'nin bir ayrık singüler noktası olsun.

a) Eğer $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A\neq\infty$ ise, z_0, f'nin **Aradan Kaldırılabilir** noktasıdır denir.

b) Eğer $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ ise, z_0, f'nin **Kutup** noktasıdır denir.

c) Eğer $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ise, z_0, f'nin **Esaslı Singüler** noktasıdır denir [32].

Bu tanıma göre, bir G bölgesinde kutupyerleri hariç analitik olan bir fonksiyona meromorfik fonksiyon denir [33].

Özellikle meromorf fonksiyonların özel bir durumu olarak D'de analitik olan fonksiyonlar göz önünde tutulabilir. Rasyonel fonksiyonlar tüm düzlemde meromorf olan fonksiyonlardır [33].

Teorem 3.1. (Lagrange) **:** $[a,b]$'de sürekli ve (a,b)'de diferansiyellenebilen $f(x)$ fonksiyonu için öyle bir $\xi\in(a,b)$ noktası vardır ki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

olur [31].

3.1.1. Harmonik Fonksiyon, Alt Harmonik Fonksiyon

Tanım 3.10.

(a) $B \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge ve $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer;

$$\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oluyorsa, u'ya B'de bir **harmonik fonksiyon** denir. Burada ∇ operatörüne **Laplace operatörü** $\nabla u = 0$ denklemine de, **Laplace denklemi** denir.

(b) $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f = u + iv$ fonksiyonunun gerçel ve sanal kısmı harmonik ise, f'ye **karmaşık harmonik fonksiyon** denir [32].

Analitik fonksiyonlar ile harmonik fonksiyonlar arasında önemli bir ilişki vardır. Buna göre, bir analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları harmoniktir [33].

Farzedelim ki f analitik fonksiyonu verilmiştir. $\ln|f|$'ye bakacak olursak, $f(z) \neq 0$ olmalıdır. Eğer $f(z) = 0$ ise $\ln|f| = -\infty$ olacaktır. f'nin sıfır noktalarında $\ln|f|$ harmonikliğini kaybeder. Fakat bu noktaların komşuluğunda fonksiyonun bazı özellikleri incelenebilir. Bunun için alt harmonik fonksiyon kavramı verilecektir.

Tanım 3.11. $u(z)$, z_0 noktasının belli bir $D(z_0, r)$ komşuluğunda tanımlı, reel değişkenli bir fonksiyon ve $-\infty \leq u < \infty$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ sayısı vardır ki, $|z - z_0| < \delta$ iken,

$$\begin{cases} u(z) - u(z_0) < \varepsilon, & u(z_0) \neq -\infty \\ u(z) \qquad\qquad , & u(z_0) = -\infty \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \overline{\lim_{z \to z_0}} u(z) \leq u(z_0)$$

sağlanırsa, $u(z)$ fonksiyonuna **üst yarı süreklidir** denir [28].

$D \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $u : D \rightarrow [-\infty, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Buna göre, u fonksiyonu, $\forall z \in D$ için üst yarı sürekli ise, u'ya, D'de üst yarı süreklidir denir.

Tanım 3.12. $u : D \to [-\infty, \infty)$ fonksiyonu, aşağıdaki iki koşulu sağlarsa D'de **alt harmonik fonksiyon** denir [28].

(1) D'de üst yarı sürekli

(2) Keyfi yeterince küçük $U \subset D$ dairesi ve U'da harmonik, $\overline{U}$'da sürekli keyfi h fonksiyonu için, ∂U'da $h \geq u$ ise U'dairesinde de $h \geq u$ dur.

Sonuç 3.1. f fonksiyonu D'de analitik ise, $u = \ln|f|$ D'de alt harmoniktir.

Ayrıca, Harmonik fonksiyonlar için katlı ortalama değer teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2. ϕ**,** $\overline{D}(0,R)$ kapalı diskini içeren bir bölgede harmonik ise

$$\phi(0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_D \phi(z)\, dxdy \qquad , z = x + iy$$

eşitliği sağlanır.

Analitik fonksiyonların sıfırları ile ilgili çok önemli bir materyali verelim.

3.1.2. Blaschke Çarpımı

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $0 < |z_n| < 1$ ve

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}$$

sonsuz çarpımı $|z| < 1$ için mutlak yakınsak ise, bu çarpım $|z| < 1$'de analitik olan ve Blaschke çarpımı denen belirli bir fonksiyonu gösterir [35].

$f_r := f\left(re^{i\theta}\right)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\|f_r\|_\infty = \sup_\theta \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$ olmak üzere, $H^\infty = \left\{f : \|f_r\|_\infty < \infty,\ 0 \leq r < 1\right\}$ göstersin. Buna göre aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.3. (Blaschke Fonksiyonları) **:** $G \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. $\alpha_n \neq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty$ olmak üzere, $\{\alpha_n\}$ G bölgesinde bir dizi olsun. k negatif olmayan bir tamsayı ve $z \in G$ için,

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

ise $B \in H^\infty$ ve B fonksiyonu α_n dışında sıfır içermez.

Bu B fonksiyonuna “**Blaschke Çarpımı**” denir. Dikkat edilmelidir ki, α_n'lerin bazıları tekrarlanabilir. Blaschke çarpımında çarpan yoksa $B(z)=1$'dir [28].

3.1.3. Eğri ve Bölge

$\varphi:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $\varphi:\varphi(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$ parametrik gösterimi ile verilen bir fonksiyona eğri denir. Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.13.

(i) $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ olsun. $z=z(t):[a,b]\rightarrow\mathbb{C}$ sürekli fonksiyon olmak üzere kompleks düzlemde $\gamma:=\{z(t):t\in[a,b]\}$ kümesine başlangıç noktası $z(a)$, bitim noktası $z(b)$ olan bir **eğri** denir.

(ii) $z(a)=z(b)$ ise γ eğrisine **kapalı eğri** denir.

(iii) $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ için $t_1\neq t_2$ olduğunda $z(t_1)\neq z(t_2)$ ise γ eğrisine **Jordan yayı**, eğer $z(a)=z(b)$ ise γ eğrisine **Jordan eğrisi** denir.

(iv) $P:=\{t_0,t_1,...,t_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı olmak üzere $\forall k$, $k=\overline{1,n}$ için $z=z(t)$ fonksiyonu her (t_{k-1},t_k) aralığında sürekli türevlenebilir ve $\lim\limits_{t\rightarrow t_{k-1}^{+}} z(t), \lim\limits_{t\rightarrow t_k^{-}} z(t)$ limitleri mevcut ise γ eğrisine **parçalı düzgün eğri** denir [29].

Birden fazla nokta içeren kapalı bir küme boştan farklı ayrık kapalı iki küme biçiminde ayrıştırılabiliyorsa, bu kümeye bir kontinyum denir. Kontinyum küme sayılamaz sayıda noktalara sahiptir. Buna gore, bağlantılı açık bir G kümesine bir bölge denir. G açık bir küme ise aşağıdakiler denktir [36]:

1. G bir bölgedir;
2. G boştan farklı ayrık açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamaz;
3. G bölgesindeki herhangi iki nokta polygonal bir yay ile bağlanabilir.

Kompleks düzlemdeki her açık küme, sonlu ya da sayılabilir bölgelerin birleşimi olarak yazılabildiğinden, karmaşık fonksiyonlar teorisinde bölgeler önemli bir yere sahiptir.

Teorem 3.4. (Jordan Eğri Teoremi) γ, $\mathbb{C}$'da bir Jordan eğrisi olsun. Bu taktirde γ kompleks düzlemi ortak sınırları γ eğrisi olan biri sonlu, diğeri sonsuz ayrık iki bölgeye ayırır [29].

Bu bölgelerden sonlu olana γ **eğrisinin içi** denir ve $int\gamma$ ile sonsuz olana γ**'nın dışı** denir ve $ext\gamma$ ile gösterilir.

Tanım 3.14. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. G bölgesinde alınan her γ eğrisi için $int\gamma \subset G$ ise G bölgesine **basit bağlantılı bölge** denir. Aksi takdirde çok bağlantılı bölge denir. Başka bir deyişle, $\overline{\mathbb{C}}$'a göre tümleyeni bağlantılı olan bölgeye basit bağlantılı bölge denir.

Lemma 3.1.(Bernstein-Walsh)

G, tümleyeni bağlantılı ve regüler olan kapalı sınırlı bir küme olsun. n dereceli $P(z)$ polinomu her $z \in G$ için $|P(z)| \leq L$ eşitsizliğini sağlarsa, $\exists M > 0$ $\ni$ $\forall z \in \overline{G}_R$ için

$$|P(z)| \leq MR^n$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Bu lemma G bir doğru parçası olduğunda Bernstein (1912) tarafından elde edilmiştir, G contourların sonlu bir sayısı ile sınırlı olduğunda Faber (1922) ve genel durumunda da Walsh (1926) tarafından genelleştirilmiştir.

Tanım 3.15. L düzgün eğri ve $f : L \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $\forall t_1, t_2 \in L$ için, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\alpha$$

sağlanırsa, f fonksiyonuna α dereceden **Hölder koşulunu** sağlıyor denir. Bu tür fonksiyonlar sınıfına Hölder sınıfı denir ve $f \in H^\alpha(L)$ ile gösterilir. Hölder sınıfını'nın bazı özelliklerini verelim:

1) $f \in H(L) \Rightarrow f \in C(L)$;

2) $\beta < \alpha$ olmak üzere, $H^\alpha \subset H^\beta$;

3) $f, g \in H(L)$ olmak üzere;

$$f+g\in H(L),\ \ f.g\in H(L),\ \ g\neq 0,\frac{f}{g}\in H(L)$$

4) $j=\overline{1,m}$ için L_j'ler geri dönme noktasına sahip olmayan eğriler, $L=\bigcup_{J=1}^{m}L_J$ olmak üzere;

$$f\in H^{\alpha}(L_j)\Rightarrow f\in H^{\alpha}(L)$$

dir [28].

Tanım 3.16. Γ düzgün jordan eğrisi $p\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $0<\alpha<1$, s yay uzunluğu ve $z=z(s)$ Γ eğrisinin doğal denklemi olmak üzere, her $p=1,2,...$ için $\exists$ sürekli $z^{(p)}(s)$ var ve $z^{(p)}(s)\in Lip\alpha$ ise Γ eğrisine $C(p,\alpha)$ **sınıfındandır** denir [11].

Özel olarak $p=1$ ise, $\Gamma\in C(1,\alpha)$ dır.

$[a,b]$ üzerindeki her bir γ eğrisi ve $[a,b]$ aralığının her bir $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ parçalanmasına karşılık $\Lambda(P,\gamma):=\sum_{i=1}^{n}\left|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\right|$ olsun. Bu toplamda i-inci terim $\gamma(x_{i-1})$ ve $\gamma(x_i)$ noktaları arasındaki uzaklıktır. Buna göre $\Lambda(P,\gamma)$ sayısı, $\gamma(x_0),\gamma(x_1),...,\gamma(x_n)$ köşeleri ile bir çokgenin uzunluğudur. Parçalanış daha da inceldiğinde, bu çokgenin oluşturduğu uzunluk, γ'nın uzunluğuna daha da yaklaşır. Buna göre γ eğrisinin uzunluğu

$$\Lambda(\gamma):=\sup\Lambda(P,\gamma)$$

ile hesaplanır. Burada supremum $[a,b]$'nin bütün parçalanışları üzerinde alınır [28].

Tanım 3.17. Eğer

$$\Lambda(\gamma)<\infty$$

ise γ eğrisine **ölçülebilir eğri** denir [28].

Belirli durumlarda, $\Lambda(\gamma)$ bir Riemann integrali ile verilir. Burada sürekli diferansiyellenebilir eğriler için bu verilecektir. Yani türevi sürekli olan eğriler için ele alınacaktır. Buna göre aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.5. γ', $[a,b]$ aralığında sürekli ise, γ ölçülebilir ve

$$\Lambda(\gamma)=\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

dir [28].

Tanım 3.18. γ, denklemi $z=z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ olan ölçülebilir eğri ve f fonksiyonu γ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise,

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

integraline f 'nin γ eğrisi üzerindeki integrali denir.

Teorem 3.6. (Cauchy Teoremi) $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f\in A(G)$ olsun. γ, $int\gamma$ ile G 'de yerleşen ölçülebilir Jordan eğrisi ise

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

dır [30].

Teorem 3.7. (Cauchy İntegral Formülü) $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f\in A(G)$ olsun. γ, $int\gamma$ ile G 'de yerleşen ölçülebilir Jordan eğrisi ise $\forall z\in int\gamma$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

dir [30].

Sınırsız bir bölge için Cauchy integral formülü ise aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.8. L kapalı ölçülebilir Jordan eğrisi $f(z)$, ∞ da analitik ve

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \mathrm{A}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \mathrm{A} & , \quad z\in \operatorname{int} L \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -f(z)+\mathrm{A} & , \quad z\in extL \end{cases}$$

dir.

$G \subset \mathbb{C}$ bölgesi $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge; $h(z) \geq 0$, G'de tanımlı integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$0 < \iint_G h(z)\, d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlarsa h'a G üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu denir.

Burada $d\sigma_z = dxdy$, $z = x + iy$, iki boyutlu Lebesque ölçümünü göstermektedir.

Örnek 3.1. $h(z) = |z-1|^2$ fonksiyonu $|z| \leq 1$'de tanımlı bir ağırlık fonksiyonudur.

Tanım 3.20. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge $h(z)$ G'de tanımlı ağırlık fonksiyonu ve $p > 0$ olsun.

$$\iint_G h(z) |f(z)|^p \, d\sigma_z < +\infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $L^p(h, G, d\sigma_z)$ ile gösterilir.

Eğer $h(z) \equiv 1$ ise $L^p(1, G) \equiv L^p(G)$ dir.

Teorem 3.9. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $f \in L^p(G)$, $p > 1$ ve $g \in L^q(G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise,

(i) $$\left| \iint_G f(z) g(z) d\sigma_z \right| \leq \left(\iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_G |g(z)|^q \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

(ii) $$\left(\iint_G |f(z) + g(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\iint_G |g(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir [12].

Bu eşitsizliklere sırasıyla **Hölder Eşitsizliği** ve **Minkowski Eşitsizliği** adı verilir.

Tanım 3.21. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu basit bağlantılı bir bölge; $h(z)$, $h(z) \geq 0$, G-de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Derecesi n olan ve

$$\iint_G h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)} d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

koşulunu sağlayan $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ polinomlar sistemine G bölgesinin alanı üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonuna göre **ortonormal polinomlar sistemi** denir [11].

Örnek 3.3. $\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \frac{z^n}{r^{n+1}}$, $n = 0,1,2,\dots,$ $|z| < r$ de ortonormaldir.

3.1.4. $A_2(h,G)$ Uzayının Tanımı ve Özellikleri

Tanım 3.22. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $h(z)$ G'de tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. $p > 0$ olmak üzere, G'de analitik ve

$$\|f\|_{A_p} := \|f\|_{A_p(h,G)} := \left(\iint_G h(z) |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $A_p(h,G)$ ile gösterilir. Bu sınıf

$$A_p(h,G) := \left\{ f : f \in A(G) \cap L^p(h,G) \right\}$$

ile de gösterilir. $p = 2$ için,

$$A_2(h,G) := \left\{ f : f \in A(G) \cap L^2(h,G) \right\}$$

dir. Özel halde $h(z) \equiv 1$ alınırsa, $A_p(G) := A_p(1,G)$ olarak gösterilir.

Lebesque integralinin özellikleri ve $|f+g|^2 \leq (|f|+|g|)^2 \leq 2\left(|f|^2 + |g|^2\right)$ eşitsizliği kullanılarak

i) $f \in A_2(G)$ ve $\forall c \in \mathbb{C}$ için $cf \in A_2(G)$

ii) $f, g \in A_2(G)$ için $f + g \in A_2(G)$

sağlandığı kolayca görülür.

(i) ve (ii) den $A_2(G)$ uzayı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

O halde $A_2(G)$ uzayı bir lineer uzaydır.

Tanım 3.23. $f, g \in A_2(G)$ için

$$(f,g) := \iint_G f(z) \overline{g(z)} d\sigma_z \qquad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f ile g'nin **iç çarpımı** denir.

Teorem 3.10. $A_2(G)$ uzayı (3.1)'de tanımlanan iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır [10].

Teorem 3.11. $A_2(G)$ uzayı (3.1) ile tanımlanan iç çarpımın meydana getirdiği

$$\|f\|_{A_2(G)} := \sqrt{(f,f)} \tag{3.2}$$

normuna göre bir normlu uzaydır [10].

Teorem 3.12. $A_2(G)$ uzayı (3.2) normuna göre tamdır [10].

Yukarıda verilen Teorem 3.10, Teorem 3.11 ve Teorem 3.12'ün sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.13. $A_2(G)$ lineer uzayı (3.1) iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır [8

Farzedelim ki $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ denklemli γ yayı bir Ω bölgesinde yer alsın. Ayrıca $f(z)$, Ω'da tanımlı ve sürekli olsun. Bu durumda $w = w(t) = f(z(t))$ denklemi w düzleminde γ'nın görüntüsü olarak bir $\tilde{\gamma}$ yayı tanımlar.

Ω'da analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonunu göz önünde tutalım. $z'(t)$ varsa, aynı zamanda $w'(t)$'nin var olduğunu bulabiliriz ve $w'(t)$

$$w'(t) = f'(z(t))\,z'(t)$$

ile belirlenir.

$z'(t_0) \ne 0$ ve $f'(z_0) \ne 0$ olmak üzere bir $z_0 = z(t_0)$ noktasında bu denklemin anlamını inceleyeceğiz.

Birinci sonuç $w'(t_0) \ne 0$ olmasıdır. Buradan $\tilde{\gamma}$, $w_0 = f(z_0)$ noktasında bir teğete sahiptir ve onun yönü

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

ile belirlenir.

