BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN KÖK FONKSİYONLARININ BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

EMİR ALİ MARİS

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
Haziran – 2008

ÖZ

Bu tezde, diferansiyel denklemin ve her iki sınır koşulunun spektral parametre içerdiği sınır değer probleminin özfonksiyonlar sisteminin $L_p\left(0,1\right)$ $\left(1< p<\infty\right)$ uzayında tabanlıkla bağlı özellikleri verilmiştir. Bunun için öncelikle, özfonksiyonların salınım özellikleri kanıtlanmış, özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel operatör, özdeğer ve özfonksiyon, salınım, biortogonal ve minimal sistem, taban.

ABSTRACT

In this thesis, the basis properties in the space $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ of the system of eigenfunctions of spectral problem for ordinary differential operator of second order with the spectral parameter in the equation and in both boundary conditions is investigated. At first, the oscillation properties of eigenfunctions are established and the asymptotic formulas are derived for eigenvalues and eigenfunctions.

Keywords: Differential operator, eigenvalue and eigenfunction, oscillation, biorthogonal and minimal system, basis.

TEŞEKKÜR

Bu tezin konusunun tespitinde ve hazırlanmasında benden değerli fikirlerini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Prof. Dr. Nazım KERİMOV ve diğer hocalarıma, tezin yazımında ve bazı kaynakların temininde yardımlarından ötürü bölümümüzün araştırma görevlilerine ve ayrıca, maddi ve manevi destekleriyle beni yüreklendiren aileme ve yakın dostlarıma şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	$\{1,2,3,...\}$ doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$ ’nin kendisiyle n kez kartezyen çarpımı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$k=\overline{1,n}$	$k=1,2,...,n$
$C[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f, [a,b]$ de süreklidir $\}$
$C^{(n)}[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:[a,b]$ da f in n mertebeden türevi süreklidir $\}$
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik determinant
$rankU$	U matrisinin rankı
$\det U$	U matrisinin determinantı
I	Birim operatör
W	Wronskiyen
$\sum_{j=1}^{n} a_j$	$a_1+a_2+...+a_n$
$L_p(0,1)$	$\left\{f:\int_0^1 \lvert f(x)\rvert^p dx<\infty\right\}$
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
(f,g)	f ile g vektörlerinin bulundukları uzayda iç çarpımı
$(0,1)$	Uç noktaları 0 ve 1 olan açık aralık
$(a,b]$	Uç noktaları a ve b olan yarı açık aralık
$\operatorname{sgn} x$	$\begin{cases} 1, & x>0\ ise, \\ 0, & x=0\ ise, \\ -1, & x<0\ ise. \end{cases}$
$O(a_n)$	Landau sembolü
$1\le k\le n$	$k=1,2,...,n$

1.GİRİŞ

Lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde diferansiyel denklemin ve sınır koşullarının spektral parametreyle bağlı olduğu problemler, bu teorinin önemli bir sınıfını oluşturur. Lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin önemli problemlerinden bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1) Spektral problemin özdeğerlerinin varlığının ispatlanması ve onların bazı özelliklerinin incelenmesi (özdeğerlerin reelliği, basitliği v.s.).

2) Spektral problemin özfonksiyonlarının salınım özelliklerinin ispatlanması.

3) Spektral problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlerının asimptotik formüllerinin elde edilmesi.

4) Spektral problemin özfonksiyonlarının farklı uzaylarda tabanlık özelliklerinin araştırılması.

Bu teorinin temelleri geçen yüzyılın başlarında verilmiştir. Son yıllarda bu teorinin önemli bir kısmını, denklemin ve sınır koşullarının aynı spektral parametreyi içerdiği sınır değer probleminin kök fonksiyonlarının farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık özelliklerinin incelenmesi oluşturur.

Bu tez çalışmasının esas amacı,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1 \tag{1.1}$$

$$(a_0\lambda + b_0)y(0) = (c_0\lambda + d_0)y'(0) \tag{1.2}$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(1) = (c_1\lambda + d_1)y'(1) \tag{1.3}$$

spektral probleminin,

a) spektrumunun incelenmesi (özdeğerlerin reelliği, basitliği v.s.),

b) özfonksiyonlarının salınım özelliklerinin verilmesi,

c) özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formüllerinin elde edilmesi,

d) özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)\,(1 < p < \infty)$ uzayında bazı spektral özelliklerinin ve bununla bağlı olan tabanlık koşullarının araştırılmasıdır.

Burada λ spektral parametre, $q(x)$ $[0,1]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon, $a_k,\ b_k,\ c_k,\ d_k$ $(k = 0,1)$ belirli reel sayılardır. Araştırmalar,

$$\sigma_0 = a_0 d_0 - b_0 c_0 < 0, \tag{1.4}$$

$$\sigma_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 < 0 \tag{1.5}$$

koşulları dahilinde yapılacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Lineer diferansiyel operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesi hakkında yapılan ilk temel çalışmalar [1,2] kaynaklarında düzenlenmiştir. Bu tür problemlerin fiziksel uygulamalarına ilişkin bazı çalışmalar [6-8] makalelerinde yapılmıştır.

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin spektral özelliklerine dair yapılan çalışmalar adım adım olgunlaştırılmıştır. Bu çalışmalar (1.2)-(1.3) sınır koşullarının özel durumlarında yapılmıştır.

[11,12] makalelerinde, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin, $\sigma_0 < 0$ ve $\sigma_1 > 0$ koşulları dahilinde, özdeğerin dizisinin sayılabilir ve alttan sınırlı olduğu, özdeğerlerin reelliği ve basitliği gösterilmiş, $c_0 = 0$ durumunda özdeğerler ve özfonksiyonların sıfırları için asimptotik formüller elde edilmiştir.

[14] makalesinde,

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda^2 y,\ 0 < x < 1, \\ \left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2\right)y(0) + y'(0) = 0, \\ \left(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2\right)y(1) + y'(1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

sınır değer probleminin özdeğerlerinin reelliği ve basitliği ispatlanmış, özfonksiyonlarının salınım özellikleri verilmiş, özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri elde edilmiştir, burada $q(x)$ $[0,1]$ aralığında negatif olmayan sürekli bir fonksiyon, α_k, β_k $(k = 0,1,2)$ reel sabitler ve $\alpha_0 < 0, \alpha_2 > 0, \beta_0 > 0, \beta_2 < 0, |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ dır.

[15] makalesinde,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0,\ 0 < x < 1, \\ y(1) = 0,\ (a - \lambda)y'(0) + \lambda b y(0) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

ve,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0,\ 0 < x < 1, \\ y(0) = 0,\ y'(1) = d\lambda y(1), \end{cases} \tag{2.3}$$

sınır değer problemlerinin özfonksiyonlar sisteminin $L_2(0,1)$ uzayında tabanlık özellikleri verilmiştir, burada a, b ve d pozitif sayılardır.

Belirtelim ki, (2.2) sınır değer problemi (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $q(x) \equiv 0 \ (0 \le x \le 1)$, $a_1 = c_1 = d_1 = b_0 = 0$, $a_0 = b$, $c_0 = 1$ ve $d_0 = a$ için; (2.3) sınır değer problemi (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $q(x) \equiv 0 \ (0 \le x \le 1)$, $a_0 = c_0 = d_0 = b_1 = c_1 = 0$, $a_1 = d$ ve $d_1 = 1$ için özel durumudur. Ayrıca (2.2) sınır değer problemi için $\sigma_0 = ad > 0$, $\sigma_1 = 0$ ve (2.3) sınır değer problemi için $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = d > 0$ dır.

[16] makalesinde,

$$\begin{cases} u' - \{\lambda + P(x)\} w = 0, \ w' + \{\lambda + R(x)\} u = 0, \ 0 \le x \le 1, \\ (\lambda \cos\alpha + a_0) u(0) - (\lambda \sin\alpha + b_0) w(0) = 0, \\ (\lambda \cos\beta + a_1) u(1) - (\lambda \sin\beta + b_1) w(1) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

sınır değer probleminin özdeğerlerinin reelliği ve basitliği ispatlanmış, özfonksiyonlarının salınım özellikleri verilmiş, özdeğerlerinin asimptotik formülleri elde edilmiştir, burada $P(x)$ ve $R(x)$, $[0,1]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyonlar, $a_k, b_k \ (k = 0,1), \alpha, \beta$ reel sabitler, ayrıca $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ve $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$, $\sigma_0 = a_0 \sin\alpha - b_0 \cos\alpha > 0$ ve $\sigma_1 = a_1 \sin\beta - b_1 \cos\beta < 0$ dır.

[17] makalesinde, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin, $c_0 = 0$ olduğunda, özfonksiyonlar sisteminin salınım özellikleri ve $L_2(0,1)$ uzayında minimalliği ispatlanmıştır.

[18] makalesinde,

$$\begin{cases} -y'' + q(x) y = \lambda y, \ 0 < x < 1, \\ b_0 y(0) = d_0 y'(0), \\ (a_1 \lambda + b_1) y(1) = (c_1 \lambda + d_1) y'(1), \end{cases} \tag{2.5}$$

sınır değer probleminin özfonksiyonlar sisteminin $L_2(0,1)$ uzayında minimallik ve tabanlık özellikleri verilmiştir, burada $q(x)$ $[0,1]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon, a_1, b_0, b_1, c_1, d_0 ve d_1 reel sabitlerdir ve,

$$|b_0| + |d_0| \ne 0, \ \sigma = a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0$$

dır.

Belirtelim ki, (2.5) sınır değer problemi (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $a_0 = c_0 = 0$ için özel bir halidir ve $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = \sigma$ dır.

[19,20] makalelerinde (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin, $\sigma_0 < 0$ ve $\sigma_1 > 0$ koşulları dahilinde, özdeğerinin ve özfonksiyonlarının spektral özellikleri incelenmiş ve bu problemin özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)\ (1 < p < \infty)$ uzayında minimallik ve tabanlık koşulları verilmiştir. Ayrıca bu çalışmalar $c_0 c_1 = 0$ ve $c_0 c_1 \neq 0$ olan tüm durumlar gözetilerek yapılmıştır.

[21] makalesinde,

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, \ 0 < x < 1, \\ y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta, \\ \dfrac{y'(1)}{y(1)} = h(\lambda), \end{cases} \tag{2.6}$$

sınır değer probleminin özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında minimalliği ve bazı tabanlıkla bağlı özellikleri verilmiş, $p = 2$ durumunda özfonksiyonlar sisteminin trigonometrik sistemlere karesel yakınsaklığı ispatlanmıştır, burada $0 \le \beta < \pi$ ve $h(\lambda)$ Nevanlinna tipinde rasyonel bir fonksiyondur.

[22] makalesinde,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) - d\lambda y(1) = 0, \ d > 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

sınır değer probleminin özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)\ (1 < p < \infty)$ uzayında tabanlıkla bağlı özellikleri verilmiştir.

3. MATERYAL ve METOT

3.1. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR

Tanım 3.1.1 [1]. $p_j \in C[a,b],\ \ j=\overline{0,n}$ ve $\dfrac{1}{p_0} \in C[a,b]$ olmak üzere,

$$l : C^n[a,b] \to C[a,b]$$

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y \tag{3.1}$$

şeklindeki ifadeye *lineer diferansiyel ifade* denir. $p_j,\ \ j=\overline{0,n}$ fonksiyonlarına ifadenin katsayıları, n sayısına *mertebe*si denir.

(3.1) ile tanımlı l dönüşümü iyi tanımlıdır ve türev operatörünün lineerliğinden, l dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğu açıkça elde edilir.

Belirtelim ki, ileride $p_j,\ \ j=\overline{0,n}$ fonksiyonlarına daha fazla koşullar yüklenecektir.

Tanım 3.1.2 [1]. $U(y)$,

$$y(a),\ \ y'(a),\ \ \ldots,\ \ y^{(n-1)}(a),\ \ y(b),\ \ y'(b),\ \ \ldots,\ \ y^{(n-1)}(b)$$

değişkenlerine bağlı lineer bir ifade, yani,

$$U(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k y^{(k)}(b) \tag{3.2}$$

olsun. Burada, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},\ \ k=\overline{0,n-1}$ dir. Eğer (3.2) şeklinde birkaç tane $U_j(y),\ \ j=\overline{1,m}$ ifadeleri verilmişse,

$$U_j(y) = 0,\ \ j=\overline{1,m} \tag{3.3}$$

koşullarına *sınır koşulları* denir.

$$D = \left\{ y \in C^{(n)}[a,b]:\ U_j(y)=0,\ \ j=\overline{1,m} \right\} \tag{3.4}$$

kümesini tanımlayalım. D, $C^{(n)}[a,b]$ uzayının lineer bir alt uzayıdır. Eğer (3.3) koşulları yoksa (veya (3.3) koşullarının tüm katsayıları sıfırsa), o zaman $D = C^{(n)}[a,b]$ olur.

Tanım 3.1.3 [1]. $l(y)$ (3.1) ile D (3.4) ile tanımlansın.

$$L : D \to C[a,b], \quad L(y) = l(y)$$

şeklinde tanımlanan L operatörüne, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,m}$ sınır koşullarıyla tanımlanan bir *lineer diferansiyel operatör* denir.

Belirtmek gerekir ki, $U_j(y), \quad j = \overline{1,m}$ ifadelerinin her birini bu ifadelerin katsayılarından oluşmuş ve $\mathbb{R}^{2n}$ uzayından olan $\left(\alpha_{j,0},...,\alpha_{j,n-1},\beta_{j,0},...,\beta_{j,n-1}\right)$, $j = \overline{1,m}$ şeklindeki bir vektörle eşleştirebiliriz. Tersine, $\mathbb{R}^{2n}$ uzayından olan bir vektörle bir $U(y)$ lineer ifadesi tanımlayabiliriz. Biz $U_j(y), \quad j = \overline{1,m}$ ifadelerinin lineer bağımsız olduğunu kabul edeceğiz. O zaman $\mathbb{R}^{2n}$ uzayının boyutu $2n$ olduğundan, lineer bağımsız sınır koşullarının sayısı en çok $2n$ olur. Ayrıca lineer bağımsız sınır koşullarının sayısı $2n$ ise bu koşulların katsayılar matrisinin rankı $2n$ olacağından sınır koşulları,

$$y(a) = ... = y^{(n-1)}(a) = y(b) = ... = y^{(n-1)}(b) = 0$$

koşullarına denk olur [1].

