KATSAYILARI GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR OLAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİNİN KUADRATİK DESTESİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

ABDULLAH KABLAN

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

DOKTORA

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Hüsnü Kızmaz

MERSİN
Ekim - 2008

ÖZ

Hill operatörü olarak da bilinen periyodik katsayılı diferansiyel operatörlerin spektral analizi son yıllarda matematikte hızlı gelişen alanlardan biri olmuştur. Özellikle genelleşmiş potansiyele sahip periyodik diferansiyel denklemlerin spektral analizi fizik ve matematiğin ortak ilgili alanlarındandır.

Bu çalışmada katsayıları genelleşmiş fonksiyonlar olan Sturm-Liouville operatörlerinin kuadratik demetinin spektral özellikleri incelenmiştir. Buradaki önemli nokta verilen potansiyelin birinci dereceden genelleşmiş fonksiyon olmasıdır.

Yapılan çalışma sonucunda incelenen denklemin spektrum aralıkları tespit edilerek, spektrum yapısı hakkında bilgi verilmiş ve daha sonra özfonksiyonlar üzerine açılım formülleri bulunmuştur.

Anahtar kelimeler: Periyodik Katsayılı Diferansiyel Operatörler, Spektrum, Özfonksiyonlar Cinsinden Açılım Formülleri.

ABSTRACT

The spectral analysis of differential operators with periodic coefficients also known Hill operator is the one of the branch rapidly improving in mathematics. Especially, the spectral analysis of periodic differential equations with generalized potential is a common interest branch of physics and mathematics.

In this study, the spectral properties of pencil of Sturm-Liouville operator with generalized potential was investigated. It is important here that the potential is generalized function.

In the result of studied, the spectral intervals were determined and given an information about the structure of spectrum and then eigenfunction expansions were found.

Key Words: Differential Operators with Periodic Coefficients, Spectrum, Eigenfunction Expansions.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sırasında her zaman bana yol gösterici olan sayın hocam Prof. Dr. Hüsnü KIZMAZ'a ve bilimsel katkılarıyla tezin gelişiminde büyük rol sahibi ve ikinci danışmanım sayın hocam Doç. Dr. Manaf MANAFOV'a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yine tezin hazırlanmasında değerli önerileri ve katkıları bulunan sayın hocalarım Prof. Dr. Rauf AMİROV ve Doç. Dr. Khanlar MAMMADOV'a, Mersin Üniversitesinde bulunduğum sürece yardımlarını ve desteğini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e ve tüm bölüm elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora çalışmalarım süresince işime daha fazla zaman ayırmak adına hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan sevgili eşime ve ayrıca anne ve babama teşekkür ederim.

Son olarak bu çalışma sırasında verdiği burslarla bana destek olan bilimin ve bilim insanının destekçisi TUBİTAK kurumuna teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. MATERYAL ve METOT	7
3.1. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER	7
3.1.1. Lineer Operatörler	7
3.1.2. Lineer Diferansiyel İfadeler	7
3.1.3. Sınır Şartları	8
3.1.4. Homojen Sınır-Değer Problemi	9
3.1.5. Eşlenik Operatörler	10
3.2. DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZFONKSİYONLARI	13
3.3. DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU	16
3.4. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR İÇİN GREEN FONKSİYONU	18
3.4.1. Ters Operatörün Genel Tanımı	18
3.4.2. Green Fonksiyonu Anlamında Diferansiyel Operatörün Tersi	18
3.4.3. $L-\lambda 1$ Operatörü İçin Green Fonksiyonu	19
3.4.4. $L-\lambda 1$ Operatörünün Green fonksiyonunun Analitiklik Durumu	20
3.5. ÖZFONKSİYONLAR CİNSİNDEN AÇILIM FORMÜLÜ	21
3.5.1. Fourier Metodunun Temeli	21
3.5.2. Sturm-Liouville Açılımı	24

3.6. BAZI TANIM VE TEOREMLER 25
4. BULGULAR ve TARTIŞMA 27
4.1. PROBLEME GİRİŞ 27
4.2. FLOQUET TEOREMİ 28
4.3. t - PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİ 34
4.4. KARARLILIK VE KARARSIZLIK ARALIKLARI 38
4.5. SPEKTRUMUN YAPISI 46
4.6. ÖZFONKSİYONLAR CİNSİNDEN AÇILIM FORMÜLÜ 52
4.7. SPEKTRUM İÇİNDE BOŞLUKLARIN BULUNMAMASI KRİTERLERİ 61
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 66
5.1. SONUÇLAR 66
5.2. ÖNERİLER 67
KAYNAKLAR 68
ÖZGEÇMİŞ 73

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
H	Hilbert uzayı
$\ell(y)$	diferansiyel ifade
$U(y)$	y üzerinde belirtilmiş sınır şartı
L	diferansiyel operatör
λ	özdeğer
L^*	L operatörünün eşleniği
$\Delta(\lambda)$	karakteristik determinant
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrum kümesi
$\sigma'(L)$	L operatörünün resolvent kümesi
W_m^n	Sobelev uzayı
G	Green fonksiyonu
$C^{(n)}$	$[a,b]$ aralığında $n.$ mertebeye kadar tüm türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Atomlar, operatörler veya cebirler gibi birçok farklı kavram bir spektruma sahiptir. Bu yüzdendir ki; spektral teori modern matematiğin tarihi içerisinde fiziksel ve matematiksel yapılar hakkında en bilgi verici araç olmuştur. Son altmış yıldaki matematiksel yayınlarla bu konu, özellikle de özdeğerler ve spektral teori oldukça hızlı bir gelişim göstermiştir. Katı hal fiziğinde ve kristallerin kuantum mekaniği ile ilgili metallerin teorisinde ortaya çıkan periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin spektral analizi fizikçilerin ve matematikçilerin ortak ilgi alanlarından biri olmuştur.

Genel olarak periyodik katsayılı diferansiyel operatörler Hill denklemi olarak bilinir. Bu denklem $P(x)$ ve $Q(x)$ reel değerli ve aynı periyoda sahip periyodik fonksiyonlar olmak üzere

$$\left\{P(x)\,y'(x)\right\}' + Q(x)\,y(x) = 0$$

biçimindedir. Bu operatör ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı 1952 yılında W. Magnus ve S. Winkler tarafından özetlenmiş ve bu çalışmada denklemin karakteristik değerleri ve diskriminantı incelenmiş, kararlılık ve kararsızlık aralıkları tespit edilmiştir. 1973 yılında M.S.P. Estham Magnus ve Winkler'in de çalışmalarından faydalanarak periyodik katsayılı diferansiyel operatörlerin spektral teorisi üzerine bir kitap yazmış ve bu kitabında periyodik katsayılı diferansiyel operatörlerin kararlılık ve kararsızlık aralıkları üzerinde durmuş, çözümlerin sıfırlarını incelemiş ve asimptotik formülleri elde etmiştir. Diğer taraftan E.C. Titchmarsh yine bu tür operatörlerin özfonksiyonları üzerine açılım formüllerini elde etmiştir. Daha sonra G.S. Guseinov [1] ile D. Buschman, G. Stolz ve J. Weidmann [2] yine bu tür denklemleri ancak bu defa kuadratik demet olarak spektral özelliklerini incelemiştir. V.A. Mikhailets, A.V. Sobolev [3], M.M. Hechtman, I.V. Stankevich [4], V. A. Dmitrushchenkov [5] ve M. Dzh. Manafov [6] katsayıları genelleşmiş fonksiyonlar olan ancak kuadratik demet olmayan diferansiyel operatörleri incelemiştir.

Bu çalışmada

$$\ell_{\alpha}[y] \equiv -y'' + 2\alpha\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)\,y + q(x)\,y = \lambda^2 y, \quad -\infty \le x \le \infty$$

biçiminde katsayıları genelleşmiş periyodik fonksiyonlar olan ikinci mertebeden periyodik diferansiyel denklemin spektral yapısı incelenmiştir. Burada $q(x)$ reel, periyodik, parçalı sürekli bir fonksiyon, $\left(q(x+1)=q(x)\right)$; $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonu, $\alpha \neq 0$ reel sayı ve λ spektral parametredir.

İlk bölümde çalışmada öncelikle inceleme için gerekli olan tanım, teorem ve yöntemler üzerinde durulmuştur. Bu bölümde sunulan teoremlerin ispatları tezde verilmemiş sadece kaynak göstermekle yetinilmiştir.

İkinci bölümde ise denklemin incelenmesine başlanmış ve birinci kısımda probleme kısa bir giriş yapılarak ikinci kısımda Floquet teorisinden de yararlanılarak ele alınan denklemin diskriminantı bulunmuş ve λ nın durumuna göre çözümlerin kararlılık, kararsızlık aralıkları tespit edilmiştir. Sonraki iki kısımda ise özdeğerlerin katlılık durumları incelenmiş ve spektrumun yapısı analiz edilmiştir. Daha sonra özfonksiyonlar üzerine açılım formülleri elde edilmiş ve son kısımda da spektrum içinde boşlukların bulunmaması kriterleri verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

20. yüzyılın başlarına kadar ne spektral teori ne de ‘spektrum’ kelimesi matematik literatüründe bulunmaktaydı. Ancak geçmişte derin kökleri bulunan bu konu 20. yüzyılın bir fenomeni olmuştur. Spektral teorinin geçmişten günümüze sürekli gelişimini anlamak için onun tarihten gelen derin köklerinden kısaca bahsetmek gerekir. Modern spektral teorinin merkezi çıkış noktası, sonsuz boyutlu uzayda ‘köşegensel’ formda gösterilebilen belirli lineer operatörler olmuştur. Sonlu boyutlu lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri çok eski tarihlerde bulunmuş olmasına karşın ancak 18. ve 19. yüzyıllarda diferansiyel denklemlerin çözümü için belirsiz katsayılar yönteminde sonsuz boyutlu denklem sistemleri kullanılmış ve en nihayetinde, 1877 yılında, Amerikalı gökbilimci ve matematikçi George William Hill (1838-1914) sonsuz boyutlu sistemleri determinantlar teorisine taşımayı başarmıştır.

İlk spektral teorem sonsuz boyutlu determinantların integral denklemlere uygulanmasından sonra ortaya çıkmış ve 1900’ de Ivar Fredholm (1866-1927)

$$\phi(x) + \int_0^1 K(x,y)\phi(y)\,dy = \psi(x), \quad (0 \le x \le 1)$$

integral denkleminin ϕ çözümü ile ilgili ünlü ‘alternative’ teoremini ortaya atmıştır. Daha sonra David Hilbert (1862-1943)

$$\phi(x) - \lambda\int_0^1 K(x,y)\phi(y)\,dy = \psi(x)$$

integral denklemi üzerinde çalışmış ve K kuadratik formun spektrumunu tanımlamış, nokta spektrumu ile sürekli spektrumu birbirinden ayırmıştır. 1905 yılının başlarında Edhard Schmidt’in (1876-1959) Hilbert’in danışmanlığında hazırladığı doktora tezinde Hilbert’in çalışmalarını genelleştirmiş ve 1907 de bugün ‘Hilbert uzayı’ olarak adlandırılan ℓ_2 uzaylarını tanımlamıştır. Böylece 20. yy. ın ilk on yılı biterken Hilbert ve öğrencisinden ℓ_2 de sınırlı lineer dönüşümlerin spektral teorisi hakkında çokça bilgi elde edilmiştir. Aynı yıllarda Henri Lebesque (1875-1941) adıyla anılan Lebesque integrallerini tanımlarken, Friedrich Riesz (1880-1956) Stieltjes integralleri hakkında çalışmalar yapmıştır. Böylece Hilbert ℓ_2 de spektral teoremi elde etmek için Stieltjes integralini kullanırken Hilbert'i takip eden Riesz L_2 de spektral teoriyi geliştirerek Lebesque integralini ölümsüzleştirmiştir.

20. yy. ikinci on yılı spektral teori açısından daha sakin yıllar olmuştur. Ta ki 1925-1926 yıllarında Werner Heisenberg (1901-1976) ve Erwin Schrödingerin (1887-1961) kuantum mekaniği teorisini ortaya atana kadar. Heisenberg Max Born ve Pascual Jordan ile birlikte dönüşüm olarak adlandırılan ve (sonlu veya sonsuz) matrislerle birbirinden ayrılan her bir fiziksel niceliğin mümkün olan değerler kümesinin o dönüşümün spektrumu olduğunu yani atomun enerjisinin belirttiği dönüşümün spektrumu tam olarak atomun spektrumu olduğunu göstermiştir. Böylece spektral teoriye olan ilgi bir kez daha artmıştır.

1927 yılına gelindiğinde John von Neumann (1903-1957) spektral teoriyi Hilbert uzayında lineer operatörlerin soyut kavramlarıyla devrim niteliğinde yeniden tanımlamış ve 1927-1932 yılları arasında Marshall H. Stone (1903-1989) ile birlikte Von Neumann- Stone spektral teorisini oluşturmuştur.

John von Neumann ve J. Murray ilk defa operatörleri farklı topolojilerle çeşitli halkalar üzerinde tanımlamış ve aynı zaman diliminde, 1936-1940 yılları arasında W. P. Steen İngiltere de operatörlerin teorisine dair beş adet makaleler serisi yayınlamıştır. Ancak spektral teori hakkında en önemli makaleler 1941 ve 1943 de S.S.C.B. de Israel M. Gelfand, Mark A. Naimark ve George E. Silov tarafından yayınlanmıştır. Gelfand ve çalışma arkadaşları normlu halkalar teorisini oluşturmuş ve daha sonra bu çalışmalar Stone ve Shizuo Kakutani tarafından A.B.D. ne taşınmıştır. 1958-1971 yılları arasında Nelson Dunford ve Jacob Schwartz spektral teori hakkında yaklaşık 3000 sayfalık bir derleme yapmıştır [7], [8].

Periyodik katsayılı diferansiyel denklemler ise ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında Mathieu, Hill ve Floquet tarafından incelenmeye başlanmıştır. Daha sonra A. M. Lyapunov periyodik katsayılı Sturm-Liouville denkleminin kararlılık aralıklarının kuruluşu hakkındaki klasikleşmiş makalesini yayınlamıştır.

Sonraki yıllarda periyodik katsayılı diferansiyel denklemler [9-12] makalelerinde incelenmiştir. Periyodik katsayılı diferansiyel denklem sistemleri için esas sonuçlar ise M. G. Krein tarafından verilmiştir [13]. Bu teorinin büyük bir kısmı Wilhelm Magnus ve Stanley Winkler [14] tarafından özetlenmiş, özfonksiyonlarıyla ile ilgili sonuçları ise E.C. Titchmarsh [15] tarafından verilmiştir. M. S. P. Eastham

[16] yine bu denklemin spektrum aralıkları ve spektral yapısını etraflıca ele almıştır. 1950 yılında I. M. Gelfand n boyutlu uzayda keyfi mertebeli periyodik katsayılı özeşlenik diferansiyel operatörlerin özfonksiyonları cinsinden açılımının kurulması için başka bir yöntem vermiştir [17].

Daha sonra periyodik katsayılı özeşlenik olmayan diferansiyel operatörler M. I. Serov [18], F.S. Rofe-Beketov [19], V.A. Tkachenko [20] ve D.C. Mc Garvey [21-23] tarafından incelenmiştir.

D.C. Mc Garvey'in [23] ve F.S. Rofe-Beketovun [19] çalışmalarında ispat edilmiştir ki; $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında

$$\begin{gathered}\ell(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,y \\ p_k(x+1) = p_k(x), \quad k = 1,2,\ldots,n\end{gathered} \tag{2.1}$$

diferansiyel ifadesinin oluşturduğu T operatörü

$$\ell(y) = \lambda y$$

denkleminin çözümünün $-\infty < x < \infty$ gerçel ekseninde sınırlı olduğu λ değerlerinin kümesiyle üst-üste düşen analitik eğrilerden ibaret mutlak sürekli spektruma sahiptir. Eğer $L_2(0,1)$ uzayında (2.1) diferansiyel ifadesinin ve

$$y^{(k)}(1) = e^{it}y^{(k)}(0), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

sınır değer koşullarının oluşturduğu operatörü T_t ile gösterirsek, bu durumda

$$\sigma(T) = \bigcup_{t\in[0,2\pi]} \sigma(T_t)$$

olur.

Periyodik katsayılı diferansiyel operatörlerin spektrumunun potansiyele bağımlılığı M.G. Gasymov'un [24-26] çalışmalarında incelenmiştir. Öyle ki potansiyelin özel seçimi sürekli spektrum üzerinde spektral özelliğin oluşmasına yol açmıştır.

M.G. Gasymov'un [26] çalışmasında $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında

$$\ell(y) = (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{v=0}^{2m-2} p_v(x)\,y^{(v)}(x)$$

diferansiyel ifadesinin oluşturduğu L maksimal operatörünün spektral özellikleri incelenmiştir. Burada $p_v(x)$ katsayıları

$$p_v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{v_n} e^{inx}$$

şeklindedir ve $\sum_{v=0}^{2m-2} \sum_{n=1}^{\infty} n^v \left| p_{v_n} \right|$ serisi yakınsaktır. İspat edilmiştir ki; L operatörünün spektrumu $[0, \infty)$ yarı eksenini doldurur ve süreklidir. Sürekli spektrum üzerinde $\left(\frac{n}{2} \right)^{2m}$, $n = 1, 2, \ldots$ gibi spektral özelliğe sahiptir.

O.A. Veliev'in [27, 28] çalışmalarında periyodik katsayılı, kompleks değerli diferansiyel operatörlerin spektral analizi yapılmıştır.

G.S. Guseinov [1] çalışmasında

$$y'' + \left[\lambda^2 + 2\lambda p(x) + q(x) \right] y = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

diferansiyel ifadesinin oluşturduğu $T(\lambda)$ operatörler demetinin spektrumunu incelemiştir. Burada $p(x)$ ve $q(x)$ reel eksende tanımlı periyodik fonksiyonlardır.

Daha öncede belirttiğimiz üzere genelleşmiş katsayılı Sturm-Liouville operatörü ve onun çok boyutlu durumundaki genelleşmesi fizikte bir çok uygulama alanlarında kullanılmıştır. Bu türden fizik problemlerinin matematiksel incelenmesi 1960 larda F.A. Berezin, L.D. Fadeev, R.A. Minlos [29, 30] tarafından yapılmıştır. Bu konu son 20 yılda daha da geliştirilmiş ve Berezin–Fadeev–Minlos teorisinin çağdaş durumu ve bu teorinin yeni yönleri S. Albeverio, F. Gestey, R. Hoegh-Krohn, H. Holden [31] 'in kitabında ve S. Albeverio, P. Kurasov [32]'un makalesinde ele alınmıştır.

Sınırlı salınımlı fonksiyonların türevi olan ve adi olmayan fonksiyon katsayılı Sturm-Liouville operatörü ve bu tür potansiyelli daha yüksek mertebeli diferansiyel operatörler için diğer çalışmalar ise M.G. Krein [33], I.S. Kats [34], F.V. Atkinson [35], M. Dzh. Manafov [36] tarafından yapılmıştır. Bu tür operatörlerin tanımı için başka bir çalışma da A.M. Savchuk, A.A. Shkalikov [37], M.I. Neyman-Zade [38], tarafından yapılmıştır. Katsayıları Delta fonksiyonu olan operatörler ise [39-41] de incelenmiştir.

Tezin genel sonuçları ise [42-44] makalelerinde yayına sunulmuştur.

3. MATERYAL ve METOT

Bu bölümde bulgular ve tartışma kısmında kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Öncelikle bir diferansiyel operatörün oluşturulmasında temel yapı taşları olan diferansiyel ifade ve sınır şartları kavramlarından bahsedilecektir. Daha sonra diferansiyel operatörlerin özdeğer ve özfonksiyonları tanıtılarak buradan hareketle spektrum kümesi tanımlanacaktır. Son kısımda ise Green fonksiyonundan bahsedilecek ve özfonksiyonlar cinsinden açılım formülleri verilerek bu bölüm sonlandırılacaktır.

3.1. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

3.1.1. Lineer Operatörler

D, R kompleks lineer uzayının bir alt kümesi olsun. D nin her x elemanını R nin bir $x' = A(x)$ elemanına eşleyen bir A fonksiyonuna R kompleks lineer uzayında bir *operatör* denir. Burada D kümesine operatörün tanım kümesi ve tüm Ax, ($x \in A$) elemanlarının oluşturduğu kümeye de operatörün *değer kümesi* denir.

D_A bir alt uzay olsun. Eğer $x, y \in D_A$ ve herhangi bir λ sayısı için aşağıdaki bağıntılar sağlanıyor ise A operatörüne *lineerdir* denir.

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$
$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

A ve B operatörleri aynı D tanım kümesinde tanımlanmış ve $\forall x \in D$ için $Ax = Bx$ ise bu operatörlere *eşit operatörler* denir.

3.1.2. Lineer Diferansiyel İfadeler

Aşağıdaki formda verilmiş eşitliklere *lineer diferansiyel ifadeler* denir.

$$\ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y$$

Burada $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ fonksiyonlarına katsayılar, n sayısına da diferansiyel ifadenin *derecesi* denir. Şimdi $[a,b]$ aralığında $n.$ mertebeye kadar tüm türevleri sürekli fonksiyonlar uzayını $C^{(n)}$ ile gösterelim. Her $y \in C^{(n)}$ fonksiyonu için $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi iyi tanımlıdır ve $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

3.1.3. Sınır Şartları

y ve onun ilk $(n-1)$. ardıl türevlerinin $[a,b]$ aralığının a ve b noktalarındaki sınır değerlerini aşağıdaki biçimde gösterelim:

$$y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)};\ y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)} \tag{3.1}$$

$U(y)$, (3.1) deki değerlerle aşağıdaki biçimde tanımlanan lineer bir form olsun.

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + \dots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + \dots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}$$

Eğer bu türden birçok $U_v(y)$, $v = 1, \dots, m$ formları seçilir ve

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, \dots, m \tag{3.2}$$

şartlarının $y \in C^{(n)}$ fonksiyonları tarafından sağlanması istenirse, bu şartlara y fonksiyonlarının sağlaması gereken *sınır şartları* denir.

D ile (3.2) formundaki sınır şartlarının özel bir sistemini sağlayan $y \in C^{(n)}$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi gösterelim. D nin $C^{(n)}$ de bir lineer alt uzay olduğu açıktır ve eğer (3.2) şartları hiç yoksa veya tüm katsayıları sıfır ise o zamanda $C^{(n)}$ ile çakışır.

Belirlenmiş bir $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile (3.2) formundaki şartlarla tanımlanmış özel bir D alt uzayı verilsin. Her bir $y \in D$ için $u = \ell(y)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu bağıntı tanım kümesi D olan bir lineer operatördür ki biz bunu L ile göstereceğiz ve aşağıdaki gibi yazacağız

$$u = Ly\,.$$

L operatörüne, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.2) sınır şartları ile oluşturulan *diferansiyel operatör* denir.

Bu yolla herhangi bir diferansiyel ifadeden, (3.2) sınır şartlarının değişik seçimleriyle birçok diferansiyel operatör elde edilir. Eğer özel olarak (3.2) sınır şartları hiç yoksa o zaman tanım kümesi $D = C^{(n)}$ olan ve L_1 ile göstereceğimiz diferansiyel ifadeyi elde ederiz. Bu durumda L_1 aynı $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile oluşturulmuş tüm diğer L operatörlerinin genişletilmişi olacaktır. Burada L_1 en geniş tanım kümesine sahip operatör değildir, ancak yukarıda bahsedilen tüm operatörler L_1 operatörünün kısıtlanışıdır.

3.1.4. Homojen Sınır-Değer Problemi

$$\ell(y) = 0 \tag{3.3}$$

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \ldots, m \tag{3.4}$$

şartlarını sağlayan $y \in C^{(n)}$ fonksiyonunun bulunması problemine *homojen sınır-değer problemi* denir. Eğer L, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.4) sınır şartları ile oluşturulan bir operatör ise, o zaman homojen sınır-değer problemi; L operatörünün D tanım kümesi içinde L yi sıfır yapacak bir y fonksiyonun bulunmasıdır.

Herhangi bir homojen sınır-değer probleminin en az bir $y = 0$ çözümünün var olduğu açıktır. Bu çözüme *aşikâr çözüm* denir. Homojen sınır-değer problemi aşikâr olmayan çözümlere de sahip olabilir.

Şimdi hangi şartlar altında homojen sınır-değer probleminin aşikâr olmayan çözüme sahip olduğunu bulmaya çalışalım.

$y_1, y_2, \ldots y_n$, $\ell(y) = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu durumda lineer diferansiyel denklemlerin bilinen teorisinden, $\ell(y) = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü (bu aynı zamanda homojen sınır-değer probleminin de çözümüdür) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitler olmak üzere aşağıdaki formda yazılabilir.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_3 + \ldots + c_n y_n \tag{3.5}$$

Bu sabitleri belirlemek için (3.5) çözümü (3.4) sınır şartlarında yerleştirilirse, aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\left.\begin{array}{c} c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \cdots + c_n U_1(y_n) = 0 \\ c_1 U_2(y_1) + c_2 U_2(y_2) + \cdots + c_n U_2(y_n) = 0 \\ . \qquad . \qquad \cdots \qquad . \qquad . \\ c_1 U_m(y_1) + c_2 U_m(y_2) + \cdots + c_n U_m(y_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

Şimdi bu denklem sisteminin katsayı matrisi olan aşağıdaki matrisin rankı r olsun.

$$U=\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ . & . & \cdots & . \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & & U_m(y_n) \end{bmatrix}$$

Bu durumda $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitleri için (3.6) denklem sisteminin tam olarak $(n-r)$ tane bağımsız çözümü olacaktır ve bunlar sınır-değer probleminin $(n-r)$ tane y çözümüne denk gelecektir.

Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1) Eğer U matrisinin rankı r ye eşit ise homojen sınır-değer problemi $(n-r)$ tane bağımsız çözüme sahiptir.

2) **(a)** Homojen sınır-değer problemi aşikâr olmayan çözüme sahip olması için gerekli ve yeterli şart, U matrisinin r rankının ℓ diferansiyel ifadenin n derecesinden küçük olmasıdır.

(b) $m < n$ için, homojen sınır-değer problemi her zaman aşikâr olmayan çözüme sahiptir.

(c) $m = n$ için, homojen sınır-değer probleminin aşikâr olmayan çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart U matrisinin determinantının (ki bu durumda kare matris oluşur) sıfır olmasıdır.

U matrisinin rankına sınır-değer probleminin *rankı* denir ve $y_1, y_2, ... y_n$ çözüm sisteminin seçimine bağlı değildir.

3.1.5. Eşlenik Operatörler

Aşağıdaki diferansiyel ifadeyi ele alalım.

$$\ell(y) = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y$$

Burada $p_k(x)$, $k = 0,1,...,n$, fonksiyonları $(n-k)$. mertebeye kadar $[a,b]$ aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca y ve z, $C^{(n)}$ de keyfi iki fonksiyon olsun. Bu durumda k defa kısmi integrasyon sonucunda aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_a^b p_{n-k}\overline{z}\, y^{(k)}dx = \Big[p_{n-k}\overline{z}\, y^{(k-1)} - \left(p_{n-k}\overline{z}\right)' y^{(k-2)} + ...$$

$$+(-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k-1)} y\Big]_{x=a}^{x=b} + (-1)^k \int_a^b y\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k)} dx\,. \qquad (3.7)$$

Burada $\overline{z}$, z nin kompleks eşleniğidir. $k = n, n-1, ..., 0$ değerleri (3.7) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki formül elde edilir.

$$\int_a^b \ell(y)\overline{z}dx = P(\eta,\zeta) + \int_a^b y\overline{\ell^*(z)}\,dx \qquad (3.8)$$

Burada

$$\ell^*(z) = (-1)^n\left(\overline{p}_0 z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{p}_1 z\right)^{(n-1)} + (-1)^{n-2}\left(\overline{p}_2 z\right)^{(n-2)} + ... + \overline{p}_n z \qquad (3.9)$$

ve $P(\eta,\zeta)$

$$\eta = \left(y_a, y_a', ..., y_a^{(n-1)};\ y_b, y_b', ..., y_b^{(n-1)}\right)$$

$$\zeta = \left(z_a, z_a', ..., z_a^{(n-1)};\ y_b, z_b', ..., z_b^{(n-1)}\right)$$

biçimindeki η ve ζ değişkenli bilineer formdur. (3.9) formülü ile tanımlanan $\ell^*(z)$ diferansiyel ifadesine $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin *eşleniği* ve (3.8) formülüne de *Lagrange formülü* denir. Bir diferansiyel ifadenin eşleniği ile ilgili aşağıdaki özellikler vardır.

$\ell(y)$ bir diferansiyel ifade olmak üzere

$$\ell^{**}(y) = \ell(y)$$

eşitliği doğrudur. Yani $\ell(y)$ ve $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadeleri birbirinin eşleniğidir. λ herhangi bir sayı olmak üzere (3.9) denkleminden, aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\left(\ell_1 + \ell_2\right)^* = l_1^* + l_2^*$$

$$(\lambda\ell)^* = \overline{\lambda}\ell^*$$

Eğer $\ell^* = \ell$ eşitliği sağlanıyor ise $\ell(y)$ diferansiyel ifadesine *özeşlenik* denir. Özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamı da özeşleniktir. Ayrıca özeşlenik diferansiyel ifadelerin herhangi bir reel sayı ile çarpımı da yine özeşleniktir.

Şimdi $U_1,\ldots,U_m$, $y_a, y'_a,\ldots, y_a^{(n-1)}; y_b, y'_b,\ldots, y_b^{(n-1)}$ değişkenlerini içeren lineer bağımsız formlar olsunlar. Eğer $m < 2n$ ise lineer bağımsız $2n$ tane $U_1, U_2,\ldots,U_{2n}$ formlarını elde etmek için bunlara $U_{m+1},\ldots U_{2n}$ biçiminde başka formlar ekleyebiliriz.

Bu formlar lineer bağımsız olduğundan $y_a, y'_a,\ldots, y_a^{(n-1)}; y_b, y'_b,\ldots, y_b^{(n-1)}$ değişkenleri bu formların lineer kombinasyonları olarak yazılabilir.

Bu açılımlar (3.8) Lagrange formülündeki $P(\eta,\zeta)$ bilineer formunda yerine yazılırsa, $P(\eta,\zeta)$ $U_1, U_2,\ldots,U_{2m}$ değişkenli lineer homojen bir form olur. Dolayısıyla $U_1, U_2,\ldots,U_{2n}$ değişkenlerinin $V_{2n}, V_{2n-1},\ldots,V_1$ ile göstereceğimiz $z_a, z'_a,\ldots, z_a^{(n-1)}$; $z_b, z'_b,\ldots, z_b^{(n-1)}$ değişkenli $2n$ tane katsayısı olacaktır. Sonuç olarak Lagrange formülü aşağıdaki biçimde elde edilecektir:

$$\int_a^b \ell(y)\overline{z}dx = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + \ldots + U_{2n}V_1 + \int_a^b y\overline{\ell^*(z)}dx \tag{3.10}$$

Burada $V_1, V_2,\ldots,V_{2n}$ formları lineer bağımsızdır.

$$V_1 = 0, V_2 = 0,\ldots,V_{2n-m} = 0 \tag{3.11}$$

sınır şartlarına

$$U_1 = 0, U_2 = 0,\ldots,U_m = 0 \tag{3.12}$$

orijinal *sınır şartlarının eşleniği* denir. Eğer sınır şartları, eşleniğine denk ise o zaman da bu sınır şartlarına *özeşleniktir* denir.

Şimdi L, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.12) sınır şartları ile üretilen bir operatör olsun. L^* ile göstereceğimiz, $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.11) sınır şartları ile üretilen operatöre L operatörünün *eşlenik operatörü* denir.

(3.10) formülü ile (3.11) ve (3.12) sınır şartlarından

$$\int_a^b Ly.\overline{z}dx = \int_a^b y.\overline{L^*z}dx$$

eşitliği L ve L^* operatörleri için ve L nin tanım kümesindeki her y ile L^* in tanım kümesindeki her z için sağlanır. Bu eşitlik

$$(Ly, z) = (y, L^*z) \tag{3.13}$$

biçiminde de gösterilir. Eşlenik operatörlerin tanımından burada da yine

$$L^{**} = L$$

eşitliği vardır ve ayrıca $L^* = L$ ise bu operatöre *özeşlenik operatör* denir.

L operatörü özeşleniktir, ancak ve ancak bu operatör özeşlenik bir diferansiyel ifadeden ve özeşlenik bir sınır şartından üretilir. Özeşlenik bir operatör için (3.13) formülü aşağıdaki biçimde olur.

$$(Ly, z) = (y, Lz)$$

3.2. DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZFONKSİYONLARI

L operatörünün tanım kümesinde bulanan $y \not\equiv 0$ fonksiyonu için

$$Ly = \lambda y \tag{3.14}$$

eşitliği sağlanıyor ise λ değerine L operatörünün *özdeğeri*, y fonksiyonuna da λ özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

L operatörü $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_1(y) = 0, \ldots, U_n(y) = 0 \tag{3.15}$$

sınır şartlarından üretilsin. y fonksiyonu L operatörünün tanım kümesinde olması gerektiğinden (3.15) şartlarını da sağlamalıdır. Ayrıca $Ly = \ell(y)$ dir ve buradan (3.14) eşitliği aşağıdaki denkleme denktir.

$$\ell(y) = \lambda y \tag{3.16}$$

Dolayısıyla L operatörünün özdeğerleri öyle λ değerleridir ki, bu değerler için

$$\ell(y) = \lambda y, \quad U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \ldots, m \tag{3.17}$$

homojen sınır değer problemi aşikâr olmayan çözümlere sahiptir ve her bir aşikâr olmayan çözüm de λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

Aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonların lineer kombinasyonları da yine aynı özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyondur.

Verilen bir λ değeri için (3.16) homojen denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı en fazla n tane olabileceğinden, aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonların tümü boyutu $\leq n$ olan sonlu boyutlu bir uzay oluşturacaktır. Bu uzayın boyutu tabiî ki verilmiş bir λ değeri için (3.17) sınır değer probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya *özdeğerin katı* denir.

Özdeğerleri belirlemek için bazı şartlar bulmaya çalışacağız. Bu amaçla

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \cdots, y_n(x,\lambda) \tag{3.18}$$

ile (3.16) diferansiyel denkleminin aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlayan temel çözümlerini gösterelim:

$$y_j^{(v-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq v \\ 1, & j = v \end{cases} \quad j,v = 1,2,\ldots,n \tag{3.19}$$

Diferansiyel denklemlerin genel teoremlerinden, $[a,b]$ deki her x için (3.18) fonksiyonları λ ya göre tam fonksiyonlarıdır. Bölüm 3.1. in sonuçlarından (3.17) sınır değer problemi aşikâr olmayan çözüme sahiptir, ancak ve ancak

$$U = \begin{bmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ . & & . \\ U_n(y_1) & \ldots & U_m(y_n) \end{bmatrix}$$

matrisinin r rankı n den küçüktür. Eğer $m < n$ ise, $r < n$ ve bu durumda (3.17) sınır değer problemi herhangi bir λ değeri için aşikâr olmayan çözüme sahiptir. Dolayısıyla eğer $m < n$ ise herhangi bir λ değeri özdeğerdir.

Eğer $m \geq n$ ise U matrisinin rankının n den küçük olması için gerekli ve yeterli koşul onun bütün n mertebeli minörlerinin sıfır olmasıdır. Ancak bu minörlerin her biri λ nın tam analitik fonksiyonlarıdır, dolayısıyla aşağıdaki durumlar söz konusudur:

1) U matrisinin $n.$ mertebeden minörlerinin hepsi sıfıra denktir. Bu durumda daha önceki sonuçtan, herhangi bir λ değeri özdeğerdir.

2) U matrisinin en az bir $n.$ mertebeden minörü sıfıra denk değil ise bu durumda da sadece bu minörlerin sıfırları özdeğer olabilir ve ayrıca özel bir minörün sıfırı eğer U nun diğer bütün $n.$ mertebeden sıfır olmayan minörlerini özdeş sıfır yapıyorsa özdeğer olabilir.

Sıfır olmayan bir tam fonksiyon en fazla sayılabilir çoklukta sıfıra sahiptir (hepsi sahip olmak zorunda değil) ve bu sıfırlar sonlu bir limit noktasına sahip değildir. Dolayısıyla 2. durumda, L operatörü en fazla sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir (hepsine sahip olmayabilir) ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.1. Herhangi bir L operatörü için iki durum söz konusudur:

1) Her λ sayısı L nin özdeğeridir.

2) Operatör en fazla sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir, (özel durumda hepsi değil) ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir. [45]

$m = n$ durumunu ise özel olarak inceleyelim. Bunun için

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ . & & . \\ U_n(y_1) & \dots & U_m(y_n) \end{bmatrix}$$

olsun. Daha önce de belirtildiği üzere burada yine $\Delta(\lambda)$, λ nın tam, analitik fonksiyonudur ve L operatörünün (veya $Ly = 0$ sınır değer probleminin) *karakteristik determinantı* olarak adlandırılır. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremler doğrudur:

Teorem 3.2.2. L operatörünün özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonun sıfırlarıdır. Eğer $\Delta(\lambda)$ sıfıra denk ise, o zaman λ nın herhangi bir değeri L operatörünün özdeğerleridir. Ancak $\Delta(\lambda)$ sıfıra denk değil ise L operatörü sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir. [45]

Herhangi bir λ değeri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun katlı sıfırı olabilir. Bu durumda

Teorem 3.2.3. Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$ karakteristik denkleminin v katlı sıfırı ise, o zaman λ_0 özdeğerinin katı v den büyük olamaz. [45]

Teorem 3.2.4. Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$ karakteristik denklemin basit sıfırı ise, o zaman L operatörünün λ_0 özdeğeri tek katlıdır. [45]

Bir özdeğer $\Delta(\lambda)$ karakteristik denkleminin basit sıfırı ise bu özdeğere *basit özdeğer* denir.

3.3. DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU

Bu bölümde λ kompleks sayı olmak üzere $A_\lambda = A - \lambda I$ operatörler ailesini ele alacağız. E_λ ile, λ özdeğerine karşılık gelen

$$Ax = \lambda x$$

denkleminin tüm çözümlerinin oluşturduğu alt uzayı gösterelim. Öncelikle A özeşlenik operatörün özdeğerlerinin bazı özelliklerini verelim.

1) Eğer x, λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon ise, o zaman

$$(Ax, x) = \lambda \|x\|^2$$

olur ve özel olarak $\|x\| = 1$ ise

$$(Ax, x) = \lambda$$

elde edilir. Bu da aşağıdaki sonuçları doğurur:

2) A özeşlenik operatörün özdeğerleri reel sayılardır.

3) Farklı özdeğerlere ait özfonksiyonlar diktir.

4) G_λ ile A_λ operatörünün değer kümesini gösterelim. Yani

$$y = A_\lambda x$$

eşitliğini sağlayan tüm $y \in H$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi gösterelim. $\overline{G}_\lambda$ alt uzayı E_λ nın ortogonal tümleyenidir. Yani H Hilbert uzayı olmak üzere

$$H = \overline{G}_\lambda + E_\lambda \tag{3.20}$$

dır. Eğer $y \in G_\lambda$ ve $x \in E_\lambda$ ise, o zaman

$$y = A_\lambda x', \quad A_\lambda x = \theta$$

olur ki bu da

$$(y, x) = (A_\lambda x', x) = (x', A_\lambda x) = (x', \theta) = 0$$

demektir. Eğer $y \in \overline{G}_\lambda$ ise o zaman $y_n \in G_\lambda$ olmak üzere $y = \lim\limits_n y_n$ dir ve tüm $x \in E_\lambda$ için $(y_n, x) = 0$ olduğundan

$$(y, x) = \lim_n (y_n, x) = 0$$

olur. Tersine x, tüm $y \in G_\lambda$ için

$$(y, x) = 0$$

şartını sağlayan bir eleman olsun. Keyfi bir $x_1 \in H$ için $A_\lambda x_1 \in G_\lambda$ olur ve buradan

$$\left(A_\lambda x_1, x\right) = 0 \text{ ve } \left(x_1, A_\lambda x\right) = 0$$

olur. x_1 keyfi olduğundan $A_\lambda x = \theta$ elde ederiz. Yani x, E_λ dadır.

Teorem 3.3.1. Eğer λ, A özeşlenik operatörün özdeğeri değil ise, o zaman (3.20) eşitliği aşağıdaki gibi olur. [46]

$$H = \overline{G}_\lambda$$

Şimdi aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$Ax - \lambda x = y \text{ veya } \left(A - \lambda I\right) x = y \tag{3.21}$$

$A - \lambda I$ operatörü verilmiş bir λ değeri için $\left(A - \lambda I\right)^{-1} = R_\lambda$ tersine sahip olsun. R_λ ya (3.21) denkleminin *resolvent kümesi* denir ve σ' ile gösterilir. Bir λ değeri için eğer (3.21) denklemi her y için aşikâr olmayan çözüme sahip ise o zaman bu λ değerine (3.21) denkleminin (veya A nın) *düzgün noktası* denir.

$R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \left(A - \lambda I\right)^{-1}$ operatörünün var olmadığı λ değerlerinin oluşturduğu kümeye ise *spektrum kümesi* denir ve σ ile gösterilir. Bu durumda, tüm özdeğerler spektruma aittir. Ancak spektrumun her noktası özdeğer değildir.

A_λ^{-1} sınırlı operatörünün varlığı için gerekli ve yeterli şart H den kendi üzerine bire-bir örten bir dönüşüm olmasıdır, yani

$$G = \overline{G}_\lambda = H$$

Teorem 3.3.2. λ, özeşlenik A operatörünün düzgün noktası olması için gerekli ve yeterli şart tüm $x \in E$ değerleri için

$$\left\|A_\lambda x\right\| = \left\|Ax - \lambda x\right\| \geq C \left\|x\right\|$$

olacak biçimde bir C pozitif sabitinin bulunmasıdır. [46]

Teorem 3.3.3. A**,** D_A üzerinde tanımlı bir operatör, σ da bu operatörün spektrum kümesi olsun. Eğer her n için $\left\|f_n\right\| = 1$, ve $n \to \infty$ iken $f_n \to 0$ ve $\left\|\left(A - \lambda I\right) f_n\right\| \to 0$ olacak şekilde D_A da bir $\left\{f_n\right\}$ sonsuz dizisi varsa o zaman λ, σ' resolvent kümesi içindedir. [46]

Teorem 3.3.4. $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ kompleks sayıları özeşlenik A operatörünün düzgün noktalarıdır. [46]

Teorem 3.3.5. Özeşlenik A operatörünün spektrumu reel eksendeki $[m, M]$ aralığında bulunur. Burada $M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$ ve $m = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x)$ dir. [46]

Teorem 3.3.6. M ve m spektrumun noktalarıdır. [46]

Sonuç 3.3.1. Her özeşlenik operatör boş olmayan spektruma sahiptir. [46]

3.4. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR İÇİN GREEN FONKSİYONU

3.4.1. Ters Operatörün Genel Tanımı

A ve B iki operatör olsun. Eğer B operatörünün D_B tanım kümesi, A operatörünün R_A değer kümesi ile çakışıyor ve $\forall x \in D_A$ için

$$B(Ax) = x$$

eşitliği sağlanır ise, B operatörüne A *operatörünün tersi* denir.

Teorem 3.4.1. A operatörü terse sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $Ax = 0$ denkleminin sadece $x = 0$ aşikâr çözümüne sahip olmasıdır. [45]

3.4.2. Green Fonksiyonu Anlamında Diferansiyel Operatörün Tersi

L operatörü için Green fonksiyonu, aşağıdaki şartları sağlayan $G(x, \zeta)$ fonksiyonu olarak tanımlanır:

1) $G(x, \xi)$, $[a, b]$ aralığındaki tüm x ve ξ ler için sürekli ve $(n-2)$. mertebeye kadar x e göre sürekli türevlere sahip,

2) (a, b) aralığındaki sabit bir ξ için $G(x, \xi)$, $(n-1)$. mertebeden sürekli türevlere sahip ve n. türev x'e göre $[a, \xi)$ ve $(\xi, b]$ biçimindeki her bir aralıkta sürekli,

$(n-1)$. türevi ise $x=\xi$ de sıçrama sürekliliğine sahip ve sıçrama miktarı $\frac{1}{p_0(\xi)}$ dir. Yani

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{p_0(\xi)}$$

3) Her bir $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralığında x' in fonksiyonu olarak düşünülen $G(x,\xi)$, $l(G)=0$ denklemini ve $U_\nu(G)=0$, $\nu=1,2,\ldots,n$ sınır şartlarını sağlar.

Teorem 3.4.2. Eğer $Ly=0$ sınır-değer problemi sadece aşikâr çözüme sahip ise, o zaman L operatörü bir ve yalnız bir Green fonksiyonuna sahiptir. [45]

Teorem 3.4.3. Eğer $Ly=0$ denklemi sadece aşikâr çözüme sahip ise, o zaman $[a,b)$ aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, $Ly=f$ denkleminin çözümü vardır ve bu çözüm aşağıdaki biçimde yazılabilir. [45]

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

Burada $G(x,\xi)$ ye L operatörü için *Green fonksiyonu* denir.

3.4.3. $L-\lambda 1$ Operatörü İçin Green Fonksiyonu

L, $l(y)$ ifadesi ve $U_\nu(y)=0$, $\nu=1,2,\ldots,n$ sınır şartları ile verilen bir operatör olsun. Burada $L-\lambda 1$ operatörünün Green fonksiyonu için bir açılım bulmak istiyoruz. Başka bir ifade ile $L-\lambda 1$ operatörünün tersinin formunu bulmak istiyoruz. $y_\nu=y_\nu(x,\lambda)$, $\nu=1,2,\ldots,n$ ile $l(y)=\lambda y$ denkleminin (3.19) başlangıç şartlarını sağlayan çözüm sistemini gösterelim.

$$l(y)-\lambda y=f$$

denklemi için sabitlerin değişimi metodu kullanılarak

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi \tag{3.22}$$

çözümü elde edilir. Burada

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)}H(x,\xi,\lambda) \tag{3.23}$$

ve

$$W=\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ . & . & \dots & . \\ y_1 & y_2 & & y_n \end{vmatrix}$$

$$g(x,\xi)=\pm\frac{1}{2W(\xi)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ . & . & \dots & . \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{3.24}$$

$$H(x,\zeta,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & g(x,\xi) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) & U_2(g) \\ . & . & \dots & . & . \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix} \tag{3.25}$$

dir. Eğer λ, L operatörünün özdeğeri değil ise, o zaman $\Delta(\lambda)\neq 0$ olur ve bu da (3.22) ve (3.23) formüllerini anlamlı kılar. (3.22) formülü gösterir ki $G(x,\xi,\lambda)$ $L-\lambda 1$ operatörünün Green fonksiyonudur. Buradan $L-\lambda 1$ operatörünün $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu (3.22), (3.23), (3.24) ve (3.25) formülleri ile elde edilir.

3.4.4. $L-\lambda 1$ Operatörünün Green fonksiyonunun Analitiklik Durumu

Yukarıda tanımlanan $\Delta(\lambda)$ ve $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonları λ parametresinin tam, analitik fonksiyonlarıdır. Böylece (3.23) den denilebilir ki; $L-\lambda 1$ operatörünü için

$G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu λ parametresinin meremorf fonksiyonudur ve onun kutup noktaları sadece operatörün özdeğerleri olabilirler.

λ_0, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun basit sıfırı olsun. O zaman λ_0, $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun da sadece basit kutbu olabilir ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun her λ_0 basit sıfırı için

$$G(x,\xi,\lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{(\lambda-\lambda_0)\int\limits_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}d\xi} + G_1(x,\xi,\lambda)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $G_1(x,\xi,\lambda)$, λ_0 ın komşuluğunda düzenlidir. [45]

3.5. ÖZFONKSİYONLAR CİNSİNDEN AÇILIM FORMÜLÜ

3.5.1. Fourier Metodunun Temeli

Kısmi diferansiyel denklemlerin Fourier metoduyla çözümü bizi 'verilen fonksiyonun diferansiyel denklemin özfonksiyonları cinsinden açılım formülünü elde etmek' gibi çok önemli bir problemle karşı karşıya bırakmaktadır. Örneğin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \cdots + p_n(x)u, \quad a \le x \le b \tag{3.26}$$

denkleminin

$$[u]_{t=0} = f(x); \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = \varphi(x) \tag{3.27}$$

başlangıç şartlarını ve

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_{j\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=a} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\beta_{j\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=b} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.28}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. Bunun için (3.26) denkleminin (3.28) sınır şartlarını sağlayan çözümünü aşağıdaki formda arayalım:

$$u = y(x)\left(A\cos pt + B\sin pt\right) \tag{3.29}$$

Bu çözümü (3.26) ve (3.28) de yerine yazarsak

$$\ell(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = -p^2 y \tag{3.30}$$

diferansiyel denklemini ve

$$U_j(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{j\nu} y_a^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{j\nu} y_b^{(\nu)} = 0 \qquad (3.31)$$

sınır şartlarını elde ederiz.

Şimdi eğer $y \not\equiv 0$ ise, o zaman y (3.30), (3.31) sınır değer probleminin $-p^2$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Bu problemin özdeğerleri

$$-p_1^2, -p_2^2, -p_3^2, \ldots$$

ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonları da

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$$

olsun. Burada her bir özdeğerin katı kendisine ait lineer bağımsız özfonksiyon sayısı kadardır. Bu durumda

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right)$$

sonsuz serisi, en azından biçimsel olarak, (3.26) denklemini ve (3.28) sınır şartlarını sağlar. Dolayısıyla bu çözüm başlangıç şartlarını da sağlamak zorundadır. Buradan ilk başlangıç şartından

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) \qquad (3.32)$$

elde edilir. Bu denklem verilmiş bir $f(x)$ fonksiyonunun, sınır-değer probleminin özfonksiyonları cinsinden seri açılımını ifade eder.

Buradan Fourier metodunun temel sorunu ortaya çıkar ki o da şudur: Hangi şartlar altında verilmiş bir $f(x)$ fonksiyonunun, ele alınan sınır-değer probleminin özfonksiyonları cinsinden seri açılımı yapılabilir.

Bu sorunun cevabı özeşlenik operatörler ($\ell(y)$ ifadesi ve $U_j(y) = 0$, $j = 1,2,\ldots,n$ sınır şartları özeşlenik olan bir operatör) için kolaydır:

Teorem 3.5.1. Özeşlenik diferansiyel operatörün tanım kümesinde bulunan herhangi bir fonksiyon, bu operatörün özfonksiyonları cinsinden genelleştirilmiş düzgün yakınsak Fourier serisine sahiptir. [45]

Sonuç 3.5.1. Özeşlenik diferansiyel operatörün özfonksiyonları $L_2(a,b)$ de tam sistem oluşturur. [45]

Teorem 3.5.2. Düzgün sınır şartları ile üretilmiş L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu

$$G(x,s) = -\sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{H_\upsilon(x,\xi)}{\lambda_\upsilon}$$

biçiminde düzgün yakınsak seri açılımına sahiptir. Burada $H_\upsilon(x,\xi)$, $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun λ_υ kutup noktasındaki rezidüsüdür. [45]

Teorem 3.5.3. Eğer $\ell(y) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ diferansiyel ifadesi ve düzgün sınır şartları ile üretilmiş L özeşlenik operatörünün tüm özdeğerleri Δ fonksiyonunun ((3.24) denklemine bakınız) basit sıfırları ise, o zaman onun Green fonksiyonu aşağıdaki düzgün yakınsak seri açılımına sahiptir.

$$G(x,s) = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{y_\upsilon(x)\,\overline{z}_\upsilon(x)}{\lambda_\upsilon}$$

Burada $y_\upsilon(x)$ ve $z_\upsilon(x)$, sırasıyla L ve L^* operatörlerinin λ_υ ve $\overline{\lambda}_\upsilon$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarıdır. [45]

Teorem 3.5.4. L, $\ell(y) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ diferansiyel ifadesi ve düzenli sınır şartları ile üretilmiş, özeşlenik operatör ve bu operatörün tüm özdeğerleri Δ fonksiyonunun basit sıfırları olsun. O zaman L operatörünün tanım kümesinde bulunan herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde özfonksiyonlar cinsinden yakınsak bir seri açılımına sahiptir.

$$f(x) = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \alpha_\upsilon y_\upsilon(x),$$

$$\alpha_\upsilon = \int_0^1 f(\xi)\, z_\upsilon(\xi)\, d\xi$$

Burada yine $y_\upsilon(x)$ ve $z_\upsilon(x)$, sırasıyla L ve L^* operatörlerinin λ_υ ve $\overline{\lambda}_\upsilon$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarıdır. [45]

3.5.2. Sturm-Liouville Açılımı

$q(x)$, (a,b) aralığının her noktasında sürekli x in reel bir fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \tag{3.33}$$

denklemini ele alalım. (a,b) nin sonlu aralık ve $x \to a$, $x \to b$ iken $q(x)$ in sonlu olması durumunda bu denklem klasik Sturm-Liouville diferansiyel denklemi olarak adlandırılır.

Şimdi $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ (3.33) denkleminin aşağıdaki şartları sağlayan çözümleri olsun:

$$\left.\begin{aligned} \theta(x,\lambda) &= \sin\alpha, \quad \varphi'(x,\lambda) = -\cos\alpha \\ \theta'(x,\lambda) &= \sin\beta, \quad \varphi(x,\lambda) = -\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

Böylece $W(\theta,\varphi)$, $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının wronskiyeni olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(\theta,\varphi) &= \theta(x)\varphi''(x) - \varphi(x)\theta''(x) \\ &= \{q(x)-\lambda\}\theta(x)\varphi(x) - \{q(x)-\lambda\}\varphi(x)\theta(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Yani x den bağımsız olan $W(\theta,\varphi)$ ifadesi sadece λ nın bir tam fonksiyonudur ve $W(\theta,\varphi) = \omega(\lambda)$ ile gösterilir. Şimdi aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım.

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{\varphi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_a^x \theta(y,\lambda)f(y)dy + \frac{\theta(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_x^b \varphi(y,\lambda)f(y)dy$$

Eğer $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise her λ değeri için $\Phi(x,\lambda)$, (3.33) denklemini ve

$$\left.\begin{aligned} \Phi(a,\lambda)\cos\alpha + \Phi'(a,\lambda)\sin\alpha = 0 \\ \Phi(b,\lambda)\cos\beta + \Phi'(b,\lambda)\sin\beta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

sınır şartlarını sağlar.

Şimdi $\omega(\lambda)$ nın sadece reel eksen üzerindeki $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ basit sıfırlarına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ nın wronskiyeni sıfırdır ve dolayısıyla $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu $\theta(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun sabit bir katıdır.

$$\varphi(x,\lambda_n) = k_n\theta(x,\lambda_n) \tag{3.36}$$

Sınır şartlarından k_n ne 0 ne de ∞ olur. Buradan $\Phi(x,\lambda)$, $\lambda = \lambda_n$ noktalarında

$$\frac{k_n}{\omega'(\lambda)}\theta(x,\lambda_n)\int_a^b \theta(y,\lambda_n) f(y)\,dy$$

rezidüsüne sahiptir. Sonuç olarak yukarıdaki işlemlerden açılım formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{\omega'(\lambda)}\theta(x,\lambda_n)\int_a^b \theta(y,\lambda_n) f(y)\,dy \tag{3.37}$$

Eğer biz $\theta_0(x,\lambda)$ ve $\varphi_0(x,\lambda)$ gibi (3.33) un iki lineer bağımsız çözümlerleriyle başlar ve $\omega_0(\lambda) = W(\theta_0,\varphi_0)$ yazarsak, o zaman

$$\theta(x,\lambda) = \frac{\theta_0(x)\left\{\varphi_0(a)\cos\alpha + \varphi_0'(a)\sin\alpha\right\} - \varphi_0(x)\left\{\theta_0(a)\cos\beta + \theta_0'(a)\sin\alpha\right\}}{\omega_0(\lambda)}$$

olur ve $\varphi(x,\lambda)$ da a,α nın b,β ile yer değiştirilmesi ile bulunur. Buradan

$$\frac{\theta_0(b,\lambda_n)\cos\beta + \theta_0'(b,\lambda_n)\sin\beta}{\theta_0(a,\lambda_n)\cos\alpha + \theta_0'(a,\lambda_n)\sin\alpha} = \frac{\varphi_0(b,\lambda_n)\cos\beta + \varphi_0'(b,\lambda_n)\sin\beta}{\varphi_0(a,\lambda_n)\cos\alpha + \varphi_0'(a,\lambda_n)\sin\alpha} = k_n$$

bulunur ve yukarıdaki işlemler yapılır. [15]

3.6. BAZI TANIM ve TEOREMLER

$q(x)$, x in her reel değeri için tanımlı (reel veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $q(x)$, a periyotlu periyodik ve her sonlu aralıkta parçalı sürekli olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda tüm x değerleri için

$$q(x+a) = q(x)$$

dir ve eğer p, $0 < p < a$ olan bir sayı olmak üzere en az bir I reel aralığı vardır ki $x \in I$ için $q(x+p) \neq q(x)$ dir.

Şimdi $q(x)$ yukarıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon ise o zaman

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{3.38}$$

diferansiyel denklemi

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1$$

şartlarıyla bir tek şekilde belirlenecek iki sürekli, diferansiyellenebilir $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerine sahiptir. Floquet teoreminin ifadesini vermeden önce (3.38) denklemi ile ilgili karakteristik denklem ve karakteristik üst gösterimlerini tanımlayalım. (3.38) denkleminin karakteristik denklemi

$$\rho^2 - \left[y_1(a) + y_2'(a)\right]\rho + 1 = 0 \tag{3.39}$$

biçimindedir ve karakteristik üstü de

$$\exp(i\alpha a) = \rho_1, \quad \exp(-i\alpha a) = \rho_2$$

denklemlerini sağlayan α sayısıdır. Burada ρ_1 ve ρ_2 (3.39) karakteristik denkleminin kökleridir.

Teorem 3.6.1. (Floquet Teoremi)

1) Eğer (3.39) karakteristik denkleminin ρ_1 ve ρ_2 kökleri ayrık ise, o zaman (3.38) denklemi aşağıdaki şekilde iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$$f_1(x) = e^{i\alpha a} p_1(x), \quad f_2(x) = e^{-i\alpha a} p_2(x)$$

Burada $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyotlu fonksiyonlardır.

2) Eğer $\rho_1 = \rho_2$ ise, o zaman (3.38) denklemi a periyotlu aşikâr olmayan $p(x)$ çözüme sahiptir. $y(x)$, $p(x)$ çözümü ile lineer bağımsız olan diğer çözüm olsun. Bu durumda

$$y(x+a) = \rho_1 y(x) + kp(x),\ k \text{ sabit}$$

olur ve $k = 0$

$$y_1(a) + y_2(a) = \pm 2,\ y_2(a) = 0,\ y_1'(a) = 0$$

eşitliklerine denktir. [14]

Tanım 3.6.1. (Kararlılık ve Kararsızlık Aralıkları) Herhangi bir diferansiyel denklemin tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ da sınırlı ise, bu denkleme *kararlı* ve tüm aşikâr olmayan çözümleri $(-\infty, \infty)$ da sınırlı değil ise *kararsızdır* denir. Eğer bu denklemin en az bir aşikâr olmayan çözümü $(-\infty, \infty)$ da sınırlı ise, o zaman da bu denkleme *şartlı kararlıdır* denir. [16]

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. PROBLEME GİRİŞ

Bu bölümde 3. Bölümdeki tanım, teorem ve yöntemlerden de faydalanarak kuantum mekaniğinin birçok problemlerinde ortaya çıkan aşağıdaki diferansiyel denklemin spektral yapısı incelenecektir:

$$\ell_{\alpha}[y] \equiv -y'' + 2\alpha\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)\, y + q(x)\, y = \lambda^2 y, \quad -\infty \le x \le \infty \qquad (4.1)$$

Burada $q(x)$ reel, periyodik, parçalı sürekli bir fonksiyon, $\big(q(x+1) = q(x)\big)$; $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonu, $\alpha \neq 0$ reel sayı ve λ spektral parametredir.

(4.1) denklemi δ nın bulunduğu bir seri içerdiğinden, bu denkleme matematiksel bir tanımlama yapmamız gerekir. Bu tanımlamayı yapmak için birkaç yöntem vardır. Bunlardan biri Berezin-Fadeyev-Minlos teorisidir [29, 30], [47] Daha sonra bu teori Albeverio-Gesztesy-Krohn tarafından başka problemler içinde daha derin incelenmiştir, [31]. Diğer yöntem ise sınırlı salınımlı fonksiyonların türevi olan potansiyeller için [33]-[35] de verilmiştir. [36] da ise daha yüksek mertebeli öz eşlenik formdaki diferansiyel denklemler için yine bu yöntem kullanılarak incelenen operatörün tanım kümesi elde edilmiştir.

Öncelikle L_{α}^{λ} ile $\ell_{\alpha}[y]$ diferansiyel denkleminin oluşturduğu operatörü gösterelim. İkinci yöntemi kullanarak (4.1) denkleminin x değişkenine göre her iki tarafının $[n-\gamma, n+\gamma]$ aralığında integrali alınır ve $\gamma \to 0$ iken limite geçilirse $\ell_{\alpha}[y]$ diferansiyel denklemine denk olan L_{α}^{λ} operatörü aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$L_0^{\lambda} : y(x) \to -y''(x) + q(x)\, y(x)$$

öyle ki $y(x) \in W_2^2\big(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\big) \cap W_2^1(\mathbb{Z})$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$y(n) = y(n+0) = y(n-0)$$
$$y'(n+0) - y'(n-0) = 2\alpha\lambda y(n)$$

Bu bölümde Floquet teoreminden de faydalanarak öncelikle (4.1) denklemin kararlılık ve kararsızlık aralıkları belirlenecek ve buradan hareketle L_{α}^{λ} operatörünün spektrum aralıkları tespit edilecektir. Daha sonra (4.1) denkleminin spektral yapısı hakkında bilgi verilecek, özfonksiyonlar üzerine açılım formülleri elde edilecek ve en son kısımda ise spektrum içinde boşlukların bulunmama kriterleri verilecektir.

4.2. FLOQUET TEOREMİ

Bu kısımda spektrum aralıklarının belirlenmesinde kullanacağımız (4.1) diferansiyel denkleminin kararlılık ve kararsızlık aralıkları tespit edilecektir. Periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin çoğu araştırmalarında önemli bir role sahip olan Floquet teorisi burada da kullanacağımız en önemli araç olacaktır. Bu bölümde, öncelikle x yerine $x+1$ alındığında (4.1) denkleminin değişmezliğinden bahsedilecektir. Yani $\psi(x,\lambda)$, (4.1) denkleminin çözümü olduğunda, $\psi(x+1,\lambda)$ da bu denklemin çözümü olacaktır. Ancak, genel olarak bu çözümler birbirine eşit olmak zorunda değildir. Burada göstereceğiz ki; (4.1) denkleminin aşikâr olmayan bu iki çözümü arasında aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak sıfır olmayan bir $\rho=\rho(\lambda)$ sayısı bulunabilir.

$$\begin{gathered} \psi(x+1,\lambda)=\rho\psi(x,\lambda) \\ \psi'(x+1,\lambda)-2\alpha\lambda\psi(x+1,\lambda)=\rho\psi'(x,\lambda) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Bu özellik, (4.1) denkleminin aşağıdaki teoremde verilecek olan, önemli özel bir forma sahip iki lineer bağımsız çözümün varlığına işaret etmektedir. Bu sonuçlar ve ispatları Floquet teori olarak adlandırılır ve ilk defa G. Floquet tarafından bulunmuştur, [16, 48].

Teorem 4.2.1. Öyle bir ρ sabiti ve (4.1) in aşikâr olmayan $\psi(x)$ çözümü vardır ki, (4.2) özelliği sağlanır.

İspat: $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ $-y''+q(x)y=\lambda^2 y$ denkleminin aşağıdaki şartları sağlayan iki lineer bağımsız temel çözümleri olsun:

$$\theta(0,\lambda)=\varphi'(0,\lambda)=1, \quad \theta'(0,\lambda)=\varphi(0,\lambda)=0 \tag{4.3}$$

Bu durumda genel çözüm c_1 ve c_2 sabit sayılar olmak üzere

$$\psi(x,\lambda)=c_1\theta(x,\lambda)+c_2\varphi(x,\lambda) \tag{4.4}$$

biçiminde yazılabilir. $\theta(x,\lambda+1)$ ve $\varphi(x,\lambda+1)$ de (4.1) in çözümleri olduğundan öyle A_{ij} $(1\le i,j\le 2)$ sabitleri vardır ki,

$$\begin{aligned}\theta(x+1,\lambda)&=A_{11}\theta(x,\lambda)+A_{12}\varphi(x,\lambda)\\ \varphi(x+1,\lambda)&=A_{21}\theta(x,\lambda)+A_{22}\varphi(x,\lambda)\end{aligned}\tag{4.5}$$

eşitlikleri sağlanır. (4.5) de (4.3) koşulları kullanılarak A_{ij} $(1\le i,j\le 2)$ katsayıları aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned}A_{11}&=\theta(1,\lambda) \quad & A_{12}&=\theta'(1,\lambda)\\ A_{21}&=\varphi(1,\lambda) \quad & A_{22}&=\varphi'(1,\lambda)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Şimdi (4.4) ifadesi (4.2) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$c_1\theta(x+1,\lambda)+c_2\varphi(x+1,\lambda)=\rho\big(c_1\theta(x,\lambda)+c_2\varphi(x,\lambda)\big)$$

$$\begin{aligned}c_1\theta'(x+1,\lambda)+c_2\varphi'(x+1,\lambda)-2\alpha\lambda\big(c_1\theta(x+1,\lambda)+c_2\varphi(x+1,\lambda)\big)&\\ =\rho\big(c_1\theta'(x,\lambda)+c_2\varphi'(x,\lambda)\big)&\end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerde (4.5) deki değerler yerlerine yazılır ve elde edilen denklem c_1 ve c_2 ye göre yeniden düzenlenirse aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$c_1\big[(A_{11}-\rho)\theta(x,\lambda)+A_{12}\varphi(x,\lambda)\big]+c_2\big[A_{21}\theta(x,\lambda)+(A_{22}-\rho)\varphi(x,\lambda)\big]=0$$

$$\begin{aligned}&c_1\big[(A_{11}-\rho)\theta'(x,\lambda)+A_{12}\varphi'(x,\lambda)-2\alpha\lambda\big(A_{11}\theta(x,\lambda)+A_{12}\varphi(x,\lambda)\big)\big]\\ &+c_2\big[A_{21}\theta'(x,\lambda)+(A_{22}-\rho)\varphi'(x,\lambda)-2\alpha\lambda\big(A_{21}\theta(x,\lambda)+A_{22}\varphi(x,\lambda)\big)\big]=0\end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin aşikar olmayan çözümünün olması için katsayı matrisinin determinantının sıfır olması gerektiğinden

$$\begin{aligned}&(A_{11}-\rho)A_{21}\theta(x,\lambda)\theta'(x,\lambda)+(A_{11}-\rho)\theta(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)\\ &-(A_{11}-\rho)2\alpha\lambda A_{21}\theta^2(x,\lambda)-(A_{11}-\rho)2\alpha\lambda A_{22}\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\\ &+A_{12}A_{21}\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+A_{12}(A_{22}-\rho)\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)\\ &-A_{12}A_{21}2\alpha\lambda\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-A_{12}A_{22}2\alpha\lambda\varphi^2(x,\lambda)\\ &-(A_{22}-\rho)(A_{11}-\rho)\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-(A_{22}-\rho)A_{12}\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)\\ &+(A_{22}-\rho)2\alpha\lambda A_{11}\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+(A_{22}-\rho)2\alpha\lambda\varphi^2(x,\lambda)\\ &-A_{21}(A_{11}-\rho)\theta(x,\lambda)\theta'(x,\lambda)-A_{21}A_{12}\theta(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)\\ &+A_{21}2\alpha\lambda\theta^2(x,\lambda)+A_{21}A_{12}2\alpha\lambda\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)=0\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve bazı düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\rho^2 - \left[A_{11} + A_{22} - 2\alpha\lambda\left(A_{21}\theta^2(x,\lambda) - A_{12}\varphi^2(x,\lambda) - \left(A_{11} - A_{22}\right)\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\right)\right]\rho$$

$$+A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$$

Diğer taraftan (4.3) deki değerler kullanılarak

$$W[\theta,\varphi] = \theta(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda) - \theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) = 1 \tag{4.7}$$

eşitliği kolayca yazılabilir. Şimdi (4.6) daki değerler yukarıda bulunan son denklemde yerlerine yazılır ve (4.7) eşitliği dikkate alınırsa

$$\rho^2 - \left[\theta(1,\lambda) + \varphi'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]\rho + 1 = 0 \tag{4.8}$$

biçiminde ρ ya bağlı ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklem her zaman ρ köküne sahiptir ve $\rho \neq 0$ dır. Bu ise (4.1) denkleminin (4.2) koşulunu sağlayan, aşikâr olmayan çözüme sahip olduğunu gösterir. □

Şimdi λ parametreli $F(\lambda)$ fonksiyonu

$$F(\lambda) = \theta(1,\lambda) + \varphi'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda) \tag{4.9}$$

biçiminde tanımlanırsa (4.8) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\rho^2 - F(\lambda)\rho + 1 = 0 \tag{4.10}$$

Bu denklemin kökleri

$$\rho_{1,2}(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{F(\lambda)}{2}\right)^2 - 1} \tag{4.11}$$

biçimindedir ve aşağıdaki eşitliği sağlar

$$\rho_1(\lambda).\rho_2(\lambda) = 1 \tag{4.12}$$

Verilmiş bir λ değeri için $F^2(\lambda) \neq 4$ ise (4.10) denklemi iki farklı ρ_1 ve ρ_2 köklerine sahiptir ve dolayısıyla öyle iki aşikâr olmayan $\psi_1(x,\lambda)$ ve $\psi_2(x,\lambda)$ çözümleri vardır ki; bu çözümler (4.2) özelliğini sağlar. Buradan (4.2) eşitlikleri de kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$W\left[\psi_1(x+1,\lambda),\psi_2(x+1,\lambda)\right] = \rho_1\rho_2\left[\psi_1(x,\lambda)\psi_2'(x,\lambda) - \psi_2(x,\lambda)\psi_1'(x,\lambda)\right] = \rho_1\rho_2 = 1 \neq 0$$

Dolayısıyla böyle tanımlanmış $\psi_1(x,\lambda)$ ve $\psi_2(x,\lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdır. ρ_1 ve ρ_2 sıfır olmadığından $e^{m_1} = \rho_1$ ve $e^{m_2} = \rho_2$ olacak biçimde $m_1 = m_1(\lambda)$ ve $m_2 = m_2(\lambda)$ sayıları tanımlanabilir ve buradan

$$\psi_1(x+1,\lambda)=e^{m_1}\psi_1(x,\lambda), \quad \psi_2(x+1,\lambda)=e^{m_2}\psi_2(x,\lambda)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi kabul edelim ki;

$$p_1(x,\lambda)=e^{-m_1x}\psi_1(x,\lambda), \; p_2(x,\lambda)=e^{-m_2x}\psi_2(x,\lambda)$$

olsun. Bu durumda $p_1(x,\lambda)$ ve $p_2(x,\lambda)$, x değişkenine göre 1 periyotlu fonksiyonlardır. Böylece $F^2(\lambda)\neq 4$ olduğunda (4.1) in Floquet formundaki genel çözümü aşağıdaki biçimde olur.

$$y(x,\lambda)=c_1e^{m_1x}p_1(x,\lambda)+c_2e^{m_2x}p_2(x,\lambda)$$

Eğer $\lambda\in(-\infty,\infty)$ ise, $\alpha\in\mathbb{R}$ ve $q(x)$ fonksiyonu reel değerli olduğundan $\theta(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$, $\varphi'(x,\lambda)$ fonksiyonları ve dolayısıyla $F(\lambda)$ fonksiyonu reel değerli olacaktır. Şimdi $F(\lambda)$ nın aşağıdaki durumlarını inceleyelim:

1) $F(\lambda)>2$ ise (4.11) den ρ_1 ve ρ_2 2 den farklı, reel, ayrık ve pozitif sayılardır. Dolayısıyla (4.12) den sıfırdan farklı reel bir m sayısı vardır, öyle ki

$$e^{m}=\rho_1, \; e^{-m}=\rho_2$$

yazılabilir. Böylece (4.1) denkleminin genel çözümü aşağıdaki biçimde olur.

$$y(x,\lambda)=c_1e^{mx}p_1(x,\lambda)+c_2e^{-mx}p_2(x,\lambda)$$

Burada $p_1(x,\lambda)$ ve $p_2(x,\lambda)$, 1 periyotlu fonksiyonlardır.

2) $F(\lambda)<-2$ ise yine (4.11) den ρ_1 ve ρ_2 -2 den farklı, ayrık ve negatiftir ve 1. durumdan farklı olarak m yerine $m+i\pi$ olur. Böylece (4.1) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$y(x,\lambda)=c_1e^{(m+i\pi)x}p_1(x,\lambda)+c_2e^{-(m+i\pi)x}p_2(x,\lambda)$$

3) $-2<F(\lambda)<2$ ise ρ_1 ve ρ_2 ayrıktır ve birbirinin eşleniği olan iki karmaşık sayıdır. Ayrıca (4.12) den bunların normu 1 dir. Buradan öyle bir γ sayısı vardır ki, $0<\gamma<\pi$ veya $-\pi<\gamma<0$ olmak üzere (4.1) denkleminin genel çözümü aşağıdaki formdadır.

$$y(x,\lambda)=c_1e^{i\gamma x}p_1(x,\lambda)+c_2e^{-i\gamma x}p_2(x,\lambda)$$

4) $F^2(\lambda)=4$, yani $F(\lambda)=\pm 2$ ise, bu durumda

$$\rho_1=\rho_2=:\rho=\begin{cases} 1, & F(\lambda)=2 \\ -1, & F(\lambda)=-2 \end{cases} \tag{4.13}$$

olur. Dolayısıyla (4.1) denkleminin (4.2) koşullarını sağlayacak en az bir aşikâr olmayan $\psi_1(x,\lambda)$ çözümü bulunacaktır. $\psi_2(x,\lambda)$, (4.1) in $\psi_1(x,\lambda)$ ile lineer bağımsız başka bir çözümü olsun. Bu durumda $\psi_2(x+1,\lambda)$ da (4.1) denkleminin çözümü olduğundan öyle d_1 ve d_2 sabitleri vardır ki;

$$\psi_2(x+1,\lambda) = d_1\psi_1(x,\lambda) + d_2\psi_2(x,\lambda) \tag{4.14}$$

eşitliği yazılabilir. Burada (4.2) ve (4.14) kullanılarak

$$W\left[\psi_1(x+1,\lambda),\psi_2(x+1,\lambda)\right] = \rho d_2 W\left[\psi_1(x,\lambda),\psi_2(x,\lambda)\right]$$

eşitliğine ulaşılır. (4.1) denkleminin iki çözümünün wronskiyen'i x'e bağlı olmadığından bu son eşitlikten $\rho d_2 = 1$ elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı ρ ile çarpılır ve (4.13) dikkate alınırsa $d_2 = \rho$ bulunur. Böylece (4.14) eşitliği

$$\psi_2(x+1,\lambda) = d_1\psi_1(x,\lambda) + \rho\psi_2(x,\lambda) \tag{4.15}$$

halini alır. Burada iki durum söz konusudur.

a) $d_1 = 0$ ise (4.15) aşağıdaki biçimde olur.

$$\psi_2(x+1,\lambda) = \rho\psi_2(x,\lambda) \tag{4.16}$$

Dolayısıyla (4.13), (4.2) ve (4.16) dikkate alındığında (4.1) denkleminin tüm çözümleri $F(\lambda)=2$ iken genelleşmiş periyodik, $F(\lambda)=-2$ iken genelleşmiş anti-periyodiktir.

Kolayca gösterilebilir ki; $d_1 = 0$ eşitliği ancak ve ancak

$$\theta'(1,\lambda) = 2\alpha\lambda,\ \ \varphi(1,\lambda) = 0 \tag{4.17}$$

olduğunda sağlanır. Gerçekten de $d_1 = 0$ ise yukarıda bahsedildiği üzere (4.1) denkleminin tüm çözümleri ya genelleşmiş periyodik ya da genelleşmiş anti-periyodik olacaktır. Dolayısıyla özel olarak $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ da böyledir. (4.2) ve (4.3) den $\varphi(1,\lambda)=\varphi(0,\lambda)=0$ bulunur. Diğer taraftan $\theta(1,\lambda)=\theta(0,\lambda)=1$ ve $\theta'(0,\lambda)=0$ olduğundan, bu değerler $\theta'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\theta(1,\lambda)=\theta'(0,\lambda)$ eşitliğinde yazılırsa $\theta'(1,\lambda)=2\alpha\lambda$ elde edilir. Tersine varsayalım ki, (4.17) sağlansın. Bu durumda (4.13) den $2\rho = F(\lambda) = \theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)$ ve $\left[\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]^2 = 4$ yazılabilir. $\varphi(1,\lambda)=0$ olduğundan ve (4.7) den

$$\left[\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)\right]^2=4\left[\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\varphi(1,\lambda)\right]$$

$$\theta^2(1,\lambda)+2\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)+\varphi'^2(1,\lambda)=4\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)-4\theta'(1,\lambda)\varphi(1,\lambda)$$

$$\left[\theta(1,\lambda)-\varphi'(1,\lambda)\right]^2=0$$

bulunur. Dolayısıyla $\theta(1,\lambda)=\varphi'(1,\lambda)$ eşitliği elde edilir ve yukarıdaki eşitlikten de $\theta(1,\lambda)=\varphi'(1,\lambda)=\rho$ sonucuna varılır. Böylece bu eşitlikten ve (4.3) ile (4.17) deki eşitliklerden (4.1) denkleminin çözümlerinin (4.2) özelliğini sağladığı gösterilir. Özel olarak $\psi_2(x,\lambda)$ da bu özelliği sağlar. O halde (4.15) eşitliğinden $d_1=0$ olmalıdır.

b) Kabul edelim ki; $d_1\neq 0$ olsun. Yani (4.17) eşitliklerinden en az biri sağlanmasın. Bu durumda (4.13) den

$$m=\begin{cases}0, & F(\lambda)=2\\ i\pi, & F(\lambda)=-2\end{cases} \tag{4.18}$$

biçimde tanımlanmış bir m sayısı vardır, öyle ki; $\rho=e^m$ dir. Şimdi

$$p_1(x,\lambda)=e^{-mx}\psi_1(x,\lambda),\quad p_2(x,\lambda)=e^{-mx}\psi_2(x,\lambda)-\frac{d_1}{\rho}xp_1(x,\lambda)$$

diyelim. Kolayca görülebilir ki, $p_1(x+1,\lambda)=p_1(x,\lambda)$, $p_2(x+1,\lambda)=p_2(x,\lambda)$ dır. Böylece (4.1) denkleminin temel çözümleri aşağıdaki biçimdedir.

$$\psi_1(x,\lambda)=e^{mx}p_1(x,\lambda),\quad \psi_2(x,\lambda)=e^{mx}\left\{\frac{d_1}{\rho}x\,p_1(x,\lambda)+p_2(x,\lambda)\right\}$$

5) Şimdi de λ nın reel sayı olmadığı durumu inceleyelim. Burada da iki alt durum vardır. Eğer $F(\lambda)$ reel sayı ise yukarıdaki dört durumdan biri söz konusudur. $F(\lambda)$ reel sayı değil ise, o zaman (4.11) den ρ_1 ve ρ_2 farklı değerlere sahip olacaktır. Bunun yanı sıra ρ_1 ve ρ_2 mutlak değerce 1'e eşit olmayacaktır. Çünkü $\rho_1=e^{i\gamma},\gamma\in(-\infty,\infty)$ ise (4.12) den $\rho_2=e^{-i\gamma}$ ve $F(\lambda)=\rho_1+\rho_2=2\cos\gamma$ olacak dolayısıyla $F(\lambda)$ reel çıkacaktır ki, bu da yukarıdaki kabulle çelişecektir. Böylece $\operatorname{Re} m\neq 0$ koşulunu sağlayan öyle m sayısı vardır ki;

$$\rho_1=e^m,\quad \rho_2=e^{-m}$$

dir ve (4.1) denkleminin aşağıdaki gibi lineer bağımsız iki çözümü bulunur.

$$\psi_1(x,\lambda)=e^{mx}p_1(x,\lambda),\quad \psi_2(x,\lambda)=e^{-mx}p_2(x,\lambda)$$

Tanım 3.6.1. den ve yukarıda yaptığımız incelemelerden şu sonuca ulaşırız:

Sonuç 4.2.1. $\lambda \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere $\left|F(\lambda)\right| > 2$ ise (4.1) denklemi kararsız, $\left|F(\lambda)\right| < 2$ ise kararlıdır. $\left|F(\lambda)\right| = 2$ ise bu durumda $\theta'(1,\lambda) = 2\alpha\lambda$, $\varphi(1,\lambda) = 0$ eşitliklerinin her ikisi de sağlanıyor ise (4.1) denklemi kararlı, en az biri sağlanmıyorsa şartlı kararlı olup, kararlı olmayacaktır.

4.3. $t-$PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİ

$0 \le x \le 1$ aralığında

$$y'' + \left[\lambda^2 - q(x)\right]y = 0 \tag{4.19}$$

denkleminin ve

$$y(1) = e^{it}y(0), \quad y'(1) = e^{it}\left[y'(0) + 2\alpha\lambda y(0)\right] \tag{4.20}$$

sınır koşullarının oluşturduğu t-periyodik sınır-değer problemini ele alalım. Burada t verilmiş bir reel sayıdır. Kabul edelim ki; $y(x) \not\equiv 0$ ve

$$\int_0^1 \left\{\left|y'(x)\right|^2 + q(x)\left|y(x)\right|^2\right\}dx > 0 \tag{4.21}$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. (Burada (4.21) eşitsizliğinin sağlanması için $q(x) \ge 0$ olması yeterlidir).

Bu kısımda (4.19), (4.20) sınır-değer probleminin aşağıdaki bazı özelliklerini vereceğiz.

Lemma 4.3.1. $F(\lambda)$, (4.9) formülü ile tanımlanan fonksiyon olmak üzere (4.19), (4.20) sınır-değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki denklemin sıfırlarıdır.

$$F(\lambda) - 2\cos t = 0 \tag{4.22}$$

İspat: Daha önceden biliyoruz ki, (4.19) denkleminin çözümleri

$$y(x,\lambda) = c_1\theta(x,\lambda) + c_2\varphi(x,\lambda)$$

biçimindedir. Bu çözüm (4.20) sınır koşullarında yerlerine yazılır ve (4.3) deki değerler kullanılırsa aşağıdaki denklem sistemi bulunur.

$$\left(\theta(1,\lambda)-e^{it}\right)c_1+\varphi(1,\lambda)c_2=0$$
$$\left(\theta'(1,\lambda)-e^{it}2\alpha\lambda\right)c_1+\left(\varphi'(1,\lambda)-e^{it}\right)c_2=0$$

Bu sistemin aşikâr olmayan çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix}\left(\theta(1,\lambda)-e^{it}\right) & \varphi(1,\lambda)\\ \left(\theta'(1,\lambda)-e^{it}2\alpha\lambda\right) & \left(\varphi'(1,\lambda)-e^{it}\right)\end{vmatrix}=0$$

olmasıdır. Buradan

$$\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)-e^{it}\left[\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)\right]+e^{2it}-\theta'(1,\lambda)\varphi(1,\lambda)+2\alpha\lambda e^{it}\varphi(1,\lambda)=0$$

denklemi elde edilir ve (4.7) kullanılırsa

$$\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)=\frac{e^{2it}+1}{e^{it}}=e^{it}+e^{-it}=2\cos t$$
$$F(\lambda)=2\cos t$$

eşitliği bulunur. □

Lemma 4.3.2. (4.19), (4.20) sınır-değer probleminin özdeğerleri reeldir ve sıfırdan farklıdır.

İspat: Varsayalım ki; λ, (4.19), (4.20) sınır-değer probleminin özdeğeri ve $y(x)$ de bu özdeğere karşılık gelen ve $(y,y)=1$ şartını sağlayan özfonksiyon olsun. Bu durumda (4.19) denkleminin her iki tarafına $y(x)$ ile iç çarpım uygulanırsa

$$\left(y''(x)+\left[\lambda^2-q(x)\right]y(x),y(x)\right)=(0,y(x))$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$\lambda^2+2\alpha\left|y(0)\right|^2\lambda-\int_0^1\left\{\left|y'(x)\right|^2+q(x)\left|y(x)\right|^2\right\}dx=0 \qquad (4.23)$$

biçiminde λ ya bağlı ikinci dereceden bir denklem elde edilir. (4.21) dikkate alındığında bu denklemin köklerinin reel ve sıfırdan farklı olduğu ortaya çıkar. □

Lemma 4.3.3. $t\neq m\pi\quad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ olduğunda (4.19), (4.20) sınır-değer probleminin özdeğerleri tek katlıdır. Yani her bir özdeğere bir tek özfonksiyon karşılık gelir.

İspat: Kabul edelim ki; $t \neq m\pi \ \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ olsun ve (4.19), (4.20) sınır-değer probleminin λ özdeğerine iki lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonksiyonları karşılık gelsin. Bu durumda her bir λ değeri için (4.19) denkleminin $y(x)$ çözümü $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ in lineer kombinasyonu biçiminde yazılabilir ve aynı zamanda (4.20) sınır koşullarını sağlar. Özel olarak $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonları da bu koşulları sağlayacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \theta(1,\lambda) + \varphi'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda) \\ &= e^{it}\theta(0,\lambda) + e^{it}\left[\varphi'(0,\lambda) + 2\alpha\lambda\varphi(0,\lambda)\right] - 2\alpha\lambda e^{it}\varphi(0,\lambda) \\ &= 2e^{it} \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, Lemma 4.3.1 den λ özdeğeri (4.22) eşitliğini sağladığından

$$\cos t = e^{it}$$

olur. Bu eşitlik ise ancak ve ancak $t = m\pi \ \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ durumunda sağlanır ki bu da yukarıdaki varsayımla çelişir. □

$t = m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) olmak üzere m çift sayı ise (4.20) koşulları

$$\begin{aligned} y(1) &= y(0) \\ y'(1) &= y'(0) + 2\alpha\lambda y(0) \end{aligned} \tag{4.24}$$

biçimini alır. m tek sayı olduğunda da sınır koşulları aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} y(1) &= -y(0) \\ y'(1) &= -y'(0) - 2\alpha\lambda y(0) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Lemma 4.3.1 gereğince (4.19), (4.24) sınır-değer probleminin özdeğerleri $F(\lambda) = 2$ denkleminin, (4.19), (4.25) sınır-değer probleminin özdeğerleri de $F(\lambda) = -2$ denkleminin sıfırlarıdır ve bu özdeğerler iki katlı olabilir.

Lemma 4.3.4. (4.19), (4.24) ve (4.19), (4.25) sınır-değer problemlerinin λ özdeğerlerinin iki katlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\theta'(1,\lambda) = 2\alpha\lambda, \quad \varphi(1,\lambda) = 0 \tag{4.26}$$

olmasıdır.

İspat: İspatı (4.19), (4.24) sınır-değer problemi için yapalım. (4.19), (4.25) problemi için de aynı işlemler yapılabilir. Varsayalım ki; λ, (4.19), (4.24) sınır-değer probleminin iki katlı özdeğeridir. Bu durumda aynı özdeğere iki lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonksiyonları karşılık gelir. Dolayısıyla bu özfonksiyonların lineer kombinasyonu (4.19) denklemini ve (4.24) sınır koşullarını sağlar. Özel olarak $y_1(x) = \theta(x,\lambda)$ ve $y_2(x) = \varphi(x,\lambda)$ alınırsa (4.3) koşulundan (4.26) eşitlikleri elde edilir. Tersine varsayalım ki, (4.19), (4.24) sınır-değer probleminin λ özdeğeri için (4.26) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda λ nın iki katlı özdeğer olduğunu gösterelim. Gerçekten de (4.26) ve (4.7) den

$$\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda) = 1 \tag{4.27}$$

elde edilir. Öte yandan, Lemma 4.3.1. den $F(\lambda) = 2$ dir. Buradan (4.27) gereğince

$$F^2(\lambda) = \left[\theta(1,\lambda) + \varphi'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]^2 = 4 = 4\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)$$

olur ve (4.26) dan

$$\left[\theta(1,\lambda) + \varphi'(1,\lambda)\right]^2 = 4\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)$$

$$\theta(1,\lambda) = \varphi'(1,\lambda)$$

eşitliği elde edilir. $F(\lambda) = 2$ eşitliğinden de

$$\theta(1,\lambda) = \varphi'(1,\lambda) = 1 \tag{4.28}$$

sonucuna varılır. (4.3), (4.26) ve (4.28) den (4.24) koşullarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla bu çözümler lineer bağımsız ve λ, (4.19), (4.24) probleminin iki katlı özdeğeridir. □

Şimdi (4.19), (4.20) t-periyodik sınır-değer probleminin özdeğerlerinin varlığını gösterelim. ([15], s. 292) daki formüller gereğince yeterince büyük $|\lambda|$ değerleri için aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur.

$$\theta(x,\lambda) = \cos\lambda + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{|\lambda|}\right),\ \ \varphi(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda} + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{|\lambda|^2}\right),\ \varphi'(x,\lambda) = \cos\lambda + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{|\lambda|}\right)$$

Bu formüller (4.9) daki $F(\lambda)$ nın ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \theta(1,\lambda) + \varphi'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda) \\ &= \cos\lambda + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{|\lambda|}\right) + \cos\lambda + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{|\lambda|}\right) - 2\alpha\lambda\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda} + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{|\lambda|^2}\right)\right) \\ &= 2\cos\lambda - 2\alpha\sin\lambda + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{|\lambda|}\right), \end{aligned}$$

$$F(\lambda) = 2\sqrt{1+\alpha^2}.\sin(\beta+\lambda) + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{|\lambda|}\right) \tag{4.29}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\cot\beta = -\alpha$ dır. (4.29) asimptotik formülünden Rouche Teoremi gereğince (4.22) deki $F(\lambda) = 2\cos t$ denkleminin sayılabilir sayıda $\lambda_k(t)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ köklerine sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca Lemma 4.3.4 den $\lambda_k(t)$ özdeğerlerinin katı (4.19), (4.20) probleminin özdeğerlerinin katına eşittir. Bununla birlikte yine Lemma 4.3.1. ve Lemma 4.3.2. den bu $\lambda_k(t)$ ler reeldir, sıfıra eşit değildir ve aşağıdaki sıralamaya sahiptir:

$$\cdots \le \lambda_{-2}(t) \le \lambda_{-1}(t) \le \lambda_0(t) \le \lambda_1(t) \le \lambda_2(t) \le \cdots \tag{4.30}$$

4.4. KARARLILIK VE KARARSIZLIK ARALIKLARI

Bu bölümde 4.2. kısmında elde edilen bilgilerden de yararlanarak (4.1) denkleminin kararlılık ve kararsızlık aralıkları hakkında daha somut bilgiler edinmeye çalışacağız. $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonları ile bunların türevleri verilmiş her x için λ parametresine göre tam fonksiyon olduklarından $F(\lambda)$ da λ ya göre tam fonksiyondur. Bu bölümde, genelliği bozmadan λ yı reel sayı kabul edeceğiz. $F(\lambda)$, λ nın sürekli fonksiyonu olduğundan $F(\lambda) < 2$ koşulunu sağlayan λ lar reel λ-ekseni üzerinde açık aralıklar olacaktır. Bu aralıklar kümesi aşağıda göreceğiz ki; boş değildir ve ayrık olan açık aralıkların sayılabilir tanesinin birleşiminden oluşmuştur. Böylece (4.1) denklemi λ lar bu aralıklarda olduğunda kararlı olacaktır. Bu aralıklara (4.1) denkleminin kararlılık aralığı diyeceğiz. Aynı şekilde $F(\lambda) > 2$ koşulunu sağlayan λ ların oluşturduğu aralıkları da (4.1) denkleminin kararsızlık aralıkları olarak adlandıracağız. Kararlılık aralıklarının kapanışı, yani $F(\lambda) \le 2$ koşulunu sağlayan λ ların oluşturduğu aralıklar da (4.1) denkleminin şartlı kararlı aralıklarını oluşturacaktır.

Bu bölümde kararlılık ve kararsızlık aralıklarının varlığı ispatlanacak ve bu aralıkların kesin tasviri verilecektir. Bütün bunlar $F(\lambda)$ fonksiyonunun özellikleri araştırılarak yapılacaktır. Şimdi kabul edelim ki; $-\infty < x < \infty$ olsun ve $y(x) \ne 0$ fonksiyonu (4.21) eşitsizliğini sağlasın.

Lemma 4.4.1. $y(x,\lambda)$, (4.1) denkleminin aşikâr olmayan herhangi bir çözümü olsun. Bu durumda $\lambda \neq 0$ ve

$$\lambda \int_0^1 \left|y(x,\lambda)\right|^2 dx \neq 0 \tag{4.31}$$

dır. Yani $\lambda > 0$ ise (4.31) eşitsizliğinin sol tarafı pozitif, $\lambda < 0$ ise negatif olur.

İspat: (4.21) den

$$A := \int_0^1 \left\{\left|y'(x,\lambda)\right|^2 + q(x)\left|y(x,\lambda)\right|^2\right\} dx > 0$$

olsun. Ayrıca

$$y'' + \left[\lambda^2 - q(x)\right] y = 0$$

eşitliğinin her iki tarafı $\overline{y}$ ile çarpılıp, x değişkenine göre 0 'dan 1 'e integrallenirse

$$\lambda^2 + 2\alpha\left|y(0)\right|^2 \lambda - \int_0^1 \left\{\left|y'(x)\right|^2 + q(x)\left|y(x)\right|^2\right\} dx = 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\lambda^2 (y,y) + 2\alpha\left|y(0)\right|^2 - A = 0$$

eşitliğine varılır. Dolayısıyla λ değeri aşağıdaki biçimde bulunmuş olur.

$$\lambda = \frac{-\alpha\left|y(0)\right|^2 \pm \sqrt{\alpha^2\left|y(0)\right|^4 + A.(y,y)}}{(y,y)} \tag{4.32}$$

$A > 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$ dır ve buradan

$$\lambda \int_0^1 \left|y(x,\lambda)\right|^2 dx = -\alpha\left|y(0)\right|^2 \pm \sqrt{\alpha^2\left|y(0)\right|^4 + A.(y,y)} \neq 0$$

elde edilmiş olur. (4.32) de $\lambda > 0$ ise kare kökün karşısında "$+$" ve $\lambda < 0$ ise "$-$" işareti olur. Yani (4.31) nın sol tarafının işareti λ nın işareti ile belirlenir. □

Lemma 4.4.2. Eğer $\left|F(\lambda)\right| < 2$ ise $\theta'(1,\lambda) + 2\alpha\lambda\theta(1,\lambda) \neq 0$, $\varphi(1,\lambda) \neq 0$ ve $\theta'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\theta(1,\lambda)$ ile $\varphi(1,\lambda)$ ters işaretlidir.

İspat: Öncelikle aşağıdaki kısaltmaları yapalım.

$$\theta = \theta(1,\lambda), \quad \theta' = \theta'(1,\lambda), \quad \varphi = \varphi(1,\lambda), \quad \varphi' = \varphi'(1,\lambda)$$

$|F(\lambda)| < 2$ eşitsizliğinden (4.9) kullanılarak

$$\left(\theta + \varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right)^2 = \theta^2 + \left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right)^2 + 2\theta\left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right) < 4$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan bazı işlemler yapılır ve (4.7) dikkate alınırsa

$$\theta^2 + \left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right)^2 + 2\theta\left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right) < 4\left(\theta\varphi' - \theta'\varphi\right)$$

$$\theta^2 + \left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right)^2 + 2\theta\left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right) < 4\left(\theta\varphi' - \theta'\varphi - 2\alpha\lambda\theta\varphi + 2\alpha\lambda\theta\varphi\right)$$

$$\theta^2 + \left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right)^2 + 2\theta\left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right) < 4\theta\left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right) - 4\varphi\left(\theta' + 2\alpha\lambda\theta\right)$$

$$\left[\theta - \left(\varphi' - 2\alpha\lambda\varphi\right)\right]^2 < -4\varphi\left(\theta' + 2\alpha\lambda\theta\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır ki bu da ispatı bitirir. □

Lemma 4.4.3. Eğer $|F(\lambda)| < 2$ ise, $\dfrac{dF(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$ dır.

İspat: (4.19) ve (4.3) den elde edilen aşağıdaki diferansiyel denklemi düşünelim.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right) + \left[\lambda^2 - q(x)\right]\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda} = -2\lambda\theta(x,\lambda)$$

$$\frac{\partial\theta(0,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\theta'(0,\lambda)}{\partial\lambda} = 0$$

Bu başlangıç değer probleminin çözümleri aşağıdaki biçimde olacaktır.([15] s. 293)

$$\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 2\int_0^x \left\{\theta(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\right\}\lambda\theta(\xi,\lambda)\,d\xi\,, \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 2\int_0^x \left\{\theta(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\right\}\lambda\varphi(\xi,\lambda)\,d\xi\,, \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial\varphi'(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 2\int_0^x \left\{\theta'(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\right\}\lambda\varphi(\xi,\lambda)\,d\xi\,. \tag{4.35}$$

Bu değerler (4.9) dan elde edilmiş olan

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\theta(1,\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varphi'(1,\lambda)}{\partial\lambda} - 2\alpha\lambda\frac{\partial\varphi(1,\lambda)}{\partial\lambda}$$

denkleminde yazılır ve Lemma 4.4.2. deki kısaltmalar kullanılırsa

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda}=2\int_0^1\{\theta\varphi(\xi,\lambda)-\varphi\theta(\xi,\lambda)\}\lambda\theta(\xi,\lambda)d\xi$$

$$+2\int_0^1\{\theta'\varphi(\xi,\lambda)-\varphi'\theta(\xi,\lambda)\}\lambda\varphi(\xi,\lambda)d\xi$$

$$-4\alpha\lambda\int_0^1\{\theta\varphi(\xi,\lambda)-\varphi\theta(\xi,\lambda)\}\lambda\varphi(\xi,\lambda)d\xi$$

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda}=-2\int_0^1\left\{\varphi\theta^2(\xi,\lambda)+\left(\varphi'-2\alpha\lambda\varphi-\theta\right)\theta(\xi,\lambda)\varphi(\xi,\lambda)-\left(\theta'-2\alpha\lambda\theta\right)\varphi^2(\xi,\lambda)\right\}\lambda d\xi$$

$$-\left(\theta'-2\alpha\lambda\theta\right)\varphi^2(\xi,\lambda)\Big\}\lambda d\xi \tag{4.36}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\left|F(\lambda_0)\right|<2$ olduğundan $\exists t_0\in(-\infty,\infty)$ sayısı vardır ki; $F(\lambda_0)=2\cos t_0$ dır. Bu eşitlik Lemma 4.3.1.'e göre λ_0 ın (4.19), (4.20) t_0-periyodik sınır-değer probleminin özdeğeri olduğunu gösterir. Kabul edelim ki; $\psi(x)\not\equiv 0$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Bu durumda

$$\psi''(x)+\left[\lambda_0-q(x)\right]\psi(x)=0 \tag{4.37}$$

$$\psi(1)=e^{it_0}\psi(0),\quad \psi'(1)=e^{it_0}\left(\psi'(0)+2\alpha\lambda\psi(0)\right) \tag{4.38}$$

yazılabilir. Burada ayrıca $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$, (4.1) denkleminin $\lambda=\lambda_0$ için temel çözümleri olduğundan

$$\psi(x)=\psi(0)\theta(x,\lambda_0)+\psi'(0)\varphi(x,\lambda_0) \tag{4.39}$$

yazılabilir. Buradan

$$|\psi(x)|^2=|\psi(0)|^2\theta^2(x,\lambda_0)+|\psi'(0)|^2\varphi^2(x,\lambda_0)$$

$$+\left[\psi(0)\bar{\psi}'(0)+\bar{\psi}(0)\psi'(0)\right]\theta(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0) \tag{4.40}$$

bulunur. (4.39) da $x=1$ alınır (4.38) deki ilk eşitlik kullanılırsa

$$\psi'(0)=\frac{e^{it_0}-\theta(1,\lambda_0)}{\varphi(1,\lambda_0)}\psi(0)$$

ifadesi elde edilir. Öte yandan $\theta(1,\lambda_0)+\varphi'(1,\lambda_0)+2\alpha\lambda_0\varphi(1,\lambda_0)=2\cos t_0$ eşitliğini de dikkate alarak

$$\left|\psi'(0)\right|^2 = \frac{e^{it_0} - \theta(1,\lambda_0)}{\varphi(1,\lambda_0)}\psi(0)\frac{e^{-it_0} - \overline{\theta}(1,\lambda_0)}{\overline{\varphi}(1,\lambda_0)}\overline{\psi}(0)$$

$$= \frac{1 - \theta(1,\lambda_0)2\cos t_0 + \theta^2(1,\lambda_0)}{\varphi^2(1,\lambda_0)}\left|\psi(0)\right|^2$$

$$= \frac{\theta\varphi' - \theta'\varphi - \theta\left(\theta + \varphi' + 2\alpha\lambda\varphi\right) + \theta^2}{\varphi^2}\left|\psi(0)\right|^2$$

$$\left|\psi'(0)\right|^2 = -\frac{\theta' + 2\alpha\lambda\theta}{\varphi}\left|\psi(0)\right|^2$$

ve

$$\psi(0)\overline{\psi}'(0) + \overline{\psi}(0)\psi'(0) = \frac{\varphi'(1,\lambda_0) + 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda_0) - \theta(1,\lambda_0)}{\varphi(1,\lambda_0)}\left|\psi(0)\right|^2$$

bulunur. Bulunan bu iki eşitlik (4.40) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\left|\psi(x)\right|^2 = \left|\psi(0)\right|^2\theta^2(x,\lambda_0) - \frac{\theta' + 2\alpha\lambda\theta}{\varphi}\left|\psi(0)\right|^2\varphi^2(x,\lambda_0)$$

$$+\frac{\left(\varphi' + 2\alpha\lambda\varphi - \theta\right)}{\varphi}\left|\psi(0)\right|^2\theta(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)$$

$$\left|\psi(x)\right|^2 = \Big\{\varphi\theta^2(x,\lambda_0) - \left(\theta' + 2\alpha\lambda\theta\right)\varphi^2(x,\lambda_0)$$

$$+\left(\varphi' + 2\alpha\lambda\varphi - \theta\right)\theta(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\Big\}\frac{\left|\psi(0)\right|^2}{\varphi}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını λ_0 ile çarpıp x değişkenine göre 0'dan 1'e integraller ve (4.36) yı dikkate alırsak

$$\int_0^1 \lambda_0\left|\psi(x)\right|^2 dx = \frac{\left|\psi(0)\right|^2}{\varphi(1,\lambda_0)}\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} \tag{4.41}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla Lemma 4.4.1 den (4.41) deki eşitliğin sol tarafı sıfırdan farklıdır. Bu durumda eşitliğin sağ tarafı içinde

$$\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} \neq 0$$

olur ve ispat biter. □

Lemma 4.4.4. Eğer $\left|F(\lambda_0)\right| = 2$ ise, $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\theta'(1,\lambda_0) = 2\alpha\lambda_0, \quad \varphi(1,\lambda_0) = 0 \tag{4.42}$$

olmasıdır. Ayrıca

a) Eğer $F(\lambda_0) = 2$, $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ ise $\dfrac{d^2F(\lambda_0)}{d\lambda^2} < 0$ dır.

b) Eğer $F(\lambda_0) = -2$, $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ ise $\dfrac{d^2F(\lambda_0)}{d\lambda^2} > 0$ dır.

İspat: İspatı $F(\lambda_0) = 2$ durumu için yapalım. $F(\lambda_0) = -2$ durumu da benzer biçimde kanıtlanabilir. Varsayalım ki; $F(\lambda_0) = 2$ ve (4.42) eşitliği sağlansın. Şimdi $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ olduğunu gösterelim. (4.42) deki değerler (4.7) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\theta(1,\lambda_0)\varphi'(1,\lambda_0) = 1 \tag{4.43}$$

elde edilir. Ayrıca $F(\lambda_0) = 2$ eşitliğinden $\varphi'(1,\lambda_0) = 2 - \theta(1,\lambda_0) + 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda_0)$ bulunur. Bu değer (4.43) de yerine yazılır ve $\varphi(1,\lambda_0) = 0$ değeri kullanılırsa

$$\left[\theta(1,\lambda_0) - 1\right]^2 = 0$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $\theta(1,\lambda_0) = 1$ ve (4.43) den de $\varphi'(1,\lambda_0) = 1$ bulunur. Sonuçta $F(\lambda_0) = 2$ ve (4.42) var ise $\theta(1,\lambda_0) = \varphi'(1,\lambda_0) = 1$ elde edilir. (4.23) de yukarıda elde edilen $\theta(1,\lambda_0) = 1$, $\varphi'(1,\lambda_0) = 1$, $\varphi(1,\lambda_0) = 0$ ve $\theta'(1,\lambda_0) = -2\alpha\lambda$ değerler yerlerine yazılırsa $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ eşitliği hemen çıkar.

Şimdi de tersine $F(\lambda_0) = 2$ ve $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ olduğunu varsayalım ve (4.42) eşitliklerinin sağlandığını gösterelim. Eğer $\varphi(1,\lambda_0) \neq 0$ kabul edip Lemma 4.4.3' ün ispatına benzer işlemler yapılırsa $t_0 = 0$ olduğunda $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} \neq 0$ olur ki bu da yukarıdaki ile çelişir. Böylece

$$\varphi(1,\lambda_0)=0 \tag{4.44}$$

elde edilir. Şimdi de $\theta'(1,\lambda_0)=2\alpha\lambda$ olduğunu gösterelim. (4.7) de (4.44) kullanılır ve yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa $\theta(1,\lambda_0)=\varphi'(1,\lambda_0)=1$ bulunur. Elde edilen bu üç değer (4.36) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$2(\theta'-2\alpha\lambda)\int_0^1\varphi^2(\xi,\lambda)\lambda d\xi=0 \tag{4.45}$$

eşitliği elde edilir ve Lemma 4.4.1 den

$$\int_0^1\varphi^2(\xi,\lambda)\lambda d\xi\neq 0$$

olur. Dolayısıyla (4.45) in sıfır olması için $\theta'=2\alpha\lambda$ olmalıdır.

Şimdi teoremin **(a)** kısmını ispatlayalım. Baştaki kabulümüzden ve daha sonra elde ettiklerimizden

$$\theta'(1,\lambda_0)=2\alpha\lambda,\quad \varphi(1,\lambda_0)=0,\quad \theta(1,\lambda_0)=\varphi'(1,\lambda_0)=1 \tag{4.46}$$

idi. (4.36) nın her iki tarafını λ'ya göre diferansiyeller ve $\lambda=\lambda_o$ alırsak

$$\frac{\partial^2F(\lambda_0)}{\partial\lambda^2}=-2\int_0^1\left\{\frac{\partial\varphi(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}\theta^2(\xi,\lambda)-\left(\frac{\partial\theta'(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}+2\alpha\lambda_0\frac{\partial\theta(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}\right)\varphi^2(\xi,\lambda)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\varphi'(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}+2\alpha\lambda_0\frac{\partial\varphi(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}-\frac{\partial\theta(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}\right)\theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\right\}\lambda_0d\xi \tag{4.47}$$

olur. Ayrıca (4.33), (4.34) ve (4.35) bağıntılarında (4.46) daki değerler yazılırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\frac{\partial\theta(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}=2\int_0^1\varphi(\xi,\lambda_0)\theta(\xi,\lambda_0)\lambda_0d\xi$$

$$\frac{\partial\theta'(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}=2\int_0^1\left\{-2\alpha\lambda_o\varphi(\xi,\lambda_0)\theta(\xi,\lambda_0)-\theta^2(\xi,\lambda_0)\right\}\lambda_0d\xi$$

$$\frac{\partial\varphi(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}=2\int_0^1\varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0d\xi$$

$$\frac{\partial\varphi'(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}=2\int_0^1\left\{-2\alpha\lambda_0\varphi^2(\xi,\lambda_0)-\theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\right\}\lambda_0d\xi$$

Bu değerler (4.47) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial\lambda^2} = -2\int_0^1 \left\{\left(2\int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi\right).\theta^2(\xi,\lambda_0) + \left(2\int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi\right).\varphi^2(\xi,\lambda_0)\right.$$

$$\left. + \left(2\int_0^1 -2\theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi\right).\theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\right\}\lambda_0 d\xi$$

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial\lambda^2} = -4\int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi.\int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi - 4\int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi.\int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi$$

$$+8\int_0^1 \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi.\int_0^1 \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi$$

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial\lambda^2} = 8\left[\left(\int_0^1 \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi\right)^2 - \int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda)\lambda_0 d\xi.\int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda)\lambda_0 d\xi\right] \quad (4.48)$$

ifadesi bulunur. Şimdi

$$f(x) = \varphi(x,\lambda_0) + \gamma\theta(x,\lambda_0)$$

biçiminde bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlayalım. $\lambda = \lambda_0$ olduğunda $f(x)$ fonksiyonu (4.1) denkleminin çözümüdür. Bu durumda Lemma 4.4.1. den

$$\int_0^1 f^2(x)\lambda_0 dx \neq 0$$

yani

$$\int_0^1 \varphi^2(x,\lambda_0)\lambda_0 dx + 2\gamma\int_0^1 \varphi(x,\lambda_0)\theta(x,\lambda_0)\lambda_0 dx + \gamma^2\int_0^1 \theta^2(x,\lambda_0)\lambda_0 dx \neq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafı γ'ya göre ikinci dereceden üç terimli bir denklemdir ve bu denklemin reel kökü yoktur. Yani diskriminantı sıfırdan kesin küçüktür. Böylece

$$\left(\int_0^1 \varphi(x,\lambda_0)\theta(x,\lambda_0)\lambda_0 dx\right)^2 - \left(\int_0^1 \varphi^2(x,\lambda_0)\lambda_0 dx\right)\left(\int_0^1 \theta^2(x,\lambda_0)\lambda_0 dx\right) < 0$$

olur ki bu da (4.48) in sıfırdan küçük olduğunu gösterir. □

Lemma 4.4.4. den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.4.1. $F(\lambda) \pm 2$ fonksiyonu, katı ikiden büyük sıfırlara sahip değildir.

Sonuç 4.4.2. λ_0, $F(\lambda)-2$ fonksiyonunun iki katlı sıfırıdır, ancak ve ancak $F(\lambda)$ bu noktada maksimuma sahiptir. λ_0, $F(\lambda)+2$ fonksiyonunun iki katlı sıfırıdır, ancak ve ancak $F(\lambda)$ bu noktada minimuma sahiptir.

Bu kısımda elde edilen tüm bulguların sonucu olarak (4.29) asimptotik formülü ile birlikte $-\infty<\lambda<\infty$ için $F(\lambda)$ fonksiyonunun nasıl davrandığı ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4.1.

1. (4.19), (4.24) genelleşmiş periyodik sınır-değer probleminin $\alpha_{2k}^{\pm}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ ve (4.19), (4.25) genelleşmiş anti-periyodik sınır-değer probleminin $\alpha_{2k+1}^{\pm}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ özdeğerleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\ldots\alpha_{-2}^{-}\leq\alpha_{-2}^{+}<\alpha_{-1}^{-}<\alpha_{0}^{-}\leq\alpha_{0}^{+}<\alpha_{1}^{-}\leq\alpha_{1}^{+}<\alpha_{2}^{-}\leq\alpha_{2}^{+}<\ldots$$

2. $\left[\alpha_{2k}^{+},\alpha_{2k+1}^{-}\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ kapalı aralığında $F(\lambda)$ $+2$ değerinden -2 değerine monoton azalan, $\left[\alpha_{2k+1}^{+},\alpha_{2k+2}^{-}\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ kapalı aralığında ise -2 değerinden $+2$ değerine monoton artandır.

3. $\left(\alpha_{2k}^{-},\alpha_{2k}^{+}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ açık aralığında $F(\lambda)>2$, $\left(\alpha_{2k+1}^{-},\alpha_{2k+1}^{+}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ açık aralığında ise $F(\lambda)<-2$ dir.

Böylece (4.1) denklemi için $\left(\alpha_{k-1}^{+},\alpha_{k}^{-}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ aralıkları kararlılık, onların kapanışları olan $\left[\alpha_{k-1}^{+},\alpha_{k}^{-}\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ aralıkları şartlı kararlılık ve $\left(\alpha_{k}^{-},\alpha_{k}^{+}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ aralıkları da kararsızlık aralıkları olacaktır.

4.5. SPEKTRUMUN YAPISI

S ile (4.1) denkleminin tüm şartlı kararlı aralıkların oluşturduğu kümeyi gösterelim. Bu bölümdeki amacımız σ ile göstereceğimiz L_{α}^{λ} operatörünün spektrumunu araştırmaktır.

Teorem 4.5.1. L_α^λ operatörü sürekli spektruma sahiptir.

İspat: Tersini kabul edelim. λ_0, L_α^λ operatörünün özdeğeri ve $\psi(x)$ de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Bu durumda

$$L_0^{\lambda_0}\psi(x) = 0$$

olur. Bu da $\psi(x)$ in (4.1) denkleminin $\lambda = \lambda_o$ olduğunda $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında aşikâr olmayan bir çözümü olması demektir. Hâlbuki 4.2. kısmın sonuçlarına göre (4.1) denklemi hiçbir λ kompleks değeri için $L_2(-\infty,\infty)$ da aşikâr bir çözüme sahip değildir. Böylece L_0^λ operatörü özdeğere sahip değildir. □

Teorem 4.5.2. σ ve S kümeleri eşittir.

İspat: Öncelikle $\mathsf{S} \subset \sigma$ olduğunu ispatlayalım ve Teorem 3.3.3' ü kullanarak S den alınan herhangi bir λ_0 ın aynı zamanda σ da olduğunu gösterelim. Bunun için $\|f_n\| = 1$ ve $n \to \infty$ iken $\left\|L_\alpha^{\lambda_0} f_n\right\| \to 0$ olacak biçimde en az bir $f_n(x) \in D$ dizisinin varlığını göstermek yeterlidir. (Burada norm olarak $L_2(-\infty,\infty)$ daki norm anlaşılmaktadır).

$\lambda_o \in \mathsf{S}$ ise 4.2. kısmın sonuçlarına göre (4.1) denkleminin $\lambda = \lambda_o$ olduğunda en az bir tane aşikâr olmayan $\psi(x)$ çözümü vardır, öyle ki; bu çözümler

$$\begin{gathered}\psi(x+1) = \rho\psi(x) \\ \psi'(x+1) + 2\alpha\lambda\psi(x+1) = \rho\psi'(x)\end{gathered} \tag{4.49}$$

şartlarını sağlar. Burada

$$|\rho| = 1 \tag{4.50}$$

dir. Teorem 3.3.3 deki $\{f_n\}$ dizisini tanımlamak için $[0,1]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip, aşağıdaki şartları sağlayan bir $g(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \quad g'(0) = g''(0) = g'(1) = g''(1) = 0, \quad 0 \le g(x) \le 1$$

Şimdi de $(-\infty,\infty)$ aralığında aşağıdaki biçimde verilmiş $f_n(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$f_n(x) = b_n \psi(x) h_n(x)$$

Burada

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \le (n-1) \\ g(n-|x|), & (n-1) \le |x| \le n \\ 0 & , \quad |x| > n \end{cases}$$

ve b_n de $\|f_n\| = 1$ yapan normlaştırıcı katsayıdır. $(-n,n)$ aralığı boyunca, her bir uçta uzunluğu 1 olan aralıklar hariç $h_n(x) = 1$ olduğundan

$$b_n \sim \left(2n \int_0^1 |\psi(x)|^2 \, dx \right)^{-\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (4.49) ve (4.50) kullanılarak $n \to \infty$ iken

$$b_n \to 0 \tag{4.51}$$

olur. Açıktır ki; $f_n(x) \in D$ ve

$$L_\alpha^{\lambda_0} f_n(x) = b_n \left[2\psi'(x) h_n'(x) + \psi(x) h_n''(x) \right]$$

dir. Buradan

$$\left\| L_\alpha^{\lambda_0} f_n(x) \right\| \le |b_n| \left[2 \left\| \psi'(x) h_n'(x) \right\| + \left\| \psi(x) h_n''(x) \right\| \right] \le K |b_n|$$

elde edilir. Burada K negatif olmayan sabit sayıdır ve n'ye bağlı değildir. Dolayısıyla $n \to \infty$ iken (4.51) den $\left\| L_\alpha^{\lambda_0} f_n(x) \right\| \to 0$ olur. Böylece Teorem 3.3.3 gereğince λ_0, σ dadır. Yani $S \subset \sigma$ dır.

Şimdi de $\sigma \subset S$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\lambda_0 \notin S$ iken $\lambda_0 \notin \sigma$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Eğer $\lambda_0 \notin S$ ise o zaman aşağıdaki üç durumdan biri vardır.

i) $\lambda_0 \in (-\infty, +\infty)$ ve $|F(\lambda_0)| > 2$

ii) $\operatorname{Im} \lambda_0 \ne 0$ ve $F(\lambda_0)$ reeldir.

iii) $\operatorname{Im} \lambda_0 \ne 0$ ve $F(\lambda_0)$ reel değildir.

Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) Burada $F(\lambda_0) > 2$ ya da $F(\lambda_0) < -2$ dir. Bunlardan $F(\lambda_0) > 2$ durumunu inceleyelim. Diğer durumda aynı yöntemle incelenebilir. $F(\lambda_0) > 2$ ise (4.1) denklemi 4.2. kısmın sonuçlarına göre aşağıdaki gibi iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$$\psi_1(x) = e^{mx} p_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-mx} p_2(x) \tag{4.52}$$

Burada $m \in (-\infty, +\infty)$, $m \neq 0$, $p_k(x+1) = p_k(x)$, $(k = 1,2)$ dir. Şimdi aşağıdaki Green fonksiyonunu ele alalım.

$$G(x, \xi, \lambda_n) = \begin{cases} \psi_1(x)\psi_2(\xi)/c, & (x \le \xi) \\ \psi_1(\xi)\psi_2(x)/c, & (x \ge \xi) \end{cases} \tag{4.53}$$

Burada $c = \psi_1'(x)\psi_2(x) - \psi_1(x)\psi_2'(x)$ dir. Şimdi $L_2(-\infty, \infty)$ da R integral operatörünü aşağıdaki biçimde tanımlayalım.

$$Rf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, \lambda_0) f(\xi)\, d\xi \tag{4.54}$$

Buradaki amacımız R integral operatörünün $L_2(-\infty, \infty) \to L_2(-\infty, \infty)$ da sınırlı bir operatör olduğunu göstermektir. (4.54) den (4.53) ve (4.52) kullanılarak

$$|Rf(x)| \le \frac{M^2}{c}\{G_1(x) + G_2(x)\} \tag{4.55}$$

olduğu gösterilebilir. Burada

$$M = \sup\left\{\max_{0\le x\le 1}|p_1(x)|, \max_{0\le x\le 1}|p_2(x)|\right\}$$

ve

$$G_1(x) = e^{-mx}\int_{-\infty}^{x} e^{m\xi}\,|f(\xi)|\,d\xi\,,\ G_2(x) = e^{mx}\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi x}\,|f(\xi)|\,d\xi$$

dir. Herhangi bir $N_1 > 0$ ve $N_2 > 0$ sayıları için kısmi integrasyon formülünden

$$\int_{-N_1}^{N_2} G_1^2(x)\,dx = \int_{-N_1}^{N_2} e^{-2mx}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{mx}\,|f(\xi)|\,d\xi\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2m}\{G_1^2(-N_1) - G_1^2(N_2)\} + \frac{1}{m}\int_{-N_1}^{N_2} G_1(x)|f(x)|\,dx$$

$$\leq \frac{G_1^2(-N_1)}{2m} + \frac{1}{m}\left\{\int_{-N_1}^{N_2} G_1^2(x)\,dx \int_{-N_1}^{N_2} |f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.56}$$

ifadesi bulunur. Buradan Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinden $N_1 \to \infty$ iken

$$G_1(-N_1) = e^{mN_1}\int_{-\infty}^{N_1} e^{m\xi}|f(x)|^2\,d\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\int_{-\infty}^{-N_1} |f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

olur. Dolayısıyla (4.56) da $N_1 \to \infty$ ve $N_2 \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} G_1^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir. G_2 için de benzer eşitsizlik gösterilebilir. Dolayısıyla (4.55) den $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında R integral operatörü sınırlıdır ve $R = \left\{L_\alpha^\lambda\right\}^{-1}$ dir. Aşağıdakiler kolayca gösterilebilir.

$$L_\alpha^\lambda R f(x) = f(x), \quad \forall f(x) \in L_2(-\infty,\infty) \tag{4.57}$$

$$RL_\alpha^\lambda f(x) = f(x), \quad \forall f(x) \in D \tag{4.58}$$

(4.57) den $L_\alpha^{\lambda_0}$ operatörünün değer kümesi $L_2(-\infty,\infty)$ uzayı ile çakışır ve (4.58) den de $\ker L_\alpha^{\lambda_0} = \{0\}$ dır. Böylece $L_\alpha^{\lambda_0}$ operatörü $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında tanımlı terse sabittir ve $\left\{L_\alpha^{\lambda_0}\right\}^{-1} = R$ dir. Böylece λ_0, L_α^λ için düzenli noktadır, yani $\lambda_0 \not\in \sigma$ dır.

ii) Burada $|F(\lambda_0)| > 2$ olduğunu gösterelim. O zaman birinci durumdaki incelemeleri yapabiliriz. Gerçektende eğer $|F(\lambda_0)| \leq 2$ ise $\exists t_0 \in (-\infty,\infty)$ vardır öyle ki, $F(\lambda_0) = 2\cos t_0$ dır. Bu ise λ_0'ın $t-$periyodik sınır-değer probleminin özdeğeri olduğunu gösterir. Ancak t_0-periyodik sınır-değer probleminin özdeğerleri Lemma 4.3.2. ye göre reeldir. Bu da $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$ şartıyla çelişir.

iii) Bu durumda 4.2. kısım 5.b' ye göre $\lambda = \lambda_0$ olduğunda (4.1) denklemi iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$$\psi_1(x) = e^{mx}p_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-mx}p_2(x)$$

Burada $\operatorname{Re} m \neq 0$, $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ x'e göre 1 periyotlu fonksiyonlardır. Dolayısıyla ispatın bundan sonrası birinci durumdakine benzer yolla yapılabilir. □

Teorem 4.4.1, Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.5.2 den $L_\alpha^{\lambda_0}(q)$ nun spektrumu için aşağıdaki sonuca varılır:

Sonuç 4.5.1. L_0^λ operatörünün spektrumu süreklidir ve $\left[\alpha_{k-1}^+, \alpha_k^-\right]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ kapalı aralıklar dizisinden oluşur. $\left(\alpha_k^-, \alpha_k^+\right)$ ise spektrum içindeki boşluklardır. Burada $\left\{\alpha_{2k}^\pm\right\}$ genelleşmiş periyodik sınır-değer probleminin ve $\left\{\alpha_{2k+1}^\pm\right\}$ ise genelleşmiş anti-periyodik sınır-değer probleminin özdeğerleridir.

Şimdi $\left(\alpha_{k-1}^+, \alpha_k^-\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ içindeki boşlukların $k \to \infty$ olduğunda uzunluklarını araştıralım.

Teorem 4.5.3. L_0^λ operatörünün spektrumunun içindeki boşlukların sayısı sonsuzdur ve $n \to \infty$ iken bu boşlukların uzunlukları sonsuza gider.

İspat: İspat için $F(\lambda) \equiv \theta + \varphi' + 2\alpha\lambda\varphi = 2$ denklemini ele almak yeterlidir. Bu denklemden [15] deki formüller kullanılarak

$$F(\lambda) - 2 = 2\cos\lambda - 2\alpha\sin\lambda + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|}\right)$$

denklemi elde edilir. Buradan da Rouche teoreminden aşağıdaki sonuca varılır.

$$\alpha_{2n}^+\left(\alpha_{2n}^-\right) = 2\pi n + O(1) \text{ veya } \alpha_{2n}^+\left(\alpha_{2n}^-\right) = 2\pi n\, arctn\,\alpha + O(1)$$

α_{2n} sayılarının daha sonraki asimptotik terimlerini bulmak için $F(\lambda) - 2$ fonksiyonunu aşağıdaki biçimde yazalım.

$$\begin{aligned} F(\lambda) - 2 = {} & -4.\sin^2\frac{\lambda}{2} + 2\alpha\sin\lambda \\ & + \frac{1}{\lambda}\left[(\sin\lambda - \alpha.\cos\lambda)\int_0^1 q(y)\,dy + \alpha\int_0^1 \cos\left\{\lambda(1-2y)\right\} q(y)\,dy\right] \\ & + \frac{1}{\lambda^2}\left[\int_0^1 q(y)\,dy\int_0^y \sin\{y-t\}.\sin\left\{\lambda(1-y+t)\right\} q(t)\,dt + \right. \\ & \left. + 2\alpha\int_0^1 \sin\left\{\lambda(1-y)\right\} q(y)\,dy\int_0^y \sin\left\{\lambda(y-t)\right\}\sin\lambda t.q(t)\,dt\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \end{aligned}$$

Bu formülde λ yerine $2\pi n+\delta_n$ yazılır (burada $\delta_n=O(1)$) ve bazı dönüşümler yapılırsa, δ_n aşağıdaki denklem ile bulunur.

$$\sin^2\frac{\delta_n}{2n}-\frac{a_0+8\alpha\pi n}{8\pi n^2}.\sin\frac{8n}{2n}+\frac{\alpha}{16\pi n^3}(a_0-a_{2n})+\frac{a_0^2-a_{2n}^2-b_{2n}^2}{256\pi^2 n^4}=O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Burada

$$a_n=2\int_0^1 q(y)\cos 2n\pi y dy\,,\quad b_n=2\int_0^1 q(y)\sin 2n\pi y dy$$

dir. Dolayısıyla

$$\delta_n=\frac{\alpha_0-8\alpha\pi n}{8\pi n}\pm\frac{1}{8\pi n}\sqrt{a_{2n}^2+b_{2n}^2-16\alpha\pi n a_{2n}+64\alpha^2\pi^2 n^2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur ve buradan da

$$\lambda_{2n}^+\left(\lambda_{2n}^-\right)=2\pi n-\alpha+\frac{\alpha_0}{8\pi n}\pm\frac{1}{8\pi n}\sqrt{a_{2n}^2+b_{2n}^2-16\alpha\pi n a_{2n}+64\alpha^2\pi^2 n^2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve $\int_0^1 q(x)\,dx<\infty$ olduğundan $\alpha_{2n}^{+\,2}-\alpha_{2n}^{-\,2}=8|\alpha|\pi n+O(1)$ elde edilir. Dolayısıyla $n\to\infty$ iken bu boşlukların uzunlukları sonsuza gider. □

Yukarıda ki işlemler benzer biçimde λ yerine $2\pi n+\arctan\alpha+\delta_n$ (burada $\delta_n=O(1)$) için de yapılabilir.

4.6. ÖZFONKSİYONLAR CİNSİNDEN AÇILIM FORMÜLÜ

L_α^λ operatörünün sürekli spektruma karşılık gelen özfonksiyonlar üzerine açılım formülünü bulmak için [17] ve [49] daki yöntemleri kullanacağız. (4.19), (4.20) genelleşmiş periyodik sınır-değer probleminin $G_t(x,\xi,\lambda)$ ile gösterilecek olan Green fonksiyonunu bulalım. Bunun için

$$y''+\left[\lambda^2-q(x)\right]y=f(x)$$

denklemini ve

$$y(1)=e^{it}y(0),\quad y'(1)=e^{it}\left[y'(0)+2\alpha\lambda y(0)\right]$$

sınır şartlarını dikkate alacağız. $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ bu denklemin homojen kısmının lineer bağımsız iki çözümü olmak üzere katsayıların değişim metodu kullanılarak

(4.19), (4.20) genelleşmiş periyodik sınır-değer probleminin Green fonksiyonu aşağıdaki biçimde bulunur.

$$G_t(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\Delta_t(\lambda)}\left[\theta(x,\lambda)h_t(\xi,\lambda) - \varphi(x,\lambda)g_t(\xi,\lambda)\right] + \omega(x,\xi;\lambda) \qquad (4.59)$$

burada

$$\Delta_t(\lambda) = -\left[F(\lambda) - 2\cos t\right], \qquad (4.60)$$

$$h_t(\xi,\lambda) = \theta(\xi,\lambda)\varphi(1,\lambda) + \left[e^{-it} - \theta(1,\lambda)\right]\varphi(\xi,\lambda), \qquad (4.61)$$

$$\begin{aligned} g_t(\xi,\lambda) = {} & \left[e^{-it} - \varphi'(1,\lambda)\right]\theta(\xi,\lambda) + \theta'(1,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) \\ & -2\alpha\lambda\left[\theta(1,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) - \theta(\xi,\lambda)\varphi(1,\lambda)\right], \end{aligned} \qquad (4.62)$$

$$\omega(x,\xi;\lambda) = \begin{cases} \varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda) - \varphi(\xi,\lambda)\theta(x,\lambda), & 0 \le \xi \le x \\ 0 & , \quad x \le \xi \le 1 \end{cases}$$

dir. Bu ise (4.19), (4.20) genelleşmiş periyodik sınır-değer probleminin çözümünün, herhangi bir $f(x) \in L_2[0,1]$ fonksiyonu için aşağıdaki biçimde olması demektir.

$$y(x,\lambda) = \int_0^1 G_t(x,\xi;\lambda) f(\xi)\, d\xi$$

Lemma 4.6.1. Her bir $t \neq \pi m \quad (m = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$ için $\Delta_t(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları tek katlıdır.

İspat: (4.60) dan $\dfrac{d\Delta_t(\lambda)}{d\lambda} = -\dfrac{dF(\lambda)}{d\lambda}$ yazılabilir. Ayrıca $\Delta_t(\lambda_0) = 0$ ise $F(\lambda_0) = 2\cos t$ olur ve $t \neq \pi m \ (m = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$ için $\left|F(\lambda_0)\right| < 2$ dir. Buradan Lemma 4.4.3 den $\dfrac{dF(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$ dır ve aranan sonuç elde edilir. □

(4.59) dan kolayca görülebilir ki; $G_t(x,\xi;\lambda)$ λ-parametresine göre meremorf fonksiyondur. Yani onun kutup noktaları (4.19), (4.20) probleminin özdeğerleridir. Bu kutup noktaları $t \neq \pi m \ (m = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$ için Lemma 4.6.1 den dolayı tek katlıdır.

Lemma 4.6.2. $t \neq \pi m, (m = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$ için aşağıdaki gösterim doğrudur.

$$G_t(x,\xi;\lambda) = -\frac{b_k(t)\psi_{k,t}(x)\overline{\psi_{k,t}(\xi)}}{\lambda - \lambda_k(t)} + w_{k,t}(x,\xi,\lambda) \tag{4.63}$$

$$b_k(t) = \left\{\varphi(1,\lambda_k(t))\frac{dF(\lambda_k(t))}{d\lambda}\right\}^{-1}, \tag{4.64}$$

$$\psi_{k,t}(x) = \varphi(1,\lambda_k(t))\theta(x,\lambda_k(t)) + \left[e^{it} - \theta(1,\lambda_k(t))\right]\varphi(x,\lambda_k(t)) \tag{4.65}$$

Burada $w_{k,t}(x,\xi,\lambda)$, $\lambda = \lambda_k(t)$ noktasının komşuluğunda λ ya göre düzgün fonksiyondur.

İspat: (4.61) ve (4.62) den aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$W\left[h_t(\xi,\lambda), g_t(\xi,\lambda)\right] = -e^{-it}\Delta(\lambda) \tag{4.66}$$

$\Delta_t(\lambda_k(t)) = 0$ olduğundan (4.66) dan $h_t(\xi,\lambda_k(t))$ ve $g_t(\xi,\lambda_k(t))$ nın lineer bağımlı olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla

$$g_t(\xi,\lambda_k(t)) = c_k(t)h_t(\xi,\lambda_k(t))$$

eşitliği yazılabilir. $\xi = 0$ alınır ve (4.61), (4.62) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$c_k(t) = \frac{e^{-it} - \varphi'(1,\lambda_k(t)) + 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda_k(t))}{\varphi(1,\lambda_k(t))}$$

ifadesi elde edilir. Burada Lemma 4.4.2 den $t \neq \pi m \quad (m = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$ için $\varphi(1,\lambda_k(t)) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$g_t(\xi,\lambda_k(t)) = \frac{e^{-it} - \varphi'(1,\lambda_k(t)) + 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda_k(t))}{\varphi(1,\lambda_k(t))}h_t(\xi,\lambda_k(t)) \tag{4.67}$$

eşitliği yazabilir. Şimdi Lemma 4.6.1' ide kullanarak rezidü teoreminden $t \neq \pi m$ $(m = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$ için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$G_t(x,\xi;\lambda) = -\frac{\theta(x,\lambda_k(t))h_t(\xi,\lambda_k(t)) - \varphi(x,\lambda_k(t))g_t(\xi,\lambda_k(t))}{(\lambda - \lambda_k(t))\dfrac{dF(\lambda_k(t))}{d\lambda}} + w_{k,t}(x,\xi,\lambda) \tag{4.68}$$

Burada da yine $w_{k,t}(x,\xi,\lambda)$ $\lambda = \lambda_k(t)$ noktasının komşuluğunda düzgün fonksiyondur. (4.67) ifadesindeki $g_t(\xi,\lambda_k(t))$, (4.68) da yerine yazılır ve (4.61) ile (4.65) dikkate alınırsa (4.63) ifadesi elde edilir. □

Kolayca görülebilir ki; (4.65) formülü ile belirlenen $\psi_{k,t}(x)$ fonksiyonu aşağıdaki sınır şartlarını sağlar.

$$\psi_{k,t}(1) = e^{it}\psi_{k,t}(0), \quad \psi'_{k,t}(1) = e^{it}\left[\psi'_{k,t}(0) + 2\alpha\lambda\psi_{k,t}(0)\right] \tag{4.69}$$

Bu durumda bu fonksiyonlara (4.19), (4.20) genelleşmiş periyodik sınır-değer probleminin özfonksiyonlarıdır diyebiliriz. Şimdi (4.1) denkleminin çözümünün asimptotik formülünden de yararlanarak aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 4.6.3. Kabul edelim ki; $f(x)$ ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\operatorname{supp} f(x) \subset (0,1)$ olsun. Bu durumda $|\lambda| \to \infty$ iken aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\int_0^1 G_t(x,\xi;\lambda) f(\xi)\, d\xi = \frac{f(x)}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{4.70}$$

(4.63) ve (4.70) den eğrisel integralleme yöntemi ile aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t)\psi_{k,t}(x)\int_0^1 f(\xi)\overline{\psi_{k,t}(\xi)}\, d\xi = 0,$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(t) b_k(t)\psi_{k,t}(x)\int_0^1 f(\xi)\overline{\psi_{k,t}(\xi)}\, d\xi = f(x)$$

Buradan Parseval eşitliği kullanılarak aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t)\left|\int_0^1 f(x)\overline{\psi_{k,t}(x)}\, dx\right|^2 = 0 \tag{4.71}$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(t) b_k(t)\left|\int_0^1 f(x)\overline{\psi_{k,t}(x)}\, dx\right|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\, dx \tag{4.72}$$

Bu eşitlikler kolayca $f(x) \in L_2[0,1]$ durumunda da elde edilebilir.

Şimdi (4.1) denkleminin özfonksiyonlar üzerine açılım formülünü tüm gerçel eksende bulmaya çalışalım. Bunun için varsayalım ki; $f(x)$ tüm gerçel eksende sürekli ve sonlu aralığın dışında sıfıra eşit olan bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım.

$$f_t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m)e^{-imt} \tag{4.73}$$

Burada $f(x)$ fonksiyonun özelliğinden (4.73) deki toplam sonludur. $f_t(x)$ fonksiyonu aşağıdaki üç önemli özelliğe sahiptir:

$$f_t(x+1) = e^{it} f_t(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_t(x)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{1} |f_t(x)|^2\, dx\, dt \tag{4.74}$$

Kolayca görülebilir ki; gerçel eksende tanımlı $\psi_{k,t}(x)$ fonksiyonu

$$\psi_{k,t}(x+1) = e^{it} \psi_{k,t}(x) \tag{4.75}$$

eşitliğini sağlar. Gerçekten de $\lambda = \lambda_k(t)$ olduğunda bu eşitliğin sağ ve sol tarafındaki fonksiyonlar (4.1) denkleminin çözümleridir. $x = 0$ olması durumunda ise zaten (4.69) bağıntısı elde edilir. (4.73) ve (4.75) den

$$\int_{0}^{1} f_t(x)\, \overline{\psi_{k,t}(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{\psi_{k,t}(x)}\, dx \tag{4.76}$$

eşitliği bulunur. (4.71) ve (4.72) formüllerinde $f(x)$ yerine $f_t(x)$ yazılırsa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) \left| \int_{0}^{1} f_t(x)\, \overline{\psi_{k,t}(x)}\, dx \right|^2 = 0 \tag{4.77}$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(t)\, b_k(t) \left| \int_{0}^{1} f_t(x)\, \overline{\psi_{k,t}(x)}\, dx \right|^2 = \int_{0}^{1} |f_t(x)|^2\, dx \tag{4.78}$$

eşitliklerine ulaşılır. Ayrıca (4.76) ve (4.65) den aşağıdaki formüller elde edilir.

$$\int_{0}^{1} f_t(x)\, \overline{\psi_{k,t}(x)}\, dx = \varphi(1,\lambda_k)\, \mathcal{F}_1(\lambda_k) + \left[e^{-it} - \theta(1,\lambda_k)\right] \mathcal{F}_2(\lambda_k)$$

burada $\lambda_k = \lambda_k(t)$ ve

$$\mathcal{F}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \theta(x,\lambda)\, dx, \quad \mathcal{F}_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x,\lambda)\, dx \tag{4.79}$$

dir. Genelliği bozmadan varsayalım ki; $f(x)$ reel değişkenlidir. Basit işlemlerden sonra aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\left| \int_{0}^{1} f_t(x)\, \overline{\psi_{k,t}(x)}\, dx \right|^2 = \varphi(1,\lambda_k(t))\, \Phi(\lambda_k(t)) \tag{4.80}$$

burada

$$\Phi\left(\lambda_k(t)\right)=\varphi(1,\lambda)\mathcal{F}_1^2(\lambda)-\left[\theta'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\theta(1,\lambda)\right]\mathcal{F}_2^2(\lambda)$$
$$+\left[\varphi'(1,\lambda)-\theta(1,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]\mathcal{F}_1(\lambda)\mathcal{F}_2(\lambda). \quad (4.81)$$

Şimdi $F\left(\lambda_k(t)\right)=2\cos t$ özdeşliğini t'ye göre diferansiyellersek

$$\frac{dF\left(\lambda_k(t)\right)}{d\lambda}\dot{\lambda}_k(t)=-2\sin t \quad (4.82)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada '$\cdot$' işareti ile t'ye göre türevi gösterdik. Diğer taraftan

$$\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\frac{F^2(\lambda)}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4-\left[\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]^2}$$

dir. Bu değer (4.82) de yerine yazılırsa

$$\left\{\frac{dF\left(\lambda_k(t)\right)}{d\lambda}\right\}^{-1}=-\upsilon\left(\lambda_k(t)\right)\dot{\lambda}_k(t) \quad (4.83)$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\upsilon(\lambda)=\left\{4-\left[\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.84)$$

dir ve pozitif kök alınmıştır. Şimdi t nin $(0,\pi)$ aralığındaki değerlerine bakalım. (4.80), (4.77) ve (4.78) de yerine yazılır ve (4.64), (4.83) dikkate alınırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Phi\left(\lambda_k(t)\right)\upsilon\left(\lambda_k(t)\right)\dot{\lambda}_k(t)=0 \quad (4.85)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k(t)\Phi\left(\lambda_k(t)\right)\upsilon\left(\lambda_k(t)\right)\dot{\lambda}_k(t)=\int_0^1\left|f_t(x)\right|^2dx \quad (4.86)$$

Lemma 4.6.4. Varsayalım ki; t-periyodik problemin $\lambda_k(t)$, $(k=0,\mp1,\mp2,\ldots)$ özdeğerleri (4.30) dakine benzer düzene sahip olsun. O zaman her bir $k=0,\mp1,\mp2,\ldots$ için aşağıdaki hükümler doğrudur.

1) $$\alpha_{k-1}^{+}\le\lambda_k(t)\le\alpha_k^{-} \quad (4.87)$$

$$\lambda_{2k+1}(-\pi)=\lambda_{2k+1}(\pi)=\alpha_{2k+1}^{-},\quad \lambda_{2k+1}(0)=\alpha_{2k}^{+}$$

$$\lambda_{2k+2}(-\pi)=\lambda_{2k+2}(\pi)=\alpha_{2k+1}^{+},\quad \lambda_{2k+2}(0)=\alpha_{2k+2}^{-} \quad (4.88)$$

2) t, $-\pi$ den 0'a artarken $\lambda_{2k+1}(t)$ α_{2k+1}^- değerinden α_{2k}^+ değerine azalır ve t, 0'dan π'ye artarken $\lambda_{2k+1}(t)$ α_{2k}^+ değerinden α_{2k+1}^- değerine artar.

3) t, $-\pi$ den 0'a artarken $\lambda_{2k+2}(t)$ α_{2k+1}^+ değerinden α_{2k+2}^- değerine artar ve t, 0'dan π'ye artarken $\lambda_{2k+2}(t)$ α_{2k+2}^- değerinden α_{2k+1}^+ değerine azalır.

Böylece t, $[-\pi,\pi]$ aralığında değer alırken, $\lambda_k(t)$ $\left[\alpha_{k-1}^+,\alpha_k^-\right]$ aralığını iki kez doldurur. $\lambda_k(t)$ önce $\left[\alpha_{k-1}^+,\alpha_k^-\right]$ aralığının bir ucundan diğerine, daha sonra tekrar aynı uca doğru döner. Bu dönüş hareketi monotondur. Ayrıca çift k'lar için $\lambda_k(t)$, $\left[\alpha_{k-1}^+,\alpha_k^-\right]$ aralığının sol sınırından, tek k'lar için ise sağ sınırından değer alarak değişir.

İspat: (4.1) denkleminin şartlı kararlılık kümesi $S=\bigcup\lambda_k(t)$ şeklindedir. Burada birleşim $k=0,\mp1,\mp2,\ldots$ üzerinden ve $t\in[-\pi,\pi]$ dir. Bu hüküm aşağıdaki eşitlikten bulunur.

$$S=\left\{\lambda\in(-\infty,\infty)\middle|\left|F(\lambda)\right|\le 2\right\}=\left\{\lambda\in(-\infty,\infty)\middle|\exists t\in[-\pi,\pi],F(\lambda)=2\cos t\right\}$$

Burada belirtelim ki; özel olarak $\lambda_k(t)$, t parametresinin sürekli fonksiyonudur. Dolayısıyla $[-\pi,\pi]$ segmentinin görüntüsü yine bir segment olacaktır. Öte yandan Teorem 4.4.1. den $S=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[\alpha_{k-1}^+,\alpha_k^-\right]$ idi. Buradan (4.87) sağlanır.

(4.88) eşitliğinden t-periyodik problemi $t=\pm\pi$ olduğunda genelleşmiş anti-periyodik, $t=0$ olduğunda ise genelleşmiş periyodik probleme dönüşür. Teorem 4.4.1. deki 2. sonuca göre

$$\begin{aligned}&\alpha_{2k}^+<\lambda<\alpha_{2k+1}^- \quad \text{ise } \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}<0\\ &\alpha_{2k+1}^+<\lambda<\alpha_{2k+2}^- \text{ ise } \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}>0\end{aligned} \tag{4.89}$$

dır. Buna göre (4.82) den

$$\begin{aligned}&-\pi<t<0 \text{ ise } \dot{\lambda}_{2k+1}(t)<0, \quad 0<t<\pi \text{ ise } \dot{\lambda}_{2k+1}(t)>0\\ &-\pi<t<0 \text{ ise } \dot{\lambda}_{2k+2}(t)>0, \quad 0<t<\pi \text{ ise } \dot{\lambda}_{2k+2}(t)<0\end{aligned} \tag{4.90}$$

olur. (4.90) ve (4.88) den Lemma'nın hükmü elde edilir. □

Lemma 4.6.5. (4.81) formülü ile tanımlanan $\Phi(\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\begin{aligned} &\lambda \in \left(\alpha_{2k}^{+}, \alpha_{2k+1}^{-}\right) \quad \text{ve } k \geq 0 \text{ ise} \quad \Phi(\lambda) > 0, \\ &\lambda \in \left(\alpha_{2k}^{+}, \alpha_{2k+1}^{-}\right) \quad \text{ve } k \leq -1 \text{ ise } \Phi(\lambda) < 0 \\ &\lambda \in \left(\alpha_{2k+1}^{+}, \alpha_{2k+2}^{-}\right) \text{ ve } k \geq 0 \text{ ise} \quad \Phi(\lambda) < 0 \\ &\lambda \in \left(\alpha_{2k+1}^{+}, \alpha_{2k+2}^{-}\right) \text{ ve } k \leq -1 \text{ ise } \Phi(\lambda) > 0 \end{aligned} \tag{4.91}$$

İspat: (4.81) den görünüyor ki; $\Phi(\lambda)$, $\mathcal{F}_1(\lambda)$ ve $\mathcal{F}_2(\lambda)$ nın kuadratik denklemidir. $F(\lambda) < 2$ için bu denklemin diskiniminantı

$$\begin{aligned} &\left[\varphi'(1,\lambda) - \theta(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]^2 + 4\varphi(1,\lambda)\theta'(1,\lambda) - 8\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\theta(1,\lambda) \\ &= \left[\varphi'(1,\lambda) - \theta(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]^2 + 4\left(\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda) - 1\right) - 8\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\theta(1,\lambda) \\ &= \left[\varphi'(1,\lambda) + \theta(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]^2 - 4 = 4\left[\left(\frac{F(\lambda)}{2}\right)^2 - 1\right] < 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla bu tür λ'lar için $\Phi(\lambda)$'nin işareti $\varphi(1,\lambda)$ nın işareti ile aynı olacaktır. (4.7) eşitliği, Lemma 4.4.1 ve (4.89) eşitsizliğinden görebiliriz ki; $\Phi(\lambda)$'nin yerine $\varphi(1,\lambda)$ olduğunda (4.91) eşitsizlikleri doğrudur. $\Phi(\lambda)$'nin işareti $\varphi(1,\lambda)$ nın işareti ile aynı olduğundan (4.91) eşitsizlikleri doğrudur. □

(4.85) ve (4.86) in her iki tarafını t'ye göre 0'dan π'ye kadar integralleyelim. Lemma 4.6.5 ve (4.90) eşitsizliklerinden G. Levi teoremine göre toplamla integral yer değiştirebilir. Her bir integralde $\lambda_k(t) = \lambda$ değişimi yapar ve Lemma 4.6.4.' ü dikkate alırsak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_{2k}^{+}}^{\alpha_{2k+1}^{-}} \Phi(\lambda)\upsilon(\lambda)\,d\lambda - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_{2k+1}^{+}}^{\alpha_{2k+2}^{-}} \Phi(\lambda)\upsilon(\lambda)\,d\lambda = 0 \tag{4.92}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_{2k}^{+}}^{\alpha_{2k+1}^{-}} \lambda\Phi(\lambda)\upsilon(\lambda)\,d\lambda - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_{2k+1}^{+}}^{\alpha_{2k+2}^{-}} \lambda\Phi(\lambda)\upsilon(\lambda)\,d\lambda\right) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx \tag{4.93}$$

Burada $f(x)$ fonksiyonunun reel olması koşulundan (4.74) eşitliği

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 |f_t(x)|^2 \, dx dt$$

şeklinde yazılabilir.

(4.92), (4.93) eşitlikleri finit, sürekli $f(x)$ fonksiyonları için elde edildi. Aynı yöntemle bu işlemler $\forall f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ fonksiyonu içinde yapılabilir. Standart araştırmalarla (4.92), (4.93) eşitliklerinden aşağıdaki açılım formülleri elde edilir.

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_{2k}^{+}}^{\alpha_{2k+1}^{-}} \Psi(x,\lambda) \upsilon(\lambda) d\lambda - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_{2k+1}^{+}}^{\alpha_{2k+2}^{-}} \Psi(x,\lambda) \upsilon(\lambda) d\lambda \qquad (4.94)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_{2k}^{+}}^{\alpha_{2k+1}^{-}} \lambda \Psi(x,\lambda) \upsilon(\lambda) d\lambda - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_{2k+1}^{+}}^{\alpha_{2k+2}^{-}} \lambda \Psi(x,\lambda) \upsilon(\lambda) d\lambda \right) \qquad (4.95)$$

Burada

$$\Psi(x,\lambda) = \Phi_1(\lambda) \theta(x,\lambda) + \Phi_2(\lambda) \varphi(x,\lambda)$$

$$\Phi_1(\lambda) = \varphi(1,\lambda) \mathcal{F}_1(\lambda) + \frac{1}{2} \left[\varphi'(1,\lambda) - \theta(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda) \right] \mathcal{F}_2(\lambda) \qquad (4.96)$$

$$\Phi_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\varphi'(1,\lambda) - \theta(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda) \right] \mathcal{F}_1(\lambda) - \left[\theta'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\theta(1,\lambda) \right] \mathcal{F}_2(\lambda) \qquad (4.97)$$

$\mathcal{F}_1(\lambda)$ ve $\mathcal{F}_2(\lambda)$ fonksiyonları (4.79) formülleri ile, $\upsilon(\lambda)$ ise (4.84) formülü ile tanımlanır.

Not: (4.70) in yerine

$$\int_0^1 G_t(x,\xi;\lambda) \left\{ \lambda f_0(\xi) + f_1(\xi) \right\} d\xi = \frac{f_0(x)}{\lambda} + \frac{f_1(x)}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3} \right)$$

asimptotik formülünü kullanırsak benzer yolla (4.94), (4.95) şeklinde iki kat açılım formüllerini elde ederiz. Bu durumda (4.94), (4.95) formüllerinin sol tarafında $\pi f_0(x)$ ve $f_1(x)$ olur. (4.96), (4.97) formüllerinde ki $\mathcal{F}_1(\lambda)$ ve $\mathcal{F}_2(\lambda)$ ise

$$\mathcal{F}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda f_0(x) + f_1(x) \right] \theta(x,\lambda) dx, \quad \mathcal{F}_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda f_0(x) + f_1(x) \right] \varphi(x,\lambda) dx$$

biçiminde tanımlanır.

4.7. SPEKTRUM İÇİNDE BOŞLUKLARIN BULUNMAMASI KRİTERLERİ

$(0,1)$ aralığında aşağıdaki yardımcı sınır-değer problemini düşünelim.

$$y'' + \left[\lambda^2 - q(x)\right]y = 0 \tag{4.98}$$

$$y'(0) + 2\alpha\lambda y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \tag{4.99}$$

Daha önceden biliyoruz ki; (4.19), (4.20) probleminin özdeğerleri reel ve basittir. Burada özdeğerleri aşağıdaki biçimde gösterelim.

$$\ldots < \beta_{-3} < \beta_{-2} < \beta_{-1} < \beta_0 = 0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots$$

Teorem 4.7.1. L_α^λ operatörünün spektrumu içindeki her bir boşluk içerisinde (4.98), (4.99) probleminin sadece bir özdeğeri vardır. Yani $\beta_k \in \left(\alpha_k^-, \alpha_k^+\right)$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ dir.

İspat: (4.98), (4.99) probleminin özdeğerleri $\theta'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda) = 0$ denkleminin kökleridir. Buradan $\theta'\left(1,\beta_k\right) = 2\alpha\beta_k\varphi'\left(1,\beta_k\right)$ eşitliğinden ve (4.7) den

$$F\left(\beta_k\right) = \theta\left(1,\beta_k\right) + \varphi'\left(1,\beta_k\right) - 2\alpha\beta_k\varphi\left(1,\beta_k\right)$$

$$= \varphi'\left(1,\beta_k\right) + \frac{1}{\varphi'\left(1,\beta_k\right)}$$

eşitliğine ulaşılır ve buradan

$$F\left(\beta_k\right)\left[Sgn\varphi'\left(1,\beta_k\right)\right] \geq 2 \tag{4.100}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Şimdi (4.98) eşitliğinin her iki tarafının λ ya göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial^3 y(x,\lambda)}{\partial x^2 \partial\lambda} + \left[\lambda^2 - q(x)\right]\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial\lambda} = -2\lambda y(x,\lambda) \tag{4.101}$$

denklemi elde edilir. (4.101) denkleminin aşağıdaki şartları sağlayan çözümlerini $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ ile gösterelim.

$$\frac{\partial\theta(0,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\varphi(0,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\theta'(0,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\varphi'(0,\lambda)}{\partial\lambda} = 0 \tag{4.102}$$

Bu durumda (4.101), (4.102) probleminin çözümleri aşağıdaki formda olur.

$$\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\left\{\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\right\}\varphi(\xi,\lambda)\,d\xi$$

$$\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\left\{\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\right\}\theta(\xi,\lambda)\,d\xi$$

ve buradan

$$\frac{\partial\varphi'(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\left\{\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\right\}\varphi(\xi,\lambda)\,d\xi \tag{4.103}$$

$$\frac{\partial\theta'(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\left\{\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\right\}\theta(\xi,\lambda)\,d\xi \tag{4.104}$$

bulunur. (4.103) ve (4.104) de $x=1$, $\lambda=\beta_k$ alınır ve $\theta'(1,\beta_k)=2\alpha\beta_k\varphi'(1,\beta_k)$ eşitliği kullanılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\varphi'(1,\beta_k)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_k}$$

$$=2\varphi'^2(1,\beta_k)\left[\beta_k\int_0^1\left\{\theta(\xi,\beta_k)-2\alpha\beta_k\varphi(\xi,\beta_k)\right\}^2d\xi+2\alpha\right] \tag{4.105}$$

Genelliği kaybetmeden (4.105) den aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

Eğer $\beta_k>0$ yani $k\geq 1$ ise $\varphi'(1,\beta_k)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_k}>0$

Eğer $\beta_k>0$ yani $k\leq -1$ ise $\varphi'(1,\beta_k)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_k}<0$

Buradan da

$$k\geq 1 \text{ ise } \quad Sgn\varphi'(1,\beta_k)=Sgn\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_k} \tag{4.106}$$

$$k\leq -1 \text{ ise } Sgn\varphi'(1,\beta_k)=Sgn\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_k} \tag{4.107}$$

sonuçlarına varılır. $\theta'(1,\lambda)=2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)$ denkleminin sıfırları basit olduğundan aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_1}<0,\quad \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_2}>0,\cdots$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_{-1}}<0,\quad \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\alpha\lambda\varphi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda)\right)\right]_{\lambda=\beta_{-2}}>0,\cdots$$

(4.106) ve (4.107) den

$$Sgn\varphi'(1,\beta_k) = (-1)^k, \quad (k = \pm 1 \pm 2, \ldots)$$

elde edilir ve (4.100) den

$$F(\beta_k)(-1)^k \geq 2, \quad (k = \pm 1 \pm 2, \ldots)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yani aşağıdaki eşitsizlikler bulunur.

$$\begin{aligned} &F(\beta_1) \leq -2, \quad F(\beta_2) \geq 2, \quad F(\beta_3) \leq -2, \ldots \\ &F(\beta_{-1}) \leq -2, \; F(\beta_{-2}) \geq 2, \; F(\beta_{-3}) \leq -2, \ldots \end{aligned} \tag{4.108}$$

Bu eşitsizlikler (4.98), (4.99) probleminin özdeğerlerinin iki ayrı dizisinin iki ayrı boşlukta uzandığını gösterir. Başka bir ifadeyle her bir boşlukta bir den fazla β_k bulunmaz. Şimdi son olarak her bir boşluktaki özdeğerlerin varlığını gösterelim.

$F(\lambda)$ fonksiyonu sürekli fonksiyon olduğundan ve $F(0) > 2$ eşitsizliği ile (4.108) den $F(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki aralıklarda $+2$ ve -2 değerlerini sadece bir kez alırlar diyebiliriz.

$$[0,\beta_1],\ [\beta_1,\beta_2],\ [\beta_2,\beta_3],\ldots,\ [\beta_{-1},0],\ [\beta_{-2},\beta_{-1}],\ [\beta_{-3},\beta_{-2}],\ldots$$

Şimdi $F(\lambda) = 2(-1)^k$ denkleminin kökleri olan β_k lara yakın noktaları $\tilde{\alpha}_k^+ \in [\beta_k, \beta_{k+1}]$ $\left(\tilde{\alpha}_k^- \in [\beta_{k-1}, \beta_k]\right)$ ile gösterelim. Burada $\beta_0 = 0$ dır. Bu durumda

$$\tilde{\alpha}_{-1}^- \leq \beta_{-1} \leq \tilde{\alpha}_{-1}^+ < \tilde{\alpha}_0^- < 0 < \tilde{\alpha}_0^+ < \tilde{\alpha}_1^- \leq \beta_1 \leq \tilde{\alpha}_1^+ < \tilde{\alpha}_2^- \leq \beta_2 \leq \tilde{\alpha}_2^+ \cdots \tag{4.109}$$

olur. Diğer taraftan genelleşmiş periyodik $(t=0)$ ve genelleşmiş anti-periyodik $(t=\pi)$ (4.98), (4.99) probleminin $\{\beta_k\}$ özdeğerleri ve (4.19), (4.20) probleminin $\{\alpha_k\}$ özdeğerleri için $|k| \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$\begin{aligned} \beta_k^{\pm} &= 2\pi k - \arctan 2\alpha + \frac{a_0}{8\pi k} + \frac{\delta^{\pm}}{k} \\ \alpha_k^{\pm} &= 2\pi k + \arctan 2\alpha + \frac{a_0}{8\pi k} + \frac{\varepsilon^{\pm}}{k} \end{aligned} \tag{4.110}$$

burada

$$\sum_k \left\{ \left|\delta_k^{\pm}\right|^2 + \left|\varepsilon_k^{\pm}\right|^2 \right\} < \infty, \qquad a_0 = 2\int_0^1 q(y)\,dy$$

dir. (4.109) ve (4.110) dan $\left\{\alpha_+^{\pm}\right\}$ dizisinin tüm genelleşmiş periyodik ve genelleşmiş anti-periyodik problemin özdeğerlerini içerdiği söylenebilir.

(4.110) asimptotik formülünden aşağıdaki serilerin yakınsak olduğu çıkar.

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k+\beta_{-k}+2\arctan 2\alpha\right)\\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k^2+\beta_{-k}^2-8\pi^2k^2-2\arctan^2 2\alpha-\frac{a_0}{\pi}\right)\end{gathered}\tag{4.111}$$

[49] daki metot kullanılarak aşağıdaki formüller elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k+\beta_{-k}+2\arctan 2\alpha\right)=-\frac{q(0)+q(1)}{2}+\int_0^1 q(x)\,dx \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k^2+\beta_{-k}^2-8\pi^2k^2-2\arctan^2 2\alpha-\frac{a_0}{\pi}\right)\\ &=-\frac{q^2(0)+q^2(1)}{2}+\int_0^1 q^2(x)\,dx+\left(\int_0^1 q^2(x)\,dx\right)^2\end{aligned}\tag{4.113}$$

Kabul edelim ki; τ reel parametre olsun. Şimdi (4.1) denklemini ve aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$-y''+2\alpha\lambda\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x+\tau,\lambda)y+q(x+\tau)y=\lambda y \tag{4.114}$$

Her bir τ için $L_2(\mathbb{R})$ de (4.114) denklemi tarafından üretilen operatör $y(x)\in W_2^2(\mathbb{R}-\mathbb{Z})\cap W_2^1(\mathbb{R})$ ve $n\in\mathbb{Z}$ için $y(n)=y(n+0)=y(n-0)$, $y'(n-0)=2\alpha\lambda y(n)$ biçiminde oluşturulmuş bölgede tanımlı $-y''+q(x+\tau)y$ diferansiyel operatöre denktir. Burada

$$F(\lambda,\tau)\equiv\varphi'(1,\lambda;\tau)+\theta(1,\lambda;\tau)-2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda;\tau)$$

fonksiyonu τ ya bağlı değildir ve $F(\lambda)$ ya eşittir. Yine burada $\varphi(x,\lambda;\tau)$ ve $\theta(x,\lambda;\tau)$ aşağıdaki denklemin ve şartların oluşturduğu problemin çözümleridir.

$$-y''+q(x+\tau)y=\lambda^2y$$

$$\varphi(0,\lambda;\tau)=\theta'(0,\lambda;\tau)=0,\quad \varphi'(0,\lambda;\tau)=\theta(0,\lambda;\tau)=1$$

Burada θ' ile θ nın x'e göre türevini gösterdik. Böylece $0\le x\le 1$ için (4.114) denkleminin ürettiği genelleşmiş periyodik ve genelleşmiş anti- periyodik sınır-değer probleminin spektrumu τ dan bağımsızdır. Ancak (4.114), (4.99) probleminin $\beta_k(\tau)$ özdeğerleri, τ nun fonksiyonu olacaktır ve periyodu 1 dir. Şimdi (4.114), (4.99) problemi için (4.112), (4.113) iz formüllerini yazalım.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k(\tau)+\beta_{-k}(\tau)+2\arctan 2\alpha\right)=-q(\tau)+\int_0^1 q(x)\,dx \tag{4.115}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k^2(\tau)+\beta_{-k}^2(\tau)-8\pi^2k^2-2\arctan^2 2\alpha-\frac{a_0}{\pi}\right) = q(\tau)+\frac{1}{2}\int_0^1 q^2(x)\,dx+\left(\int_0^1 q(x)\,dx\right)^2 \tag{4.116}$$

Teorem 4.7.1 den tüm τ lar için

$$\beta_k\in\left(\alpha_k^-,\alpha_k^+\right),\quad (k=\pm1\pm2,\ldots) \tag{4.117}$$

olur. Burada belirtelim ki; $\beta_k(\tau)$ fonksiyonunun, τ parametresinden bağımsız olduğu [50] de gösterilmiştir.

Eğer $\left(\alpha_0^-,\alpha_0^+\right)$ boşluğu $\lambda=0$ noktasını içeriyor ise bu boşluğa *tekil boşluk* denir. Eğer $\alpha_0^-=\alpha_0^+$ ise bu boşluğa *aşikar boşluk* denir ve geri kalan tekil olmayan $\left(\alpha_k^-,\alpha_k^+\right)$ boşluklarına da *aşikar olmayan boşluklar* denir.

(4.117) den, L_α^λ operatörünün spektrumunda tüm aşikar olmayan boşluklar bulunmuyorsa, yani $\alpha_k^-=\alpha_k^+,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$ ise, o zaman tüm $\beta_k(\tau)$ lar sabittir. Böylece (4.115) ve (4.116) daki $q(\tau)$ sabittir ve açıktır ki; bunun terside doğrudur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.7.1: L_α^λ operatörünün spektrumu içindeki boşlukların yokluğu için gerekli ve yeterli şart $\alpha\equiv 0$ ve $q(x)$ in sabit olmasıdır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu çalışmada

$$\ell_{\alpha}[y] \equiv -y'' + 2\alpha\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)\, y + q(x)\, y = \lambda^2 y, \quad -\infty \le x \le \infty$$

biçiminde periyodik katsayılı diferansiyel denklemin spektral analizi yapılmıştır. Elde edilen tüm sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde verilmiştir.

1) 4.1 bölümünde incelenen diferansiyel denklem δ nın bulunduğu bir seri içerdiğinden bu denkleme denk olan bir başka diferansiyel operatör tanımlanmış ve tüm incelemeler bu operatör üzerinden yapılmıştır.

2) 4.2 bölümünde ise öncelikle karakteristik denklem

$$F(\lambda) = \theta(1,\lambda) + \varphi'(1,\lambda) - 2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)$$

biçiminde bulunmuş ve daha sonra periyodik diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir yere sahip olan Floquet teoremi uygulanmıştır. Bu teorem yardımıyla λ nın durumuna göre ayrı ayrı çözüm formları elde edilmiş ve buradan Sonuç 4.2.1'de ele alınan denklemin kararlılık, kararsızlık ve şartlı kararlılık aralıkları verilmiştir.

3) Denklemin özdeğerleri ile ilgili inceleme ise 4.3. bölümünde yapılmıştır. Bu bölümde

$$y'' + \left[\lambda^2 - q(x)\right] y = 0$$

$$y(1) = e^{it} y(0), \quad y'(1) = e^{it}\left[y'(0) + 2\alpha\lambda y(0)\right]$$

biçiminde $t-$periyodik sınır değer problemi tanımlanmış ve özdeğerlerin $F(\lambda) - 2\cos t = 0$ denkleminin kökleri olduğu bulunmuştur. Yine bu bölümde özdeğerler ile ilgili daha fazla bilgi edinilmiş ve özdeğerlerin reel, sıfırdan farklı olduğu ve $t \ne m\pi \ \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ olduğu zaman tek katlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca iki katlı olması için gerekli ve yeterli şartların neler olduğu da yine bu bölümde verilmiştir.

4) 4.4. bölümünde 4.2. de elde edilen bilgilerden de yararlanarak incelenen denklemin kararlılık ve kararsızlık aralıkları hakkında daha somut bilgiler elde edilmiştir. Bu doğrultuda kararlılık ve kararsızlık aralıklarının varlığı ispatlanmış ve bu aralıkların kesin tasviri verilmiştir. Tüm bu bilgiler sonuç niteliğindeki Teorem 4.4.1'de özetlenmiştir.

5) Spektrumun yapısı ile ilgili çalışmalar ise 4.5. bölümünün konusu olmuştur. Bu bölümde spektrumun sürekli olduğu ve tüm şartlı kararlı aralıkların oluşturduğu kümeye denk olduğu gösterilmiştir. Bu bölümün son teoreminde ise spektrum içindeki boşlukların uzunluğunun $n \to \infty$ iken sonsuza gittiği ispatlanmıştır.

6) 4.6. bölümünde ise Green fonksiyonundan da faydalanarak özfonksiyonlar cinsinden açılım formülleri elde edilmiş, 4.7 bölümünde de spektrum içindeki boşlukların bulunmama kriterleri belirlenmiştir.

5.2. ÖNERİLER

1) Ele alınan denklem Hill denkleminin daha genel hali olduğundan Hill denklemi üzerine yapılmış olan birçok spektral analiz çalışmaları uygun şekillerde bu denkleme genişletilebilir.

2) n. mertebeden katsayıları genelleşmiş, periyodik fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlerin spektral analizi yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Guseinov, G.S. "On a Quadratic Pencil of Sturm-Liouville Operators with Periodic Coeffcients", Estnik Moskov. Univ., **1(3):** 14-21, (1984).

[2] Buschmann, D., Stolz, G. ve Weidmann, J. "One-Dimensional Schrödinger Operators with Local Point Interactions", J. Reine Angew. Math., **467:** 169–186, (1995).

[3] Mikhailets, V.A. ve Sobolev, A.V. "Common Eigenvalue Problem and Periodic Schrödinger Operators", Journal of Functional Analysis, **165(1):** 150-172, (1999).

[4] Hechtman, M.M. ve Stankevich, I.V. "The Generalized Kronig-Penney Problem", Functional Analysis and Its Applications, **11(1):** 61-62, (1977).

[5] Dmitrushchenkov, V.A. "Spectrum of the Generalized Hill Operator ", Functional Analysis and Its Applications, **13(4):** 239-317, (1978).

[6] Manafov, M.D. "Spectrum of Differential Operator with Periodic Generalized Potential", Reports of NAS of Azerbaijan, **63(3):** 19-25, (2007).

[7] Dunford, N. ve Schwartz, J.T. "<u>Linear Operators I, II, III</u>", John Wiley & Sons, New York, 895, 1063, 1688 s., (1958).

[8] Steen, L.A. "Highlights in the History of Spectral Theory", Mathematical Association of America, **80(4):** 359-381, (1973).

[9] Kramers, H.A. "Das Eigenwertproblem im Eindimensionalen Periodischen Kraftfelde", Physica, **2:** 483–490, (1935).

[10] Hamel, G. "Uber die Lineare Differentialgleichung Zweiter Ordnung Mit Periodischen Koeffizienten", Math. Ann., **73:** 371-412, (1913).

[11] Haupt, O. "Uber Lineare Homogene Differentialgleichungen 2. Crdnung mit Periodischen Koeffizienten", Math. Ann., **79:** 278-285, (1919).

[12] Strutt, M.J.O. "Reelle Eigenwerte Verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung", Mat. Z., **143(44):** 593-643, (1944).

[13] Krein, M.G. "A Generalization of Several Investigations of A. M. Lyapounov", Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **73(3):** 445-448, (1950).

[14] Magnus, W. ve Winkler, S. "Hill's Equation", Dover Publications, New York, 127 s., (1966).

[15] Titchmarsh, E.C. "Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations I, II", Clarendon Press, London, 203, 404 s., (1962).

[16] Eastham, M.S.P. "The Spectral Theory of Periodic Differential Equations", Scottish Academic Press, Edinburgh-London, 130 s., (1973).

[17] Gelfand, I.M. "Expansion in Characteristic Functions of an Equation with Periodic Coefficients", Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **73(32):** 1117-1120, (1950).

[18] Serov, M.I. "Certain Properties of the Spectrum of a Non-selfadjoint Differential Operator of the Second Order", Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **131(1):** 27-29, (1960).

[19] Rofe-Beketov, F.S. "The Spectrum of Non-selfadjoint Differential Operators with Periodic Coefficients ", Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **152(6):** 1312-1315, (1963).

[20] Tkachenko, V.A. "On the Spectral Analysis of the One-dimensional Schrödinger Operator with a Periodic Complex - valued Potential", Doklad. Akad. Nauk SSSR, **155(2):** 289-291, (1964).

[21] Mc Garvey, D.C. "Operators Commuting with Translation by One", J. Math. Analysis Applications, **4:** 366-410, (1962).

[22] Mc Garvey, D.C. "Perturbation Results for Periodic Differential Operators", J. Math. Analysis Applications, **12:** 187-234, (1965).

[23] Mc Garvey, D.C. "Operators Commuting with Translation by One-II: Differential Operators with Periodic Coefficients in Lp$(-\infty,\infty)$", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **11:** 564-596, (1965).

[24] Gasymov, M.G. "Spectral Analysis of a Class Non-self-adjoint Operator of the Second Order." Func. Anal. and Its Appendix, **34(1):** 14-19, (1980).

[25] Gasymov, M.G. "Spectral Analysis of a Class of Ordinary Differential Operators with Periodic Coefficients", Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **252(2):** 277-280, (1980).

[26] Gasymov, M.G. "Theory of Spectrum of Operator ", Elm-Baku, **4:** 56-96, (1982).

[27] Veliev, O.A. "The One-dimensional Schrödinger Operator with Periodic Complex - valued Potential", Soviet Math. Doklad., **250(6):** 1292-1296, (1980).

[28] Veliev, O.A. "The Spectrum and Spectral Singularities of the Differential Operators with Periodic Complex-valued Coefficients." Differential Equations, **8:** 1316-1324, (1983).

[29] Berezin, F.A. ve Fadeev, L.D. "Remark on Schrödinger Equation with Singular Potential", Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **137(5):** 1011-1014, (1961).

[30] Minlos, R.A. ve Fadeev, L.D. "On the Point Interaction for a Three-particle System in Quantum Mechanics", Doklad. Akad. Nauk SSSR, **141(6):** 1335-1338, (1961).

[31] Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R. ve Holden, H. . "Solvable Models in Quantum Mechanics", Springer-Verlag, New York, 412 s., (1998).

[32] Albeverio, S. ve Kurasov, P. "Singular Perturbations of Differential Operators", London Mathematical Society Lecture Notes N271 (Cambridge University Press), (2001).

[33] Krein, M.G. "On a Generalization of Stieltje's Investigations", Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **87(6):** 881-884, (1952).

[34] Kats, I.S. "On the Existence of Spectral Functions of Singular Second-order Differential Systems", Dokl. Akad. Nauk SSSR, **106(1):** 15-18, (1956).

[35] Atkinson, F.V. "Discrete and Continuous Boundary Problems", Academic Press, New York, 537 s., (1964).

[36] Manafov, M.D. "Description of the Domain of Ordinary Differential Operators with Generalized Potentials", Differential Equations, **32(5):** 716-718, (1996).

[37] Savchuk, A.M. ve Shkalikov, A.A. "Sturm–Liouville Operators with Singular Potentials", Mat. Zametki, **66(6):** 897–912, (1999).

[38] Neyman-Zade, M.I. ve Shkalikov, A.A. . "Schrödinger Operators with Singular Potentials from Spaces of Multipliers", Mat. Zametki, **66(5):** 723-733, (1999).

[39] Savchuk, A.M. "On the Eigenvalues and Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Operator with a Singular Potential ", Mat. Zametki, **69(2):** 277–285, (2001).

[40] Vinokurov, V.A. ve Sadovnichii, V. A. "The Asymptotics of Eigenvalues and Eigenfunctions and a Trace Formula for a Potential with Delta Functions", Differential Equations, **38(6):** 772–789, (2002).

[41] Hriniv, R. O. ve Mykytyuk, Ya, V. "Inverse Spectral Problems for Sturm-Liouville operators with Singular Potentials", Institute of Physics Publishing, **19:** 665–684, (2003)

[42] Manafov, M.D., Kablan, A. "Spectrum of Quadratic Pencil of Differential Operator with Periodic Generalized Potential", Journal of Spectral Mathematics and Its Applications, s. (submited), (2008).

[43] Manafov, M.D., Kablan, A. "Eigenfunction Expansions of a Quadratic Pencil of Differential Operator with Periodic Generalized Potential", International Journal of Pure and Applied Mathematics, s. (accepted), (2008).

[44] Manafov, M.D., Kablan, A. "On a Quadratic Pencil of Differential Operators with Periodic Generalized Potential", International Journal of Pure and Applied Mathematics, s. (accepted), (2008).

[45] Naimark, M.A. "Linear Differential Operators", Frederick Ungar Publ. Co., New York, 144 s., (1968).

[46] Lusternik, L.A. ve Sobolev, V.J. "Elements of Functional Analysis", Frederick Ungar Publishing, New York, 227 s., (1965).

[47] Davisson, S.G., Levine, J.D. . "Surface States", Solid State Physics, **25:** 1-49, (1973).

[48] Mc Garvey, D.C. "Operators Committing with Translation by One, Part II - Differential Operators with Periodic Coefficients", Rand Corporation, California, 141 s., (1962).

[49] Guseinov, G.S. "Eigenfunction Expansion of Multi Parameter Differential and Difference Equations with Periodic Coefficients", Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **253(5):** 1040-1044, (1980).

[50] Geseinov, G.S., Levitan, B. M. "Calculation of the Principal Part of Lenght of the Gap for Periodic Sturm-Liouville Problem", Serdika Blgarsko Mat. **3:** 273-280, (1977).

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Gaziantep'te doğdum. İlk, orta ve lise eğitimimi yine Gaziantep'te tamamladıktan sonra 1996 yılında Gaziantep üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü okumayı hak kazandım. 2000 yılında bu bölümden mezun olduktan sonra aynı yıl Gaziantep üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak akademik hayata adım attım ve yine aynı dönemde yüksek lisans eğitimime başladım. 2003 yılında bu programdan mezun olduktan sonra 2004 yılında Yüksek öğretim kanununun 35. maddesi gereğince doktora eğitimi yapmak üzere Mersin üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne geçiş yaptım.