Bu bağıntı z_0'da γ'ya göre w_0'da $\tilde{\gamma}$'ne göre yönlü teğetler arasında ki açının $\arg f'(z_0)$'a eşit olduğunu iddia eder. O burada γ eğrisinden bağımsızdır. Bu sebepten birbirine teğet olan z_0 boyunca eğriler ortak teğetli eğriler üzerine dönüştürülür. Bundan başka z_0'da bir açı oluşturan iki eğri, aynı açıyı oluşturan eğriler üzerine dönüştürülür.

Bu özelliklerden dolayı $w = f(z)$ dönüşümüne $f'(z) \neq 0$ olduğu tüm noktalar da konformdur denir [33].

Tanım 3.25. $G, H \subset \overline{\mathbb{C}}$ ve $f : G \to H$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, f fonksiyonuna $G \to H$ ye konform bir dönüşüm denir [36]:

i. f, G üzerinde meromorfik bir fonksiyondur;

ii. f birebir bir dönüşümdür;

iii. $f(G) = H$

H, $\mathbb{C}$'de bir bölge olsun. H'da birebir ve meromorf olan bir fonksiyona univalent fonksiyon denir. Genel kullanımın aksine burada univalentliğin tanımında meromorfi dahil edilmiştir. Böylece $f(z)$ fonksiyonu H'da univalenttir ancak ve ancak $f(z)$ en çok bir kutbu hariç analitik ve $z_1, z_2 \in H$, $z_1 \neq z_2$, için

$$f(z_1) \neq f(z_2)$$

dir.

H'daki univalentlik, H'ın her alt bölgesinde sağlanır. En basit örnekler Möebius dönüşümleridir. Yani, a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere;

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

fonksiyonudur. Univalent fonksiyonların bazı özellikleri aşağıdaki gibidir: Varsayalım ki $f(z)$, H'da univalent olsun.

a) g, G'de univalent ve $f(H) = \{f(z) : z \in H\} \subset G$ ise, bu durumda $g(f(z))$ bileşkesi H'da univalenttir. Özellikle;

$$\frac{1}{f(z)} \text{ univalenttir} \Leftrightarrow f(z) \text{ univalenttir.}$$

b) Bir f analitik fonksiyonu bir noktanın bazı komşuluklarında analitiktir. $\Leftrightarrow$ f bu noktada sıfırdan farklıdır. Buradan $z \in H$ için $f'(z) \neq 0$ olduğu açıktır. Ancak tersi doğru değildir. Örneğin; $f(z) = e^{2\pi z}$ fonksiyonu $|z| < 1$'de univalent değildir. Yani o bölgede sıfırdan farklı olması, o fonksiyonun univalent olduğunu söylemez. $f(z)$, z_0'da bir kutba sahipse, z_0'ın civarında analitik ve univalenttir. Böylece z_0'da sıfırdan farklı bir türeve sahiptir. Buradan z_0'ın basit bir kutup noktası olduğu ortaya çıkar.

c) Univalent fonksiyon $H \subset \mathbb{C}$'dan $f(H) \subset \mathbb{C}$'a birebir ve örten bir dönüşüm ve küresel metrikte süreklidir. Bir meromorfik fonksiyonun ters fonksiyonu da meromorf olduğundan f, $H \rightrightarrows f(H)$ üzerine bir homeomorfizmdir. Böylece bütün topolojik nicelikler, univalent dönüşümler altında korunur. Yani $z_k \in H$ olmak üzere; (z_k) dizisi ∂H'a yakınsar ise, bu durumda $f(z_k)$ görüntü dizisi $\partial f(H)$'a yakınsar.

d) H'da $C: z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ jordan yayı düzgün ise (yani $z'(t)$ sürekli ve $z'(t) \ne 0$), $f(C): f(z(t))$, $\alpha \le t \le \beta$, $f(H)$'da düzgün bir Jordan yayıdır.

Pozitif reel eksen ve $f(z_0)$, $(z_0 = z(t_0))$ noktasında $f(C)$'e teğet doğru arasında ki açı

$$\arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

İle verilir. Yani z_0 noktası boyunca iki eğri arasında ki açı, görüntü eğrileri arasında ki açı ile aynıdır. Böylece univalent bir dönüşüm bir konform homeomorfizmdir.

e) $A \subset \mathbb{C}$, f'in kutbunu içermeyen H'ın kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda görüntü kümesinin alanı, $d\Omega$ alan elemanını göstermek üzere

$$\text{Alan } f(A) = \iint_A |f'(z)|^2 d\Omega$$

olur. Bu bir Lebesgue integralidir; A Jordan ölçülebilir ise aynı şey $f(A)$ için de doğrudur. Böylece integral bir Riemann integrali olur [36].

Teorem 3.14. (Riemann Dönüşüm Teoremi)

$G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ tespit edilmiş bir nokta olsun. G bölgesini D birim dairesine dönüştüren ve $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır [29].

Teorem 3.15. $\Omega := \mathbb{C} - \overline{G}$ ve $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ olmak üzere

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır.

Konform bir dönüşümün türevinin alttan ve üstten değerlendirilmesi ile ilgili olarak aşağıdaki teorem önemlidir.

Teorem 3.16.

$G_1 \subset \mathbb{C},\ G_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ farklı iki bölge ve $\Phi : G_1 \to G_2$'ye konform bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\Phi(z) \neq \infty$ olmak üzere, herhangi bir $z \in G_1$ noktasında

$$\frac{1}{4} \frac{d(\Phi(z), \partial G_2)}{d(z, \partial G_1)} \leq |\Phi'(z)| \leq 4 \frac{d(\Phi(z), \partial G_2)}{d(z, \partial G_1)}$$

eşitsizliği sağlanır [23].

Bundan başka aşağıdaki sonuçta verilebilir.

Sonuç 3.2.

Φ ve z noktası Teorem 3.16.'daki gibi olmak üzere $\zeta \in G_1$ öyle ki $|\zeta - z| \leq \frac{1}{10} d(z, \partial G_1)$ ise bu durumda

$$|\Phi(\zeta) - \Phi(z)| \leq 8 \frac{d(\Phi(z), \partial G_2)}{d(z, \partial G_1)} |z - \zeta| \leq \frac{4}{5} d(\Phi(z) - \partial G_2)$$

dir. $\varphi(z)$, konform dönüşümünün tersi $z = \psi(w)$, $\Phi(z)$ konform dönüşümünün tersi ise $z = \Psi(w)$ ile gösterilir.

Tanım 3.26. $0 < r < 1$ ve $R > 1$ olsun.

$$L_r := \{z \in G : |\varphi(z)| = r\},\ L_R := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = R\},\ L_1 \equiv L$$

eğrilerine sırasıyla **iç** ve **dış seviye eğrileri** denir.

3.1.5. Yarıkonform Dönüşüm ve Yarıkonform Eğri

$G \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.

Eğer f fonksiyonunun $z_0 \in G$ noktasında $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ kısmi türevleri mevcut ise $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f_z(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right),$$

$$f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Özel halde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ şeklinde ise

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

dir [33].

Tanım 3.27. $G, H \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı iki bölge; $f : G \to H$ fonksiyonu $\forall z \in G$ için $J_f(z) := |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0$ koşulunu sağlayan ve C^1 sınıfından olan bir homeomorfizm olsun. Eğer,

$$\sup_{z \in G} \frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2} \le K < \infty \tag{3.3}$$

ise f fonksiyonuna G bölgesi üzerinde tanımlı bir $K-$**yarıkonform dönüşüm**, $K \ge 1$ sayısına da f dönüşümünün **yarıkonformluk katsayısı** denir [23].

Tanımdan görülür ki f, G bölgesi üzerinde $K-$yarıkonform dönüşüm ve $k = \dfrac{K-1}{K+1}$ ise $\forall z \in G$ için $\left|\dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}\right| \le k < 1$ dir.

Yarıkonform dönüşümün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [23].

i) 1-yarıkonform dönüşüm konform dönüşümdür.

ii) f_1, K_1-yarıkonform ve f_2, K_2-yarıkonform dönüşümleri verilsin. $f_1 \circ f_2$ dönüşümü $K_1 \cdot K_2-$yarıkonform dönüşümdür.

iii) f dönüşümü $K-$yarıkonform ise f^{-1} de $K-$yarıkonform dönüşümdür.

Tanım 3.28. $G, H \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı iki bölge ve $f : G \supset L \to H$, $K-$yarıkonform dönüşümü verilsin. Eğer $f(L)$ çember (doğru parçası) ise L eğrisine $K-$**yarıkonform eğri** (K**-yarıkonform yay**) denir [23].

$F(L)$, L'yi çember veya aralığa resmeden $f : G \supset L \to H$ tüm homeomorfizmaların kümesi ve

$$K_L := \inf_{f \in F(L)} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olsun. Eğer,

$$K_L < K < \infty \tag{3.4}$$

ise L eğrisine $K-$**yarıkonform eğri** denir.

Tanım 3.28.'de $G = \overline{\mathbb{C}}$ ve $G \subset \mathbb{C}$ olmak üzere iki durum söz konusudur [23]

$G = \overline{\mathbb{C}}$ ise $K-$yarıkonform eğrinin **global tanımı** denir ve yarıkonformluk katsayısı (3.3) yardımıyla hesaplanır. Yani, $\overline{\mathbb{C}}$'dan $\overline{\mathbb{C}}$ üzerine $K-$yarıkonform dönüşüm altında birim çemberin görüntüsüne $K-$yarıkonform eğri ya da K-yarıçember denir. Herhangi bir $K \geq 1$ sayısı için bir eğri K-yarıçember ise, bu eğriye **yarıkonform eğri** veya yarıçember denir.

$G \subset \mathbb{C}$ ise $K-$yarıkonform eğrinin **lokal tanımı** denir ve yarıkonformluk katsayısı (3.4) yardımıyla hesaplanır.

Teorem 3.17. L bir Jordan eğrisi, $z_1, z_2 \in L, z_1 \neq z_2$ keyfi noktalar ve $\ell(z_1, z_2) \subset L$, z_1 ile z_2 noktasına birleştiren küçük çaplı alt yay olsun. L eğrisinin yarıkonform eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{z_1, z_2 \in L, z_3 \in \ell(z_1, z_2)} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

olmasıdır [25].

Teorem 3.18. L, analitik yay veya eğri ise lokal tanıma göre $K=1$ dir [23].

Eğer $\theta(s) \in C([0, mes\gamma])$ ise γ eğrisine **düzgün eğri** denir ve böyle eğriler sınıfı C_θ ile gösterilir. Buna göre şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.19. $L \in C_\theta$ eğrisi, lokal tanıma göre her $\varepsilon > 0$ için $(1+\varepsilon)$-yarıkonformdur [24].

Tanım 3.29. L, $\mathbb{C}$'de bir Jordan eğrisi; $y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü altında $y(intL) = extL$, $y(extL) = intL$ ve $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ olsun. Eğer $\overline{y} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yarıkonform ise y dönüşümüne L eğrisine göre **yarıkonform yansıma** denir.

Teorem 3.20. L, $\mathbb{C}$'de bir Jordan eğrisi olsun. L eğrisine göre yarıkonform yansımanın olması için gerek ve yeter şart L eğrisinin yarıkonform eğri olmasıdır [23].

Teorem 3.21. L eğrisi K-yarıkonform eğri olsun. O zaman L eğrisinin belli bir sonlu komşuluğunda sınırlı kısmi türevlere sahip ve C^1 sınıfından olan bir yarıkonform yansıma vardır [23].

Özel olarak $z' \in L$ olmak üzere, L eğrisinin sonlu komşuluğundaki her bir z için,

$$|y(z) - z'| \asymp |z - z'| \tag{3.5}$$

sağlanır.

Sonuç 3.3. L eğrisi K-yarıkonform eğri, $\infty \notin L$, $G = int\, L$, $\Omega = ext\, L$ olsun. Bu durumda L'ye göre $c_1(K)-$yarıkonform $y(z)$ yansıması vardır ve bu yansıma;

i) $a \in G$, $\infty = y(a)$ olmak üzere $\mathbb{C} - (L \cup \{a\})$ bölgesinde sürekli türevlenebilir,

ii) Yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı için $\widetilde{D}(a,\delta) := y(D(a,\delta))$ olmak üzere, $\mathbb{C}_\delta := \mathbb{C} \backslash (D(a,\delta) \cup \widetilde{D}(a,\delta))$ bölgesinde (3.5) sağlanır,

iii) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus L$ için $|y_z| \le c(K,\delta)$, $c(K,\delta)^{-1} \le |y_{\bar{z}}| \le c(K,\delta)$ ve $z \notin \mathbb{C} \setminus L$ için

$$|y_z| \preceq \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in D(a,\delta), \\ |z-a|^{-2}, & z \in \widetilde{D}(a,\delta), \end{cases}$$

ve

$$\left|y_{\bar{z}}\right| \asymp \begin{cases} \left|y(z)\right|^2, & z \in D(a,\delta), \\ \left|z-a\right|^{-2}, & z \in \widetilde{D}(a,\delta), \end{cases}$$

özelliklerine sahiptir [23].

L eğrisi, lokal anlamda $K-$yarıkonform eğri olsun. φ, Φ, f dönüşümleri yardımıyla bir $1 < R_0 \le 2$ ve $r_0 = R_0^{-1}$ sayısı için Tanım 3.28'deki G bölgesi olarak [15]'de olduğu gibi $G := G_{R_0} - G_{r_0}$ olarak seçilebilir. Burada $G_R := \operatorname{int} L_R$ dir.

Bu durumda gösterilebilir ki, $\alpha(\cdot) = f^{-1}\left\{\overline{(f(\cdot))^{-1}}\right\}$ dönüşümü L eğrisine göre K^2-yarıkonform yansımadır [15].

Yani, $\alpha(\cdot)$ dönüşümü, L eğrisinin üzerindeki noktaları değiştirmeyen ve herhangi $1 < \tilde{R} < R_0$, $r_0 < \tilde{r} < 1$ sayıları için

$$\alpha(G_{\tilde{R}} \backslash \overline{G}) \subset G \backslash \overline{G}_{r_0}, \quad \alpha(G \backslash G_{\tilde{r}}) \subset G_{R_0} \backslash \overline{G}$$

sağlayan bir K^2-yarıkonform dönüşümdür.

Sonuç 3.3'e benzer şekilde, bu durumda da L'ye göre

$$\left|\alpha^*(z) - z_1\right| \asymp \left|z - z_1\right|, \quad z_1 \in L,\ z \in G$$

koşulunu sağlayan $\alpha^*(\cdot)$, $c(K)-$yarıkonform dönüşümü vardır.

Böylece [12]'den yararlanarak genelliği kaybetmeksizin Tanım 3.28'deki G bölgesinde

$$\alpha(z) = \alpha^*(z), \quad z \in G,$$

olduğu kabul edilebilir.

Tanım 3.30. G Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge olsun. $\psi : \{w : |w| < 1\} \to G$ konform dönüşümü $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ üzerine bir K-yarıkonform homeomorfizma genişletilebilirse, G bölgesine k-yarıdisk$(0 \le k < 1)$ denir.

Bu durumda $L := \partial G$ eğrisine bir k- yarıçember denir. $0 \le k < 1$ için, G bölgesi bir k-yarıdisk (L'ye göre k- yarıçember) ise, G bölgesine (L eğrisine) bir yarıdisk (yarıçember) denir. [23].

Lemma 3.2. G bir yarıdisk ve $z_1 \in L$, z_2, $z_3 \in \Omega \cap \left\{ z : \left| z - z_1 \right| \prec d\left(z_1, L_{r_0} \right) \right\}$

$: \omega_j = \Phi\left(z_j \right)$, $j = 1,2,3$ olsun. Bu durumda:

a) $\left| z_1 - z_2 \right| \prec \left| z_1 - z_3 \right|$ ve $\left| \omega_1 - \omega_2 \right| \prec \left| \omega_1 - \omega_3 \right|$ durumları denktir. Böylece

$$\left| z_1 - z_2 \right| \asymp \left| z_1 - z_3 \right| \text{ ve } \left| \omega_1 - \omega_2 \right| \asymp \left| \omega_1 - \omega_3 \right|$$

b) $\left| z_1 - z_2 \right| \prec \left| z_1 - z_3 \right|$ ise $0 < r_0 < 1$, G k'ya bağlı bir sabit olmak üzere,

$$\left| \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_2} \right|^{\varepsilon} \prec \left| \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right| \prec \left| \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_2} \right|^{c}$$

sağlanır [14].

Lemma 3.3. L, $K-$yarıkonform eğri olsun. Her $z \in L$ ve $z_0 \in G$ için z_0 noktasını z noktası ile birleştiren $\exists \beta(z_0, z) \subset G$ yayı vardır ki

i) $d(\varsigma, L) \asymp \left| \varsigma - z \right|, \forall \varsigma \in \beta(z_0, z)$

ii) $\forall \varsigma_1, \varsigma_2 \in \beta(z_0, z)$ için eğer ς_1 noktasını ς_2 notasına birleştiren $\tilde{\beta}(\varsigma_1, \varsigma_2) \subset \beta(z_0, z)$ alt yayı için $mes\tilde{\beta}(\varsigma_1, \varsigma_2) \preceq \left| \varsigma_1 - \varsigma_2 \right|$ koşullarını sağlar [26].

Lemma 3.4. L, $K-$yarıkonform eğri olsun. Ölçülebilir herhangi bir $\gamma \subset G$ yayı ve onun $\alpha^*(\gamma)$ yansıması için

$$mes\gamma \asymp mes\alpha^*(\gamma)$$

sağlanır [26].

Lemma 3.5. $f \in A\left(\overline{G} \right)$ ve y, $L = \partial G$'ye göre Sonuç 3.3.'deki özellikleri sağlayan yarıkonform yansıma olmak üzere, $\forall z \in G$ için

$$f\left(z \right) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f\left(\xi \right) y_{\overline{\xi}}}{\left(y\left(\xi \right) - z \right)^2} d\sigma\left(\xi \right)$$

dir [23].