3.2. HOMOJEN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Tanım 3.2.1 [1]. L diferansiyel operatörü, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.3) sınır koşullarıyla oluşturulsun.

$$L(y) = 0 \tag{3.5}$$

şeklindeki bir probleme *homojen sınır değer problemi* denir. Bu problem daha açık olarak,

$$\begin{cases} l(y) = 0 \\ U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,m} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Açıktır ki, $y \equiv 0$ fonksiyonu (3.5) probleminin çözümüdür. Bu çözüme homojen sınır değer probleminin *aşikar çözümü* denir. (3.5) problemini sağlayan her bir fonksiyona bu problemin bir *çözümü* denir.

Şimdi homojen sınır değer probleminin (3.3) koşulları altında aşikardan farklı çözümlerinin varlığını araştıralım.

y_k, $k=\overline{1,n}$ $l(y)=0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Lineer diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, $l(y)=0$ denkleminin her bir çözümü ve bundan dolayı, homojen sınır değer probleminin her bir çözümü,

$$y=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$$

şeklindedir. Burada c_k, $k=\overline{1,n}$ reel sabitlerdir. Bu çözüm (3.3) sınır koşullarında sağlatılırsa,

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k U_j(y_k)=0, \quad j=\overline{1,m}\right. \tag{3.6}$$

homojen lineer denklemler sistemi elde edilir.

$$U=\begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m(y_1) & \cdots & U_m(y_n) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisinin rankı r olsun. O zaman c_k, $k=\overline{1,n}$ sabitleri için tam $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözüm vardır. Bunlar sınır değer probleminin $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümüne uygundur. Böylece şu sonuçlara varılabilir [1]:

1. $r<n$ ise ve yalnız böyle ise (3.5) probleminin aşikardan farklı çözümü vardır.

2. $m<n$ ise, (3.5) probleminin aşikardan farklı çözümü vardır.

3. $n=m$ ise (3.5) probleminin aşikardan farklı çözümünün olması için gerek ve yeter şart $\det U=0$ olmasıdır.

U matrisinin rankına, sınır değer probleminin *rankı* denir.

3.3. EŞLENİK DİFERANSİYEL İFADE

$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y$ diferansiyel ifadesinin $p_k(x)$ katsayıları, $p_k \in C^{(n-k)}[a,b]$, $k = \overline{0,n}$ koşullarını sağlasınlar. $y, z \in C^{(n)}[a,b]$ keyfi iki fonksiyon olsun. k kez kısmi integrasyon ile,

$$\int_a^b p_{n-k}\overline{z}y^{(k)}dx = \left[p_{n-k}\overline{z}y^{(k-1)} - \left(p_{n-k}\overline{z}\right)' y^{(k-2)} + ... + (-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k-1)} y \right]\Bigg|_a^b + \\ +(-1)^k \int_a^b y\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k)} dx \tag{3.8}$$

elde ederiz. (3.8)'de $k = n, n-1, ..., 1, 0$ alıp elde edilen denklemleri taraf tarafa toplarsak,

$$\int_a^b l(y)\overline{z}\,dx = P(\eta,\zeta) + \int_a^b y\overline{l^*(z)}dx \tag{3.9}$$

elde ederiz, burada,

$$l^*(z) = (-1)^n\left(\overline{p_0}z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{p_1}z\right)^{(n-1)} + ... + \overline{p_n}z \tag{3.10}$$

ve $P(\eta,\zeta)$,

$$\eta = \left(y(a), y'(a), ..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), ..., y^{(n-1)}(b)\right)$$
$$\zeta = \left(z(a), z'(a), ..., z^{(n-1)}(a), z(b), z'(b), ..., z^{(n-1)}(b)\right)$$

değişkenlerine bağlı bilineer bir ifadedir [1].

Tanım 3.3.1 [1]. (3.10) ile tanımlı $l^*(z)$ ifadesine, $l(y)$ diferansiyel ifadesinin *eşleniği*, (3.9) formülüne *Lagrange formülü* denir.

$$\int_a^b l^*(z)\overline{y}dx$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_a^b l^*(z)\overline{y}\,dx = Q(\eta,\zeta) + \int_a^b z\overline{l(y)}dx$$

şeklinde bir eşitlik elde ederiz. Böylece $l(y)$, $l^*(z)$'nin eşleniği olur. Yani, $l^{**}(y)=l(y)$ dir [1].

Eşlenik ifadenin (3.10) tanımından, hemen,

$$\left(l_1+l_2\right)^*=l_1^*+l_2^* \tag{3.11}$$

$$(\lambda l)^*=\overline{\lambda} l^* \tag{3.12}$$

elde edilir [1].

Eğer, $l^*=l$ ise $l(y)$'ye *özeşlenik diferansiyel ifade* denir.

(3.11) ve (3.12)'den şu sonuçlara varılır [1]:

1. Aynı tanım kümesine sahip özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamı da özeşleniktir.

2. Özeşlenik bir diferansiyel ifadenin bir reel sayıyla çarpımı da özeşleniktir.

Aşağıdaki teorem özeşlenik bir diferansiyel ifadenin en genel şeklini verir:

Teorem 3.3.1 [1]. Herhangi bir özeşlenik diferansiyel ifade,

$$l_{2\upsilon}(y)=\left(py^{(\upsilon)}\right)^{(\upsilon)}, \quad l_{2\upsilon-1}(y)=\frac{1}{2}\left[\left(ipy^{(\upsilon-1)}\right)^{(\upsilon)}+\left(ipy^{(\upsilon)}\right)^{(\upsilon-1)}\right]$$

şeklindeki özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamıdır. Burada p, $[a,b]$ aralığında reel değerli bir fonksiyondur.

İspat [1]: $y,z\in C^{(n)}[a,b]$ olmak üzere,

$$\int_a^b l_{2\upsilon}(y)\overline{z}\,dx, \quad \int_a^b l_{2\upsilon-1}(y)\overline{z}\,dx$$

integrallerine ayrı ayrı kısmi integrasyon uygulanarak, $l_{2\upsilon}(y)$ ve $l_{2\upsilon-1}(y)$ ifadelerinin özeşlenik diferansiyel ifadeler olduğu elde edilir. Dolayısıyla bunların toplamı da özeşlenik bir diferansiyel ifadedir. Tersine,

$$l(y)=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y$$

özeşlenik bir diferansiyel ifade olsun. Biz, $l(y)$'nin $l_{2\upsilon}(y)$ ve $l_{2\upsilon-1}(y)$ şeklindeki ifadelerin toplamı şeklinde yazılabileceğini göstereceğiz. Tanımdan $l(y)$'nin eşlenik ifadesini,

$$l^*(y)=(-1)^n\left(\overline{p_0}y\right)^{(n)}+(-1)^{n-1}\left(\overline{p_1}y\right)^{(n-1)}+\ldots+\overline{p_n}y=$$
$$=(-1)^n\,\overline{p_0}y^{(n)}+\left[(-1)^{n-1}n\overline{p_0}'+(-1)^{n-1}\overline{p_1}\right]y^{(n-1)}$$

şeklinde yazabiliriz. l özeşlenik olduğundan, özellikle,

$$p_0=(-1)^n\,\overline{p_0} \tag{3.13}$$

yazılır.

Şimdi $n=2\mu$ ise, $p_0=\overline{p_0}$ yazılır ki bu p_0'ın yalnız reel değerler aldığını gösterir. Eğer $l(y)$'den,

$$l_{2\upsilon}(y)=\left(py^{(\upsilon)}\right)^{(\upsilon)}=p_o y^{(n)}+(\mu-1)p_o'y^{(n-1)}+\ldots$$

özeşlenik ifadesini çıkartırsak, $(n-1)$. mertebeden $l(y)-l_{2\mu}(y)$ özeşlenik diferansiyel ifadesini elde ederiz.

Eğer $n=2\mu-1$ ise (3.13)'den $p_0=-\overline{p_0}$ elde edilir. Buradan $p_0=ip$ yazılır. Burada p, yalnızca reel değerler alan bir fonksiyondur.

$$l_{2\mu-1}(y)=\frac{1}{2}\left[\left(ipy^{(\mu-1)}\right)^{(\mu)}+\left(ipy^{(\mu)}\right)^{(\mu-1)}\right]=$$
$$=p_0y^{(n)}+\frac{1}{2}\mu p_o'y^{(n-1)}+\ldots$$

özeşlenik ifadesini $l(y)$'den çıkartırsak, $(n-1)$. mertebeden $l(y)-l_{2\mu-1}(y)$ özeşlenik diferansiyel ifadesini elde ederiz.

Bu tartışma diferansiyel ifadeye ardışık olarak uygulanırsa, geriye sıfırıncı mertebeden $l_0(y)=\tilde{p}y$ şeklinde özeşlenik bir diferansiyel ifade elde edilir. Burada $\tilde{p}$, yalnızca reel değerler alan bir fonksiyondur. Böylece teorem ispatlanır.

(3.13) eşitliği bize reel katsayılı özeşlenik bir diferansiyel ifadenin genel şeklini vermek için yol gösterir:

Sonuç [1]: Reel katsayılı bir özeşlenik diferansiyel ifade,

$$l(y)=\left(p_0y^{(\mu)}\right)^{(\mu)}+\left(p_1y^{(\mu-1)}\right)^{(\mu-1)}+\ldots+\left(p_{\mu-1}y'\right)'+p_\mu y$$

şeklinde yazılabilir. Burada p_k, $k=\overline{0,\mu}$ reel değerli fonksiyonlardır.

3.4. EŞLENİK SINIR KOŞULLARI ve EŞLENİK DİFERANSİYEL OPERATÖR

$U_j(y),\quad j=\overline{1,m}$ lineer bağımsız ifadeleri verilsin. Burada $m\le 2n$ dir. Lineer uzaylar teorisinden bilindiği gibi bu ifadeleri, $2n$ sayıda lineer bağımsız ifadeye tamamlayabiliriz. Bu ifadeleri (3.9) Lagrange formülünde yazarsak,

$$\int_a^b l(y)\overline{z}\,dx = U_1(y)V_{2n}(z)+U_2(y)V_{2n-1}(z)+\dots+U_{2n}(y)V_1(z)+\int_a^b y\overline{l^*(z)}\,dx \quad (3.14)$$

eşitliğini elde ederiz. Yani $P(\eta,\zeta)$ ifadesinin katsayıları $U_j(y),\quad j=\overline{1,2n}$ dir.

Şimdi $V_j(z),\quad j=\overline{1,2n}$ ifadelerinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$P(\eta,\zeta)=P_b(\eta,\zeta)-P_a(\eta,\zeta) \quad (3.15)$$

yazalım. Burada ,$P_a(\eta,\zeta)$ ve $P_b(\eta,\zeta)$ sırasıyla, $y,y',\dots,y^{(n-1)},z,z',\dots,z^{(n-1)}$ fonksiyonlarının $x=a$ ve $x=b$ noktalarındaki değerlerini içerir. (3.8) eşitliğinden $P(\eta,\zeta)$'nin $2n$ boyutlu matrisini,

$$\begin{pmatrix} -\Delta_a & \Theta \\ \Theta & \Delta_b \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

şeklinde elde ederiz. Burada, Δ_a ve Δ_b sırasıyla, $P_a(\eta,\zeta)$ ve $P_b(\eta,\zeta)$ ifadelerinin matrisleridir. Θ ise n boyutlu sıfır matristir. Özellikle Δ_a ve Δ_b,

$$\begin{pmatrix} \dots & \cdots & (-1)^{n-1}p_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada p_0, Δ_a ve Δ_b için sırasıyla, $x=a$ ve $x=b$ noktalarında değerlenmiştir. Δ_a ve Δ_b matrislerinin determinantları sıfır olmadığından, (3.16) matrisinin determinantı da sıfır olmaz. Fakat bu matris $V_j(z),\quad j=\overline{1,2n}$ ifadelerinin de katsayılar matrisidir. Yani, $V_j(y),\quad j=\overline{1,2n}$ ifadeleri lineer bağımsızdır [1].

Tanım 3.4.1 [1].

$$V_j(z)=0, \quad j=\overline{1,2n-m} \tag{3.17}$$

sınır koşullarına (ve bunlara denk tüm sınır koşullarına),

$$U_j(y)=0, \quad j=\overline{1,m} \tag{3.18}$$

sınır koşullarının *eşlenik sınır koşulları* denir. Eğer, (3.17) koşulları (3.18) koşullarına denkse, o zaman (3.17) koşullarına *özeşlenik sınır koşulları* denir.

L, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.18) sınır koşullarıyla belirlensin. $l^*(z)$ eşlenik diferansiyel ifadesi ve (3.17) eşlenik sınır koşullarıyla belirlen operatöre, L'nin *eşlenik operatör*ü denir ve L^* ile gösterilir.

$$(y,z)=\int_a^b y\overline{z}\,dx$$

işaretlemesini yaparsak, (3.14), (3.17) ve (3.18)'den,

$$\int_a^b Ly\overline{z}\,dx=\int_a^b y\overline{Lz}\,dx \tag{3.19}$$

veya,

$$(Ly,z)=(y,L^*z) \tag{3.20}$$

yazılır.

Belirtelim ki, eşlenik operatörlerin tanımından L, L^* operatörünün eşleniği olur. Yani, $L^{**}=L$ olur.

Eğer, $L^*=L$ ise L operatörüne *özeşlenik operatör* denir. Bir L operatörünün özeşlenik operatör olması için yalnız ve yalnız özeşlenik diferansiyel ifade ve özeşlenik sınır koşullarıyla oluşturulması gerekir. L özeşlenik ise (3.20) eşitliği,

$$(Ly,z)=(y,Lz) \tag{3.21}$$

şeklini alır.

3.5. EŞLENİK SINIR DEĞER PROBLEMİ

Tanım 3.5.1 [1]. L^*, L'ye eşlenik operatör ise,

$$L^* z = 0 \tag{3.22}$$

homojen sınır değer problemine,

$$Ly = 0 \tag{3.23}$$

sınır değer probleminin *eşlenik sınır değer problemi* denir.

(3.22) problemi daha açık şekilde,

$$\begin{cases} l^*(z) = 0 \\ V_j(z) = 0, \quad j = \overline{1, 2n-m} \end{cases} \tag{3.24}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi amacımız eşlenik sınır değer problemlerinin rankları arasında bir ilişki elde etmektir.

z_k, $k = \overline{1,n}$, $l^*(z) = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve $r^/$, (3.22) probleminin rankı olsun. O zaman bu problemin tam $n - r^/$ sayıda lineer bağımsız çözümü vardır.

Öte yandan y, (3.23) probleminin keyfi bir çözümüyse, (3.14) Lagrange formülünün sol tarafı, $z = z_k$, $k = \overline{1,n}$ fonksiyonları için sıfır olur. $U_j(y) = 0$, $j = \overline{1,m}$ olduğundan (3.14)'ten,

$$\left\{ U_{m+1}(y) V_{2n-m}(z_k) + ... + U_{2n}(y) V_1(z_k) = 0, \quad k = \overline{1,n} \right. \tag{3.25}$$

homojen denklemler sistemini elde ederiz. Eğer (3.23) probleminin rankı r ise, (3.25) sisteminin en azından $n - r$ sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. Bu yüzden (3.22) probleminin rankı $r^/$, $2n - m - (n - r) = n - m + r$ sayısından büyük değildir. Yani,

$$r^/ \le n - m + r \tag{3.26}$$

dır. Hatırlatalım ki, (3.22) ve (3.23) problemleri karşılıklı eşlenik olduğundan, rankların rolleri değiştirilirse,

$$r \le n - (2n - m) + r^/$$

ve dolayısıyla,

$$r \le m - n + r^/ \tag{3.27}$$

elde edilir. Sonuçta (3.26) ve (3.27)'den,

$$r' = n - m + r \tag{3.28}$$

bulunur [1].

Böylece aşağıdaki sonuçlara varabiliriz [1]:

1. Bir homojen sınır değer probleminde, sınır koşullarının sayısı diferansiyel ifadenin mertebesine eşitse, bu problemin rankı eşleniğinin rankına eşittir.

2. Bir homojen sınır değer probleminde, sınır koşullarının sayısı diferansiyel ifadenin mertebesine eşitse ve bu problemin yalnızca aşikar çözümü varsa, bu problemin eşleniğinin de yalnızca aşikar çözümü vardır.

3.6. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİ ve ÖZFONKSİYONLARI

Tanım 3.6.1 [1]. $\lambda \in \mathbb{C}$ bir parametre olsun. Eğer,

$$L(y) = \lambda y \tag{3.29}$$

denklemini sağlayan aşikardan farklı bir y çözümü varsa, λ parametresine L operatörünün bir *özdeğer*i , y fonksiyonuna da λ'ya uygun bir *özfonksiyon* denir.

Tanımdan açıkça denilebilir ki, bir L operatörünün özdeğerleri λ parametresinin öyle değerleridir ki,

$$l(y) = \lambda y, \quad U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,m} \tag{3.30}$$

homojen sınır değer problemi aşikar olmayan çözüme sahiptir. Her bir aşikardan farklı çözüm ise, λ'ya uygun bir özfonksiyondur.

Aynı λ özdeğerine uygun özfonksiyonların bir lineer kombinasyonu da λ'ya uygun bir özfonksiyondur. O halde, $L(y_1) = \lambda y_1$ ve $L(y_2) = \lambda y_2$ ise, $L(c_1y_1 + c_2y_2) = \lambda(c_1y_1 + c_2y_2)$ dir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

$l(y) = \lambda y$ diferansiyel denklemi, verilen bir λ parametresi için n'den çok lineer bağımsız çözüme sahip değildir. O halde aynı λ özdeğerine uygun tüm lineer bağımsız özfonksiyonlar sistemi, $l(y) = \lambda y$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin gerdiği uzaydan, boyutu n'den büyük olmayan bir alt uzay ayırır. Bu uzayın boyutu, verilen λ özdeğeri için (3.30) probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya λ özdeğerinin *geometrik katı* denir.

Şimdi verilen bir λ parametresi için, (3.30) probleminin aşikardan farklı çözümlerinin varlığını araştıralım.

$y_k(x,\lambda),\quad k=\overline{1,n}$ fonksiyonları, $l(y)=\lambda y$ diferansiyel denkleminin,

$$y_k^{(j-1)}(a,\lambda)=\begin{cases}0, & k\neq j\\ 1, & k=j\end{cases}\qquad k,j=\overline{1,n} \tag{3.31}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerinin temel bir sistemi olsun. Lineer diferansiyel denklemler teorisinden belirtelim ki, $[a,b]$ aralığında sabitlenmiş her bir x değeri için, $y_k(x,\lambda),\ k=\overline{1,n}$ fonksiyonları, λ'nın analitik fonksiyonlarıdır. Bölüm 3.2'nin sonuçlarına göre, (3.30) probleminin aşikardan farklı bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart,

$$U=\begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ U_m(y_1) & \cdots & U_m(y_n)\end{pmatrix}$$

matrisinin r rankının n'den küçük olmasıdır. Ayrıca belirtmek gerekir ki, U matrisinin tüm karesel alt matrislerinin determinantları, λ'nın analitik fonksiyonlarıdır [1].

Bu bilgiler ışığında aşağıdaki sonuçlar verilebilir [1]:

1. U'nun, derecesi n olan tüm alt matrislerinin determinantları özdeş olarak sıfırsa, λ parametresinin her bir değeri özdeğer olur.

2. U'nun, derecesi n olan en az bir alt matrisinin determinantı özdeş olarak sıfır olmasın. Bu durumda λ'nın, U matrisinin derecesi n olan tüm alt matrislerinin determinantlarını sıfır yapan değerlerinin her biri özdeğerdir.

Böylece L operatörünün özdeğerleri için olası iki durum mevcuttur [1]:

a) Her bir λ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

b) L operatörü en fazla sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu yığılma noktalarına sahip değildir.

$m=n$ durumu ayrıca incelenmesi gereken bir durumdur.

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{3.32}$$

ile tanımlı determinanta, L operatörünün *karakteristik determinantı* denir. Yukarıdaki tartışmadan bu determinantın, λ'nın analitik fonksiyonu olduğu söylenebilir. $\Delta(\lambda)$ için aşağıdaki sonuçlar verilebilir [1]:

1. L operatörünün özdeğerleri, $\Delta(\lambda)$'nın sıfırlardır. $\Delta(\lambda)$ özdeş olarak sıfırsa, her bir λ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

2. $\Delta(\lambda)$ özdeş olarak sıfır değilse, L operatörü en fazla sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu yığılma noktalarına sahip değildir. Üstelik bu özdeğerler , $\Delta(\lambda)$'nın sıfırlarıdır.

Eğer $\Delta(\lambda)$'nın hiç sıfırı yoksa, L operatörünün de hiç özdeğeri yoktur.

3. Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$'nın υ katlı sıfırıysa, o zaman λ_0'ın geometrik katı υ'den büyük değildir.

İspat [1]: r, $\Delta(\lambda_0)$ determinantına karşılık gelen matrisin rankı olsun. O zaman λ_0 özdeğerinin geometrik katı $n-r$ olur. Öte yandan determinantların diferansiyellenebilmesine dair verilen kurallara göre, $\Delta(\lambda)$'nın $(n-r-1)$. mertebeye kadar türevleri, $\lambda=\lambda_0$ noktasında sıfırdır. Öte yandan,

$$\Delta^{(k-1)}(\lambda_0)=0,\quad k=\overline{1,\upsilon},\quad \Delta^{(\upsilon)}(\lambda_0)\neq 0$$

olduğundan, $n-r-1\leq \upsilon-1$ olur ve buradan, $n-r\leq \upsilon$ bulunur.

Özellikle λ_0 basit sıfır ise, o zaman $n-r\leq 1$ olur ve $n-r\geq 1$ de sağlandığından, $n-r=1$ elde edilir.

4. Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$'nın basit sıfırıysa, o zaman λ_0'ın geometrik katı tektir. Yani λ_0'a bir tek lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelir.

Tanım 3.6.2 [1]. λ_0 $\Delta(\lambda)$'nın basit sıfırıysa, λ_0 özdeğerine *basit özdeğer* denir.

$Ly=0$ homojen sınır değer probleminde, diferansiyel ifadenin katsayıları ve belki de sınır koşullarının katsayıları, λ parametresinin analitik fonksiyonları olabilirler. Bu durumda incelenen özdeğer problemi, (3.29) probleminden daha geneldir. Yine de, böyle genelleştirilmiş özdeğer problemleri için yukarıda elde edilen sonuçların tümü geçerlidir.

Teorem 3.6.1 [1]. λ L operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeriyse, $\overline{\lambda}$ L^* eşlenik operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeridir.

İspat : L operatörü, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_j(y)=0,\quad j=\overline{1,n}$ sınır koşullarıyla oluşturulsun. O zaman L^* operatörü, $l^*(z)$ diferansiyel ifadesi ve $U_j(z)=0,\quad j=\overline{1,n}$ sınır koşullarıyla oluşturulur.

λ L operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeriyse, o zaman, $Ly=\lambda y$ probleminin p sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. Bölüm 3.5.'in sonuçlarıyla, $L^*z=\overline{\lambda}z$ eşlenik probleminin de p sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. Buradan, $\overline{\lambda}$ parametresinin L^* operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeri olduğu anlaşılır.

Uyarı : Teorem3.6.1'in, sadece, sınır koşullarının sayısının diferansiyel ifadenin mertebesine eşit olduğu durumda geçerli olduğunu belirtelim.

Teorem 3.6.2 [1]. L ve L^* eşlenik operatörlerinin sırasıyla, λ ve μ özdeğerlerine uygun özfonksiyonları $\lambda \neq \overline{\mu}$ ise, ortogonaldir.

İspat [1]: y ve z sırasıyla, L ve L^* eşlenik operatörlerinin λ ve μ özdeğerlerine uygun özfonksiyonları olsunlar. O halde, $Ly=\lambda y$ ve $L^*z=\mu z$ yazılabilir. Buradan,

$$(Ly,z)=(\lambda y,z)=\lambda(y,z)$$

ve,

$$\left(y,L^*z\right)=(y,\mu z)=\overline{\mu}(y,z)$$

yazılabilir. $(Ly,z)=\left(y,L^*z\right)$ olduğundan, $\lambda(y,z)=\overline{\mu}(y,z)$ ve buradan da,

$$\left(\lambda-\overline{\mu}\right)(y,z)=0$$

veya,

$$(y,z)=0$$

yazılabilir. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 3.6.2 [1]. Özeşlenik bir operatörün özdeğerleri reeldir.

İspat [1]: L özeşlenik bir operatör ise, $(Ly,z)=(y,Lz)$ yazılır. Özellikle,

$$(Ly,y)=(y,Ly)$$

dir. Ayrıca, $(Ly,y)=\overline{(y,Ly)}$ olduğundan (Ly,y) reeldir. Şimdi, λ L operatörünün bir özdeğeri; y, bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. $Ly=\lambda y$ denkleminden $(Ly,y)=\lambda(y,y)$ yazılır. $(y,y)>0$ ve (Ly,y) reel olduğundan,

$$\lambda=\frac{(Ly,y)}{(y,y)}$$

özdeğeri de reeldir.

Teorem 3.6.1 ve teorem 3.6.2'den şu sonuç hemen verilir:

Sonuç [1]: Bir özeşlenik diferansiyel operatörün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları ortogonaldir.

Aynı özdeğere uygun lineer bağımsız özfonksiyonlardan Schmidt ortogonalleştirme yöntemiyle ortogonal özfonksiyonlar elde edebiliriz. Böylece, aynı özdeğere ait olan özfonksiyonların oluşturduğu uzayda ortogonal bir taban seçebiliriz.

3.7. L_p UZAYLARI

Tanım 3.7.1 [2]. $L_p(0,1)=\left\{f:\int_0^1 |f(x)|^p\,dx<\infty\right\}$ kümesi, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır. (Buradaki integral Lebesque anlamında integraldir.)

$1\le p<\infty$ ise, $L_p(0,1)$ uzayında $\|f\|_p=\left\{\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlı $\|.\|_p$ ifadesi bir normdur. $L_p(0,1)$ $(1\le p<\infty)$ uzayı bu norma göre normlu lineer uzaydır [2].

Teorem 3.7.1 (Riesz-Fischer) [2]. $L_p(0,1)$ $(1\le p<\infty)$ uzayı tamdır.

3.8. HİLBERT UZAYLARINDA TABANLAR

Tanım 3.8.1 [4]. B bir Banach uzayı, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzaydaki vektörlerin bir dizisi olsun. Eğer her bir $x \in \mathrm{B}$ vektörü için,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j \tag{3.33}$$

şeklinde tek yolla belirli, B uzayındaki norma göre yakınsak olan bir seri ayrışımı varsa, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine B uzayının bir *tabanı* denir. (3.33) ayrışımında c_j katsayıları, $x \in \mathrm{B}$ vektörüne bağlı lineer fonksiyonellerdir:

$$c_j = \psi_j(x) \tag{3.34}$$

Bu tanım bir H Hilbert uzayı için uygulanırsa (3.34) eşitliği,

$$c_j = (x, \psi_j) \quad (\psi_j \in \mathrm{H}\,;\, j = 1, 2, ...) \tag{3.35}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca $x = \phi_k \ (k = 1, 2, ...)$ yazılırsa,

$$(\phi_k, \psi_j) = \delta_{kj} \ (k, j = 1, 2, ...)$$

elde edilir, burada δ_{kj} Kronecker deltasıdır.

Tanım 3.8.2 [4]. $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ ve $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$, H Hilbert uzayının elemanlarından oluşan iki dizi olsun. Eğer,

$$(x_k, \omega_j) = \delta_{kj} \ (k, j = 1, 2, ...)$$

ise, bu dizilere *biortogonal* diziler denir.

H Hilbert uzayının $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal olan $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi tek şekilde tanımlıdır [4].

(3.33) ve (3.35) eşitliklerinden $\psi_j \ (j = 1, 2, ...)$ vektörlerinin her birine ortogonal olan herhangi bir f vektörünün özdeş olarak sıfır olduğu söylenir. Sonuçta herhangi bir tabana biortogonal olan dizi, H Hilbert uzayında tamdır [4].

Teorem 3.8.1 [4]. H Hilbert uzayının herhangi bir tabanına biortogonal olan dizi de bu uzayın bir tabanıdır.

Tanım 3.8.3 [5]. B bir Banach uzayı, $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer,

$$x_1 \notin span\left\{x_2, x_3, ...\right\}$$

$$x_k \notin span\left\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ...\right\} \left(k = 2,3,...\right)$$

ise, $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine bu uzayda *minimal* bir dizi denir, burada $span\left\{\omega_1, \omega_2, ...\right\}$ uzayı, $\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin B uzayından gerdiği alt uzaydır.

Teorem 3.8.2 [5]. B bir Banach uzayı, $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin minimal olması için gerek ve yeter şart bu diziye biortogonal olan bir $\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin var olmasıdır.

Tanım 3.8.4 [4]. B bir Banach uzayı, $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ ve $\left\{f_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda iki dizi olsun. Eğer,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|g_j - f_j\right\|^2 < \infty$$

ise, bu dizilere *karesel yakınsak* diziler denir, burada $\|.\|$ B uzayındaki normdur.

Tanım 3.8.5 [4]. B bir Banach uzayı, $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer,

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j = 0$$

eşitliği,

$$0 < \sum_{j=1}^{\infty} \left\|c_j\right\|^2 \left\|g_j\right\|^2 < \infty$$

eşitsizliği olduğunda sağlanmıyorsa, $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine ω*-lineer bağımsız* dizi denir.

Teorem 3.8.3 [5]. Bir Banach uzayında bir dizi minimal ise, bu dizi ω-lineer bağımsızdır.

Tanım 3.8.6 [4] (Riesz Tabanı). $\left\{\phi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H Hilbert uzayının ortonormal bir tabanı, A sınırlı ve tersi olan lineer bir operatör olsun. Bu durumda keyfi bir $f \in \mathrm{H}$ vektörü için,

$$A^{-1}f=\sum_{j=1}^{\infty}\left(A^{-1}f,\phi_j\right)\phi_j=\sum_{j=1}^{\infty}\left(f,A^{*^{-1}}\phi_j\right)\phi_j$$

ayrışımı doğrudur. Sonuçta,

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}\left(f,\chi_j\right)\psi_j$$

yazılır, burada,

$$\psi_j=A\phi_j,\ \chi_j=A^{*^{-1}}\phi_j\ \left(j=1,2,...\right) \tag{3.36}$$

dir. Açıkça,

$$\left(\psi_j,\chi_k\right)=\delta_{jk}\ \left(j,k=1,2,...\right)$$

dir. O halde, eğer,

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\psi_j \tag{3.37}$$

ise,

$$c_j=\left(f,\chi_j\right)\ \left(j=1,2,...\right)$$

dir. Üstelik c_j katsayıları (3.37) ayrışımında tek türlü belirlidir.

Böylece her sınırlı ve tersi olan lineer operatör H Hilbert uzayının herhangi bir ortonormal tabanını bu uzayın başka bir tabanına dönüştürür. H Hilbert uzayının yukarıdaki dönüşümle elde edilen $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına *ortonormal bir tabana denk tabanı* (veya *Riesz tabanı*) denir.

Teorem 3.8.4 [4] (Bari, N.K.). Aşağıdakiler denktir:

1) $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H Hilbert uzayının bir Riesz tabanıdır.

2) $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayının $\left(f,g\right)$ iç çarpımına topolojik denk olan uygun bir $\left(f,g\right)_1$ iç çarpımının oluşturduğu uzayda ortonormal bir tabandır.

3) $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır ve öyle a_1, a_2 pozitif sayıları vardır ki, herhangi bir pozitif n tamsayısı ve herhangi $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ kompleks sayıları için,

$$a_2\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_j\right|^2\le\left|\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\psi_j\right|^2\le a_1\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_j\right|^2$$

eşitsizliği doğrudur.

4) $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır ve onun Gram matrisi,

$$\left\|\left(\psi_j, \psi_k\right)\right\|_{j,k=1}^{\infty}$$

l_2 dizi uzayında sınırlı ve terslenebilir bir lineer operatör üretir.

5) $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır, bu diziye biortogonal olan uygun $\left\{\chi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ tam dizisi vardır ve herhangi bir $f \in \mathrm{H}$ vektörü için,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(f, \psi_j\right)\right|^2 < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(f, \chi_j\right)\right|^2 < \infty$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 3.8.5 [4] (Bari, N.K.). H Hilbert uzayının $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ Riesz tabanına karesel yakınsak olan ω-lineer bağımsız $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi de bu uzayın bir Riesz tabanıdır.

Son teoremden sonuç olarak aşağıdaki önerme verilebilir [4]:

H Hilbert uzayının ω-lineer bağımsız $\left\{\chi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi bu uzayın ortonormal bir tabanına karesel yakınsak ise, bu dizi H uzayında bir tabandır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. (1.1)-(1.3) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Lemma 4.1.1. $c_1 \neq 0$ olmak üzere, (1.4)-(1.5) koşulları altında (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin sonlu sayıda özdeğeri hariç diğer tüm özdeğerleri reeldir.

İspat : λ_0 sayısı (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin reel olmayan bir özdeğeri, $y(x,\lambda_0)$ fonksiyonu ise bu özdeğere uygun özfonksiyon olsun. $q(x)$ fonksiyonu reel değerli bir fonksiyon ve sınır koşullarının katsayıları reel sayılar olduğundan $\overline{\lambda_0}$ sayısı (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğeri, $y\left(x,\overline{\lambda_0}\right) \equiv \overline{y(x,\lambda_0)}$ fonksiyonu ise bu özdeğere uygun özfonksiyon olur. Böylece (1.1)'den,

$$\begin{aligned} -y''(x,\lambda_0)+q(x)\,y(x,\lambda_0) &= \lambda_0 y(x,\lambda_0) \\ -\overline{y''(x,\lambda_0)}+q(x)\,\overline{y(x,\lambda_0)} &= \overline{\lambda_0}\,\overline{y(x,\lambda_0)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Son iki eşitlikten ilkini $\overline{y(x,\lambda_0)}$ fonksiyonuna ikincisini ise $y(x,\lambda_0)$ fonksiyonuna çarpıp taraf tarafa çıkartırsak, kolayca,

$$\frac{d}{dx}\left\{\overline{y'(x,\lambda_0)}y(x,\lambda_0)-\overline{y(x,\lambda_0)}y'(x,\lambda_0)\right\}=\left(\lambda_0-\overline{\lambda_0}\right)\left|y(x,\lambda_0)\right|^2$$

elde edilir. Bu eşitliği $x=0$'dan $x=1$'e kadar integre edersek,

$$\begin{aligned} \left\{\overline{y'(1,\lambda_0)}y(1,\lambda_0)-\overline{y(1,\lambda_0)}y'(1,\lambda_0)\right\}-\left\{\overline{y'(0,\lambda_0)}y(0,\lambda_0)-\overline{y(0,\lambda_0)}y'(0,\lambda_0)\right\}= \\ =\left(\lambda_0-\overline{\lambda_0}\right)\int_0^1\left|y(x,\lambda_0)\right|^2 dx \end{aligned} \tag{4.1}$$

olur. (1.4)-(1.5) koşullarına göre $|c_0|+|d_0|\neq 0$ ve $|c_1|+|d_1|\neq 0$ dır. λ_0 reel olmayan sayı olduğundan, $c_0\lambda_0+d_0\neq 0$ ve $c_1\lambda_0+d_1\neq 0$ elde edilir. Demek ki, (1.2)-(1.3) sınır koşulları λ_0 özdeğeri için,

$$y'(0)=\frac{a_0\lambda_0+b_0}{c_0\lambda_0+d_0}y(0)\,,\quad y'(1)=\frac{a_1\lambda_0+b_1}{c_1\lambda_0+d_1}y(1)$$

biçiminde yazılabilir. Son iki eşitlikten ve (4.1)'den kolayca,

$$\frac{\sigma_0\left|y(0,\lambda_0)\right|^2}{\left|c_0\lambda_0+d_0\right|^2}-\frac{\sigma_1\left|y(1,\lambda_0)\right|^2}{\left|c_1\lambda_0+d_1\right|^2}=\int_0^1\left|y(x,\lambda_0)\right|^2dx \tag{4.2}$$

elde edilir.

$\operatorname{Re}\mu\geq 0$ olmak üzere, $\lambda=\mu^2$ olsun. Belirtelim ki, λ parametresinin her bir değerinde (1.1) denkleminin $y=y(x,\lambda)$ çözümü için,

$$\|y\|_c\leq c\left(1+|\mu|\right)\left(1+|\operatorname{Im}\mu|\right)^{\frac{1}{2}}\|y\|_2 \tag{4.3}$$

eşitsizliği doğrudur, burada c λ'dan bağımsız pozitif bir sayıdır ve

$$\|y\|_c=\max_{0\leq x\leq 1}\left|y(x,\lambda)\right|,\quad \|y\|_2=\left(\int_0^1\left|y(x,\lambda)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dir [9].

(1.4)-(1.5) koşullarına ve (4.2), (4.3)'e göre,

$$\frac{|\sigma_1|\left(\max\limits_{0\leq x\leq 1}\left|y(x,\lambda_0)\right|\right)^2}{\left|c_1\lambda_0+d_1\right|^2}\geq\frac{|\sigma_1|\left(\left|y(1,\lambda_0)\right|\right)^2}{\left|c_1\lambda_0+d_1\right|^2}\geq\int_0^1\left|y(x,\lambda_0)\right|^2dx\geq$$

$$\geq\frac{\left(\max\limits_{0\leq x\leq 1}\left|y(x,\lambda_0)\right|\right)^2}{c^2\left(1+|\mu_0|\right)^2\left(1+|\operatorname{Im}\mu_0|\right)}$$

olur, burada $\lambda_0=\mu_0{}^2$ $\left(\operatorname{Re}\mu_0\geq 0\right)$ dır. $\max\limits_{0\leq x\leq 1}\left|y(x,\lambda_0)\right|\neq 0$ olduğundan sonuncu eşitsizlik,

$$\frac{\left|c_1\mu_0{}^2+d_1\right|^2}{\left(1+|\mu_0|\right)^2\left(1+|\operatorname{Im}\mu_0|\right)}\leq|\sigma_1|c^2 \tag{4.4}$$

biçiminde de yazılabilir. Bu eşitsizliklerden kolayca elde edilir ki, öyle $\tilde{c}$ pozitif sayısı vardır ki, her bir reel olmayan λ_0 özdeğeri için $|\mu_0|\leq\tilde{c}$ veya başka bir deyişle $|\lambda_0|\leq\tilde{c}^2$ eşitsizliği doğrudur. Yani, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin (varsa) reel olmayan özdeğerleri $\tilde{c}^2$ yarıçaplı dairede yerleşir. Bu dairedeki özdeğerlerin sayısı sonlu olmalıdır, çünkü özdeğerler λ parametresine göre tam olan bir fonksiyonun sıfırlarıdır ve analitik fonksiyonların teklik teoremine göre bu fonksiyonların sınırlı bir bölgede sonlu sayıda sıfırları vardır.

Lemma 4.1.2. $c_1 \neq 0$ olmak üzere, (1.4)-(1.5) koşulları altında (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri en fazla sayılabilir sayıdadır, bu özdeğerlerin sonlu yığılma noktaları yoktur ve modülü yeterince büyük özdeğerler basittir.

İspat : $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1) denkleminin,

$$\psi(0,\lambda) = c_0\lambda + d_0 \ , \ \psi'(0,\lambda) = a_0\lambda + b_0 \tag{4.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu her bir $x \in [0,1]$ için λ parametresinin tam fonksiyonudur. Bu iddia, [2,syf.14]'deki teorem 1.1'e tamamen benzer şekilde ispatlanabilir.

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri,

$$(a_1\lambda + b_1)\psi(1,\lambda) - (c_1\lambda + d_1)\psi'(1,\lambda) = 0 \tag{4.6}$$

denkleminin çözümleridir. Lemma 4.1.1'e göre bu denklemin mutlak değerce yeterince büyük reel olmayan özdeğeri yoktur. Demek ki, (4.6) denkleminin sol tarafındaki tam fonksiyon özdeş olarak sıfır değildir. Buna göre bu denklemin en fazla sayılabilir sayıda kökü vardır ve bu köklerin sonlu yığılma noktaları yoktur. Lemma 4.1.2'nin ilk kısmı ispatlandı.

Şimdi ispat edelim ki, (4.6) denkleminin mutlak değerce yeterince büyük kökleri basittir.

Farzedelim ki, $\lambda = \lambda^*$ (4.6) denkleminin çok katlı köküdür. Bu durumda,

$$\left(a_1\lambda^* + b_1\right)\psi\left(1,\lambda^*\right) - \left(c_1\lambda^* + d_1\right)\psi'\left(1,\lambda^*\right) = 0 \tag{4.7}$$

olur. Öte yandan λ parametresi mutlak değerce yeterince büyük olduğunda (4.6) denklemi,

$$\frac{\psi'(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)} = \frac{a_1\lambda + b_1}{c_1\lambda + d_1} \tag{4.8}$$

denklemine denktir. Gerçekten, λ'nın büyük bu değerlerinde $c_1\lambda + d_1 \neq 0$ olduğundan $\psi(1,\lambda) \neq 0$ olmalıdır. Aksi halde, $\psi(1,\lambda) = \psi'(1,\lambda) = 0$ elde edilir. Bu durumda $\psi(x,\lambda) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$ olur. Bu ise çelişkidir.

Böylece λ^* (4.8) denkleminin çok katlı kökü olur. Yani,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{\psi'(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}\right\}\Bigg|_{\lambda=\lambda^*} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{a_1\lambda + b_1}{c_1\lambda + d_1}\right\}\Bigg|_{\lambda=\lambda^*}$$

olur. Sonuncu eşitlik,

$$\psi\left(1,\lambda^*\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi'\left(1,\lambda^*\right)-\psi'\left(1,\lambda^*\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi\left(1,\lambda^*\right)=\frac{\sigma_1\psi^2\left(1,\lambda^*\right)}{\left(c_1\lambda^*+d_1\right)^2} \tag{4.9}$$

biçiminde yazılabilir.

$\psi\left(x,\lambda\right)$, (1.1) denkleminin çözümü olduğundan kolayca,

$$\frac{d}{dx}\left\{\psi'\left(x,\lambda\right)\psi\left(x,\mu\right)-\psi\left(x,\lambda\right)\psi'\left(x,\mu\right)\right\}=\left(\mu-\lambda\right)\psi\left(x,\lambda\right)\psi\left(x,\mu\right)$$

elde edilir, burada μ keyfi bir reel sayıdır. Bu eşitliği $x=0$ 'dan $x=1$ 'e kadar integre edip her iki tarafı $\mu\neq\lambda$ için $\mu-\lambda$ ile bölersek ve (4.5) başlangıç koşullarını kullanırsak,

$$\frac{\psi'\left(1,\lambda\right)\psi\left(1,\mu\right)-\psi\left(1,\lambda\right)\psi'\left(1,\mu\right)}{\mu-\lambda}-\sigma_0=\int_0^1\psi\left(x,\lambda\right)\psi\left(x,\mu\right)dx$$

bulunur. Burada $\mu\to\lambda$ iken limite geçersek ve sonuçta $\lambda=\lambda^*$ yazıp (4.9) eşitliğini göz önüne alırsak,

$$\sigma_0-\frac{\sigma_1\psi^2\left(1,\lambda^*\right)}{\left(c_1\lambda^*+d_1\right)^2}=\int_0^1\psi^2\left(x,\lambda^*\right)dx \tag{4.10}$$

elde ederiz.

Belirtelim ki, λ^* reel olduğundan (4.3) eşitsizliği,

$$\left\|\psi\right\|_c\leq c\left(1+\sqrt{\left|\lambda^*\right|}\right)\left\|\psi\right\|_2 \tag{4.11}$$

biçiminde olur.

(4.4) eşitsizliğini elde ettiğimiz yöntemi kullanarak (4.10) ve (4.11)'den,

$$\frac{\left(c_1\left|\lambda^*\right|+d_1\right)^2}{\left(1+\sqrt{\left|\lambda^*\right|}\right)^2}\leq\left|\sigma_1\right|c^2 \tag{4.12}$$

alırız. $c_1\neq 0$ olduğundan $\left|\lambda^*\right|$ yeterince büyük olduğunda (4.12) eşitsizliği doğru olmaz. Böylece lemma 4.1.2'nin ispatı tamamlandı.

4.2. PARAMETREYE BAĞLI BİR BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ve (1.1)-(1.3) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZFONKSİYONLARININ SALINIM ÖZELLİKLERİ

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının farklı uzaylarda tabanlığını incelemek için önce λ parametresine bağlı,

$$\begin{cases} -y'' + q(x)\,y = \lambda y\,, \quad 0 < x < 1 \\ y(0,\lambda) = c_0\lambda + d_0\,, \quad y'(0,\lambda) = a_0\lambda + b_0 \end{cases} \tag{4.13}$$

başlangıç değer probleminin $y(x,\lambda)$ çözümünün salınım özelliklerini bilmek gerekir [19].

Bu problemle birlikte aşağıdaki iki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\begin{cases} -y'' + q(x)\,y = \lambda y\,, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 0\,, \quad y'(1) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} -y'' + q(x)\,y = \lambda y\,, \quad 0 < x < 1 \\ (a_0\lambda + b_0)\,y(0) = (c_0\lambda + d_0)\,y'(0) \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

(4.14) sınır değer probleminin özdeğerlerini $\mu_n^{/}$ $(n = 0,1,...)$ ile gösterelim:

$$\mu_0^{/} < \mu_1^{/} < ... < \mu_n^{/} < ...$$

$c_0 \neq 0$ durumunda negatif olmayan N_0 tamsayısını,

$$\mu^{/}_{N_0-1} < -\frac{d_0}{c_0} \leq \mu^{/}_{N_0} \tag{4.16}$$

eşitsizliğiyle tespit edelim.

[13]'de ispat edilmiştir ki, (4.15) sınır değer probleminin özdeğerleri sonsuz büyük $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_n < ...)$ reel sayı dizisi oluşturur ve bununla birlikte aşağıdaki iddialar doğrudur:

A. $c_0 = 0$ ise, μ_n özdeğerine uygun $y_n(x)$ özfonksiyonunun $(0,1)$ aralığında tam n tane sıfırı vardır.

B. $c_0 \neq 0$ ise, μ_n özdeğerine uygun $y_n(x)$ özfonksiyonunun $n \leq N_0$ olduğunda $(0,1)$ aralığında tam n tane, $n > N_0$ olduğunda $(0,1)$ aralığında tam $n-1$ tane sıfırı vardır. Bununla birlikte, $\mu^{/}_{N_0-1} < -\frac{d_0}{c_0} < \mu^{/}_{N_0}$ olduğunda

$\mu_{N_0} < -\frac{d_0}{c_0} < \mu_{N_0+1}$ eşitsizliği ve $-\frac{d_0}{c_0} = \mu'_{N_0}$ olduğunda ise, $-\frac{d_0}{c_0} = \mu_{N_0+1}$ eşitliği doğrudur.

$m_0(\lambda)$ ile (4.13) başlangıç değer probleminin $y(x,\lambda)$ çözümünün $(0,1)$ aralığındaki sıfırlarının sayısını gösterelim.

Lemma 4.2.1 [19]. Aşağıdaki iddialar doğrudur:

(a) $c_0 = 0$ ve $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n]$ ise, $m_0(\lambda) = n$ dir.

(b) $c_0 \neq 0$, $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n]$ ve $n \le N_0$ ise, $m_0(\lambda) = n$ dir.

(c) $c_0 \neq 0$, $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n]$ ve $n \ge N_0 + 2$ ise, $m_0(\lambda) = n-1$ dir.

(d) $c_0 \neq 0$ ve $\lambda \in \left(\mu_{N_0}, -\frac{d_0}{c_0}\right)$ ise, $m_0(\lambda) = N_0 + 1$ dir.

(e) $c_0 \neq 0$ ve $\lambda \in \left[-\frac{d_0}{c_0}, \mu_{N_0+1}\right]$ ise, $m_0(\lambda) = N_0$ dir.

Lemma 4.2.2 [19]. Aşağıdaki iddialar doğrudur:

(a) $(-\infty, \mu_0)$, (μ_{n-1}, μ_n) $(n = 1,2,...)$ aralıklarının her birinde, $\frac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)}$ fonksiyonu λ parametresinin kesin azalan fonksiyonudur;

(b) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \frac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)} = +\infty$;

(c) $\lim\limits_{\lambda \to \mu_n - 0} \frac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)} = -\infty$, $\lim\limits_{\lambda \to \mu_n + 0} \frac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)} = +\infty$ $(n = 0,1,...)$.

Teorem 4.2.1. $c_1 = 0$ olduğunda, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $n = 1,2,...$ için (μ_{n-1}, μ_n) aralığında en az bir özdeğeri vardır. λ, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $(\mu_{n-1}, \mu_n]$ aralığındaki bir özdeğeri ise, aşağıdaki iddialar doğrudur:

(a) $c_0 = 0$ ise, $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$ ve $m_0(\lambda) = n$ dir.

(b) $c_0 \neq 0$ ve $n \le N_0$ ise, $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$ ve $m_0(\lambda) = n$ dir.

(c) $c_0 \neq 0$ ve $n \ge N_0 + 2$ ise, $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$ ve $m_0(\lambda) = n-1$ dir.

(d) $c_0 \neq 0$ ve $\lambda \in \left(\mu_{N_0}, -\dfrac{d_0}{c_0} \right)$ ise, $m_0(\lambda) = N_0 + 1$ dir.

(e) $c_0 \neq 0$ ve $\lambda \in \left[-\dfrac{d_0}{c_0}, \mu_{N_0+1} \right]$ ise, $\lambda \in \left[-\dfrac{d_0}{c_0}, \mu_{N_0+1} \right)$ ve $m_0(\lambda) = N_0$ dir.

İspat : $y(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.13) başlangıç değer probleminin çözümü olsun. Bu durumda (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri,

$$(a_1\lambda + b_1)\, y(1,\lambda) = d_1 y'(1,\lambda) \tag{4.17}$$

denkleminin kökleridir.

λ (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğeri olduğunda, $y(1,\lambda) \neq 0$ dır. Gerçekten, $y(1,\lambda) = 0$ olsaydı (4.17)'den $d_1 y'(1,\lambda) = 0$ olurdu. Öte yandan $\sigma_1 = a_1 d_1 < 0$ olduğundan $d_1 \neq 0$ dır. Demek ki, $y'(1,\lambda) = 0$ olmalıdır, yani $y(x,\lambda) \equiv 0$ $(0 \leq x \leq 1)$ olur. $y(x,\lambda)$ özfonksiyon olduğundan çelişki elde edilir. Böylece (4.17) denklemi,

$$\frac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)} = P(\lambda) \tag{4.18}$$

denklemine denktir, burada $P(\lambda) = \dfrac{a_1\lambda + b_1}{d_1}$ dir.

Lemma 4.2.2'ye göre $\dfrac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)}$ fonksiyonu $(-\infty, \mu_0)$, (μ_{n-1}, μ_n) $(n = 1,2,...)$ aralıklarının her birinde kesin azalan fonksiyondur ve

$$\lim_{\lambda \to \mu_n - 0} \frac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)} = -\infty, \quad \lim_{\lambda \to \mu_n + 0} \frac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)} = +\infty \quad (n = 0,1,...) \tag{4.19}$$

eşitlikleri doğrudur.

$P'(\lambda) = \dfrac{a_1}{d_1}$ ve $\sigma_1 = a_1 d_1 < 0$ olduğundan $P(\lambda)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında kesin azalan bir fonksiyondur. $P(\lambda)$ fonksiyonu λ parametresinin tüm değerlerinde sürekli olduğundan ve (4.19) limitlerinden (4.18) denkleminin (μ_{n-1}, μ_n) $(n = 1,2,...)$ aralıklarının her birinde en az bir kökünün olduğuna hükmedilebilir. Demek ki, $c_1 = 0$ olduğunda (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin (μ_{n-1}, μ_n) $(n = 1, 2, ...)$ aralıklarının her birinde en az bir özdeğeri vardır.

Böylece λ sayısı (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $(\mu_{n-1}, \mu_n]$ $(n = 1, 2, ...)$ aralığındaki bir özdeğeri ise, lemma 4.2.1'e göre (a)-(e) iddialarının doğruluğu elde edilir. Teorem 4.2.1 ispatlandı.

Not 4.2.1. (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $(-\infty, \mu_0)$ aralığında özdeğerlerinin varlığı hakkında kesin bir hüküm verilemez, zira $P(\lambda)$ ve $\dfrac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)}$ fonksiyonlarının her biri söz konusu aralıkta azalan fonksiyonlardır ve buna göre de (4.18) denkleminin bu aralıkta kökleri olabilir de, olmayabilir de. Gerçekten, aşağıdaki gibi üç sınır değer problemine bakalım:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0\ ,\ 0 \le x \le 1, \\ \lambda y(0) + y'(0) = 0, \\ y(1) = 0, \end{cases} \quad (1),\quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0\ ,\ 0 \le x \le 1, \\ \lambda y(0) + y'(0) = 0, \\ \lambda y(1) + y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2),\quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0\ ,\ 0 \le x \le 1, \\ \lambda y(0) + y'(0) = 0, \\ (\lambda - 1) y(1) + y'(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Kolayca gösterilebilir ki, (1) sınır değer probleminin özdeğerleri $\lambda = s^2$ $(s > 0)$ şeklindedir ve burada s,

$$\cot s = s$$

denkleminin herhangi pozitif köküdür. Bu denklemin en küçük pozitif s_0 kökü $s_0 < \dfrac{\pi}{2}$ eşitsizliğini sağlar, yani (1) sınır değer probleminin ilk μ_0 özdeğeri için $0 < \mu_0 < \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ eşitsizliği doğrudur.

$\lambda = 0$ sayısının (2) sınır değer probleminin özdeğeri olduğu açıktır. Böylece (2) sınır değer probleminin $(-\infty, \mu_0)$ aralığında özdeğeri vardır.

(3) sınır değer probleminin özdeğerleri de $\lambda = \tau^2$ $(\tau > 0)$ şeklindedir ve burada τ,

$$\cot \tau = -\tau^3$$

denkleminin herhangi pozitif kökküdür. Bu denklemin en küçük pozitif τ_0 kökü $\tau_0 > \dfrac{\pi}{2}$ eşitsizliğini sağlar, yani (3) sınır değer probleminin ilk λ_0 özdeğeri için $\lambda_0 = \tau_0^{\,2} > \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ eşitsizliği doğrudur. Böylece (3) sınır değer probleminin $(-\infty, \mu_0)$ aralığında özdeğeri yoktur.

4.3. (1.1)-(1.3) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ ve ÖZFONKSİYONLARI İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

n yeterince büyük doğal sayı, λ_n (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin (μ_{n-1}, μ_n) aralığındaki herhangi bir özdeğeri ve $y(x, \lambda_n)$ fonksiyonu bu sınır değer probleminin λ_n özdeğerine uygun özfonksiyonu olsun.

Bundan sonra her yerde $c_1 = 0$ kabul edeceğiz.

Δ ile $a_j\lambda + b_j$, $c_j\lambda + d_j$ $(j = 0,1)$ fonksiyonlarının sıfırlarının oluşturduğu kümenin en büyük elemanını işaret edelim. $P_j(\lambda) = \dfrac{c_j\lambda + d_j}{a_j\lambda + b_j}$ fonksiyonunun (Δ, ∞) aralığında işaretinin sabit olduğu açıktır. $p_j = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \operatorname{sgn} P_j(\lambda)$ ve $\widetilde{N_0}$ öyle bir doğal sayı olsun ki, $c = \max\limits_{0\le x\le 1} |q(x)|$ ve $\Delta_0 = \max\{\Delta, 2c+1\}$ olmak üzere $n \ge \widetilde{N_0}$ olduğunda $\lambda_n \ge \Delta_0$ eşitsizliği sağlansın.

Bu bölümde her yerde $n \ge \widetilde{N_0}$ olduğunu varsayacağız.

$\theta_n(x)$ fonksiyonunu,

$$\theta_n(x) = Arc\tan\frac{y(x, \lambda_n)}{y'(x, \lambda_n)}$$

veya daha açık olarak,

$$\theta_n(x) = \arg\{y'(x, \lambda_n) + iy(x, \lambda_n)\} \qquad (4.20)$$

şeklinde tanımlayalım.

(1.2) sınır koşuluna göre $\theta_n(0)$ başlangıç değerini,

$$\theta_n(0) = \arctan\frac{c_0\lambda_n + d_0}{a_0\lambda_n + b_0} + \frac{1-p_0}{2}\pi \qquad (4.21)$$

biçiminde belirtelim.

$\theta_n(x)$ fonksiyonu x'in sıfırdan farklı değerlerinde de (4.20) ile verilir ve bu durumda 2π sayısının katı öyle seçilir ki, $\theta_n(x)$ fonksiyonu (4.21) koşulunu sağlar ve x değişkeninin sürekli bir fonksiyonu olur. $y(x,\lambda_n)$ ve $y'(x,\lambda_n)$ aynı anda sıfır olmadıklarından bu seçim mümkündür.

Lemma 4.3.1 [11]. $\theta_n(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artandır ve,

$$\theta_n'(x) = \cos^2\theta_n(x) + (\lambda_n - q(x))\sin^2\theta_n(x) \qquad (4.22)$$

diferansiyel denklemini sağlar.

(4.20)'den açıktır ki, $\theta_n(x)$ fonksiyonu $y(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun sıfırlarında π'nin katı olur. Öte yandan $0 < \theta_n(0) < \pi$ olduğundan x değişkeni 0'dan 1'e arttığında $\theta_n(x)$ fonksiyonu ardışık olarak sonlu sayıda $\pi, 2\pi, ...$ değerlerini artarak alır.

$x_{n,k}$ $\left(k = \overline{1,m_n}\right)$ ile $y(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun $(0,1)$ aralığındaki sıfırlarını işaret edelim.

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının teorem 4.2.1'de ifade edilmiş salınım özelliklerine göre,

$$m_n = n - \operatorname{sgn}|c_0| \qquad (4.23)$$

olur.

Kolayca görülür ki,

$$\theta_n(1) = \arctan\frac{d_1}{a_1\lambda_n + b_1} + \pi(m_n + 1) \qquad (4.24)$$

dir.

Lemma 4.3.2 [10,11]. (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin λ_n $\left(n \ge \widetilde{N_0}\right)$ özdeğeri için,

$$\widetilde{c_1}n^2 \le \lambda_n \le \widetilde{c_2}n^2 \qquad (4.25)$$

değerlendirmesi doğrudur, burada $\widetilde{c_1}$ ve $\widetilde{c_2}$ belirli pozitif sabitlerdir.

Teorem 4.3.1. (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin λ_n özdeğeri ve uygun $y(x,\lambda_n)$ özfonksiyonu için,

$$\lambda_n = \left(\pi\left(n-\sigma\right)\right)^2 + O(1) \tag{4.26}$$

$$2^{-\frac{1}{2}} y(x,\lambda_n) = \operatorname{sgn}|c_0|\cos(n-\sigma)\pi x + \left(1-\operatorname{sgn}|c_0|\right)\sin(n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.27}$$

asimptotik formülleri doğrudur, burada

$$\sigma = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}|c_0| \tag{4.28}$$

dır.

İspat : Bu teoremin ispatını yapmak için [19] makalesindeki lemma 2.3'ün ispatında izlenen metot kullanılacaktır.

$c_0 = 0$ olsun. Bu durumda $m_n = n$ dir. Açıktır ki,

$$\theta_n\left(x_{n,k}\right) = \pi k \quad \left(1 \le k \le n\right) \tag{4.29}$$

dir. (4.22) ve lemma 4.3.2'den,

$$\frac{\theta_n'(x)}{\cos^2\theta_n(x) + \lambda_n \sin^2\theta_n(x)} = 1 + O\left(n^{-2}\right)$$

elde edilir. Bu eşitliği 0'dan $x_{n,1}$'e kadar integre edersek,

$$\int_0^{x_{n,1}} \frac{\theta_n'(x)}{\cos^2\theta_n(x) + \lambda_n \sin^2\theta_n(x)} dx = x_{n,1}\left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right)$$

bulunur. $\theta_n(x) = \varphi$ değişken değiştirmesini yaparsak (4.29)'a göre,

$$\int_{\theta_n(0)}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = x_{n,1}\left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right) \tag{4.30}$$

elde edilir.

Tamamen benzer yolla,

$$\int_{\pi n}^{\theta_n(1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = \left(1 - x_{n,n}\right)\left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right) \tag{4.31}$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = \left(x_{n,k+1} - x_{n,k}\right)\left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right) \quad \left(1 \le k \le n-1\right) \tag{4.32}$$

elde edilir.

$a \neq 0$ olduğunda $\dfrac{1}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonlarından biri $\dfrac{1}{a}\arctan\left(a\tan\varphi\right)$ şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned}\int_{\theta_n(0)}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n\sin^2\varphi} &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\arctan\left(\sqrt{\lambda_n}\tan\theta_n\left(0\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\arctan\frac{d_0\sqrt{\lambda_n}}{a_0\lambda_n + b_0} = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) = O\left(n^{-2}\right)\end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir.

[19]'da,

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} \quad \left(1 \leq k \leq n-1\right) \tag{4.34}$$

olduğu gösterilmiştir.

(4.24)'e göre kolayca,

$$\int_{\pi n}^{\theta_n(1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-2}\right) \tag{4.35}$$

elde edilir.

(4.30) ve (4.33)'ü, (4.31) ve (4.35)'i, (4.32) ve (4.34)'ü karşılaştırırsak,

$$x_{n,1} = O\left(n^{-2}\right) \tag{4.36}$$

$$1 - x_{n,n} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.37}$$

$$x_{n,k+1} - x_{n,k} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-3}\right) \quad \left(1 \leq k \leq n-1\right) \tag{4.38}$$

bulunur.

(4.38)'den,

$$x_{n,n} - x_{n,1} = \frac{\pi\left(n-1\right)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-2}\right)$$

elde edilir. (4.36), (4.37) ve son eşitlik kullanılırsa,

$$1 = \frac{\pi n}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-2}\right)$$

ve buradan da, $\sqrt{\lambda_n} = n\pi + O\left(n^{-1}\right)$ veya $\lambda_n = \left(n\pi\right)^2 + O(1)$ bulunur. $c_0 = 0$ olduğunda (4.26) ispat edildi.

$c_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda $m_n = n-1$ dir. Açık şekilde,

$$\theta_n\left(x_{n,k}\right) = \pi k \quad \left(1 \le k \le n-1\right)$$

olur. Yukarıda uygulanan yöntemlerle,

$$\int_{\theta_n(0)}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = x_{n,1}\left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right) \tag{4.39}$$

$$\int_{\pi(n-1)}^{\theta_n(1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = \left(1 - x_{n,n-1}\right)\left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right) \tag{4.40}$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = \left(x_{n,k+1} - x_{n,k}\right)\left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right) \quad \left(1 \le k \le n-2\right) \tag{4.41}$$

yazılabilir.

$p_0 = 1$ olsun. O halde, $0 < \theta_n(0) < \dfrac{\pi}{2}$ yazılabilir. Buradan yine aynı yöntemlerle,

$$\int_{\theta_n(0)}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-2}\right) \tag{4.42}$$

$$\int_{\pi(n-1)}^{\theta_n(1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-2}\right) \tag{4.43}$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \lambda_n \sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} \quad \left(1 \le k \le n-2\right) \tag{4.44}$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.39) ve (4.42)'yi, (4.40) ve (4.43)'ü, (4.41) ve (4.44)'ü karşılaştırırsak,

$$x_{n,1} = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.45}$$

$$1 - x_{n,n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.46}$$

$$x_{n,k+1} - x_{n,k} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(n^{-3}\right) \quad \left(1 \le k \le n-2\right) \tag{4.47}$$

buluruz.

(4.47)'den,

$$x_{n,n-1}-x_{n,1}=\frac{\pi(n-2)}{\sqrt{\lambda_n}}+O\left(n^{-2}\right) \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.45), (4.46) ve son eşitlik kullanılırsa,

$$1=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}}+O\left(n^{-2}\right)$$

ve buradan da, $\sqrt{\lambda_n}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+O\left(n^{-1}\right)$ veya $\lambda_n=\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2+O(1)$ bulunur.

$p_0=-1$ ise (4.42) eşitliğinin şeklinde bir değişiklik olmaz. Bu yüzden özdeğerler için elde edilen son asimptotik formül bu durum için de geçerlidir. Böylece (4.26) formülü tamamen ispatlandı.

$\psi_1(x,\mu)$ ve $\psi_2(x,\mu)$, $u''-q(x)u+\mu^2u=0$ denkleminin,

$$\begin{aligned}&\psi_1(0,\mu)=1\,,\;\; \psi_1'(0,\mu)=i\mu\\&\psi_2(0,\mu)=1\,,\;\; \psi_2'(0,\mu)=-i\mu\end{aligned} \tag{4.49}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar.

μ parametresinin yeterince büyük değerleri için,

$$\psi_j(x,\mu)=e^{\mu\omega_j x}\left(1+O\left(\mu^{-1}\right)\right)\;(j=1,2) \tag{4.50}$$

asimptotik formülleri doğrudur, burada $\omega_1=-\omega_2=i$ [1].

$y(x,\lambda_n)$ özfonksiyonunu,

$$y(x,\lambda_n)=S_n\begin{vmatrix}\psi_1(x,\mu_n) & \psi_2(x,\mu_n)\\ U\left(\psi_1(x,\mu_n),\mu_n^2\right) & U\left(\psi_2(x,\mu_n),\mu_n^2\right)\end{vmatrix} \tag{4.51}$$

şeklinde araştıracağız, burada $\mu_n=\sqrt{\lambda_n}$,

$$U\left(\psi(x,\lambda),\lambda\right)=\left(a_0\lambda+b_0\right)\psi(0,\lambda)-\left(c_0\lambda+d_0\right)\psi'(0,\lambda),$$

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}ic_0\mu^3}, & c_0\neq 0 \; ise\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}ia_0\mu^2}, & c_0=0\; ise\end{cases} \tag{4.52}$$

dir. (4.49)-(4.52) eşitlikleri ve $\mu_n = \sqrt{\lambda_n} = \pi(n-\sigma) + O(n^{-1})$ formülü kullanılarak kolayca,

$$y(x,\lambda_n) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + O(n^{-1}), & c_0 \neq 0 \ ise \\ \sqrt{2}\sin n\pi x + O(n^{-1}), & c_0 = 0 \ ise \end{cases}$$

olduğu görülür. Böylece (4.27) formülü ispatlandı.

Teorem 4.3.1 ispatlandı.

4.4. (1.1)-(1.3) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZEL SEÇİLMİŞ BİR ÖZFONKSİYONLAR SİSTEMİNİN $L_p(0,1)\,(1<p<\infty)$ UZAYINDA MİNİMALLİĞİ

Teorem 4.2.1'den dolayı, $(\mu_{n-1},\mu_n)\ (n=1,2,...)$ aralıklarının her birinde (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin en az bir özdeğeri vardır. Söz konusu aralıkların her birinden (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin herhangi bir özdeğerini seçelim ve onu $\lambda_n\ (n=1,2,...)$ ile işaret edelim. Böylece,

$$\lambda_n \in (\mu_{n-1},\mu_n)\ (n=1,2,...)$$

olur. $y_n(x)$, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin λ_n özdeğerine uygun özfonksiyonu olsun.

Varsayalım ki, $(-\infty,\mu_0)$ aralığında da (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri vardır (Bkz.: Not 4.2.1). Bu özdeğerlerden herhangi birini λ_0 ile, uygun özfonksiyonu ise $y_0(x)$ ile işaret edelim.

A_k ve $B_k\ (k=0,1,...)$ sayılarını aşağıdaki gibi tanımlayalım [20]:

$$A_k = \frac{y_k(0)\,y_k(1)}{(c_0\lambda_k + d_0)\,d_1},$$

$$B_k = -\frac{c_0 y_k'(0)\,y_k(1)}{\sigma_0 d_1}.$$

(A_k'nın tanımında $c_0\lambda_k + d_0 \neq 0$ kabul edilir.)

Lemma 4.4.1 [20]. Aşağıdaki iddialar doğrudur:

$$\operatorname{sgn} A_k = \begin{cases} (-1)^k \operatorname{sgn}(d_0 d_1), & c_0 = 0 \ \textit{ise}, \\ (-1)^{k+1} \operatorname{sgn}(c_0 d_1), & c_0 \neq 0 \ \textit{ve} \ \lambda_k \neq -\dfrac{d_0}{c_0} \ \textit{ise}, \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} B_k = (-1)^{k-1} \operatorname{sgn}(c_0 d_1) \ \left(c_0 \neq 0 \ \textit{ve} \ \lambda_k = -\frac{d_0}{c_0} \ \textit{ise} \right).$$

$\Delta_j(r,s)\ (r,s = 0,1,...;\ j = 1,2)$ sayılarını aşağıdaki gibi tanımlayalım [20]:

$$\Delta_1(r,s) = \begin{vmatrix} \dfrac{y_r(0)}{c_0\lambda_r + d_0} & \dfrac{y_s(0)}{c_0\lambda_s + d_0} \\ \dfrac{y_r(1)}{d_1} & \dfrac{y_s(1)}{d_1} \end{vmatrix} \tag{4.53}$$

$$\Delta_2(r,s) = \begin{vmatrix} -\dfrac{c_0 y_r'(0)}{\sigma_0} & \dfrac{y_s(0)}{c_0\lambda_s + d_0} \\ \dfrac{y_r(1)}{d_1} & \dfrac{y_s(1)}{d_1} \end{vmatrix} \tag{4.54}$$

($\Delta_1(r,s)$'nin tanımında $(c_0\lambda_r + d_0)(c_0\lambda_s + d_0) \neq 0$, $\Delta_2(r,s)$'nin tanımında ise $c_0\lambda_s + d_0 \neq 0$ kabul edilir.)

Lemma 4.4.2 [20]. r ve s, biri tek diğeri çift negatif olmayan herhangi iki tamsayı olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar doğrudur:

(a) $(c_0\lambda_r + d_0)(c_0\lambda_s + d_0) \neq 0$ ise, $\Delta_1(r,s) \neq 0$ dır;

(b) $c_0 \neq 0$, $\lambda_r = -\dfrac{d_0}{c_0}$ ve $\lambda_s \neq -\dfrac{d_0}{c_0}$ ise, $\Delta_2(r,s) \neq 0$ dır.

$\|\cdot\|_2$ ile $L_2(0,1)$ uzayındaki normu gösterelim. $F_j(x;l,r,s)$ $(l,r,s = 0,1,...;\ j = 1,2)$, $0 \le x \le 1$ fonksiyonları ve $\sigma_{l,j}$ $(l = 0,1,...;\ j = 1,2)$ sayıları aşağıdaki gibi tanımlansın [20]:

$$F_1(x;l,r,s)=\begin{vmatrix} y_l(x) & y_r(x) & y_s(x) \\ \dfrac{y_l(0)}{c_0\lambda_l+d_0} & \dfrac{y_r(0)}{c_0\lambda_r+d_0} & \dfrac{y_s(0)}{c_0\lambda_s+d_0} \\ \dfrac{y_l(1)}{d_1} & \dfrac{y_r(1)}{d_1} & \dfrac{y_s(1)}{d_1} \end{vmatrix}, \tag{4.55}$$

$$F_2(x;l,r,s)=\begin{vmatrix} y_l(x) & y_r(x) & y_s(x) \\ \dfrac{y_l(0)}{c_0\lambda_l+d_0} & -\dfrac{c_0y_r'(0)}{\sigma_0} & \dfrac{y_s(0)}{c_0\lambda_s+d_0} \\ \dfrac{y_l(1)}{d_1} & \dfrac{y_r(1)}{d_1} & \dfrac{y_s(1)}{d_1} \end{vmatrix}, \tag{4.56}$$

$$\sigma_{l,1}=\|y_l\|_2^2-\frac{\sigma_0 y_l^2(0)}{(c_0\lambda_l+d_0)^2}+\frac{\sigma_1 y_l^2(1)}{d_1^2}, \tag{4.57}$$

$$\sigma_{l,2}=\|y_l\|_2^2-\frac{c_0^2 y_l'^2(0)}{\sigma_0}+\frac{\sigma_1 y_l^2(1)}{d_1^2}. \tag{4.58}$$

($F_1(x;l,r,s)$'nin tanımında $(c_0\lambda_l+d_0)(c_0\lambda_r+d_0)(c_0\lambda_s+d_0)\neq 0$, $F_2(x;l,r,s)$'nin tanımında $(c_0\lambda_l+d_0)(c_0\lambda_s+d_0)\neq 0$, $\sigma_{l,1}$'in tanımında ise $c_0\lambda_l+d_0\neq 0$ olduğu kabul edilir.)

Lemma 4.4.3. Aşağıdaki iddialar doğrudur:

(a) $c_0=0$, $b_0d_0>0$, $b_1d_1<0$ ve $q(x)\geq 0$ $(0\leq x\leq 1)$ ise, $\sigma_{l,1}\neq 0$ $(l=0,1,...)$ dır;

(b) $c_0=0$, $b_0=0$, $b_1d_1<0$ ve $q(x)\geq 0$ $(0\leq x\leq 1)$ ise, $\sigma_{l,1}\neq 0$ $(l=0,1,...)$ dır;

(c) $c_0=0$, $b_0=b_1=0$, $q(x)\geq 0$ $(0\leq x\leq 1)$ ve $q(x)$ özdeş olarak sıfır değilse, $\sigma_{l,1}\neq 0$ $(l=0,1,...)$ dır;

(d) $c_0\neq 0$, $b_0c_0<0$, $a_0c_0>0$, $b_1d_1<0$, $\lambda_l\neq -\dfrac{d_0}{c_0}$ ve $q(x)\geq 0$ $(0\leq x\leq 1)$ ise, $\sigma_{l,1}\neq 0$ dır;

(e) $c_0\neq 0$, $b_0=0$, $a_0c_0>0$, $b_1d_1<0$, $\lambda_l\neq -\dfrac{d_0}{c_0}$ ve $q(x)\geq 0$ $(0\leq x\leq 1)$ ise, $\sigma_{l,1}\neq 0$ dır;

(f) $c_0 \neq 0$, $b_0 = b_1 = 0$, $a_0 c_0 > 0$, $\lambda_l \neq -\dfrac{d_0}{c_0}$, $q(x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq 1)$ ve $q(x)$ özdeş olarak sıfır değilse, $\sigma_{l,1} \neq 0$ dır;

(g) $c_0 \neq 0$, $c_0 d_0 < 0$, $b_1 d_1 < 0$, $\lambda_l = -\dfrac{d_0}{c_0}$ ve $q(x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq 1)$ ise, $\sigma_{l,2} > 0$ dır;

(h) $c_0 \neq 0$, $c_0 d_0 < 0$, $b_1 = 0$, $\lambda_l = -\dfrac{d_0}{c_0}$, $q(x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq 1)$ ve $q(x)$ özdeş olarak sıfır değilse, $\sigma_{l,2} > 0$ dır.

İspat : (1.1) diferansiyel denkleminin her iki tarafını $y(x,\lambda)$ fonksiyonu ile çarpıp 0'dan 1'e kadar integre edersek,

$$\begin{aligned} &y(0,\lambda)\,y'(0,\lambda) - y(1,\lambda)\,y'(1,\lambda) + \int_0^1 y'^2(x,\lambda)\,dx + \\ &\qquad + \int_0^1 q(x)\,y^2(x,\lambda)\,dx = \lambda \int_0^1 y^2(x,\lambda)\,dx \end{aligned} \tag{4.59}$$

elde edilir.

(a)'nın koşulları sağlansın. $c_0 = 0$ olduğundan (1.2)-(1.3) sınır koşulları,

$$y'(0) = \frac{a_0\lambda + b_0}{d_0}\,y(0), \quad y'(1) = \frac{a_1\lambda + b_1}{d_1}\,y(1) \tag{4.60}$$

koşullarına denktir, burada $\sigma_0 = a_0 d_0 < 0$ olduğundan $d_0 \neq 0$, $\sigma_1 = a_1 d_1 < 0$ olduğundan $d_1 \neq 0$ dır. (4.59) eşitliğine (4.60) koşullarını uygularsak, kolayca,

$$\begin{aligned} \lambda\left\{\int_0^1 y^2(x,\lambda)\,dx - \frac{a_0}{d_0}\,y^2(0) + \frac{a_1}{d_1}\,y^2(1)\right\} &= \frac{b_0}{d_0}\,y^2(0) - \frac{b_1}{d_1}\,y^2(1) + \\ &\quad + \int_0^1 y'^2(x,\lambda)\,dx + \int_0^1 q(x)\,y^2(x,\lambda)\,dx \end{aligned}$$

elde edilir. λ_l, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin herhangi bir özdeğeri, $y_l(x)$ bu özdeğere uygun özfonksiyon ise, son eşitlik,

$$\lambda_l \sigma_{l,1} = \frac{b_0}{d_0}\,y_l^2(0) - \frac{b_1}{d_1}\,y_l^2(1) + \int_0^1 y_l'^2(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,y_l^2(x)\,dx \tag{4.61}$$

şeklinde yazılabilir. (a)'nın koşullarına göre (4.61) eşitliğinin sağ tarafı pozitif olduğundan $\sigma_{l,1} \neq 0$ olur. (b) ve (c) iddialarının doğruluğu da (4.61)'den kolayca elde edilir.

(d)'nin koşulları sağlansın. $\lambda \neq -\dfrac{d_0}{c_0}$ olduğunda $c_0\lambda + d_0 \neq 0$ olacağından (1.2)-(1.3) sınır koşulları,

$$y'(0) = \frac{a_0\lambda + b_0}{c_0\lambda + d_0} y(0)\,, \quad y'(1) = \frac{a_1\lambda + b_1}{d_1} y(1) \tag{4.62}$$

koşullarına denktir. Öte yandan,

$$\frac{a_0\lambda + b_0}{c_0\lambda + d_0} = \frac{\sigma_0\lambda}{\left(c_0\lambda + d_0\right)^2} + \frac{a_0c_0\lambda^2 + 2b_0c_0\lambda + b_0d_0}{\left(c_0\lambda + d_0\right)^2} \tag{4.63}$$

eşitliğini yazabiliriz. (4.59) eşitliğine (4.62) koşulları uygulanır ve (4.63) de göz önüne alınırsa, kolayca,

$$\lambda\left\{\int_0^1 y^2(x,\lambda)\,dx - \frac{\sigma_0 y^2(0)}{\left(c_0\lambda + d_0\right)^2} + \frac{a_1}{d_1} y^2(1)\right\} = \frac{a_0c_0\lambda^2 + 2b_0c_0\lambda + b_0d_0}{\left(c_0\lambda + d_0\right)^2} y^2(0) -$$
$$-\frac{b_1}{d_1} y^2(1) + \int_0^1 y'^2(x,\lambda)\,dx + \int_0^1 q(x)\,y^2(x,\lambda)\,dx$$

elde edilir. λ_l (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $-\dfrac{d_0}{c_0}$ sayısından farklı herhangi bir özdeğeri, $y_l(x)$ fonksiyonu bu özdeğere uygun özfonksiyon ise, son eşitlik,

$$\lambda_l\sigma_{l,1} = \frac{a_0c_0\lambda_l^2 + 2b_0c_0\lambda_l + b_0d_0}{\left(c_0\lambda_l + d_0\right)^2} y_l^2(0) - \frac{b_1}{d_1} y_l^2(1) +$$
$$+\int_0^1 y_l'^2(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,y_l^2(x)\,dx \tag{4.64}$$

şeklinde yazılır. (d)'nin koşullarına göre (4.64) eşitliğinin sağ tarafı pozitif olduğundan $\sigma_{l,1} \neq 0$ olur. (e) ve (f) iddialarının doğruluğu da (4.64)'den kolayca elde edilir.

(g) 'nin koşuları sağlansın. $\lambda = -\dfrac{d_0}{c_0}$ olduğunda (1.2)-(1.3) sınır koşulları,

$$y(0) = 0\,, \quad y'(1) = \frac{a_1\lambda + b_1}{d_1} y(1) \tag{4.65}$$

koşullarına denktir. (4.59) eşitliğine (4.65) koşullarını uygularsak, kolayca,

$$\int_0^1 y^2(x,\lambda)dx + \frac{a_1}{d_1}y^2(1) = -\frac{c_0}{d_0}\left\{-\frac{b_1}{d_1}y^2(1) + \int_0^1 y'^2(x,\lambda)dx + \int_0^1 q(x)y^2(x,\lambda)dx\right\}$$

elde edilir. $\lambda_l = -\frac{d_0}{c_0}$ (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğeri, $y_l(x)$ fonksiyonu bu özdeğere uygun özfonksiyon ise, son eşitlik,

$$\sigma_{l,2} = -\frac{c_0^{\,2} y_l'^{\,2}(0)}{\sigma_0} - \frac{c_0}{d_0}\left\{-\frac{b_1}{d_1}y_l^{\,2}(1) + \int_0^1 y_l'^{\,2}(x)dx + \int_0^1 q(x)y_l^{\,2}(x)dx\right\} \quad (4.66)$$

şeklinde yazılır. (g)'nin koşullarına göre (4.66) eşitliğinin sağ tarafı pozitif olduğundan $\sigma_{l,2} > 0$ olur. (h) iddiasının doğruluğu da (4.66) eşitliğinden kolayca elde edilir.

Lemma 4.4.3 ispatlandı.

Teorem 4.4.1. r ve s, biri tek diğeri çift negatif olmayan iki tamsayı olsun ve aşağıdaki koşullardan biri sağlansın:

(a) $c_0 = 0$, $\sigma_{n,1} \neq 0$ $(n = 0,1,...)$;

(b) $c_0 \neq 0$, $\lambda_n \neq -\frac{d_0}{c_0}$ $(n = 0,1,...)$, $\sigma_{n,1} \neq 0$;

(c) $c_0 \neq 0$, $\lambda_l = -\frac{d_0}{c_0}$ $(l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *belirli bir sayıdır.*$)$, $l \neq r,s$, $\sigma_{n,1} \neq 0$ $(n \neq l)$, $\sigma_{l,2} \neq 0$;

(d) $c_0 \neq 0$, $\lambda_l = -\frac{d_0}{c_0}$ $(l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *belirli bir sayıdır.*$)$, $l = r$, $\sigma_{n,1} \neq 0$ $(n = 0,1,...; n \neq r,s)$.

Bu durumda (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin seçilmiş $\{y_n(x)\}$ $(n = 0,1,...; n \neq r,s)$ özfonksiyonlar sistemi $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında minimaldir.

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin seçilmiş $\{y_n(x)\}$ $(n = 0,1,...; n \neq r,s)$ özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında minimalliğini göstermek için bu sisteme biortogonal olan $\{u_n(x)\}$ $(n = 0,1,...; n \neq r,s)$ sisteminin varlığını ispatlamak yeter. Biortogonal $\{u_n(x)\}\ (n=0,1,...;n\neq r,s)$ sisteminin varlığı ve inşası, [20] makalesindeki teorem 4.1 ile tamamen aynıdır ve aşağıdaki gibi verilir:

(a) veya (b) sağlansın. O halde,

$$u_n(x)=\frac{F_1(x;n,r,s)}{\Delta_1(r,s)\sigma_{n,1}}.$$

(c) sağlansın. O halde,

$$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{F_1(x;n,r,s)}{\Delta_1(r,s)\sigma_{n,1}}, & n\neq l\ ise,\\ -\dfrac{F_2(x;r,n,s)}{\Delta_1(r,s)\sigma_{n,2}}, & n=l\ ise.\end{cases}$$

(d) sağlansın. O halde,

$$u_n(x)=\frac{F_2(x;n,r,s)}{\Delta_2(r,s)\sigma_{n,1}}.$$

4.5. (1.1)-(1.3) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN DAĞILIMI ve ÖZFONKSİYONLAR SİSTEMİNİN $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ UZAYINDA TABANLIK KOŞULLARI

$c_1=0$ olduğunda (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $(\mu_{n-1},\mu_n)\ (n=0,1,...)$ aralığından seçilmiş λ_n özdeğerine uygun $y_n(x)$ özfonksiyonu için n'nin yeterince büyük değerlerinde,

$$y_n(x)=\begin{cases}\sin n\pi x+O\left(n^{-1}\right), & c_0=0\ ise,\\ \cos\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi x+O\left(n^{-1}\right), & c_0\neq 0\ ise.\end{cases}\tag{4.67}$$

asimptotik formülleri doğrudur (teorem 4.3.1).

[20] makalesindeki sınır değer probleminin tüm özfonksiyonlarının oluşturduğu sistemden tek ve çift indisli herhangi iki özfonksiyonun atılmasıyla elde edilen özfonksiyonlar sistemi, $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ uzayında taban oluşturuyordu (bkz. [20],teorem 5.1) ve bu hüküm, seçilmiş özfonksiyonların baş kısımlarının oluşturduğu sistemin $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ uzayında taban olmasının sonucuydu.

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin seçilmiş $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ özfonksiyonlar sisteminin herhangi tek ve çift indisli elemanlarının atılmasıyla elde edilen sistem, $L_p(0,1)\,(1<p<\infty)$ uzayında minimaldir (bkz. teorem 4.4.1), fakat taban değildir. Zira bu durumda (4.67)'ye göre, $\{\sin n\pi x\}_{n=2}^{\infty}$ veya $\left\{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}_{n=2}^{\infty}$ sistemlerinin her biri $L_p(0,1)\,(1<p<\infty)$ uzayında taban oluştururdu. Bu ise çelişkidir.

Teorem 4.5.1. (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin seçilmiş $\lambda_n\ \ (n=0,1,...)$ özdeğerlerinden farklı en çok bir reel özdeğeri vardır.

İspat: Varsayalım ki, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $\lambda_n\ \ (n=0,1,...)$ özdeğerlerinden farklı λ_* ve λ^* gibi iki reel özdeğeri daha vardır. Bu özdeğerlere uygun özfonksiyonları sırasıyla $y_*(x)$ ve $y^*(x)$ ile işaret edelim.

$\{y^*(x)\}\cup\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sistemini göz önüne alalım. Basitçe ispatlanabilir ki (bkz. teorem 4.4.1), r ve s biri tek diğeri çift negatif olmayan herhangi iki tamsayı olmak üzere $\{y^*(x)\}\cup\{y_n(x)\}\ (n=0,1,...;n\neq r,s)$ sistemi, $L_p(0,1)\ \ (1<p<\infty)$ uzayında minimaldir. Öte yandan (4.67)'ye göre sonuncu sistem $c_0=0$ olduğunda $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine, $c_0\neq 0$ olduğunda ise, $\left\{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine karesel yakınsaktır. Buradan ve [20] makalesindeki teorem 5.1'in ispatında kullanılan yöntemden yararlanırsak $\{y^*(x)\}\cup\{y_n(x)\}\ \ (n=0,1,...;n\neq r,s)$ sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında tabanlığı kolayca ispatlanabilir. Aynı hükümler $\{y_*(x)\}\cup\{y_n(x)\}\ \ (n=0,1,...;n\neq r,s)$ sistemi için de geçerlidir.

Uygun biortogonal sistemlerin inşa edilmesi yöntemine göre (bkz. teorem 4.4.1), $\{y^*(x)\}\cup\{y_n(x)\}\ \ (n=0,1,...;n\neq r,s)$ ve $\{y_*(x)\}\cup\{y_n(x)\}$ $(n=0,1,...;n\neq r,s)$ sistemlerine biortogonal olan sistemler sırasıyla $\{u^*(x)\}\cup\{u_n(x)\}\ \ (n=0,1,...;n\neq r,s)$ ve $\{u_*(x)\}\cup\{u_n(x)\}\ \ (n=0,1,...;n\neq r,s)$ biçimindedir. Demek ki,

$$y_*(x)=\sum_{\substack{n=0\\ n\neq r,s}}^{\infty}(y_*,u_n)\,y_n(x)+(y_*,u^*)\,y^*(x) \tag{4.68}$$

olur. Öte yandan, $(y_*,u_n)=0$ $(n=0,1,...;n\neq r,s)$ dir. Böylece (4.68) eşitliği,

$$y_*(x)=(y_*,u^*)\,y^*(x)$$

şeklinde olur. Yani, $y_*(x)$ ve $y^*(x)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Bu ise çelişkidir.

Teorem 4.5.1 ispatlandı.

Sonuç 4.5.1. (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin seçilmiş λ_n özdeğerlerinden farklı reel özdeğeri λ^* ve bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon $y^*(x)$ ise, $\{y^*(x)\}\cup\{y_n(x)\}$ $(n=0,1,...;n\neq r,s)$ sistemi $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında tabandır. (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin seçilmiş λ_n özdeğerlerinden farklı reel özdeğeri yoksa $\{y_n(x)\}$ $(n=0,1,...;n\neq r,s)$ sistemi $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban değildir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin spektral özellikleri için elde edilen sonuçlar aşağıdaki dört aşamada verilmiştir:

1) $c_1 \neq 0$ olduğunda, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin mutlak değerce yeterince büyük özdeğerleri reel ve basittir. Böylece, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin ancak sonlu sayıda reel olmayan özdeğerlerinin olduğu elde edilir. (bkz. lemma 4.1.1 ve lemma 4.1.2). Belirtelim ki, bu özelliklerin sağlanmasındaki en büyük pay, (1.1) diferansiyel denkleminin $y = y(x,\lambda)$ çözümü için (4.3) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$c_1 = 0$ olduğunda, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin reel özdeğerlerinin sınırsız artan bir dizisinin varlığı ispatlanmıştır (bkz. teorem 4.2.1). Bu sonucun ortaya çıkmasında (4.18) denkleminin sol tarafındaki $\dfrac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)}$ fonksiyonunun lemma 4.2.2'deki özelliklerinin önemli bir payı vardır.

2) $c_1 = 0$ olduğunda, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin reel özdeğerlerine uygun özfonksiyonlarının salınım özellikleri teorem 4.2.1 ile verilmiştir. Bu özellikler lemma 4.2.1'in doğal sonuçlarıdır.

Bir sınır değer probleminin özfonksiyonlarının salınım özelliklerinin ispatlanması, bu problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik gösterimlerinin elde edilmesi ve özfonksiyonlar sisteminin farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık özelliklerinin araştırılması için gereklidir.

3) $c_1 = 0$ olduğunda, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin reel özdeğerleri ve uygun özfonksiyonları için teorem 4.3.1 ile asimptotik gösterimler elde edilmiştir. Bu formüllerin elde edilmesinde (4.20) ile tanımlı $\theta_n(x)$ fonksiyonunun ve özfonksiyonların salınım özelliklerinin önemli bir payı vardır.

Bir sınır değer probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları için verilen asimptotik formüller, özdeğerlerin dağılımı hakkında bilgi verir ve özfonksiyonları, bir fonksiyonel uzayda özellikleri iyi bilinen fonksiyonlarla karşılaştırmamızı sağlarlar. Özellikle özfonksiyonların bir fonksiyonel uzayda özellikleri iyi bilinen fonksiyonlarla karşılaştırılması, özfonksiyonların bu uzayda özelliklerinin (minimallik, ortogonallik, tamlık, tabanlık v.s.) araştırılması açısından önemlidir.

4) $c_1 = 0$ olduğunda, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin dağılımı teorem 4.5.1 ile ispatlanmış ve özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında taban olmasının koşulları verilmiştir. Böylece $c_1 = 0$ olduğunda, "(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin seçilmiş λ_n $(n = 0,1,...)$ özdeğerlerinden farklı reel özdeğeri ya yoktur ya da varsa tektir." hükmüne varılır.

Bu tezde, araştırmanın amacında belirtilen ana hedeflere sınır koşulundaki c_1 sayısının durumuna göre ulaşılmıştır. $c_1 \neq 0$ olduğunda, özdeğerlerin spektrumu (reelliği, basitliği v.s.) hakkında iki lemma verilmiştir (lemma 4.1.1 ve lemma 4.1.2). $c_1 = 0$ olduğunda, reel özdeğerlerin sınırsız artan bir dizisinin varlığı gösterilip özfonksiyonların salınım özellikleri ispatlanmış, özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilmiş ve özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında tabanlık koşulları verilmiştir.

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin spektral özelliklerinin incelenmesi bazı problemleri de yanında getirmiştir. Bu problemler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

(a) (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin reel olmayan özdeğerleri var mıdır?

(b) (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin reel özdeğerlerinin bazıları çok katlı olabilir mi?

(c) (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $c_1 \neq 0$ olduğunda reel özdeğerlerine uygun özfonksiyonlarının salınım özellikleri ile özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadeleri nasıl verilir?

(d) (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $c_1 \neq 0$ olduğunda tabanlık koşulları nelerdir?

Lemma 4.1.1'e göre, $c_1 \neq 0$ olduğunda (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin ancak sonlu sayıda reel olmayan özdeğerleri vardır. Bundan dolayı (a) sorusunu sormak ve bu soruya yanıt aramak doğaldır.

Lemma 4.1.2'ye göre, $c_1 \neq 0$ olduğunda (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin mutlak değerce yeterince büyük özdeğerleri basittir. Bundan dolayı belli bir aralıkta kalan sonlu sayıda özdeğerin basit olup olmadığına hükmedebilmek için (b) sorusunu sormak ve bu soruya yanıt aramak doğaldır.

$c_1 = 0$ olduğunda, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının salınım özellikleri ispatlanmış, özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edilmiş ve özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında tabanlık koşulları verilmiştir. $c_1 \neq 0$ olduğunda da bu özelliklerin incelenmesi için (c) ve (d) sorularını sormak ve bu sorulara yanıt aramak doğaldır.

Bu bağlamda, (1.1)-(1.3) sınır değer problemi için öngörülen (a)-(d) sorularının cevaplandırılması önerilir.

KAYNAKLAR

[1] Naimark, M.A. "Linear Differential Operators" 2nd ed., Nauka, Moskow, (1969) (in Russian); English Trans. of 1st ed., Parts I,II, Ungar, New York, (1967), (1968).

[2] Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S. "An Introduction to Spectral Theory. Selfadjoint Ordinary Differential Operators" (in Russian), Nauka, Moscow (1970); Amer. Math. Soc., Translated from Russian, (1975).

[3] Royden, H.L. "Real Analysis" The Macmillan Company, New York, 348p., (1968).

[4] Gohberg, I.C. and Krein, M.G. "Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators" American Math. Soc., Providence, Rhode Island 02904, (1969).

[5] Singer, I. "Bases in Banach Spaces I" Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1970).

[6] Walter, J. "Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition." Math.Z., Bd. 133, No:4, pp.301-312, (1973).

[7] Fulton, C.T. "Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions." Proc.Roy.Soc.Endinburg Sect.A., v.77, pp.293-308, (1977).

[8] Hinton, D.B. "An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Baundary Condition." Quart.J.Math. Oxford, Ser.(2), v.30, No:2, pp.33-42, (1979).

[9] Tikhomirov, V.V. "Sharp Estimates for the Regular Solutions of the One Dimensional Schrödinger Operator with a Spectral Parameter" Soviet Math. Dokl. 28, No:3, 722-725 (1983), Trans. from Dokl. Akad. Nauka SSSR 273, No:4, 807-810 (in Russian) (1983).

[10] Allakhverdiyev, T.I. "Investigation of Some Linear and Nonlinear Sturm-Liouville Problems with Spectral Parameter in the Boundary Conditions" Thesis of Ph.D., Baku, 106p. (in Russian) (1991).

[11] Kerimov, N.B. and Allakhverdiyev, T.I. "On a Baundary Value Problem I." Differen. Uravn., v.29, No:1, pp. 54-60 (in Russian) (1993), Trans. in Differential Equations 29, No:1, 45-50, (1993).

[12] Kerimov, N.B. and Allakhverdiyev, T.I. "On a Baundary Value Problem II." Differen. Uravn., v.29, No:6, pp. 952-960 (in Russian) (1993), Trans. in Differential Equations 29, No:6, 814-821, (1993).

[13] Binding, P.A. Browne, P.J. and Seddighi, K. "Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Depent Boundary Conditions" Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), v.37, No:1, pp.57-72, (1993).

[14] Kerimov, N.B. and Mamedov, K.R. "On One Boundary Value Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions." Siberian Math. J., v.40, No:2, (1999), Trans. from Sibirskii Mate. Zh., v.40, No:2, 325-335 (1999).

[15] Moiseev, E.I. and Kapustin, N.Y. "On the Singularities of the Root Space of One Spectral Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Condition." Dokl. Akad. Nauk 385 (1), 20-24 (in Russian) (2002), English trans. Doklady Mathematics 66 (1), 14-18, (2002).

[16] Kerimov, N.B. "A Boundary Value Problem for the Dirac System with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions." Diff. Equations, v.38, No:2, 164-174, (2002), Trans.from Diff. Uravneniya , v.38, No:2, 155-164 (2002).

[17] Kerimov, N.B.and Mukhtarov, F.S. "On the Oscillation Properties and Minimality of a System of Root Functions of a Boundary Value Problem." Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.23, No:1, Math. Mech., 109-118 (2003).

[18] Kerimov, N.B. and Mirzoev, V.S. "On the Basis Properties of One Spectral Problem with a Spectral Parameter in Boundary Conditions" Sibirsk. Math. Zh. 44, 1041-1045 (in Russian) (2003), English Trans. Siberian Math. J. 44, 813-816, (2003).

[19] Kerimov, N.B. and Poladov, R.G. "On Basisity in $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ of the System of Eigenfunctions of One Boundary Value Problem I" Proc. of Institue of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan 22, 53-64, (2005).

[20] Kerimov, N.B. and Poladov, R.G. "On Basisity in $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ of the System of Eigenfunctions of One Boundary Value Problem II" Proc. of Institue of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan 23, 65-76, (2005).

[21] Kerimov, N.B. and Aliyev, Y.N. "The Basis Property in L_p of the Boundary Value Problem Rationally Dependent on the Eigenparameter" Studia Math. 174, No:2, 201-212 (2006).

[22] Marchenkov, D.B. "Basis Property in $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ of the System of Eigenfunctions Corresponding to a Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Condition." Diff. Equations, v.42, No:6, 905-908 (2006).

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Adana'da doğdum. İlk ve orta öğretimimi Adana'da tamamladım. 2001 yılında Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladım. 2003 yılında Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne yatay geçiş yaparak 2005 yılında buradan mezun oldum. Aynı yıl Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladım.