

**GENEL GÖRELİLİK KURAMINDA
(1+1) BOYUTLU
DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİ**

EVİRİM ERSİN KANGAL

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FİZİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**MERSİN
TEMMUZ- 2008**

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ali HAVARE

Jüri Üyesi
Prof. Dr. Gülsen ÖNENGÜT

Jüri Üyesi
Yrd. Doç. Dr. Hülya METİN

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../.....tarih ve/..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ÖZ

Bu çalışma, kütleli spin-1 parçacığının Kütleli Çekim alanındaki dinamiğini Genel Görelilik kuramında anlamayı amaçlamaktadır. Bu tezde, kütleli spin-1 parçacığını betimleyen Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denkleminin eğri uzay-zamandaki ifadesi ele alınmıştır. Ele alınan bu denklemden Robertson-Walker uzay-zamanında betimlenen üç farklı evren modeli için ikinci dereceden DKP denklemi elde edilmiştir. Bu denklemler çözümlenmiş ve her bir model için akım yoğunlukları hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kütleli Spin-1 Parçacığı, Eğri uzay-zaman, (1+1) Boyut

ABSTRACT

This work aims to understand effects which the field of gravity acts over the dynamics of the massive spin-1 particle according to the General Relativity. Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) equation describing the spin-1 particle with mass in the curved space-times is examined. The second order differential equation forms of DKP for three different cosmological models described in Robertson-Walker space-times has been obtained from gotten equation. These equations are solved and the compenents of current density have been caculated for every cosmological models.

Keywords: Massive Spin-1 Particle, Curved space-time, (1+1) dimation.

TEŞEKKÜR

Eğitim yaőamım boyunca bana gösterdikleri maddi ve manevi destek için değerli aileme sonsuz teőekkürlerimi sunarım. Bunun yanı sıra, tez konusunun belirlenmesinde ve bu çalışmanın her aőamasında bana yardım eden ve özveride bulunan hocam ve danıőmanım Doç. Dr. Ali HAVARE' e ve ayrıca çalışmanın bazı aőamalarında önerilerinden ve tartıőmalarından yararlandığım Dr. Kenan SÖĞÜT' e teşekkür etmeyi kendime bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGE DİZİNİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI.....	6
2.1. RIEMANN UZAY-ZAMANINDA DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİ.....	7
2.2. KOZMOLOJİK EVREN MODELLERİ.....	9
2.3. DÜZ FRIEDMAN ROBERTSON-WALKER METRİĞİ.....	10
2.4. DÜZ FRIEDMAN ROBERTSON-WALKER METRİĞİ İÇİN TERMODİNAMİĞİN İKİNCİ YASASI.....	11
2.5. DÜZ FRIEDMAN ROBERTSON-WALKER MODELİNDEKİ ZAMANSAL DEĞİŞİM.....	13
2.6. BAZI EVREN MODELLERİ.....	15
2.7. EVRENİN DİNAMİĞİ.....	17
3. MATERYAL ve METOD.....	18
3.1. (1+1) BOYUTLU DÜZ UZAY-ZAMANDA SERBEST PARÇACIK İÇİN DKP DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	18
3.2. (1+1) BOYUTLU EĞRİ UZAY-ZAMANDA VE ELEKTRİKSEL ALANDA DKP DENKLEMİNİNİN ÇÖZÜMÜ.....	20
3.3. DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN AKIM YOĞUNLUĞUNUN BİLEŞENLERİ.....	25

3.4. VEKTÖR BOZANLARININ HARMONİK SALINIMI VE KUANTUMLU MOMENTUMU.....	27
---	----

4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....29

4.1. GENEL METRİK İÇİN KATSAYILAR HESABI.....	29
4.1.1 CHRİSTOFFEL SEMBOLLERİNİN BULUNMASI.....	29
4.1.2 SPİN BAĞLANTI KATSAYILARININ HESAPLANMASI.....	33
4.1.3 (1+1) BOYUTLU UZAY-ZAMANDA DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİ	34
4.1.4 (1+1) BOYUTTA ROBERTSON-WALKER METRİĞİ İÇİN DUFFİN- KEMMER PETIAU DENKLEMİ	37
4.2. $a(t) = a_0 t$, SCHRÖDİNGER EVREN MODELİNDE SPİN-1 PARÇACIĞI.....	38
4.2.1. DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	38
4.2.2. ASİMTOTİK ÇÖZÜM.....	42
4.2.3. BOYLANDIRMA KATSAYISININ BULUNMASI.....	43
4.2.4. AKIM YOĞUNLUĞUNUN HESAPLANMASI.....	44
4.2.5. FREKANS ARALIĞININ BELİRLENMESİ	47
4.2.6 KUANTUMLANMA KOŞULU.....	47
4.3. $a(t) = a_0 t^{\frac{1}{2}}$, IŞIMA BASKIN EVREN MODELİNDE SPİN-1 PARÇACIĞI.....	47
4.3.1. DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	47
4.3.2. ASİMTOTİK ÇÖZÜM.....	50
4.3.3. BOYLANDIRMA KATSAYISININ BULUNMASI	51
4.3.4. AKIM YOĞUNLUĞUNUN HESAPLANMASI.....	52
4.3.5. FREKANS ARALIĞININ BELİRLENMESİ.....	54
4.3.6 KUANTUMLANMA KOŞULU.....	55
4.4. $a(t) = e^{Ht}$, BOŞLUK BASKIN EVREN MODELİNDE SPİN-1 PARÇACIĞI.....	55
4.4.1. DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	55
4.4.2. ASİMTOTİK ÇÖZÜM.....	58
4.4.3. BOYLANDIRMA KATSAYISININ BULUNMASI.....	59
4.4.4. AKIM YOĞUNLUĞUNUN HESAPLANMASI.....	60
4.4.5. FREKANS ARALIĞININ BELİRLENMESİ..	62
4.4.6 KUANTUMLANMA KOŞULU.....	62

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....64

KAYNAKLAR.....69

ÖZGEÇMİŞ.....72

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL	SAYFA
Şekil 1.1 Dikey eksene göre ω açısal hız ile dönen su dolu kova.....	1
Şekil 1.2 Kova durduktan sonra kova içindeki suyun dönme hareketinden dolayı..... kovanın yüzeyinde oluşan konkavlık.....	1
Şekil 1.3 Eylemsiz gözlem çerçevesi ile ilgili olarak merkezdeki nokta dönme noktası olarak tanımlanır ve kesikli çizgilerin uç noktaları da bu dönme noktasına göre hareketlidir.....	2
Şekil 1.4 Her iki gözlemcinin aynı açısal hızla döndükleri durum.....	2
Şekil 1.5 Kovanın durmasından dolayı gözlemciler arasında oluşan görece..... hareketlilik.....	2
Şekil 1.6 Boş uzay içinde sabit ivme ile hareket eden bir kapalı kutu içindeki..... gözlemci.....	4
Şekil 1.7 Düzgün kütle çekim alanındaki kapalı kutu içerisindeki gözlemci.....	4
Şekil 2.1 Merkezi noktaya göre simetrik noktaların gösterimi.....	9
Şekil 2.2 Türdeş uzay gösterimi.....	10

ÇİZELGE DİZİNİ

ÇİZELGE	SAYFA
Çizelge 5.1. Schrödinger evren modeli için elde edilen sonuçlar.....	63
Çizelge 5.2. Işınım baskın evren modeli için elde edilen sonuçlar.....	64
Çizelge 5.3. Boşluk baskın evren modeli için elde edilen sonuçlar.....	65

SİMGELER VE KISALTMALAR

- $e_{(i)}{}^{\mu}(x)$: Bir matrisi düz uzay-zamandan eğri uzay-zamana dönüştüren dört ayak
- $e^{(i)}{}_{\mu}(x)$: Bir matrisi eğri uzay-zamandan düz uzay-zamana dönüştüren dört ayak
- $\beta^{(a)}$: Minkowski uzay-zamanında Kemmer matrisleri
- A_a : Minkowski uzay-zamanında elektromanyetik alan tensörü
- β^{μ} : Rieman uzay-zamanında Kemmer matrisleri
- A_{μ} : Rieman uzay-zamanında elektromanyetik alan tensörü
- Σ_{μ} : Spin-1 parçacığının spin bağlantı katsayısı
- Γ_{μ} : Spin-1/2 parçacığının spin bağlantı katsayısı
- $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$: Christoffel Sembolü
- $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(x)$: Çizgisel koordinat dönüşüm matrisi
- ΔE : Sonsuz küçük enerji değişimi
- ΔV_F : Fiziksel Hacim elemanı
- ΔV_M : Matematiksel Hacim elemanı
- ψ_K : Kemmer dalga fonksiyonu
- ψ_D : Dirac dalga fonksiyonu
- $g_{\mu\nu}$: Metrik Tensörü
- Ψ : Dalga Fonksiyonu
- γ^{α} : Eğri Uzay-Zamandaki 4x4' lük Dirac Gama Matrisleri
- $\gamma^{(i)}$: Düz uzay-zamandaki 4x4' lük Dirac Matrisleri
- $S^{\mu\nu}$: Spin tensör
- $a(t)$: Ölçek çarpanı
- $\eta_{(ij)}$: Düz uzay-zaman ölçü tensörü

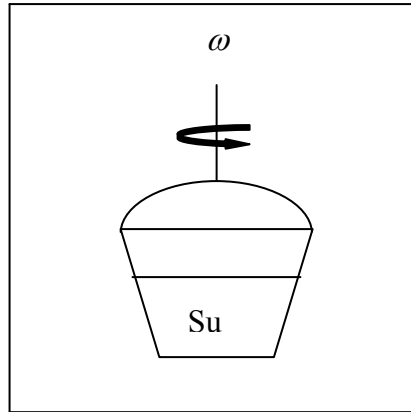
Not :

- (i) Bu çalışmada çizgi elemanı için kullanılan işaret anlaşması $(-,+,+,+)$ şeklinde olup özel olarak belirtilmedikçe indisler $(0,1,2,3)$ değerlerini almaktadırlar.
- (ii) Denklemlerdeki terim veya katsayıların kesme işareti (A' gibi) konuma göre türevi, nokta işareti (\dot{A} gibi) ise zamana göre türevi betimlemektedir.
- (iii) DKP; Duffin-Kemmer-Petiau, RW; Robertson Walker, FRW; Friedman Robertson Walker olarak kısaltılmıştır

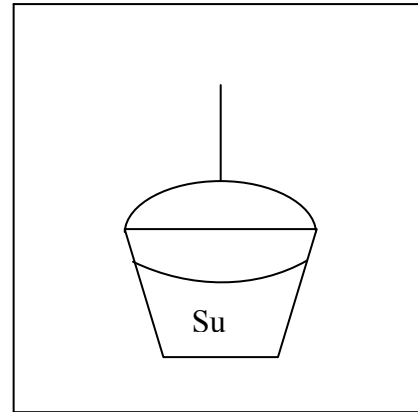
1. GİRİŞ

Kütle çekim olgusunu anlama süreci Isaac Newton'la başlar, Bishop Berkeley, Ernst Mach ve Albert Einstein'a kadar uzanır. Bu süreçte kütle çekim olgusu sorgulanarak bu olguyu açıklayan ilkeler ve yasalar ortaya konulur. Bu ilkeler ve yasalar ortaya konulurken bunları destekleyen düşünsel ve gerçek deneyler tasarlanmıştır.

Fiziksel nicelikler gözlem çerçevelerine göre değişmektedir. Newton, bu sorunu ortadan kaldırmak için, evrende var olan tüm hareketlerden bağımsız, mutlak bir uzayın var olduğunu kabul ederek evrendeki tüm hareketleri açıklamaya çalışmıştır. Newton bu görüşünü desteklemek için bir kova su deneyini düşünsel olarak tasarlamıştır. Bu deneyde bir kova su, kovanın dönme eksenine doğrultusunda ω açısal hızı ile döndürüldüğünde Şekil 1.1'deki durum oluşmaktadır[1].



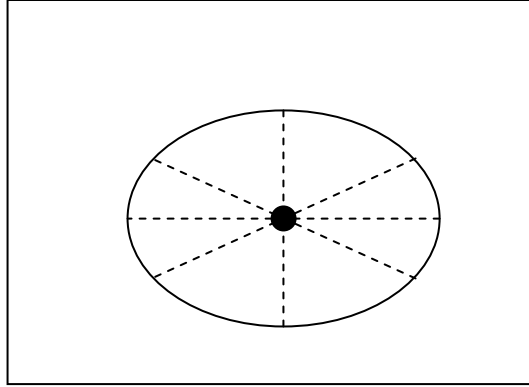
Şekil 1.1: Dikey eksene göre ω açısal hız ile dönen su dolu kova.



Şekil 1.2: Kova durduktan sonra kova içindeki suyun dönme hareketinden dolayı kovanın yüzeyinde oluşan konkavlık

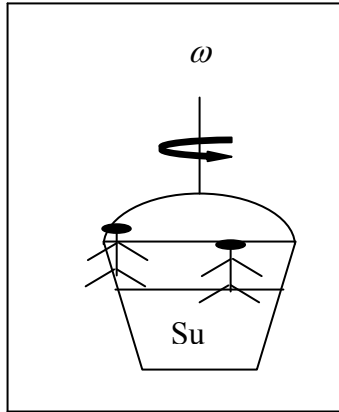
Bu deneyde kova ve içerisindeki su aynı hızla döndüğü için her hangi bir görelî hız farkı oluşmayacaktır. Dolayısıyla kova üzerindeki bir gözlemci suyun yüzeyindeki gözlemciyi hareketsiz olarak gözlemleyecektir. İkinci bir durum olarak, dönmekte olan kova durdurulursa içerisindeki su dönme hareketine devam edeceğinden Şekil 2'deki durum ortaya çıkacaktır. Bu anlamda görelî hız farkı merkez kaç kuvvetine neden olmaktadır. Elde edilen bu sonuçlardan Newton, evrendeki hareketleri tanımlayacak mutlak bir uzayın var olması gerektiğini söylemiştir ve bu uzayın tanımlanmış olduğu gözlem çerçevesine de eylemsiz gözlem çerçevesi adını vermiştir. Newton'a göre; katı

bir cisimin dönme eksenini eylemsiz gözlem çerçevesi olarak tanımlanabilir. Çünkü dönme noktasının çizgisel hızı sıfırdır ve bu yüzden diğer tüm noktalar sahip oldukları çizgisel hızdan dolayı dönme noktasına göre hareketlidirler.

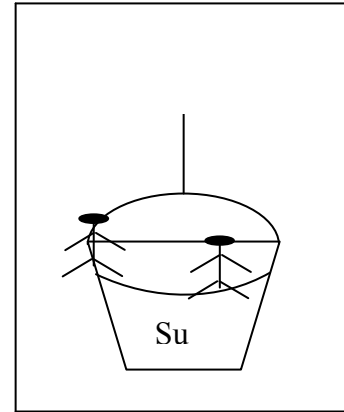


Şekil 1.3: Eylemsiz gözlem çerçevesi ile ilgili olarak merkezdeki nokta dönme noktası olarak tanımlanır ve kesikli çizgilerin uç noktaları da bu dönme noktasına göre hareketlidir.

Fakat Newton'un bu düşüncesi Berkeley tarafından eleştirildi. Çünkü Berkeley'e göre tüm hareketleri tanımlayacak mutlak bir uzayın varlığı mümkün değildir. Hatta bunun tam tersine bir nesnenin hareketi bir başka cisme göre belirlenebileceğini söylemiştir. Berkeley, su ile dolu kova deneyini yeniden tasarlayarak hem kovanın hem de suyun yüzeyinde bir gözlemcinin bulunması durumunu yeniden göz önüne almıştır. Bu düşünsel deney şekil 1.4 ve 1.5'de verilmektedir.



Şekil 1.4: Her iki gözlemcinin aynı açısal hızla döndükleri durum.



Şekil 1.5: Kovanın durmasından dolayı gözlemciler arasında oluşan görece hareketlilik.

Şekil 1.4'teki durumda; kova üzerindeki gözlemci su üzerindeki gözlemciyi durgun olarak görürken, aynı şekilde su üzerindeki gözlemci de kova üzerindeki gözlemciyi durgun olarak görür. Bu bağlamda ne kovadaki gözlemci ne de su yüzeyindeki gözlemci

kovanın döndüğünü söyleyecektir. Bu yüzden Berkeley böyle bir hareketin boş uzayda dönme tanımlamasının mümkün olamayacağını söylemiştir.

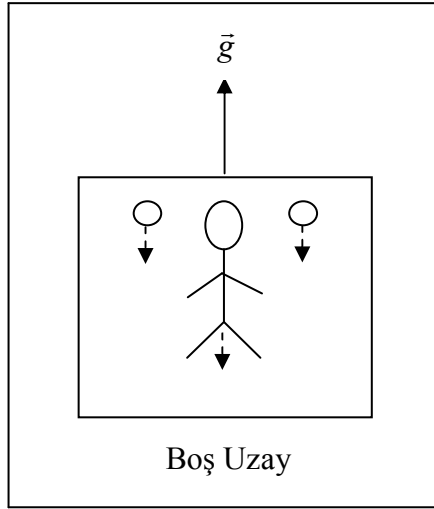
Şekil 1.5'teki durumda ise; kovanın üzerinde duran gözlemci su yüzeyinde duran gözlemcinin kendisine göre döndüğünü söyleyecektir. Buna karşılık, su yüzeyinde duran gözlemci ise kova üzerinde duran gözlemcinin kendisine göre dönme hareketi yaptığını ifade edecektir. Bu durumda her iki gözlemci de kendilerinin mutlak uzay olduklarını düşüneceklerdir. Buna göre kovanın boş uzayda döndüğünü ne kova üzerinde duran gözlemci ne de su üzerinde duran gözlemci söyleyebilir. Berkeley ve Mach bu sorunu çözmek için bu iki gözlemciden bağımsız başka bir nesnenin var olması gerektiği düşüncesini benimsemişlerdir. Bu bağlamda hem Berkeley hem de Mach yerel gözlem çerçevesi ile uzak yıldızlardaki gözlem çerçeveleri arasında bir ilişkinin kurulması gerektiğini kabul etmişlerdir. Bununla ilişkili olarak Berkeley ve Mach'a göre Foucault sarkacı deneyinde elde edilen sonucun kaynağı tamamen sabit yıldızlardır. Çünkü bu deneyde sarkaç yer küre üzerinde ve sarkacın salındığı düzlem yer küreye göre dönmektedir. Sarkacın salınım düzleminde bulunan bir gözlemci uzak sabit yıldızdaki gözlemciye hareketli olarak görünecektir. Oluşan bu görelî hareket, sistemde bir merkez kaç kuvveti doğuracaktır ve bunun sonucu olarak sarkaçta tek bir doğrultuda değil de kapalı bir yörünge boyunca bir salınım hareketi görülecektir. Mach, Foucault deneyinde merkez kaç kuvvetinin nedeni mutlak uzaydan değil, cismin çok uzaktaki yıldızlara göre dönme hareketinden kaynaklı olduğunu belirtmiştir. Bu düşünceye bağlı olarak Mach, kütsel çekim alanının, mutlak uzaydan bağımsız olup, gözlemcinin hareket durumuna bağlı olarak betimlenen bir nicelik olduğunu ifade etmiştir.

Mach'a göre; diğer önemli bir nokta, sarkacın eylemliliği veya eylemsizliği, kendi içyapısından bağımsız olup onu çevreleyen maddenin hem varlığına hem de bu maddenin davranışına bağlıdır. Çünkü sarkacın dışında evrende başka bir madde olmaz ise, sarkacın ne eylemli ne de eylemsiz olduğu anlaşılabilirdi. Bununla birlikte böyle bir madde var olduğu durumda da bu maddenin sarkacın salınım düzlemine göre nasıl davranış sergilediği de son derece önemlidir[2].

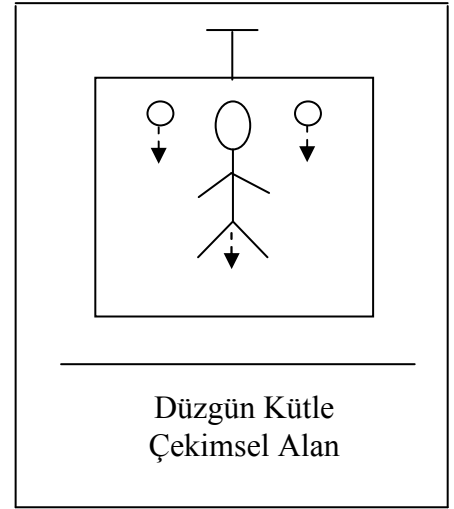
Einstein kendinden önceki bilim insanlarından farklı bir bakış açısı ortaya koymuştur. Einstein'a göre; Foucault sarkacının salınım hareketi uzaktaki bir yıldızdan dolayı değil evrenin dönmesinden kaynaklanmaktadır. Eğer bir cisim uzaktaki bir

yıldıza göre dönüyorsa benzer şekilde diğer uzak yıldızlara göre de dönmektedir. Bu düşünce bağlamında evrende var olan tüm nesnelere göre dönme hareketi yaptıkları sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak bu durumu Einstein evrende bir noktada bir cismin dönme hareketi yapıyorsa bu hareketin asıl nedeninin tüm evrenin dönmesi olduğunu ifade ederek açıklamıştır[3].