Lemma 3.6.

$0 \le k < 1$ için G bir k - yarıdisk olsun. Bu durumda bütün $\omega_1, \omega_2 \in \overline{\Omega}$

$$\left| \psi\left(\omega_1 \right) - \psi\left(\omega_2 \right) \right| \succ \left| \omega_1 - \omega_2 \right|^{1+k}$$

dır [23].

Bu sonuç $f \in \sum(k)$ ve ψ' için yapılacak değerlendirmelerden ortaya çıkar. Δ'da univalent olan

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots (|z| > 1)$$

fonksiyonlar sınıfı $\sum$ ile gösterilir. $0 \le k \le 1$ ve $\lambda_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\sum(k)$ ile

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell} \lambda_k \lambda_\ell \right| \le K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{k}$$

eşitsizliğini sağlayan $g \in \sum(k)$ fonksiyonlarının sınıfı gösterilir. Burada $k, \ell = 1, 2, \ldots$ için $b_{k\ell}$ aşağıdaki şekilde tanımlanan Grunski katsayılarıdır:

$$\log \frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} z^{-k} \zeta^{-l} \begin{pmatrix} |z| > R \\ |\zeta| > R \end{pmatrix}$$

$z \ne \zeta$ iken $g(z) \ne g(\zeta)$ ve $\{|z| > R, \ |\zeta| > R\}$'de $g'(\zeta) \ne 0$ olduğundan sol taraftaki fonksiyon bu bölgede analitiktir.

Lemma 3.7.

G bir yarıdisk ve $P_n(z)$, $\deg P_n \le n$, $n = 1, 2, \ldots$ keyfi bir polinom olsun. $h(z)$ ağırlık fonksiyonu da (3.22) koşulunu sağlasın. Bu durumda herhangi bir $R > 1$, $p > 0$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için c_1, c_2, n'den bağımsız olmak üzere

$$\|P_n\|_{A_p\left(h, G_{1+c_1(R-1)}\right)} \le c_2 R^{n+\frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)} \tag{3.6}$$

dır [18].

Lemma 3.8.

G bir yarıdisk $z_1 \in L$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için $z \in L^* := L^*_{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ olmak üzere $d(z_1, L^*) = |z_1 - z|$ olsun. Bu durumda bazı $c_1(G, D, \mathrm{K})$, $0 < c_1 < 1$ sabitleri için

$$\{\zeta : |\zeta - z| < c_1 |z_1 - z|\} \subset G$$

sağlanır.

İspat:

$d(z_1, L) = |z_2 - z| \leq |z - z_1|$, $z_2 \in L$ olsun.

$\Gamma := \Gamma\left(z, z_2; z*, z_1, G_{R_0}\right)$, G_{R_0}'da, $R_0 = R_0(G, \vartheta, y) > 1$ sabit bir sayı olmak üzere, z ve z_2'yi z_1 ve $z^* \in L_{R_0}$'dan ayıran yerel ölçülebilir bir eğriler ailesi olsun. G bir yarı disk olduğundan L'ye göre bir $y(.)$ yarıkonform yansıması vardır. $y(.)$ yarıkonform yansımayı kullanarak ϑ fonksiyonunu $\tilde{\vartheta}: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $\tilde{\vartheta}(0) = 0$, $\tilde{\vartheta}(\infty) = \infty$ yarıkonform bir homeomorfizma genişletebiliriz. $\Gamma' = \tilde{\vartheta}(\Gamma)$ olsun. Bu durumda $m(\Gamma)$ ve $m(\Gamma')$ modülleri için

$$m(\Gamma) \geq \frac{1}{2\pi} \ln c_2 \left| \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right| \tag{3.7}$$

$$m(\Gamma') \leq \frac{1}{2\pi} \ln c_3 \left| \frac{\vartheta(z_1) - \vartheta(z)}{\vartheta(z_2) - \vartheta(z)} \right| \tag{3.8}$$

sağlanır. Burada $c_i = c_i(G, R_0)$, $i = 2,3$ z, z_1, z_2'den bağımsızdır.

$|z_2 - z| \leq |z_1 - z|$ olduğundan Lemma 3.2'den $\vartheta(z_2) - \vartheta(z) \prec \vartheta(z_1) - \vartheta(z)$ dir. Diğer yandan

$$d\left(\vartheta(z_1), \vartheta(L^*)\right) = |\vartheta(z_1) - t_1|, \ t_1 \in \vartheta(L^*)$$

ve

$$d\left(\vartheta(z), \partial B\right) = |\vartheta(z) - t_2|, \ t_2 \in \partial B$$

olmak üzere

$$|\vartheta(z_1) - t_1| \asymp |\vartheta(z_1) - \vartheta(z)| \asymp |\vartheta(z) - t_2| \asymp |\vartheta(z_2) - \vartheta(z)|$$

dır. Sonuç olarak

$$|\vartheta(z_1) - \vartheta(z)| \leq c_4 |\vartheta(z_2) - \vartheta(z)|$$

dir.

Buradan

$$m(\Gamma') \leq \frac{1}{2\pi} \ln c_3 \frac{|\vartheta(z_1) - \vartheta(z)|}{|\vartheta(z_2) - \vartheta(z)|} \leq \frac{1}{2\pi} \ln c_3 c_4 = c_5$$

dir. Bütün $\gamma \in \Gamma$ bir Ω bölgesinde içerilmek üzere, ϕ, Ω'dan Ω' ne K-yarıkonform dönüşüm olsun. Γ nın görüntüsü Γ' olmak üzere

$$K^{-1}m(\Gamma) \le m(\Gamma') \le Km(\Gamma)$$

dır [33]. Buna göre (3.7) ve (3.8)'den yarı invaryant olan modülleri göz önünde tutarak,

$$c_5 \ge m(\Gamma') \ge \left[C(K)\right]^{-2} m(\Gamma) \ge \frac{\left[C(K)\right]^{-2}}{2\pi} lnc_2 \left|\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right|$$

elde edilir. Burada $C(K)$, $y(.)$ yansımasının yarıkonformluk katsayısıdır. Bu durumda

$$\left[C(K)\right]^2 2\pi c_5 \ge lnc_2 \left|\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right| \Rightarrow c_2 \frac{|z_1 - z|}{|z_2 - z|} \le e^{\left[C(K)\right]^2 2\pi c_5}$$

$$\Rightarrow |z_2 - z| \ge c_2 e^{-\left[C(K)\right]^2 2\pi c_5} |z_1 - z|$$

$$c_1 := \frac{1}{2} c_2 e^{-2\pi\left[C(K)\right]^2 c_5}$$

alınırsa,

$$0 < c_1 < c$$

$$\Rightarrow |z_2 - z| \ge c_1 |z_1 - z| \Rightarrow \exists \zeta \text{ noktaları vardır ki ,}$$

$$\{\zeta : |\zeta - z| < c_1 |z_1 - z|\} \subset G \text{ olacaktır.}$$

Tanım 3.31. $0<\alpha \le 1$ olmak üzere

i) L yarı çember

ii) $\Phi \in Lip\alpha$

koşulları sağlanırsa $G \in Q_\alpha$ sınıfındandır denir [16].

Tanım 3.32. $i = 1,2,...,m$ için $0 \le \beta_i \le \alpha \le 1$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa G , $Q_{\alpha,\beta_1,...,\beta_m}$ sınıfındandır denir:

(i) Herhangi bir $\{D(z_i, \delta_i)\}_{i=1}^m$ ayrık disklerinin dizisi için Φ fonksiyonunun $\Omega(z_i, \delta_i)$'ye kısıtlanışı Lip β_i den ve

$$\left(\Phi \middle| \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \Omega\left(z_i, \delta_i\right) \right) \in Lip\alpha$$

(ii) $\left\{ D\left(z_i, \delta_i^*\right) \right\}_{i=1}^{m}$ ayrık sonlu disk dizisi vardır öyle ki, $\forall i = \overline{1,m}$ ve herhangi bir $\xi,\ z \in \Omega\left(z_i, \delta_i^*\right),\ z \neq z_i \neq \xi$ için,

$$k_i\left(\xi, z\right) = k \max\left(\left|\xi - z\right|^{\beta_i - \alpha}, \left|z - z_i\right|^{\beta_i - \alpha} \right)$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$\left|\Phi(z) - \Phi(\xi)\right| \le k_i\left(\xi, z\right)\left|\xi - z\right|^{\alpha}$$

Burada k ; i , ξ ve z 'den bağımsız pozitif bir sabittir.

Buna göre , $i = \overline{1,m}$ için,

$$\beta_i = \alpha \Rightarrow Q_{\alpha,\beta_1,\ldots\beta_m} = Q_\alpha$$

dir [16].

Tanım 3.33.

$0<\upsilon<1$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa Ω, $Q(\upsilon)$ sınıfındandır denir.

i) $L := \partial\Omega = \partial G$ yarıçember

ii) $\forall$ $z \in L$ için bir $r>0$ ve $0<\upsilon<1$ vardır öyle ki

$$S\left(z;r;\upsilon\right) := \left\{ \xi : \xi = z + re^{i\theta}, 0 \le \varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \upsilon \right\}$$

$\upsilon\pi$ açılı ve r yarıçaplı dairesel sektör z tepe noktası ile $\overline{G}$ da yer alır [19].

Tanım 3.34.

$i = \overline{1,m}$ için $0 < \upsilon_1, \ldots \upsilon_m < \alpha \le 1$ ve $\{z_i\}$, L üzerinde noktalar sistemi olmak üzere, herhangi bir $z_i \in L$ için $\Omega \in Q(\upsilon_i)$ ve $z \in \overline{\Omega} / \{z_i\}$ için $\Phi(z) \in Lip\,\alpha$ ise Ω, $Q_\alpha\left(\upsilon_1, \ldots \upsilon_m\right)$ sınıfındandır denir [19].

3.2. AĞIRLIK FONKSİYONU EN BASİT TÜRDEN SİNGÜLERLİĞE SAHİP OLDUĞU DURUMDA BİR BÖLGE ÜZERİNDE ORTOGONAL POLİNOMLAR

Burada Suetin tarafından, sınırı $C(1,\alpha)$ sınıfından olan bölgeler için ağırlık fonksiyonu göz önünde tutularak, Ortogonal polinomların modülü ile ilgili yapılan değerlendirmeler ele alınmıştır. Bu değerlendirmeler $1<v<2$ olmak üzere, sınırında köşe içeren $C(1,\alpha,v)$ sınırlı bölgeler için de verilmiştir [11].

3.2.1.Sınır Komşuluğunda Ağırlık Fonksiyonu İçin Sınıra Göre Bir Bölge Üzerinde Ortogonal Polinomlar İçin Eşitsizlikler

Bu bölümde, sınırın komşuluğunda ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak bir bölge üzerinde ortogonal olan polinomların özelliklerini ele alacağız. Basitlik için birim diskin içinde ortogonalliğin durumu ile başlayacağız. Ancak burada elde edilecek sonuçların hemen hemen hepsi sınırı $C(1,\alpha)$'ya ait olan keyfi bölgelere genişletilebilir.

$\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif baş katsayıya sahip $h(z)$ ağırlık ile birim disk üzerinde ortonormal olan polinomlar sistemi olsun. Yani,

$$\iint_{|z|<1} h(z)K_n(z)\overline{K_m(z)}\,d\sigma_z = \begin{cases} 1 & ,n=m \\ 0 & ,n\neq m \end{cases} \tag{3.9}$$

sağlanır.

Teorem 3.22.

Her $p>-1$ ve $c_1>0$ için

$$h(z)\geq c_1(1-|z|)^p \qquad , \quad |z|<1$$

olsun. Bu durumda,

$$|K_n(z)|\leq c_2 n^{1+\frac{p}{2}},$$

$$\int_{|z|=1} |K_n(z)||dz|\leq c_3 n^{1+p},$$

$$\left|\int_{z_0}^{z} K_n(z)\,dz\right|\leq c_4 n^{\frac{p}{2}} \qquad ,|z|\leq 1 \ , \qquad |z_0|\leq 1 \ , p>0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|K_n(z)\right|^2 \le \frac{c_5}{\left(1-|z|\right)^{2+p}} \qquad , \ |z|<1$$

olur [11].

Eşitsizliklerin birim çemberin iç komşuluğunda elde edilmesi, Teorem 3.22.'den ortaya çıkar. Aynı zamanda ağırlık fonksiyonu birim disk ya da onun kapalı bir alt kümesi üzerinde sıfırlara sahip olabilir.

3.2.2.Ortogonal Polinomların Değerlendirmelerine Bağlı Olarak Ağırlık Fonksiyonu İçin Bir Değerlendirme

3.2.1. Bölüm'de, $h(z)$ ağırlık fonksiyonu verildiğinde $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal polinomları için bazı değerlendirmeler elde edilmişti. Bu bölümde de, $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal polinomlarına bağlı olarak $h(z)$ ağırlık fonksiyonu için bir kriter verilecektir.

$\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $h(z)$ ağırlıklı birim disk üzerinde ortonormal polinomlar olsun. $0<r\le 1$ olmak üzere,

$$\lambda(r) := es\sinf_{|z|=r} h(z) \qquad , 0<r\le 1$$

olsun.

Teorem 3.23.

$\lambda(r)$ fonksiyonu $[r,1]$ üzerinde, pozitif ve monoton bir fonksiyon $0\le r<1$ ve $q>0$ ve her n için,

$$\int_{|z|=1}\left|K_n(z)\right|^2|dz| \le c_6 n^q \quad , c_6>0$$

ise,

$$\lambda(r) \le c_7(1-r)^{q-1}$$

değerlendirmesi elde edilir [11].

Bu bölümün sonucu olarak dikkat etmeliyiz ki, ana bölümde ortaya konulan eşitsizlikler $\{K_n(z)\}$ ortogonal polinomlarının Fourier serilerinin ile birim diskte analitik olan fonksiyonların gösterimini incelemek için kullanılabilir.

3.2.3. Ağırlık Fonksiyonu Bir Tek Noktada Singülerliğe Sahip Olduğu Durumda Ortogonal Polinomlar İçin Değerlendirmeler

Bu bölümün önceki kısımlarında z, birim daire çevresinin keyfi bir noktasına yaklaştığında $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun sıfıra azalan ya da sonsuzluğa artan olduğu durumlarda bir bölge üzerinde ortogonal polinomlar ele alındı. Bu kısımda ağırlık fonksiyonunun bir noktada sıfır olduğu durumda ortogonal polinomlar ele alınacaktır.

G, Γ Jordan eğrisi ile sınırlı basit bağlantılı bir bölge olsun ve $\{K_n(z)\}$ polinomları bu bölge üzerinde

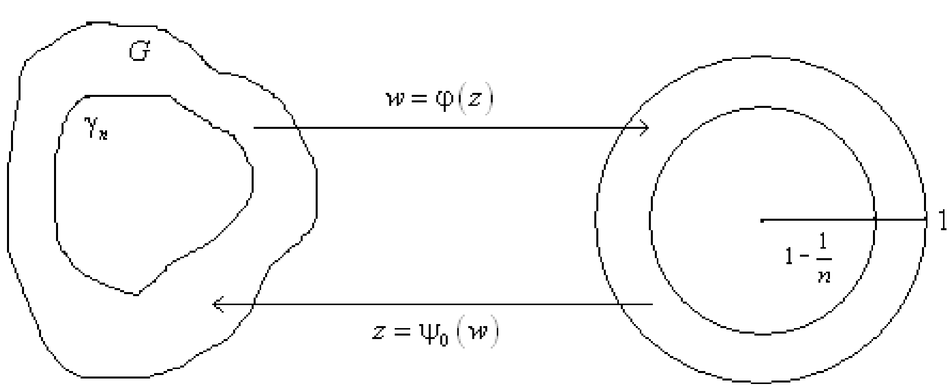
$$h(z) = |z - z_1|^{\gamma} h_0(z) \quad , \; \gamma > -2 \tag{3.10}$$

ağırlığı ile ortonormal olsun. z_1, Γ üzerinde bir nokta ve $h_0(z)$ çarpanı da $z \in G$ için

$$h_0(z) \geq c_8 > 0 \tag{3.11}$$

sağlar.

$w = \varphi(z)$, $\quad \varphi(z_0) = 0$ ve $\varphi'(z_0) > 0$ ile G bölgesinden birim disk üzerine konform ve univalent olan bir dönüşüm ve $z = \psi_0(w)$ ters dönüşüm olsun. Ek olarak γ_n bir seviye eğrisi olsun. Yani γ_n, $w = \varphi(z)$ altında $|w| = 1 - \dfrac{1}{n}$ daire çevresinin ters görüntüsü olsun.



(3.10) ve (3.11) koşulları altında, ağırlıklı $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal polinomlarının modülünün $\gamma \geq 0$ ve $-2<\gamma<0$ olduğu durumlardaki değerlendirmeleri aşağıdaki iki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.24.

$\Gamma \in C(1,\alpha)$, (3.10) ve (3.11) koşulları altında $\gamma \geq 0$ olmak üzere,

$$\left|K_n(z_1)\right| \leq c_9 n^{1+\frac{\gamma}{2}} \qquad z_1 \in \Gamma,\ \gamma > -2$$

$$\left|z-z_1\right|^{\frac{\gamma}{2}} \left|K_n(z)\right| \leq c_{10} n \qquad z_1, z \in \Gamma,\ \gamma \geq 0$$

elde edilir [11].

Teorem 3.25.

$\Gamma \in C(1,\alpha)$, (3.10) ve (3.11) koşulları altında $-2<\gamma<0$ olmak üzere,

$$\left|K_n(z)\right| \leq c_{11} n^{1+\frac{\gamma}{2}} + c_{12} n \left|z-z_1\right|^{\frac{-\gamma}{2}}$$

sağlanır [11].

3.2.4.Sınır ve Ağırlık Fonksiyonunun Singüler Noktaları Arasındaki Bağlantı

Sınır eğrisi ve ağırlık fonksiyonu singüler noktaya sahip olduğunda, $|K_n(z)|$-nin artışının sabit kalması için L eğrisi ve $h(z)$ fonksiyonu hangi karşılıklı koşulları sağlamalıdır? Bununla ilgili olarak bir kıstas verilecektir.

Lemma 3.9.

$\Gamma \in C(1,\alpha)$ ise bir $c_{13}(\Gamma)$ sabiti vardır öyle ki, en çok n dereceli keyfi $Q_n(z)$ polinomları için

$$\left|Q_n(z)\right| \leq c_{14} n \qquad , \ z \in \gamma_n$$

eşitsizliği sağlanırsa,

$$\left|Q_n(z)\right| \leq c_{13}(\Gamma) n \qquad , \ z \in \overline{G}$$

eşitsizliği sağlanır [11].

Ortogonal polinomlar için, G bölgesinde genel bir değerlendirme elde edelim.

Teorem 3.26.

Γ düzgün bir Jordan eğrisi ise (3.10) ve (3.11) koşulları altında

$$\left|K_n(z)\right| \leq \frac{c_{18}\left|\varphi'(z)\right|}{(1-\left|\varphi(z)\right|)\left|z-z_1\right|^{\frac{\gamma}{2}}} \quad , \quad z \in G \tag{3.12}$$

dir [11].

İspat:

$$(z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \varphi^k(z)\varphi'(z) \;\; , \quad z \in G \tag{3.13}$$

genişlemesi G içinde, düzgün yakınsaktır. z_0'dan z'ye her iki tarafı terim terime integrallenirse,

$$\left.\begin{aligned} \int_{z_0}^{z} (\xi - z_1)^{\gamma/2} K_n(\xi)\,d\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \int_{z_0}^{z} \varphi^k(t)\varphi'(t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \frac{\varphi^{k+1}(t)}{(k+1)}\Bigg|_{z_0}^{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \frac{\left[\varphi^{k+1}(z) - \cancelto{0}{\varphi^{k+1}(z_0)}\right]}{(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \frac{\varphi^{k+1}(z)}{(k+1)} \qquad , z \in G \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

elde edilir. Diğer yandan $K_n(z)$ normalize edildiği için (3.11)'den,

$$\iint_G \left|z-z_1\right|^{\gamma} \left|K_n(z)\right|^2 d\sigma_z \leq c_{15} \tag{3.15}$$

elde edilir.

Buradan analitik fonksiyonlar için

$$\iint_G f(z)\overline{\varphi'(z)}\,d\sigma_z = \frac{1}{2i}\int_{\Gamma} f(z)\overline{\varphi(z)}\,dz \tag{3.16}$$

yazılabilen bu eşitliği (3.15)'nin sol tarafına uygularsak;

$$\iint_G |z-z_1|^{\gamma} |K_n(z)|^2 \, d\sigma_z = \iint_G |z-z_1|^{\gamma} K_n(z)\overline{K_n(z)} d\sigma_z$$

$$= \iint_G \left(|z-z_1|^2\right)^{\gamma/2} K_n(z)\overline{K_n(z)} d\sigma_z$$

$$= \iint_G \left[(z-z_1)\overline{(z-z_1)}\right]^{\gamma/2} K_n(z)\overline{K_n(z)} d\sigma_z$$

$$= \iint_G (z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z)\left(\overline{(z-z_1)}\right)^{\gamma/2} \overline{K_n(z)} d\sigma_z$$

$$= \iint_G \underbrace{(z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z)}_{f(z)} \underbrace{\overline{(z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z)}}_{\varphi'(z)} d\sigma_z$$

bulunur. Burada,

$$\varphi'(z) = (z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z) \Rightarrow \int_{z_0}^{z} \varphi'(\xi) d\xi = \int_{z_0}^{z} (\xi - z_1)^{\gamma/2} K_n(\xi) d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(z) - \cancel{\varphi(z_0)}^{0} = \int_{z_0}^{z} (\xi - z_1)^{\gamma/2} K_n(\xi) d\xi \qquad (3.17)$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \int_{z_0}^{z} (\xi - z_1)^{\gamma/2} K_n(\xi) d\xi$$

(3.16) ve (3.17)'den

$$\iint_G (z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z)\overline{(z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z)} d\sigma_z =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{\Gamma} (z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z) \overline{\left(\int_{z_0}^{z} (\xi - z_1)^{\gamma/2} K_n(\xi) d\xi\right)} dz \qquad (3.18)$$

elde edilmiş olur. (3.15)'de (3.13) ve (3.14)'in düzgün yakınsak olduğu bir γ_n yönlü sınır eğrisinin içini integrasyon bölgesi olarak alırsak, bu durumda bu genişleme ile (3.18) terim terim integrallenebilir. Sonuç olarak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|^2}{k+1} \le c_{16}$$

elde edilir. $z \in G$ için bunu (3.13)'da kullanarak,

$$(z-z_1)^{\gamma/2} K_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \varphi^k(z) \varphi'(z)$$

olduğundan,

$$\left|(z-z_1)^{\gamma/2}\right|\left|K_n(z)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\varphi^k(z)\right|\left|\varphi'(z)\right|$$
$$= \left|\varphi'(z)\right|\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(n)}}{\sqrt{k+1}}\sqrt{k+1}\varphi^k(z)\right|$$

Hölder eşitsizliğinden,

$$\left|\varphi'(z)\right|\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(n)}}{\sqrt{k+1}}\sqrt{k+1}\varphi^k(z)\right| \le \left|\varphi'(z)\right|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k^{(n)}}{\sqrt{k+1}}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sqrt{k+1}\varphi^k(z)\right|^2\right)^{1/2}$$
$$= \left|\varphi'(z)\right|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|^2}{k+1}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\varphi(z)\right|^{2k}\right)^{1/2}$$

Baş ve son kısmı birleştirirsek,

$$\left|z-z_1\right|^{\gamma/2}\left|K_n(z)\right| \le \left|\varphi'(z)\right|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|^2}{k+1}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\varphi(z)\right|^{2k}\right)^{1/2}$$

$z \in G$ olmak üzere her iki tarafın karesini alırsak,

$$\left|z-z_1\right|^{\gamma}\left|K_n(z)\right|^2 \le \left|\varphi'(z)\right|^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|^2}{k+1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\varphi(z)\right|^{2k}\right) \qquad (3.19)$$

Tekrar Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\varphi(z)\right|^{2k} = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\varphi(z)\right|^{k}\left|\varphi(z)\right|^{k}\right| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2\left|\varphi(z)\right|^{2k}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi(z)\right|^{2k}\right)^{1/2}$$
$$\le M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi(z)\right|^{2k}\right)^{1/2} = M\left(\frac{1}{\left(1-\left|\varphi(z)\right|^2\right)}\right)^{1/2}$$
$$\le M\frac{1}{\left(1-\left|\varphi(z)\right|^2\right)^2}$$

Ayrıca $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|}{k+1} \le c_{16}$ olduğunu (3.19)'da kullanarak,

$$\left|z-z_1\right|^{\gamma}\left|K_n(z)\right|^2 \le c_{16}M\left|\varphi'(z)\right|^2\frac{1}{\left(1-\left|\varphi(z)\right|^2\right)^2}=c_{17}\frac{\left|\varphi'(z)\right|^2}{\left(1-\left|\varphi(z)\right|^2\right)^2}$$

elde ederiz. Her iki tarafın karekökünü alırsak,

$$\left|z-z_1\right|^{\gamma/2}\left|K_n(z)\right|\le\sqrt{c_{17}}\frac{\left|\varphi'(z)\right|}{\left(1-\left|\varphi(z)\right|^2\right)}=\sqrt{c_{17}}\frac{\left|\varphi'(z)\right|}{\left(1-\left|\varphi(z)\right|\right)\left(1+\left|\varphi(z)\right|\right)}\le c_{18}\frac{\left|\varphi'(z)\right|}{\left(1-\left|\varphi(z)\right|\right)}$$

$$\Rightarrow\left|K_n(z)\right|\le c_{18}\frac{\left|\varphi'(z)\right|}{\left(1-\left|\varphi(z)\right|\right)\left|z-z_1\right|^{\gamma/2}}\quad,$$

ispat tamamlanır.

Bu teorem özel olarak köşelere sahip bir eğri için de geçerlidir. Bunu daha ayrıntılı ele alalım.

$\partial G=\Gamma$ bir $z_1\in\Gamma$ noktası hariç $C(1,\alpha)$ sınıfından olsun. Yani eğrinin $z=z(s)$ denkleminin $z'(s)$ türevi $[0,l]$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlar. Burada l eğrinin uzunluğu, $z(0)=z(l)=z_1$ ve $z'(0)\ne z'(l)$. Farzedelim ki Γ, $\nu\pi$ iç açısıyla z_1 noktasında bir köşeye sahip olsun, $0<\nu<2$. O zaman, bir $\delta_1>0$ vardır öyle ki, $\left|z-z_1\right|\le\delta_1$ ve $\overline{G}$'ın arakesiti olan $\overline{w_1}$ kümesi üzerinde, $\varphi_0(z)$ ve $\varphi_1(z)$ analitik fonksiyonlar ve onların modülü $\overline{w_1}$'da pozitif sabitler ile alttan ve üstten sınıra sahiptir.

$$\varphi(z)-\varphi(z_1)=(z-z_1)^{1/\nu}\varphi_0'(z)\qquad z\in\overline{w_1}$$

$$\varphi'(z_1)=(z-z_1)^{1/\nu-1}\varphi_1(z)\qquad z\in\overline{w_1}$$

Böyle eğrilerin sınıfı $C(1,\alpha,\nu)$ ile gösterilir z_1'de (3.10)'daki ağırlık ve Γ'nın singülerliği arasında interference için koşulun

$$\frac{1}{\nu}=1+\frac{\gamma}{2}\tag{3.20}$$

formuna sahip olduğu (3.12)'den ortaya çıkar.

Aslında $\Gamma\in C(1,\alpha)$ ve (4.27)'de $\gamma=0$ alınırsa, (3.12)'den, Lemma 3.9'nın koşulu olan

$$|K_n(z)| \leq c_{15} n \quad , \; z \in \gamma_n \tag{3.21}$$

sağlandığından, bu sonuç $\overline{G}$ bölgesine genişletilir. (3.20) koşulu bir z_1 köşesinde sağlandığı durumda da, (3.21) koşulu elde edilir.

Teorem 3.27.

$\Gamma \in C(1,\alpha,\nu)$, $\nu > 1$, ve (3.20) interference koşulu sağlanırsa, (3.10)'daki ağırlık fonksiyonu ile ortogonal polinomlar için,

$$|K_n(z)| \leq c_{16} n \quad , z \in \overline{G}$$

sağlanır [11].

Dikkat edilmelidir ki, 3.2.1. bölümde elde edilen eşitsizliklerin bir kaçı için $\{K_n(z)\}$'nin ortogonalliği kullanılmadı. Yalnızca normalize olduğu kullanıldı. Burada tartışılan sonuçların çoğu kompleks bölgede, polinomların farklı ağırlıklı normlarının karşılaştırılması için de genişletilebilir. Fakat öyle karşılaştırmalar (3.9) ifadesindeki $\{K_n(z)\}$ ortogonal polinomları için sadece onun minimum değerine sahip olduğundan, keyfi polinomlar için çok fazla yarar sağlamayacaktır.

Teorem 3.24, Teorem 3.25 ve Teorem 3.27'de elde edilen eşitsizliklerin kesinliğine gelince; dikkat etmeliyiz ki, bu eşitsizlikler sadece (3.11) koşulu altında elde edilmiştir. 3.2. Bölüm'de verilenlere göre, $\{K_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonal polinomlar sisteminin özellikleri ile ilgili olarak;

1) $\Gamma \in C(1,\alpha)$ ve $h(z) \geq c > 0$ olmak üzere,

$$|K_n(z)| \leq c_{17} n$$

2) $\Gamma \in C(1,\alpha)$ ve $h(z) = h_0(z)|z - z_1|^{\gamma}$, $\gamma \geq -2$ olmak üzere,

$$|K_n(z)| \leq c_{18} n^{1+\frac{\gamma}{2}}$$

3) $\Gamma \in C(1,\alpha,\nu)$ ve $h(z) = h_0(z)|z - z_1|^{\gamma}$, $\gamma \geq -2$, $1 < \nu < 2$ olmak üzere, sınır eğrisi ve h ağırlık fonksiyonu

$$1 + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\nu}$$

interference koşulunu sağlarsa,

$$\left|K_n\left(z\right)\right| \leq c_{19}n \quad , z\in \overline{G}$$

değerlendirmeleri elde edilmiştir [11].

Bu üç değerlendirme de dikkat edilecek olursa, ağırlıklı ortogonal polinomların modülünün artışının değerlendirilmesi; sınır eğrisi ve h ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak değişmektedir.

Daha sonraki yıllarda, benzer çalışmalar; sınırı $C(1,\alpha)$ sınıfından daha geniş sınıflara ait çeşitli bölgelerde de ele alınmıştır [16]-[21]. Bir sonraki bölümde de bu sınıflarda yapılan çalışmalar verilecektir.

3.3.ORTOGONAL POLİNOMLAR İÇİN EKSTREMAL PROBLEMLER

Ağırlık fonksiyonu ve sınır eğrisi singüler noktaya sahip olduğu durumda ortogonal polinomların modülünün artışının singüleritenin olmadığı durumdaki değerlendirmeyle aynı olması için ağırlık fonksiyonu ve sınır eğrisi arasında bazı koşulların sağlanması gerekir. Aşağıda bazı sınıflarda bu koşulun ne olması gerektiğini ortaya koyan çeşitli sonuçlar verilmiştir.

3.3.1. Ağırlık Fonksiyonu ve Sınır Eğrisi Singüleriteye Sahip Olduğunda Ortogonal Polinomların Modülünün Değerlendirilmesi

3.2.bölümde bahsedilen sınıflardan daha geniş olan bazı sınıflar için Suetin'in yapmış olduğu çalışmanın benzeri, farklı yöntem ve teknikler ile F.G. Abdullayev tarafından çalışılmıştır [16]-[21]. Bu sınıflar bu bölümde bu tez çalışmasının Materyal ve Metot bölümünde daha önceden verildiğinden, bunlarla ilgili elde edilen sonuçlar ele alınacaktır.

Öncelikle varsayalım ki, $h(z)$ ağırlık fonksiyonu $i \geq 1$ için $\gamma_i > -2$,

$$h(z) = h_0(z) \prod_{i=1}^{m} |z - z_i|^{\gamma_i} \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $h_0(z)$, G'de sıfırdan düzgün olarak ayrılsın. Yani $\exists\ c_0 > 0$ vardır öyle ki $\forall z \in G$ için

$$h_0(z) \geq c_0 \tag{3.23}$$

dır. Burada $i = \overline{1,m}$ için $\{z_i\}$ L üzerindeki noktaların bir sistemidir.

Teorem 3.28. $G \in Q_\alpha$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ ve (3.22)' deki bütün γ_i'ler sıfıra eşit olsun. Bu durumda $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|K_n(z)| \leq c_1 n^{1/\alpha}$$

dir [16].

Teorem 3.29. $G \in Q_{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m}$, $\frac{1}{2} \le \beta_i \le \alpha \le 1$ ve $i = \overline{1,m}$ için

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} = \frac{\beta_i}{\alpha}$$

olsun. O zaman $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\left|K_n(z)\right| \le c_2 n^{1/\alpha}$$

dir [16].

Teorem 3.28 ve Teorem 3.29'deki c_1 ve c_2 sabitleri h_0 fonksiyonuna ve G'ye bağlıdır.

Varsayalım ki, G sonlu basit bağlantılı bir bölge, σ iki boyutlu Lebesque ölçüsü ve h, G'de ağırlık fonksiyonu olsun. $p \ge 1$ ve $f \in L^p(G,h,d\sigma)$ olmak üzere,

$$\|f\|_{p,h} = \|f\|_p := \left(\iint_G |f(z)|^p h(z)\, d\sigma_z \right)^{1/p}$$

dir. Ayrıca π_n, derecesi n'yi aşmayan polinomların lineer uzayı ve $\pi^p_{n,h,G} = \pi^p_{n,h} = \pi^p_n$'de $L^p(G,h,d\sigma)$'daki norm ile π_n uzayı olsun. Benzer şekilde $S \subseteq \mathbb{C}$ ve S üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için,

$$\|f\|_{\infty,s} = \|f\|_\infty := \sup\left\{ |f(z)| : z \in S \right\}$$

tanımlanır. π_n bu norm ile ele alınırsa, $\pi^\infty_{n,S} = \pi^\infty_n$ normlu uzayı elde edilir.

Ayrıca $\|I_{n,h}\| := \sup\left\{ \|p\|_{\infty,L} : p \in \pi_n, \|p\|_{2,h} \le 1 \right\}$ normu ile $\forall p \in \pi_n$ için $I_{n,h}(p) = p$ olmak üzere,

$$I_{n,h} : \pi^2_{n,h} \to \pi^\infty_{n,L}$$

lineer operatörlerin bir dizisi ve

$$B_{n,\sigma} = \left\{ P \in \pi^2_{n,\sigma} \ : \ \|P\|_{2,\sigma} = 1 \right\}$$

olsun. Bu gösterimlere göre aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Teorem 3.30. $\forall i=\overline{1,m}$ için $\frac{1}{2}\le\beta_i\le\alpha\le 1$ ve

$$1+\frac{\gamma_i}{2}=\frac{\beta_i}{\alpha}$$

olmak üzere, $G\in Q_{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m}$ olsun. Bu durumda $n\in\mathbb{N}$ için;

$$\left\|I_{n,h}\right\|\le c_2 n^{1/\alpha}$$

olacak şekilde $\exists c_2>0$ vardır [17].

