YAKLAŞIM TEORİSİNDE BAZI EKSTREMAL PROBLEMLER

UĞUR DEĞER

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
Ekim - 2008

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

Jüri Üyesi Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ	Jüri Üyesi Prof. Dr. H. S. MUSTAFAYEV
Jüri Üyesi Prof. Dr. Nazım KERİMOV	Jüri Üyesi Doç. Dr. Khanlar MAMMADOV

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..../........./........... tarih ve ..../.................. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mahir TURHAN
Enstitü Müdürü

ÖZ

Bu tez çalışmasında belirli fonksiyonların oluşturduğu bir sınıfta, Zygmund toplamı ile yaklaşım ele alınmıştır. Özellikle, çeşitli koşulları sağlayan fonksiyonların bu sınıfı için belirli bir uzayın verilen bir metriğinde Kolmogorov-Nikol'skii probleminin çözüldüğü asimptotik formüller verilecektir.

Anahtar Kelimeler: $\overline{\psi}$-integrali, Zygmund toplamı, Fourier serisi, periyodik fonksiyon.

ABSTRACT

In this thesis we investigate the approximation by the Zygmund sums in a given class of certain functions. Especially, we get asymptotic formulas which the Kolmogorov-Nikol'skii problem is solved in a given metric of the certain space for the given class of functions which satisfy the various conditions.

Key Words: $\overline{\psi}$-integrals, Zygmund sums, Fourier series, periodic function.

TEŞEKKÜR

Akademik hayata atılmamda ve bu tezin ortaya çıkmasında her konuda desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e teşekkür ederim.

Ayrıca, 2007 yılında hayatını kaybeden, ikinci danışmanım Prof. Dr. A. I. STEPANETS'i saygıyla anar ve Ukrayna'daki çalışmam sırasında tezimle ilgili değerli fikirlerini ve yardımlarını benden esirgemediği için şükranlarımı sunarım.

Diğer yandan, başta Matematik Bölümü Başkanı Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ olmak üzere, bölümdeki tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Son olarak eğitimci kimliğiyle, hayatını öğrenme ve öğretmeye adamış olan sevgili babam Zülkif DEĞER' i saygıyla anar, emeklerinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$C[a,b]$	$[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların kümesi
C	2π -periyotlu sürekli fonksiyonların kümesi
$L(a,b)$	(a,b) üzerinde, toplanabilir fonksiyonların kümesi
L	$(0,2\pi)$ üzerinde, 2π -periyotlu toplanabilir fonksiyonların kümesi
M	2π -periyodik $h.h.h.y.$ sınırlı fonksiyonların kümesi
$\lVert f\rVert_C$	$\max\limits_t \lvert f(t)\rvert$
$\lVert f\rVert_M$	$ess\sup\limits_t \lvert f(t)\rvert$
$\lVert f\rVert_{L_p}$	$\left(\int_0^{2\pi} \lvert f(t)\rvert^p\, dt\right)^{1/p}$, $1\le p<\infty$
:=	Tanım olarak eşittir

1. GİRİŞ

Bir $f(\cdot)$ fonksiyonunun yaklaşımı için, $P_n(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, polinomlar dizisi inşa etmek gerekirse, bu durumda

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \tag{1.1}$$

serisinin n-inci mertebeden Fourier toplamı denen $S_n(f;x)$ kısmi toplamı doğal olarak incelenecektir. Yaklaşan polinomlar olarak Fourier toplamının seçimi genelde belirli anlamda en iyi ya da ideale yakın olan bir seçimdir.

Fourier seri teorisinde araştırmaların standart hedefleri olan $S_n(f;x)$ toplamları; iyi yaklaşım özelliklerine sahip olduklarından, aynı zamanda yaklaşım teorisinde de en etkili araçlardan birisi olmuştur [12]. Biliyoruz ki, Fourier seri teorisinde en önemli sonuçlardan biri Fejér teoremidir. Bu teorem göz önünde tutularak, Fourier seri teorisinde yaklaşımla ilgili olarak yapılmış olan bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir.

1.1.Teorem

f, 2π periyodik her yerde sürekli ve x noktasında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise, f nin Fourier serisi x noktasında $f(x)$ e yakınsar.

Yukarıdakine benzer bir teorem Dirichlet tarafından 1829 yılında kanıtlanmıştır. Bu teorem aralıklarda monoton ve sürekli olan bir f fonksiyonunun, süreksizliğin bir noktasında

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right]$$

olarak tanımlandığında, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin her bir x noktasında $f(x)$'e yakınsadığını göstermiştir. Yaklaşık 50 yıl sonra her sürekli fonksiyonun onun Fourier serisi ile gösterilebileceği varsayımı ortaya atılmıştır. Ancak 1876'da Du Bois-Reymond, Fourier serisi bir noktada ıraksak olan sürekli bir fonksiyonun örneğini inşa ederek bu varsayımın yanlış olduğunu ortaya koymuştur. 1965 yılında Carleson, sürekli bir fonksiyonun Fourier serisinin, ölçümü sıfır olan küme hariç her yerde yakınsak olduğunu ispatlamıştır [14].

Aslında, bu negatif sonuçlara rağmen Fourier serisinin çok basit bir yöntemi ile, bütün sürekli fonksiyonlara keyfi kesinlikte düzgün yaklaşımlar sağlanılabilirdi. Fakat bu nasıl olacaktı? Bu keşif 1900 yılında Fejér tarafından yapılmıştır. Fejér, sürekli bir fonksiyonun Fourier serisinin birinci Cesaro ortalamasının fonksiyona düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. Fejér teoremi olarak bilinen bu meşhur teorem, Fourier serisi belirli noktalarda ıraksak olan C kümesinde bile fonksiyonların varlığını ortaya koyması açısından bir dönüm noktası oluşturur. Buna göre Fejér teoreminin ortaya koyduğu sonucu göz önünde tutarak, bu tez çalışmasında A.I. Stepanets tarafından tanımlanan; bir $f \in L$ fonksiyonu için $\overline{\psi}-$integrali kavramı verilecek ve daha sonra bu sınıftan olan fonksiyonlara Zygmund toplamı ile yaklaşımın nasıl olacağı sorusuna cevap aranacaktır.

Keyfi toplanabilir çekirdekli bürünmeler ile tanımlanan fonksiyonlar sınıfı kadar iyi bilinen özel olarak Weyl-Nagy ve Sobolev sınıflarını içeren fonksiyonların genel bir sınıfı için yaklaşım teorisinin geleneksel problemlerini ele almak, genel bir yaklaşım tarzı içinde bu problemleri çözmeye imkan veren metotları tespit etmeye değerdir. Böyle bir metodun kullanılması ile elde edilen sonuçlar aynı zamanda yeni sonuçlar ortaya çıkartacaktır.

Bu yöndeki sistematik incelemeler B. Nagy, S. M. Nikols'skii, S. B. Stechkin, V. K: Dzyadyk, N.I. Akhiezer, N. P. Korneichuk, A. V. Efimov, S.A. Telyakovskii,…vb bilim insanları tarafından yapılan çalışmaların etkisi altında 1980 yılında A. I. Stepanets tarafından başlatılmıştır. Aynı yıllarda, A. I. Stepanets tarafından β ve $\psi = \psi(k)$, $k = 1, 2, ...,$ sayılarının verilen bir dizisi ile bir f fonksiyonu için (ψ, β)- türevi kavramı tanımlanmıştır. $r = 1, 2, ...,$ için periyodik bir fonksiyonun bilinen r-inci türevi $\psi(k) = k^{-r}$ ve $\beta = r$ için (ψ, β)-türevinin özel bir halidir. Aynı zamanda, Weyl ve Weyl-Nagy anlamındaki türevler de (ψ, β)-türevinin özel durumlarıdır. Genel olarak konuşmada geçen türevlerin tanımındaki $\psi(k)$ dizileri keyfi olabilir. Ancak, genel durumda sadece aşağı bükey olan ve kümesi $\mathfrak{M}$ ile gösterilen öyle dizileri göz önünde tutmak yetecektir. Bu büyük ölçüde genelliği kaybetmeksizin incelemeleri basitleştirir. Bundan başka, verilen ψ ve β için (ψ, β)-türevi olan periyodik fonksiyonların kümesi L_β^ψ ile gösterilirse, bu durumda, L bir periyot üzerinde integrallenebilen 2π-periyodik fonksiyonların kümesini göstermek üzere, aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\bigcup_{\psi\in\mathfrak{M}} L_\beta^\psi = L.$$

Bu eşitlikten L deki bütün fonksiyonların, (ψ,β)-türevine göre sınıflandırılabileceği anlaşılır. $\psi\in\mathfrak{M}$ için, tüm L_β^ψ kümelerinin büyük kısmı yalnızca trigonometrik polinomlardan meydana gelir. Bu sınıflandırma altında, her $f\in L$ fonksiyonu sadece kendi L_β^ψ kümesinde yer alır ve sadece kalan polinomlar sınıflandırılamaz (onlar bu kümelerin her birinde içerilir). Açıkça, fonksiyonların herhangi bir sınıflandırması, onun etkisini ortaya koyduğu ölçüde anlamlıdır. Yani sınıflandırma yaklaşımda belirleyici olduğu ölçüde anlamlıdır [12].

Açıkça yaklaşım teorisinin temel problemi, bu fonksiyonların kabul edilen özelliklerinin kökeni üzerinde bir fonksiyonun yaklaşım karakteristiklerinin özelliklerini ortaya koymaktır. Buradan ortaya çıkar ki, 2π-periyodik fonksiyonların yaklaşımında da; interpolasyon polinomları ile yaklaşımlar, Fourier serilerinin toplamının lineer metotları ile üretilen polinomlar ile yaklaşımlar, trigonometrik polinomlar ile en iyi yaklaşımlar gibi karekteristiklerin, bilinen Fourier serisi yakınsaklık çeşitlerini kullanmaktır. Aynı özelliğe sahip olan fonksiyonlar için ortaya koyulan bilgilerin fonksiyon sınıflarının her temsilcisi için geçerli olması gerektiğinden, aynı özellikteki fonksiyonlar bir araya getirilir. Bu durumda, fonksiyonların elde edilen bütün sınıfları için yeni problemlerin formülleştirilmesi olasılığı ortaya çıkar. Böyle problemler arasında, verilen sınıfların çeşitli genişliklerinin problemi, lineer metotlar ile yaklaşımlar, en iyi yaklaşımlar, Fourier toplamlarının sapmalarının verilen bir sınıf için üst sınırlarının özelliklerinin incelenmesi, vb. problemler ele alınabilir. Böylece, fonksiyonların sınıflanmasında elde edilen başarı öncelikle, onun temel olarak kullanılan özelliklerinin objektif seçime uygun olup olmadığına bağlıdır. Bu bakımdan göz önünde tutulan sınıflandırmalar, fonksiyonların sınıflarını belirleyen parametrelere göre, incelenen bütün yaklaşım özellikleri tam olarak ifade edildiğinden güçlü eleştirilere bile dayanabilir. Örneğin, (ψ,β)-türevleri sınırlı olan fonksiyonların sınıfında $n-1$

dereceli trigonometrik polinomlar ile en düzgün yaklaşımların üst sınırlarının mertebesi $\psi(n)$'ye eşittir.

Bir f fonksiyonu bir F fonksiyonunun (ψ,β)-türevi ise, bu durumda doğal olarak F'ye f fonksiyonunun (ψ,β)-integrali denir. Buna göre, L_β^ψ kümesi bütün $f \in L$ fonksiyonlarının (ψ,β)-integrallerinin koleksiyonudur. Açıkça, bunun temel türev veya integral kavramlarından farkı yoktur. Uzun bir zamandan beri, türev kavramı fonksiyon sınıflarının tanımında temel olmuştur. Ancak, son yıllarda yaklaşılmak istenen hedefler integraller olduğundan, integral kavramına öncelik verilmektedir.

Yukarıdakiler göz önünde tutularak bu tez çalışmasının ana konusunu (ψ,β)-integrallerinin sınıfından daha geniş bir sınıfta, bir değerli 2π-periyodik fonksiyonlara Zygmund toplamı ile yaklaşım problemi oluşturmaktadır.

3. Bölüm'de, ilk olarak periyodik fonksiyon sınıfları ve Fourier serilerinin yakınsaklığı ele alınarak; periyodik fonksiyonların sınıflandırılması, süreklilik modülünün gösteriminden $\overline{\psi}$-integrallerinin özelliklerine kadar sistematik bir şekilde verilmiştir. Daha sonra Fourier seri toplamı teorisinin genel problemi ele alınarak, $\overline{\psi}$-integrallerinin kümesinde Fourier seri toplamının lineer yöntemi ile üretilen polinomların sapmasının integral gösteriminden bahsedilmiştir. Özellikle burada tüm reel eksen üzerinde alınan integraller ile bürünmelerin kullanımı ile elde edilen integral gösterimleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca, bu bölümde bahsedilen sınıflarda Zygmund metodu ile yaklaşımla ilgili olarak daha önceden yapılmış olan çalışmaların bir özeti verilmiştir.

4. Bölüm'de, $\overline{\psi}$-integrallerinin sınıfından olan fonksiyonlara Zygmund toplamı ile yaklaşım problemi ele alınmış ve bu yaklaşım ile ilgili elde edilen sonuçlar verilmiştir.

5. Bölüm'de, bu çalışmada elde edilen sonuçların değerlendirilmesi verilerek, $\overline{\psi}$-integrallerinin sınıfında araştırılması gereken bazı problemlerden bahsedilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

L, 2π periyodik toplanabilir fonksiyonlar uzayı ve bir $f \in L$ fonksiyonunun Fourier serisi (1.1) formunda olsun. Yani, $\forall\ k = 0,1,2,\cdots$, için

$$a_k := a_k\left(f\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)\cos kt\,dt\,, \quad b_k := b_k\left(f\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)\sin kt\,dt\,.$$

Ayrıca $\overline{\psi} = \left(\psi_1, \psi_2\right)$, $\psi_1\left(k\right)$ ve $\psi_2\left(k\right)$, $k = 1,2,3,...$ sayılarından oluşan keyfi sabit sistemlerin bir ikilisi olsun. A_0 belirli bir sayı ve $\widetilde{A_k}\left(f;x\right) := a_k \sin kx - b_k \cos kx$ olmak üzere

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\psi_1\left(k\right)A_k\left(f;x\right) + \psi_2\left(k\right)\widetilde{A_k}\left(f;x\right)\Big) \tag{2.1}$$

serisini göz önünde tutalım.

(2.1) serisi bir $f\left(\cdot\right)$ fonksiyonu ve bir $\overline{\psi}$ ikilisi için belirli bir $F \in L$ fonksiyonunun Fourier serisi ise F ye f fonksiyonunun $\overline{\psi}-$integrali denir ve $F\left(\cdot\right) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}\left(f;\cdot\right)$ ile gösterilir. $L^{\overline{\psi}}$, bütün $f \in L$ fonksiyonlarının $\overline{\psi}-$integrallerinin kümesini, $L^{\overline{\psi}}S_M^0$ ise $S_M^0 := \left\{\varphi : \left\|\varphi\right\|_M = \ ess\sup\limits_{t}\left|\varphi(t)\right| \le 1\ ,\ \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt = 0\right\}$ olmak üzere, $f \in S_M^0$ fonksiyonlarının $\overline{\psi}-$integrallerinin kümesini gösterir.

$\Psi\left(x\right)$, Fourier serisi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1\left(k\right)\cos kx + \psi_2\left(k\right)\sin kx\right)$$

formuna sahip olan belirli bir fonksiyon ve $\varphi \in S_M^0$ olmak üzere, $C_\infty^{\overline{\psi}}$ sınıfları

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(x-t\right)\Psi\left(t\right)dt = \frac{a_0}{2} + \left(f^{\overline{\psi}} * \Psi\right)\left(x\right)$$

bürünmesinden oluşan bir gösterime sahiptir. Burada φ fonksiyonuna f fonksiyonunun $\overline{\psi}-$türevi denir ve $f^{\overline{\psi}}$ ile gösterilir

$$\psi_1(v)=\psi(v)\cos\frac{\beta\pi}{2} \text{ ve } \psi_2(v)=\psi(v)\sin\frac{\beta\pi}{2} \text{ alınırsa, } C_{\infty}^{\overline{\psi}} \text{ sınıfları } C_{\beta,\infty}^{\psi}$$

sınıfları ile çakışır. Son yazılan ifadelerde de $\psi(v)=v^{-r}$ alınırsa, $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ sınıfları Weil-Nagy sınıfı denilen, $W_{\beta,\infty}^{r}$, $r>0$, sınıfları ile çakışır.

$$Z_n^s(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^s\right)A_k(f;x) \qquad , \ s>0$$

formuna sahip olan polinomlara Zygmund toplamı denir. Zygmund toplamı bütün $s>0$ için Zygmund tarafından tanımlanan bir toplamdır [1]. Bu toplamda $s=1$ alınırsa, bu durumda oluşan polinoma (1.1) serisinin Fejér toplamı denir.

Bu tez çalışmasında amacımız $\psi_1(\cdot)$ ve $\psi_2(\cdot)$ fonksiyonlarının çeşitli koşulları altında $\mathfrak{N}=C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ alındığında

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{N},Z_n^s(f;x)\right)_C:=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\left\|f(x)-Z_n^s(f;x)\right\|_C \tag{2.2}$$

değeri için asimptotik eşitliğin elde edilmesidir.

Farklı fonksiyon sınıflarında, (2.2) değeri birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Zygmund toplamı ile ilgili W_r^r ve $W_r^r H_\omega$, $r>0$, sınıfları üzerinde (2.2) değeri için kesin sonuçlar A. Zygmund tarafından ortaya konulmuştur [2].

Zygmund tarafından yapılan incelemeler daha sonra B. Nagy [3] ve S. A. Telyakovskii [4,5] tarafından devam ettirilmiştir. Telyakovskii $r>0,\ s>0$ ve $\beta\in\mathbb{R}$ olmak üzere, W_β^r sınıflarında (2.2) değeri için kesin sonuçlar elde etmiştir. Telyakovskii tarafından elde edilen sonuçlar Nagy'nin elde ettiği sonuçları içermektedir.

$W_\beta^r H_\omega$ sınıflarında Zygmund toplamı ile yaklaşımda (2.2) değeri için kesin sonuçlar A.V. Efimov tarafından elde edilmiştir [6].

$C_{\beta,\infty}^{\psi}$ sınıflarında ise (2.2) değeri için değerlendirmeler D. N. Bushev [7] ve A.I. Stepanets [8] tarafından yapılmıştır.

$C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ sınıfında Zygmund toplamı ile yaklaşımı, $\psi_1(\cdot)$ ve $\psi_2(\cdot)$ fonksiyonlarının çeşitli koşulları altında ilk olarak A. S. Fedorenko ele almıştır [9,10].

$C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ sınıfında (2.2) değeri, yukarı ya da aşağı bükey olan $g_i(v) = v^s \psi_i(v)$, $i = 1,2$, fonksiyonlarına bağlıdır. Bu fonksiyonlar için aşağıdaki durumlar mümkündür:

a. $g_i(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v) = \infty$ ile aşağı bükey,

b. $g_i(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v) = c > 0$ ile aşağı bükey,

c. $g_i(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v) = 0$ ile aşağı bükey, (2.3)

d. $g_i(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v) = c > 0$ ile yukarı bükey,

e. $g_i(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v) = \infty$ ile yukarı bükey, $i = 1,2$.

Dikkat edilmelidir ki, b)-d) durumları $s > 0$ iken, a) durumu ise $s > 1$ olduğunda mümkündür. $\mathfrak{M}$, $v \geq 1$ için $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$ ile aşağı bükey olan sürekli fonksiyonların kümesini ve $\mathfrak{M}'$ kümeside

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty$$

koşulunu sağlayan $\mathfrak{M}$ kümesinin alt kümesini göstersin [11, Cpt IV]. A. S. Fedorenko, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ ($-\psi_1 \in \mathfrak{M}$) ve $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ ($-\psi_2 \in \mathfrak{M}'$) fonksiyonları için b)-d) durumlarına göre (2.2) değeri için kesin asimptotik eşitlikler elde etmiştir. Bu tez çalışmasında $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ ($-\psi_1 \in \mathfrak{M}$) ve $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ ($-\psi_2 \in \mathfrak{M}'$) olmak üzere a), d) ve e) durumları incelenmiş ve bu durumlarda (2.2) değeri için kesin asimptotik eşitlikler elde edilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. TEMEL KAVRAMLAR

3.1.1. $f(x)$ ve $g(x)$ reel eksen üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsun. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi$ integrali varsa, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının bürünmesi

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ çarpanı seçime bağlıdır. Bürünme ile ilgili çalışmalarda, bu çarpan bürünmenin özelliklerini etkilemediğinden genelde göz önünde bulundurulmaz. Bürünme ile ilgili bazı örnekler aşağıdaki gibidir [15]:

3.1. Örnek $f(x) = \cos x$ ve $g(x) = \exp(-a|x|)$, $a > 0$, fonksiyonlarının bürünmesi tanıma göre,

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x-\xi)\, e^{-a|\xi|} d\xi =$$

$$= 2\cos x \int_{0}^{\infty} \cos\xi\, e^{-a\xi} d\xi = \frac{2a\cos x}{\left(1+a^2\right)}$$

olacaktır.

3.2. Örnek $\chi_{[a,b]}(x)$,

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & a \le x \le b \\ 0, & diğer \end{cases}$$

ile tanımlanan $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığının karakteristik fonksiyonu olmak üzere $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonlarının bürünmesi

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(x-\xi)\, \xi^2 d\xi = \int_{a}^{b} \xi^2 d\xi = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$$

dir.

$f(x)$ ve $g(x)$ reel eksen üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsun. α ve β sabit sayılar olmak üzere, bürünme aşağıdaki cebirsel özelliklere sahiptir:

i. $f * g = g * f\,(Değişme\ Özelliği)$

ii. $f*(g*h)=(f*g)*h\big(Birleşme\ Özelliği\big)$

iii. $(\alpha f+\beta g)*h=\alpha(f*h)+\beta(g*h)\ \big(Dağılma\ Özelliği\big)$

iv. $f*\sqrt{2\pi}\delta=f=\sqrt{2\pi}\delta*f\ \big(Birim\ Dönüşüm\big)$

Burada, bu özelliklerin ispatına girilmeyecektir.

3.1.2.

Analizde ve uygulamalı matematikte, bir dizinin indeksi sonsuza yaklaşırken o dizinin davranışının belirlenmesi veya bir fonksiyonun parametrelerinden birinin özel bir değere yaklaşırken o fonksiyonun davranışının belirlenmesi hakkındaki problemlerle sık sık karşılaşılır. Matematiğin bu tip problemlerini inceleyen dalına *asimptotikler* denir.

Buna göre,

$$\log n!\sim\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{2}\log 2\pi \text{ (Stirling formülü)} \tag{3.1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\log n \text{ (Harmonik sayılar)} \tag{3.2}$$

ve

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\sin\frac{1}{2}t}dt\sim\frac{4}{\pi^2}\log n \text{ (Lebesgue Sabiti)} \tag{3.3}$$

gibi örnekler bu konunun ana kısmını oluşturmaktadır. Buradaki $\sim$ işareti $n\to\infty$ iken sağ taraf ile sol tarafın bölümünün 1 e yaklaşması anlamında kullanılır. (3.1)-(3.3) ifadelerindeki gibi formüllere *asimptotik formüller* veya *asimptotik eşitlikler* denir [16].

$\sim, o$ ve O Sembolleri

$x\to\infty$ iken bilinen bir $\phi(x)$ fonksiyonuna göre araştırılan bir $f(x)$ fonksiyonunun davranışını anlatmak için Bachmann ve Landau'ya göre bilinen $\sim, o$ ve O sembolleri kullanılır. İlk olarak x in reel bir değer olduğunu kabul edelim. Sonsuzda $\phi(x)$ fonksiyonu sıfıra, sonsuza veya diğer davranışlara sahip olabilir [17]. Buna göre,

i. $f(x)/\phi(x) \to 1$ ise,

$$f(x) \sim \phi(x) \qquad (x \to \infty)$$

ya da kısacası belirsizlik olmadığında $f \sim \phi$ ile gösterilir ve "f, ϕ ye asimptotiktir" veya "ϕ, f'ye bir asimptotik yaklaşımdır" şeklinde okunur.

ii. $f(x)/\phi(x) \to 0$ ise,

$$f(x) = o\{\phi(x)\} \qquad (x \to \infty)$$

ya da kısacası $f = o(\phi)$ ile gösterilir ve "f, ϕ'den daha küçük mertebedendir" şeklinde okunur.

iii. $|f(x)/\phi(x)|$ sınırlı ise,

$$f(x) = O\{\phi(x)\} \qquad (x \to \infty)$$

ya da $f = O(\phi)$ ile gösterilir ve "f, ϕ'yi aşmayan mertebedendir" şeklinde okunur.

Bu tanımların özel durumları olan $f = o(1)\ (x \to \infty)$; $x \to \infty$ iken f nin sıfıra yaklaştığı anlamında ve $f = O(1)\ (x \to \infty)$ ise, $x \to \infty$ iken $|f|$ nin sınırlı olduğu anlamındadır.

$\phi(x)$ fonksiyonunun reel ve pozitif olmadığı durumda, bazı yazarlar tanımı verirken modül işaretini kullanır. Bu durumda Tanım (ii)-(iii), $f(x) = o(|\phi(x)|)$ ve $f(x) = O(|\phi(x)|)$ şeklinde verilir.

Örnek olarak aşağıdakiler verilebilir:

$$(x+1)^2 \sim x^2, \qquad \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \sinh x = O\left(e^x\right)$$

3.1.3.

$[a,b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için birinci mertebeden süreklilik modülü veya basit olarak süreklilik modülü $u \in [0, b-a]$ olmak üzere

$$\omega(u) = \omega(u; f; [a,b]) = \sup_{\substack{a \le x \le b-h \\ 0 \le h \le u}} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x_2 - x_1| \le u \\ x_1, x_2 \in [a,b]}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

eşitliği ile tanımlanır.

Bu tanıma göre, sabit her bir $u \in [0, b-a]$ için bir f fonksiyonunun $\omega(u; f; [a,b])$ süreklilik modülü, $[a,b]$ aralığında olan u uzunluğundaki keyfi bir parçada fonksiyonun maksimal salınımının genişliğini gösterir.

Buna göre,

$$|f(x+h) - f(x)| \le \omega(h), \qquad x,\ x+h \in [a,b];$$
$$|f(x_2) - f(x_1)| \le \omega(|x_2 - x_1|), \qquad x_1, x_2 \in [a,b].$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Bu tanım fonksiyon $(-\infty, \infty)$ aralığında düzgün sürekli ise yine geçerlidir. Bununla ilgili bazı örnekler aşağıdaki gibidir [18]:

3.3. Örnek $x \in (-\infty, \infty)$ için $f(x) = Ax + B$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $u \ge 0$ için,

$$\omega(u) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \le h \le u}} |A(x+h) + B - Ax - B| = \sup_{0 \le h \le u} |Ah| = |A|u.$$

3.4. Örnek

$$f(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x \le 1 \\ 1 & ,1 \le x \le 2 \\ x-1 & ,x \ge 2 \end{cases} \text{ olmak üzere } \omega(u) = \begin{cases} u & ,0 \le u \le 2 \\ 2 & ,2 \le u \le 3 \\ u-1 & ,u \ge 3 \end{cases} \text{ olacaktır.}$$

3.5. Örnek $x \in (-\infty, \infty)$ için $f(x) = \sin x$ olsun. Herhangi bir $u \ge 0$ için

$$\omega(u) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \le h \le u}} |\sin(x+h) - \sin x| = 2 \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \le h \le u}} \left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right|$$

$$= 2 \sup_{0 \le h \le u} \left|\sin\frac{h}{2}\right| = \begin{cases} 2\sin\dfrac{u}{2} & ,u \le \pi \\ 2 & ,u \ge \pi \end{cases}$$

Süreklilik Modülünün özellikleri aşağıdaki gibidir.

i. $\omega(0) = 0$

ii. $\omega(u)$, $[0, b-a]$ üzerinde azalmayan bir fonksiyondur.

iii. $\omega(u)$, $[0, b-a]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

iv. $\omega(u)$ yarı toplamsal bir fonksiyondur. Yani herhangi bir $u_1 \ge 0$ ve $u_2 \ge 0$ için

$$\omega(u_1+u_2)\leq\omega(u_1)+\omega(u_2)\,,$$

özellikleri sağlanır.

Bir f fonksiyonu $[0,b-a]$ aralığı üzerinde bu dört özelliğe sahipse, f fonksiyonunun $\omega(u;f,[0,b-a])$ süreklilik modülü $f(u)$ ile çakışır. Yani $\omega(u;f,[0,b-a])=f(u)$ olacaktır [11]. Bununla ilgili bilinen bazı örnekler aşağıda verilmiştir:

3.6. Örnek $K>0$ sabit bir sayı ve $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $t\geq 0$ için Kt^{α} formundaki bütün fonksiyonlar sürekliliğin modülüdür.

3.7. Örnek $0<\alpha\leq 1$ için,

$$\omega(u)=\begin{cases}0 & ,u=0\\ u^{\alpha} & ,u\in\left(0,e^{-1/\alpha}\right)\\ \dfrac{1}{\alpha e} & ,u\geq e^{-1/\alpha}\end{cases}$$

sürekliliğin bir modülüdür.

$\omega(u)$ süreklilik modülünün yarı toplamsallık özelliğinden herhangi bir $n\in\mathbb{N}$ için

$$\omega(nu)\leq n\omega(u)\,,$$

ve keyfi $\lambda>0$, $(\lambda+1)u\in[0,b-a]$ için

$$\omega(\lambda u)\leq(\lambda+1)\,\omega(u)$$

olduğu kolayca elde edilir [11].

3.1.4. $x>0$ olmak üzere,

$$\operatorname{si}x=-\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

integraline *sine integrali* denir. Bu integral $k\in\mathbb{N}$ olmak üzere, her $((k-1)\pi,k\pi)$ aralığında

$$x_k=(k-1/2)\pi+\gamma_k,\quad 0<\gamma_k<\pi/6$$

eşitliğini sağlayan tek bir x_k sıfırına sahiptir.

$x>0$ olmak üzere,

$$\operatorname{ci} x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$$

integraline *cosine integrali* denir. Bu integral $k = 0,1,\ldots$ olmak üzere, her $(k\pi,(k+1)\pi)$ aralığında

$$x_k = k\pi + \gamma_k, \quad 0 < \gamma_k < \pi/6$$

eşitliğini sağlayan tek bir x_k sıfırına sahiptir [11].

sine ve *cosine integralleri* ile ilgili ayrıntılı bilgi [13] de bulunabilir.

3.2. TOPLANABİLİR FONKSİYONLAR KÜMESİ

Bu bölümde verilen tanımlar, önermeler ve teoremlerin geneli A.I. Stepanets tarafından yazılan “Methods of Approximation Theory” adlı monografiden alınmıştır.

3.2.1. $(0,2\pi)$ üzerinde, 2π-periyodik toplanabilir fonksiyonların kümesi $L(0,2\pi)$ olsun. $L(0,2\pi)$’nin alt kümeleri olan temel fonksiyonel uzaylar aşağıdaki gibidir [11]:

1. C, $\|f\|_C := \max\limits_t |f(t)|$ normu ile tüm eksen üzerinde sürekli 2π-periyodik $f(t)$ fonksiyonlarının uzayını
2. M, $\|f\|_M := ess\sup\limits_t |f(t)|$ normu ile 2π-periyodik *h.h.h.y.* sınırlı $f(t)$ fonksiyonlarının uzayını
3. L_p, $1 \le p < \infty$, $\|f\|_{L_p} := \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$ normu ile $(0,2\pi)$ üzerinde p-inci kuvvetten toplanabilir 2π-periyodik $f(t)$ fonksiyonlarının uzayını gösterir.

Gösterim olarak bundan sonra $\|f\|_{L_p}$ yerine $\|f\|_p$ ve $\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} = \|f\|_M$ eşitliğini göz önünde tutarak, $\|f\|_M$ yerine $\|f\|_\infty$ alınacaktır. Buradan anlaşılır ki M uzayı yapısal olarak L_∞ uzayı ile aynıdır. Açıktır ki, herhangi p, p' sayıları için $1 < p < p' < \infty$ olmak üzere,

$$C \subset L_\infty \subset L_{p'} \subset L_p \subset L_1$$

sağlanır [19, syf. 205]. Bu çalışmada özellikle L_∞ uzayı önemli bir yere sahip olduğundan $L_\infty(E)$ uzayı daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

3.1.Tanım

f, $m(E) > 0$ ile bir E kümesi üzerinde ölçülebilir, reel değerli bir fonksiyon olsun. E üzerinde *h.h.h.y.* $|f(x)| \le k$ olacak şekilde bir k reel sayısı varsa, bu k sayısına f fonksiyonu için *esaslı sınırdır* denir.

Bir f fonksiyonu bir esaslı sınıra sahip ise, f fonksiyonuna *esaslı sınırlıdır* denir. Başka bir deyişle f, E üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonu ölçümü sıfır olan küme hariç sınırlı ise, f ye esaslı sınırlıdır denir. E üzerinde f nin esaslı supremumu

$$ess\sup\left|f(x)\right| = \inf\left\{k : h.h.h.y.\ \left|f(x)\right| \le k\right\}$$

ya da buna denk olan

$$ess\sup\left|f(x)\right| = \inf\left\{k : m\left(\left\{x \in E : \left|f(x)\right| > k\right\}\right) = 0\right\}$$

ile tanımlanır. Buna göre $L_\infty(E)$ uzayı, E üzerinde tanımlı esaslı sınıra sahip olan bütün ölçülebilir fonksiyonlar sınıfıdır ve bu fonksiyonlar sınıfı

$$L_\infty(E) = \left\{f : ess\sup\left|f\right| < \infty\right\}$$

ile gösterilir [19].

3.8.Örnek

E üzerinde sınırlı her fonksiyon $L_\infty(E)$ uzayındandır.

3.9.Örnek

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q}' \\ \infty & , x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ olmak üzere, $f \in L_\infty[a,b]$ dir.

3.1.Lemma [19]

$f \in L_\infty[a,b]$ olsun. Bu durumda,

a) E üzerinde $h.h.h.y.\ \left|f(x)\right| \le \left\|f\right\|_\infty$

b) $\left\|f\right\|_\infty = \sup\left\{k : m\left(\left\{x \in E : \left|f(x)\right| \ge k\right\}\right) \ne 0\right\}$.

3.1.Teorem

$m(E) < \infty$ ile E ölçülebilir bir küme olsun. Bu durumda her bir $p, 1 \le p < \infty$, sayısı için $L_\infty(E) \subset L_p(E)$ dir. Ayrıca $f \in L_\infty(E)$ ise $\left\|f\right\|_\infty = \lim_{p \to \infty}\left\|f\right\|_p$ [19].

3.2.2. X , C veya L_p, $1 \le p \le \infty$, uzaylarından birini göstersin. X den olan $f(\cdot)$ fonksiyonlarının en basit sınıflandırması aşağıdaki gibidir [11]: ρS_X, X de

$$\rho S_X = \{ f : \|f\|_X \le \rho \}$$

ile ρ, $\rho > 0$, yarıçaplı bir topu göstersin. Bu durumda ρ nun her bir değeri ρS_X topuna ait olan fonksiyonların belirli bir kümesi ile eşleştirilir. Böylece, X uzayı ρS_X kümelerine ayrıştırılır. Açıktır ki, $0 < \rho < \rho'$ ilişkisi ile verilen herhangi bir ρ ve ρ' için $\rho S_X \subset \rho' S_X$.

3.3. DİFERANSİYELLENEBİLİR FONKSİYONLAR SINIFI

A.I. Stepanets tarafından yapılan fonksiyonların sınıflandırılması fikri, B. Nagy, S.M. Nikol'skii, V. K. Dzyadyk, N.P. Korneichuk, S. B. Stechkin, ve diğer matematikçilerin yapmış olduğu araştırmaların etkisi altında ortaya çıkmıştır [12]. Bu yönde elde edilmiş olan ilk sonuçlar 1983 yılında Kiev'de Yaklaşım Teorisi Üzerine Uluslararası Konferansta sunulmuştur. Şimdiye kadar diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfı için daha önceden ortaya çıkarılan yaklaşım teorisinin neredeyse bütün problemleri yeni sınıflarda da çözülür. Elde edilen sonuçlar, kesirli Weil türevleri ile tanımlanan fonksiyonlar sınıfı için önceden bilinen sonuçlar ile aynı kesinliktedir. Yaklaşımlar üzerine sonuçlar, sınıfları belirleyen parametrelere göre formülleştirilir. Bu parametreler, diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfı için iyi bilinen nitelikleri ortaya koyar ve yeni etkiler ortaya çıkarır. Bu sonuçların bir kısmı [11] de verilmiştir.

Buna göre, bu bölümde tez çalışmasının temelini oluşturan fonksiyon sınıfları verilecektir.

3.3.1. $H_\omega[a,b]$ ve H_ω Sınıfları

3.3.1.1. $C[a,b]$, $[a,b]$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi ve $\omega = \omega(t)$ $[0,b-a]$ üzerinde tanımlanan sürekliliğin keyfi sabit bir modülü olsun. $f \in C[a,b]$ olmak üzere, $\forall t \in [0,b-a]$ için f nin süreklilik modülü

$$\omega(f,t) \le \omega(t)$$

koşulunu sağlarsa, f $H_\omega[a,b]$ sınıfındandır denir. Başka bir deyişle;

$$f \in H_\omega[a,b] \Leftrightarrow \forall t_1, t_2 \in [a,b] \text{ için } \left|f(t_1) - f(t_2)\right| \le \omega(|t_1 - t_2|).$$

K pozitif sabit bir sayı olmak üzere, $\omega(t) = \mathrm{K}t^\alpha$ $, 0 < \alpha \le 1$, alınırsa $H_\omega[a,b]$ sınıfına α-mertebeden Hölder sınıfı denir. Bu durumda $H_\omega[a,b] = \mathrm{K}\,H_\alpha[a,b] = \mathrm{K}\,Lip\alpha$ yazılır. $\alpha = 1$ ise $\mathrm{K}\,H_1[a,b]$ sınıfı $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olan, yani *h.h.h.y.* $\left|f'(x)\right| < \mathrm{K}$, fonksiyonlar sınıfı ile çakışır. Buna göre, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $H_1 \subset H_\alpha \subset C \subset H_\omega$ bağıntısı vardır [11].

3.3.1.2. 3.3.1.1. deki ifadenin benzeri 2π periyotlu sürekli fonksiyonlar uzayı olan C içinde yapılabilir. Buna göre $\omega(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde tanımlanan süreklilik modülü ve $f \in C$ olmak üzere, $\forall\ t \ge 0$ için f nin süreklilik modülü

$$\omega(f,t) \le \omega(t) \quad (\omega(f,t) \le \mathrm{K}t^\alpha)$$

koşulunu sağlarsa, f, H_ω $(\mathrm{K}\,H_\alpha)$ sınıfındandır denir. $\alpha = 1$ ise, $\mathrm{K}H_1$ sınıfı 2π periyotlu mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı ile çakışır.

3.3.2. L_p Uzaylarındaki Süreklilik Modülü: H_{ω_p} Sınıfı

$1 \le p < \infty$ olmak üzere bir $f \in L_p$ fonksiyonunun L_p uzayında süreklilik modülü $0 \le t < \infty$ olmak üzere,

$$\omega_p(t) = \omega_p(f,t) = \sup_{|h|\le t} \left\| f(\cdot + h) - f(\cdot) \right\|_p$$

fonksiyonudur.

$\omega(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde tanımlanan süreklilik modülü ve $f \in L_p$ olmak üzere $\forall\ t \ge 0$ için f nin süreklilik modülü

$$\omega_p(f,t) \le \omega(t) \quad (\omega(f,t) \le \mathrm{K}t^\alpha)$$

koşulunu sağlarsa, f, H_{ω_p} sınıfındandır denir. Başka bir deyişle,

$$f \in H_{\omega_p} \Leftrightarrow \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ için } \left\| f(\cdot + t_1) - f(\cdot + t_2) \right\|_p \le \omega_p(|t_1 - t_2|).$$

3.3.3. Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar Sınıfı

3.3.3.1. A mutlak sürekli fonksiyonlar kümesi olsun. $f \in L(0,2\pi)$ olmak üzere, f fonksiyonu $r \in \mathbb{N}$ için $(r-1)$-inci mertebeye kadar mutlak sürekli türevlere sahip ise f fonksiyonu A^r sınıfındandır denir. $\mathfrak{N}$, 3.3.1.-3.3.2. de gösterilen sınıflardan biri olmak üzere, $r \in \mathbb{N}$ için $f \in A^r$ ve $f^r \in \mathfrak{N}$ ise f, $A^r\mathfrak{N}$ sınıfındandır denir. Örneğin $A^r S_M := \left\{ f : f \in A^r \;\; ve \;\; h.h.h.y. \left| f^r(\cdot) \right| \le 1 \right\}$ ile ifade edilir ve bu sınıf genellikle W^r ile gösterilir. S. M. Nikols'skii tarafından literatüre giren $A^r H_\omega := \left\{ f : f \in A^r \;\; ve \;\; f^r \in H_\omega \right\}$ fonksiyon kümesi, r-inci türevi H_ω sınıfından olan 2π periyotlu fonksiyonlar sınıfını gösterir ve genellikle $A^r H_\omega$ yerine $W^r H_\omega$ gösterimi kullanılır. Özel $\mathfrak{N}$ sınıfları ile olan birleşimlerde A^r yerine W^r yazılır.

3.3.3.2.

$$L^0 = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0 \,,\; f \in L(0,2\pi) \right\} \text{ ve } a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

olmak üzere, $r \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2} \right) dt; \;\; x \in \mathbb{R},\; \varphi \in L^0 \qquad (3.4)$$

eşitliği ile gösterilebilen $f \in L(0,2\pi)$ fonksiyonlarının kümesi $\overline{A}^r$ ile gösterilir [11].

3.1. Önerme $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere, A^r kümesi, $f \in L(0,2\pi)$ fonksiyonlarının $\overline{A}^r$ kümesi ile çakışır [11, Chp III].

$\overline{A}^r = A^r$ olması, A^r(ya da $\overline{A}^r$) kümesi üzerinde tanımlanan $r \in \mathbb{N}$ mertebeden D^r diferansiyel operatörünün her bir $f \in A^r$ fonksiyonunu bir $\varphi \in L^0$ fonksiyonu ile birleştiren bir operatör olarak da tanımlanmasını sağlar. Bu yaklaşım aşağıdaki gibi r, $r > 0$, nin kesirli değerleri için diferansiyel operatörü genişletmeye izin verir.

(3.4) ifadesindeki seri herhangi bir $r>0$ ve $\varphi\in L^0$ için bir anlama sahiptir. Sabit $r>0$ için J_r^r ile $S[f]$ in (3.4) ün sağ tarafı ile çakıştığı $f\in L(0,2\pi)$ fonksiyonlarının kümesi gösterilir ve ona $\varphi\in L^0$ fonksiyonlarının r-inci periyodik integrallerinin kümesi denir. J_r^r kümesi üzerinde, D_r^r operatörü

$$S[f]=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)dt \tag{3.5}$$

bağıntısı ile bir $f\in J_r^r$ fonksiyonunu bir $\varphi\in L^0$ fonksiyonu ile birleştiren operatör olarak tanımlanır. Böylece herhangi bir $r>0$ için D_r^r diferansiyel operatörü tanımlanabilir.

Bu durumda, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonuna, $f(\cdot)$ fonksiyonunun r-inci Weil türevi denir ve $\varphi(\cdot)=D_r^r(f)=f_r^r(\cdot)$ gösterimi kullanılır.

3.3.3.3. J_r^r kümesi $f(\cdot)$ fonksiyonlarının yanı sıra ölçümü sıfır olan keyfi bir küme üzerinde $f(\cdot)$ fonksiyonundan farklı bütün fonksiyonları içerir. Böylece, genel konuşmada $r\in\mathbb{N}$ için $A^r\subset J_r^r$ dir. (3.5) deki seri yakınsak ise J_r^r kümesinin bir elemanı gibi görülen bir f fonksiyonu olarak onun toplamı alınır. Bu durumda $r\in\mathbb{N}$ için $A^r=J_r^r$, $D_r^r=D^r$ ve buradan $f_r^r(\cdot)=f^r(\cdot)$ olacaktır.

Weil anlamında diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfı, kısmi anlamda diferansiyellenebilir fonksiyonların sınıfları ile benzer olarak tanımlanabilir. $f\in J_r^r$ ve bundan başka $f_r^r\in\mathfrak{N}$ ise, bu durumda f fonksiyonu $J_r^r\mathfrak{N}$ sınıfındandır denir. $\mathfrak{N}$, fonksiyonların özel bir sınıfı ise, 3.3.3.1. de olduğu gibi $J_r^r\mathfrak{N}=W_r^r\mathfrak{N}$ ile gösterilir. Örneğin, $W_r^rH_\omega$, $f_r^r\in H_\omega$ olduğu f fonksiyonlarının sınıfıdır. Bundan başka, $W_r^rS_M$ sınıfı, hemen hemen her yerde $\left|f_r^r(\cdot)\right|\le 1$ sağlayan f fonksiyonlarının sınıfını gösterir. Bu son sınıf aynı zamanda W_r^r ile gösterilir. Açıktır ki, $r\in\mathbb{N}$ için $W_r^r\mathfrak{N}$ sınıfları alt bölüm 3.3.3.1. de gösterilen $W^r\mathfrak{N}$ sınıfları ile çakışır. Böylece, $r\ge 1$ için $f\in J_r^r$ ise, bu fonksiyon en az mutlak sürekli bir fonksiyondur. Fakat $r\in(0,1)$ ise $f(\cdot)$ fonksiyonunun J_r^r sınıfına ait olması, onun sıradan sürekliliğini bile garanti edemez. J_r^r fonksiyon sınıfı hakkında daha ayrıntılı bilgi [11, Sect.7-8] de bulunmaktadır.

3.3.4. Eşlenik Fonksiyonlar ve Sınıfları

$f \in L(0,2\pi)$ ve bilindiği gibi

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \right) \tag{3.6}$$

onun Fourier serisi olsun. $z = e^{ix}$ birim çember üzerinde, $a_k(f)$ ve $b_k(f)$, (3.6) serisindeki katsayılar olmak üzere,

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f) + ib_k(f) \right) z^k \tag{3.7}$$

kuvvet serisini göz önünde tutalım. (3.6) serisi, (3.7) serisinin reel kısmıdır.

$$\tilde{S}[f] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx \right) \tag{3.8}$$

serisi ise (3.7) serisinin sanal kısmıdır. Buna göre, bu seriye (3.6) serisine eşlenik olan bir seri denir. Dikkat edilmelidir ki $\tilde{S}[f]$ de serbest terim yoktur. Böylece, $S\left[\tilde{f}\right] = \tilde{S}[f]$ koşulunu sağlayan $\tilde{f} \in L(0,2\pi)$ fonksiyonuna $f(\cdot)$ ye basit eşlenik ya da trigonometrik olarak eşlenik olan fonksiyon denir. $f(\cdot)$ ve $\tilde{f}(\cdot)$ fonksiyonları integralin esas değeri anlamında, yani

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, ctg\frac{t}{2}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) f(x+t)\, ctg\frac{t}{2}\,dt \tag{3.9}$$

anlamında

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, ctg\frac{t}{2}\,dt$$

eşitliği ile birbirine bağlıdır.

$\tilde{f}(\cdot)$ fonksiyonunun varlığı problemi $S[f], S\left[\tilde{f}\right]$ ve $\tilde{S}[f]$ arasındaki ilişkiye bağlıdır [11].

3.2. Teorem

(3.9) daki limit sonlu ise $\tilde{f}(x)$ var ve $\tilde{S}[f]$ serisi $\tilde{f}(x)$ fonksiyonuna yakınsar [11].

Daha ayrıntılı bilgi [20] ve [21] kaynaklarında bulunabilir.

3.3.4.1. Eşlenik fonksiyonlar sınıfı aşağıdaki kurala göre oluşturulur: $\mathfrak{N}$, 2π periyodik fonksiyonların bir sınıfı ise, bu durumda $\widetilde{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{N}$ sınıfındaki fonksiyonlara eşlenik $\tilde{f}(\cdot)$ fonksiyonlarının sınıfını gösterir. Böylece, $\tilde{H}_\omega$, H_ω sınıfındaki fonksiyonlara eşlenik olan fonksiyonların kümesini gösterir. Benzer mantık diğer fonksiyon sınıfları içinde yapılır.

$f \in J_r^r$ ise bu fonksiyonun Fourier serisi (3.5) formuna sahiptir. Buna göre $\tilde{f} \in L(0,2\pi)$ ise $\varphi \in L^0$ olmak üzere $S\left[\tilde{f}\right] = \tilde{S}[f]$ ve (3.8) eşitliğini göz önünde tutarak,

$$S\left[\tilde{f}\right] = \tilde{S}[f] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\cos\left(kt - \frac{r+1}{2}\pi\right)dt \tag{3.10}$$

olacaktır. Buna göre $\tilde{J}_r^r$, Fourier serisi (3.10) formuna sahip fonksiyonların kümesidir. Bu $\widetilde{W_r^r\mathfrak{N}}$ sınıflarının, $\varphi \in \mathfrak{N}$ olmak üzere, Fourier serisi (3.10) formuna sahip fonksiyonlar sınıfı ile çakıştığı anlamına gelir. Böylece, (3.10) bağıntısına göre, L^0 da $\tilde{J}_r^r := J_{r+1}^r$ yi eşleyen bir $\tilde{D}_r^r := D_{r+1}^r$ operatörü ele alınırsa, bu durumda $\widetilde{W_r^r\mathfrak{N}} := W_{r+1}^r\mathfrak{N}$ sınıfları $D_{r+1}^r f := f_{r+1}^r \in \mathfrak{N}$ sağlayan $f(\cdot)$ fonksiyonlarının kümesi olarak da karakterize edilebilir.

3.3.5. Weil-Nagy Sınıfları

Sabit $r > 1$ ve $\beta \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere, Fourier serisi

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)dt = \tag{3.11}$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \cos\frac{(\beta-r)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)dt +$$

$$+\sin\frac{(\beta-r)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\cos\left(kt - \frac{r+1}{2}\pi\right)dt \tag{3.12}$$

biçiminde gösterilen $f \in L(0,2\pi)$ fonksiyonlarının kümesi J_β^r ile gösterilir. Burada $\varphi \in L^0$ dır. Ayrıca (3.11) eşitliğine göre, J_β^r den L^0 a giden bir D_β^r operatörü tanımlamak uygun olacaktır. Açıktır ki, $\beta = r + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, J_β^r kümesi 3.3.3.2. alt bölümde ele alınan J_r^r kümesi ile çakışır. $\beta = r + 1 + 2k$ için 3.3.4.1. altbölümde bahsedilen J_β^r ve J_{r+1}^r kümelerini oluşturan fonksiyonlar sadece sabit terimler ile birbirinden farklı olabilir. β nın diğer değerleri için J_β^r kümesindeki fonksiyonlar sırayla J_r^r ve J_{r+1}^r kümelerine ait olan eşlenik fonksiyonların bir çiftinin lineer kombinasyonlarıdır.

J_β^r kümeleri ilk olarak Nagy tarafından göz önünde tutulmuştur. Bu yüzden, (3.11) ayrışımında ki $\varphi(\cdot)$ fonksiyonuna Weil-Nagy (r,β) türevi denir ve bazen $f_\beta^r(\cdot)$ ile gösterilir öyle ki $f_\beta^r = D_\beta^r f$ şeklindedir. Kolayca görülür ki,

$$S\left[f_\beta^r\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\left(a_k(f)\cos\left(kx - \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \qquad (3.13)$$

3.3.5.1. J_β^r kümesi (3.13) eşitliği ile de ifade edilebilir. Yani; J_β^r kümesi, Fourier serisi (3.13) ifadesindeki seri biçiminde olan bazı toplanabilir $f(\cdot)$ fonksiyonlarından meydana gelir. Bunu onaylamak için (3.11) eşitliğinde $\varphi(\cdot)$ için, (3.13) ayrışımını kullanmak ve bazı elemanter dönüşümleri gerçekleştirmek yeterlidir. Böylece, herhangi bir $r > 0$ ve $\beta \in (-\infty, \infty)$

$$J_\beta^r = \left\{ f(\cdot) : D_\beta^r f = f_\beta^r(\cdot) \in L^0 \right\} \qquad (3.14)$$

olur. 3.3.3.3. altbölümde olduğu gibi, (3.11) deki seri yakınsak ise, J_β^r kümesinin bir elemanı olan bir f fonksiyonu gibi onun toplamı alınır.

Weil-Nagy diferansiyellenebilir fonksiyonlardan oluşan sınıflar bilinen yöntemler ile tanımlanır. $f \in J_\beta^r$ ve $f_\beta^r \in \mathfrak{N}$ ise f, $J_\beta^r\mathfrak{N}$ sınıfına aittir denir. 3.3.3.3. altbölümdeki gibi $\mathfrak{N}$ fonksiyonların özel sınıflarından biri olmak üzere, $J_\beta^r\mathfrak{N} = W_\beta^r\mathfrak{N}$ olarak alınacaktır. Açıktır ki, $\beta = r + 2k$ için $W_\beta^r\mathfrak{N} = W_r^r\mathfrak{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, ve $\beta = r + 1 + 2k$ için $W_\beta^r\mathfrak{N} = W_{r+1}^r\mathfrak{N} = \widetilde{W_r^r\mathfrak{N}}$.

3.3.6. $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ Sınıfları

Diferansiyel operatörlerin ardı ardına daha genel durumunu ele alarak, (D^r, D_r^r ve sonra D_β^r) fonksiyonlar sınıfını gittikçe daha geniş olarak sınıflandırabiliriz. Üstelik $r \in \mathbb{N}$ için $W_r^r \mathfrak{N} = W^r \mathfrak{N}$ ve $\beta = r$ için $W_\beta^r \mathfrak{N} = W_r^r \mathfrak{N}$ anlamında bir sıra vardır. Ayrıca, ele alınan bu genel durum, verilen bir $f(\cdot)$ fonksiyonu için bu fonksiyonu içeren en dar kümeyi göstermeyi de mümkün kılar. Böylece bu sınıflandırma, fonksiyonun yaklaşım problemini çalışmak için farklı özellikleri kullanmamıza izin verir [11].

Bu amaç ile diferansiyel operatörlerin başka bir genellemesini göz önünde tutalım. Biçimsel olarak, bu genişleme $k = 1, 2, \ldots$ için $\psi(k)$ doğal değişkenli keyfi bir fonksiyon olmak üzere, $\psi(k)$ çarpanı ile (3.11) ve (3.13) eşitliklerindeki k^{-r} çarpanının yer değiştirmesine indirgenir. Bu işlem temelde, fonksiyonların belirli parametrelerinin sabit değerleri için $W_\beta^r \mathfrak{N}$ sınıfları ile çakışan periyodik fonksiyonların sınıflarını ele alır ve bilinen fonksiyon sınıflarına göre tanımlanamayan fonksiyonların özelliklerinin göz önünde tutulmasına izin verir.

3.3.6.1. $f \in L(0, 2\pi)$ ve $S[f]$ bu fonksiyonun Fourier serisi olsun. Ayrıca, $\psi(k)$ doğal değişkenli keyfi bir fonksiyon ve $\beta \in (-\infty, \infty)$ ile sabit bir reel sayı olsun. Kabul edelim ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right). \tag{3.15}$$

serisi, $L(0, 2\pi)$ deki bazı fonksiyonların Fourier serisidir. Bu fonksiyon $f_\beta^\psi(\cdot)$ ile gösterilir ve bu fonksiyona bir $f(\cdot)$ fonksiyonunun (ψ, β) türevi denir. Bu koşulu sağlayan fonksiyonların kümesi L_β^ψ ile gösterilir.

$f \in L_\beta^\psi$ ise, bu durumda Fourier serisinin özelliği ve elemanter dönüşümler ile

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x-t) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt \tag{3.16}$$

elde edilir. Diğer yandan, $\varphi \in L^0$ olmak üzere, Fourier serisi

$$S[f]=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt \qquad (3.17)$$

formuna sahip olan her $f(\cdot)$ fonksiyonu L_β^ψ ya aittir [11-Chpt. III]. Böylece, L_β^ψ kümesi $\varphi\in L^0$ ile Fourier serisi (3.17) formuna sahip olan $L(0,2\pi)$ deki fonksiyonların $\overline{L}_\beta^\psi$ kümesi ile çakışır. Bu bağlantıda, bir $f\in L(0,2\pi)$ fonksiyonunun Fourier serisi (3.17) formuna sahip ve $\varphi\in L^0$ ise, $\varphi(\cdot)$ ye $f(\cdot)$ nin (ψ,β) türevi denir. O halde, (3.17) bağıntısına göre L_β^ψ yı L^0 a götüren operatör D_β^ψ ile gösterilir öyle ki, $D_\beta^\psi f=f_\beta^\psi$.

Açıktır ki, $r>0$ için $\psi(k)=k^{-r}$ alınırsa, $L_\beta^\psi=J_\beta^\psi$ olur. (3.16) daki seri yakınsak ve L_β^ψ kümesinin bir elemanı olarak onun toplamını alırsak, $\beta=r\in\mathbb{N}$ için, $L_\beta^\psi=A^r$.

$\mathfrak{N}$, $L(0,2\pi)$ deki fonksiyonların bir alt kümesi olsun. $f\in L_\beta^\psi$ ve $f_\beta^\psi\in\mathfrak{N}$ ise, bu durumda $f(\cdot)$ fonksiyonu $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ sınıfına aittir denir. Böylece, her bir ψ fonksiyonu, $\beta\in\mathbb{R}$ sayısı ve $\mathfrak{N}$ kümesi bir $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ sınıfına karşılık getirilir.

3.3.7. $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$ Sınıfları

C_β^ψ, sürekli $f\in L_\beta^\psi$ fonksiyonlarının alt kümesini gösterir. Ayrıca, $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$ sınıfları $C_\beta^\psi\mathfrak{N}:=\left\{f: f\in C_\beta^\psi \ ve \ f_\beta^\psi\in\mathfrak{N}\right\}$ ile tanımlanan fonksiyonlar sınıfıdır.

C_β^ψ kümeleri $\psi(k)$ fonksiyonu, k nın herhangi bir kuvvetinden daha hızlı sıfıra azaldığı durumda göz önünde tutulur. Yani $\forall r\in\mathbb{R}$ için

$$\lim_{k\to\infty}k^r\psi(k)=0. \qquad (3.18)$$

Bu durumda, (3.16) isteğe göre pek çok kez diferansiyellenebilir. Dolayısıyla düzgün yakınsak seri elde edilir. Buradan ortaya çıkar ki, (3.18) koşulu altında C_β^ψ kümeleri ve buradan $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$ sınıfları sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonlardan meydana gelir.

Keyfi pozitif α ve r sayıları ile $\psi(k)=\psi_{\alpha,r}(k)=\exp(-\alpha k^r)$ fonksiyonları (3.18) koşulunu sağlayan fonksiyonlardır.

3.3.8. $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ Sınıfları

L_{β}^{ψ} kümelerinin ve $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ sınıflarının tanımında, β parametresi $\mathbb{R}$ deki sabit bir değer olarak alınmıştı. Şimdi, doğal değerli $\psi(k)$ ve $\bar{\beta}=\bar{\beta}(k):=\beta_k$, $k\in\mathbb{N}$, fonksiyonlarının ikisi ile belirlenen $L_{\bar{\beta}}^{\psi}$ kümeleri ve $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ sınıflarını ele alalım. Bu sınıfların tanımlanması fikri, (3.15) ifadesindeki β sayısının β_k sayıları ile yer değiştirmesine dayanır. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta_k\pi}{2}\right)+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta_k\pi}{2}\right)\right) \tag{3.19}$$

serisi, $L(0,2\pi)$ den olan bir $f_{\bar{\beta}}^{\psi}$ fonksiyonunun Fourier serisi ise, (3.6) koşulunu sağlayan bir $f\in L(0,2\pi)$ fonksiyonu $L_{\bar{\beta}}^{\psi}$ kümesine aittir denir.

Bununla beraber $f\in L_{\bar{\beta}}^{\psi}$ ve $f_{\bar{\beta}}^{\psi}\in\mathfrak{N}$ ise, $f(\cdot)$, $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ sınıfına aittir denir. Açıkça, $\forall k\in\mathbb{N}$ için $\beta_k=\beta$ ise, bu durumda $L_{\bar{\beta}}^{\psi}=L_{\beta}^{\psi}$ ve buradan $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}=L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ olacaktır.

3.2. Önerme

$L_{\bar{\beta}}^{\psi}$ kümesi, $\varphi\in L^0$ olmak üzere, Fourier serisi

$$S[f]=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right)dt, \tag{3.20}$$

formuna sahip olan $L(0,2\pi)$ deki fonksiyonların $\overline{L}_{\bar{\beta}}^{\psi}$ kümesi ile çakışır [11].

Gerçektende, $f\in L_{\bar{\beta}}^{\psi}$ için (3.16) bağıntısının bir benzeri kolayca elde edilebilir.

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{\bar{\beta}}^{\psi}(x-t)\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right)dt=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f;x)=S[f] \tag{3.21}$$

Buradan, $L^{\psi}_{\beta} \subset \overline{L^{\psi}_{\beta}}$ olacaktır. Aynı zamanda, (3.20) eşitliği $f(\cdot)$ için elde edilirse; bu durumda,

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \psi(k)\big(a_k(\varphi)\cos(\beta_k\pi/2) - b_k(\varphi)\sin(\beta_k\pi/2)\big) \\ b_k(f) &= \psi(k)\big(a_k(\varphi)\sin(\beta_k\pi/2) + b_k(\varphi)\cos(\beta_k\pi/2)\big) \end{aligned} \tag{3.22}$$

olacaktır. Böylece,

$$\begin{aligned} a_k(\varphi) &= \frac{1}{\psi(k)}\big(a_k(f)\cos(\beta_k\pi/2) + b_k(f)\sin(\beta_k\pi/2)\big) \\ b_k(\varphi) &= \frac{1}{\psi(k)}\big(b_k(f)\cos(\beta_k\pi/2) - a_k(f)\sin(\beta_k\pi/2)\big). \end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. Buda $s(\varphi)$ serisinin (3.19) formuna sahip olduğunu ortaya koyar. Buradan, $f \in L^{\psi}_{\beta}$, yani $L^{\psi}_{\beta} = \overline{L^{\psi}_{\beta}}$.

$f(\cdot)$, (3.20) koşulunu sağlarsa, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonuna $f(\cdot)$ fonksiyonunun bir $(\psi, \overline{\beta})$- türevi denir ve (3.20) formülüne göre, L^{ψ}_{β} dan L^{0} a giden operatör $D^{\psi}_{\overline{\beta}}$ ile gösterilir, öyle ki $D^{\psi}_{\overline{\beta}} f = f^{\psi}_{\overline{\beta}}$ dir.

3.3.8.1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kx - \frac{\beta_k\pi}{2}\right) \tag{3.24}$$

serisi bir $D_{\psi,\overline{\beta}}(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi ve $\varphi(\cdot)$ hemen hemen her yerde $f^{\psi}_{\overline{\beta}}(\cdot)$ ile çakışan L^{0} ait bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki integral gösterimi hemen hemen bütün x noktalarında $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ kümesinin elemanları için geçerlidir [11]:

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) D_{\psi,\overline{\beta}}(t)\,dt\,. \tag{3.25}$$

$C^{\psi}_{\overline{\beta}}$ ile $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ dan olan sürekli fonksiyonların alt kümesi ve $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ ile $f^{\psi}_{\overline{\beta}} \in \mathfrak{N}$ olan $f \in C^{\psi}_{\overline{\beta}}$ fonksiyonlarının sınıfı gösterilir.

(3.22) eşitliklerine göre, (3.18) koşulu öyle ψ fonksiyonu için $f \in C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ fonksiyonlarının sonsuz diferansiyellenebilir olduğunu garanti eder.

3.3.9. Periyodik Fonksiyonların $\overline{\psi}$ İntegralleri

Altbölüm 3.3.8 den biliyoruz ki, (3.20) eşitliğindeki φ fonksiyonuna f fonksiyonunun $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$-türevi denir. Buradan, doğal olarak f fonksiyonuna da φ nin $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$- integrali denir. Bu durumda, $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ kümesi, bütün $\varphi \in L^0$ fonksiyonlarının $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$- integrallerinin kümesidir. Bu notasyonu göz önünde tutarak aşağıdaki tanımlar verilecektir [11].

3.2. Tanım

L, 2π periyodik integrallenebilen $f \in L$ fonksiyonlarının uzayı ve

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \tag{3.26}$$

bir f fonksiyonunun Fourier serisi olsun. Ayrıca, $\overline{\psi} = (\psi_1,\psi_2)$, $k = 1,2,\ldots$ olmak üzere $\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ sayılarının keyfi sabit sistemlerinin bir ikilisi olsun. A_0 belirli bir reel sayı ve $\widetilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$ olmak üzere,

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f;x) + \psi_1(k)\widetilde{A}_k(f;x) \tag{3.27}$$

serisini göz önünde tutalım. (3.27) serisi verilen bir $f(\cdot)$ ve $\overline{\psi}$ ikilisi için belirli bir $F \in L$ fonksiyonunun Fourier serisi ise, bu durumda F 'ye $\overline{\psi}$ ikilisi ile üretilen f fonksiyonunun integrali ya da basit olarak f fonksiyonunun $\overline{\psi}$-integrali denir ve $F(\cdot) := \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ ile gösterilir.

Bütün $f \in L$ fonksiyonlarının $\overline{\psi}$-integrallerinin kümesi $L^{\overline{\psi}}$ ile gösterilir. $\mathfrak{N}$, L nin alt kümesi olmak üzere, $f \in \mathfrak{N}$ fonksiyonlarının $\overline{\psi}$-integrallerinin kümesi $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ ile gösterilir.

3.3. Tanım

$f \in L$ olmak üzere, (3.26) serisi f nin Fourier serisi olsun ve bir $\overline{\psi} = (\psi_1,\psi_2)$ ikilisi

$$\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0 \quad , \; k \in \mathbb{N} \tag{3.28}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f;x)-\frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\tilde{A}_k(f;x)\right) \tag{3.29}$$

serisi bir $\varphi \in L$ fonksiyonunun Fourier serisi ise, bu durumda φ fonksiyonuna f fonksiyonunun $\overline{\psi}$-türevi denir ve $\varphi(\cdot) =: D^{\overline{\psi}}(f;\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ yazılır. $L^{\overline{\psi}}$ ile, $\overline{\psi}$-türevi olan $f \in L$ fonksiyonlarının kümesi gösterilir. $\mathfrak{N} \in L$ olmak üzere, $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ kümesi $f \in L^{\overline{\psi}}$ ve $f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{N}$ olan fonksiyonlar kümesini gösterir.

3.1. Not: $\overline{\psi}$-integralinin tanımından da görüleceği gibi, bir fonksiyon bir $F(\cdot)$ $\overline{\psi}$-integraline sahipse, ölçümü sıfır olan herhangi bir küme üzerinde $F(\cdot)$ den farklı herhangi bir $F_1(\cdot)$ fonksiyonu da onun $\overline{\psi}$-integralidir. Diğer taraftan, verilen bir $f(\cdot)$ fonksiyonunun herhangi bir $F(\cdot)$ $\overline{\psi}$-integrali, ölçüsü sıfır olan keyfi bir küme üzerinde $f(\cdot)$ den farklı olan herhangi bir $f_1(\cdot)$ fonksiyonunun $\overline{\psi}$-integralidir.

3.3.9.1. Bu bölümde $\overline{\psi}$-integrallleri ve $\overline{\psi}$-türevleri arasındaki ilişki verilecektir.

3.3. Önerme

$f \in L$ ve (3.26) serisi f'nin Fourier serisi olmak üzere, (3.28) koşulu sağlanırsa, bu durumda $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x)$ fonksiyonu bir $\overline{\psi}$-türevine sahiptir ve

$$D^{\overline{\psi}}\left(\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)\right) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2} \tag{3.30}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $f \in L^{\overline{\psi}}$ ve (3.26) serisi f'nin Fourier serisi ise bu durumda, $D^{\overline{\psi}}(f;x)$ fonksiyonu bir $\overline{\psi}$-integraline sahiptir ve A_0 belirli bir sabit olmak üzere,

$$\mathcal{J}^{\overline{\psi}}\left(D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)\right) = f(\cdot) + A_0 \tag{3.31}$$

eşitliği doğrudur [11, syf 45].

3.2. Not: (3.30) eşitliğine göre, (3.28) koşulu sağlansa da sağlanmasa da $f(x)-\frac{a_0}{2}$ fonksiyonu bir $F(x)=\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x)$ fonksiyonunun $\overline{\psi}$-türevi olacaktır. Böylece, daima $D^{\overline{\psi}}\left(\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)\right)=f(\cdot)-\frac{a_0}{2}$ olduğu kabul edilir. Yani, $F^{\overline{\psi}}(\cdot):=f(\cdot)-\frac{a_0}{2}$.

(3.30) ve (3.31) bağıntıları bizi aşağıdaki önermeye götürür.

3.4. Önerme

(3.28) koşulunu sağlayan herhangi bir $\overline{\psi}$ ikilisi için

$$\overline{L}^{\overline{\psi}}=L^{\overline{\psi}} \tag{3.32}$$

eşitliği sağlanır [11].

Böylece (3.28) koşulu sağlanırsa, bütün $f\in L$ fonksiyonlarının $\overline{\psi}$-integrallerinin kümesi, $\overline{\psi}$-türevlerine sahip olan fonksiyonların kümesi ile çakışır.

3.3.9.2.

3.4. Tanım

Bir $\overline{\psi}$ ikilisi için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1(k)\cos kx+\psi_2(k)\sin kx\right) \tag{3.33}$$

serisi belirli bir $\Psi(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi ise, bu durumda $\overline{\psi}\in\mathcal{L}$ denir [11].

3.5. Önerme

$\overline{\psi}\in\mathcal{L}$ ise, her $f\in L$ fonksiyonunun $\overline{\psi}$-integrali var ve hemen hemen her yerde

$$\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x)=A_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\Psi(t)\,dt \tag{3.34}$$

eşitliği sağlanır [11].

Böylece $L^{\overline{\psi}}$ kümesinin elemanları $f\in L$ olmak üzere $A_0+f*\Psi$ bürünmesi ile gösterilebilen fonksiyonlardır. Özellikle aşağıdaki önerme burada önemli bir yere sahiptir.

3.6. Önerme

$\bar{\psi} \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $f \in L^{\bar{\psi}}$ fonksiyonu için, a_0 bir $f(\cdot)$ fonksiyonunun Fourier serisinin serbest terimi olmak üzere, *h.h.h.y.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(x-t)\Psi(t)\,dt = \frac{a_0}{2} + \left(f^{\bar{\psi}} * \Psi\right)(x) \tag{3.35}$$

eşitliği geçerlidir [11, Chpt. IV].

$\bar{\psi}$- türevleri kavramı, belirli parametrelerin ilgili değerleri ile diğerinin varlığını gösteren öyle türevlerden birinin var olması anlamında 3.3.8. alt bölüm de bahsedilen $\left(\psi, \bar{\beta}\right)$-türevlerinin kavramı ile çakışır. Bu, (3.29) ve (3.19) bağıntılarını kullanarak $\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ verildiğinde, verilen $\psi(k)$ ve $\beta(k)$ ya göre

$$\begin{cases} \dfrac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} = \dfrac{1}{\psi(k)} \cos \beta_k \dfrac{\pi}{2} \quad , \\[2ex] \dfrac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} = \dfrac{1}{\psi(k)} \sin \beta_k \dfrac{\pi}{2} \quad , \end{cases} \qquad \bar{\psi}^2(k) \neq 0,\ \psi(k) \neq 0 \tag{3.36}$$

sisteminin $\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ fonksiyonlarına göre çözülebilir olduğunu göstererek kanıtlanır. $\psi(k)$ ve $\beta(k)$ verilirse,

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta_k \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta_k \frac{\pi}{2} \tag{3.37}$$

seçeriz. Açıktır ki, bu değerler (3.36) sistemini sağlar. $\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ ikilisi, verilirse, bu durumda gerekli olan değerler

$$\psi(k) = \bar{\psi}(k),\ \cos \beta_k \frac{\pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}(k)},\ \sin \beta_k \frac{\pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}(k)} \tag{3.38}$$

eşitlikleri ile belirlenir. Böylece aşağıdaki önerme doğrudur.

3.7. Önerme

$\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ bileşenleri (3.37) eşitliklerine göre seçilirse, bir $f \in L$ fonksiyonunun herhangi bir $\left(\psi, \bar{\beta}\right)$-türevi aynı zamanda bir $\bar{\psi}$- türevidir. Ayrıca $\psi(k)$ ve $\beta(k)$ parametreleri (3.38) bağıntıları ile belirlenirse, herhangi bir $\bar{\psi}$-

türevi bir $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$-türevidir. Her iki durumda da, aşağıdaki eşitlikler elde edilir: $L^0 = \left\{ \varphi \in L : \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0 \right\}$ olmak üzere,

$$\overline{L}^{\overline{\psi}} = L_{\overline{\beta}}^{\psi}, \quad \overline{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N} \qquad \forall \mathfrak{N} \subset L^0 \tag{3.39}$$

sağlanır [11].

Dikkat edilmelidir ki,

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta\frac{\pi}{2}, \psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta\frac{\pi}{2} \tag{3.40}$$

seçilirse, (3.37) bağıntıları, bir $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$- türevinin aynı zamanda bir $\overline{\psi}$- türevi olduğunu gösterir. Bir $f(\cdot)$ fonksiyonunun bilinen r-inci ($r>0$) $f_r^{(r)}(\cdot)$ Weil türevi $\psi(k) = k^{-r}$ ve $\beta = r$ koşulu altında bir (ψ,β)-türevidir. Sonuç olarak,

$$\psi_1(k) = k^{-r}\cos r\frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = k^{-r}\sin r\frac{\pi}{2}$$

seçilirse, (3.40) ifadesine göre, r-inci ($r>0$) $f_r^{(r)}(\cdot)$ Weil türevi $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ ile çakışır.

(3.28) koşulunda,

$$\varphi_1(k) = \psi_1(k)\Big/\overline{\psi}^2(k) \quad , \quad \varphi_2(k) = \psi_2(k)\Big/\overline{\psi}^2(k) \tag{3.41}$$

olmak üzere, $\overline{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2)$ ikilisi seçilirse, $\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ değerleri

$$\psi_1(k) = \varphi_1(k)\Big/\overline{\Phi}^2(k) \quad , \quad \psi_2(k) = -\varphi_2(k)\Big/\overline{\Phi}^2(k) \quad ,$$

$$\overline{\Phi}^2(k) = \varphi_1^2(k) + \varphi_2^2(k). \tag{3.42}$$

eşitlikleri ile belirlenir.

Bu durumda, $f \in L^0$ için, (3.29) serisi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_1(k)A_k(f;x) + \varphi_2(k)\tilde{A}_k(f;x)\right), \tag{3.43}$$

formuna sahiptir ve (3.27) serisi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_1(k)}{\overline{\Phi}^2(k)}A_k(f;x) - \frac{\varphi_2(k)}{\overline{\Phi}^2(k)}\tilde{A}_k(f;x)\right) \tag{3.44}$$

formuna sahip olur. Bu, (3.28) koşulu sağlanırsa $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ integralinin L^0 kümesi üzerinde $D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ türevi olarak ele alınabileceğini ve $D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ türevinin de $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ integrali olarak ele alınabileceğini gösterir. Diğer bir deyişle, genel konuşmada, bu kavramlardan sadece birinin göz önünde tutulması yeterlidir. Örnek olarak, sadece $\overline{\psi}$ - integralinin kavramı ya da bu kavramların adların yer değiştirmesi verilebilir.

Bununla birlikte bir fonksiyonun özelliklerinin onun integrasyonundan sonra daha iyi ve diferansiyellenmesinden sonra daha kötü olduğu bakış açısı göz önünde tutulursa, bu kavramları birbirinden ayırmak uygun olacaktır. Bu gerçek göz önünde tutularak $\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ dizilerinin sonsuz küçük ve sonuç olarak (3.41) deki $\varphi_1(k)$ ve $\varphi_2(k)$ dizilerinin sonsuz büyük olduğu kabul edilecektir. Buradan bir $f \in L$ fonksiyonu için bir $\overline{\psi}$-integralinin varlığı kolayca ortaya koyulabilir. Aynı zamanda, verilen bir fonksiyonun $\overline{\psi}$-türevinin varlığı bu fonksiyon üzerine önemli şartlar yükler: Bu durumda $\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ fonksiyonları daha hızlı azalır ve $\overline{\psi}$-türevine sahip olan bir fonksiyon için $L^{\overline{\psi}}\left(\overline{L}^{\overline{\psi}}\right)$ kümesinin elde edilmesi daha zordur.

Farklı $\overline{\psi}$ ve $\overline{\psi}'$ ikilileri farklı $L^{\overline{\psi}}$ ve $L^{\overline{\psi}'}$ kümelerine karşılık gelir. Yukarıda verilen 3.7. Önerme öyle kümeler arasındaki ilişkileri ortaya koyar.

3.3.9.3.

Bütün $f \in L$ fonksiyonları en az bir $\overline{\psi}$ - türevine sahip midir? Eğer

$$\lim_{k\to\infty}\psi_1(k)=\lim_{k\to\infty}\psi_1(k)=0 \tag{3.45}$$

koşuluna gereksinim olmazsa, bu soruya cevap pozitif olacaktır. Gerçekten de, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\psi_1(k)=\psi_2(k)=1$ seçilirse, $f^{\overline{\psi}}(\cdot)=f(\cdot)$ elde edilir. Böylece, yukarıdaki sorunun cevabında (3.45) koşulunu sağlayan durumu göz önünde tutmak ilgi çekici olacaktır. Bu durumda cevap yine pozitiftir ancak açık değildir.

3.5. Tanım

$\lambda=\lambda(k)$, $k=1,2,...,$ reel sayıların bir dizisi olmak üzere,

$$\Delta^2\lambda(k)=\lambda(k)-2\lambda(k+1)+\lambda(k+2)\geq 0 \tag{3.46}$$

koşulunu sağlarsa, bu diziye konveks (aşağı konveks) dizi denir. Eğer $\Delta^2\lambda(k)\leq 0$ ise $\lambda(k)$ dizisine konkav(yukarı konveks) denir.

$$\lim_{k\to\infty}\lambda(k)=0 \tag{3.47}$$

koşulunu sağlayan aşağı konveks $\lambda(k)$ dizilerinin kümesi $\mathfrak{M}$ ile gösterilir.

3.8. Önerme

$f(\cdot)$, C (ya da L) kümesindeki herhangi bir fonksiyon ve

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

onun Fourier serisi olsun. Bu durumda, daima konkav bir $\lambda=\lambda(k)$ dizisi tanımlanabilir öyle ki, onun terimleri azalmaksızın sonsuza yaklaşır ve

$$\frac{a_0}{2}\lambda(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(k)(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

serisi sürekli (ya da toplanabilir) bir $F(\cdot)$ fonksiyonunun Fourier serisidir [11].

Varsayalım ki bu durumda, $\lambda(k)\geq 1$ dir. Böylece, $\psi_1(k)\equiv 1/\lambda(k)$ ve $\psi_2(k)\equiv 0$ olmak üzere bir $\overline{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ ikilisi için, $\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}$ olduğunu göz önünde tutarak, herhangi bir $f\in L$ fonksiyonu için (3.29) a göre,

$$S\left[f^{\overline{\psi}}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi_1(k)}A_k(f;x),$$

olur. Buna göre aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.9. Önerme

Her $f\in C$ (ya da $f\in L$) fonksiyonu C (ya da L) ye ait olan en az bir $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ $\overline{\psi}$- türevine sahiptir. Bu durumda, $\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}$ olmak üzere $\overline{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ ikilisi seçilebilir [11].

Bu önermeye göre her $f\in C$ (ya da $f\in L$) fonksiyonu $\mathfrak{M}$ ye ait olan ψ_1 ve ψ_2 bileşenlerini belirleyen $\overline{\psi}$- türevlerinin sonsuz bir kümesine sahiptir ve onların türevleri de süreklidir(ya da toplanabilirdir). Bundan başka, iyi bilindiği gibi,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos kt, \tag{3.48}$$

serisi, daima toplanabilir bir $\Psi(t)$ fonksiyonunun Fourier serisidir.

Bu durumda, 3. 5. Önerme'ye göre aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.10. Önerme

Her $f \in C$ (ya da $f \in L$) fonksiyonu; $\Psi(t)$, Fourier serisi (3.48) formuna sahip bir fonksiyon ve $\varphi \in C$ (ya da $\varphi \in L$) olmak üzere,

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi(t)\,dt\ , \tag{3.49}$$

bürünmesi olarak gösterilebilir. Ayrıca, $\psi = \psi(k) \in \mathfrak{M}$ dir [11].

Böylece, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = L, \qquad \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} C^{\overline{\psi}} = C, \quad \left(C^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} \cap C\right), \tag{3.50}$$

ve $L^{\overline{\psi}_*}$, (3.49) eşitliği ile gösterilebilen fonksiyonların kümeleri olmak üzere

$$\bigcup_{\psi\in\mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}_*} = L, \qquad \bigcup_{\psi\in\mathfrak{M}} C^{\overline{\psi}_*} = C, \quad \left(C^{\overline{\psi}_*} = L^{\overline{\psi}_*} \cap C\right). \tag{3.51}$$

dir.

3.3.9.4.

F, bütün trigonometrik polinomların kümesi olsun. Açıktır ki, (3.28) koşulunu sağlayan herhangi bir $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ ikilisi için her $f \in F$ fonksiyonu bir $\overline{\psi}$-türevine sahiptir. Özellikle bu, $L^{\overline{\psi}}$ kümesinin daima boştan farklı olduğunu gösterir. Aynı zamanda $\overline{\psi}$, (3.28) koşulunu sağlayan ikililerin kümesi boyunca seçilirse, açıktır ki $\bigcap_{\psi} L^{\overline{\psi}} = F$ olacaktır. Bundan başka, aşağıda daha güçlü bir ifadeyi içeren önermeyi verebiliriz:

3.11. Önerme

Aşağıdaki eşitlik doğrudur [11]:

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = F \tag{3.52}$$

(3.50) eşitliği gösterir ki, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ ikilisi $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ kümesi boyunca seçildiğinde, L ya da C kümeleri $L^{\overline{\psi}}$ ya da $C^{\overline{\psi}}$ alt kümelerine ayrıştırılır. (3.52) eşitliği, sadece trigonometrik polinomların öyle bir sınıflandırma altında ayırt edilmediğini ortaya koyar. Böylece, $L^{\bar{\psi}}$ kümelerindeki fonksiyonlar için yaklaşım teorisinin çeşitli problemlerinin incelenmesinde, esas dikkat edilmesi gereken nokta, $k=1,2,...$ için $\mathfrak{M}$ kümesinden seçilen $\psi_1(k)$ ve $\psi_2(k)$ dizileridir. Buna göre, şimdiye kadar bu sınıflar ile ilgili verilenler, Weil anlamındaki türevler ile tanımlanan fonksiyonların sınıflarında olduğu gibi $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ sınıfları için hemen hemen aynı derecede sonuçlar elde etmeye imkan sağlar. Bu nedenle konveks fonksiyonların bazı özellikleri bu sınıflandırmada en önemli elemanlardan biridir.

3.4. FOURİER SERİSİ TOPLAMININ LİNEER METODUNUN DÜZGÜNLÜĞÜ

$f \in L$ ve

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(f;x\right) \tag{3.53}$$

onun Fourier serisi olsun. Yani, $\forall\ k=0,1,2,\cdots$, için

$$a_k = a_k\left(f\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)\cos kt\,dt, \qquad b_k = b_k\left(f\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)\sin kt\,dt. \tag{3.54}$$

$S_n\left(f;x\right)$, (3.53) serisinin n-inci mertebeden kısmi toplamını gösterir. Bundan başka, $n=0,1,...,$ $k=0,1,2,...,n$ için $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$ keyfi sonsuz üçgensel bir sayı matrisi olsun. Her $f \in L$ fonksiyonuna Fourier serisinde onun genişlemesine göre

$$U_n\left(f;x;\Lambda\right) := \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} A_k\left(f;x\right), \tag{3.55}$$

formundan oluşan $U_n\left(f;x;\Lambda\right)$ polinomlarının dizisi karşılık gelir [11, Chpt. I].

Böylece her üçgensel Λ matrisi $U_n\left(f;x;\Lambda\right)$ polinomlarının inşası için bir metot belirler. Diğer bir deyişle, $U_n\left(f;\Lambda\right)$ polinom operatörlerinin belirli bir dizisi L kümesi üzerinde tanımlanır. Bu durumda Λ matrisi, belirli bir lineer metot veya Fourier serisi toplamının yöntemini belirler denir. Açıktır ki, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$

için, $U_n(f;\Lambda)$ operatörleri lineerdir. Böylece, Λ-metotlarına aynı zamanda lineer metotlar veya Fourier serisi toplamının yöntemi de denir.

(3.55) de, (3.54) deki Fourier katsayıları yerine yazılırsa,

$$U_n(t) = U_n(t;\Lambda) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt$$

$U_n(f;\Lambda)$ operatörünün çekirdeği denen n-inci mertebeden bir trigonometrik polinom olmak üzere,

$$U_n(f;x) = U_n(f;x;\Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) U_n(t;\Lambda)\, dt$$

elde edilir.

Λ matrisinde $\lambda_k^{(n)} \equiv 1$ olursa, bu durumda açıktır ki; $U_n(f;x;\Lambda) \equiv S_n(f;x)$ olacaktır. Aşağıdaki terminolojiye göre, bu metoda kısmi Fourier toplamının bir metodu denir. Bu durumda,

$$U_n(t;\Lambda) = \mathfrak{D}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

n-inci mertebeden bir Dirichlet çekirdeğidir.

Kısmi Fourier toplamlarının metodundan başka Lineer metodlar arasında ilk sırayı alan diğer bir metot, Fejér metodu olarak bilinen klasik aritmetik ortalama metodudur. Bu metot $k = 0,1,...,n-1$ için $\lambda_k^{(n)} = 1 - k/n$ olmak üzere Λ matrisi ile belirlenir. Bu durumda $U_n(f;x;\Lambda)$ polinomları Fejér toplamı denen

$$U_n(f;x;\Lambda) := \sigma_n(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k(f;x)$$

formuna sahiptir.

Fejér teoremi biliyoruz ki; $f(x)$, 2π periyodik sürekli bir fonksiyon ise, onun Fourier serisi Fejér metodu ile düzgün toplanabilirdir. Yani herhangi bir $f \in C$ için periyot üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f;x) = f(x)$$

dir.

Bu teorem geçen yüzyılda Fourier serisi teorisinde var olan şüpheyi ortadan kaldırmıştır. Yani, Fourier serisi belirli noktalarda ıraksak olan C kümesinde bile fonksiyonların varlığını ortaya koyması açısından önemlidir. Fejér teoremi Fourier serisi toplamının çağdaş teorisinde bir başlangıç noktasıdır. Daha sonraki yıllarda de la Vallée Poussin, Riesz, Rogosinski, Zygmund, Bernstein, vb. gibi matematikçiler tarafından toplamın diğer belirli lineer metotları önerilmiştir. Burada sadece Zygmund metodu ile ilgili toplam ele alınacaktır. Diğer toplamlar ile ilgili bilgiler [11, Chpt. I] de bulunabilir.

$s>0$ olmak üzere, $\lambda_k^{(n)}=1-\left(\frac{k}{n}\right)^s$ seçerek, Zygmund metodu elde edilir. Buna göre,

$$U_n\left(f;x;\Lambda\right)=Z_n^{(s)}\left(f;x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^s\right)\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

polinomlarına Zygmund toplamı denir. $s=1$ için $Z_n^{(1)}\left(f;x\right)=\sigma_n\left(f;x\right)$ olacaktır.

Bu metotların her biri Fourier seri teorisi ve fonksiyonların yaklaşımı teorisinde önemli bir kısma sahiptir. Bu metotların farklı özellikleri en büyük matematikçiler tarafından yıllarca incelenmiştir. Ayrıca esas dikkat, metotların yaklaşım yeteneklerini karakterize eden özelliklere ayrılmıştır. Belirli lineer metotların incelemelerinin bir sonucu olarak, aynı zamanda genel lineer metotlar için karşılaşılan problemleri çözmeye ve doğru formüle etmeye imkan veren yaklaşımlar üretilmiştir. Yani toplam metodu keyfi Λ sayı matrisi ile belirlendiğinde ve $\lambda_k^{(n)}$ nin belirli koşulları sağladığı bilindiğinde problemleri çözmeye imkan verir. Genel lineer metotlar çalışıldığı zaman karşılaşılan ilk soru; doğal olarak, "$U_n\left(f;x;\Lambda\right)$ dizisinin bütün C uzayı üzerinde düzgün yakınsaması için $\lambda_k^{(n)}$ sayıları üzerindeki koşullar ne olmalıdır?" sorusudur. Yani bütün $f\in C$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f\left(x\right)-U_n\left(f;x;\Lambda\right)\right\|_C=0$$

sağlanması için koşullar ne olmalıdır? Bu bağıntı elde edilirse, $U_n\left(f;\Lambda\right)$ metodu C uzayında regülerdir denir. Bununla ilgili çalışmalar S.N. Nikol'skii, B. Nagy, A. I. Stepanets, vb matematikçiler tarafından yapılmıştır [11, Chpt. I].

3.5. FOURİER SERİSİ TOPLAMININ LİNEER METOTLAR İLE ÜRETİLEN POLİNOMLARDAN OLUŞAN SAPMASININ İNTEGRAL GÖSTERİMİ

$k,\ n=0,1,...$, ve $\lambda_0^{(n)}=1$ olmak üzere, $\Lambda=\left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$ keyfi bir dikdörtgensel sayı matrisi olsun. Fourier serisi

$$S[f]=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f;x)$$

formuna sahip olan her $f\in L$ fonksiyonuna

$$U_n(f;x;\Lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}A_k(f;x),\qquad n=1,2,... \tag{3.56}$$

serisinden oluşan dizi karşılık getirilir.

Bu bölümde $f(\cdot)$ bir $\varphi\in L$ fonksiyonunun $\overline{\psi}$-integrali olmak üzere,

$$\delta_n(f;x;\Lambda):=f(x)-U_n(f;x;\Lambda) \tag{3.57}$$

farkı için integral gösterimi verilecektir.

$\delta_n(f;x;\Lambda)$ farkı tüm reel sayı ekseni üzerindeki integrasyonu ile belirlenen bir bürünme olarak göstermek mümkündür [1, Chp IV].

3.2. Lemma

$\tau_1(v)$ ve $\tau_2(v)$ bütün $v\ge 0$ için sürekli fonksiyonlar ve onların

$$\hat{\tau}_{1+}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau_1(v)\cos vt dv,\qquad \hat{\tau}_{2-}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau_2(v)\sin vt dv \tag{3.58}$$

dönüşümleri tüm sayı ekseni üzerinde mutlak toplanabilir olsun ($\hat{\tau}_{1+},\ \hat{\tau}_{2-}\in L(\mathbb{R})$). Herhangi bir $\varphi\in M=\left\{\varphi:\varphi\in L,\ \|\varphi\|_\infty=es\sup|\varphi(\cdot)|<\infty\right\}$ için $\hat{\tau}(t)=\hat{\tau}_{1+}(t)+\hat{\tau}_{2-}(t)$ olmak üzere,

$$\Phi_\tau(x)=(\varphi*\hat{\tau})(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t)\hat{\tau}(t)dt \tag{3.59}$$

bürünmesi göz önünde tutulsun. Buradaki integral genişletilmiş simetrik aralıklar üzerinde integrallerin limiti olarak alınır. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A}$$

dir. Buna göre, (3.59) daki bürünme 2π periyodik sürekli bir fonksiyondur ve $A_k(\varphi;x) = a_k(\varphi)\cos kx + b_k(x)\sin kx$, $\tilde{A}_k(\varphi;x) = UA_k(\varphi;x)$ ve $a_k(\varphi)$ ve $b_k(\varphi)$ $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları olmak üzere,

$$S[\varphi * \hat{\tau}] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_1(k)A_k(\varphi;x) + \tau_2(k)\tilde{A}_k(\varphi;x)\right) \tag{3.60}$$

eşitliği doğrudur [11,Chp IV].

3.12. Önerme

$\gamma(v)$, bütün $v \geq 0$ için sürekli bir fonksiyon ve onun

$$\hat{\gamma}_+(t) = \int_0^{\infty} \gamma(v)\cos vtdv, \quad \hat{\gamma}_-(t) = \int_0^{\infty} \gamma(v)\sin vtdv$$

dönüşümleri $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak toplanabilir olsun. Bu durumda, herhangi bir $v \in [0,\infty)$ noktasında,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_+(t)\cos vtdt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_-(t)\sin vtdt = \gamma(v)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_+(t)\sin vtdt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_-(t)\cos vtdt = 0$$

elde edilir [11, Chpt. IV].

Varsayalım ki, $\psi_1(k), \psi_2(k)$ ve $\lambda_k^{(n)}$, $k = 1,2,\ldots$, sayılar sistemi pozitif tamsayılar kümesine belirli $\psi_1(v), \psi_2(v)$ ve $\lambda_n(v)$ sürekli fonksiyonlarının kısıtlamasıdır.

3.2. Lemma' da $\tau_1(v) = (1-\lambda_n(v))\psi_1(v)$, $\tau_2(v) = \left(1-\lambda_n'(v)\right)\psi_2(v)$ ve $\lambda_n(k) = \lambda_n'(k) = \lambda_k^{(n)}$ seçerek aşağıdaki teorem elde edilir.

3.14. Teorem

Farzedelim ki,

$$\tau_1(v) = (1-\lambda_n(v))\psi_1(v) \text{ ve } \tau_2(v) = \left(1-\lambda_n'(v)\right)\psi_2(v)$$

$$\lambda_n(k) = \lambda_n'(k) = \lambda_k^{(n)} \tag{3.61}$$

fonksiyonları 3.2. Lemma' nın koşullarını sağlasın. Bir $f(\cdot)$ fonksiyonu bir $\varphi \in M$ fonksiyonunun $\overline{\psi}$ integrali ise, bu durumda

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (1-\lambda_n(v))\left(\psi_1(v)\cos vt + (1-\lambda_n'(v))\psi_2(v)\sin vt\right)dv$$

olmak üzere

$$\Phi_n(f;\hat{\tau}_n;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\hat{\tau}_n(t)\,dt \tag{3.62}$$

2π periyodik sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca,

$$S\left[\Phi_n(f;\hat{\tau}_n;x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\left(\psi_1(k)A_k(\varphi;x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(\varphi;x)\right) =$$

$$= S\left[\delta_n(f;x;\Lambda)\right] \tag{3.63}$$

dir [11, Chpt. IV].

Şimdi $\varphi \in L$ olmak üzere (3.59) bürünmesini göz önünde tutalım. Açıktır ki, bu durumda (3.58) koşulu herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında (3.59) integralinin varlığını garanti etmez. Fakat bu koşullar $\Phi_\tau(x)$ fonksiyonunun 2π periyodik hemen her yerde var ve toplanabilir fonksiyon olması için yeterlidir. Çünkü

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Phi_\tau(x)\right|dx \le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi(x-t)\hat{\tau}(t)\right|dt\,dx \le \|\varphi\|_1 \int_{-\pi}^{\pi}\left|\hat{\tau}(t)\right|dt \tag{3.64}$$

dir. (3.64) den ortaya çıkar ki, $\varphi(x-t)\hat{\tau}(t)$ çarpımı $x \in [-\pi,\pi]$, $t \in \mathbb{R}$ bölgesinde mutlak integrallenebilirdir. Böylece, 3.12. Önerme'yi göz önünde tutarak, $\Phi_\tau(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarını ortaya koyan aşağıdaki durum elde edilir.

3.3. Lemma

$i=1,2$ için $\tau_i(v)$ fonksiyonları 3.2. Lemma' nın tüm koşullarını sağlasın. Bu durumda, her $\varphi \in L$ için (3.59) bürünmesi (3.60) eşitliğini sağlayan L deki bir fonksiyonu gösterir [11, Chpt. IV].

3.15. Teorem

(3.61) ifadesindeki $\tau_1(v)$ ve $\tau_2(v)$ fonksiyonları 3.2. Lemma' nın tüm koşullarını sağlasın. Bu durumda, L deki bir φ fonksiyonunun bir $\overline{\psi}$-integrali olan herhangi bir $f(\cdot)$ fonksiyonu için (3.62) ifadesindeki fonksiyon L ye aittir ve (3.63) eşitliği elde edilir [11, Chpt. IV].

$f \in L^{\overline{\psi}}M$ ve 3.14. Teorem'in koşulları sağlanırsa, bu durumda herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\Phi_n(f;\hat{\tau}_n;x)$ fonksiyonu C ye aittir. Böylece (3.63) ün sol tarafı sürekli bir fonksiyonun Fourier serisidir. Buradan $f(\cdot)$ ve $U_n(f;x;\Lambda)$ fonksiyonları da sürekli ise, bu durumda (3.63) den dolayı herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında

$$f(x)-U_n(f;x;\Lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x-t)\hat{\tau}_n(t)dt \tag{3.65}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $C^{\overline{\psi}}M = L^{\overline{\psi}}M \cap C$ seçerek, 3.14. Teorem'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.16. Teorem

$f \in C^{\overline{\psi}}M$ ve $i=1,2$ için $\tau_i(v)$ fonksiyonları 3.2. Lemma'nın tüm koşullarını sağlayan (3.61) eşitlikleri ile belirli olsun. Bu durumda, $U_n(f;\cdot;\Lambda) \in C$ (Λ bir üçgensel matris ise daima doğrudur) ise her $x \in \mathbb{R}$ noktasında (3.65) eşitliği doğrudur [11, Chpt. IV].

3.17. Teorem

$f \in L^{\overline{\psi}}$ ve $i = 1,2$ için $\hat{\tau}_i(v)$ fonksiyonları 3.2. Lemma'nın tüm koşullarını sağlasın. Bu durumda (3.65) eşitliği $\mathbb{R}$ üzerinde hemen hemen her yerde elde edilir [11].

Bir sonraki bölümde, Zygmund toplamı ile yaklaşımda daha önceden yapılmış olan çalışmaların özeti verilecektir.

3.6. ZYGMUND METODU İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde, $\lambda_k^{(n)}$ elemanlarının

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}(s) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s, \; k = 0,1,...,n-1, \; s > 0 \tag{3.66}$$

eşitliği ile tanımlandığı; $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$ üçgensel matrisleri ile üretilen Fourier serilerinin toplamının lineer metotlarının yaklaşım özellikleri göz önünde tutulacak ve Zygmund toplamının yaklaşım özellikleri ile bağlantılı bilinen sonuçlar verilecektir.

$\lambda_k^{(n)}$, (3.66) daki gibi alınırsa, verilen bir $f \in L$ fonksiyonu için $U_n(f;x;\Lambda)$ polinomları

$$Z_n^{(s)}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right) A_k(f;x)$$

ile gösterilir ve bu polinomlara Zygmund toplamı denir. Zygmund toplamı, iyi yaklaşım özellikleri ve $\lambda_k^{(n)}$ çarpanlarının kolayca belirlenmesinden dolayı dikkate değer polinomlardır. Bu iki özelliğin birleşimi, fonksiyonlar teorisinde özellikle Fejér ve Riesz toplamlarının yıllarca incelenmesine katkıda bulunmuştur. Bununla ilgili en önemli çalışmalardan biri, farklı metriklerdeki çeşitli fonksiyon sınıfları üzerine öyle toplamların yaklaşım özelliklerinin araştırılmasıdır.

Burada özellikle Kolmogorov-Nikol'skii problemleri ile ilgili olan çözümlere cevap veren

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{N}, U_n(f;x)\right) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\| f(x) - U_n(f;x) \right\|_X$$

değeri için elde edilen asimptotik eşitlikler verilmiştir. Yani, X uzayında $\mathfrak{N}$ sınıfı üzerinde verilen bir $U_n(f;\Lambda)$ metodu için, $\varphi(n) = \varphi(n,\Lambda;\mathfrak{N})$ fonksiyonu açık formda belirlenir ve öyle ki $n \to \infty$ iken

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}, U_n(f;x)\right) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\| f(x) - U_n(f;x;\Lambda) \right\|_X = \varphi(n) + O(\varphi(n))$$

şeklinde yazılırsa, Kolmogorov-Nikol'skii problemi çözülür.

Aşağıdaki teoremlerde Zygmund toplamı ile ilgili olarak, Zygmund'un W_r^r ve $W_r^r H_\omega$ sınıfları üzerinde bu toplamın sapmalarının kesin mertebelerini ortaya koyduğu sonuçlar verilmiştir [2].

3.18. Teorem

s negatif olmayan çift bir sayı olsun. Bu durumda, herhangi bir $f \in W_s^s$ için,

$$\left\| f(x) - Z_n^s(f;x) \right\|_C \le A_s n^{-s}, \tag{3.67}$$

ve $\omega(t)$ sürekliliğin keyfi bir modülü olmak üzere, herhangi bir $f \in W_{s-1}^{s-1} H_\omega$ için,

$$\left\| f(x) - Z_n^s(f;x) \right\|_C \le A_s n^{-(s-1)} \omega(2\pi/n). \tag{3.68}$$

s bir tek sayı ise, bu durumda herhangi bir $f \in W_s^s$ için,

$$\left\| f(x) - Z_n^s(f;x) \right\|_C \le A_s n^{-s} \ln(n+2), \tag{3.69}$$

ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere herhangi bir $f \in W_{s-1}^{s-1} H^\alpha$ için,

$$\left\| f(x) - Z_n^s(f;x) \right\|_C \le A_s n^{-(s-1+\alpha)}. \tag{3.70}$$

(3.67)-(3.70) bağıntılarında, A_s, n ye göre düzgün sınırlı değerlerdir.

3.19. Teorem

s bir tek sayı olsun. Bu durumda herhangi bir $f \in \widetilde{W}_s^s$ için,

$$\left\| f(x) - Z_n^s(f;x) \right\|_C \le A_s n^{-s},$$

ve $\omega(t)$ sürekliliğin keyfi bir modülü olmak üzere, herhangi bir $f \in \widetilde{W}_{s-1}^{s-1} H_\omega$ için,

$$\left\| f(x) - Z_n^s(f;x) \right\|_C \le A_s n^{-s} \omega(2\pi/n).$$

Zygmund tarafından yapılan incelemeler, sonra Nagy[3] ve daha sonra da Telyakovskii[4] tarafından devam ettirilmiştir. Telyakovskii tarafından elde edilen sonuçlar, Nagy tarafından elde edilen sonuçları içerdiğinden aşağıda sadece Telyakovskii tarafından elde edilen sonuçlar verilmiştir.

3.20. Teorem

$r>0,\ s>0$ ve $\beta\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r, Z_n^s\right)=\sup_{f\in W_\beta^r}\left\|f(x)-Z_n^s(f;x)\right\|_C$$

değerleri için aşağıdaki asimptotik eşitlikler doğrudur:

i. *$r<s$ ise, bu durumda,*

$$\mu_r(v)=\begin{cases} v^{s-r} & ,0\le v\le 1 \\ v^{-r} & ,v\ge 1\end{cases},$$

ve

$$A(\mu_r)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\mu_r(v)\cos(vt+\beta\pi/2)\,dv\right|dt, \tag{3.71}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r, Z_n^s\right)=A(\mu_r)n^{-r}+O\left(n^{-\min\{r+1,s\}}\right). \tag{3.72}$$

ii. *$r=s$ ise, bu durumda,*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r, Z_n^s\right)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{\ln n}{n^r}+O\left(n^{-r}\right). \tag{3.73}$$

Ek olarak, $\sin(\beta\pi/2)=0$ ise, $A(\mu_r)$ (3.71) bağıntısı ile tanımlı olmak üzere,

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r, Z_n^s\right)=A(\mu_r)n^{-r}+O\left(n^{-(r+1)}\right).$$

iii. *$r>s$ ise, $f_0^s(x)$ Fourier serisi*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^s A_k(f;x)$$

formuna sahip olan sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r, Z_n^s\right)=\sup_{f\in W_\beta^r}\left|f_0^s(x)\right|n^{-s}+O\left(n^{-r}\right). \tag{3.74}$$

(3.73) ve (3.74) bağıntıları Nagy tarafından elde edilen bağıntılardır.

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r H_\omega, Z_n^s\right)=\sup_{f\in W_\beta^r H_\omega}\left\|f(x)-Z_n^s(f;x)\right\|_C$$

değerleri için en genel sonuçlar, aşağıda verilen teoremi kanıtlayan Efimov[6] tarafından elde edilmiştir.

3.21. Teorem

Aşağıdaki iddialar doğrudur:

i. $s < r$ *ise, bu durumda* $k = 0,...,n-1$ *için*

$$d_{n,k} = \sup\left\{\left|\int_{1/n}^{1/k+1} \frac{\varphi(t)}{t}dt\right| : \varphi \in H_\omega,\ \varphi(-t) = -\varphi(t)\right\},$$

olmak üzere,

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r H_\omega, Z_n^s\right) = \frac{2\left|\sin(\beta\pi/2)\right|}{\pi n^s} \sum_{k=0}^{[n/2]} (k+1)\Delta^2\left(k^{s-r}\right) d_{n,k}(\omega) + O\left(n^{-s}\right).$$

ii. $s = r$ *ise, bu durumda*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r H_\omega, Z_n^s\right) = \frac{2\left|\sin(\beta\pi/2)\right|}{\pi n^r} d_{n,0}(\omega) + O\left(n^{-r}\right).$$

iii. $r < s < r+1$ *ise, bu durumda*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r H_\omega, Z_n^s\right) = \frac{2\left|\sin(\beta\pi/2)\right|}{\pi n^s} \sum_{k=0}^{[n/2]-1} (k+1)\Delta^2\left(k^{s-r}\right) d_{n,k}(\omega) +$$

$$+O\left(n^{-s} \sum_{k=0}^{[n/2]-1} (k+1)^{-(r+1+s)} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) + O\left(n^{-r} w(1/n)\right).$$

iv. $s = r+1$ *ise, bu durumda*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r H_\omega, Z_n^s\right) = \frac{2\left|\cos(\beta\pi/2)\right|}{\pi n^{r+1}} \int_{1/(n+1)}^{1} \frac{\omega(t)}{t^2}dt + O\left(n^{-r}\omega(1/n)\right).$$

v. $s > r+1$ *ise,*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r H_\omega, Z_n^s\right) = O\left(n^{-r}\omega(1/n)\right).$$

3.6.1. $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ Sınıflarında Zygmund Metodu

Bu bölümde

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^s_n\right) = \sup\left\{\left|f(x) - Z^s_n(f;x)\right| : f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}\right\}$$

değeri için, D.N.Bushev ve A. I.Stepanets tarafından elde edilen asimptotik eşitlikler verilecektir.

$\tau(v)$, $v \geq 0$ yarı ekseni üzerinde tanımlanan bir fonksiyon ve öyle ki, onun

$$\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \tau(v)\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv$$

dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak integrallenebilir olmak üzere, (3.71)'e göre;

$$A(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}(t)\right| dt \tag{3.75}$$

olsun. $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^s_n\right)$ değeri için asimptotik eşitlikler, esas olarak sonsuzda $g(v) = v^s\psi(v)$ fonksiyonunun davranışına bağlıdır. Burada, bu fonksiyon bütün $v \geq 1$ için yukarı bükey ya da aşağı bükey olarak kabul edilmiştir. $g(v)$ fonksiyonunun dışbükeyliğinin (convexity) koşulu (aynı zamanda $\psi(v)$ fonksiyonunun da) bütün $v \geq 1$ kümesi üzerinde sağlanamayabilir. Fakat, $v_0 > 1$ ile keyfi bir reel sayı olmak üzere, $v \geq v_0$ kümesi üzerinde sağlanır. Bu durumda, yukarıda bahsedilen çalışmalara benzer asimptotik eşitlikler burada da elde edilir. Ancak burada ayrıntıya inilmeyecektir.

$g(v)$ fonksiyonu $v \geq 1$ için konveks ise, aşağıdaki durumlar mümkündür:

(a) $g(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g(v) = \infty$ ile aşağı bükey,

(b) $g(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g(v) = c > 0$ ile aşağı bükey,

(c) $g(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g(v) = 0$ ile aşağı bükey, (3.76)

(d) $g(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g(v) = c > 0$ ile yukarı bükey,

(e) $g(v)$ fonksiyonu $\lim\limits_{v\to\infty} g(v) = \infty$ ile yukarı bükey.

$O(1)$, n ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere, aşağıdaki durumlar doğrudur.

3.22. Teorem

$\sin \beta\pi/2 = 0$, *$\psi \in \mathfrak{M}$ ve $g(v)$, (3.76) daki (a)-(e) koşullarından birini sağlasın. Bu durumda $n \to \infty$ iken,*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{s}_{n}\right) = \psi(n) A(\tau_n) + O(1)\psi(n)/n \qquad (3.77)$$

elde edilir. Burada

$$\tau_n(v) = \begin{cases} \dfrac{s\psi(1)+\psi'(1)}{n^{s-1}\psi(n)} v + \dfrac{(1-s)\psi(1)-\psi'(1)}{n^{s}\psi(n)} & , 0 \le v \le 1/n \\ v^{s}\psi(nv)/\psi(n) & , 1/n \le v \le 1 \\ \psi(nv)/\psi(n) & , v \ge 1 \end{cases}$$

olmak üzere $A(\tau_n)$, (3.75) eşitliği ile tanımlanan bir özdeşliktir. Ayrıca $A(\tau_n) = O(1)$.

$\psi(v) = v^{-r}$, $0 < r \le s$, ise, bu durumda (3.77) eşitliği (3.72) eşitliği ile çakışır. Ek olarak $r < s < r+1$ olduğu durumda (3.77) deki kalanın değerlendirmesi (3.72) dan biraz daha iyidir. 3.22. Teorem'i sağlayan fonksiyonlara örnek olarak $r \in (0,s)$, $c > 0$ ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\psi(v) = v^{-r}\ln^{\alpha}(v+c)$ fonksiyonu, $\psi(v) = v^{-s} arctg\, v$ ve $\psi(v) = v^{-s}\left(C - e^{v}\right)$, $C > 0$ vs. fonksiyonları verilebilir.

3.23. Teorem

$\sin \beta\pi/2 = 0$, $\psi \in \mathfrak{M}$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} k^{s}\psi(k) = 0$ ile $k^{s}\psi(k)$, $k = 1,2,...$, dizisi aşağı bükey olsun. Bu durumda $n \to \infty$ iken, $f^{s}(\cdot)$ sürekli bir fonksiyon ve

$$S\left[f^{s}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k^{s} A_k(f;x) \qquad (3.78)$$

olmak üzere,

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{s}_{n}\right) = n^{-s} \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| f^{s} \right\|_{C} + O(1)\left(\psi(n) + n\psi'(\nu)\right),$$

elde edilir.

Açıktır ki 3.23. Teorem, 3.20. Teorem-iii kısmının bir benzeridir.

Aşağıda verilecek olan durumlar, $\sin\beta\pi/2\neq 0$ olduğu durumda $\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi},Z_n^s\right)$ değeri ile ilgili asimptotik sonuçları içerir.

3.24. Teorem

Varsayalım ki $\sin\beta\pi/2\neq 0$, $\psi\in\mathfrak{M}'$ *ve* $g(v)$ *(3.76)-(a) koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda* $n\to\infty$ *iken,*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi},Z_n^s\right)=\psi(n)A\left(\tau_n^{(1)}\right)+O(1)\psi(n)/n$$

elde edilir. Burada,

$$\tau_n^{(1)}(v)=\begin{cases}\dfrac{(s-1)\psi(1)+\psi'(1)}{n^{s-2}\psi(n)}v^2+\dfrac{(2-s)\psi(1)-\psi'(1)}{n^{s-1}\psi(n)}v & ,0\leq v\leq 1/n\\ v^s\psi(nv)/\psi(n) & ,1/n\leq v\leq 1\\ \psi(nv)/\psi(n) & ,v\geq 1\end{cases}$$

olmak üzere $A\left(\tau_n^{(1)}\right)$*, (3.75) eşitliği ile tanımlanan bir özdeşliktir. Ayrıca,*

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\psi(n)}\int_n^\infty\frac{\psi(t)}{t}dt<A\left(\tau_n^{(1)}\right)<\frac{2\pi}{\psi(n)}\int_n^\infty\frac{\psi(t)}{t}dt+O(1). \qquad (3.79)$$

$\psi(v)=v^{-r}$, $r>0$, alınırsa

$$\int_n^\infty t^{-(r+1)}dt=\frac{n^{-r}}{r}$$

olduğundan (3.79) bağıntısından (3.72) ve (3.73) bağıntıları elde edilir. Buradan da,

$$\int_n^\infty\frac{\psi(t)}{t}dt=O(1)\psi(n) \qquad (3.80)$$

bağıntısı elde edilir.

Ancak, (3.80) eşitliği bütün $\psi\in\mathfrak{M}'$ için doğru değildir. Örneğin, herhangi bir $\alpha>0$ için $\psi(v)=\ln^{-\alpha}(v+e)$ fonksiyonu $\mathfrak{M}'$ sınıfına ait olmasına karşın, aynı zamanda,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\psi_\alpha(n)}\int_n^\infty\frac{\psi_\alpha(t)}{t}dt=\infty.$$

3.25. Teorem

Varsayalım ki $\sin \beta\pi/2 \neq 0$, $\psi \in \mathfrak{M}'$ *ve* $g(v)$ *yukarı bükey bir fonksiyon ve ek olarak*

$$\int_1^n t^{s-1}\psi(t)\,dt = O(1)n^s\psi(n),$$

koşulu sağlansın. Bu durumda $n \to \infty$ *iken,*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^s_n\right) = \psi(n)A\left(\tau^{(2)}_n\right) + O(1)n^{-s}$$

elde edilir. Burada,

$$\tau^{(2)}_n(v) = \begin{cases} \dfrac{\psi(1)}{\psi(n)} n^{\psi'(1)/\psi(1)} v^{s+\psi'(1)/\psi(1)} & ,0 \leq v \leq 1/n \\ v^s\psi(nv)/\psi(n) & ,1/n \leq v \leq 1 \\ \psi(nv)/\psi(n) & ,v \geq 1 \end{cases}$$

olmak üzere $A\left(\tau^{(2)}_n\right)$*, (3.75) eşitliği ile tanımlanan bir özdeşliktir. Ayrıca,*

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\pi}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt < A\left(\tau^{(2)}_n\right) < \frac{2\pi}{\psi(n)}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt + O(1).$$

3.25. Teorem'i sağlayan fonksiyonlara örnek olarak $0 < s-1 \leq r < s$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için, $\psi_r(v) = v^{-r}\ln^{\alpha}(v+e)$ $c > 0$ ve $\alpha > 1$ için $s \leq 1$ olmak üzere, $\psi_\alpha(v) = \ln^{-\alpha}(v+e)$ vs. fonksiyonları verilebilir.

$\sin \beta\pi/2 \neq 0$ olduğu durumda aşağıdaki teoremler de verilebilir:

3.26. Teorem

Varsayalım ki $\sin \beta\pi/2 \neq 0$, $\psi \in \mathfrak{M}'$ *ve* $\lim\limits_{v\to\infty} v^s\psi(v) = C > 0$ *ile* $g(v)$ *yukarı ya da aşağı bükey bir fonksiyon olsun. Bu durumda* $n \to \infty$ *iken,*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n\right) = \frac{2}{\pi}\left|\sin \beta\pi/2\right|\frac{1}{n^s}\int_1^n t^{s-1}\psi(t)dt + O(1)\psi(n) \tag{3.81}$$

elde edilir.

$\lim\limits_{v\to\infty} v^s\psi(v) = \infty$ *ile* $g(v)$ *yukarı bükey olduğu durumda (3.80) ve*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n^s\psi(n)}\int_1^n t^{s-1}\psi(t)\,dt=\infty$$

eşitlikleri sağlandığı durumda da , (3.81) *eşitliği doğrudur.*

$\alpha\geq 0$ için $\psi(v)=v^{-s}\ln^{\alpha}(v+e)$ fonksiyonu ve $\psi(v)=v^{-s}arctg\, v$ fonksiyonu bu teoremin koşullarını sağlayacaktır.

3.27. Teorem

Varsayalım ki, $\lim_{k\to\infty}k^s\psi(k)=\infty$ *ile* $k^s\psi(k)$*,* $k=1,2,...$ *, dizisi belirli bir* k_0 *sayısından başlayarak aşağı bükey ve*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{s-1}\psi(k)$$

serisi ıraksak olsun. Bu durumda $n\to\infty$ *iken,*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};Z^s_n\right)=\frac{2}{\pi n^s}\left|\sin\beta\pi/2\right|\sum_{k=1}^{n}k^{s-1}\psi(k)+O(1)n^{-s}$$

elde edilir.

Bu teoremin koşullarını sağlayan örneklerden biri; $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere $\psi(v)=v^{-s}\ln^{-\alpha}(v+e)$ fonksiyonudur.

3.28. Teorem

Varsayalım ki, $v^{s-1}\psi(v)$ *fonksiyonu* $[1,\infty)$ *aralığı üzerinde integrallenebilir ve bütün* $v\geq a\geq 1$ *için* $g(v)=v^s\psi(v)$ *fonksiyonu aşağı bükey olsun. Bu durumda* $f^s(x)$*,* (3.78) *eşitliğini sağlayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere;*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};Z^s_n\right)=\frac{1}{n^s}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|f^s\right\|_C+O(1)\left(\frac{1}{n^s}\int_n^{\infty}t^{s-1}\psi(t)\,dt+\psi(n)\right)$$

elde edilir.

3.6.2. $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ Sınıfında Zygmund Metodu

Bu bölümde

$$\mathcal{E}\left(C^{\overline{\psi}}_{\infty},Z^s_n\right)=\sup\left\{\left|f(x)-Z^s_n(f;x)\right|:\ f\in C^{\overline{\psi}}_{\infty}\right\}$$

değeri için, A.S. Fedorenko tarafından elde edilen asimptotik eşitlikler verilecektir.

Daha önceden de bahsedildiği gibi, $C_\infty^{\overline{\psi}}$ sınıflarındaki fonksiyonlara Zygmund toplamı ile yaklaşımda $\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)$ değerinin asimptotik gösteriminin hesaplanması, yukarı ya da aşağı bükey olan $g_i(v) = v^s \psi_i(v)$, $i = 1,2$, fonksiyonlarına bağlıdır. Bu fonksiyonlar için (2.3) durumları söz konusudur. A. S. Fedorenko [9] ve [10] da tüm durumları ele almış ancak b)-d) durumları için kesin yaklaşımlar elde etmiştir.

3.29. Teorem

$\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ ve $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v) = \infty$, $i = 1,2$, ile $g_i(v) = v^s \psi_i(v)$, $s > 0$, fonksiyonları aşağı bükey olsun. Bu durumda $\overline{\psi}(n) = \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ ve $O(1)$, n ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere, $n \to \infty$ iken;

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)_C = \overline{\psi}(n) A(\tau_n) + O(1)\frac{\overline{\psi}(n)}{n}.$$

Bundan başka $i = 1,2$, için;

$$\tau_{n,i}(u) = \begin{cases} \dfrac{(s-1)\psi_i(1) + \psi_i'(1)}{n^{s-2}\overline{\psi}(n)} u^2 + \dfrac{(2-s)\psi_i(1) - \psi_i'(1)}{n^{s-1}\overline{\psi}(n)} u, & 0 \le u \le 1/n \\ \dfrac{u^s \psi_i(nu)}{\overline{\psi}(u)}, & 1/n \le u \le 1 \\ \dfrac{\psi_i(nu)}{\overline{\psi}(u)}, & 1 \le u < \infty, \end{cases}$$

ve $C = \text{const}$ olmak üzere,

$$\frac{2}{\pi\overline{\psi}(n)} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u} du < A(\tau_n) < C + \frac{4}{\pi\overline{\psi}(n)} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u} du$$

dir. Burada $n = 1,2,\ldots,$ için $A(\tau_n)$ aşağıdaki eşitlik ile belirlidir:

$$A(\tau_n) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\int_0^\infty \tau_{n,1}(u)\cos ut + \tau_{n,2}(u)\sin ut \right) du \right| dt. \tag{3.82}$$

3.30. Teorem

$\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, $u^s\psi_i(u)$ fonksiyonu yukarı bükey ve $i = 1,2$ için

$$\int_1^n u^{s-1}\psi_i(u)\, du = O(1) n^s \psi_i(n),$$

olsun. Bu durumda $\bar{\psi}(n)=\left(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ *ve* $O(1)$, n *ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere,* $n\to\infty$ *iken;*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\bar{\psi}},Z_n^s\right)_C=\bar{\psi}(n)A(\tau_n)+O(1)\frac{1}{n^s}.$$

Bundan başka $i=1,2,$ *için;*

$$\tau_{n,i}(u)=\begin{cases}\dfrac{\psi_i(1)}{\bar{\psi}(u)}n^{\psi_i'(1)/\psi_i(1)}u^{\left(s\psi_i(1)+\psi_i'(1)\right)/\psi_i(1)}, & 0\le u\le 1/n\\ \dfrac{u^s\psi_i(nu)}{\bar{\psi}(u)}, & 1/n\le u\le 1\\ \dfrac{\psi_i(nu)}{\bar{\psi}(u)}, & 1\le u<\infty,\end{cases}$$

ve $C_1=\text{const}$ *olmak üzere,*

$$\frac{2}{\pi\bar{\psi}(n)}\int_n^\infty\frac{|\psi_2(u)|}{u}du<A(\tau_n)<C_1+\frac{4}{\pi\bar{\psi}(n)}\int_n^\infty\frac{|\psi_2(u)|}{u}du$$

dir. Burada $A(\tau_n)$, (3.82) *ile belirlidir.*

3.31. Teorem

$\psi_1\in\mathfrak{M}$, $\psi_2\in\mathfrak{M}'$ *ve* $\lim\limits_{v\to\infty}g_i(v)=C>0$, $i=1,2$, *ile* $g_i(v)=v^s\,\psi_i(v)$, $s>0$, *fonksiyonları yukarı ya da aşağı bükey olsun. Bu durumda* $\bar{\psi}(n)=\left(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ *ve* $O(1)$, n *ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere,* $n\to\infty$ *iken aşağıdaki asimptotik eşitlik elde edilir:*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\bar{\psi}},Z_n^s\right)_C=\frac{2}{\pi n^s}\int_1^n u^{s-1}\psi_2(u)\,du+O(1)\bar{\psi}(n). \tag{3.83}$$

3.32. Teorem

$\psi_1\in\mathfrak{M}$, $\psi_2\in\mathfrak{M}'$ *ve* $\lim\limits_{v\to\infty}g_i(v)=0$, $i=1,2$, *ile* $g_i(v)=v^s\,\psi_i(v)$, $s>0$, *fonksiyonları aşağı bükey olsun. Bu durumda* $O(1)$, n *ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere,* $n\to\infty$ *iken aşağıdaki asimptotik eşitlik elde edilir:*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\bar{\psi}},Z_n^s\right)_C=\frac{2}{\pi n^s}\int_1^n u^{s-1}\psi_2(u)\,du+O(1)\frac{1}{n^s}.$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ sınıfında $\mathcal{E}_n\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)$ değeri için elde edilen asimptotik eşitlikler ele alınmıştır.

4.1. ANA BULGULAR

İlk olarak $g_i(v)$, $i=1,2$, fonksiyonlarının $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v)=\infty$ ya da $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v)=c>0$ ile yukarı bükey olduğu durumda $\mathcal{E}_n\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)$ değeri için asimptotik formüller verilecektir.

4.1. Teorem *$\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ ve $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v)=\infty$ ya da $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v)=c>0$, $i=1,2$, ile $g_i(v)=v^s\,\psi_i(v)$, $s>0$, $v\ge b\ge 1$ üzerinde yukarı bükey olsun. Bu durumda $\overline{\psi}(n)=\left(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ ve $O(1)$, n ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere, $n\to\infty$ iken;*

$$\mathcal{E}_n\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)=\frac{2}{\pi n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\,dv+\frac{2}{\pi}\int_n^{\infty}\psi_2(v)\,dv+O(1)\,\overline{\psi}(n). \tag{4.1}$$

$\psi\in\mathfrak{M}$ ve $t\ge 1$ için $\alpha(t)=\dfrac{\psi(t)}{t\left|\psi'(t)\right|}$ olsun. Eğer $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)$ varsa, $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=:\alpha_0(\psi)$ ile gösterelim. Böylece aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

4.1. Sonuç *$\psi_2\in\mathfrak{M}'$ ve $\lim\limits_{v\to\infty} g_i(v)=\infty$ ile $g_i(v)=v^s\,\psi_i(v)$, $s>0$, $i=1,2$, $v\ge b\ge 1$ üzerinde yukarı bükey olsun. $\alpha_0(\psi_2)=\infty$ ise, bu durumda $\overline{\psi}(n)=\left(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ ve $O(1)$, n ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere, $n\to\infty$ iken aşağıdaki asimptotik eşitlik elde edilir:*

$$\mathcal{E}_n\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)=\frac{2}{\pi}\int_n^{\infty}\psi_2(v)\,dv+O(1)\,\overline{\psi}(n). \tag{4.2}$$

$\psi_i(t)=\ln^{-\alpha_i}(t+e)$, $\alpha_i\ge 1$, $i=1,2$, fonksiyonları 4.1. Sonuç'un koşullarını sağlayacaktır.

3.6.2. bölümde de bahsedildiği gibi, A.S. Fedorenko, [9] da, D.N. Busev'de $\psi_1(v)=\psi(v)\cos\frac{\beta\pi}{2}$ ve $\psi_2(v)=\psi(v)\sin\frac{\beta\pi}{2}$ olduğu durumda aynı problemi [7] de incelemiştir. Ancak tam asimptotik eşitlikler elde edememişlerdir.

4.2. Sonuç . $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ *ve* $\lim_{v\to\infty} g_i(v)=\infty$ *ya da* $\lim_{v\to\infty} g_i(v)=c>0$ *ile* $g_i(v)=v^s\,\psi_i(v)$, $s>0$, $i=1,2$, $v\ge b\ge 1$ *üzerinde yukarı bükey olsun.* $\alpha_0(\psi_2)=1/s$ *ise, bu durumda* $\overline{\psi}(n)=\left(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ *ve* $O(1)$, *n ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere,* $n\to\infty$ *iken aşağıdaki asimptotik eşitlik elde edilir:*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)=\frac{2}{\pi n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\,dv+O(1)\overline{\psi}(n). \tag{4.3}$$

$\psi_i(t)=\frac{\ln\left(t^{r_i}+e\right)}{t^s}$, $0<r_i<s$, $0<r_i<1$, $i=1,2$, ve $\psi_i(t)=\frac{t^{\varepsilon_i}-c_i}{t^{\varepsilon_i+s}}$, $\varepsilon_i>0$, $c_i\ge 0$, $i=1,2$, fonksiyonları 4.2. Sonuç'un koşullarını sağlayacaktır.

Bu sonuç $\lim_{v\to\infty} g_i(v)=c_i>0$ ile $g_i(v)=v^s\,\psi_i(v)$, $s>0$, $i=1,2$, $v\ge b\ge 1$ üzerinde yukarı bükey olduğu durumda (3.83) ile çakışır.

4.3. Sonuç $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ *ve* $\lim_{v\to\infty} g_i(v)=\infty$ *ile* $g_i(v)=v^s\,\psi_i(v)$, $s>0$, $i=1,2$, $v\ge b\ge 1$ *üzerinde yukarı bükey olsun.* $\alpha_0(\psi_2)\in(1/s,\infty)$ *ise, bu durumda* $\overline{\psi}(n)=\left(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ *ve* $O(1)$, *n ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere,* $n\to\infty$ *iken,*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)=O(1)\overline{\psi}(n). \tag{4.4}$$

$\psi_i(t)=\frac{1}{t^{\varepsilon_i}}$, $0<\varepsilon_i<s<\varepsilon_{i+1}$, $i=1,2$, fonksiyonları 4.3. Sonuç'un koşullarını sağlayacaktır.

Şimdi de, 4.1.Teoreme benzer olarak $\lim_{v\to\infty} g_i(v)=\infty$ ile aşağı bükey olduğu durumda $\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)$ değeri için elde edilen asimptotik formülleri verelim.

4.2. Teorem $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ *ve* $\lim_{v\to\infty} g_i(v) = \infty$ $i = 1,2$, *ile* $g_i(v) = v^s\,\psi_i(v)$, $s > 1$, $v \geq b \geq 1$ *üzerinde aşağı bükey olsun. Bu durumda* $\overline{\psi}(n) = \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ *ve* $O(1)$, n *ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere,* $n \to \infty$ *iken;*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right) = \frac{2}{\pi n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\,dv + \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}\,dv + O(1)\overline{\psi}(n). \qquad (4.5)$$

4.4. Sonuç . $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ *ve* $\lim_{v\to\infty} g_i(v) = \infty$ *ile* $g_i(v) = v^s\,\psi_i(v)$, $s > 1$, $i = 1,2$, $v \geq b \geq 1$ *üzerinde aşağı bükey olsun. ise, bu durumda* $\overline{\psi}(n) = \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)\right)^{1/2}$ *ve* $O(1)$, n *ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik olmak üzere,* $n \to \infty$ *iken aşağıdaki asimptotik eşitlikler elde edilir:*

1. $\alpha_0(\psi_2) = \infty$ *ise,*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right) = \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \psi_2(v)\,dv + O(1)\overline{\psi}(n)$$

2. $\alpha_0(\psi_2) \in (1/s, \infty)$ *ise,*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right) = O(1)\overline{\psi}(n)$$

3. $\alpha_0(\psi_2) = 1/s$ *ise,*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right) = \frac{2}{\pi n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\,dv + O(1)\overline{\psi}(n)$$

$i = 1,2$ için $\alpha_i > 1$ olmak üzere $\psi_i(t) = \dfrac{1}{\ln^{\alpha_i}(t+2)}$ ve $1 < r_i < s$, $c_i > 0$ için $\dfrac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} \neq const$ olmak üzere $\psi_i(t) = \dfrac{\ln\left(\sqrt{x} + c_i\right)}{x^{r_i}}$ fonksiyonları bu sonuçların koşullarını sağlayacaktır.

4.2. YARDIMCI BULGULAR

Bu bölümde teoremlerin ispatında kullanılacak olan yardımcı sonuçlar verilmiştir.

4.1. Önerme *$\psi_1 \in \mathfrak{M}$ ve $\lim_{v\to\infty} g_1(v) = \infty$ ya da $\lim_{v\to\infty} g_1(v) = c > 0$ ile $g_1(v) = v^s\,\psi_1(v)$, $s > 0$, $v \ge b \ge 1$ üzerinde yukarı bükey olsun. Bu durumda $O(1)$, n ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik ve*

$$\tau_1(v) = \begin{cases} \dfrac{v\psi_1(1)}{n^s} & ,0 \le v \le 1 \\ \dfrac{v^s\psi_1(v)}{n^s} & ,1 \le v \le n \\ \psi_1(v) & ,v \ge n \end{cases} \tag{4.6}$$

olmak üzere, $n \to \infty$ iken;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_1(v) \cos vt\, dv \right| dt = O(1)\psi_1(n)\,. \tag{4.7}$$

4.2. Önerme *$\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ ve $\lim_{v\to\infty} g_2(v) = \infty$ ya da $\lim_{v\to\infty} g_2(v) = c > 0$ ile $g_2(v) = v^s\,\psi_2(v)$, $s > 0$, $v \ge b \ge 1$ üzerinde yukarı bükey olsun. Bu durumda $O(1)$, n ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik ve*

$$\tau_2(v) = \begin{cases} \dfrac{v\psi_2(1)}{n^s} & ,0 \le v \le 1 \\ \dfrac{v^s\psi_2(v)}{n^s} & ,1 \le v \le n \\ \psi_2(v) & ,v \ge n \end{cases} \tag{4.8}$$

olmak üzere, $n \to \infty$ iken;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_2(v) \sin vt\, dv \right| dt = \frac{2}{\pi n^s} \int_1^{n} v^{s-1}\psi_2(v)dv + \frac{2}{\pi} \int_n^{\infty} \frac{\psi_2(v)}{v} dv + O(1)\psi_2(n) \tag{4.9}$$

4.3. Önerme $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ *ve* $\lim_{v\to\infty} g_1(v)=\infty$, *ile* $g_1(v)=v^s\,\psi_1(v)$, $s>1$, $v\geq b\geq 1$ *üzerinde aşağı bükey olsun. Bu durumda* $O(1)$, n *ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik ve*

$$\tau_1(v)=\begin{cases} \dfrac{v\psi_1(1)}{n^s} & ,0\leq v\leq 1 \\ \dfrac{v^s\psi_1(v)}{n^s} & ,1\leq v\leq n \\ \psi_1(v) & ,v\geq n \end{cases}$$

olmak üzere, $n\to\infty$ *iken;*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau_1(v)\cos vt\,dv\right|dt=O(1)\psi_1(n)\,.$$

4.4. Önerme $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ *ve* $\lim_{v\to\infty} g_2(v)=\infty$, *ile* $g_2(v)=v^s\,\psi_2(v)$, $s>1$, $v\geq b\geq 1$ *üzerinde aşağı bükey olsun. Bu durumda* $O(1)$, n *ye göre düzgün sınırlı bir özdeşlik ve*

$$\tau_2(v)=\begin{cases} \dfrac{v\psi_2(1)}{n^s} & ,0\leq v\leq 1 \\ \dfrac{v^s\psi_2(v)}{n^s} & ,1\leq v\leq n \\ \psi_2(v) & ,v\geq n \end{cases}$$

olmak üzere, $n\to\infty$ *iken;*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau_2(v)\sin vt\,dv\right|dt=\frac{2}{\pi n^s}\int_1^{n}v^{s-1}\psi_2(v)dv+\frac{2}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{\psi_2(v)}{v}dv+O(1)\psi_2(n)$$

4.3. TEMEL VE YARDIMCI BULGULARIN İSPATI

Öncelikle yardımcı bulguların ispatı verilecek, daha sonrada temel bulgular ispatlanacaktır.

4.3.1. Yardımcı Bulguların İspatı

4.1. Önerme'nin İspatı.

Kısmi integrasyon ile,

$$\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vt\,dv = -\frac{1}{t}\int_0^n \tau_1'(v)\sin vt dv - \frac{1}{t}\int_n^\infty \tau_1'(v)\sin vt dv$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vt\,dv\right|dt \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{t}\int_0^n \tau_1'(v)\sin vt dv\right|dt +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{t}\int_n^\infty \tau_1'(v)\sin vt dv\right|dt =: I_{n,1} + I_{n,2} \tag{4.10}$$

dir. (4.10) ifadesindeki, $I_{n,1}$ integralinin

$$I_{n,1} = O(1)\psi_1(n) \tag{4.11}$$

olduğunu gösterelim. Herhangi bir sabit $n \in \mathbb{N}$ için $\tau_n'(v)$ fonksiyonu $[0,n]$ üzerinde artmayan bir fonksiyon olduğundan, bütün $t > 0$ için

$$\frac{1}{t}\int_0^n \tau_1'(v)\sin vt dv \ge 0 \tag{4.12}$$

dır. (4.12) ifadesi göz önünde tutularak

$$I_{n,1} = 2\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_0^n \tau_1'(v)\sin vt dv\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^n \tau_1'(v)\int_0^\infty \frac{\sin vt}{t}dt dv =$$

$$\int_0^n \tau_1'(v)dv = \tau_1(n) - \tau_1(0) = \psi_1(n).$$

olacaktır. Buradan da (4.11) elde edilir. [11] de Lemma 4.3.1'in ispatından

$$I_{n,2} = O(1)\psi_1(n) \tag{4.13}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece (4.11) ve (4.13) e göre (4.7) elde edilir. 4.1. Önerme'nin ispatı tamamlanır. ■

4.2. ve 4.4. Önerme'nin İspatı

$\tau_2(v)$ fonksiyonu $[0,n]$ aralığı üzerinde artan ve

$$\lim_{v\to\infty}\tau_2(v)=\lim_{v\to\infty}\tau_2'(v)=0$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olmak üzere, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur. İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından

$$I(t):=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_2(v)\sin vt dv$$

olarak alalım. Buna göre, $I(t)$ integraline iki kez kısmi integrasyon uygulayarak,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_2(v)\sin vt dv=\frac{1}{\pi t^2}\Big[\Big(\tau_2'(1-0)-\tau_2'(1+0)\Big)\sin t+$$

$$+\Big(\tau_2'(n-0)-\tau_2'(n+0)\Big)\sin nt-$$

$$-\left(\int_1^n \tau_2''(v)\sin vt dv+\int_n^\infty \tau_2''(v)\sin vt dv\right)\Big] \tag{4.14}$$

elde edilir. $g_2(v)=v^s\psi_2(v)$ artan olduğundan, (4.14) den

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_2(v)\sin vt dv\right|\le\frac{1}{\pi t^2}\left(2s\frac{\psi_2(n)}{n}+\frac{\psi_2(1)}{n^s}\right)\le\frac{(2s+1)\psi_2(n)}{\pi t^2} \tag{4.15}$$

olacaktır. Böylece (4.15) e göre,

$$\int_{|t|\ge\pi/2}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_2(v)\sin vt dv\right|dt\le\frac{2(2s+1)}{\pi^2}\psi_2(n)=O(1)\psi_2(n) \tag{4.16}$$

elde edilir. Şimdi $I(t)$ integralinin orijinin komşuluğunda üstten değerlendirilmesini inceleyelim. Buna göre, kısmi integrasyon ile

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_2(v)\sin vt dv=\frac{1}{\pi t}\left(\int_0^n \tau_2'(v)\cos vt dv+\int_n^\infty \tau_2'(v)\cos vt dv\right) \tag{4.17}$$

dir. (4.17) eşitliğinin sağındaki integrali değerlendirmek için ilk olarak $[0,n]$ aralığı üzerindeki integrali ele alacak ve bu aralık üzerinde ele alınan integral için

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\left|\frac{1}{t}\int_0^n \tau_2'(v)\cos vt dv\right|dt=\frac{1}{n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)dv+O\big(\psi_2(n)\big) \tag{4.18}$$

eşitliğinin doğru olduğu kanıtlanacaktır. Bu durumda (4.18) in sol tarafındaki ifadede integral işareti altındaki fonksiyonu aşağıdaki formda ele alalım:

$$\frac{1}{t}\int_0^n \tau_2'(v)\cos vt dv = \frac{1}{t}\int_0^{\pi/2t} \tau_2'(v)\cos vt dv + \frac{1}{t}\int_{\pi/2t}^{n} \tau_2'(v)\cos vt dv =: I_1(t) + I_2(t). \quad (4.19)$$

(4.18) eşitliğini kanıtlamak için aşağıdaki eşitlikleri kanıtlamak yetecektir:

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2} |I_1(t)| dt = \frac{1}{n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)dv + O(\psi_2(n)) \quad (4.20)$$

ve

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2} |I_2(t)| dt \le O(\psi_2(n)). \quad (4.21)$$

$\tau_2'(v)$, $[0,n]$ üzerinde negatif olmayan ve artmayan fonksiyon olduğundan, $t \in [\pi/2n, \pi/2]$ için $I_1(t) \ge 0$ ve $t \in [\pi/2n, \pi/2]$ için $I_2(t) \le 0$ olacaktır. Böylece integrasyon mertebesi değiştirilerek,

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2} |I_1(t)| dt = \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{1}{t}\int_0^{\pi/2t} \tau_2'(v)\cos vt\, dv\, dt =$$

$$= \int_0^1 \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{\cos vt}{t} dt\, d\tau_2(v) + \int_1^n \int_{\pi/2n}^{\pi/2v} \frac{\cos vt}{t} dt\, d\tau_2(v) =$$

$$= \int_0^1 \int_{\pi v/2n}^{\pi v/2} \frac{\cos z}{z} dz\, d\tau_2(v) + \int_1^n \int_{\pi v/2n}^{\pi/2} \frac{\cos z}{z} dz\, d\tau_2(v) =$$

$$= \left(\tau_2(v)\int_{\pi v/2n}^{\pi v/2} \frac{\cos z}{z} dz\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\tau_2(v)}{v}\left(\cos\frac{\pi v}{2} - \cos\frac{\pi v}{2n}\right)dv +$$

$$+ \left(\tau_2(v)\int_{\pi v/2n}^{\pi/2} \frac{\cos z}{z} dz\right)\Bigg|_1^n + \int_1^n \frac{\tau_2(v)}{v}\cos\frac{\pi v}{2n} dv =$$

$$= \frac{1}{n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\cos\frac{\pi v}{2n} dv + \frac{\psi_2(1)}{n^s}\int_0^1 \left(\cos\frac{\pi v}{2n} - \cos\frac{\pi v}{2}\right)dv =$$

$$= \frac{1}{n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\cos\frac{\pi v}{2n} dv + O\left(\frac{1}{n^s}\right). \quad (4.22)$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{1}{n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\cos\frac{\pi v}{2n}dv=\frac{1}{n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)dv+O(\psi_2(n)) \tag{4.23}$$

asimptotik eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Bunun için öncelikle aşağıdaki değerlendirmeyi göz önünde tutalım.

$$\frac{1}{n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\left(1-\cos\frac{\pi v}{2n}\right)dv=\frac{2}{n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\frac{\sin \pi v/4n}{\pi v/4n}\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi v}{4n}dv\le$$

$$\le\frac{2}{n^s}\psi_2(n)n^s\frac{\pi}{4n}\int_1^n\sin\frac{\pi v}{4n}dv\le 2\psi_2(n).$$

Buradan (4.22) ve (4.23) ü birleştirerek (4.20) elde edilir. Şimdi (4.21) eşitsizliğini gösterelim. $t\in[\pi/2n,\pi/2]$ için $I_2(t)\le 0$ olduğundan,

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2}|I_2(t)|dt=-\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\frac{1}{t}\int_{\pi/2t}^{n}\tau_2'(v)\cos vt\,dv\,dt=-\int_1^n\tau_2'(v)\int_{\pi/2v}^{\pi/2}\frac{\cos vt}{t}\,dt\,dv=$$

$$=-\int_1^n\tau_2'(v)\int_{\pi/2}^{\pi v/2}\frac{\cos z}{z}dz\,dv\le 2ci\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_1^n\tau_2'(v)dv\le O(\psi_2(n)). \tag{4.24}$$

Böylece (4.20) ve (4.24) ü göz önünde tutarak, (4.18) elde edilir.

Şimdi (4.17) nin sağ tarafındaki $[n,\infty)$ aralığındaki integrali değerlendirelim. $\tau_2(v)$ fonksiyonunun $[n,\infty)$ aralığı üzerinde $\lim\limits_{v\to\infty}\tau_2(v)=0$ ile aşağı bükey ve $-\frac{n\psi_2'(n)}{\psi_2(n)}<s$ olduğunu göz önünde tutarak, kısmi integrasyon ile

$$\frac{1}{\pi t}\left|\int_n^\infty\tau_2'(v)\cos vt\,dv\right|=\frac{1}{\pi t^2}\left|\left(\tau_2'(v)\sin vt\Big|_n^\infty\right)-\int_n^\infty\tau_2''(v)\sin vt\,dv\right|\le$$

$$\le\frac{2}{\pi nt^2}\left(-\frac{n\psi_2'(n)}{\psi_2(n)}\right)\psi_2(n)\le\frac{2s\psi_2(n)}{\pi nt^2} \tag{4.25}$$

olur. (4.25) e göre de

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\frac{1}{\pi t}\left|\int_n^\infty\tau_2'(v)\cos vt\,dv\right|dt\le\frac{2s}{\pi^2}\psi_2(n)=O(1)\psi_2(n) \tag{4.26}$$

asimptotik değerlendirmesi elde edilir.

Buradan (4.18) ve (4.25) ifadeleri birleştirilirse

$$\int\limits_{\pi/2n\le|t|\le\pi/2}\left|\frac{1}{t}\int_0^n \tau_2'(v)\cos vt\,dv\right|dt=\frac{2}{\pi n^s}\int_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\,dv+O(1)\,\psi_2(n) \qquad (4.27)$$

dir.

Şimdi orijinin komşuluğundaki değerlendirmeye bakalım. Buna göre, $[n,\infty)$ üzerinde $\tau_2(v)=\psi_2(v)$ olduğundan, [11, syf. 204] den biliyoruz ki, $\forall n\ge 1$ için $a>0$ sayısı vardır öyle ki,

$$\int\limits_{|t|\le a/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_n^\infty \tau_2(v)\sin vt dv\right|dt=\frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}dv+O(1)\overline{\psi}(n) \qquad (4.28)$$

sağlanır. Ayrıca

$$\frac{2}{\pi}\left|\int_{a/n}^{\pi/2n}\int_n^\infty \tau_2(v)\sin vt\,dv\right|dt\le\frac{2}{\pi}\left|\int_{a/n}^{\pi/2n}\frac{\psi_2(n)}{nt^2}dt\right|\le O(1)\,\psi_2(n) \qquad (4.29)$$

olacaktır. Son olarak

$$\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^n \tau_2(v)\sin vt\,dv\right|dt=2\int_0^{\pi/2n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^n \tau_2(v)\sin vt\,dv\right|dt$$

integralini değerlendirelim. $\tau_2(v)$ fonksiyonunun $[0,n]$ aralığı üzerinde artan sürekli bir fonksiyon olduğunu göz önünde tutarak, $|\tau_2(v)|\le\psi_2(n)$ olduğunu biliyoruz. Buradan da,

$$\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^n \tau_2(v)\sin vt\,dv\right|dt\le 2\psi_2(n)=O(1)\,\psi_2(n) \qquad (4.30)$$

dir.

4.4. Önerme'nin ispatında (4.21) değerlendirmesi hariç geriye kalan durumlar 4.2. Önerme'nin ispatına benzer şekilde yapılır. Şimdi 4.4. Önerme için (4.21) değerlendirmesini gösterelim. Bunun için, $\varphi(v)$ bütün $v\ge 1$ için negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\phi_t(x)=\int_{\pi/2t}^{x}\varphi(v)\cos vtdv \quad ,x>0,\ t>0 \qquad (4.31)$$

fonksiyonunu ele alalım. $\phi_t(x)$ fonksiyonu sabit $\forall\ t$ için sürekli bir fonksiyondur. Aynı zamanda $\cos vt$ fonksiyonunun ardışık v_k ve v_{k+1} sıfırları arasındaki her aralık üzerinde $\phi_t(x)$ fonksiyonu basit bir z_k sıfırına sahiptir [11,Chpt.III]. Böylece $z_{k'}$

nün n noktasına soldan en yakın sıfır olduğunu varsayarak $n-v_k \le \dfrac{2\pi}{t}$ olduğu bulunur. Bunu dikkate alarak, (4.31) de $\varphi(v)=\tau_2'(v)$ seçilirse,

$$\frac{1}{t}\int_{\pi/2t}^{n}\tau_2'(v)\cos vtdv=\frac{1}{t}\int_{z_{k'}}^{n}\tau_2'(v)\cos vtdv$$

olur. Buradan da,

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\left|\frac{1}{t}\int_{\pi/2t}^{n}\tau_2'(v)\cos vtdv\right|dt\le\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\tau_2'(n)\frac{n-z_k}{t}dt\le 4s\frac{\psi_2(n)(n-1)}{n}\le 4s\psi_2(n) \quad (4.32)$$

olacaktır.

Böylece, $n\ge 1$ için (4.18), (4.26)-(4.30) ve (4.32) ifadelerini göz önünde tutarak (4.9) asimptotik eşitliği 4. 2. Önerme ve 4. 4. Önerme için elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

4.3. Önerme'nin İspatı.

$[0,\infty)$ üzerinde tanımlanan

$$H_n(v)=\begin{cases} v\psi_1'(n)+\psi_1(n)-n\psi_1'(n) & ,0\le v\le n\\ \psi_1(v) & ,v\ge n\end{cases}$$

fonksiyonu göz önünde tutalım. $H_n(v)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde monoton azalan ve aşağı bükey olan sürekli bir fonksiyondur. Diğer yandan, $[n,\infty)$ aralığı üzerinde $\tau_1(v)$ fonksiyonu ile çakışır. $\tau_1(v)$ fonksiyonu da, $[0,n]$ aralığı üzerinde artan, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde pozitif olan sürekli bir fonksiyondur.

Ayrıca $\tau_1'(v)$, $[0,n]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli olmak üzere, $[n,\infty)$ aralığı üzerinde $\lim\limits_{v\to\infty}\tau_1(v)=\lim\limits_{v\to\infty}\tau_1'(v)=0$ olsun. $\int_0^{\infty}\tau_1(v)\cos vtdv$ integraline iki kez kısmi integrasyon uygulayarak,

$$\int_0^{\infty}\tau_1(v)\cos vtdv=\frac{1}{t^2}\left[\frac{-\psi_1(1)+\psi_1(n)\cos nt-\psi_1'(1)\cos t}{n}-\right.$$

$$\left.-\left(\int_1^{n}\tau_1''(v)\cos vtdv+\int_n^{\infty}\tau_1''(v)\cos vtdv\right)\right] \quad (4.33)$$

olur. $g_1(v)$ $\lim\limits_{v\to\infty} g_1(v)=\infty$ ile aşağı bükey olduğundan, (4.33) den

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vtdv\right| \le \frac{2}{\pi t^2}\left(\frac{\psi_1(1)+\psi_1'(1)}{n}\right) \tag{4.34}$$

elde edilir.

Böylece (4.34) e göre, $c_1=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\psi_1(1)+\psi_1'(1)}{\psi_1(1)}\right)$ olmak üzere,

$$\int\limits_{|t|\ge n/2n-1}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vtdv\right|dt = 2\int\limits_{n/2n-1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vtdv\right|dt \le c_1\psi_1(n) \tag{4.35}$$

dir. Şimdi

$$2\int_0^{1/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vtdv\right|dt = O(1)\psi_1(n), \tag{4.36}$$

$$2\int_{1/n}^{n/2n-1}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vtdv\right|dt = O(1)\psi_1(n) \tag{4.37}$$

asimptotik gösterimlerinin doğruluğunu gösterelim. İlk olarak, (4.36) ifadesini kanıtlayalım. İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından

$$2\int_0^{1/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vtdv\right|dt \le 2\int_0^{1/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^n \tau_1(v)\cos vtdv\right|dt + 2\int_0^{1/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_n^\infty \tau_1(v)\cos vtdv\right|dt =: I_1+I_2$$

gösterimi kullanılacaktır. Buna göre I_1 integrali için değerlendirme yapılırsa, $g_1(v)$ $[0,n]$ üzerinde aşağı bükey olduğundan, bu aralık üzerinde $|\tau_1(v)|\le\psi_1(n)$ dir. Bu durumda,

$$I_1 \le \frac{2}{\pi}n\psi_1(n)\frac{1}{n} = \frac{2}{\pi}\psi_1(n) \tag{4.38}$$

eşitliği elde edilir. I_2 integrali için $H_n(v)$ fonksiyonuna göre

$$I_2 = 2\int_0^{1/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_n^\infty H_n(v)\cos vtdv\right|dt \le 2\int_0^{1/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n(v)\cos vtdv\right|dt +$$

$$+2\int_0^{1/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^n H_n(v)\cos vtdv\right|dt := I_{21}+I_{22}$$

yazılabilir. Basitlik için

$$I_{211}:=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}H_n(v)\cos vtdv$$

olmak üzere, $I_{21}=O(1)\psi_1(n)$ olduğunu gösterelim. I_{211} için kısmi integrasyon ile,

$$I_{211}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}-H_n'(v)\cos vtdv$$

dir. $H_n(v)$ konveks artmayan bir fonksiyon olduğundan, $\left(-H_n'(v)\right)$ negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyondur. Böylece herhangi bir $t>0$ için,

$$\frac{1}{t}\int_0^{\infty}-H_n'(v)\cos vtdv>0 \tag{4.39}$$

olacaktır. (4.39) a göre,

$$I_{21}=2\int_0^{1/n}\left|I_{211}\right|dt=2\int_0^{1/n}\frac{1}{t}\int_0^{\infty}-H_n'(v)\cos vtdvdt\,.$$

eşitliği yazılırsa, Fubini teoremi ile,

$$I_{21}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(-H_n'(v)\right)\int_0^{1/n}\frac{\cos vt}{t}dt\,dv\leq$$

$$\leq H_n(0)=\psi_1(n)+n\left|\psi_1'(n)\right|\leq(1+s)\psi_1(n) \tag{4.40}$$

olduğu elde edilir. Diğer taraftan $H_n(v)$ fonksiyonunun monoton azalanlığından,

$$I_{22}=2\int_0^{1/n}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{n}H_n(v)\cos vtdv\right|dt\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{1/n}\int_0^{n}\left|H_n(v)\right|dvdt\leq\frac{2n}{\pi}\int_0^{1/n}H_n(0)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\psi_1(n)+n\left|\psi_1'(n)\right|\right)\leq\frac{2(1+s)}{\pi}\psi_1(n) \tag{4.41}$$

eşitsizliğine göre $I_{22}=O(1)\psi_1(n)$ olacaktır. Dolayısıyla (4.38), (4.40) ve (4.41) e göre (4.36) elde edilir. Şimdi (4.37) deki eşitsizliği kanıtlayalım. Kısmi integrasyon ile

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau_1(v)\cos vtdv=\frac{1}{\pi t}\int_0^{n}\tau_1'(v)\sin vtdv+\frac{1}{\pi t}\int_n^{\infty}\left(-\tau_1'(v)\right)\sin vtdv=:J_1+J_2$$

dir. Buna göre,

$$2\int_{1/n}^{n/2n-1}\left|J_1\right|dt=O(1)\psi_1(n) \tag{4.42}$$

ifadesinin doğruluğunu kanıtlayalım. Bu amaç için, $\varphi(v)$ bütün $v \geq 1$ için negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$f_t(x) = \int_0^x \varphi(v)\sin vtdv \quad , x>0,\, t>0 \tag{4.43}$$

fonksiyonunu göz önünde tutalım. $f_t(x)$ fonksiyonu sabit $\forall$ t için sürekli bir fonksiyondur. Aynı zamanda $\sin vt$ fonksiyonunun ardışık v_k ve v_{k+1} sıfırları arasındaki her aralık üzerinde $f_t(x)$ fonksiyonu basit bir x_k sıfırına sahiptir [11]. Böylece $x_{k'}$ nün n noktasına soldan en yakın sıfır olduğunu varsayarak $n - v_k \leq \frac{2\pi}{t}$ olduğu bulunur. Bunu dikkate alarak, (4.43) de $\varphi(v) = \tau_1'(v)$ seçilirse,

$$|J_1| = \left| \frac{1}{\pi t} \int_{x_{k'}}^{n} \tau_1'(v)\sin vtdv \right|$$

olur. Buradan da $\tau_1'(v)$, $[0,n]$ aralığı üzerinde azalmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$2\int_{1/n}^{n/2n-1} |J_1|\,dt \leq \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{n/2n-1} \tau_1'(n)(n-x_{k'})\,dt \leq 4\tau_1'(n)\int_{1/n}^{n/2n-1}\frac{dt}{t^2} =$$

$$= 4\left(\frac{\psi_1(n) - n\left|\psi_1'(n)\right|}{n}\right)\frac{(n-1)^2}{n} \leq 4\psi_1(n) \tag{4.44}$$

dir. Böylece (4.42) elde edilir. Şimdi de

$$2\int_{1/n}^{n/2n-1} |J_2|\,dt = O(1)\psi_1(n) \tag{4.45}$$

değerlendirmesini elde edelim. (4.42) deki değerlendirmeye benzer olarak, $\varphi(v)$ bütün $v \geq 1$ için negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$g_t(y) = \int_y^\infty \varphi(v)\sin vtdv \quad , \ x>0, \ \ t>0 \tag{4.46}$$

fonksiyonunu göz önünde tutalım. Bu fonksiyon sabit $\forall$ t için sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $\sin vt$ fonksiyonunun ardışık v_k ve v_{k+1} sıfırları arasındaki her aralık üzerinde $g_t(y)$ fonksiyonu basit bir y_k sıfırına sahiptir [11]. Böylece $y_{k'}$ nün

n noktasına sağdan en yakın sıfır olduğu varsayılırsa, $n \le y_{k'} \le n + \dfrac{2\pi}{t}$ olduğu bulunur. $\left(-\tau_1'(v)\right)$ negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olduğundan (4.46) da $\varphi(v) = -\tau_1'(v)$ seçilirse,

$$|J_2| = \left| \frac{1}{\pi t} \int_n^{\infty} \left(-\tau_1'(v)\right) \sin vt dv \right| \le \frac{1}{\pi t} \int_n^{n+2\pi/t} \left|\tau_1'(v)\right| dv \le \frac{2\left|\psi_1'(n)\right|}{t^2}$$

elde edilir. Buradan da

$$2 \int_{1/n}^{n/2n-1} |J_2| dt \le 4\left|\psi_1'(n)\right| \int_{1/n}^{n/2n-1} \frac{dt}{t^2} \le 4s\psi_1(n) \tag{4.47}$$

olduğundan (4.45) gösterilmiş olur. Böylece (4.44) ve (4.47) dan (4.37) ifadesi ispatlanır. (4.36) ve (4.37) ye göre de (4.7) kanıtlanmış olur. ■

4.3.2. Temel Bulguların İspatı

4.1. - 4.2. Teorem'in İspatı

[11, Chp. IV] den biliyoruz ki, herhangi bir $f \in C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ için,

$$\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_{1+}(t) + \hat{\tau}_{2-}(t) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \tau_1(v)\cos vt dv + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \tau_2(v)\sin vt dv \tag{4.48}$$

olmak üzere,

$$f(x) - Z_n^s(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\bar{\psi}}(x-t)\hat{\tau}_n(t) dt \tag{4.49}$$

eşitliği doğrudur. Burada, $i = 1,2$ için sırasıyla (4.6) ve (4.8) ile belirli olan $\tau_i(v)$ fonksiyonları bütün $v \ge 0$ için sürekli ve onların $\hat{\tau}_{1+}(t)$ ve $\hat{\tau}_{2-}(t)$ dönüşümleri tüm reel eksen üzerinde mutlak toplanabilirdir.

$C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ sınıfları bir argümentin sağ kayması altında değişmezdir. Yani, $f \in C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ ise bu durumda herhangi bir sabit $h \in \mathbb{R}$ için $f_1(x) = f(x+h)$ fonksiyonu da $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ sınıfına aittir. Buna göre (4.49) dan,

$$\mathcal{E}_n\left(C_{\infty}^{\bar{\psi}}, Z_n^s\right)_C = \sup_{f \in C_{\infty}^{\bar{\psi}}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{\bar{\psi}}(-t)\hat{\tau}_n(t) dt \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}_n(t)\right| dt \tag{4.50}$$

olacaktır.

Diğer taraftan $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ sınıfında hemen hemen her yerde $|\varphi(t)| \le 1$ doğru olduğundan, $f^{\overline{\psi}}(x) = \varphi(x)$ eşitliğini sağlayan bir $f(x) = f(\varphi; x)$ fonksiyonu vardır. Buradan, $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ da bir $f_*(t)$ fonksiyonu vardır, öyle ki $\left\{t : |t| \le \dfrac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{t : |t| \ge \dfrac{\pi}{2}\right\}$ kümesi üzerinde

$$f_*^{\overline{\psi}}(t) = \begin{cases} sign\left(\hat{\tau}_n(t)\right) & , |t| \le \dfrac{\pi}{2} \\ periyodik & , |t| \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{4.51}$$

formuna sahiptir. Bu durumda (4.51) e göre,

$$f_*(0) - Z_n^s(f_*; 0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_n(t)| dt - \int_{|t| \ge \pi/2} |\hat{\tau}_n(t)| dt + \int_{|t| \ge \pi/2} f_*^{\overline{\psi}}(-t)\, \hat{\tau}_n(t)\, dt \ge$$

$$\ge \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_n(t)| dt - 2 \int_{|t| \ge \pi/2} |\hat{\tau}_n(t)| dt \tag{4.52}$$

(4.50) ve (4.52) eşitsizliklerini göz önünde tutarak, $n \to \infty$ iken,

$$\mathcal{E}_n\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}, Z_n^s\right)_C = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_n(t)| dt + \gamma(n) \qquad , s > 0 \tag{4.53}$$

elde edilir. Burada $\gamma(n) \le 0$ ve

$$|\gamma(n)| = O\left(\int_{|t| \ge \pi/2} |\hat{\tau}_n(t)| dt \right)$$

dir. Teoremin ispatı için öncelikle $|\gamma(n)| \le O(1)\overline{\psi}(n)$ olduğunu gösterelim. Buna göre,

$$|\gamma(n)| \le O(1) \int_{|t| \ge \pi/2} |\hat{\tau}_n(t)| dt \le O(1) \int_{|t| \ge \pi/2} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_1(v) \cos vt\, dv \right| dt +$$

$$+ O(1) \int_{|t| \ge \pi/2} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_2(v) \sin vtdv \right| dt =: \gamma_1 + \gamma_2$$

olarak yazılabileceğinden (4.7) ve (4.16) değerlendirmelerine göre, sırasıyla $\gamma_1 = O(1)\psi_1(n)$ ve $\gamma_2 = O(1)\psi_2(n)$ olduğu kolayca görülür. Buradan da

$\left|\gamma(n)\right| \leq O(1)\overline{\psi}(n)$ olur. Dolayısıyla bu son değerlendirmeyi göz önünde tutarak (4.53) ve 4.1.-4.2. Önermeler kullanılırsa (4.1) ve 4.3.-4.4. Önermeler kullanılırsa (4.5) elde edilir. Böylece 4.1.-4.2. Teorem ispatlanır. ■

4.1.-4.4. Sonuçların İspatı.

L'Hopital's ve Leibniz kuralı ile aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x^s}\displaystyle\int_1^x v^{s-1}\psi_2(v)\,dv}{\displaystyle\int_x^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}\,dv} = -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{s\displaystyle\int_1^x v^{s-1}\psi_2(v)\,dv}{x^s\psi_2(x)} =$$

$$= -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{s x^{s-1}\psi_2(x)}{s x^{s-1}\psi_2(x) - x^s\left|\psi_2'(x)\right|} = -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{x^s\left|\psi_2'(x)\right|}{s\psi_2(x)}}, \tag{4.54}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_2(x)}{\dfrac{1}{x^s}\displaystyle\int_1^x v^{s-1}\psi_2(v)\,dv} = \lim_{x\to\infty} s - \frac{x^s\left|\psi_2'(x)\right|}{s\psi_2(x)}, \tag{4.55}$$

ve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_x^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}\,dv}{\psi_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\dfrac{\psi_2(x)}{x}}{\psi_2'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi_2(x)}{x\left|\psi_2'(x)\right|}. \tag{4.56}$$

Buna göre, (4.1) ve (4.54)-(4.56) bağıntılarından (4.2)-(4.4) asimptotik değerlendirmeleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle, bulgular ve tartışma bölümünde ele alınan sonuçlar özetlenerek verilecek ve daha sonra bu tez çalışmasında ele alınan problemle bağlantılı olarak başka neler yapılabileceğinden bahsedilecektir.

5.1. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında özellikle 3. ve 4. Bölümde bahsedilen Kolmogorov-Nikol'skii problemleri ile ilgili çözümlere cevap veren

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{N}, U_n\left(f;x\right)\right)=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\left\|f\left(x\right)-U_n\left(f;x\right)\right\|_X \tag{5.1}$$

değeri için asimptotik eşitlikler elde edilmiştir. $C_\infty^{\bar{\psi}}$ sınıfındaki fonksiyonlara $U_n\left(f;x;\Lambda\right)=Z_n^{(s)}\left(f;x\right)$, $s>0$, Zygmund toplamı ile yaklaşımda $\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\bar{\psi}}, Z_n^s\right)$ değeri için asimptotik gösteriminin hesaplanması, yukarı ya da aşağı bükey olan $g_i\left(v\right)=v^s\,\psi_i\left(v\right)$, $i=1,2$, fonksiyonlarına bağlıdır. $\mathfrak{M}$, $v\geq 1$ için $\lim\limits_{v\to\infty}\psi\left(v\right)=0$ ile aşağı bükey olan sürekli fonksiyonların kümesini ve $\mathfrak{M}'$ kümeside

$$\int_1^\infty \frac{\psi\left(t\right)}{t}dt<\infty$$

koşulunu sağlayan $\mathfrak{M}$ kümesinin alt kümesini göstermek üzere, $\psi_i\left(v\right)$ $i=1,2$, fonksiyonları; $\psi_1\in\mathfrak{M}$ ($-\psi_1\in\mathfrak{M}$) ve $\psi_2\in\mathfrak{M}'$ ($-\psi_2\in\mathfrak{M}'$) olduğu durumlarda ele alınmıştır.

Buna göre, 4. Bölümde $g_i\left(v\right)$, $i=1,2$, fonksiyonlarının $\lim\limits_{v\to\infty}g_i\left(v\right)=\infty$ ya da $\lim\limits_{v\to\infty}g_i\left(v\right)=c>0$ ile yukarı bükey ve $s>1$ için $\lim\limits_{v\to\infty}g_i\left(v\right)=\infty$ ile aşağı bükey olduğu durumda $\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\bar{\psi}}, Z_n^s\right)$ değeri için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

A. 4.1. ve 4.2. Teorem' de elde edilen sonuçlar kesindir. Yani (4.1)-(4.5) asimptotik ifadelerindeki ana kısım iyileştirilemez. Ancak (4.1)-(4.5) ifadelerindeki ana kısım iki integralden meydana gelmektedir. Bu durumda doğal olarak karşımıza "Bu integrallerden hangisi ana kısmı oluşturur?" sorusu çıkar. Bu problem incelendiği zaman; bu integrallerin, $g_2\left(v\right)$ fonksiyonuna ve $t\to\infty$ iken limiti var olan $\alpha(t)=\dfrac{\psi(t)}{t\,\psi'(t)}$ fonksiyonuna bağlı olduğu belirlenmiştir. Buna göre $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)$ var ve $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=:\alpha_0(\psi)$ ile gösterilmek üzere, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

A.1. $\alpha_0(\psi_2)=\infty$ ise (4.1) asimptotik ifadesinde ana kısım $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \psi_2(v)\,dv$ integralinden oluşur.

A.2. $\alpha_0(\psi_2)=1/s$ ise (4.1) asimptotik ifadesinde ana kısım $\dfrac{2}{\pi n^s}\int\limits_1^n v^{s-1}\psi_2(v)\,dv$ integralinden oluşur.

A.3. $\alpha_0(\psi_2)\in(1/s,\infty)$ ise (4.1) asimptotik ifadesi $O(1)\overline{\psi}(n)$ ifadesine eşittir.

Dikkat edilmelidir ki, burada elde edilen sonuçlar kesindir. Dolayısıyla, 4.1. ve 4.2. Teorem ve onların sonuçları; $C_\infty^{\overline{\psi}}$ sınıfındaki fonksiyonlara Zygmund toplamı ile yaklaşımdaki sapmaların kesin mertebelerini ortaya koyar.

5.2. ÖNERİLER

- $C_\infty^{\overline{\psi}}$ sınıfında, L_p, $1\le p<\infty$, $\|f\|_{L_p}=\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ normu ile $(0,2\pi)$ üzerinde p-inci kuvvetten toplanabilir 2π-periyodik $f(t)$ fonksiyonları için (5.1) değerlendirmesi nasıl olacaktır?
- Keyfi periyotlu fonksiyonlar sınıfına göre ψ-integrali nasıl olacaktır? Bu ψ-integral sınıfına göre (5.1) ifadesinin düzgün norm altında asimptotik ifadesi ne olacaktır?
- (5.1) değeri için aynı problemin 4.1. Bölümde bahsedilen beş durum altında $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ sınıflarında değerlendirmesi nasıl olacaktır?

KAYNAKLAR

[1] Zygmund, A. “Smooth functions”, Duke Math. J., **12**: 47-76, (1945).

[2] Zygmund, A. “The approximation of functions by typical means of their Fourier series”, Duke Math. J., **v.12**: 695-704, (1945).

[3] Nagy, B. “Sur une générale procédés de sommation pour les séries de Fourier”, Hung. Acta Math., No. **3**: 14–62, (1948).

[4] Telyakovskii, S. A. “On approximation of differentiable functions by linear means of their Fourier series”, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **24**, No. **2**: 213–242, (1960).

[5] Telyakovskii, S. A. “On norms of trigonometric polynomials and approximation of differentiable functions by linear averages of their Fourier series I”, Trudy Mat Ins. Steklov, **v.62**: 61-97, (1961).

[6] Efimov, A. V. “On linear summation methods for Fourier series”, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **24**, No. **5**: 743–756, (1960).

[7] Bushev, D. N. “Approximation of classes of continuous periodic functions Zygmund sums [in Russian]”, Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev ,Preprint no. **84.56**: p.64, (1984).

[8] Bushev, D. N. and Stepanets, A. I. ”On the approximation of weakly differentiable periodic functions”, Ukr. Mat. Zh., **42**, No. **3**: 405–412, (1990).

[9] Federenko, A.S. “Approximation with Zygmund sums in classes of $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$”, Ukrainian Math. Journal, Vol.**52**. No **6**: 377-433 (2000).

[10] Federenko, A.S. “The speed of convergence of Zygmund sums on the classes $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ [in Ukrainian]”, Approximation and its applications, Proc. of Institute of Math. NAS of Ukrainian Kiev, Vol**.31**: 122-127, (2000).

[11] Stepanets, A. I. “Methods of Approximation Theory”, VSP, Boston, 919 s., (2005).

[12] Stepanets, A. I. “Classification and Approximation of Periodic Functions”, Kluwer Academic Publishers, Boston, 360 s., (1995).

[13] Stepanets, A. I. “Uniform Approximations by Trigonometric Polynomials”, VSP International Science Publishers,Boston, 484 s., (2001).

[14] Cheney, E. W. "Introduction to Approximation Theory", AMS Chelsea Publishing, 259 s., (1982).

[15] Debnaht, L. and Bhatta, D. "Integral Transforms and Their Applications", Taylor & Francis Group, 688 s., (2007).

[16] Wong, R. "Asymptotic Approximations of Integrals", SIAM, 543 s., (2001).

[17] Olver, F. W. J. "Asymptotics and Special Functions", AK Peters, Wellesley, 547 s., (1997).

[18] Dzyadyk, V. K. "Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions [in Russian]", Nauka, Moscow, 512 s., (1977).

[19] Jain, P. K. and Gupta, V.P. "Lebesgue Measure and Integration", Wiley Eastern Limited, New Delhi, India, 260 s., (1986).

[20] Zygmund, A. "Trigonometric Series (Volume I)", Cambridge University Press, London, 383 s., (1959).

[21] Zygmund, A. "Trigonometric Series (Volume II)", Cambridge University Press, London, 383 s., (1959).

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Şanlıurfa'nın Siverek ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Siverek'te tamamladı. 2000 yılında Mersin üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Aynı yıl Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim dalında yüksek lisans programını kazandı ve "Alan Üzerinde Ortogonal Polinomların Bazı Özellikleri" konu başlıklı Yüksek Lisans tez çalışmasını 2004 yılında tamamladı. 2004 yılı Eylül ayında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim dalında doktora programına girdi. Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ile Ukrayna Bilimler Akademisi Matematik Enstitüsü arasında yapılmış olan anlaşma çerçevesinde, tez çalışması için 2005 yılının Eylül ayından itibaren 8 ay süre ile ve 2007 yılının Nisan ayından itibaren 3 ay süre ile Ukrayna Bilimler Akademisi Matematik Enstitüsünde "Matematiksel Analiz" alanında çalışmalar yaptı. Aralık 2001 yılından bu yana Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'na bağlı olarak Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.