Einstein, Genel Görelilik kuramının temellerini oluştururken ivmeli hareket ile düzgün kütle çekim alanındaki hareketin eş değerliliğini düşünmüştür. Bu düşünce onu eş değerlilik ilkesine götürmüştür. Bu ilkeyi açıklayan düşünsel deney şekil 1.6 ve 1.7 'de verilmektedir.



Şekil 1.6: Boş uzay içinde sabit ivme ile hareket eden bir kapalı kutu içindeki gözlemci.



Şekil 1.7: Düzgün kütle çekim alanındaki kapalı kutu içerisindeki gözlemci

Şekil 1.6'da boş uzay ve bu uzayın içinde sabit ivme ile hareket eden bir kapalı kutu bulunmaktadır. Bu kutunun içinde gözlemci bulunmaktadır. Kutunun içindeki gözlemci, kutunun tavanından iki taş bırakıldığında tabana doğru yaklaştığını görecektir. Şekil 1.7'de ise düzgün kütle çekim alanında durgun olan bir kapalı ve bu kutunun içinde bir gözlemci yer almaktadır. Bu gözlemci kutunun tavanından serbest bırakılan iki taşın kutunun tabanına doğru hareket ettiğini gözlemleyecektir. Boş uzayda sabit ivmeli hareket eden kapalı kutudaki gözlemcinin gözlemlediği olgu ile düzgün kütle çekim alanındaki durgun kapalı kutu içindeki gözlemcinin gözlemlediği olgu eş değerdir[4].

Einstein Genel Görelilik kuramında kütle çekim olgusunu bir alan kavramı ile değil geometrik kavramlar ile açıklamıştır. Genel görelilik kuramının matematiksel

temelleri tensör kavramına dayanır. Einstein, bu kuramda uzay ve zamanı birleştirerek dört boyutlu uzay-zaman sürekliliğini betimleyen Riemann geometrisini gerçek fiziksel uzay olarak kabul etmiştir. Einstein denklemlerinin bir tarafı geometriyi betimlerken diğer tarafı enerji-momentum yoğunluğunu tanımlar. Bu denklemler bir kütleli nesnenin hareketinin nedeninin kütleli çekim alanı değil uzay-zamanın eğriliğinin olduğunu ifade eder.

Eğri uzay-zamanda Görelî Kuantum kuramı, temel parçacıklar dünyasında kütleli çekimin etkilerini araştırmak için önemli bir rol oynamaya başladığı tarihten itibaren kuramsal fiziğin en ilgi çekici alanlarından biri haline gelmiştir. Gerçek fiziksel evreni anlayıp yorumlayabilmek ve evren içerisindeki parçacıkların dinamiğini tartışabilmek için hem Einstein hem de Görelî Kuantum denklemlerinin çözülmesi ve bu çözümlerin yorumlanması gerekmektedir. Görelî Kuantum Mekaniksel parçacıklar ile her hangi bir dış alan arasındaki etkileşimi anlamının genel yolu, parçacıkları betimleyen dalga denklemlerini çözmektir. Görelî Kuantum Mekaniksel olarak bilinen Klein-Gordon (spin-0, kütleli), Weyl (spin-1/2, kütleli), Dirac (spin-1/2, kütleli), Foton (spin-1, kütleli) ve Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) (spin 0 ve 1, kütleli) denklemler, parçacıklar ile kütleli çekim alanı arasındaki etkileşimi betimlemek üzere, Genel Görelilik Kuramında tanımlanırlar. Bu denklemlerin görelî biçimleri, kütleli çekim etkilerinin zayıf olması nedeni ile anlamlı olamayacağı düşünüldüğü için atomik boyutlarda pek fazla önem taşımaz. Diğer taraftan görelî parçacıkları betimleyen fizik, kütleli çekim etkilerinin baskın olarak yer aldığı astrofizik ve evrenbilimde önemli rol oynar. Buna en iyi örnek kara delikler tarafından yaratılan görelî parçacıklar ve evrenin ilk anları gibi bazı olgulardır.

Bu çalışmada kullanılan genel metrik için (1+1) boyutlu DKP denklemi eğri uzay-zamanda ifade edilip ikinci dereceden diferansiyel denkleme dönüştürülmektedir. Bu diferansiyel denklemde yer alan $C_1(t, x)$ ve $C_2(t, x)$ fonksiyonlarının özel durumları için çözümler bulunmaktadır ve bu çözümlerin asimptotik ifadeleri elde edilmektedir. Bu asimptotik ifadeler kullanılarak her özel metrik için akım yoğunlukları hesaplanmaktadır. Bunlara ek olarak, seçilen her özel metrik için spin 1 parçacıklarının harmonik davranışları ile ilgili kuantumlanma koşulları elde edilmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Mikro parçacıklar dünyasında kütleli çekimin etkilerini araştırmada eğri uzay-zamanda kuantum alan kuramının önemi çok büyüktür. Gerçek fiziksel evreni anlayabilmek ve evren içerisindeki parçacıkların dinamiğini tartışabilmek için hem Einstein hem de kuantum alan denklemlerinin çözülmesi ve bu çözümlerin yorumlanması gerekmektedir. Görelilik Kuantum Mekaniksel parçacıklar ile her hangi bir dış alan arasındaki etkileşimi anlamak için genel yolu, parçacıkları betimleyen dalga denklemlerini çözmektir. Görelilik Kuantum Mekaniksel olarak bilinen Klein-Gordon (spin-0, kütleli), Weyl (spin-1/2, kütleli), Dirac (spin-1/2, kütleli), Foton (spin-1, kütleli) ve Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) (spin 0 ve 1, kütleli) denklemler, parçacıklar ile kütleli çekim alanı arasındaki etkileşimi betimlemek üzere, Genel Görelilik Kuramında tanımlanırlar. Bu denklemlerin görelilik biçimleri, kütle çekimsel etkilerin zayıflığı nedeniyle anlamlı olamayacağı düşünülebilir. Fakat görelilik parçacıkları betimleyen fizik, kütleli çekim etkilerinin baskın olarak yer aldığı astrofizik ve evrenbilimde önemli rol oynar. Kara delikler tarafından yaratılan görelilik parçacıklar ve evrenin ilk anları gibi bazı olgular bu etkinin en iyi bir şekilde görüleceği örneklerdendir. Yukarıda ifade edilen denklemlerden özellikle Klein-Gordon ve Dirac denklemleri pek çok farklı kozmolojik modeller için ayrıntılı bir biçimde tartışılmıştır [5–11]. 1980'li yılların ortalarında kütleli spin-1 parçacıklarının deneysel olarak elde edilmesi yönünde yapılan çalışmaların yoğunlaşması ile birlikte bu parçacıkları kuramsal olarak anlamak için bu alandaki çalışmalar önem ve ivme kazanır. 2000 yılının başına kadar yapılan pek çok çalışmada bu parçacıkların düz uzay-zamandaki dinamiği anlamaya yönelik tartışmalar yer almaktadır. Son bir kaç yıldır bu parçacıkların eğri uzay-zamandaki davranışları ile ilgili çok az da olsa literatürde çalışmalar görülmektedir [7].

(3+1) boyutlu eğri uzay zamanda görelilik parçacık denklemlerinin yapıları genelde karmaşık olmaları nedeni ile çözümleri zordur. Özellikle DKP denkleminin (3+1) boyutta çözümü oldukça zordur. Çünkü DKP denklemi indirgenildiğinde, denklemde yer alan dalga fonksiyonu 16 bileşenli olup bir birine bağlı 16 tane birinci dereceden türev içeren denklemler ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden DKP denklemi gibi görelilik parçacık denklemlerini çözümlenmenin başka bir yolu, bu denklemleri (1+1) veya (1+2) gibi daha

düşük boyutlarda tartışılmaktadır. (3+1) boyutlu uzay-zamanda bu problemlerin tartışılması matematiksel olarak zor olduğu için literatürde (1+1)-boyutta Genel Görelilik ile ilgili yapılmış pek çok çalışma vardır [12–19].

2.1. RIEMANN UZAY-ZAMANINDA DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİ

1930'lu yılların sonlarına doğru elektromanyetik alan içerisindeki vektör bozonlarının görelilik dalgası denklemi aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır[20].

$$\left[i\beta^{(a)}(\partial_a + ieA_a) - M \right] \Psi_K(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

Buna Duffin-Kemmer-Petiau(DKP) denklemi denir. Burada M , vektör bozonların kütlesi; e , parçacığın taşıdığı elektriksel yük; A_a , dış elektromanyetik alan ve $\beta^{(a)}$, Minkowski uzay-zamanında tanımlı 16×16 'lık Kemmer matrisleridir. Bu matrislerin sağladıkları sıralama bağıntısı ilk olarak aşağıdaki biçimde Duffin tarafından önerilmiştir[21–22].

$$\beta^{(a)}\beta^{(b)}\beta^{(c)} + \beta^{(c)}\beta^{(b)}\beta^{(a)} = \beta^{(a)}\delta^{(bc)} + \beta^{(c)}\delta^{(ba)} \quad (2.1.2)$$

Literatürde DKP kuramının kuantum elektrodinamik süreçlere uygulanabilirliği ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır[23–28]. Gribov bu kuramı kuantum renk dinamiğinde tanımlı olan kuark sınırlama problemine uygulamıştır[29–30]. Ayrıca Kanatchikov; kovaryant Hamilton dinamiğini anlamak için DKP kuramından yararlanmıştır[31]. Bunlara ek olarak, Minkowski uzay-zamanında bir dış elektromanyetik alan varlığında bu denklemin çözümleri yapılmıştır[32–35]. Son olarak Lunardi ve çalışma arkadaşları bu denklemi eğri uzay-zaman için tanımladılar[36]. Bu denklemin (3+1) boyutlu eğri uzay-zamandaki kovaryant biçimi

$$\left[i\beta^\mu(\partial_\mu - \Sigma_\mu + eA_\mu) - M \right] \Psi_K(t, \vec{x}) = 0 \quad (2.1.3)$$

şeklindedir. Burada Kemmer matrisleri eğri uzay-zamanda Dirac matrisleri cinsinden $\beta^\mu(x) = \gamma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \gamma^\mu(x)$ biçiminde yazılır. Kemmer matrislerinin düz Minkowski uzay-zamanıyla ilişkisi aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\beta^\mu(x) = e_{(i)}^\mu(x) \beta^{(i)} \quad \mu = 0,1,2,3 \text{ (eğri uzay zaman etiketi)} \quad (2.1.4)$$

$$i = 0,1,2,3 \text{ (Düz uzay zaman etiketi)}$$

Burada $e_{(i)}^\mu(x)$ eğri uzay-zamanı düz uzay-zamana bağlayan dört ayaklardır(Tetrad). Eğri uzay-zamanın ölçü(metrik) tensörü($g_{\mu\nu}$) ile düz uzay-zamanın ölçü(metrik) tensörü($\eta_{(ij)}$) arasındaki ilişki Dört ayaklar aracılığı ile kurulur ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^{(i)} e_\nu^{(j)} \eta_{(ij)} \quad (2.1.5)$$

Burada $\eta_{(ij)} = (1,-1,-1,-1)$ biçiminde seçilir. Denklem (2.1.3)'de yer alan Σ_μ , spin-1 parçacıklar için spin bağlantı katsayısı olarak tanımlanır ve bunun spin $\frac{1}{2}$ parçacıkların spin bağlantı katsayıları ile ilişkisi

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \quad (2.1.6)$$

olarak verilir. Burada Γ_μ , ölçü tensörü ve Dirac-gama matrisleri cinsinden;

$$\Gamma_\lambda = -\frac{1}{8} g_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha [\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)] \quad (2.1.7)$$

şeklinde tanımlanır. Bu bağıntıdaki $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ niceliğe Christoffel sembolü adı verilir ve ölçü tensörü cinsinden aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (2.1.8)$$

Denklem (2.1.3)' de yer alan $\Psi(t, \vec{x})$ dalga fonksiyonu 16 bileşenlidir ve bu fonksiyon yerel Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalır[37]. Bu değişmezlikte önemli olan eski koordinat sisteminden yeni koordinat sistemine geçişi sağlayan uygun lineer koordinat dönüştürücüsünün bulunmasıdır. Bu koordinat dönüşümünü sağlayan ifade $x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ şeklindedir. Bu durumda olasılık dalga fonksiyonu yeni koordinat sistemine göre şekillenir ve eski koordinat sistem ile olan ilişkisi dönüştürücünün bir fonksiyonu olan $U(\Lambda)$ ile sağlanır ve bu dönüştürücü fonksiyonun kendi değişkeni ile olan ilişkisi aşağıdaki biçimdedir:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U(\Lambda)\Psi \quad (2.1.9)$$

$$U^{-1} \beta^\mu U = \Lambda^\mu_\nu \beta^\nu \quad (2.1.10)$$

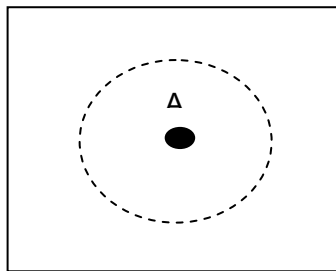
$\Lambda^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + w^{\mu\nu} (w^{\mu\nu} = -w^{\nu\mu})$ biçiminde tanımlanan dönüştürücüdeki sonsuz küçük değişim için sonsuz küçük Lorentz dönüşümü aşağıdaki biçimde olur[38].

$$U = 1 + \frac{1}{2} w^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \quad ; \quad S_{\mu\nu} = [\beta_\mu, \beta_\nu] \quad (2.1.11)$$

Zitterbewegung kuantumlanma modeli aracılığı ile DKP denkleminin spin-1 bileşeni ilk olarak Barut tarafından bulunmuştur[39]. Ünal, Schrödinger'in önermiş olduğu ikincil kuantumlanma sürecini kullanarak DKP denkleminin spin-0 bileşenini çıkarmış ve hem (1+1) hem de (3+1) uzay-zaman boyutu için tanımlı olan DKP denkleminin spin-1 bileşeni için denklem elde etmiştir[40]. Schrödinger'in ikincil kuantumlanma yaklaşımının geçerliliği, dalga fonksiyonunun rankı 2 olan simetrik bir biçimde yazılmasının sonucudur. Bu yaklaşımda spin-1 parçacığı spini ½ olan iki parçalıklı sistem olarak düşünülür ve dalga fonksiyonu iki Dirac spinörünün dış çarpımıyla elde edilir. Riemann uzay-zamanının düşük boyutlarında tanımlanan DKP denklemi spin-1 durumu için hem Klein-Gordon hem de Proca denkleminin eşdeğeri[38]. Spin-1 kısmı için tanımlanan DKP denklemi (3+1) boyutta Barut ve Zanghi tarafından çalışılan ve ayrıca Proca tarafından öngörülen klasik Zitterbewegung etkisinin kuantumlanmasının sonucunda elde edilir[41-44]. Daha sonraki süreçte Ünal, bu Zitterbewegung kuantumlanma olayını (1+1) boyutlu sisteme uygulamıştır. Bu uygulama dalga fonksiyonunun 16 bileşenden 4 bileşenli dalga fonksiyonuna indirgenmesine bir örnek oluşturur.

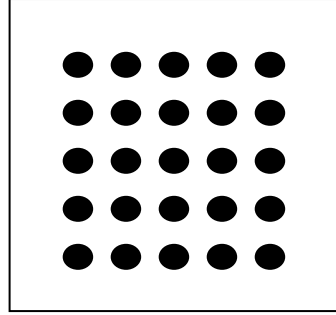
2.2. KOZMOLOJİK EVREN MODELLERİ^[3]

Uzayın türdeş (homojen) ve eşyönel (izotropik) olmasının nedeni maddenin ve ışığın uzaya düzgün olarak dağılmış olmasıdır. Böyle bir uzayın her hangi bir merkezi yoktur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta simetri bir noktaya göre belirlenirken, türdeşlik bir noktanın başka bir noktaya göre belirlenmesidir. Örneğin çemberin merkezi çemberi oluşturan noktalara göre bir simetrik yapıya sahiptir.



Şekil 2.1: Merkezi noktaya göre simetrik noktaların gösterimi

Şekil 2.1'e dikkatli olarak bakıldığında kesikli çizgiler "A" noktasına göre simetriktir. Diğer taraftan türdeşlik simetriklikten tamamen farklıdır. Çünkü bu sistemde simetriyi oluşturacak her hangi bir nokta yoktur.



Şekil 2.2: Türdeş uzay gösterimi

Şekil 2.2'de seçilecek her hangi bir siyah nokta ile diğer noktalar arasında her hangi bir fark söz konusu olmadığı için buna türdeş uzay denir. Bu anlamda hem simetrik hem de türdeş uzay-zamanı en iyi bir şekilde tanımlayan örnek Düz Friedman Robertson-Walker metriği olup aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.2.1)$$

2.3. DÜZ FRIEDMAN ROBERTSON-WALKER METRİĞİ^[3]

Düz Friedman Robertson-Walker(FRW) Metriği zamansal ve uzaysal olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır.

$$ds^2 = \underbrace{-dt^2}_{\text{Zamansal Parça}} + \underbrace{a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}_{\text{Uzaysal Parça}} \quad (2.3.1)$$

Burada $a(t)$ ölçek çarpanı olup kozmolojik evren hakkındaki tüm bilgiyi içermektedir. Bu bağıntıdaki uzaysal parça, ölçek çarpanı ile matematiksel uzayda tanımlanan sonsuz küçük yer değiştirmenin karesinin çarpımıdır. Bu çarpıma fiziksel uzay denir. Bu tanıma göre, matematiksel uzayda tanımlanan koordinatlar zamanla değişmez kalırken fiziksel uzayda tanımlanan koordinatlar ise zamana bağlı olarak değişmektedir. Buna göre matematiksel koordinatlarda iki nokta arası sonsuz küçük uzaklığın karesi

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3.2)$$

şeklinde tanımlanırken, fiziksel koordinatlar ise

$$dX(t) = a(t)dx \quad (2.3.3)$$

$$dY(t) = a(t)dy \quad (2.3.4)$$

$$dZ(t) = a(t)dz \quad (2.3.5)$$

biçiminde verilir. Bu uzaklıklar arasındaki ilişki aşağıdaki biçimdedir:

$$dL^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.3.6)$$

Matematiksel uzaydaki iki nokta arasındaki sonsuz küçük uzaklığı fiziksel uzaydaki iki nokta arasındaki sonsuz küçük uzaklığa bağlayan bağıntı

$$dL = a(t)dr \quad (2.3.7)$$

şeklinde verilir.

2.4. DÜZ FRIEDMAN ROBERTSON-WALKER METRİĞİ İÇİN TERMODİNAMİĞİN İKİNCİ YASASI^[3]

FRW metriğinin tanımladığı evren modelinde seçilen bir nokta başka bir noktaya göre fiziksel olarak farklılık göstermemektedir. Bu anlamda tüm noktalardaki sıcaklık eşit olup ve bundan kaynaklı olarak noktalar arasında her hangi bir ısısal akış olmayacaktır. Dolayısıyla kozmolojik akışkanın toplam enerjisindeki değişim hacimdeki değişimle dengelenir ve aşağıdaki denklem ile verilir:

$$d(\Delta E) = -P d(\Delta V_F) \quad (2.4.1)$$

Birim hacimdeki enerji

$$\Delta E = \rho \Delta V_F \quad (2.4.2)$$

olarak tanımlanır. Burada ρ , birim hacimdeki enerji yoğunluğu ve ΔV ise fiziksel hacimdir. Fiziksel hacimle matematiksel hacim arasındaki ilişki,

$$\Delta V_F = a^3(t) \Delta V_M \quad (2.4.3)$$

dir. Denklem (2.4.2) ve denklem (2.4.3)'ü denklem (2.4.1)'de yerine yazıldığında

$$d(\rho a^3(t) \Delta V_M) = -P d(a^3(t) \Delta V_M) \quad (2.4.4)$$

$$d(\rho a^3(t)) = -P d(a^3(t)) \quad (2.4.5)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3(t)) = -P \frac{d}{dt}(a^3(t)) \quad (2.4.6)$$

bulunur. Bu denklem türdeş ve eşyönel evren modelleri için geçerli olan termodinamiğin birinci yasası olarak kabul edilir.

MADDE: Gökada (Galaksi) içerisindeki kütle dağılımı düzgün olması nedeni ile maddeden kaynaklı bir basınç oluşmayacağı için basınç ($P = 0$) sıfır olur. Bu durumda denklem (2.4.6)

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3(t)) = 0 \quad (2.4.7)$$

olur ve,

$$\rho_m(t) = \rho_m(t_0) \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)} \quad (2.4.8)$$

sonucu bulunur. Burada $\rho_m(t)$, her hangi bir t anındaki madde yoğunluğu ve $\rho_m(t_0)$ ise gözlemcinin belirlediği t_0 anındaki madde yoğunluğudur.

İŞIMA(RADYASYON): T sıcaklıktaki bir gazın siyah cisim ışıması için basınç ve enerji yoğunluğu arasındaki ilişki $P = \frac{1}{3} \rho$ olarak verilir. Denklem(2.4.6)'ın sağ tarafına yazılacak ifadeyi elde etmek için $P(t)a^3(t)$ çarpanının zamana göre türevi alınıp gerekli düzeltmeler yapılırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\frac{d}{dt}(P a^3) = a^3 \frac{dP}{dt} + P \frac{d}{dt} a^3 \quad P \frac{d}{dt} a^3 = \frac{d}{dt}(P a^3) - a^3 \frac{dP}{dt} \quad (2.4.9)$$

Bu ifade termodinamiğin birinci yasasını betimleyen denklemde yerine yazıldığında

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3(t)) = -P \frac{d}{dt}(a^3(t)) \quad \frac{d}{dt}(\rho a^3 + P a^3) = a^3 \frac{dP}{dt} \quad (2.4.10)$$

elde edilir. Buradan ışıma yoğunluğu için

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3 + \frac{1}{3} \rho a^3\right) = \frac{a^3}{3} \frac{d\rho}{dt} \quad 4 \frac{d}{dt}(\rho a^3) = a^3 \frac{d\rho}{dt} \quad (2.4.11)$$

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0) \left(\frac{a_0(t_0)}{a_0(t)}\right)^4 \quad (2.4.12)$$

bulunur. Burada $\rho_r(t)$, her hangi bir t anındaki ışıma yoğunluğu ve $\rho_r(t_0)$ ise gözlemcinin belirlediği t_0 anındaki ışıma yoğunluğudur.

2.5. DÜZ FRIEDMAN ROBERTSON-WALKER MODELİNDEKİ ZAMANSAL DEĞİŞİM^[3]

Düz FRW modeli için Einstein denklemlerinden, Friedman denklemi olarak anılan aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3}a^2 = 0 \quad (2.5.1)$$

Bu denklemin ilk terimi kinetik açılım enerjisine ikinci terimi ise kütleleşme enerjisine karşılık gelmektedir. Buna göre, kinetik açılım enerjisi kütleleşme enerjisi ile dengelenmektedir. Ayrıca bu denklem kullanılarak bu evren modeli için Hubble sabitinin tanımlanması olanaklıdır. Denklem (2.5.1)'in her iki tarafı $a^2(t)$ 'e bölünürse

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi\rho}{3} = 0 \quad (2.5.2)$$

elde edilir. Hubble sabiti için $H_0(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ bağıntısı yerine yazılırsa

$$H_0^2(t) - \frac{8\pi}{3}\rho_c = 0 \quad (2.5.3)$$

bulunur. Burada ρ_c , kritik yoğunluk olarak tanımlanır. Bu bağıntıdan kritik yoğunluğunun Hubble sabiti ile olan ilişkisi $\rho_c = \frac{3H_0^2(t)}{8\pi}$ olarak çıkarılır. Eğer kritik yoğunluk bu değerden büyükse bu evrenin türdeşliği ve simetrisi bozulur. Bu kritik yoğunluk ile maddesel, ışımaya ve boşluk (vakum) yoğunluğu arasındaki ilişki;

$$\text{Madde Bağıl Yoğunluğu: } \Omega_m = \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_c} \quad (2.5.4)$$

$$\text{Işıma Bağıl Yoğunluğu : } \Omega_r = \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_c} \quad (2.5.5)$$

ve

$$\text{Boşluk Bağıl Yoğunluğu: } \Omega_v = \frac{\rho_v(t_0)}{\rho_c} \quad (2.5.6)$$

olmak üzere bu üç yoğunluğun toplamı "1" verir ve aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$\Omega_m + \Omega_v + \Omega_r = 1 \quad (2.5.7)$$

Friedman denkleminin önemli özelliklerinden bir tanesi de dönüşümler altında değişmez kalmasıdır. Eğer Friedman denkleminde $a(t)$ yerine $K a(t)$ yazılırsa;

$$K^2 \dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3} K^2 a^2 = 0 \quad (2.5.8)$$

elde edilir ve bu, aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3} a^2 = 0 \quad (2.5.9)$$

Bu sonuç denklem (2.5.1) ile aynıdır. Çizgi elemanın değişmez kalması için matematiksel koordinatların değişmesi gerekmektedir. Bu değişimler aşağıdaki bağıntılarda verilmektedir:

$$ds'^2 = -dt^2 + K^2 a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.5.10)$$

$$ds = ds' \quad (2.5.11)$$

$$dx' = \frac{dx}{K} \quad dy' = \frac{dy}{K} \quad dz' = \frac{dz}{K} \quad (2.5.12)$$

Çizgi elemanının değişmez kalması için ölçek çarpanında K kadarlık bir ötelemeye karşılık matematiksel koordinatlarda $\frac{1}{K}$ çarpanı kadar bir değişim gerektirmektedir.

Toplam enerji yoğunluğunun madde, ışımaya ve boşluk yoğunluğu ile olan ilişkisi, yukarıda verilen gerekli bağıntılar kullanılarak

$$\frac{\rho_v(t_0)}{\rho_c} + \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_c} \frac{1}{a^3(t)} + \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_c} \frac{1}{a^4(t)} = \Omega_m + \Omega_v + \Omega_r \quad (2.5.13)$$

elde edilir. Bu bağıntı düzenlendiğinde aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\rho(a) = \rho_c (\Omega_m + \Omega_v + \Omega_r) = \rho_c \left(\Omega_v + \frac{\Omega_m}{a^3(t)} + \frac{\Omega_r}{a^4(t)} \right) \quad (2.5.14)$$

Friedman denklemini yoğunluk denklemi cinsinden ifade etmek için denklem (2.5.1)'i $2H_0^2$ 'e bölünürse;

$$\frac{\dot{a}^2}{2H_0^2} - \frac{4\pi\rho(a)}{3H_0^2} a^2 = 0 \quad (2.5.15)$$

bulunur. Buradaki toplam enerji yoğunluğu yerine denklem (2.5.14)'de yazılırsa bu denklem aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\frac{\dot{a}^2}{2H_0^2} - \frac{4\pi}{3H_0^2} \rho_c \left(a^2(t)\Omega_v + \frac{\Omega_m}{a(t)} + \frac{\Omega_r}{a^2(t)} \right) = 0 \quad (2.5.16)$$

Burada $\rho_c = \frac{3H_0^2(t)}{8\pi}$ kullanıldığında,

$$\frac{\dot{a}^2}{2H_0^2} - \frac{1}{2} \left(a^2(t)\Omega_v + \frac{\Omega_m}{a(t)} + \frac{\Omega_r}{a^2(t)} \right) = 0 \quad (2.5.17)$$

elde edilir. Etkin potansiyel

$$U_{\text{etkin}} = -\frac{1}{2} \left(a^2(t)\Omega_v + \frac{\Omega_m}{a(t)} + \frac{\Omega_r}{a^2(t)} \right) \quad (2.5.18)$$

şeklinde tanımlanırsa denklem (2.5.17) aşağıdaki biçimde olur:

$$\frac{\dot{a}^2}{2H_0^2} + U_{\text{etkin}} = 0 \quad (2.5.19)$$

2.6. BAZI EVREN MODELLERİ^[3]

- Madde Baskın Evren: Madde yoğunluğunun daha baskın olduğu durum;

$$\Omega_m = 1, \Omega_r = 0, \Omega_v = 0 \quad (2.6.1)$$

koşulu ile belirlenir. Bu eşitlikler denklem (2.5.17)'de yazılırsa

$$\frac{\dot{a}^2}{2H_0^2} - \frac{1}{2a} = 0 \quad (2.6.2)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı için değişkenlere göre sürekli toplam (integral) yapılırsa;

$$\int_0^{a(t)} a^{-\frac{1}{2}} da = H_0 \int_0^t dt \quad (2.6.3)$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.6.4a)$$

bulunur. Burada $H_0 = \frac{1}{t_0}$ alınmıştır. $a_0 = \frac{1}{t_0^{\frac{2}{3}}}$ olmak üzere ölçek çarpanı aşağıdaki

biçimi alır:

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3}} \quad (2.6.4b)$$

- Işınım Baskın Evren: Işınım yoğunluğunun daha baskın durumdaki koşul:

$$\Omega_m = 0, \Omega_r = 1, \Omega_v = 0 \quad (2.6.5)$$

Bu koşul denklem (2.5.17)'de yerine yazıldığında;

$$\frac{\dot{a}^2}{2H_0^2} - \frac{1}{2a^2} = 0 \quad (2.6.6)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının

$$\int_0^{a(t)} a da = H_0 \int_0^t dt \quad (2.6.7)$$

şeklinde sürekli toplamı alınırsa

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6.8a)$$

sonucu bulunur. $a_0 = \frac{1}{t_0^{\frac{1}{2}}}$ olmak üzere ölçek çarpanı

$$a(t) = a_0 t^{\frac{1}{2}} \quad (2.6.8b)$$

biçimine dönüşür.

• Boşluk Baskın Evren: Boşluk yoğunluğunun daha baskın olduğu durum için aşağıdaki koşul yazılır:

$$\Omega_m = 0, \Omega_r = 0, \Omega_v = 1 \quad (2.6.9)$$

Bu ifadeleri denklem (2.5.17)'de kullanılırsa;

$$\frac{\dot{a}^2}{2H_0^2} - \frac{a^2}{2} = 0 \quad (2.6.10)$$

bulunur. Bu denklemin her iki tarafının sürekli toplam alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$a(t) = e^{H(t-t_0)} \quad (2.6.11)$$

$a_0 = e^{-H_0 t_0}$ olmak üzere ölçek çarpanı

$$a(t) = a_0 e^{Ht} \quad (2.6.12)$$

olur.

Tartışılan üç farklı evren modeli için ölçek çarpanı zamana bağlı olarak değişmektedir. Bu bağlamda bu süreç değerlendirildiğinde evrenin evriminin enerjisinin değişik biçimlerinin baskın olduğu duruma göre gerçekleştiği görülür. Başlangıçta, evren ışınım baskın iken ışınmadaki yoğunluk madde ve boşluktaki yoğunluğa göre hızlı bir şekilde azalır ve sonuçta evren madde baskın duruma dönüşür. Madde yoğunluğu öyle bir değişime

uğrar ki sonuçta yalnızca sabit boşluk yoğunluğu önem kazandığı bir duruma dönüşür. Bu da boşluk baskın evreni betimler.

2.7. EVRENİN DİNAMIĞİ^[3]

Einstein denklemlerinden genel Friedman denklemi;

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3}a^2 = -k \quad (2.7.1)$$

şeklinde bulunur. Burada k bir sabit olup 1, 0, -1 değerlerini alır. Eşitliğin her iki tarafı $a^2(t)$ ile bölünürse;

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi\rho}{3} = -\frac{k}{a^2} \quad (2.7.2)$$

elde edilir. $H_0 = \frac{\dot{a}}{a}$ tanımını kullanılırsa, bu denklem

$$H_0^2 - \frac{8\pi\rho}{3} = -\frac{k}{a^2} \quad (2.7.3)$$

biçimini alır. Hubble sabiti ile kritik yoğunluk arasındaki ilişki;

$$H_0 = \frac{8\pi\rho_c}{3} \quad (2.7.4)$$

olduğundan dolayı denklem (2.7.3)' den

$$\rho - \rho_c = \frac{k}{a^2} \quad (2.7.5)$$

sonucu elde edilir. Eğer $\rho > \rho_c$ ise, $k > 0$ olacağından bu evren modeli kapalı, $\rho = \rho_c$ ise $k = 0$ olacağı için bu evren modeli düz ve $\rho < \rho_c$ ise $k < 0$ olacağından bu evren modeli açık olur. Benzer şekilde bağıl yoğunluk ifadesine göre de değeriendirildiğinde aynı sonuçlar bulunur.

3. MATERYAL ve METOT

3.1 (1+1) BOYUTLU DÜZ UZAY-ZAMANDA SERBEST PARÇACIK İÇİN DKP DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ^[13]

Serbest parçacık için DKP denklemi

$$(i\beta^a \partial_a - M)\Psi_K = 0 \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada M , vektör bozonların kütlesi; Ψ_K , Kemmer dalga fonksiyonu ve β , 16×16 'lık Kemmer matrisleridir. Dalga fonksiyonu aşağıdaki biçimde verilir;

$$\Psi_K = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{\bar{0}} \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

(1+1) boyutta Dirac matrisleri $\gamma^{(a)} = (\sigma^3, -i\sigma^2)$ şeklinde seçilip Kemmer matrislerinde yerine yazıldığında ve denklem (3.1.1)'de yerine konulduğunda aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$(2\partial_t + 2im)\psi_1 - \partial_x \psi_0 - \partial_x \psi_{\bar{0}} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$-\partial_x \psi_1 - 2im\psi_0 + \partial_x \psi_2 = 0 \quad (3.1.4)$$

$$-\partial_x \psi_1 - 2im\psi_{\bar{0}} + \partial_x \psi_2 = 0 \quad (3.1.5)$$

$$(-2\partial_t + 2im)\psi_2 + \partial_x \psi_0 + \partial_x \psi_{\bar{0}} = 0 \quad (3.1.6)$$

Bu denklemlerde $M = 2m$ alınmıştır. Denklem (3.1.4) ve denklem (3.1.5)'den $\psi_0 = \psi_{\bar{0}}$ olduğu görülür. Bu durumda denklemler aşağıdaki denklemlere indirgenir:

$$(2\partial_t + 2im)\psi_1 - 2\partial_x \psi_0 = 0 \quad (3.1.7)$$

$$(2\partial_t - 2im)\psi_2 - 2\partial_x \psi_0 = 0 \quad (3.1.8)$$

$$\psi_0 = \frac{i}{2m} \partial_x (\psi_1 - \psi_2) \quad (3.1.9)$$

Denklem (3.1.7) ve denklem (3.1.8) toplandığında

$$\partial_t (\psi_1 + \psi_2) + im(\psi_1 - \psi_2) - 2\partial_x \psi_0 = 0 \quad (3.1.10)$$

elde edilir ve çıkarıldığında

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{i}{m} \partial_t (\psi_1 - \psi_2) \quad (3.1.11)$$

bulunur. Denklem (3.1.9) ve denklem (3.1.11)'i denklem (3.1.10)'da yerine yazılırsa ikinci dereceden türev içeren aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\chi = 0 \quad (3.1.12)$$

Burada $\chi = \psi_1 - \psi_2$ 'dir. Bu denklemin çözümü;

$$\chi^{(\pm)}(x, t) = N e^{i(kx \mp \omega t)} \quad (3.1.13)$$

şeklinde önerilir. Burada $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$ ve N boylandırma sabitidir.

Pozitif enerji durumu için;

$$\omega = \sqrt{k^2 + m^2} > 0 \quad (3.1.14)$$

ve dalga fonksiyonu;

$$\chi^{(+)}(x, t) = N e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.1.15)$$

olur. Bu ifadeyi dört bileşenli dalga fonksiyonunda yerine konulduğunda ve düzenlendiğinde aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$\psi_k^{(+)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(kx - \omega t)} U(k) \quad (3.1.16)$$

burada,

$$U(k) = \frac{m}{\omega} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{m} \right) \\ -\frac{k}{2m} \\ \frac{k}{2m} \\ -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{m} \right) \end{bmatrix} \quad (3.1.17)$$

Negatif enerji durumu için

$$\omega = \sqrt{k^2 + m^2} < 0 \quad (3.1.18)$$

ve dalga fonksiyonu

$$\chi^{(-)}(x, t) = N e^{i(kx + \omega t)} \quad (3.1.19)$$

olur. Bu durumda dört bileşenli dalga fonksiyonu aşağıdaki biçimi alır:

$$\psi_{-k}^{(-)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(kx - \omega t)} V(k) \quad (3.1.20)$$

burada,

$$V(k) = \frac{m}{\omega} \begin{bmatrix} \frac{1}{2m}(\omega - m) \\ -\frac{k}{2m} \\ -\frac{k}{2m} \\ \frac{1}{2m}(m + \omega) \end{bmatrix} \quad (3.1.21)$$

Bu sonuçlar değerlendirildiğinde negatif enerji ile pozitif enerji durumu arasında aşağıdaki ilişki kolayca kurulabilir.

$$U^+(k)V(-k) = 0 \quad U(k)V^+(-k) = 0 \quad (3.1.22)$$

3.2 (1+1) BOYUTLU EĞRİ UZAY-ZAMANDA VE ELEKTRİKSEL ALANDA DKP DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ^[13]

(1+1) boyutlu geometriyi betimleyen genel çizgi elemanı

$$ds^2 = C_0^2(t, x)dt^2 - C_1^2(t, x)dx^2 \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu çizgi elemanı için denklem (2.1.3)'de verilen DKP denklemi açılırsa aşağıdaki denklem bulunur:

$$\left[\frac{1}{C_1} \beta^{(0)} \partial_t + \frac{1}{C_2} \beta^{(1)} \partial_x - \frac{1}{C_1} \beta^{(0)} \Sigma_0 - \frac{1}{C_2} \beta^{(1)} \Sigma_1 + i \frac{e}{C_1} \beta^{(0)} A_0 + i \frac{e}{C_1} \beta^{(1)} A_1 + iM \right] \Psi_K(t, x) = 0 \quad (3.2.2)$$

Burada $A_\mu = (A_0(t, x), A_1(t, x))$ vektör potansiyeldir. (1+1) boyutta Dirac matrisleri ($\gamma^\mu(x)$) Pauli $\sigma^\mu(x)$ matrisleri ile yer değiştirir. Buna göre β^μ matrisleri

$$\beta^\mu(x) = \sigma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \sigma^\mu(x) \quad (3.2.3)$$

olur. Benzer şekilde spin bağlantı katsayıları da aşağıdaki biçimi alır:

$$\Sigma_\mu = \underbrace{\lim_{\gamma \rightarrow \sigma}} \Sigma_\mu = (\Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu) \quad (3.2.4)$$

Kemmer dalga fonksiyonu Ψ_K , iki Dirac dalga fonksiyonunun dış çarpımı şeklinde ifade edilir:

$$\Psi_K = \Psi_D \otimes \Psi_D = \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \eta\eta \\ \eta\varphi \\ \varphi\eta \\ \varphi\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Burada η ve φ Dirac dalga fonksiyonunun bileşenlerini tanımlar. Verilen çizgi elemanı için spin bağlantı katsayıları

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{2} \frac{C_1'}{C_2} (\alpha^{(1)} \otimes I + I \otimes \alpha^{(1)}) \quad (3.2.6)$$

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{2} \frac{\dot{C}_2}{C_1} (\alpha^{(1)} \otimes I + I \otimes \alpha^{(1)}) \quad (3.2.7)$$

olarak bulunur. Burada $\tilde{\alpha}^1 = \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}$ olarak tanımlanmaktadır. C 'nin üstünde yer alan nokta ve kesme işaretleri sırasıyla zamana ve konuma göre türevi betimlemektedir. Uzay ve zamandan bağımsız Dirac matrislerinin Pauli matrisleri cinsinden aşağıdaki biçimde seçilir:

$$\gamma^{(a)} = (\sigma^3, -i\sigma^2) \quad (3.2.8)$$

Denklem (3.2.1) 'teki C_1 ve C_2 katsayıları yerine sırasıyla 1 ve $a^2(t)$ yazıldığında bu çizgi elemanı Robertson-Walker uzayını betimler. Vektör bozonları, (1+1) boyutlu eğri uzay-zamanda $A_\mu = (0, -Et \hat{e}_x)$ şeklinde verilen bir vektör alanının etkisinde olduğu varsayalım. Bu durumda denklem (3.2.5), denklem (3.2.6) ve denklem (3.2.7)'yi denklem (3.3.2)'de yerine yazılıp düzenlendiğinde aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\left(2\partial_t + \frac{\dot{a}}{a} + iM \right) \Psi_1 + \left(-\frac{1}{a} \partial_x + i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_0 + \left(-\frac{1}{a} \partial_x + i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_{\bar{0}} + \frac{\dot{a}}{a} \Psi_2 = 0 \quad (3.2.9)$$

$$\left(-\frac{1}{a} \partial_x + i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_1 - iM \Psi_0 + \left(\frac{1}{a} \partial_x - i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_2 = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\left(-\frac{1}{a} \partial_x + i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_1 - iM \Psi_{\bar{0}} + \left(\frac{1}{a} \partial_x - i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_2 = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\left(2\partial_t + \frac{\dot{a}}{a} - iM \right) \Psi_2 - \left(\frac{1}{a} \partial_x - i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_0 - \left(\frac{1}{a} \partial_x - i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_{\bar{0}} + \frac{\dot{a}}{a} \Psi_1 = 0 \quad (3.2.12)$$

Denklem (3.2.10) ve denklem (3.2.11)'den $\Psi_0 = \Psi_{\bar{0}}$ eşit olduğu görülür. Robertson-Walker uzayının ölçek çarpanı sadece zamana bağlı olduğu için dalga fonksiyonunun

konuma bağılılığı düzlem dalga şeklinde olur. Bu durumda dalga fonksiyonu aşağıdaki biçimi alır:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_0 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \frac{e^{ik_x x}}{(2\pi a(t))^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_0 \\ h_0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

Denklem (3.2.13), denklem (3.3.9), denklem (3.3.10) ve denklem (3.3.12)'de yazıldığında,

$$\left(\partial_t + \frac{M}{2} i \right) h_1 - i \left(\frac{k_x - eEt}{a} \right) h_0 + \frac{\dot{a}}{2a} h_2 = 0 \quad (3.2.14)$$

$$\left(\frac{-k_x + eEt}{a} \right) h_1 - M h_0 + \left(\frac{k_x - eEt}{a} \right) \frac{\dot{a}}{2a} h_2 = 0 \quad (3.2.15)$$

$$\left(\partial_t - \frac{M}{2} i \right) h_2 - i \left(\frac{k_x - eEt}{a} \right) h_0 + \frac{\dot{a}}{2a} h_1 = 0 \quad (3.2.16)$$

elde edilir. Denklem (3.2.15)'den aşağıdaki eşitlik çıkarılır:

$$h_0 = -\frac{1}{M} \left(\frac{k_x - eEt}{a} \right) (h_1 - h_2) \quad (3.2.17)$$

Denklem (3.2.14) ve denklem (3.2.16) toplandığında,

$$\left(\partial_t + \frac{\dot{a}}{2a} \right) (h_1 + h_2) + i \frac{M}{2} (h_1 - h_2) - 2i \left(\frac{k_x - eEt}{a} \right) h_0 = 0 \quad (3.2.18)$$

ve çıkarıldığında,

$$(h_1 + h_2) = \frac{2i}{M} \left(\partial_t - \frac{\dot{a}}{2a} \right) (h_1 - h_2) \quad (3.2.19)$$

bulunur. Denklem (3.2.19) ve denklem (3.3.17)'yi denklem(3.2.18)'de yerine konulursa, ikinci dereceden türev içeren aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left[\partial_t^2 + \frac{\dot{a}^2 - 2a\ddot{a}}{4a^2} + \left(\frac{M}{2} \right) + \left(\frac{k_x - eEt}{a} \right)^2 \right] \chi(t) = 0 \quad (3.2.20)$$

Burada $\chi(t) = h_1(t) - h_2(t)$ 'dir. Aşağıdaki aşamalardaki her çözüm için Schrödinger modeli düşünülmektedir. Bu modelde Robertson-Walker metriğindeki açılım çarpanı $a(t) = a_0 t$ şeklinde verilir. Bu durumda denklem (3.3.20)

$$\left[\partial_t^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2} \right) \frac{1}{t^2} - \frac{2k_x e E}{a_0^2} \frac{1}{t} + \left(\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}{4a_0^2} \right) \right] \chi(t) = 0 \quad (3.2.21)$$

olur. Burada $t = b\xi$ değişken değişimi yapıldığında denklem (3.2.21) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\left[\partial_\xi^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2} \right) \frac{1}{\xi^2} - \frac{2k_x e E}{a_0^2} \frac{1}{\xi} b + \left(\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}{4a_0^2} \right) b^2 \right] \chi(\xi) = 0 \quad (3.2.22)$$

Bu denklem aşağıdaki standart Whittaker denklemi ile karşılaştırıldığında;

$$\left[\partial_y^2 - \frac{1}{4} + \frac{\kappa}{y} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{y^2} \right] W_{\kappa, \mu}(y) = 0 \quad (3.2.23)$$

çözümün

$$\chi(t) = h_1(t) - h_2(t) = W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \quad (3.2.24)$$

olduğu görülür. Burada

$$\kappa = \frac{\mp 2ik_x e E}{a_0 (M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.2.25)$$

$$b = \frac{\pm ia_0}{(M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.2.26)$$

ve

$$\mu = \frac{\pm ik_x}{a_0} \quad (3.2.27)$$

dır. Whittaker fonksiyonu için tanımlı olan indirgeme bağıntısı

$$\partial_z W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{1}{z} \left\{ \left(\frac{1}{2} z - \kappa \right) W_{\kappa, \mu}(z) - W_{\kappa+1, \mu}(z) \right\} \quad (3.2.28)$$

şeklindedir. Bu durumda denklem (3.2.19)'da verilen çözüm Whittaker fonksiyonu cinsinden;

$$h_1 + h_2 = \left(\frac{it - 2ik_x b - ib + Mbt}{Mbt} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \quad (3.2.29)$$

olarak yazılır. Denklem (3.2.24) ve denklem (3.2.29) arasında toplama işlemi yapıldığında,

$$h_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{it - 2ik_x b - ib + Mbt}{Mbt} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \right\} \quad (3.2.30)$$

ve çıkarma işlemi yapıldığında

$$h_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{it - 2ik_x b - ib - Mbt}{Mbt} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \right\} \quad (3.2.31)$$

bulunur. Denklem (3.2.17) kullanılarak dalga fonksiyonunun h_0 bileşeni için,

$$h_0 = - \left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0 t} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \quad (3.2.32)$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda dört bileşenli dalga fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\Psi_K(t, x) = Na_0^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{ik_x x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{it - 2ik_x b - ib + Mbt}{Mbt} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \right\} \\ - \left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0 t} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \\ - \left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0 t} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{it - 2ik_x b - ib - Mbt}{Mbt} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu} \left(\frac{t}{b} \right) \right\} \end{array} \right] \quad (3.2.33)$$

Burada N boylandırma katsayısıdır. Bu sonuç, vektör bozonlarının eğri uzay-zaman ile elektromanyetik potansiyelden oluşan bir sistem içerisindeki davranışları Whittaker fonksiyonun davranışına bağlıdır. Böyle bir sistemde parçacık yaratmanın olup olmadığı dalga fonksiyonunun sonsuzdaki davranışına bakılarak belirlenir. Bunun için Whittaker fonksiyonun $t \rightarrow \infty$ ’daki davranışına bakılır. Whittaker fonksiyonunun sonsuzdaki davranışı

$$W_{\kappa, \mu}(z) \approx z^\kappa e^{-\frac{z}{2}} \quad (3.2.34)$$

şeklindedir. Bu durumda denklem (3.2.33)’de verilen çözümün asimptotik biçimi aşağıdaki biçimde olur:

$$\Psi_K(t, x) = N a_0^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{ik_x x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{t}{b}\right)^K e^{-\frac{t}{2b}} \begin{bmatrix} \frac{it - 2ik_x b - ib + Mbt}{2Mbt} \\ -\left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0 t}\right) \\ -\left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0 t}\right) \\ \frac{it - 2ik_x b - ib - Mbt}{Mb \mathcal{G}t} \end{bmatrix} \quad (3.2.35)$$

Asimptotik çözümünde yer alan boylandırma katsayısı çözümlerin diklik koşulundan elde edilir. Bu kurala göre çözümler arasındaki iç çarpım uzayımsı yüzey üzerinden sürekli toplama alınarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \bar{\Psi}_1 \beta^\mu \Psi_2 \sqrt{-g} d\sigma_\mu \quad (3.2.36)$$

Burada Σ Riemann yüzeyidir. Eğri uzay-zamandan düz uzay-zamana geçildiğinde aşağıdaki sonuç bulunur:

$$(\Psi^k, \Psi^{k'}) = \int a(t) \Psi_k^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(0)} \Psi_{k'} dx \quad (3.2.37)$$

Bu durumda boylandırma sabiti, işlem sonucu

$$N = \frac{\sqrt{Ma_0 \pi}}{(M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2)^{\frac{1}{4}}} \quad (3.2.38)$$

olur.

3.3 DUFFİN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN AKIM YOĞUNLUĞUNUN BİLEŞENLERİ^[13]

Boşluğun zaman içerisinde ölçek çarpanına göre salınım yapması eğri uzay-zamanda parçacık yaratmaya neden olmaktadır. Başka bir deyişle boşluğun kararsızlığından kaynaklı olarak sistem kendi kendine ya parçacık yaratmakta ya da parçacık yok etmektedir. Bu modelde vektör bozonların yaratılması ya da yok edilmesi Gordon bozunması ile belirlenir. Denklem (2.1.3) ve bu denklemin karmal eşleniği akım yoğunluğunda yerin yazıldığında aşağıdaki durum elde edilir:

$$J^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi = \frac{i}{2M} \left\{ \bar{\Psi} \beta^\mu \beta^\lambda \partial_\lambda \Psi - \bar{\Psi} [\beta^\mu \beta^\lambda \Sigma_\lambda + \Sigma_\lambda \beta^\mu \beta^\lambda] + e A_\lambda g^{\lambda\mu} \bar{\Psi} \right\} \Psi \quad (3.3.1)$$

Burada $\bar{\Psi} = \psi^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)})$ biçiminde tanımlanan eşlenik spinördür. Ayrıca Akım yoğunluğunun korunabilmesi için Kemmer matrisleri aşağıdaki dönüşümleri sağlarlar:

$$\left(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}\right) \beta^{\lambda^*} \left(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}\right) = \beta^{\lambda} \quad (3.3.2)$$

$$\left(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}\right) \Sigma_{\mu}^+ \left(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}\right) = -\Sigma_{\mu} \quad (3.3.3)$$

Verilen metriğe göre $\beta^{\mu}(x)_{;\mu} = 0$ ve ikili vektör akım yoğunluğunun bileşenleri aşağıdaki durumlarda verilmektedir:

Durum 1: $\text{Im}(\kappa) > 0$ ve $\text{Im}(b) < 0$ olması durumunda akım yoğunluğunun bileşenleri:

$$j^0 = D_0 \frac{1}{t} + D_1 \frac{1}{t^2} \quad (3.3.4)$$

$$j^1 = -D_2 \frac{1}{t} + D_3 \frac{1}{t^3} \quad (3.3.5)$$

Durum 2: $\text{Im}(\kappa) < 0$ ve $\text{Im}(b) > 0$ ise akım yoğunluğunun bileşenleri:

$$j^0 = -D_0 \frac{1}{t} - D_1 \frac{1}{t^2} \quad (3.3.6)$$

$$j^1 = -D_2 \frac{1}{t} + D_3 \frac{1}{t^3} \quad (3.3.7)$$

Burada;

$$D_0 = \frac{|N|^2 (M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2)^{\frac{1}{2}}}{a_0^2 \pi M} \quad (3.3.8)$$

$$D_1 = \frac{|N|^2 4k_x eE}{a_0^2 \pi M (M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3.9)$$

$$D_2 = \frac{2|N|^2 eE}{a_0^3 \pi M} \quad (3.3.10)$$

ve

$$D_3 = \frac{2|N|^2 k_x}{a_0^3 \pi M} \quad (3.3.11)$$

dir. Bu katsayılar k_x ve e 'nin değerlerine bağlıdır. Buna göre aşağıdaki sonuçlar elde edilir: (a) $k_x > 0$ ve $e > 0$; bu durum, pozitif yüklü ve pozitif momentumlu parçacığı tanımlar. (b) $k_x < 0$ ve $e < 0$; bu durum ise negatif yüklü ve negatif momentumlu parçacığı betimler. Burada ilginç olan diğer bir nokta akım yoğunluğunun J^0

bileşeninin işareti hem k_x 'in hem de e 'in işaretlerinden bağımsızken J^1 bileşeninin işareti hem k_x 'in hem de e 'in seçimine göre pozitif veya negatif değerlere sahip olmasıdır. Bu bağlamda akım yoğunluğunun J^1 bileşeni ilgilenilen bölgede parçacık yaratmanın olup olmadığını belirlemektedir. Çünkü J^1 bileşeni akımın uzaysal bileşeninin zaman içerisinde nasıl bir değişime uğradığını göstermektedir. Bu süreç Sarkar tarafından önerilen cWKB metodu aracılığı ile kolayca çözümlenebilir[46].

3.4 VEKTÖR BOZANLARININ HARMONİK SALINIMI VE KUANTUMLU MOMENTUMU^[13]

Vektör bozonlarının salınım aralığının belirlenmesi için vektör bozonlarının davranışını betimleyen ikinci dereceden diferansiyel denkleminin biçimi harmonik salınımının diferansiyel denkleminin biçimine benzeyecek şekilde dönüştürülmelidir[47]. Denklem (3.2.21) ile aşağıdaki denklem karşılaştırıldığında;

$$\left[\partial_0^2 + \omega^2(t)\right]\chi(t) = 0 \quad (3.4.1)$$

salınım frekansı $\omega^2(t)$ aşağıdaki biçimde olur:

$$\omega^2(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}\right) \frac{1}{t^2} - \frac{2k_x e E}{a_0^2} \frac{1}{t} + \left(\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}{4a_0^2}\right) \quad (3.4.2)$$

Buna göre parçacıkların salınım frekansı zamanın bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. Bu çözümün tanımlı olduğu aralık aşağıdaki eşitsizlikle verilir:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}\right) \frac{1}{t^2} - \frac{2k_x e E}{a_0^2} \frac{1}{t} + \left(\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}{4a_0^2}\right) > 0 \quad (3.4.3)$$

$\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}$ terimi kabul edilebilir aralıkta olduğu varsayılırsa bu eşitsizlik t 'nin $(0, \infty)$

aralığında değerlendirilebilir. Sonuç olarak vektör parçacıkların salınım aralığı;

$$\begin{aligned} & \frac{2k_x e E}{a_0^2} - \sqrt{\left(\frac{2k_x e E}{a_0^2}\right)^2 - \left[\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}{a_0^2}\right] \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}\right)} \\ & < \left[\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}{2a_0^2}\right] t < \\ & \frac{2k_x e E}{a_0^2} - \sqrt{\left(\frac{2k_x e E}{a_0^2}\right)^2 - \left[\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}{a_0^2}\right] \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}\right)} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

olur.

Vektör bozonların davranışlarını betimleyen ikinci dereceden diferansiyel denklemin çözümü Whittaker fonksiyonları cinsinden elde edilmiştir. Whittaker fonksiyonlarının değişkenleri tüm değer aralığında sınırlı olduğundan parçacığın momentumu kuantumlu olur ve aşağıdaki koşul yazılır:

$$\kappa - \mu + \frac{1}{2} = -n \quad (3.4.5)$$

Burada n pozitif tamsayı veya sıfırdır. Denklem (3.2.25) ve Denklem (3.2.27)'de verilen κ ve μ 'ün ifadeleri kullanılarak momentumun kuantumlanma koşulu aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$k_x = \mp \frac{ia_0 (M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[2eE + (M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2)^{\frac{1}{2}} \right]} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.4.6)$$

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1 GENEL METRİK İÇİN KATSAYILAR HESABI

4.1.1 Christoffel Sembollerinin Bulunması

(1+1) boyutlu eğri uzay-zamanda Riemann geometrisini betimleyen genel çizgi elemanı

$$ds^2 = C_1^2(t, x)^2 dt - C_2^2(t, x)dx^2 \quad (4.1.1.1)$$

biçiminde tanımlanır. Bu ifadedeki değişken katsayılar bundan sonra

$$C_1(t, x) = C_1 \quad (4.1.1.2)$$

$$C_2(t, x) = C_2 \quad (4.1.1.3)$$

olarak yazılacaktır. Bu çizgi elamanına karşılık gelen metrik tensörü ise

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} C_1^2(t, x) & 0 \\ 0 & C_2^2(t, x) \end{pmatrix} \quad (4.1.1.4)$$

olur. $g_{\mu\nu}$ ve $g^{\mu\nu}$ tensörleri arasındaki ilişki;

$$g^{\mu\nu} = \frac{adj(g_{\mu\nu})}{\det(g_{\mu\nu})} \quad (4.1.1.5)$$

ile verilir. Denklem (4.1.1.4)'de tanımlanan metrik tensörü için determinant aşağıda verilen değere eşittir:

$$\det(g_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} C_1^2 & 0 \\ 0 & C_2^2 \end{vmatrix} = C_1^2 C_2^2 \quad (4.1.1.6)$$

Denklem (4.1.1.6) kullanılarak denklem (4.1.1.5)'de verilen kontravaryant metrik tensörünün her bir bileşeni aşağıdaki biçimde hesaplanır:

$$g^{00} = \frac{adj(g_{00})}{\det(g_{\mu\nu})} = \frac{C_2^2}{C_1^2 C_2^2} = \frac{1}{C_1^2} \quad (4.1.1.7)$$

$$g^{01} = \frac{adj(g_{01})}{\det(g_{\mu\nu})} = \frac{0}{C_1^2 C_2^2} = 0 \quad (4.1.1.8)$$

$$g^{10} = \frac{adj(g_{10})}{\det(g_{\mu\nu})} = \frac{0}{C_1^2 C_2^2} = 0 \quad (4.1.1.9)$$

$$g^{11} = \frac{adj(g_{11})}{\det(g_{\mu\nu})} = \frac{C_1^2}{C_1^2 C_2^2} = \frac{1}{C_2^2} \quad (4.1.10)$$

Bu durumda kontravaryant metrik tensörü

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} C_1^{-2} & 0 \\ 0 & C_2^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.1.1.11)$$

olur. Eğri uzay-zaman ile düz uzay-zaman arasındaki ilişki dört ayaklar aracılığı ile aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$g^{\mu\nu} = e_{(i)}^{\mu}(x)e_{(i)}^{\nu}(x)\eta^{(ij)} \quad (4.1.1.12)$$

Burada $\eta^{(ij)}$ düz uzay-zaman metriği olup, (1+1) boyutta $\eta = \eta(1,-1)$ seçimi yapılır.

- $\mu = \nu = 0$ durumu için;

$$g^{00} = e_{(i)}^0 e_{(i)}^0 \eta^{(ij)} \quad (i = j = 0 \quad \eta^{(00)} = 1) \quad (4.1.1.13)$$

$$g^{00} = (e_{(0)}^0)^2 \quad ; \quad e_{(0)}^0 = C_1^{-1} \quad (4.1.1.14)$$

- $\mu = \nu = 1$ durumu için;

$$g^{11} = e_{(i)}^1 e_{(i)}^1 \eta^{(ij)} \quad (i = j = 1 \quad \eta^{(11)} = -1) \quad (4.1.1.15)$$

$$g^{11} = (e_{(1)}^1)^2 \quad ; \quad e_{(1)}^1 = C_2^{-1} \quad (4.1.1.16)$$

Elde edilen sonuçların matris biçimdeki gösterimleri

$$e_{(i)}^{\mu} = \begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & C_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.1.1.17)$$

Şeklindedir. $e_{(i)}^{\mu}$ matrisine karşılık gelen $e_{\mu}^{(i)}$ matrisinin bulunması için

$$e_{\mu}^{(i)} = \frac{adj(e_{(i)}^{\mu})}{\det(e_{(i)}^{\mu})} \quad (4.1.1.18)$$

bağıntısı kullanılır ve aşağıdaki ifadeler elde edilir:

- $\mu = \nu = 0$ durumu için;

$$e_0^{(0)} = \frac{adj(e_{(0)}^0)}{\det(e_{(i)}^{\mu})} \quad ; \quad e_0^{(0)} = C_1 \quad (4.1.1.19)$$

$$\det(e_{(i)}^{\mu}) = \frac{1}{C_1 C_2} \quad (4.1.1.20)$$

- $\mu = \nu = 1$ durumu için;

$$e_1^{(1)} = \frac{adj(e_{(1)}^1)}{\det(e_{(i)}^{\mu})} \quad ; \quad e_1^{(1)} = C_2 \quad (4.1.1.21)$$

Elde edilen sonuçların matris olarak gösterimi aşağıdaki biçimdedir:

$$e_{\mu}^{(i)} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.1.22)$$

Christoffel sembolleri;

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}] \quad (4.1.1.23)$$

eşitliği ile verilir. Denklem (4.1.1.1)'de verilen çizgi elemanına karşılık gelen metrik tensörünün sadece köşegen elemanları olduğu için aşağıdaki sembollerin hesaplanması yeterlidir:

1. $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ durumu için;

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{00} [\partial_{\mu} g_{0\nu} + \partial_{\nu} g_{0\mu} - \partial_0 g_{\mu\nu}] \quad (4.1.1.24)$$

• $\mu = \nu = 0$ ise;

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} [\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}] \quad (4.1.1.25)$$

$$= \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{00} = \frac{\dot{C}_1}{C_1} \quad (4.1.1.26)$$

• $\mu = 0$ ve $\nu = 1$ ise:

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} g^{00} [\partial_0 g_{01} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{00}] \quad (4.1.1.27)$$

$$= \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} = \frac{C'_1}{C_1} \quad (4.1.1.28)$$

Christoffel sembolleri simetrik oldukları için

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{C'_1}{C_1} \quad (4.1.1.29)$$

yazılabilir.

• $\mu = 1$ ve $\nu = 1$ ise;

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2} g^{00} [\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}] \quad (4.1.1.30)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{11} = -\frac{C_2 \dot{C}_2}{C_1^2} \quad (4.1.1.31)$$

2. $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ durumu için;

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} [\partial_\mu g_{1\nu} + \partial_\nu g_{1\mu} - \partial_1 g_{\mu\nu}] \quad (4.1.1.32)$$

• $\mu = \nu = 0$ ise;

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11} [\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}] \quad (4.1.1.33)$$

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11} = -\frac{C_1 C'_1}{C_2^2} \quad (4.1.1.34)$$

• $\mu = 0$ ve $\nu = 1$ ise;

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11} [\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{10}] \quad (4.1.1.35)$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11} \partial_0 g_{11} = \frac{\dot{C}_2}{C_2} \quad (4.1.1.36)$$

Christoffel sembollerinin simetrik olma özelliğinden aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{C}_2}{C_2} \quad (4.1.1.37)$$

3. $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ durumu için

• $\mu = \nu = 1$ ise;

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11} = \frac{C'_2}{C_2} \quad (4.1.1.38)$$

Yukarıda elde edilen veriler toparlandığında Christoffel sembollerinin matris biçimdeki gösterimleri aşağıdaki şekilde olur:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{C}_1}{C_1} & \frac{C'_1}{C_1} \\ \frac{C'_1}{C_1} & -\frac{C_2 \dot{C}_2}{C_1^2} \end{pmatrix} \quad (4.1.1.39a)$$

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1 C'_1}{C_2} & \frac{\dot{C}_2}{C_2} \\ \frac{\dot{C}_2}{C_2} & \frac{C'_2}{C_2} \end{pmatrix} \quad (4.1.1.39b)$$

4.1.2 Spin Bağlantı Katsayılarının Hesaplanması

Christoffel sembolleri ile spin bağlantı katsayıları arasındaki ilişki

$$\Gamma_{\lambda} = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \quad (4.1.2.1)$$

şeklinde verilmektedir.

1. $\lambda = 0$ durumu için;

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu 0} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \\ &= -\frac{1}{8} \{g_{\mu 0} \Gamma^0_{\nu 0} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] + g_{\mu 1} \Gamma^1_{\nu 0} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]\} \\ &= -\frac{1}{8} \{g_{00} \Gamma^0_{\nu 0} [\gamma^0, \gamma^{\nu}] + g_{00} \Gamma^0_{\nu 0} [\gamma^0, \gamma^{\nu}] + g_{01} \Gamma^1_{\nu 0} [\gamma^0, \gamma^{\nu}] + g_{11} \Gamma^1_{\nu 0} [\gamma^1, \gamma^{\nu}]\} \\ &= -\frac{1}{8} \{g_{00} \Gamma^0_{10} [\gamma^0, \gamma^1] + g_{11} \Gamma^1_{00} [\gamma^1, \gamma^0]\} \\ \Gamma_0 &= -\frac{C_1 C'_1}{2} \gamma^0 \gamma^1 \end{aligned} \quad (4.1.2.2)$$

2. $\lambda = 1$ durumu için;

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu 1} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \\ &= -\frac{1}{8} \{g_{\mu 0} \Gamma^0_{\nu 1} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] + g_{\mu 1} \Gamma^1_{\nu 1} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]\} \\ &= -\frac{1}{8} \{g_{00} \Gamma^0_{\nu 1} [\gamma^0, \gamma^{\nu}] + g_{11} \Gamma^1_{\nu 1} [\gamma^1, \gamma^{\nu}]\} \\ &= -\frac{1}{8} \{g_{00} \Gamma^0_{11} [\gamma^0, \gamma^1] + g_{11} \Gamma^1_{01} [\gamma^1, \gamma^0]\} \\ \Gamma_1 &= -\frac{C_2 \dot{C}_2}{2} \gamma^0 \gamma^1 \end{aligned} \quad (4.1.2.3)$$

Düz uzay-zaman matrisi ile eğri uzay-zaman matrisi arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$\gamma^{\mu} = e_{(i)}^{\mu} \gamma^{(i)} \quad (4.1.2.4)$$

Bu bağıntı kullanılarak matris bileşenleri arasındaki ilişki hesaplanır:

$$\gamma^0 = e_{(0)}^0 \gamma^{(0)} = \frac{1}{C_1} \gamma^{(0)} \quad (4.1.2.5)$$

$$\gamma^0 = e_{(1)}^1 \gamma^{(1)} = \frac{1}{C_2} \gamma^{(1)} \quad (4.1.2.6)$$

Bu durumda spin bağlantı katsayılarının düz uzay-zaman Dirac matrisleri cinsinden ifadeleri aşağıdaki biçimdedir:

$$\Gamma_0 = -\frac{C_1 C_1'}{2} \gamma^0 \gamma^1 = -\frac{C_1'}{2C_2} \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \quad (4.1.2.7)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{C_2 \dot{C}_2}{2} \gamma^0 \gamma^1 = -\frac{\dot{C}_2}{2C_1} \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \quad (4.1.2.8)$$

4.1.3 (1+1) Boyutlu eğri uzay-zamanda Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi

DKP denklemi;

$$\left[i\beta^\mu (\partial_\mu - \Sigma_\mu) - m \right] \Psi(t, x) = 0 \quad (4.1.3.1)$$

veya

$$\left[e_{(i)}^\mu \beta^{(i)} (\partial_\mu - \Sigma_\mu) + im \right] \Psi(t, x) = 0 \quad (4.1.3.2)$$

ile verilmektedir. Burada β^μ Kemmer matrisleri

$$\beta^{(0)} = \gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \quad (4.1.3.3)$$

$$\beta^{(1)} = \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)} \quad (4.1.3.4)$$

ve Σ_μ spin bağlantı katsayıları ise

$$\Sigma_0 = -\frac{C_1'}{2C_2} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) \quad (4.1.3.5)$$

$$\Sigma_1 = -\frac{\dot{C}_2}{2C_1} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) \quad (4.1.3.6)$$

şeklindedir. Denklem (4.1.3.2) açıldığında

$$\left[e_{(0)}^0 \beta^{(0)} (\partial_t - \Sigma_0) + e_{(1)}^1 \beta^{(1)} (\partial_x - \Sigma_1) + im \right] \Psi(t, x) = 0 \quad (4.1.3.7)$$

$$\left[\begin{array}{l} e_{(0)}^0 (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) (\partial_t - \Sigma_0) + \\ e_{(1)}^1 (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) (\partial_x - \Sigma_1) + im \end{array} \right] \Psi(t, x) = 0 \quad (4.1.3.8)$$

veya

$$\left[\begin{array}{l} e_{(0)}^0 (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) \partial_t - e_{(0)}^0 (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) \Sigma_0 + \\ e_{(1)}^1 (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) \partial_x - \Sigma_1 e_{(1)}^1 (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) + im \end{array} \right] \Psi(t, x) = 0$$

ya da daha açık bir ifadeyle;

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{C_1} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) \partial_t + \frac{1}{C_2} (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) \partial_x + \\ \frac{C_1'}{2C_1 C_2} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + \\ \frac{\dot{C}_2}{2C_2 C_1} (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + im \end{array} \right] \Psi(t, x) = 0 \quad (4.1.3.9)$$

olarak elde edilir. Bu denklem $\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}$ ile çarpılırsa

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{C_1} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) \partial_t + \frac{1}{C_2} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(0)} + \gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) \partial_x + \\ \frac{C_1'}{2C_1 C_2} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + im (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \\ + \frac{\dot{C}_2}{2C_2 C_1} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(0)} + \gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) \end{array} \right] \Psi(t, x) = 0 \quad (4.1.3.10)$$

olur. Dirac matrislerinin Pauli matrisleri cinsinden $\gamma^{(i)} = (\sigma^3, -i\sigma^2)$ şeklindeki seçimi göz önüne alınırsa, denklem (4.1.3.10)'da yer alan matrislerin açık biçimleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\beta^{(0)} = \gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.1.3.11)$$

$$\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(0)} + \gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.3.12)$$

$$\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.3.13a)$$

$$\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.3.13b)$$

Dalga fonksiyonunun bileşenleri cinsinden ifadesi;

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{\tilde{0}} \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.3.14)$$

olarak tanımlansın. Yukarıda verilen matrisler, denklem (4.1.3.10)'da yerlerine yazıldığında

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_t + \frac{1}{C_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \\ \frac{C_1'}{2C_1C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\dot{C}_2}{2C_2C_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{\tilde{0}} \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{2}{C_1} \partial_t + \frac{\dot{C}_2}{C_2C_1} + im & -\left(\frac{1}{C_2} \partial_x + \frac{C_1}{C_1C_2} \right) & -\left(\frac{1}{C_2} \partial_x + \frac{C_1}{C_1C_2} \right) & \frac{\dot{C}_2}{C_2C_1} \\ -\frac{1}{C_2} \partial_x & -im & 0 & \frac{1}{C_2} \partial_x \\ -\frac{1}{C_2} \partial_x & 0 & -im & \frac{1}{C_2} \partial_x \\ -\frac{\dot{C}_2}{C_2C_1} & \left(\frac{1}{C_2} \partial_x + \frac{C_1}{C_1C_2} \right) & \left(\frac{1}{C_2} \partial_x + \frac{C_1}{C_1C_2} \right) & -\frac{2}{C_1} \partial_t - \frac{\dot{C}_2}{C_2C_1} + im \end{array} \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{\tilde{0}} \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4.1.3.15)$$

bulunur. Matris çarpımı yapıldıktan sonra aşağıdaki üç denklem elde edilir:

$$\left(\frac{2}{C_1}\partial_t + \frac{\dot{C}_2}{C_2 C_1}\right)\psi_1 + im\psi_1 - 2\left(\frac{1}{C_2}\partial_x + \frac{C'_1}{C_1 C_2}\right)\psi_0 + \frac{\dot{C}_2}{C_2 C_1}\psi_2 = 0 \quad (4.1.3.16)$$

$$\left(\frac{2}{C_1}\partial_t + \frac{\dot{C}_2}{C_2 C_1}\right)\psi_2 - im\psi_2 - 2\left(\frac{1}{C_2}\partial_x + \frac{C'_1}{C_1 C_2}\right)\psi_0 + \frac{\dot{C}_2}{C_2 C_1}\psi_1 = 0 \quad (4.1.3.17)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{imC_2}\partial_x(\psi_2 - \psi_1) \quad (4.1.3.18)$$

Burada $\psi_0 = \psi_0$ olduğu açıkça görülmektedir.

4.1.4 (1+1) Boyutta Robertson-Walker Metriği için DKP Denklemleri

RW evren modelini betimleyen çizgi elemanın öğeleri $C_1(t)=1$ ve $C_2(t)=a(t)$ olarak tanımlanır. Buna göre;

$$\dot{C}_1 = C'_1 = 0 \quad (4.1.4.1)$$

$$C'_2 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.1.4.2)$$

olur. Denklem (4.1.4.1) ve denklem (4.1.4.2)'de verilen eşitlikler denklem (4.1.3.16), denklem (4.1.3.17) ve denklem (4.1.3.18)'de kullanıldığında denklem kümesi aşağıdaki denklem kümesine dönüşür:

$$\left(2\partial_t + \frac{\dot{a}}{a}\right)\psi_1 + im\psi_1 - \frac{2}{a}\partial_x\psi_0 + \frac{\dot{a}}{a}\psi_2 = 0 \quad (4.1.4.3)$$

$$\left(2\partial_t + \frac{\dot{a}}{a}\right)\psi_2 - im\psi_2 - \frac{2}{a}\partial_x\psi_0 + \frac{\dot{a}}{a}\psi_1 = 0 \quad (4.1.4.4)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{ima}\partial_x(\psi_2 - \psi_1) \quad (4.1.4.5)$$

Çizgi elemanındaki ölçek çarpanı yalnızca zamana bağlıdır. Bu nedenle dalga fonksiyonunun konuma bağıllığı düzlem dalga olarak alınır ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \\ h_0 \\ h_2 \end{pmatrix} e^{ikx} \quad (4.1.4.6)$$

Bu ifade, son yazılan denklem kümesinde kullanılırsa aşağıdaki biçimde yeni bir denklem kümesi elde edilir:

$$\left(2\partial_t + \frac{\dot{a}}{a}\right)h_1 + imh_1 - \frac{2ik}{a}h_0 + \frac{\dot{a}}{a}h_2 = 0 \quad (4.1.4.7)$$

$$\left(2\partial_t + \frac{\dot{a}}{a}\right)h_2 - imh_2 - \frac{2ik}{a}h_0 + \frac{\dot{a}}{a}h_1 = 0 \quad (4.1.4.8)$$

$$h_0 = \frac{k}{ma}(h_2 - h_1) \quad (4.1.4.9)$$

Denklem (4.1.4.7) ile denklem (4.1.4.8) taraf tarafa toplandığında

$$2\left(\partial_t + \frac{\dot{a}}{a}\right)(h_1 + h_2) + im(h_1 - h_2) - \frac{4ik}{a}h_0 = 0 \quad (4.1.4.10a)$$

elde edilir ve taraf tarafa çıkarıldığında

$$h_1 + h_2 = -\frac{2}{im}\partial_t(h_1 - h_2) \quad (4.1.4.10b)$$

bulunur. Denklem (4.1.4.10b) ve denklem (4.1.4.9), denklem (4.1.4.10a)'da yerine yazılırsa

$$-2\left(\partial_t + \frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{2}{im}\partial_t(h_1 - h_2) + im(h_1 - h_2) - \frac{4ik}{a}\frac{k}{ma}(h_2 - h_1) = 0$$

elde edilir. Daha düzenli bir biçimi

$$\left(\partial_t^2 + \frac{\dot{a}}{a}\partial_t + \frac{m^2}{4} + \frac{k^2}{a^2}\right)(h_1 - h_2) = 0 \quad (4.1.4.11)$$

olur. Bu denklemin çözümleri sistemin dinamiğini belirleyen ölçek çarpanına göre değişmektedir. Burada seçilecek olan ölçek çarpanları farklı evren modellerini betimlemektedir. Bunlar sırasıyla; $a(t) = a_0 t$, Schrödinger evreni; $a(t) = a_0 t^{\frac{1}{2}}$, ışımaya baskın evren ve $a(t) = e^{Ht}$, boşluk baskın evrendir.

4.2. $a(t) = a_0 t$, SCHRÖDİNGER EVREN MODELİNDE SPİN-1 PARÇACIĞI

4.2.1. Duffin-Kemmer-Petiau Denkleminin Çözümü

Denklem (4.1.4.11)'de ikinci terimde yer alan çarpan $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t}$ olur. Ayrıca

$$h_1(t) - h_2(t) = X(t) \quad (4.2.1.1)$$

tanımına göre denklem (4.1.4.11) aşağıdaki biçimde yeniden yazılır:

$$\left(\partial_t^2 + \frac{1}{t} \partial_t + \frac{m^2}{4} + \frac{k^2}{a_0^2} \frac{1}{t^2} \right) X(t) = 0 \quad (4.2.1.2)$$

Bu denklemin Whittaker denklemine benzetilebilmesi için

$$X(t) = t^\alpha U(t) \quad (4.2.1.3)$$

bu şekilde yeni bir fonksiyon tanımlanmalıdır. Bu fonksiyonun türevleri alınır

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t) = t^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} U(t) + \frac{\alpha}{t} U(t) \right) \quad (4.2.1.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) = t^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t) + \frac{2\alpha}{t} \frac{\partial}{\partial t} U(t) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2} U(t) \right) \quad (4.2.1.5)$$

elde edilir. Bu sonuçlar denklem (4.2.1.2)'de kullanıldığında

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2\alpha+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{m^2}{4} + \left(\alpha^2 + \frac{k^2}{a_0^2} \right) \frac{1}{t^2} \right) U(t) = 0 \quad (4.2.1.6)$$

bulunur. $\alpha = -\frac{1}{2}$ seçimi ile bu denklem aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{a_0^2} \right) \frac{1}{t^2} + \frac{m^2}{4} \right) U(t) = 0 \quad (4.2.1.7)$$

Yeni değişken

$$t = \beta z \quad (4.2.1.8)$$

şeklinde tanımlanır ve bu değişkenin parçalı türevleri alınır

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{\beta^2} \quad (4.2.1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.2.1.10)$$

bulunur. Bu ifadeler denklem (4.2.1.7)'de yazılırsa, Whittaker denklemine benzer aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{a_0^2} \right) \frac{1}{z^2} + \beta^2 \frac{m^2}{4} \right) U(z) = 0 \quad (4.2.1.11)$$

Whittaker denklemi aşağıdaki biçimdedir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{4} + \frac{\kappa}{y} + \frac{1/4 - \mu^2}{y^2} \right) W_{\kappa, \mu}(y) = 0 \quad (4.2.1.12)$$

Denklem (4.2.1.11) ile denklem (4.2.1.12) karşılaştırıldığında, aşağıda verilen denkliklerin olduğu görülür:

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \pm \frac{i}{m} \\ \kappa &\equiv 0 \\ \mu &\equiv \pm \frac{ik}{a_0} \\ U(z) &\equiv W_{\mu}(z) = W_{0, \pm \frac{ik}{a_0}}(\mp imt) \end{aligned} \quad (4.2.1.13)$$

Bu durumda denklem (4.1.4.10b) ve denklem (4.2.1.1)'de verilen dalga fonksiyonunun bileşenlerinin toplamının ve farkının Whittaker fonksiyonu cinsinden

$$h_1(t) + h_2(t) = -\frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t^{-\frac{1}{2}} W_{0, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\} \quad (4.2.1.14)$$

$$h_1(t) - h_2(t) = t^{-\frac{1}{2}} W_{0, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \quad (4.2.1.15)$$

olur. Her iki denklem aralarında toplanıp çıkarıldığında bileşenler için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$h_1(t) = \frac{A}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{imt} \right) W_{0, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{0, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right] \quad (4.2.1.16)$$

$$h_2(t) = \frac{A}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[\left(-1 + \frac{1}{imt} \right) W_{0, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{0, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right] \quad (4.2.1.17)$$

$$h_0 = -\frac{Ak}{ma_0} t^{-\frac{1}{2}} W_{0, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \quad (4.2.1.18)$$

Burada A boylandırma katsayısıdır. Bu eşitlikler kümesi, denklem (4.1.4.6)'da yazılırsa dalga fonksiyonu için;

$$\Psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{imt}\right) W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) \right] \\ - \frac{k}{ma_0 t} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) \\ - \frac{k}{ma_0 t} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) \\ \frac{1}{2} \left[\left(-1 + \frac{1}{im}\right) W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) \right] \end{pmatrix} e^{ikx} \quad (4.2.1.19)$$

bulunur. Bu fonksiyonda bulunan Whittaker fonksiyonunun türevi yerine kendi cinsinden değerinin yazılabilmesi için aşağıdaki değişken değişimi yapılır:

$$y = \frac{t}{\beta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.2.1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} W_{0,\mu}(y) \quad (4.2.1.21)$$

Denklem (4.2.1.21)'in sağ tarafı için Whittaker fonksiyonlarının türev indirgeme bağıntısı kullanılır:

$$\frac{\partial}{\partial y} W_{0,\mu}(y) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{y} \left\{ \frac{y}{2} W_{0,\mu}(y) - W_{1,\mu}(y) \right\} \quad (4.2.1.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} W_{0,\mu}(y) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{y} \left\{ \frac{y}{2} W_{0,\mu}(y) - W_{1,\mu}(y) \right\} \quad (4.2.1.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) = \frac{1}{t} \left\{ \frac{t}{2\beta} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) - W_{1,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) \right\} \quad (4.2.1.24)$$

Denklem (4.2.1.24) dalga fonksiyonunun her bir bileşeni için uygulandığında aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$h_1 = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[\left\{ 1 + \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta} \right\} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) + \frac{2}{imt} W_{1,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) \right] \quad (4.2.1.25)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[\left\{ -1 + \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta} \right\} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) + \frac{2}{imt} W_{1,\mu} \left(\frac{t}{\beta}\right) \right] \quad (4.2.1.26)$$

Bu durumda dalga fonksiyonu

$$\Psi(x, t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\left\{ 1 + \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta} \right\} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right] \\ - \frac{k}{ma_0 t} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \\ - \frac{k}{ma_0 t} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \\ \frac{1}{2} \left[\left\{ -1 + \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta} \right\} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right] \end{pmatrix} e^{ikx} \quad (4.2.1.27)$$

olur.

4.2.2. Asimptotik Çözüm

Denklemler (4.2.1.27)'de verilen dalga fonksiyonunun sonsuzdaki davranışı Whittaker fonksiyonu aracılığı ile belirlenir. Whittaker fonksiyonunun sonsuzdaki davranışı aşağıdaki biçimde verilir:

$$W_{\kappa,\mu}(y) \approx y^\kappa e^{-\frac{y}{2}} \quad (4.2.2.1)$$

Buna göre dalga fonksiyonunda yer alan Whittaker fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri,

$$W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \approx e^{-\frac{t}{2\beta}} \quad (4.2.2.2)$$

$$W_{1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \approx \frac{t}{\beta} e^{-\frac{t}{2\beta}} \quad (4.2.2.3)$$

olur. Bu nicelikler denklem (4.2.1.27)'deki her bir bileşen için kullanılırsa, aşağıdaki ifadeler yazılır:

$$h_1(t) \approx \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta} \right] e^{-\frac{t}{2\beta}} e^{ikx} \quad (4.2.2.4)$$

$$h_2(t) \approx \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[-1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta} \right] e^{-\frac{t}{2\beta}} e^{ikx} \quad (4.2.2.5)$$

$$h_0(t) \approx -\frac{k}{ma_0 t} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2\beta}} e^{ikx} \quad (4.2.2.6)$$

Bu ifadeler dalga fonksiyonunda yerine konulduğunda dalga fonksiyonu aşağıdaki biçimini alır:

$$\Psi(x, t) \approx \frac{A}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta} \right] \\ -\frac{k}{ma_0 t} \\ -\frac{k}{ma_0 t} \\ \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta} \right] \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2\beta}} e^{ikx} \quad (4.2.2.7)$$

4.2.3. Boylandırma Katsayısının Bulunması

Dalga fonksiyonun boylandırma katsayısının bulunması için

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \int \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi \sqrt{-g} d\sigma_\mu = \pm \delta(k - k') \quad (4.2.3.1)$$

bağıntısı kullanılır. Daha açık biçimi

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \int \bar{\psi}_k e_{(i)}^\mu \beta^{(i)} \psi_{k'} a(t) d\sigma_\mu = \pm \delta(k - k') \quad (4.2.3.2)$$

şeklinde yazılır. Bu ifade bileşenlerine göre açılırsa

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \int a_0 t \{ e_{(0)}^0 \bar{\psi}_k \beta^{(0)} \psi_{k'} d\sigma_0 + e_{(1)}^1 \bar{\psi}_k (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(1)} \psi_{k'} d\sigma_1 \} = \pm \delta(k - k') \quad (4.2.3.3)$$

olur. Bu bağıntı kullanılırsa Schrödinger Evren modeli için aşağıdaki ifade yazılır:

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) \equiv \int a_0 t \left(\psi_{k'}^+ \beta^{(0)} \psi_k dx + \frac{1}{a_0 t} \psi_{k'}^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(1)} \psi_k dt \right) = \pm \delta(k - k') \quad (4.2.3.4)$$

Burada

$$\Psi_k^+ \beta^{(0)} \Psi_{k'} = \frac{|A|^2}{\pi} (h_1^+ h_1' - h_2^+ h_2') \quad (4.2.3.5a)$$

ve

$$\Psi^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(1)} \Psi = \frac{|A|^2}{\pi} [h_0' (h_2^+ - h_1^+) + h_0^+ (h_2' - h_1')] \quad (4.2.3.5b)$$

eşitlikleri kullanılırsa, denklem (4.2.3.4) aşağıdaki biçime dönüşür:

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \frac{|A|^2}{\pi} \left\{ a_0 t [h_1^+ h_1' - h_2^+ h_2'] dx + \int [h_0' (h_2^+ - h_1^+) + h_0^+ (h_2' - h_1')] dt \right\} \quad (4.2.3.6)$$

Bu ifadenin ikinci terimi $t \rightarrow \infty$ limitinde sıfıra gider, geriye aşağıdaki ifade kalır:

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \frac{a_0 t |A|^2}{\pi} \int (h_1^+ h_1' - h_2^+ h_2') dx = \pm \delta(k - k') \quad (4.2.3.7)$$

Burada

$$h_1^+ h_1' - h_2^+ h_2' = \frac{1}{2imt} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) e^{ix(k-k')} \quad (4.2.3.8)$$

eşitliği kullanılırsa, denklem (4.2.3.7)

$$\begin{aligned} (\Psi_k, \Psi_{k'}) &= \frac{a_0 |A|^2}{\pi} \int \frac{1}{2im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) e^{ix(k-k')} dx = \pm \delta(k - k') \\ (\Psi_k, \Psi_{k'}) &= \frac{a_0 |A|^2}{\pi} \frac{1}{2im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) \frac{2\pi}{2\pi} \int e^{ix(k-k')} dx = \pm \delta(k - k') \\ (\Psi_k, \Psi_{k'}) &= 2a_0 |A|^2 \frac{1}{2im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) \frac{1}{2\pi} \int e^{ix(k-k')} dx = \pm \delta(k - k') \end{aligned} \quad (4.2.3.9)$$

olur. Burada

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ix(k-k')} dx = \delta(k - k') \quad (4.2.3.10)$$

kullanılmıştır. Buna göre denklem (4.2.3.9)'dan aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = a_0 |A|^2 \frac{1}{im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) = \pm 1 \quad (4.2.3.11)$$

Bu sonuç $\text{Im } \beta$ 'in pozitif ve negatif değerlerine göre aşağıdaki biçimde değerlendirilir:

- $\text{Im } \beta > 0$ durumu için;

$$-2a_0 |A|^2 = -1 \quad A = \frac{1}{\sqrt{2a_0}} \quad (4.2.3.12)$$

- $\text{Im } \beta < 0$ durumu için;

$$2a_0 |A|^2 = 1 \quad A = \frac{1}{\sqrt{2a_0}} \quad (4.2.3.13)$$

4.2.4. Akım Yoğunluğunun Hesaplanması

Vektör bozonları için tanımlanan akım yoğunluğu aşağıdaki biçimdedir:

$$J^\mu = \Psi^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^\mu \Psi \quad \text{ya da} \quad J^\mu = e_{(i)}^\mu \Psi^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(i)} \Psi \quad (4.2.4.1)$$

Bu durumda akım yoğunluğunun sıfırinci ve birinci bileşeni aşağıdaki değerleri alır:

I. Akım yoğunluğunun sıfırinci ($\mu = 0$) bileşeni:

$$J^0 = e_{(0)}^0 \Psi^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(0)} \Psi \quad (4.2.4.2)$$

Bu denklemde gerekli olan ifadeler kullanılırsa dalga fonksiyonunun bileşenleri cinsinden akım yoğunluğunun sıfırncı bileşeni aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$J^0 = 2|A|^2(h_1h^*_{1} - h_2h^*_{2}) \quad (4.2.4.3)$$

Burada dalga fonksiyonunun bileşenlerinin açık ifadeleri olan

$$h_1 = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta}\right)e^{-\frac{t}{2\beta}} \quad h^*_{1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta^*}\right)e^{-\frac{t}{2\beta^*}} \quad (4.2.4.4)$$

$$h_2 = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\left(-1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta}\right)e^{-\frac{t}{2\beta}} \quad h^*_{2} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\left(-1 - \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta^*}\right)e^{-\frac{t}{2\beta^*}} \quad (4.2.4.5)$$

bağıntılar kullanılırsa

$$h_1h^*_{1} = \frac{1}{4t} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta^*} + \frac{1}{m^2t^2} + \frac{1}{tm^2\beta^*} \\ + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta} + \frac{1}{tm^2\beta} + \frac{1}{m^2\beta\beta^*} \end{pmatrix} \quad (4.2.4.6)$$

ve

$$h_1h^*_{1} = \frac{1}{4t} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta^*} + \frac{1}{m^2t^2} + \frac{1}{tm^2\beta^*} \\ - \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta} + \frac{1}{tm^2\beta} + \frac{1}{m^2\beta\beta^*} \end{pmatrix} \quad (4.2.4.7)$$

elde edilir. Bu ifadelerin farkı

$$h_1h^*_{1} - h_2h^*_{2} = \frac{1}{4t} \left(-\frac{2}{imt} - \frac{2}{im\beta^*} + \frac{2}{imt} + \frac{2}{im\beta} \right)$$

veya

$$h_1h^*_{1} - h_2h^*_{2} = \frac{1}{2imt} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) \quad (4.2.4.8)$$

olarak bulunur. Bu durumda akım yoğunluğunun sıfırncı bileşeni

$$J^0 = \frac{|A|^2}{t} \frac{1}{im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) \quad (4.2.4.9)$$

elde edilir. Bu bağıntı $\text{Im}\beta$ 'in pozitif ve negatif değerlerine bağlı olarak değerlendirildiğinde aşağıdaki sonuçlar bulunur:

- $\text{Im } \beta > 0$ için;

$$J^0 = -\frac{2|A|^2}{t} \quad (4.2.4.10)$$

olur.

$$|A|^2 = -\frac{1}{2a_0}$$

oluğundan denklem (4.2.4.10) aşağıdaki biçimi alır:

$$J^0 = \frac{1}{a_0} \frac{1}{t} \quad (4.2.4.11)$$

- $\text{Im } \beta < 0$ için;

$$J^0 = \frac{2|A|^2}{t} \quad (4.2.4.12)$$

olur.

$$|A|^2 = \frac{1}{2a_0}$$

olduğu için denklem (4.2.4.12)

$$J^0 = \frac{1}{a_0} \frac{1}{t} \quad (4.2.4.13)$$

olur.

II. Akım yoğunluğunun birinci ($\mu = 1$) bileşeni;

$$J^1 = e_{(1)}^1 \Psi^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(1)} \Psi$$

Bu denklemde gerekli olan ifadeler kullanılırsa dalga fonksiyonunun bileşenleri cinsinde akım yoğunluğunun birinci bileşeni aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$J^1 = \frac{2|A|^2}{a_0 t} [h_0^* (h_2 - h_1) + h_0 (h_2^* - h_1^*)] \quad (4.2.4.14)$$

Dağla fonksiyonun bileşenleri kullanılırsa

$$h_2 - h_1 = -1 \quad \text{ve} \quad h_2^* - h_1^* = -1 \quad (4.2.4.15)$$

$$h_0 = -\frac{k_x}{ma_0 t} \quad (4.2.4.16)$$

bulunur. Bu eşitlikler denklem (4.2.4.14)'de yerine yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$J^1 = \frac{2|A|^2}{ma^2_0} \frac{1}{t^3} \quad (4.2.4.17)$$

Bu sonuç $\text{Im } \beta$ 'ın pozitif ve negatif değerlerine bağlı olarak değerlendirilir ve aşağıdaki sonuçlar bulunur:

- $\text{Im } \beta > 0$ için,

$$J^1 = -\frac{1}{ma^3_0} \frac{k_x}{t^3} \quad (4.2.4.18)$$

- $\text{Im } \beta < 0$ için,

$$J^1 = \frac{1}{ma^3_0} \frac{1}{t^3} \quad (4.2.4.19)$$

4.2.5. Frekans Aralığının Belirlenmesi

Harmonik salıncı

$$[\partial_0^2 + \omega^2(t)]\chi(t) = 0 \quad (4.2.5.1)$$

biçimindeki denkleme uyar. Denklem (4.2.1.7) ile denklem (4.2.5.1) karşılaştırıldığında salıncın frekansının

$$\omega^2(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{a_0^2} \right) \frac{1}{t^2} + \frac{m^2}{4} \quad (4.2.5.3)$$

olduğu görülür. Harmonik salıncı olarak davranabilmesi için

$$\omega^2(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{a_0^2} \right) \frac{1}{t^2} + \frac{m^2}{4} > 0 \quad (4.2.5.4)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu bağıntıdan aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$-\sqrt{4 + \frac{4k^2}{a_0^2 m^2}} < imt < \sqrt{4 + \frac{4k^2}{a_0^2 m^2}} \quad (4.2.5.5)$$

Bu sonuca göre, sistemi betimleyen dalga fonksiyonunun değişkeni yukarıda verilen aralıkta olması durumunda harmonik hareket gözlenir.

4.2.6. Kuantumlanma Koşulu

Whittaker fonksiyonlarındaki değişkenin alabileceği tüm değerler için fonksiyonun sınırlı olma koşulu aşağıdaki biçimde verilir:

$$\kappa - \mu + \frac{1}{2} = -n \quad (4.2.6.1)$$

Bu koşul kullanılarak, Schrödinger evren modeli için kuantumlanma koşulu elde edilir. Bunun için κ ve μ değerleri kullanılırsa parçacığın momentumu için aşağıdaki koşul bulunur:

$$k_n = \pm ia_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.2.6.2)$$

Burada n pozitif tam sayıdır.

4.3. $a(t) = a_0 t^{\frac{1}{2}}$, IŞIMA BASKIN EVREN MODELİNDE SPİN-1 PARÇACIĞI

4.3.1. Duffin-Kemmer-Petiau Denkleminin Çözümü

Denklem (4.1.4.11)'de yer alan çarpan $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}$ olur. Ayrıca

$$h_1(t) - h_2(t) = X(t) \quad (4.3.1.1)$$

tanımına göre denklem (4.1.4.11) aşağıdaki biçimde yeniden yazılır:

$$\left(\partial^2_t + \frac{1}{2t} \partial_t + \frac{m^2}{4} + \frac{k^2}{a_0^2 t} \right) X(t) = 0 \quad (4.3.1.2)$$

Bu denklemin Whittaker denklemine benzetilebilmesi için

$$X(t) = t^\alpha U(t) \quad (4.3.1.3)$$

bu şekilde yeni bir fonksiyon tanımlanmalıdır. Bu fonksiyonun türevleri alınır

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t) = t^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} U(t) + \frac{\alpha}{t} U(t) \right) \quad (4.3.1.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) = t^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t) + \frac{2\alpha}{t} \frac{\partial}{\partial t} U(t) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2} U(t) \right) \quad (4.3.1.5)$$

Bu eşitlikler denklem (4.3.1.2)'de yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2\alpha + \frac{1}{2}}{t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)}{t^2} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{k^2}{a_0^2 t} \right) \right) U(t) = 0 \quad (4.3.1.6)$$

bulunur. $\alpha = -\frac{1}{4}$ seçimi yapıldığında yukarıdaki eşitlik aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{3}{16t^2} + \frac{m^2}{4} + \frac{k^2}{a_0^2} \frac{1}{t} \right) U(t) = 0 \quad (4.3.1.7)$$

Yeni değişken

$$t = \beta z$$

şeklinde tanımlanır ve bu değişkenin parçalı türevleri alınır

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.3.1.8)$$

bulunur. Bu eşitlikler denklem (4.3.1.6)'da yerine yazılırsa, Whittaker denklemine benzer olan aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{3}{16z^2} + \frac{m^2}{4} \beta^2 + \frac{\beta k^2}{a_0^2} \frac{1}{z} \right) U(z) = 0 \quad (4.3.1.9)$$

Denklem (4.3.1.9) ile denklem (4.2.1.12) karşılaştırıldığında, aşağıda verilen denklemlerin olduğu görülür:

$$\beta = \pm \frac{i}{m} \quad \mu = \mp \frac{1}{4} \quad \kappa = \pm \frac{ik^2}{ma_0^2} \quad U(z) = W_{\pm \frac{ik^2}{ma_0^2}, \mp \frac{1}{4}} \left(\frac{t}{\beta} \right) \quad (4.3.1.10)$$

Bu durumda denklem (4.3.1.1) ve denklem (4.3.1.10)'da verilen dalga fonksiyonunun bileşenlerinin toplamının ve farkının Whittaker fonksiyonu cinsinden değeri

$$h_1(t) + h_2(t) = t^{-\frac{1}{4}} \left\{ \frac{1}{2imt} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\} \quad (4.3.1.11)$$

$$h_1(t) - h_2(t) = t^{-\frac{1}{4}} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \quad (4.3.1.12)$$

olur. Her iki denklem aralarında toplanıp çıkarıldığında bileşenler için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$h_1(t) = \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2imt} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\} \quad (4.3.1.13)$$

$$h_2(t) = \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{2} \left\{ \left(-1 + \frac{1}{2imt} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\} \quad (4.3.1.14)$$

$$h_0 = -\frac{k}{ma_0 t^{\frac{1}{2}}} t^{-\frac{1}{4}} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \quad (4.3.1.15)$$

Bu eşitlikler kümesi, denklem (4.1.4.6)'da yazılırsa dalga fonksiyonu,

$$\Psi(x,t) = \frac{B}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{4}} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2imt} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\} \\ - \frac{k}{ma_0 t^{\frac{1}{2}}} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \\ - \frac{k}{ma_0 t^{\frac{1}{2}}} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(-1 + \frac{1}{2imt} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) - \frac{2}{im} \frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\} \end{array} \right] e^{ikx} \quad (4.3.1.16)$$

bulunur. Bu denklemde bulunan Whittaker fonksiyonunun türevinin yerine kendi cinsinden değerinin yazılabilmesi için aşağıdaki değişken değişimi yapılır:

$$y = \frac{t}{\beta} \text{ ise } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.3.1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} W_{\kappa,\mu}(y) \quad (4.3.1.18)$$

Denklem (4.3.1.18)'in sağ tarafı için Whittaker fonksiyonlarının türev indirgeme bağıntısı kullanılır:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) = \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{\kappa}{t} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) - \frac{1}{t} W_{\kappa+1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \quad (4.3.1.19)$$

Denklem (4.3.1.19), denklem (4.3.1.16)'da yer alan her bir bileşen için kullanılırsa,

$$h_1 = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{\kappa+1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} \left\{ \left(-1 - \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{\kappa+1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\}$$

bulunur. Bu eşitlikler dalga fonksiyonlarında yerine yazılırsa,

$$\Psi(x,t) = \frac{B}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{4}} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{\kappa+1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\} \\ - \frac{k}{ma_0 t^{\frac{1}{2}}} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \\ - \frac{k}{ma_0 t^{\frac{1}{2}}} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(-1 - \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{\kappa+1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\} \end{array} \right] e^{ikx} \quad (4.3.1.20)$$

olur.

4.3.2. Asimptotik Çözüm

Denklem (4.3.1.20)'de verilen dalga fonksiyonunun sonsuzdaki davranışı Whittaker fonksiyonu aracılığı ile belirlenir. Whittaker fonksiyonunun sonsuzdaki davranışı aşağıdaki biçimdedir:

$$W_{\kappa, \mu}(y) \approx y^{\kappa} e^{-\frac{y}{2}}$$

Buna göre dalga fonksiyonunda yer alan Whittaker fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri,

$$W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\beta}\right) \approx \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\kappa} e^{-\frac{t}{2\beta}} \quad (4.3.2.1)$$

$$W_{\kappa+1, \mu}\left(\frac{t}{\beta}\right) \approx \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\kappa+1} e^{-\frac{t}{2\beta}} \approx \frac{t}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\kappa} e^{-\frac{t}{2\beta}} \quad (4.3.2.2)$$

elde edilir. Bu eşitlikler denklem (4.3.1.20)'de yerine yazılırsa,

$$\Psi(x, t) \approx \frac{B}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right\} \\ -\frac{k}{ma_0 t^{\frac{1}{2}}} \\ -\frac{k}{ma_0 t^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right\} \end{pmatrix} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\kappa} e^{-\frac{t}{2\beta}} e^{ikx} \quad (4.3.2.3)$$

elde edilir.

4.3.3. Boylandırma Katsayısının Bulunması

Işınım baskınlı evren modeli için denklem (4.2.3.2) düzenlendiğinde,

$$\left(\Psi_k, \Psi_{k'}\right) \equiv \int \left(a_0 t^{\frac{1}{2}} \bar{\psi}_k \beta^{(0)} \psi_{k'} dx + \bar{\psi}_k \left(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \right) \beta^{(1)} \psi_{k'} dt \right) = \pm \delta(k - k') \quad (4.3.3.1)$$

olur. Burada;

$$a_0 t^{\frac{1}{2}} \psi_k \beta^{(0)} \psi_{k'} = \frac{a_0 |B|^2 t^{\frac{1}{2}}}{\pi} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k'} \left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{k^*} \left(\tilde{h}_1^+ \tilde{h}_1' - \tilde{h}_2^+ \tilde{h}_2' \right) e^{ix(k-k')} \quad (4.3.3.2)$$

$$\Psi^+(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)})\beta^{(1)}\Psi = \frac{|B|^2}{\pi} \left(\frac{t}{\beta}\right)^\kappa \left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{\kappa^*} \left[\tilde{h}'_0(\tilde{h}_2^+ - \tilde{h}_1^+) + \tilde{h}_0^+(\tilde{h}'_2 - \tilde{h}'_1) \right] e^{ix(k-k')} \quad (4.3.3.3)$$

Bu eşitlikler denklem (4.3.3.1)'de yerine yazılırsa,

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) \equiv \frac{|B|^2}{\pi} \left(\frac{t}{\beta}\right)^\kappa \left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{\kappa^*} \int \left(\begin{array}{l} a_0 t^{\frac{1}{2}} \{ \tilde{h}_1^+ \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2^+ \tilde{h}_2 \} e^{ix(k-k')} dx \\ + \\ \left[\tilde{h}_0(h_2^+ - h_1^+) + \tilde{h}_0^+(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1) \right] e^{ix(k-k')} dt \end{array} \right) = \pm \delta(k-k') \quad (4.3.3.4)$$

elde edilir. Burada;

$$(\tilde{h}_1^+ \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2^+ \tilde{h}_2) = \frac{1}{imt} (\kappa - \kappa^+) + \frac{1}{2imt^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) \quad (4.3.3.5)$$

$$\left[\tilde{h}_0(\tilde{h}_2^* - \tilde{h}_1^*) + \tilde{h}_0^*(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1) \right] = \frac{2k}{ma_0 t} \quad (4.3.3.6)$$

Bu durumda denklem (4.3.3.4) yeniden düzenlendiğinde,

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) \equiv \frac{|B|^2}{\pi} \left(\frac{t}{\beta}\right)^\kappa \left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{\kappa^*} \int \left(\frac{1}{imt^{\frac{1}{2}}} (\kappa - \kappa^+) + \frac{1}{2im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) + \frac{2k}{ma_0 t} \right) e^{ix(k-k')} dx = \pm \delta(k-k')$$

bulunur. $t \rightarrow \infty$ limitinde sifıra gider, geriye aşağıdaki ifade kalır,

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) \equiv \frac{|B|^2}{\pi} \left(\frac{t}{\beta}\right)^\kappa \left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{\kappa^*} \frac{1}{2im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) = \pm 1 \quad (4.3.3.7)$$

Bu sonuç $\text{Im } \beta$ ve $\text{Im } \kappa$ 'ın pozitif ve negatif değerlerine bağlı olarak değerlendirilir ve aşağıdaki sonuçlar bulunur:

- $\text{Im } \beta > 0$ ve $\text{Im } \kappa > 0$ için;

$$\kappa = \frac{ik^2}{ma_0^2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{i}{m} \quad (4.3.3.7)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2a_0}} e^{-\frac{\pi k^2}{2ma_0^2}} \quad (4.3.3.8)$$

- $\text{Im } \beta < 0$ ve $\text{Im } \kappa < 0$ için;

$$\kappa = -\frac{ik^2}{ma_0^2} \quad \text{ve} \quad \beta = -\frac{i}{m} \quad (4.3.3.9)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2a_0}} e^{-\frac{\pi k^2}{2ma_0^2}} \quad (4.3.3.10)$$

4.3.4. Akım Yoğunluğunun Hesaplanması

Işınım baskın evren için akım yoğunluğu denklem (4.2.4.1) aracılığı ile aşağıdaki biçimde hesaplanır:

I. Akım yoğunluğunun sıfırncı ($\mu = 0$) bileşeni:

$$J^0 = e_{(0)}^0 \Psi^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(0)} \Psi \quad (4.3.4.1)$$

Bu denklemde gerekli olan ifadeler kullanılırsa dalga fonksiyonunun bileşenleri cinsinden akım yoğunluğunun sıfırncı bileşeni aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$J^0 = \frac{2|B|^2}{t^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{t}{\beta}\right)^\kappa \left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{\kappa^*} (\tilde{h}_1 \tilde{h}^*_{*1} - \tilde{h}_2 \tilde{h}^*_{*2}) \quad (4.3.4.2)$$

Burada dalga fonksiyonunun bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıdaki biçimdedir:

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4\kappa+1}{imt} + \frac{1}{im\beta} \right) \quad \tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4\kappa^*+1}{imt} - \frac{1}{im\beta^*} \right) \quad (4.3.4.3)$$

$$\tilde{h}_2 = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{4\kappa+1}{imt} + \frac{1}{im\beta} \right) \quad \tilde{h}_2 = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{4\kappa^*+1}{imt} - \frac{1}{im\beta^*} \right) \quad (4.3.4.4)$$

Bu bağıntılar kullanılırsa

$$\tilde{h}_1 \tilde{h}^*_{*1} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{im\beta^*} - \frac{4\kappa^*+1}{2imt} + \frac{1}{im\beta} + \frac{1}{\beta\beta^*m^2} + \frac{4\kappa^*+1}{m^2t\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} + \frac{4\kappa+1}{2m^2t\beta^*} + \frac{(4\kappa+1)(4\kappa^*+1)}{m^2t^2} \right]$$

$$\tilde{h}_2 \tilde{h}^*_{*2} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{im\beta^*} + \frac{4\kappa^*+1}{2imt} - \frac{1}{im\beta} + \frac{1}{\beta\beta^*m^2} + \frac{4\kappa^*+1}{m^2t\beta} - \frac{4\kappa+1}{2imt} + \frac{4\kappa+1}{2m^2t\beta^*} + \frac{(4\kappa+1)(4\kappa^*+1)}{m^2t^2} \right]$$

bulunur ve bu eşitliklerin farkı alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$(\tilde{h}_1 \tilde{h}^*_{*1} - \tilde{h}_2 \tilde{h}^*_{*2}) = \frac{1}{imt} (\kappa - \kappa^*) + \frac{1}{2im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) \quad (4.3.4.5)$$

Bu ifadeyi akım yoğunluğunun sıfırncı bileşeninde yerine yazılırsa

$$J^0 = \frac{2|B|^2}{t^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{t}{\beta}\right)^\kappa \left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{\kappa^*} \left[\frac{1}{imt} (\kappa - \kappa^*) + \frac{1}{2im} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^*} \right) \right] \quad (4.3.4.6)$$

elde edilir. Bu sonuç $\text{Im}\beta$ ve $\text{Im}\kappa$ 'ın pozitif ve negatif değerlerine bağlı olarak değerlendirilir ve aşağıdaki sonuçlar bulunur:

- $\text{Im} \beta > 0$ ve $\text{Im} \kappa > 0$ için;

$$\kappa = \frac{ik^2}{ma_0^2} \quad \beta = \frac{i}{m} \quad (4.3.4.7)$$

$$J^0 = - \left[\frac{2k^2}{m^2 a_0^3} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a_0} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.3.4.8)$$

- $\text{Im} \beta < 0$ ve $\text{Im} \kappa < 0$ için;

$$\kappa = -\frac{ik^2}{ma_0^2} \quad \beta = -\frac{i}{m} \quad (4.3.4.9)$$

$$J^0 = - \left[\frac{2k^2}{m^2 a_0^3} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a_0} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.3.4.10)$$

II. Akım yoğunluğunun birinci ($\mu = 1$) bileşeni;

$$J^1 = \frac{1}{a_0 t} \Psi^+ (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \beta^{(1)} \Psi \quad (4.3.4.11)$$

Bu denklemde gerekli olan ifadeler kullanılırsa dalga fonksiyonunun bileşenleri cinsinden akım yoğunluğunun birinci bileşeni aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$J^1 = \frac{|B|^2}{a_0 t^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{t}{\beta} \right)^\kappa \left(\frac{t}{\beta} \right)^{\kappa^*} \left[\tilde{h}_0^* (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1) + \tilde{h}_0 (\tilde{h}_2^* - \tilde{h}_1^*) \right] \quad (4.3.4.12)$$

Dağla fonksiyonun bileşenleri kullanılırsa

$$\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 = -1 \quad \tilde{h}_2^* - \tilde{h}_1^* = -1 \quad \tilde{h}_0 = -\frac{k}{ma_0} t^{-\frac{1}{2}} \quad (4.3.4.13)$$

bulunur. Bu eşitlikler denklem (4.3.4.12)'de yerine yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$J^1 = \frac{4k|B|^2}{ma_0^2} \left(\frac{t}{\beta} \right)^\kappa \left(\frac{t}{\beta^*} \right)^{\kappa^*} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3.4.14)$$

Bu sonuç $\text{Im} \beta$ ve $\text{Im} \kappa$ 'ın pozitif ve negatif değerlerine bağlı olarak değerlendirilir ve aşağıdaki sonuçlar bulunur:

- $\text{Im } \beta > 0$ ve $\text{Im } \kappa > 0$ için;

$$J^1 = -\frac{2k}{ma^3_0} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3.4.15)$$

- $\text{Im } \beta < 0$ ve $\text{Im } \kappa < 0$ için;

$$J^1 = \frac{2k}{ma^3_0} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3.4.16)$$

4.3.5. Frekans Aralığının Belirlenmesi

Harmonik salınıcı için tanımlanan denklem (4.2.5.1) ile denklem (4.3.1.9) karşılaştırıldığında,

$$\omega^2 = \frac{3}{16t^2} + \frac{k^2}{a_0^2} \frac{1}{t} + \frac{m^2}{4} \quad (4.3.5.1)$$

bulunur. Harmonik salınıcı olarak davranabilmesi için

$$\omega^2 = \frac{3}{16t^2} + \frac{k^2}{a_0^2} \frac{1}{t} + \frac{m^2}{4} > 0 \quad (4.3.5.2)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu bağıntıdan aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$-\frac{2}{m^2} \sqrt{\left(\frac{k}{a_0}\right)^4 - \frac{3m^2}{16}} < t + 2\left(\frac{k}{ma_0}\right)^2 < +\frac{2}{m^2} \sqrt{\left(\frac{k}{a_0}\right)^4 - \frac{3m^2}{16}} \quad (4.3.5.3)$$

4.3.6. Kuantumlanma Koşulu

Whittaker fonksiyonlarındaki değişkenin alabileceği tüm değerler için fonksiyonun sınırlı olma koşulu aşağıdaki biçimde verilir:

$$\kappa - \mu + \frac{1}{2} = -n \quad (4.3.6.1)$$

Bu koşul kullanılarak, Işınım baskın evren modeli için kuantumlanma koşulu elde edilir. Bunun için κ ve μ değerleri kullanılırsa parçacığın momentumu için aşağıdaki koşul bulunur:

$$\pm ik_n^2 = ma_0^2 \left(\pm \frac{1}{4} - n - \frac{1}{2} \right) \quad (4.3.6.2)$$

şeklinde elde edilir. Pozitif momentum için,

$$ik_n^2 = -ma_0^2 \left(n + \frac{1}{4} \right) \quad (4.3.6.3)$$

ve negatif momentum için,

$$ik_n^2 = ma_0^2 \left(n + \frac{3}{4} \right) \quad (4.3.6.4)$$

bulunur. Burada n pozitif tam sayıdır.

4.4. $a(t) = e^{Ht}$, BOŞLUK BASKIN EVREN MODELİNDE SPİN-1 PARÇACIĞI

4.4.1. Duffin-Kemmer-Petiau Denkleminin Çözümü

Denklem (4.1.4.11)'de ye alan çarpan $\frac{\dot{a}}{a} = H$ olur. Ayrıca

$$h_1 - h_2 = X(t) \quad (4.4.1.1)$$

tanımına göre denklem (4.1.4.11) aşağıdaki biçimde yeniden yazılır;

$$\left(\partial^2_{\partial_0} + H \partial_0 + \frac{m^2}{4} + k^2 e^{-2Ht} \right) X(t) = 0 \quad (4.4.1.2)$$

Yeni değişken

$$\eta = e^{-Ht}$$

şeklinde tanımlanır ve bu değişkenin parçalı türevleri alınırsa

$$\partial \eta = -H e^{-Ht} \partial t \frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \eta \quad (4.4.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -H \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.4.1.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = H^2 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = H^2 \left(\eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (4.4.1.5)$$

elde edilir. Bu sonuçlar denklem (4.4.1.2)'de yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{m^2}{4H^2} \frac{1}{\eta^2} + \frac{k^2}{H^2} \right) X(\eta) = 0 \quad (4.4.1.6)$$

bulunur. Tekrar yeni bir değişken,

$$\eta = \beta \xi$$

şeklinde tanımlanır ve bu değişkenin parçalı türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (4.4.1.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (4.4.1.8)$$

olur. Benzer şekilde elde edilen bu sonuçlar denklem (4.4.1.6)'da yerine yazıldığında,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{m^2}{4H^2} \frac{1}{\xi^2} + \frac{k^2}{H^2} \beta^2 \right) X(\xi) = 0 \quad (4.4.1.9)$$

bulunur. Denklem (4.4.1.9) ile denklem (4.2.1.12)'i karşılaştırıldığında aşağıda verilen denklemlerin olduğu görülür:

$$\beta = \pm \frac{iH}{2k} \quad \kappa = 0 \quad \mu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{H^2}} \quad (4.4.1.10)$$

$$X(\xi) = W_\mu(\xi) = W_{0,\mu} \left(\mp \frac{2ik}{H} e^{-H\xi} \right) \quad (4.4.1.11)$$

Bu durumda denklem (4.4.1.1) ve denklem (4.1.4.10b)'daki bileşenlerinin toplamının ve farkının Whittaker fonksiyonu cinsinden değeri

$$h_1 - h_2 = W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \quad (4.4.1.12)$$

$$h_1 + h_2 = \frac{2H}{im} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \quad (4.4.1.13)$$

bulunur. Bu eşitlik aralarında toplandığında,

$$h_1 = \frac{1}{2} \left\{ W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) + \frac{2H}{im} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\} \quad (4.4.1.14)$$

çıkarıldığında,

$$h_2 = \frac{1}{2} \left\{ -W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) + \frac{2H}{im} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\} \quad (4.4.1.15)$$

$$h_0 = -\frac{k}{m} \eta W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \quad (4.4.1.16)$$

elde edilir. Bu eşitlikler kümesi, dalga fonksiyonunda yazılırsa;

$$\Psi(x,t) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left\{ W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) + \frac{2H}{im} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\} \\ -\frac{k}{m} \eta W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \\ -\frac{k}{ma_0} \eta W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \\ \frac{1}{2} \left\{ -W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) + \frac{2H}{im} \eta \frac{\partial}{\partial t} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\} \end{array} \right) e^{ikx} \quad (4.4.1.17)$$

bulunur. Bu fonksiyonda bulunan Whittaker fonksiyonunun türevi yerine kendi cinsinden değerinin yazılabilmesi için aşağıdaki değişken değişimi yapılır:

$$y = \frac{\eta}{\beta} \text{ ise } \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.4.1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \quad (4.4.1.19)$$

Denklem (4.3.1.19)'in sağ tarafı için Whittaker fonksiyonlarının türev indirgeme bağıntısı kullanılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial y} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) = \frac{1}{t} \left\{ \frac{t}{2\beta} W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) - W_{1,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\} \quad (4.4.1.20)$$

olur. Bu eşitlik her bir bileşen için uygulanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$h_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{H}{im\beta} \eta \right) W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) - \frac{2H}{im} W_{1,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(-1 + \frac{H}{im\beta} \eta \right) W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) - \frac{2H}{im} W_{1,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\}$$

Bu eşitlikler, dalga fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$\Psi(x, t) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{H}{im\beta} \eta \right) W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) - \frac{2H}{im} W_{1,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\} \\ - \frac{k}{m} \eta W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \\ - \frac{k}{ma_0} \eta W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(-1 + \frac{H}{im\beta} \eta \right) W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) - \frac{2H}{im} W_{1,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\} \end{array} \right] e^{ikx} \quad (4.4.1.21)$$

olur.

4.4.2. Asimptotik Çözüm

Denklem (4.4.1.21)'de verilen dalga fonksiyonunun sonsuzdaki davranışı Whittaker fonksiyonu aracılığı ile belirlenir. Whittaker fonksiyonunun sonsuzdaki davranışı aşağıdaki biçimde verilir:

$$W_{\kappa,\mu}(y) \approx y^\kappa e^{-\frac{y}{2}}$$

Buna göre dalga fonksiyonunda yer alan Whittaker fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri,

$$W_{0,\mu}\left(\frac{\eta}{\beta}\right) \approx e^{-\frac{\eta}{2\beta}} \quad (4.4.2.1)$$

$$W_{1,\mu}\left(\frac{\eta}{\beta}\right) \approx \frac{\eta}{\beta} e^{-\frac{\eta}{2\beta}} \quad (4.4.2.2)$$

olur. Bu nicelikler denklem (4.4.1.21)'deki her bir bileşen için kullanılırsa, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$h_1 \approx \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{H}{im\beta} \eta \right\} e^{-\frac{\eta}{2\beta}}$$

$$h_2 \approx \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{H}{im\beta} \eta \right\} e^{-\frac{\eta}{2\beta}}$$

$$h_0 \approx -\frac{k}{ma_0} \eta e^{-\frac{\eta}{2\beta}}$$

Bu eşitlikler, dalga fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$\Psi(x,t) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{H}{im\beta} \eta \right\} \\ -\frac{k}{m} \eta \\ -\frac{k}{ma_0} \eta \\ \frac{1}{2} \left\{ -1 - \frac{H}{im\beta} \eta \right\} \end{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2\beta}} e^{ikx} \quad (4.4.2.3)$$

4.4.3. Boylandırma Katsayısının Bulunması

Boşluk baskın evren modeli için denklem (4.2.3.2) aşağıdaki biçimde olur:

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \int \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\eta} \bar{\psi}_k^+ (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) \psi_{k'} dx \\ + \\ \bar{\psi}_k (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(0)} + \gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) \psi_{k'} dt \end{array} \right) = \pm \delta(k - k') \quad (4.4.3.1)$$

Burada;

$$\bar{\psi}_k \left(\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \right) \psi_{k'} = \frac{H\eta}{2im\pi} \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) |C|^2 e^{ix(k-k')} \quad (4.4.3.2)$$

$$\bar{\psi}_k \left(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \right) \beta^{(1)} \psi_{k'} = \frac{2k}{\pi m} |C|^2 \eta e^{ix(k-k')} \quad (4.4.3.3)$$

Bu eşitlikler denklem (4.4.3.1)' de yerine yazıldığında;

$$\left(\Psi_k, \Psi_{k'} \right) = |C|^2 \int \left(\frac{H}{2im\pi} \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) e^{ix(k-k')} dx + \frac{2k}{\pi m} \eta e^{ix(k-k')} dt \right) = \pm \delta(k - k')$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ limitinde $\eta \rightarrow 0$ limitine yaklaşır. Bu durumda yukarıdaki denklemin ikinci parçası düşer ve aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\left(\Psi_k, \Psi_{k'} \right) = |C|^2 \frac{H}{im} \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) = \pm 1 \quad (4.4.3.4)$$

Bu sonuç $\text{Im } \beta$ pozitif ve negatif değerlerine bağlı olarak değerlendirilir ve aşağıdaki sonuçlar bulunur:

- $\text{Im } \beta > 0$ için;

$$\left(\Psi_k, \Psi_{k'} \right) = |C|^2 \frac{H}{im} \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) = 1 \quad (4.4.3.5)$$

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.4.3.6)$$

- $\text{Im } \beta < 0$ için;

$$\left(\Psi_k, \Psi_{k'} \right) = -|C|^2 \frac{H}{im} \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) = -1 \quad (4.4.3.7)$$

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.4.3.8)$$

4.4.4. Akım Yoğunluğunun Hesaplanması

Denklem (4.2.4.1)'de vektör bozonları için tanımlanan akım yoğunluğunu ifadesi boşluk baskın evren için yeniden düzenlenir.

I. Akım yoğunluğunun sıfırinci ($\mu = 0$) bileşeni:

$$J^0 = e_{(0)}^0 \Psi^+ \left(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \right) \beta^{(0)} \Psi \quad (4.4.4.1)$$

Bu denklemde gerekli olan ifadeler kullanılırsa dalga fonksiyonunun bileşenleri cinsinden akım yoğunluğunun sıfırcı bileşeni aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$J^0 = 2|C|^2 (h_1 h_1^* - h_2 h_2^*) \quad (4.4.4.2)$$

Burada dalga fonksiyonunun bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıdaki biçimdedir:

$$h_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H}{im\beta} \eta \right) e^{-\frac{\eta}{2\beta}} \quad h_1^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{H}{im\beta^*} \eta \right) e^{-\frac{\eta}{2\beta^*}} \quad (4.4.4.3)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{H}{im\beta} \eta \right) \quad h_2^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{H}{im\beta^*} \eta \right) e^{-\frac{\eta}{2\beta^*}} \quad (4.4.4.4)$$

Bu bağıntılar kullanılırsa

$$h_1 h_1^* = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{H}{im\beta^*} - \frac{H}{im\beta} \eta + \frac{H^2}{m^2 \beta \beta^*} \eta^2 + \frac{2H^2}{\beta^* m^2} \eta \right]$$

$$h_2 h_2^* = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{H}{im\beta^*} \eta + \frac{H}{im\beta} \eta + \frac{H^2}{m^2 \beta \beta^*} \eta^2 + \frac{2H^2}{\beta^* m^2} \eta \right]$$

bulunur ve bu eşitliklerin farkı alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$h_1 h_1^* - h_2 h_2^* = \frac{H}{2im} \eta \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) \quad (4.4.4.5)$$

$$J^0 = \frac{H|C|^2}{im} \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) \eta \quad (4.4.4.6)$$

elde edilir. Bu sonuç $\text{Im} \beta$ pozitif ve negatif değerlerine bağlı olarak değerlendirilir ve aşağıdaki sonuçlar bulunur:

- $\text{Im} \beta > 0$ için;

$$J^0 = \frac{H|C|^2}{im} \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) \eta \quad (4.4.4.7)$$

$$J^0 = \eta \quad (4.4.4.8)$$

- $\text{Im} \beta < 0$ koşulunda J^0 değeri;

$$J^0 = \frac{H|C|^2}{im} \left(\frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} \right) \eta \quad (4.4.4.9)$$

$$J^0 = \eta \quad (4.4.4.10)$$

II. Akım yoğunluğunun birinci ($\mu = 1$) bileşeni;

$$J^1 = 2|C|^2 \eta \left[h_0^* (h_2 - h_1) + h_0 (h_2^* - h_1^*) \right] \quad (4.4.4.11)$$

Bu denklemde gerekli olan ifadeler kullanılırsa akım yoğunluğunun birinci bileşeni için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$J^1 = \frac{4k}{m} |C|^2 \eta^2 \quad (4.4.4.12)$$

- $\text{Im } \beta > 0$ için;

$$J^1 = \eta^2 \quad (4.4.4.13)$$

- $\text{Im } \beta < 0$ için;

$$J^1 = -\eta^2 \quad (4.4.4.14)$$

burada $\eta = e^{-Ht}$ 'dir.

4.4.5. Frekans Aralığının Belirlenmesi

Harmonik salınıcı için tanımlanan denklem (4.2.5.1) ile denklem (4.4.1.6) karşılaştırıldığında;

$$\omega^2(\eta) = \left(\frac{k}{H} \right)^2 + \left(\frac{m}{2H\eta} \right)^2 \quad (4.4.5.1)$$

bulunur. Harmonik salınıcı olarak davranması için

$$\omega^2(\eta) = \left(\frac{k}{H} \right)^2 + \left(\frac{m}{2H\eta} \right)^2 > 0 \quad (4.4.5.2)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu bağıntıdan aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$-\frac{m}{H} < \frac{2ik}{H} e^{-Ht} < \frac{m}{H} \quad (4.4.5.3)$$

4.4.6. Kuantumlanma Koşulu

Whittaker fonksiyonlarındaki değişkenin alabileceği tüm değerler için fonksiyonun sınırlı olma koşulu aşağıdaki biçimde verilir:

$$\kappa - \mu + \frac{1}{2} = -n \quad (4.4.6.1)$$

Bu koşul kullanılarak, boşluk baskın evren modeli için kuantumlanma koşulu elde edilir. $\kappa = 0$ ve $\mu = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m}{H}\right)^2}$ dır. Her iki nicelikte de parçacığın momentumunu betimleyen bir nicelik olmadığı için momentumun kuantumlanması söz konusu değildir. Yukarıda verilen κ ve μ 'ün değerleri denklem (4.4.6.1)'de yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\pm \sqrt{1 - \left(\frac{m}{H}\right)^2} = 2\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (4.4.6.2)$$

Görüldüğü gibi burada momentumu tanımlayan simge yer almamaktadır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Çizelge 5.1: Schrödinger evren modeli için elde edilen sonuçlar.

Evren Modeli	$a(t) = a_0 t$	
Denklem	$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{a_0^2} \right) \frac{1}{t^2} + \frac{m^2}{4} \right) U(t) = 0$	
Çözüm	$h_1(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[\left\{ 1 + \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta} \right\} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right]$ $h_2(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[\left\{ -1 + \frac{1}{imt} - \frac{1}{im\beta} \right\} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right]$ $h_0(t) = -\frac{k}{ma_0} t^{-\frac{3}{2}} W_{0,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) ; \kappa = 0, \beta = \pm \frac{i}{m}, \mu = \pm \frac{ik}{a_0}$	
Asimptotik Çözüm	$h_1(t) \approx \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta} \right] e^{-\frac{t}{2\beta}}$ $h_0(t) \approx -\frac{k}{ma_0} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{2\beta}}$ $h_2(t) \approx \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[-1 + \frac{1}{imt} + \frac{1}{im\beta} \right] e^{-\frac{t}{2\beta}}$ $\Psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_0(t) \\ h_0(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} e^{ikx}$	
Boylandırma Koşulu	$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \int \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi \sqrt{-g} d\sigma_\mu = \pm \delta(k - k')$	
Boylandırma Katsayısı ve Akım Yoğunlukları	$\text{Im } \beta > 0$ durumu için; $-2a_0 A ^2 = -1 \quad A = \frac{1}{\sqrt{2a_0}}$ $\text{Im } \beta < 0$ durumu için; $2a_0 A ^2 = 1 \quad A = \frac{1}{\sqrt{2a_0}}$	$\text{Im } \beta > 0$ durumu için, $J^0 = \frac{1}{a_0} \frac{1}{t}$ ve $J^1 = -\frac{1}{ma_0^3} \frac{k_x}{t^3}$ $\text{Im } \beta < 0$ durumu için, $J^0 = \frac{1}{a_0} \frac{1}{t}$ ve $J^1 = \frac{1}{ma_0^3} \frac{1}{t^3}$
Frekans aralığı ve K. Koşulu	$-\sqrt{4 + \frac{4k^2}{a_0^2 m^2}} < imt < \sqrt{4 + \frac{4k^2}{a_0^2 m^2}}$	$k = \pm ia_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$

Çizelge 5.2: Işınım baskın evren modeli için elde edilen sonuçlar.

Evren Modeli	$a(t) = a_0 t^{\frac{1}{2}}$	
Denklem	$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{3}{16t^2} + \frac{m^2}{4} + \frac{k^2}{a_0^2 t} \right) U(t) = 0$	
Çözüm	$h_1(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{\kappa+1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\}$ $h_2(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} \left\{ \left(-1 - \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right) W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) + \frac{2}{imt} W_{\kappa+1,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) \right\}$ $h_0(t) = -\frac{k}{ma_0} t^{-\frac{3}{4}} W_{\kappa,\mu} \left(\frac{t}{\beta} \right) ; \kappa = \pm \frac{ik^2}{ma_0^2}, \beta = \pm \frac{i}{m}, \mu = \mp \frac{1}{4}$	
Asimptotik Çözüm	$h_1(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} \left\{ 1 + \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right\} \left(\frac{t}{\beta} \right)^\kappa e^{-\frac{t}{2\beta}}$ $h_2(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} \left\{ -1 + \frac{1}{im\beta} + \frac{4\kappa+1}{2imt} \right\} \left(\frac{t}{\beta} \right)^\kappa e^{-\frac{t}{2\beta}}, \quad \Psi(x,t) = \frac{B}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_0(t) \\ h_0(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$ $h_0(t) = -\frac{k}{ma_0} t^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{t}{2\beta}}$	
Boylandırma Koşulu	$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \int \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi \sqrt{-g} d\sigma_\mu = \pm \delta(k - k')$	
Boylandırma Katsayısı ve Akım Yoğunlukları	$\text{Im } \beta > 0 \text{ ve } \text{Im } \kappa > 0,$ $B = \frac{1}{\sqrt{2a_0}} e^{-\frac{\pi k^2}{2ma_0^2}}$ $\text{Im } \beta < 0 \text{ ve } \text{Im } \kappa < 0$ için $B = \frac{1}{\sqrt{2a_0}} e^{-\frac{\pi k^2}{2ma_0^2}}$	$\text{Im } \beta > 0 \text{ ve } \text{Im } \kappa > 0$ $J^0 = -\left[\frac{2k^2}{m^2 a_0^3} t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{a_0} t^{-\frac{1}{2}} \right], J^1 = -\frac{2k}{ma_0^3} t^{-\frac{3}{2}}$ $\text{Im } \beta < 0 \text{ ve } \text{Im } \kappa < 0$ $J^0 = -\left[\frac{2k^2}{m^2 a_0^3} t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{a_0} t^{-\frac{1}{2}} \right], J^1 = \frac{2k}{ma_0^3} t^{-\frac{3}{2}}$
Frekans aralığı	$-\sqrt{\left(\frac{k}{a_0} \right)^4 - \frac{3m^2}{16}} < \frac{m^2}{2} t + \left(\frac{k}{a_0} \right)^2 < \sqrt{\left(\frac{k}{a_0} \right)^4 - \frac{3m^2}{16}}$	
Kuantumlanma Koşulu	Pozitif momentum için, $ik^2 = -ma_0^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)$	Negatif momentum için, $ik^2 = ma_0^2 \left(n + \frac{3}{4} \right)$

Çizelge 5.3: Boşluk baskın evren modeli için elde edilen sonuçlar.

Evren Modeli	$a(t) = e^{Ht}$	
Denklem	$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{m^2}{4H^2} \frac{1}{\eta^2} + \frac{k^2}{H^2} \right) X(\eta) = 0$	
Çözüm	$h_1(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{H}{im\beta} \eta \right) W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) - \frac{2H}{im} W_{1,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\}$ $h_2(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ \left(-1 + \frac{H}{im\beta} \eta \right) W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) - \frac{2H}{im} W_{1,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right\}$ $h_0(\eta) = -\frac{k}{m} \eta W_{0,\mu} \left(\frac{\eta}{\beta} \right) ; \kappa = 0, \beta = \pm \frac{iH}{2k}, \mu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{H^2}}$	
Asimptotik Çözüm	$h_1(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{H}{im\beta} \eta \right\} e^{-\frac{\eta}{2\beta}}$ $h_0(\eta) = -\frac{k}{m} \eta e^{-\frac{\eta}{2\beta}}, \quad \Psi(x,t) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} h_1(\eta) \\ h_0(\eta) \\ h_0(\eta) \\ h_1(\eta) \end{pmatrix} e^{ikx}$ $h_2(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ -1 - \frac{H}{im\beta} \eta \right\} e^{-\frac{\eta}{2\beta}}$	
Boylandırma Koşulu	$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \int \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi \sqrt{-g} d\sigma_\mu = \pm \delta(k - k')$	
Boylandırma Katsayısı ve Akım Yoğunlukları	$\text{Im } \beta > 0$ için; $C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ $\text{Im } \beta < 0$ için; $C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$	$\text{Im } \beta > 0$ için, $J^0 = \eta$ ve $J^1 = \eta^2$ $\text{Im } \beta < 0$ için $J^0 = \eta$ ve $J^1 = -\eta^2$
Frekans aralığı ve K. Koşulu	$-\frac{m}{H} < \frac{2ik}{H} e^{-Ht} < \frac{m}{H}$	Momentum sürekli değerler alır.

SONUÇLAR: Çizelge 5.1, çizelge 5.2 ve çizelge 5.3'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. Ele alınan her üç evren modeli için çözümler Whittaker fonksiyonları cinsinden ifade edilebilmektedir.
2. Schrödinger evren modelini betimleyen ölçek çarpanı ile ışınım baskın evren modelindeki ölçek çarpanı arasında

$$a_s(t) = \frac{1}{a_0} a_I^2(t)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

3. Schrödinger evren modelindeki ölçek çarpanının değişim hızı sabittir. Buna karşın ışınım baskın evren modelindeki ölçek çarpanının değişim hızı zamanla azalmaktadır. Oysa boşluk baskın evren modelini betimleyen ölçek çarpanının değişim hızı zamanla artmaktadır:

$$\frac{da_s}{dt} = a_0, \quad \frac{da_I}{dt} = \frac{a_0}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{da_s}{dt} = H e^{Ht}$$

4. Tartışılan her üç evren modeli için elde edilen dalga fonksiyonlarının birinci ve ikinci bileşenleri parçacığın momentumunu gösteren k 'dan bağımsızken sıfıncı bileşenleri k 'ye bağlı olarak gelmektedir.
5. Schrödinger evren modelini betimleyen dalga fonksiyonun boylandırma katsayısı yalnızca evrenin ölçek çarpanının katsayısına bağlıdır. Oysa ışınım baskın evren modelindeki boylandırma katsayısı evren ölçek çarpanının katsayısına bağlı olduğu gibi aynı zamanda parçacığın durgun kütle enerjisi ve momentumuna da bağlıdır. Oysa boşluk baskın evren modelini betimleyen dalga fonksiyonundaki boylandırma katsayısı evrenin özelliğinden bağımsız olup yalnızca parçacığın durgun kütle enerjisine ve momentumuna bağlıdır.
6. Schrödinger ve ışınım baskın evren modellerinde parçacığın momentumu kuantumlanmaktadır. Buna karşın boşluk baskın evren modelinde ise parçacığın momentumu kuantumlanmamaktadır. Işınım baskın evren modelinde Schrödinger evren modelinden farklı olarak kuantumlanan momentum evrenin açılım katsayısına bağlı olduğu gibi parçacığın durgun kütle enerjisine de bağlıdır.

7. Her üç modelde akım yoğunun sıfırcı bileşeninin işareti β ve κ 'ın işaret değişimine bağlı olarak değişmezken akım yoğunluğunun birinci bileşeni ise β ve κ 'ın işaret değişimine bağlı olarak işaret değiştirmektedir.

ÖNERİLER:

1. Madde baskın evren modelini betimleyen metrik için DKP denklemi çözümlenerek spin-1 parçacığın (1+1) boyutlu eğri uzay-zamandaki davranışı hakkında bilgi edinilebilmesi için bu çalışma öncülük edecektir.
2. Bu çalışma başka evren modellerini betimleyen metrikler için DKP denkleminin çözülebileceğini göstermektedir.
3. Bu çalışmanın ayrıca (1+2) boyutlu eğri uzay-zamanlarda yapılacak çalışmalara da temel oluşturacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] De Sabbata, V., Gasperini, M., “Introduction To Gravitation”, 1. Baskı, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, s. 1-12, (1985)
- [2] Rindler, W., “Essential Relativity”, 2. Baskı, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, America, s.1-20, (1924)
- [3] Hartle, J. B., “Gravity an Introduction to Einstein’s General Relativity”, 1. Baskı, Bıcaklar Kitap Evi, Ankara, s.366-400, (2003)
- [4] Blau, M., “Lecture Notes on General Relativity”, Last Edition, Institut de Physique, Switzerland, s.7-19,(2000)
- [5] Parker, L., “Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes.II”, Phys. Rev. D, **3**: 346, (1971)
- [6] Ihsam, C. J., Nelson, J. E., “Quantization of a coupled Fermi field and Robertson Walker metric”, Phys. Rev. D, **10**: 3226, (1974)
- [7] Autretsch, J., Shafer G., “Thermal particle production in a radiation dominated Robertson-Walker universe”, J. Phys. A: Math. Gen., **11**: 1583, (1978)
- [8] Kovalyov, M., Legare M., “The Dirac equation in Robertson–Walker spaces: A class of solutions”, J. Math. Phys., **31**: 191, (1990)
- [9] Barut, A. O., Duru I. H., “Exact solutions of the Dirac equation in spatially flat Robertson-Walker space-times ”, Phys. Rev. D, **36**: 3705, (1987)
- [10] Villalba, V. M., Percoco U., “Separation of variables and exact solution to Dirac and Weyl equations in Robertson–Walker space-times”, J. Math. Phys., **31**: 715, (1990)
- [11] Unal, N., Sucu, Y., “Vector bosons in the expanding universe”, Eur. Phys. J. C, **44**: 287, (2005)
- [12] Donoghue, J. F., Holstein B. R., “Quantum Mechanics In Cured Space”, Am. J. Phys., **54**: 827, (1986)
- [13] Boulwar, D. G., “Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces”, Phys. Rev. D, **11**: 1404, (1975)
- [14] Bouwar, D. G., “Spin-1/2 quantum field theory in Schwarzschild space”, Phys. Rev. D, **12**: 350, (1975)
- [15] Christensen, S. M., Fulling, S. A., “Trace anomalies and the Hawking effect”, Phys. Rev. D, **15**: 2088, (1977)

- [16] Najmi, R. B., Morsink S. M., Sikkema, A. E., “Semiclassical gravity in 1+1 dimensions”, *Phys. Rev. D*, **43**: 3948, (1991)
- [17] Gegenberg, J., Kelly, P. F., Mann, R. B., Vincent, D. E., “Theories of gravitation in two dimensions”, *Phys. Rev. D*, **37**: 34 63, (1988)
- [18] Mann, R. B., Morsink, S. M., Sikkema, A. E., “Black holes in two spacetime dimensions”, *Phys. Rev. D*, **43**: 3948, (1991)
- [19] Brown, J. D., Hanneaux, M., Teitelboim, C. , “Black holes In Two Space-time Dimensions”, *Phys. Rev. D*, **33**: 319, (1986)
- [20] Kalbermann, G., “Kemmer-Duffin-Petiau equations from two-body Dirac equations”, *Phys. Rev. c*, **37**: 25-27, (1988)
- [21] Havare, A., Yetkin, T., Sogüt, K., “On the equivalence of the massless DKP equation and Maxwell Equation in Robertson-Walker spacetime”, *Chinese J. Phys.*, **5**: 41, (2003)
- [22] Casana, R., Fainberg, V. Ya., Lunardi, J. T., Pimentel, B. M., Teixeira, R.G., “Massless DKP Fields in Riemann-Cartan Space-times”, arXiv:gr-qc/0209083 v1, (2002)
- [23] Duffin, R., J., “On The Characteristic Matrices of Covariant Systems”, *Phys. Rev.*, **54**: 1114, (1938)
- [24] Kemmer, N., “The Particle Aspect of Meson Theory”, *Proc. R. Soc. A*, **173**: 91, (1939)
- [25] Umezawa, H., “Theory of Elementary Particles”, *Quantum Field Theory*(Amsterdam: North-Holland), (1956)
- [26] Akhizer, A. I, Berestetski, V. B., “Quantum Electrodynamics”, *Quantum Electrodynamics 2nd edn*(Moscow: Nauka), (1969)
- [27] Kinoshita, T., *Prog. Theory Phys.*, **5**: 473, (1950)
- [28] Pimentel, B. M., Tomazelli, J. L., *Prog. Theory Phys.*, **45**: 110, (1995)
- [29] Gribov, V., “The theory of quark confinement”, *Eur. Phys. J. C.*, **10**: 71,(1999)
- [30] Lunardi, J. T., Pimentel, B. M., Teixeira, R. G., “Interacting Spin-0 Fields with Torsion Via Duffin-Kemmer-Petiau Theory”, arXiv: gr-qc/0105123 v3, (2002)
- [31] Kanatchikov, I. V., “On the Duffin-Kemmer-Petiau formulation of the covariant hamiltonian dynamics in field theory”, *Rep. Math. Phys.* **46**: 107,(2000)

- [32] Nedjadi, Y., Baret, R. C., “On the properties of the Duffin-Kemmer-Petiau equation”, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **19**: 87, (1993)
- [33] Sogut, K., Havare, A., Acikgoz, İ., “Energy Levels and Wave Functions of Vector Bosons in Homogeneous Magnetic Field”, *J. Math. Phys.*, **43**: 3952, (2002)
- [34] Chetouani, L., Merad, M., Boudjedaa, T., Lecheheb, A., “Solution of Duffin–Kemmer–Petiau Equation for the Step Potential”, *Int. J. Theor. Phys.*, **43**: 1147, (2004)
- [35] Red’kov, V. M., “Generally relativistic Duffin-Kemmer formalism and behaviour of quantum-mechanical particle of spin 1 in the Abelian monopole field”, Preprint quant-ph/9812007, (1998)
- [40] Unal, N., “Path Integral Quantization of a spinning particle”, *Found. Phys.*, **28**: 755, (1998)
- [41] Fainberg, Y. V., Pmimentel, B. M., “On Equivalence of Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon Equations”, *Phys. Lett. A*, **271**: 16
- [42] Petiau, G., “University of Paris Thesis”, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.*, **8**: 16, (1936)
- [43] Lunardi, J. T., Pmimentel, B. M., Teixeira, R. G., “Duffin-Kemmer-Petiau Equation in Riemann Space-Times”, arXiv: gr-qc/9909033 v3, (2001)
- [44] Barut, A. O., “Excited states of zitterbewegung”, *Phys. Lett. B.*, **237**: 436, (1990)
- [45] Sogut, K., Havare, A., “Spin-1 particle in an electrical field in (1+1)-dimensional Schrödinger spacetime”, *Class. Quantum Grav.*, **23**: 7129-7142, (2006)
- [46] Sarkar, N. G., Biswas, S., Shaw, A., *Pramana*, arXiv:gr-qc/9906082 v1, (1999)
- [47] Cohen, J. M., Vishveshwara, C. V., Dhurandhar, S. V., “Electromagnetic Fields in the Gödel Universe” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **13**: 933, (1980)

ÖZGEÇMİŞ

25 Ocak 1983'de Nevşehir'in Hacıbektaş ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Atatürk İlköğretim Okulunda tamamladı. 2000 yılında Hacıbektaş Lisesinden mezun oldu ve aynı yılda girdiği öğrenci seçme sınavında Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik bölümüne kayıt yapmaya hak kazandı. 2004 yılında Fizik bölümünden mezun oldu. 2005 yılında aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Aynı Enstitüsünün ve aynı anabilim dalından Temmuz 2008'de Yüksek Lisansını tamamladı.