Teorem 3.31.

$$\left\|K_{n,\sigma}\right\|_{\infty,\overline{G}}\asymp\left|K_{n,\sigma}(\xi)\right|$$

olacak şekilde $\exists\xi\in\overline{G}$ var ve belirli bir $\beta\ge 0$ sayısı için,

$$\left\|K_{n,\sigma}\right\|_{\infty,\overline{G}}\asymp n^{\beta}$$

olsun. Bu durumda,

$$\left\|I_{n,\sigma}\right\|_{\infty,\overline{G}}\asymp n^{\beta+\frac{1}{2}}$$

elde edilir [17].

Teorem 3.32. $G\in Q_{\alpha,\beta_1}$, $0<\beta_1\le\alpha\le 1$ ve $h(z)$, (3.22)'deki gibi tanımlı olsun.

$$1+\frac{\gamma_1}{2}<\frac{\beta_1}{\alpha} \tag{3.24}$$

ise $\forall z\in\overline{G}$ ve $n=1,2,\ldots$ için

$$\left|K_n(z)\right|\le c_1 n^{s_1}+c_2\left|z-z_1\right|^{\sigma_1}n^{1/\alpha} \tag{3.25}$$

sağlanır. Burada,

$$s_1=\frac{2+\gamma_1}{2\beta_1},\sigma_1=\frac{\beta_1}{\alpha}-\frac{2+\gamma_1}{2}$$

dir [18].

Teorem 3.32.'deki (3.24) bağıntısı $-2<\gamma_1<0$ için sağlanır. Bu ve (3.25) gösterir ki; K_n'in artışının oranı, $h(z)\to\infty$ ve L eğrisi singülerliğe sahip olmadığında, $z\ne z_1$ için z_1 noktası ve $z\in L$ noktasında aynıdır.

(3.24) koşuluna $\lambda_1 = 1 - \dfrac{\alpha}{\beta_1}\left(1 + \dfrac{\gamma_1}{2}\right)$ mertebeden **Cebirsel Kutup Koşulu** denir.

Teorem 3.33. $\Omega \in Q_\alpha\left(\upsilon_1, ..., \upsilon_m\right)$, $0 < \upsilon_i < 1$ ve $\alpha\left(2 - \upsilon_i\right) \geq 1$ olsun. Ayrıca $h(z)$, (3.22) ile tanımlansın ve ek olarak $i = \overline{1, m}$ olmak üzere herhangi bir $z_i \in L$ noktası için,

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} = \frac{1}{\alpha\left(2 - \upsilon_i\right)} \tag{3.26}$$

sağlansın. Bu durumda her $n = 1, 2, ...$ için,

$$\left\| K_n \right\|_{C(\overline{G})} \leq c_3 n^{1/\alpha} \tag{3.27}$$

dir [19].

Teorem 3.34.

G $0 \leq k < 1$ için bir k yarı daire ve $h(z), \lambda_i = 0$ $i = \overline{1,\mathrm{m}}$ ile

$$h(z) = h_0(z) \geq c > 0$$

olacak şekilde bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $n = 1, 2...$ için

$$\left\| K_n \right\|_{C(\overline{G})} \leq c_1 n^{1+k}$$

dir [21].

Dikkat edilmelidir ki , $\overline{C} \backslash G$, $\infty \in \overline{C} \backslash G$ basit bağlantılı bir bölge olmak üzere $G \subset C$ keyfi bir kontinyum ise k=1 alınabilir. Yani;

$$\left\| K_n \right\|_{C(\overline{G})} \leq n^2$$

dir.

Teorem 3.35.

$0 < \alpha \leq 1$ için $G \in Q_\alpha$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu; $i = \overline{1,\mathrm{m}}$, $\lambda_1 = 0$, ile (3.26) ifadesindeki gibi olsun. Bu durumda her n=1,2,… için

$$\left\| K_n \right\|_{C(\overline{G})} \leq c_2 n^{\mu}$$

dır. Burada $\delta = \delta(G)$, $1 \leq \delta \leq 2$ ile belirli bir sayı olmak üzere

$$\mu = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & ,\alpha \geq \dfrac{1}{2} \\ \delta & ,\alpha < \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.28}$$

dir [21].

Teorem 3.33, Teorem 3.35 ile karşılaştırıldığı zaman görülür ki, (3.26) eşitliği sağlandığı zaman, $\overline{G}$'da $K_n(z)$ polinomlarının maksimum normu, $h(z)$ ağırlığının ve L sınır eğrisinin singüleriteye sahip olmadığı durumdaki gibi kalır. (3.26) ile verilen eşitlik ağırlık ve sınır eğrisinin interference koşulunu gösterir.

Sonuç 3.4. Tanım 3.34'da, $\{z_i\} \in L$ noktalarını içeren Ω bölgesinin sınır yayları $C(1,\alpha)$ sınıfından ise, bu durumda $0 < \upsilon_i < 1$ olmak üzere, $\upsilon_i \pi$ iç açı noktalarını içeren ve sınırı parçalı düzgün olan bir bölge bulunabilir. Bu durumda (3.26) ve (3.27) bağıntıları aşağıdaki gibi verilir:

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} = \frac{1}{(2-\upsilon_i)} \;,\; i = \overline{1,m}$$

$$\|K_n\|_{C(\overline{G})} \leq c_3 n$$

dir [19].

Bu sonuç $0 < \upsilon_i < 1$ olduğu durumda Teorem 3.27'nin genişletilmişidir**.**

Biliyoruz ki, $A_p(h,G)$, $p > 0$, G'de analitik ve

$$\|f\|_{A_p} := \|f\|_{A_p(h,G)} := \left(\iint_G h(z) \left| f(z) \right|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfıdır.

$K_n(z)$ polinomları, bütün $P_n(z)$, $\deg P_n \leq n$, $n = 1,2,...$, polinomlarının sınıfında bir minimal $\|P_n\|_{A_p(h,G)}$ normuna sahip olduğunda, Teorem 3.33 ve Teorem 3.34 bu sınıf için genelleştirilebilir. Bu durumda $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ ve $\|P_n\|_{A_p(h,G)}$ normları için bağıntılar elde edilir.

Teorem 3.36. $0<\upsilon_1<1$ için $\Omega\in Q_\alpha(\upsilon_1)$ ve $\alpha(2-\upsilon_1)\geq 1$ olsun. Ayrıca $h(z)$, (3.22) ile tanımlansın.

$$1+\frac{\gamma_1}{2}<\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_1)}$$

ise, bu durumda her $z\in\overline{G}$ ve her bir $n=1,2,...$ için

$$s_1=\frac{(2+\gamma_1)(2-\upsilon_1)}{2},\sigma_1=\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_1)}-\frac{2+\gamma_1}{2}$$

olmak üzere

$$|K_n(z)|\leq c_1 n^{s_1}+c_2|z-z_1|^{\sigma_1}n^{1/\alpha}$$

elde edilir [20].

Teorem 3.37. $0<\upsilon_i<1$ için $\Omega\in Q_\alpha(\upsilon_1,...,\upsilon_m)$ ve $\alpha(2-\upsilon_i)\geq 1$ olsun. Ayrıca $h(z)$, (3.22) ile tanımlansın. Herhangi bir $z_i\in L$, $i=\overline{1,m}$ noktaları için

$$1+\frac{\gamma_i}{2}>\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_i)}$$

koşulu sağlanırsa, her $n=1,2,...$ için

$$\widetilde{\mu_i}:=1+\frac{\gamma_i}{2}-\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_i)}$$

ve

$$\widetilde{s_i}:=\left(1+\frac{\gamma_i}{2}\right)(2-\upsilon_i),\, i=\overline{1,m}$$

olmak üzere

$$\max_{z\in\overline{G}}\left(\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\widetilde{\mu_i}}|K_n(z)|\right)\leq c_4 n^{1/\alpha}$$

$$|K_n(z_i)|\leq c_5 n^{\widetilde{s_i}}$$

elde edilir [20].

$1+\frac{\gamma_i}{2}>\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_i)}$ koşulu bazen $\gamma_i>0$, $i=\overline{1,m}$ olduğunda sağlanacaktır.

Böylece $1+\frac{\gamma_i}{2}>\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_i)}$ koşuluna

$$\mu_i=\alpha(2-\upsilon_i)\left(1+\frac{\gamma_i}{2}\right)-1$$

mertebeden **Cebirsel Sıfır Koşulu** denir.

3.3.2. Ağırlık Fonksiyonu ve Sınır Eğrisi Singüleriteye Sahip Olduğunda Keyfi Polinomlar İçin Modülün Değerlendirilmesi

$P_n(z)$ en çok n dereceli keyfi bir polinom ve

$$M_{n,p}:=\|P_n\|_{A_p(h,G)}$$

olsun.

Teorem 3.38. Teorem 3.28 ve Teorem 3.29'in koşulları altında herhangi bir $p>0$, $n\in\mathbb{N}$ ve P_n, $\deg P_n\le n$, polinomu için,

$$\|P_n\|_L\le c_6 n^{\frac{2}{\alpha p}}M_{n,p}$$

değerlendirmesi doğrudur. $c_6=c_6(G,h,p)$ dir [16].

Şimdi yarıdisk'e karşılık gelen sonuçları verelim.

Teorem 3.39. $G\in Q_\alpha$, $\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$ ve $1\le i\le m$ olmak üzere her bir singüler z_i noktasının, $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun bir sıfırı olduğunu varsayalım. Bu durumda $P_n\in\pi_n$ ve $\|P_n\|_{2,h}\le 1$ olmak üzere, polinomların her $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için,

$$\max_{z\in\overline{G}}\left(|P_n(z)|\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\gamma_i/2}\right)\le c_6 n^{1/\alpha}$$

ve her bir z_i noktasında, $1\le i\le m$ için;

$$s_i=\frac{2+\gamma_i}{2\alpha}$$

olmak üzere,

$$|P_n(z_i)|\le c_6 n^{s_i}$$

olacak şekilde bir $c_6 > 0$ sabiti vardır [17].

Teorem 3.40. $p > 1$, $G \in Q_{\alpha,\beta_1}$, $\frac{1}{2} \le \beta_1 \le \alpha \le 1$ ve **,** $h(z)$ (3.22) ile tanımlansın.

$$1 + \frac{\gamma_1}{2} = \frac{\beta_1}{\alpha}$$

ise, $\forall z \in \overline{G}$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$s_1 = \frac{2 + \gamma_1}{p\beta_1} \text{ ve } \sigma^1 = \frac{2\beta_1}{p\alpha} - \frac{2 + \gamma_1}{p}$$

olmak üzere,

$$\left|P_n(z)\right| \le \left(c_1 n^{s_1} + c_2 \left|z - z_1\right|^{\sigma^1} n^{2/p\alpha}\right) M_{n,p}$$

dir [18].

Teorem 3.41. $p > 1$, $G \in Q_{\alpha,\beta_1,...,\beta_m}$, $\frac{1}{2} \le \beta_i \le \alpha \le 1$, $i = \overline{1,m}$ ve $h(z)$ (3.22), (3.23) koşullarını sağlasın ve her bir $z_i \in L$ singüler noktasında,

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} > \frac{\beta_i}{\alpha}$$

olsun. $P_n \in \pi_n$ ve $\left\|P_n\right\|_{p,h,G} \le 1$ koşulları altında $\left\{P_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ polinomlarının herhangi bir dizisi için,

$$\mu_i = \frac{2 + \gamma_i}{p} - \frac{2}{p}\frac{\beta_i}{\alpha}$$

olmak üzere,

$$\max_{z \in \overline{G}} \left(\left|P_n(z)\right| \prod_{i=1}^{m} \left|z - z_i\right|^{\mu_i} \right) \le c_{11} n^{2/p\alpha}$$

olacak şekilde bir c_{11} sayısı vardır. Bunun yanı sıra z_i, $i = 1, ..., m$ noktalarında,

$$s_i = \frac{2 + \gamma_i}{p\beta_i}$$

olmak üzere,

$$\left|P_n(z_i)\right| \le c_{11} n^{s_i}$$

dir [17].

Verilen bu sonuçlara göre ağırlığa göre bölge üzerinde ortogonal polinomların maksimum normunun, sınır eğrisi ve ağırlık arasındaki koşullara göre değişmediği elde edilmiştir.

Teorem 3.42.

$n=1,2,...$ $P_n(z)$ derecesi n yi aşmayan keyfi bir polinom ve $1<p<\infty$ olsun. Bu durumda

a) Teorem 3.34'ün koşulları altında,

$$\|P_n\|_{C(\overline{G})} \le c_4 n^{\frac{2(1+k)}{p}} \|P_n\|_{A_p}$$

b)Teorem 3.34 ve Teorem 3.33'ün koşulları altında,

$$\|P_n\|_{C(\overline{G})} \le c_5 n^{\frac{2}{p\alpha}} \|P_n\|_{A_p}$$

elde edilir [19].

Bu değerlendirmeler en çok n dereceli bütün polinomların sınıfında; kuvvet olarak kesin sonuçlardır.

Teorem 3.43. $0<\upsilon_1<1$ için $\Omega\in Q_\alpha(\upsilon_1)$ ve $\alpha(2-\upsilon_1)\ge 1$ olsun. Ayrıca $h(z)$, (3.22) ile tanımlansın.

$$1+\frac{\gamma_1}{2}<\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_1)}$$

ise $p>1$ için her $z\in\overline{G}$ ve her bir $n=1,2,...$ için

$$s_1=\frac{(2+\gamma_1)(2-\upsilon_1)}{p}, \sigma^1=\frac{2}{p\alpha(2-\upsilon_1)}-\frac{2+\gamma_1}{p}$$

olmak üzere

$$\|P_n(z)\| \le \left(c_1 n^{s^1} + c_2 |z-z_1|^{\sigma^1} n^{\frac{2}{p\alpha}} \right) M_{n,p}$$

elde edilir [20].

Teorem 3.44. $0<\upsilon_i<1$ için $\Omega\in Q_\alpha(\upsilon_1,...,\upsilon_m)$ ve $\alpha(2-\upsilon_i)\ge 1$ olsun. Ayrıca $h(z)$, (3.22) ile tanımlansın. Herhangi bir $z_i\in L$, $i=\overline{1,m}$ noktaları için

$$1+\frac{\gamma_i}{2}>\frac{1}{\alpha\left(2-\upsilon_i\right)}$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda $p>1$ ve her $n=1,2,...$ için

$$\widehat{\mu_i}:=\frac{2+\gamma_i}{p}-\frac{2}{p\alpha\left(2-\upsilon_i\right)},\ \widehat{s_i}:=\frac{\left(2+\gamma_i\right)\left(2-\upsilon_i\right)}{p},\ i=\overline{1,m}$$

olmak üzere

$$\max_{z\in\overline{G}}\left(\prod_{i=1}^{m}\left|z-z_i\right|^{\widehat{\mu_i}}\left|P_n\left(z\right)\right|\right)c_4 n^{1/\alpha}M_{n,p},$$

$$\left|P_n\left(z_i\right)\right|\leq c_5 n^{\widehat{s_i}}M_{n,p}$$

sağlanır [20].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde ele alınan sonuçlar, [21]'de yapılan çalışmanın bir derlemesidir.

Teorem 4.1.

G, $0 \le k < 1$ için bir yarıdisk ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.22) ile verilsin. Bu durumda her $n = 1, 2, \ldots$ ve $\forall \ z_i \in L$ için

$$\left| K_n(z_i) \right| \le c_3 n^{\left(1+\frac{\gamma_i}{2}\right)(1+k)}$$

dır [21].

Sonuç 4.1.

$\gamma := \max\left\{ \gamma_i, i = \overline{1, m} \right\}$ olmak üzere,

$$\left\| K_n \right\|_{C(\overline{G})} \le c_4 n^{\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)(1+k)}$$

dır [21].

Teorem 4.2.

$0 < \alpha \le 1$ için $G \in Q_\alpha$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.22) ile verilsin. Bu durumda her $n = 1, 2, \ldots$ ve $\forall \ z_i \in L$ için μ (3.28)'deki gibi tanımlı olmak üzere,

$$\left| K_n(z_i) \right| \le c_5 n^{\left(1+\frac{\gamma_i}{2}\right)\mu}$$

dır [21].

Sonuç 4.2.

$\gamma := \max\left\{ \gamma_i, i = \overline{1, m} \right\}$ olmak üzere,

$$\left\| K_n \right\|_{C(\overline{G})} \le c_4 n^{\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\mu}$$

dır [21].

Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'nin İspatında kullanılacak bazı gösterimleri verelim:

$t > 0$ için $L_t := \left\{ z : \left| \varphi(z) \right| = t, \ t < 1 \right\}$ iç seviye eğrisi $L_{t'} := \left\{ z : \left| \Phi(z) \right| = t', \ t' > 1 \right\}$ dış seviye eğrisidir. $G_t := \operatorname{int} L_t$, $\Omega_t := ext\, L_t$,

$t'>1$ $L^* := y(L_{t'})$, $G^* := \operatorname{int} L^*, \Omega^* := extL^*$, $\omega = \Phi_R(z)$ Ω^* 'dan Δ üzerine $\Phi_R(\infty)=\infty$, $\Phi'_R(\infty)>0$ ile normalize edilmiş konform bir dönüşüm olsun. $\psi_R := \Phi_R^{-1}$; $L_{t'}^* := \{z : |\Phi_R(z)| = t'\}$, $G_{t'}^* := \operatorname{int} L_t^*$, $\Omega_t^* := ext\, L_t^*$, $d(z,L) := dist(z,L)$.

Ayrıca, $\forall z \in L^*$ ve $t \in L$ için $|z-t| = d(z, L_R)$ olmak üzere

$$d(z,L) \asymp d(t,L_R) \asymp d(z,L_R) \tag{4.1}$$

dir [34].

Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'nin İspatı

Basitlik için $i=1$ alalım. L yarıçember olduğundan $R = 1+\frac{1}{n}$ olmak üzere L_R'de bir yarı çemberdir. Böylece L_R'ye karşılık bir $y_R(z)$, $y_R(0)=\infty$, $C(K)$ yarıkonform yansıma inşa edilebilir öyle ki, $y_R(G_R)=\Omega_R$, $y(\Omega_R)=G_R$ ve $y_R(.)$, L_R üzerindeki noktaları sabitler. Buna göre $y_R(z)$ Sonuç 3.3' ün koşullarını sağlar. $y_R(z)$ yardımı ile $K_n(z)$ için Lemma 3.5'den aşağıdaki integral gösterimi yazılabilir [17].

$$K_n(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_R} \frac{K_n(\zeta)\, y_{R,\bar{\zeta}}}{\left(y_R(\zeta)-z\right)^2} d\sigma_\zeta \ , \ z \in G_R \tag{4.2}$$

$\varepsilon>0$ için $U_\varepsilon(z) := \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$ seçerek ve genelliği kaybetmeksizin $U_\varepsilon := U_\varepsilon(0) \subset G^*$ alınırsa, $z_1 \in L$ için

$$|K_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\iint_{U_\varepsilon} \frac{|K_n(\zeta)||y_{R,\bar{\zeta}}|}{|y_R(\zeta)-z_1|^2} d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi}\iint_{G_R - U_\varepsilon} \frac{|K_n(\zeta)||y_{R,\bar{\zeta}}|}{|y_R(\zeta)-z_1|^2} d\sigma_\zeta := J_1 + J_2 \tag{4.3}$$

elde edilir.

J_1 integralini değerlendirelim. Bunun için integral içi $(h(\zeta))^{1/2}$ ile çarpılıp bölünerek, Hölder eşitsizliği uygulanırsa:

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\iint_{U_\varepsilon} \frac{(h(\zeta))^{1/2} |K_n(\zeta)||y_{R,\bar{\zeta}}|}{(h(\zeta))^{1/2} |y_R(\zeta)-z_1|^2} d\sigma_\zeta$$

$$J_1^{\,2} \le \iint\limits_{U_\varepsilon} h(\zeta)\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{h(\zeta)\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^4} d\sigma_\zeta$$

$$J_1^{\,2} \prec \underbrace{\iint\limits_{G} h(\zeta)\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta}_{M_{n,2}\equiv 1} \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{h(\zeta)\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^4} d\sigma_\zeta \prec \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{h(\zeta)\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^4} d\sigma_\zeta$$

elde edilir.

$$h(\zeta) = h_0(\zeta)\left|\zeta - z_1\right|^{\gamma_1} \Rightarrow h(\zeta) \ge c_0\left|\zeta - z_1\right|^{\gamma_1} \Rightarrow \frac{1}{h(\zeta)} \prec \frac{1}{\left|\zeta - z_1\right|^{\gamma_1}}$$

olduğundan,

$$J_1^{\,2} \prec \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|\zeta - z\right|^{\gamma_1}\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^4} d\sigma_\zeta \asymp \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^4} d\sigma_\zeta$$

Sonuç 3.3'e göre her $\zeta \in U_\varepsilon$ için $\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right| \asymp \left|y_R(\zeta)\right|^2$ ve $\left|\zeta - z_1\right| \ge \varepsilon$ olmak üzere $z_1 \in L$ ve $\zeta \in U_\varepsilon$ için

$$\left|y_R(\zeta) - z_1\right| \asymp \left|y_R(\zeta)\right|$$

dır. Diğer yandan $J_{y_R} := \left|y_{R,\zeta}\right|^2 - \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2, y_R(\zeta)$ yansımasının Jakobiyeni olmak üzere [20]'deki gibi $y_R(\zeta)$, $\mathbb{C}$'ın antiquasikonform homeomorfizmi olduğundan ve yarıkonformluğun bir bölge için genel tanımından $0 < k < 1$ olmak üzere $\left(k = \dfrac{K-1}{K+1}\right), d_{y_R} = \dfrac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_{R,\zeta}\right|^2} \le k$ koşulundan $\left[d_f \le k, D_f \le K\right]$

$$\left|J_{y_R}\right| = \left|\left|y_{R,\zeta}\right|^2 - \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2\right| \ge \left|y_{R,\zeta}\right|^2 - \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2$$

$$= \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2 \left(\frac{\left|y_{R,\zeta}\right|^2}{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2} - 1 \right) \ge \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2 \left(\frac{1}{k} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \left|J_{y_R}\right| \succ \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2 \qquad (4.4)$$

dır. Bu durumda

$$J_1^{\,2} \prec \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^4} d\sigma_\zeta$$

$y_R(\zeta)=\zeta$ dönüşümünden $d\sigma_\zeta = \dfrac{d\sigma_{y_R(\zeta)}}{|J|} = \dfrac{d\sigma_\zeta}{|J|}$ elde edilir. Buradan, (4.4) ifadesinden ve $\dfrac{1}{\left|J_{y_R}\right|} \le \dfrac{1}{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}$ olmasından,

$$J_1^{\,2} \prec \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|J_{y_R}\right|\left|\zeta-z_1\right|^4} d\sigma_\zeta \prec \iint\limits_{|\zeta-z_1|>c_1} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta-z_1\right|^4} = \int_0^{2\pi}\int_{c_1}^{\infty} r^{1-4} dr d\vartheta = \frac{\pi}{c_1} < 1$$

$$\Rightarrow J_1^{\,2} \prec 1 \tag{4.5}$$

$$J_2 = \iint\limits_{G_R-U_\varepsilon} \frac{\left|K_n(\zeta)\right|\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^2} d\sigma = \iint\limits_{G_R-U_\varepsilon} \frac{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\frac{\gamma_1}{2}}\left|K_n(\zeta)\right|\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^2\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\frac{\gamma_1}{2}}} d\sigma_\zeta$$

$$J_2^{\,2} \prec \iint\limits_{G_R-U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1+4}} d\sigma_\zeta \iint\limits_{G_R-U_\varepsilon} \left|K_n(\zeta)\right|^2 \left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1} d\sigma_\zeta$$

$$:= J_{21}J_{22} \tag{4.6}$$

olacaktır. Şimdi J_{21} integralini değerlendirelim: $\zeta\in G_R-U_\varepsilon$, $z_1\in L$ olmak üzere

$$\left|\zeta-z_1\right| \prec \left|y_R(\zeta)-z_1\right| \prec \left|\zeta-z_1\right| + d\left(z_1, L_R\right) \tag{4.7}$$

Bunu gösterelim: $t\in L_R$ olmak üzere $d\left(z_1,L_R\right)=\left|z_1-t\right|$ olsun. Sonuç 3.3'den bütün $\zeta\in G_R-U_\varepsilon$ ve $z\in L_R$ için $c_1 \le \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right| \le c_2$ ve $c_3\left|\zeta-z\right| \le \left|y_R(\zeta)-z\right| \le c_4\left|\zeta-z\right|$ dir. Bu durumda

$$\left|\zeta-z_1\right| = \left|\zeta-y_R(\zeta)+y_R(\zeta)-t+t-z_1\right| \le \left|\zeta-t\right| + \left|y_R(\zeta)-t\right| + \left|y_R(\zeta)-z_1\right| \le$$

$$\le \left(c_3^{-1}+1\right)\left|y_R(\zeta)-t\right| + \left|y_R(\zeta)-z_1\right| < \left|y_R(\zeta)-z_1\right| \le \left|y_R(\zeta)-t\right| + \left|t-\zeta\right| + \left|\zeta-z_1\right|$$

$$\le \left(c_4+1\right)\left|t-\zeta\right| + \left|\zeta-z_1\right| \prec \left|t-\zeta\right| + \left|\zeta-z_1\right|$$

olur. $\forall\zeta\in G_R-U_\varepsilon \Rightarrow z_1\in G_R-U_\varepsilon$ dır. Buna göre

$$\left|y_R(\zeta)-z_1\right| \prec \left|t-z_1\right| + \left|\zeta-z_1\right| = d\left(z_1,L_R\right) + \left|\zeta-z_1\right|$$

olacaktır. (4.7) ifadesini kullanarak J_{21} integrali için:

$$J_{21}=\iint\limits_{G_R-U_\varepsilon}\frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1+4}}d\sigma_\zeta\prec\iint\limits_{G_R-U_\varepsilon}\frac{d\sigma_\zeta}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1+4}}\prec\iint\limits_{y_R(G_R-U_\varepsilon)}\frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta-z_1\right|^{\gamma_1+4}}$$

$$\iint\limits_{|\zeta-z_1|\geq d(z_1,L_R)}\frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta-z_1\right|^{\gamma_1+4}}\prec d^{-(\gamma_1+2)}\left(z_1,L_R\right) \tag{4.8}$$

dır. Şimdi J_{22} integralini değerlendirelim.

$\gamma_1:=\gamma>0$ olsun. $\zeta\in U\left(z_1\right)=:\left\{\zeta:\left|\zeta-z_1\right|\leq d\left(z_1,L_R\right)\right\}$ ise (4.7)'den

$$\left|y_R(\zeta)-z_1\right|<\left|\zeta-z_1\right|$$

$$J_{22}=\iint\limits_{G_R-U_\varepsilon}\left|K_n(\zeta)\right|^2\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1}d\sigma_\zeta$$

$$=\iint\limits_{G_R-(U_\varepsilon\cup U(z_1))}\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1}\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta+\iint\limits_{U(z_1)}\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{\gamma_1}\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta\prec$$

$\zeta\in G_R-(U_\varepsilon\cup U\left(z_1\right))$ ise (4.7)'den, $\left|y_R(\zeta)-z_1\right|\prec\left|\zeta-z_1\right|+d\left(z_1,L_R\right)\prec\left|\zeta-z_1\right|$ dir.

Buradan,

$$\prec\iint\limits_{G_R-(U_\varepsilon\cup U(z_1))}\left|\zeta-z_1\right|^{\gamma_1}\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta+d^{\gamma_1}\left(z_1,L_R\right)\iint\limits_{U(z_1)}\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta=$$

$$=\iint\limits_{G_R-(U_\varepsilon\cup U(z_1))}\frac{h_0(z)\left|\zeta-z_1\right|^{\gamma_1}}{h_0(z)}\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta+d^{\gamma_1}\left(z_1,L_R\right)\iint\limits_{U(z_1)}\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta\prec$$

$$\prec\iint\limits_{G_R}h(\zeta)\left|K_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta+d^{\gamma_1}\left(z_1,L_R\right)\left(\max_{\zeta\in U(z_1)}\left|K_n(\zeta)\right|^2\right)\underbrace{mesU\left(z_1\right)}_{\pi d^2(z_1,L_R)}\prec \tag{4.9}$$

$$\prec 1+\max_{\zeta\in U(z_1)}\left|K_n(\zeta)\right|^2 d^{2+\gamma_1}\left(z_1,L_R\right)$$

elde edilir.

Lemma 3.6 ve Lemma 3.8'den

$$\max_{\zeta\in \overline{U(z_1)}}\left|K_n(\zeta)\right|^2\leq\max_{\zeta\in \overline{G_R}}\left|K_n(\zeta)\right|^2\prec\max_{\zeta\in\overline{G}}\left|K_n(\zeta)\right|^2\prec\max_{\zeta\in\overline{G_*}}\left|K_n(\zeta)\right|^2 \tag{4.10}$$

$\zeta \in L^*$ keyfi bir nokta olsun. $\left|z-\zeta\right| < c_1 d\left(z_1, L^*\right)$ diskinde ortalama değer teoremini $K_n\left(z\right)$ polinomlarına uygulayarak, Lemma 3.8'den öyle $c_1 < 1$ sabiti vardır ki,

$$\left|K_n\left(\zeta\right)\right|^2 \le \frac{1}{\pi c_1^2 d^2\left(z_1, L^*\right)} \iint\limits_{\left|z-\zeta\right|<c_1 d\left(z_1, L^*\right)} \left|K_n\left(\zeta\right)\right|^2 d\sigma_\zeta$$

$$\prec \frac{1}{d^2\left(z_1, L^*\right)} \iint\limits_{\left|z-\zeta\right|<c_1 d\left(z_1, L^*\right)} \frac{\left|z-z_1\right|^{\gamma_1}\left|K_n\left(\zeta\right)\right|^2}{\left|z-z_1\right|^{\gamma_1}} d\sigma_\zeta$$

dir. $\left|z-z_1\right| \ge d\left(z_1, L^*\right) - \left|z-\zeta\right| \ge d\left(z_1, L^*\right) - c_1 d\left(z_1, L^*\right) = \left(1-c_1\right) d\left(z_1, L^*\right)$ olduğundan,

$$\left|K_n\left(\zeta\right)\right|^2 < \frac{1}{d\left(z_1, L^*\right)}\left[\frac{1}{\left(1-c_1\right) d\left(z_1, L^*\right)}\right]^{\gamma_1} \iint\limits_{\left|z-\zeta\right|<c_1 d\left(z_1, L^*\right)} \left|z-z_1\right|^{\gamma_1}\left|K_n\left(\zeta\right)\right|^2 d\sigma_\zeta$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.7'den

$$\left|K_n\left(\zeta\right)\right|^2 \prec d^{-(2+\gamma_1)}\left(z_1, L^*\right)$$

dir. Bütün $p > 0$ için, (4.9), (4.10) ve (4.1)'den,

$$J_{22} \prec 1 + d^{2+\gamma_1}\left(z, L_R\right).d^{-(2+\gamma_1)}\left(z_1, L^*\right) \prec 1$$

olduğu ortaya çıkar. Eğer $-2 < \gamma_1 \le 0$ ise, $\left|y_R\left(\zeta\right) - z_1\right|^{\gamma_1} \prec \left|\zeta - z_1\right|$ olacağından sonuç olarak Lemma 3.7'e göre

$$J_{22} \prec 1 \tag{4.11}$$

elde edilir. Böylece (4.3), (4.5), (4.6), (4.8)-(4.11) bağıntılarından

$$\left|K_n\left(z_1\right)\right| \prec d^{-\left(1+\frac{\gamma_1}{2}\right)}\left(z_1, L_R\right)$$

dir. Buna göre Lemma 3.6'dan $z_1 \in L$ ve $\zeta \in L_R$ olmak üzere $\omega_1, \omega_2 \in \overline{\Delta} \Rightarrow$ $\Phi\left(z\right) = \omega_1$, $\Phi\left(\zeta\right) = \omega_2$ için,

$$d\left(z_1, L_R\right) = \left|z_1 - \zeta\right| = \left|\psi\left(\omega_1\right) - \psi\left(\omega_2\right)\right| > \left|\omega_1 - \omega_2\right|^{1+k}$$

$$d\left(z_1, L_R\right) \succ \left|\omega_1 - \omega_2\right|^{1+k} = \left|\Phi\left(\omega_1\right) - \Phi\left(\omega_2\right)\right|^{1+k} = n^{-(1+k)}$$

$$\Rightarrow d^{-\left(1+\frac{\gamma_1}{2}\right)}\left(z_1 - L_R\right) < n^{(1+k)\left(1+\frac{\gamma_1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \left|K_n\left(z_1\right)\right| \prec n^{(1+k)\left(1+\frac{\gamma_1}{2}\right)}, z_1 \in L$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da Teorem 4.1'i ispatlar. Teorem 4.2'nin ispatına bakarsak:

$\alpha \geq 1/2$ İse

$$d\left(z_1, L_R\right) = \left|z_1 - \zeta\right| \succcurlyeq \left|\Phi\left(\omega_1\right) - \Phi\left(\omega_2\right)\right|^{1/\alpha} \succcurlyeq n^{-1/\alpha}$$

$$\Rightarrow K_n\left(z_1\right) \prec d^{-\left(1+\frac{\gamma_i}{2}\right)}\left(z_1, L_R\right) \prec n^{\left(1+\frac{\gamma_i}{2}\right)\frac{1}{\alpha}}$$

$\alpha < \dfrac{1}{2}$ ise $1 \leq \delta \leq 2$ ve $\delta := \min\left\{\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{2}\right\}$ olmak üzere

$$K_n\left(z_1\right) < n^{\left(1+\frac{\gamma_1}{2}\right)\delta}$$

dir.

Teorem 4.1 ve Teorem 4.3 keyfi cebirsel polinomlar için genelleştirilebilir. Buna göre, $P_n\left(z\right)$ en çok n dereceli keyfi bir polinom ve $M_{n,p} := \left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}$ olmak üzere aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.4.

$0 < k < 1$ olmak üzere G bir yarıdisk ve $h\left(z\right)$ ağırlık fonksiyonu (3.22) ile verilsin. Bu durumda her $n = 1, 2, \ldots$ ve $\forall\ z_i \in$ L için

$$\left|P_n\left(z_i\right)\right| \leq c_7 n^{\left(\frac{(2+\gamma_i)(1+k)}{p}\right)} M_{n,p}$$

dır.

Teorem 4.5.

$0 < \alpha \leq 1$ için $G \in Q_\alpha$ ve $h\left(z\right)$ ağırlık fonksiyonu (3.22) ile verilsin. Bu durumda her $n = 1, 2, \ldots$ ve $\forall\ z_i \in L$ için μ (3.28)'deki gibi tanımlı olmak üzere,

$$\left|P_n\left(z_i\right)\right| \leq c_5 n^{\left(\frac{(2+\gamma_i)\mu}{p}\right)} M_{n,p}$$

dır.

Teorem 4.4 ve Teorem 4.5'in ispatı Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.6.

$i=\overline{1,m}$ olmak üzere, $0<\upsilon_i<1$ için $\Omega\in Q_\alpha(\upsilon_1,...\upsilon_m)$, $\alpha(2-\upsilon_i)\geq 1$ ve $h(z)$, (3.22) ile verilsin. Herhangi bir $z_i\in L$ için

$$1+\frac{\gamma_i}{2}>\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_i)}$$

sağlanırsa bu durumda $p>1$ ve her $n=1,2,...$

$$\mu_i^*:=\frac{2+\gamma_i}{p}-\frac{2}{p\alpha(2-\upsilon_i)} \quad , \quad s_i^*:=\left(\frac{(2+\gamma_i)(2-\upsilon_i)}{p}\right),\ i=\overline{1,m}$$

olmak üzere

$$\max_{z\in\overline{G}}\left(\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i^*}|P_n(z)|\right)\leq c_9 n^{2/\alpha p}M_{n,p} \tag{4.12}$$

ve

$$|P_n(z_i)|\leq c_5 n^{s_i^*} \tag{4.13}$$

dır.

İspat: $h(z)$ fonksiyonunun singüler noktalarına göre Blaschke fonksiyonları ele alınırsa,

$$B_R(z)=\prod_{i=1}^{m}B_R^i(z):=\prod_{i=1}^{m}\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{1-\overline{\Phi_R(z_i)}\Phi_R(z)},\ z\in\Omega^*$$

$$B_R(z_i)=0 \text{ ve } z\in L^* \text{ da } |B_R(z)|\equiv 1 \text{ dir.}$$

L üzerinde $\{z_i\}_{i=1}^m$ noktalar sistemi sonlu olduğundan basitlik için $i=1$ olduğu , $\mu^*:=\mu_1^*$; $s^*:=s_1^*$ durumu ele alınsın. $R>1$ için $R_1:=1+\frac{R-1}{2}$, $\widetilde{L}_*:=y(L_{R_1})$, $\omega=\Phi_R(z)$, $\omega_1=\Phi_R(z_1)$ olmak üzere $(R>R_1)$

$$h_R(\omega):=\left[\frac{\Psi_R(\omega)-\Psi_R(\omega_1)}{\omega B_R(\Psi_R(\omega))}\right]^{\mu^*}\frac{\mathrm{P}_n(\Psi(\omega))}{\omega^{n+1}}$$

ile gösterilsin. $z\in L$ ve sınırsız bölge için Cauchy-İntegral gösteriminden, $\Phi_R(z)=\omega$ olmak üzere bu noktaya göre

$$h_R(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R_1} h_R(t)\frac{dt}{t-\omega}$$

dır. Bütün $|t| = R_1 > 1$ için

$$\left|B_R\left(\Psi_R(t)\right)\right| \geq 1, |t|^{n+1} = R_1^{n+1} > 1$$

olduğundan

$$\mathrm{A}_n := \left|\Psi_R(\omega) - \Psi_R(\omega_1)\right|^{\mu^*}\left|\mathrm{P}_n\left(\Psi(\omega)\right)\right|$$

olmak üzere,

$$\left|h_R(\omega)\right| = \frac{\mathrm{A}_n}{\left|\omega B_R\left(\Psi_R(t)\right)\right|^{\mu^*}|\omega|^{n+1}} \prec \int\limits_{|t|=R_1} h_R(t)\frac{|dt|}{|t-\omega|}$$

dir. Buradan

$$\mathrm{A}_n \leq \left|\omega B_R\left(\Psi_R(t)\right)\right|^{\mu^*}|\omega|^{n+1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R_1}\left|\Psi_R(t) - \Psi_R(\omega_1)\right|^{\mu^*}\left|\mathrm{P}_n\left(\Psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-\omega|} \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.1)'den

$$\left|\omega B_R^1(z)\right| = \left|\omega\frac{\omega - \Phi_R(z_1)}{\frac{1}{\overline{\Phi_R(z_1)}} - \omega}\frac{1}{\overline{\Phi_R(z_1)}}\right| = \left|\frac{\omega}{\overline{\Phi_R(z_1)}}\right|\left|\frac{\omega - \Phi_R(z_1)}{\Phi_R(z_1) - \omega}\right| = \left|\frac{\omega}{\overline{\Phi_R(z_1)}}\right|$$

olduğundan

$$\left|\omega B_R\left(\Psi_R(\omega)\right)\right| = \left|\omega B_R(z)\right| = \left|\omega B_R^1(z)\right| = \left|\frac{\omega}{\overline{\Phi_R(z_1)}}\right|$$

$\left|\overline{\Phi_R(z_1)}\right| \geq 1$ ve $|\omega| < 1$ olduğundan

$$\left|\omega B_R\left(\Psi_R(t)\right)\right|^{\mu^*} \prec 1 \text{ ve } |\omega|^{n+1} \prec 1$$

elde edilir. Böylece (4.14)'den

$$\mathrm{A}_n \prec \int\limits_{|t|=R_1}\left|\Psi_R(t) - \Psi_R(\omega_1)\right|^{\mu^*}\left|\mathrm{P}_n\left(\Psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-\omega|} \quad (4.15)$$

dir.

(4.15) ifadesinde sağdaki integrali değerlendirmek için integral içini $\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{\gamma/p}\left|\Psi'(t)\right|^{2/p}$ ifadesiyle çarpıp, böler ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygulanırsa,

$$\mathrm{A}_n \prec \left(\int\limits_{|t|=R_1}\left(\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{\gamma/p}\right)^p\left|\mathrm{P}_n(\Psi(t))\right|^{\mathrm{P}}\left|\Psi'_R(t)\right|\left|dt\right|\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{|t|=R_1}\frac{\left(\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{\mu^*+\frac{\gamma(q-1)}{q}}\right)^q}{\left(\left|\Psi'_R(t)\right|^{\frac{2(q-1)}{q}}\right)^q\left|t-\omega\right|^q}\left|dt\right|\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\int\limits_{|t|=R_1}\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{\gamma}\left|\mathrm{P}_n(\Psi_R(t))\right|^{p}\left|\Psi'_R(t)\right|^2\left|dt\right|\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{|t|=R_1}\frac{\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{q\mu^*+\gamma(q-1)}}{\left|\Psi'_R(t)\right|^{2(q-1)}\left|t-\omega\right|^q}\left|dt\right|\right)^{1/q}=:\mathrm{A}_n^{\,1}.\mathrm{B}_n^{\,1} \tag{4.16}$$

$\mathrm{A}_n^{\,1}$ integralini değerlendirelim:

$$f_n(t):=\left(\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right)^{\frac{\gamma}{p}}\mathrm{P}_n\left(\Psi_R(t)\right)\left(\Psi'_R(t)\right)^{\frac{2}{p}}$$

olsun. $|t|=R_1$ çemberini

$mes\delta_n=\frac{2\pi R_1}{n}$ ile δ_n, n eşit parçaya ayırdıktan sonra $\mathrm{A}_n^{\,1}$ integraline ortalama değer teoremini uygulanırsa,

$$\mathrm{A}_n^{\,1}=\int\limits_{|t|=R_1}\left|f_n(t)\right|^{\mathrm{P}}\left|dt\right|=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\delta_k}\left|f_n(t)\right|^{\mathrm{P}}\left|dt\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|f_n(t'_k)\right|^{\mathrm{P}}mes\delta_k \qquad t'_k\in\delta_k$$

dir. Buna göre, ortalama değer teoremi uygulayarak

$$\left|f_n(t'_k)\right|^{\mathrm{P}}\le\frac{1}{\pi\left(1-\left|t'_k\right|\right)^2}\iint\limits_{|\zeta-t'_k|<|t'_k|-1}\left|f_n(\xi)\right|^{\mathrm{P}}d\sigma_\xi$$

elde edilir. Buradan

$$\mathrm{A}_n^1 \prec \sum_{k=1}^{n} \frac{mes\delta_k}{\pi\left(1-\left|t_k'\right|\right)^2} \iint\limits_{|\xi-t_k'|<|t_k'|-1} \left|f_n(\xi)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_\xi \quad , \quad t_k' \in \delta_k$$

bulunur.

t_k' noktaları ile merkezli disklerin en çok iki noktada üst üste düştüğünü ve $k=1,2,...,n$ için $mes\delta_1 \geq mes\delta_k$ olduğunu dikkate alarak,

$$\mathrm{A}_n^1 \prec \sum_{k=1}^{n} \frac{mes\delta_k}{\pi\left(\left|t_k'\right|-1\right)^2} \iint\limits_{|\zeta-t_k'|<|t_k'|-1} \left|f_n(\xi)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_\xi \prec$$

$$\prec \frac{mes\delta_k}{\pi\left(\left|t_1'\right|-1\right)^2} \iint\limits_{|\zeta-t_1'|<1-|t_1'|} \left|f_n(\xi)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_\xi + ... + \frac{mes\delta_n}{\pi\left(\left|t_n'\right|-1\right)^2} \iint\limits_{|\zeta-t_n'|<1-|t_n'|} \left|f_n(\xi)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_\xi \prec$$

$$\prec \frac{mes\delta_k}{\pi\left(\left|t_1'\right|-1\right)^2} \iint\limits_{1<|\xi|<R_1} \left|f_n(\xi)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_\xi < n \iint\limits_{1<|\xi|<R_1} \left|f_n(\xi)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_\xi \tag{4.17}$$

olur. (4.17) ifadesi açılırsa; öncelikle

$$R_1 = 1 + \frac{R-1}{2} = 1 + \frac{1+\frac{1}{n}-1}{2} = 1 + \frac{1}{2n}$$

ve $\left|t_1'\right| = R_1$ olmak üzere;

$$\frac{mes\delta_k}{\pi\left(\left|t_1'\right|-1\right)^2} = \frac{2\pi R_1}{\pi\left(R_1-1\right)^2} \prec \frac{R_1}{\left(R_1-1\right)} \Rightarrow \frac{R_1}{R_1-1} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}-1} = \frac{\frac{2n+1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = 2n+1$$

$$\Rightarrow 2n+1 \prec 2n+2n = 4n \prec n \Rightarrow \frac{mes\delta_k}{\pi\left(\left|t_1'\right|-1\right)^2} \prec n$$

olacaktır. Buradan da (4.17) elde edilir. A_n^1 için (3.6)'a göre

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_n^1 &\prec n \iint\limits_{1<|\xi|<R_1} \left|f_n(\xi)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_\xi \\
&= n \iint\limits_{1<|\xi|<R_1} \left|\Psi_R(\xi)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{\gamma} \left|\mathrm{P}_n\left(\Psi_R(\xi)\right)\right|^{\mathrm{P}} \left|\Psi_R'(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi \\
&\prec n \iint\limits_{G_{R_1}^*-G^*} \left|z-z_1\right|^{\gamma} \left|\mathrm{P}_n(z)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_z \prec nM_{n,p}^{p}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{A}_n^1 \prec n \iint\limits_{G_{R_1}^*-G^*} \left|z-z_1\right|^{\gamma} \left|\mathrm{P}_n(z)\right|^{\mathrm{P}} d\sigma_z \prec nM_{n,p}^{p} \tag{4.18}$$

(4.19)'daki integral için $h_0(z)$'ye bölünüp çarpılırsa,

$$A_n^1 \prec n \iint\limits_{G_{R_1}^* - G^*} \frac{h_0(z)\left|z - z_1\right|^{\gamma}}{h_0(z)} \left|P_n(z)\right|^{p} d\sigma_z \prec n M_{n,p}^{\ p}$$

olacaktır.

B_n^1 integralini değerlendirmek için Ψ_R' için Teorem 3.16'daki değerlendirmeyi de dikkate alarak,

$$\{t : |t| = R_1\} = \bigcup_{i=1}^{3} K_i$$

seçilsin. Burada

$$K_1 := \{t : |t| = R_1, |t - \omega| < \varepsilon_1\}:$$

$$K_2 := \{t : |t| = R_1, |t - \omega_1| < \varepsilon_2\}:$$

$$K_3 := \{t : |t| = R_1, |t - \omega| \geq \varepsilon_1, |t - \omega_1| \geq \varepsilon_2\}$$

$$\Phi(z) = \omega, \Phi(z_1) = \omega_1$$

Bu durumda,

$$B_n^1 = \left[\int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left|\Psi_R(t) - \Psi_R(\omega_1)\right|^{\mu^* q - \gamma(q-1)}}{\left|\Psi_R'(t)\right|^{2(q-1)} |t - \omega|^{q}} |dt| \right]^{1/q}$$

olduğunu göz önünde tutarak,

$$B_n^1 \prec \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left|\Psi_R(t) - \Psi_R(\omega_1)\right|^{\mu^* q - \gamma(q-1)} \left(|t| - 1\right)^{2(q-1)}}{\left(\Psi_R(t) - 1\right)^{2(q-1)}} \frac{dt}{|t - \omega|^{q}} =$$

$$= \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left|\Psi_R(t) - \Psi_R(\omega_1)\right|^{\mu^* q - \gamma(q-1)} \left(|t| - 1\right)^{2(q-1)}}{\left|\Psi_R(t) - 1\right|^{2(q-1)}} \frac{dt}{|t - \omega|^{q}} =$$

$$= \left(\int\limits_{K_1} + \int\limits_{K_2} + \int\limits_{K_3} \right) [idem] =: B_n^{11} + B_n^{12} + B_n^{13} \tag{4.19}$$

elde edilir. B_n^{11} integralini değerlendirelim: $\left|\Psi_R(t)\right| - 1 > |t| - 1$ olduğunu gösterelim. $\Psi_R(t) = \zeta$ ve $\left|\Phi_R(\zeta)\right| = t$ olmak üzere

$$|\zeta - 1| \succ \left|\Phi_R(\zeta) - 1\right|^{1/\alpha} \succ \left(\left|\Phi_R(\zeta)\right| - 1\right)^{1/\alpha} \Rightarrow \left|\Psi_R(t) - 1\right| \succ \left(|t| - 1\right)^{1/\alpha}$$

$$\Rightarrow \left(\left|\Psi_R(t)-1\right|\right)^{2(q-1)} \succ \left(\left(|t|-1\right)^{1/\alpha}\right)^{2(q-1)}$$

elde edilir. Buradan da

$$\mathrm{B}_n^{11} \prec \int_{\mathrm{K}_1} \frac{\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{\mu^* q-\gamma(q-1)}}{\left(|t|-1\right)^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)2(q-1)}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \tag{4.20}$$

olur. Buna göre,

$$\mathrm{B}_n^{11} \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{-2(q-1)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} \int_{\mathrm{K}_1} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \prec n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}-(q-1)}$$

olacaktır. Benzer şekilde

$$\mathrm{B}_n^{13} \prec \int_{\mathrm{K}_3} \frac{|dt|}{\left(|t|-1\right)^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)2(q-1)} |t-\omega|^q} \prec n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}-(q-1)} \tag{4.21}$$

dir. B_n^{12} değerlendirmesi ise iki başlık altında yapılacaktır:

a) $\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right| \leq \left|\Psi_R(t)\right|-1$ ise, bu durumda [27]'de Wedge koşulunu sağlayan bölgelerdeki konform dönüşüme göre

$$\mathrm{B}_n^{12} \prec \int_{\mathrm{K}_2} \frac{\left(|t|-1\right)^{2(q-1)}}{\left(\left|\Psi_R(t)\right|-1\right)^{(2+\gamma)(q-1)-\mu^* q}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \prec \int_{\mathrm{K}_2} \frac{\left(|t|-1\right)^{2(q-1)}}{\left(|t|-1\right)^{(2-\upsilon_1)\left[(2+\gamma)(q-1)-\mu^* q\right]}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \prec$$

$$\prec n^{(2-\upsilon_1)\left[(2+\gamma)(q-1)-\mu^* q\right]} \left(\frac{1}{n}\right)^{2(q-1)} \int_{\mathrm{K}_2} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \prec n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}-(q-1)}.$$

b) $\left(\left|\Psi_R(t)\right|-1\right) < \left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right| < c$ ise Lemma 3.6'a göre,

$$|t|-1 < |t-\omega_1| < c_1$$

dir. $\varepsilon_0 := |t|-1$ seçelim. (3.1)'e göre herhangi bir $\xi \in L^*$ için $d\left(\xi, L_R^*\right) \asymp d\left(\xi, L\right)$ bağıntısı sağlandığından $|t|-1 \asymp |\omega_1|-R_1$ dir. Bu durumda ω_1 merkezli ve $2^s \varepsilon_0$, $s=1,2,...N$ yarıçaplı diskleri alınabilir. Burada bir N sayısı seçilebilir. Öyle ki

$$Q_N = \left\{\tau : |\tau-\omega_1| = 2^N \varepsilon_0\right\}$$

çemberleri

$$Q_N \cap \left\{t : |t| = R_1\right\} \neq \varnothing$$

$$Q_{N+1} \cap \left\{ t : |t| = R_1 \right\} = \varnothing$$

koşullarını sağlar. Bu durumda

$$\mathrm{K}_2^{\,s} := \mathrm{K}_2 \cap \left\{ t : 2^{s-1}\varepsilon_0 \le |t-\omega_1| \le 2^s \varepsilon_0 \right\}$$

seçildikten sonra, $\left|\Psi_R(t) - \Psi_R(\omega_1)\right| > |t-\omega_1|^{(2-\upsilon_i)}$ olmak üzere

$$\mathrm{B}_n^{\,12} \prec \int\limits_{\mathrm{K}_2} \frac{\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{2(q-1)} \left(|t|-1\right)^{2(q-1)}}{\left(\left|\Psi_R(t)\right|-1\right)^{2(q-1)} \left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|^{\frac{2}{\alpha(2-\upsilon_1)}(q-1)}} \frac{|dt|}{|t-\omega|}$$

$$\prec \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{\mathrm{K}_2^{\,s}} \left[\frac{\left|\Psi_R(t)-\Psi_R(\omega_1)\right|}{\left|\Psi_R(t)\right|-1} \right]^{2(q-1)} \frac{\left(|t|-1\right)^{2(q-1)}}{|t-\omega_1|^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}} \frac{|dt|}{|t-\omega|}$$

olur. $|t|-1=\varepsilon_0$ ve $\mathrm{K}_2^{\,s}$ kümesine göre,

$$\frac{1}{|t-1|^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}} < \frac{1}{\left(|t|-1\right)^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}}$$

olduğundan,

$$\mathrm{B}_n^{\,12} \prec \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{\mathrm{K}_2^{\,s}} \left[\frac{|t-\omega_1|}{|t|-1} \right]^{2\varepsilon(q-1)} \frac{\left(|t|-1\right)^{2(q-1)}}{|t-\omega_1|^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \prec \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(2^s\varepsilon_0\right)^{2\varepsilon(q-1)} \left(\varepsilon_0\right)^{2(1-\varepsilon)(q-1)}}{\left(2^{s-1}\varepsilon_0\right)^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}} \int\limits_{\mathrm{K}_2^{\,s}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^{s2\varepsilon(q-1)} \left(\varepsilon_0\right)^{2(1-\varepsilon)(q-1)+2\varepsilon(q-1)}}{2^{\frac{2(s-1)(q-1)}{\alpha}} \left(\varepsilon_0\right)^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}} \int\limits_{\mathrm{K}_2^{\,s}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q}.$$

elde edilir. Buna göre,

$$s2\varepsilon(q-1) - \frac{2(s-1)(q-1)}{\alpha} = 2\frac{(q-1)}{\alpha}(\alpha s\varepsilon - s + 1) = \frac{2(q-1)}{\alpha}\left[s(\alpha\varepsilon - 1) + 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[2(q-1)s(\varepsilon\alpha - 1) + 2(q-1) \right] = \frac{1}{\alpha}\left[2(q-1)s\alpha\left(\varepsilon - \frac{1}{\alpha} \right) + 2(q-1) \right] =$$

$$= \left(\varepsilon - \frac{1}{\alpha} \right) 2s(q-1) + \frac{2(q-1)}{\alpha}$$

ve

$$|t|-1=\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 = R_1 - 1 = 1 + \frac{1}{2n} - 1 \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{2n} \asymp \frac{1}{n}$$

için

$$\mathrm{B}_n^{12} \prec 2^{\frac{2(q-1)}{\alpha}} n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}} \left(\frac{1}{n}\right)^{2(q-1)} \int\limits_{K_{2^s}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{2^{\varepsilon}}{2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{2s(q-1)}$$

$$\mathrm{B}_n^{12} \prec \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{K_{2^s}} \left[\frac{|t-\omega_1|}{|t|-1}\right]^{2\varepsilon(q-1)} \frac{(|t|-1)^{2(q-1)}}{|t-\omega|^q} |dt| \prec \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(2^s \varepsilon_0\right)^{2\varepsilon(q-1)} \left(\varepsilon_0\right)^{2(1-\varepsilon)(q-1)}}{\left(2^{s-1}\varepsilon_0\right)^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}} \int\limits_{K_{2^s}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^{s2\varepsilon(q-1)} \left(\varepsilon_0\right)^{2(1-\varepsilon)(q-1)+2\varepsilon(q-1)}}{2^{\frac{2(s-1)(q-1)}{\alpha}} \left(\varepsilon_0\right)^{\frac{2(q-1)}{\alpha}}} \int\limits_{K_{2^s}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \prec$$

$$\prec 2^{\frac{2(q-1)}{\alpha}} n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}} \left(\frac{1}{n}\right)^{2(q-1)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{2^{\varepsilon}}{2^{1/\alpha}}\right)^{2s(q-1)} \int\limits_{K_{2^s}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \prec$$

$$\prec n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}-2(q-1)} \int\limits_{K_{2^s}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^q} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{2^{\varepsilon}}{2^{1/\alpha}}\right)^{2s(q-1)} \prec n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}-(q-1)}$$

olacaktır. Burada $\varepsilon = \varepsilon(L) < 1$ dir. Böylece

$$\mathrm{B}_n^{12} \prec n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}-(q-1)} \tag{4.22}$$

dir. (4.19), (4.20), (4.21) ve (4.22) ifadelerinden

$$\mathrm{B}_n^{1} \prec n^{\frac{2(q-1)}{\alpha}-(q-1)} \tag{4.23}$$

olacaktır. (4.16), (4.18) ve (4.23) bağıntılarından da

$$\mathrm{A}_n \prec n^{\frac{2}{p\alpha}} M_{n,p}$$

dir.

$\{z_i\}_{i=1}^{m}$ noktalar sistemi izole edildiğinden (4.12) elde edilir. (4.13)'ün ispatı için (4.2)'e benzer şekilde $\mathrm{P}_n(z)$ için integral gösterimi yazılabilir:

$$\mathrm{P}_n(z_1) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{G_R} \frac{\mathrm{P}(\zeta)\, y_{R,\zeta}}{\left(y_R(\zeta) - z_1\right)} d\sigma_\zeta \quad , \; z_1 \in L$$

Daha sonra, diğer çalışmalara benzer olarak,

$$\left|\mathrm{P}_n(z_1)\right| \prec M_{n,p} \left(\iint\limits_{y(G_R - U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)+2q}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\prec M_{n,p}\left(\iint\limits_{|\zeta-z_1|\geq d(z_1,L_R)}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z_1|^{\gamma_1(q-1)+2q}}\right)^{\frac{1}{q}}\prec M_{n,p}d^{-\left(\frac{\gamma_1+2}{p}\right)}(z_1,L_R)$$

olduğu gösterilebilir. Böylece bu son eşitsizlik ve Lesley'in çalışmasına göre (4.14) ifadesi elde edilir [27].

Dikkat edilmelidir ki Teorem 4.4 ve Teorem 4.5 kesindir. Bu $G=B$, $h(z)\equiv 1$, $\mathrm{P}_n(z)=\sum_{j=1}^{n}(j+1)z^j$ örneği üzerinde kolayca görülebilir. Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'nin kesinliği üzerine tartışmalar [17]'de yapılmıştır. Ayrıca Teorem 4.2.'nin ispatı, $K_n(z)$ için $M_{n,2}\equiv 1$ olduğunda, Teorem 4.5'den ispat elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle bu tez çalışmasında ele alınan sonuçlar özetlenecek daha sonra, bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceği ile ilgili öneriler verilecektir.

5.1. SONUÇLAR

Ağırlık fonksiyonu (3.22) deki gibi tanımlanmak üzere bu tezde ele alınan konu ile ilgili sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

(1) $\frac{1}{2} \le \beta_i \le \alpha \le 1$ olmak üzere, Q_α ve $Q_{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m}$ sınıfından olan G bölgesinde $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün $n \in \mathbb{N}$ için, $\left|K_n(z)\right|$ nin değerlendirilmesi bölgeyi belirleyen α ya bağlı olarak hesaplanmıştır.

(2) $0<\alpha \le 1$ olmak üzere, $G \in Q_\alpha$ ve ağırlık fonksiyonu için, $\gamma_i=0$, $i=\overline{1,m}$ olmak üzere $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün $n \in \mathbb{N}$ için, $\left|K_n(z)\right|$ nin değerlendirilmesi bölgeyi belirleyen α ya ve $\delta=\delta(G)$, $1 \le \delta \le 2$, ya bağlı olarak hesaplanmıştır. Burada dikkat edilmelidir ki, $\gamma_i=0$ olduğu durumda (1) de yapılan değerlendirme $0<\alpha<\frac{1}{2}$ aralığı içinde yapılmıştır.

Buna göre Teorem 3.28 -3.30 sonuçlarına göre, $\overline{G}$ da $K_n(z)$ polinomlarının maksimum normu, ağırlık fonksiyonu ve L sınır eğrisi singüleriteye sahip olmadığı durumdaki gibi kalır.

(3) $\Omega \in Q_\alpha(\upsilon_1,\dots,\upsilon_m)$, $0<\upsilon_i<1$ ve $\alpha(2-\upsilon_i) \ge 1$ olmak üzere, $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün $n \in \mathbb{N}$ için, $\left|K_n(z)\right|$ nin değerlendirmesi $1+\frac{\gamma_i}{2}=\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_i)}$ koşulu altında bölgeyi belirleyen α ya bağlı olarak hesaplanmıştır.

Ω bölgesinin sınır yayları $C(1,\alpha)$ sınıfından ise, bu durumda $0<\upsilon_i<1$ olmak üzere, $\upsilon_i\pi$ iç açı noktalarını içeren ve sınırı parçalı düzgün olan bir bölge bulunabilir. Bu durumda $1+\frac{\gamma_i}{2}=\frac{1}{(2-\upsilon_i)}$, $i=\overline{1,m}$ koşulu altında $0<\upsilon_i<1$ olduğu durumda P.K. Suetin'in yapmış olduğu çalışmanın genelleşmesi elde edilir. Bu değerlendirme F. G. Abdullayev tarafından verilmiştir.

(4) $0<\upsilon_1<1$ için $\Omega\in Q_\alpha(\upsilon_1)$ ve $\alpha(2-\upsilon_1)\geq 1$ olsun. $1+\frac{\gamma_1}{2}<\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_1)}$ koşulu altında $\forall z\in\overline{G}$ ve bütün $n\in\mathbb{N}$ için, $|K_n(z)|$ nin değerlendirilmesi verilmiştir.

(5) $0<\upsilon_i<1$ için $\Omega\in Q_\alpha(\upsilon_1,...,\upsilon_m)$ ve $\alpha(2-\upsilon_i)\geq 1$ olsun. $1+\frac{\gamma_i}{2}>\frac{1}{\alpha(2-\upsilon_i)}$ koşulu altında $\forall z\in\overline{G}$ ve bütün $n\in\mathbb{N}$ için, $|K_n(z)|$ nin değerlendirilmesi verilmiştir.

(6) Yukarıda verilen sonuçlar en çok n dereceli keyfi polinomlar için genelleştirilmiştir.

(7) $0\leq k<1$ olmak üzere G bir yarıdisk olduğunda ve ağırlık fonksiyonu (3.22) deki gibi tanımlandığında, sınır ve ağırlık fonksiyonunun singüler olduğu noktalarda her $n=1,2,...$ için $|K_n(z)|$ nin değerlendirilmesi verilmiş ve bu değerlendirme düzgün norm altında bölgenin kapanışına genişletilmiştir.

(8) $0<\alpha\leq 1$ için $G\in Q_\alpha$ bölgesi alındığında sınır ve ağırlık fonksiyonunun singüler olduğu noktalarda her $n=1,2,...$ için $|K_n(z)|$ nin değerlendirilmesi verilmiştir. Bu değerlendirme düzgün norm altında bölgenin kapanışına genişletilmiştir.

(9) (7) ve (8) deki sonuçlar en çok n dereceli keyfi cebirsel polinomlar için genelleştirilmiştir.

Dikkat edilmelidir ki Teorem 4.4 ve Teorem 4.5 de kesin sonuçlar elde edilmiştir.

5.2. ÖNERİLER

Ağırlık fonksiyonu (3.22) deki gibi tanımlı olmak üzere,

1) $G \in Q_\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ ve $i = \overline{1,m}$ için (3.22) deki γ_i'ler sıfırdan farklı olduğunda $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün n doğal sayıları için $|K_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı, bölgeyi belirleyen α'ya bağlı olarak nasıl değişecektir?

2) $G \in Q_{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m}$, $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ ve $i = \overline{1,m}$ için sınır eğrisi ile ağırlık fonksiyonu arasında nasıl bir ilişki olmalıdır? Buna bağlı olarak $\forall z \in \overline{G}$ ve bütün n doğal sayıları için $|K_n(z)|$'nin sıfıra gitme oranı, bölgeyi belirleyen $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m$' lere bağlı olarak nasıl değişecektir?

KAYNAKLAR

[1] Szegö, G., "Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören", Math. Z. **9,** 218-270, (1921)

[2] Carleman, T. "Uber die approximation Analytischer Functionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potezen"-Ark. Mat., Astron. Fys., **17**, 1-30, (1922/23)

[3] Bochner, S., "Über orthogonale Systeme analytischer Functionen", Math. Z. **14**, 180-270, (1922).

[4] Korovkin, P. P., "The asymptotic representation of polynomials orthogonal over a region", Dokl. Akad. Nauk SSSR **58**, 1883-1885, (1947); Russian MR **9** . 349

[5] Dzrbasjan, M.M., "On an extremal problem in the theory of weighted ortogonal polynomials", Izv. Akad. Nauk SSSr Ser. Mat. **12,** 555-568, (1948); (Russian) MR. **10**, 444.

[6] Rosembloom, P.C., Warschawskii, S.E.,"Approximation by Polynomials,Lectures on Functions of a Complex Variable", Univ. Of Michagen Press, MR **17**, 605, 287-302, (1955).

[7] Kuzmina, A.L. "Asymtotic representation of the orthogonal polynomials along a piecewise analytic curve."In: Func. Anal. and Theory of Function. Kazan (1963)[in Russian]

[8] Suetin P.K. "Main properties of the orthogonal polynomials along a circle", Uspekhi Mat. Nauk,**vol.21,no:2(128)**, 41-88, (1966)[in Russian]

[9] Suetin P.K. "Some estimation for orthogonal polynomials along a circle under the singularity of the weight and circle", Siberian Mat.J., **vol.8, no:5**: 1070-1078, (1967)[in Russian]

[10] Simirnov, V.I., Lebedev, N.A. "<u>Functions of A Complex Variable</u>", The M.I.T. Pres, 488 s.(1968).

[11] Suetin P.K. .,"<u>Polynomials Orthogonal over a Region and Bieberbach Polynomials</u>", Providence, Rhode Island, American Math Society, 91 s., (1974)

[12] Lehto, O.,Virtanen, K.I. "Quasiconformal Mappings in the Plane", Springer-Verlag, Berlin, 258 s., (1973)

[13] Belyi, V.I. "Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary", Math.USSR-Sb.,pp.289-317, (1977)

[14] Abdullayev, F.G.,Andrievskii, V.V. "On the orthogonal polynomials in the domains with K-quasiconformal boundary", Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR., Ser.FTM.**1**, 3-7, (1983) [in Russian]

[15] Abdullayev, F.G. "On Orthogonal Polynomials in Domains with Quasiconformal Boundary", (Russian) Dissertation (Donetsk), (1986)

[16] Abdullayev, F.G. "On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane (Part1)", Ukr. Math. J. **Vol. 52**, **№ 12**, pp. 1807 –1817., (2000) (Trans. from Ukr. Mat. Zh., **Vol. 52**, **№ 12**, pp. 1587-1595)

[17] Abdullayev, F.G. "On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane (Part II)" Ukr. Math. J. **Vol. 53, № 1**, pp. 1 –14, (2001) (Trans. from Ukr. Mat. Zh., **Vol. 53, № 1**, pp. 3-13)

[18] Abdullayev, F.G. "On some properties of orthogonal polynomials over an area in domains of the complex plane (Part III)", Ukr. Math. J., **12**, p. 1588-1599, (2001)

[19] Abdullayev, F.G. "On the İnterference of the Weight and Boundary Contour for Orthogonal Polynomials over the Region",Journal of Computational Analysis and Applications, **Vol.6, No.1**, 31-41, (2004)

[20] Abdullayev, F.G. "The Properties of the Orthogonal Polynomials with Weight Having Singularity on the Boundary Contour", Journal of Computational Analysis and Applications, **Vol.6, No.1**, 43-59, (2004)

[21] Abdullayev, F.G., Değer U., "On the Orthogonal Polynomials with Weight Having Singularities on the Boundary of Regions in the Complex Plane", Bull. Belg. Math. Soc. (in press).

[22] Walsh, J. L., "Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain", (1935); Russian transl., IL, Moscow, 398 s. (1961).

[23] Andrievskii, V.V., Beyli, V.I., Dzyadyk, V.K. "Conformal invariants in constructive theory of functions of complex plane"Atlanta.World Federation Publ.Com., 199 s., (1995).

[24] Rikman,S."Characterisation of Quasiconformal arcs" Ann. Acad. Sci. Fen Ser. A. Mathematica, 395 s., (1966)

[25] Ahlfors, L.V. "Lectures on Quasiconformal Mappings", Wadsworth. INC,Belmont, California, 146 s., (1987)

[26] Andrievskii, V.V. "Uniform Convergence of Bieberbach Polynomials in Domains with Piecewise Quasiconformal Boundary,İn Theory of Mappings and Approximation of Functions" (G.D. Suvarov ed.) Naukova Dumka,Kiev, (Russian), 3-18. (1983)

[27] Lesley, F.L., "Conformal mapping of domains satisfying Wedge conditions", Proc. Amer. Math. Soc., **93**, 483-488, (1985)

[28] Rudin, W. "Real and Complex Analysis", Mc Graw-Hill, 342 s., (1974)

[29] Depree, J. D., Gehring, C.C. "Elements of Complex Analysis", Addison Wesley Publishing Company, USA, (1969)

[30] Saff, E. B., Snider, A.D. "Fundementals of Complex Analysis" Prentice Hall,Upper Saddle River,New Jersey, (1993)

[31] Halilov,H., Hasanoğlu, A., Can, M "YMI,Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi",1.Baskı,Alemdar O.,Literatür, 470 s., (1999)

[32] Başkan, T., "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", 3.Baskı,Vipaş, 390 s.,(1998)

[33] Ahlfors, L.V., "Complex Analysis", Second Edition, McGrow Hill, Ltd. Tokyo, (1996)

[34] Andrievskii, V.V., "Constructive characterization of the harmonik functions in domains with quasiconformal boundary",In: Quasiconformal contunation and Approximation by function in the set of the complex plane contunation, Kiev, (1985) [in Russian]

[35] Koosis, P., "Introduction to H_p Spaces", Cambridge Univ. Press, 287 s., (1980)

[36] Pommerenke, Ch., "Boundary Behaviour of Conformal Maps", Springer–Verlag, Berlin, 300 s., (1992)

ÖZGEÇMİŞ

27/10/1980 tarihinde, Şanlıurfa'nın Siverek ilçesinde doğdu. İlkokulu Siverek Yavuz Selim İlkokulunda, ortaokulu ise, Siverek Ortaokulu'nda tamamladıktan sonra; 1996-1997 eğitim- öğretim yılında, İçel Hacı Sabancı Lisesi'nden mezun oldu. 1998-1999 eğitim- öğretim yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. Aynı eğitim-öğretim yılında Ege Üniversitesi'nin Hazırlık Sınıfı programına katılarak, iyi bir ortalama ile hazırlık sınıfını geçti. 2002-2003 eğitim- öğretim yılında da Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu.