WHITNEY EŞİTSİZLİĞİ VE UYGULAMALARI

TUNCAY TUNÇ

Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik
Ana Bilim Dalı

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanları
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
EKİM - 2008

ÖZ

Bu çalışmada, bir kapalı aralıkta türevlenebilen fonksiyonlar için Whitney Eşitsizliği incelendi. Bu eşitsizlikte yer alan ve Whitney sabitleri adı verilen $W(k,r)$ sayıları için uygun sınırlar elde edildi. Kapalı aralıkta tanımlı bir fonksiyon verildiğinde bu fonksiyon ile bu fonksiyonu belli noktalarda interpole eden Lagrange interpolasyon polinomu arasındaki hata için bir integral gösterimi bulundu. Ayrıca, genelleştirilmiş bölünmüş farklar için farklı bir gösterim yazıldı.

Anahtar kelimeler: Whitney sabitleri, interpolasyon, bölünmüş farklar.

ABSTRACT

In this study, it has been investigated Whitney Inequality for differentiable functions on a closed interval. It has been obtained suitable bounds for $W(k,r)$ which are called Whitney constants in previously mentioned inequality. It has been found an integral representation of the error between a given function defined on a closed interval and Lagrange interpolation polynomial which interpolates the function on certain knots. Morever, it has been written a different representation for the generalized divided differences.

Key words: Whitney constants, interpolation, divided differences.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında desteğini esirgemeyen tez danışmanlarım Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV ve Prof. Dr Igor A. SHEVCHUK'a teşekkürlerimi sunarım. Bir diğer teşekkür ise bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım değerli hocalarıma...

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$:=$	Tanım olarak eşittir
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$f^{(r)}$	f fonksiyonunun r. türevi
$C[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f,[a,b]$ aralığında süreklidir$\}$
$C^r[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\ f^{(r)}\in C[a,b]\}$
$\mathbb{P}_n$	Derecesi $\le n$ olan cebirsel polinomlar kümesi
$\lVert\cdot\rVert_{C[a,b]}$	$\max\limits_{x\in[a,b]}\lvert f(x)\rvert$ (Düzgün norm)
$E_n(f,[a,b])$	$\inf\limits_{P_n\in\mathbb{P}_n}\lVert f-P_n\rVert_{C[a,b]}$
$\Delta_h^k f(x)$	f fonksiyonunun h adımlı k. sonlu farkı
$\omega(f,t,[a,b])$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_k(f,t,[a,b])$	f fonksiyonunun k. düzgünlük modülü
$k=\overline{1,n}$	$k\in\{1,2,3,...,n\}$
$W(k,r)$	Whitney sabitleri
$W'(k,r)$	Whitney interpolasyon sabitleri
I	$[0,1]$
$\mathbb{T}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\}$
$L^p(I)$	$\left\{f:I\to\mathbb{R}:\ \int_0^1\lvert f(x)\rvert^p\,dx<\infty\right\}$
$Q_{k-1}(f,x)$	Ortalama yaklaşım polinomu
$\widetilde{W}_k$	Kryakin sabitleri

σ_m	$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m}$
σ_0	$:=0$
$\binom{k}{m}$	$\frac{k!}{(k-m)!m!}$
$B[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:$ Her bir $x\in[a,b]$ için $\lvert f(x)\rvert<\infty\}$
$D_+f(x)$	Sağ türev
$D_-f(x)$	Sol türev
$AC[a,b]$	Mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{T}_n$	n mertebeli trigonometrik polinomlar uzayı
$C^{2\pi}$	2π periyotlu sürekli fonksiyonlar uzayı
$[\![\cdot]\!]$	Tam değer fonksiyonu
$\ell_i(x)$	Temel Lagrange polinomu
$L(\cdot;f;x_0,x_1,...,x_n)$	Lagrange interpolasyon polinomu
$\overline{x}$	$(x_0,x_1,\cdots x_n)$
$L(\cdot;f;\overline{x})$	Hermite-Lagrange interpolasyon polinomu
$B_N(f,x)$	f fonksiyonunun $N.$ Bernstein polinomu
$E_n^T(f)$	$\inf\limits_{T\in\mathbb{T}_n}\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]}\lvert f(x)-T(x)\rvert$
${}^n x$	$\overbrace{x,x,\cdots,x}^{n \text{ tane}}$
ℓ	$[\![(r+1)/2]\!]$
$\Pi_n(x)$	$\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$
$\square$	ispatın bittiğini gösterir.

1. GİRİŞ

Bir B metrik uzayı ve onun bir V alt uzayı verildiğinde B den olan bir elemana V den olan elemanlardan, uzayda tanımlı olan uzaklığa (metriğe) bağlı olarak, en yakın elemanın (en iyi yaklaşım elemanının) olup olmadığı, eğer var ise bu elemanın tekliği ve yaklaşım hızının belirlenmesi problemleri, matematiksel analizde yaklaşım kuramının en temel problemleridir. Bu çalışmada üzerinde durulan problem, kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlara belirli dereceden cebirsel polinomlar ile yaklaşıldığında bu yaklaşımın hızının belirlenmesi ve hızın fonksiyonun düzgünlüğü (türevlenebilme mertebesi) ile nasıl bağlantılı olduğunun incelenmesidir.

$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ olmak üzere $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı $C[a,b]$ ile gösterilir. $C[a,b]$ uzayı, üzerinde tanımlı

$$\|f\|_{C[a,b]}:=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

düzgün normu ile bir Banach uzayıdır.

$\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve $r\in\mathbb{N}_0$ olsun. $C^r[a,b]$ ile $[a,b]$ üzerinde r-inci mertebeden sürekli türevlenebilen tüm fonksiyonların, $\mathbb{P}_n$ ile derecesi en fazla n olan tüm cebirsel polinomların kümesi gösterilir. $C^0[a,b]:=C[a,b]$.

$C[a,b]$ uzayından alınan bir f fonksiyonunun $\mathbb{P}_n$ alt uzayına uzaklığı (en iyi yaklaşım sayısı)

$$E_n(f,[a,b]):=\inf_{P_n\in\mathbb{P}_n}\|f-P_n\|_{C[a,b]},$$

h adımlı k-inci sonlu farkı

$$\Delta_h^k f(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(x+jh)$$

ve k-inci düzgünlük modülü

$$\omega_k(f,t,[a,b])=\sup_{0<h\le t}\ \sup_{x\in[a,b-kh]}\left|\Delta_h^k f(x)\right|$$

ile tanımlanır. Bu simgelenimler altında en iyi yaklaşım sayısının fonksiyonun düzgünlük modülü cinsinden değerlendirilmesine olanak sağlayan ve Whitney Teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teorem yazılabilir.

Whitney Teoremi 1. *Bir* $f \in C\left[a,b\right]$ *fonksiyonu verilsin. Bu durumda her bir* $k \in \mathbb{N}$ *için* k *'ye bağlı bir* W_k *sabiti vardır öyle ki*

$$E_{k-1}\left(f,\left[a,b\right]\right) \le W_k \omega_k\left(f;h;[a,b]\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

Düzgünlük modülünün özelliklerinden faydalanılarak Whitney Teoremi türevlenebilir fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

Whitney Teoremi 2. *Herhangi bir* $f \in C^r\left[a,b\right]$ *fonksiyonu için*

$$E_{k+r-1}\left(f,\left[a,b\right]\right) \le c\left(k,r\right)\left(\frac{b-a}{k}\right)^r \omega_k\left(f^{(r)},\frac{b-a}{k},\left[a,b\right]\right)$$

olacak şekilde sadece k *ve* r *ye bağlı* $c\left(k,r\right)$ *sabitleri vardır.*

Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan en küçük $c\left(k,r\right)$ sayısına Whitney sabiti denir ve $W\left(k,r\right)$ ile gösterilir.

$$W\left(k,r\right) := \sup_{f \in C^r[a,b]} \frac{\inf\limits_{P \in \mathbb{P}_{k+r-1}} \left\|f-P\right\|_{C[a,b]}}{\left(\frac{b-a}{k}\right)^r \omega_k\left(f^{(r)},\frac{b-a}{k},\left[a,b\right]\right)}.$$

Bu çalışmada $W\left(k,r\right)$ Whitney sabitleri için üsten sınır bulunması problemi ele alınmıştır. Bu sabitlerin mümkün olduğunca küçük belirlenebilmesi yaklaşımın hatasının belirlenebilmesi bakımından önemlidir.

Tezin “Materyal ve Metot“ bölümünde yaklaşım kuramının en kullanışlı materyalleri olan bazı önemli fonksiyon sınıfları, Lagrange ve Hermite interpolasyonu, sonlu farklar, bölünmüş farklar, süreklilik modülleri ve düzgünlük modülleri konuları hakkında bilgilerin yanı sıra bu bölümün son kısmında sürekli fonksiyonlara cebirsel polinomlar ile yaklaşım konusunda elde edilen en ünlü teoremlerden Weierstrass teoremleri, Chebyshev teoremi, Borel teoremi, Jackson teoremleri ve Whitney teoremleri üzerinde durulmuştur.

'Bulgular ve Tartışma' bölümünün ilk kısmında genelleştirilmiş bölünmüş farkların bir farklı gösterimi, başka bir değişle, bir farklı tanımı ile Zhuk ve Natanson'a ait bir lemmanın genelleştirilmesi verilmiş ve ispatlanmıştır. Sonraki kısımlarda ise $W(k,r)$ Whitney sabitlerinin k ve r sayılarının farklı durumlarına göre üst sınırlar veren teoremler ve ispatları yer almaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

$\left[a,b\right]$ kapalı aralığında sürekli olan bir f fonksiyonuna, derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında en iyi yaklaşım polinomunun bulunması problemi yaklaşım kuramının önemli problemlerinden biridir. Bu problemin öncüsü P.L. Chebyshev adlı Rus matematikçidir. Chebyshev, 1854 yılındaki çalışmasında, bir $f\in C\left[a,b\right]$ verildiğinde, derecesi $\leq n$ olan bir P_n polinomunun bu f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olması için gerek ve yeter koşul bulmuştur [1]. Fakat o yıllarda henüz, her hangi bir $f\in C\left[a,b\right]$ fonksiyonu için, genel olarak polinomlarla yaklaşımın mümkün olup olmadığı kesin olarak bilinmiyordu. 1885 yılında, K. Weierstrass bu varlık problemini çözdü. Weierstrass, keyfi bir $f\in C\left[a,b\right]$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyona istenilen kadar yakın olan bir cebirsel polinomun varlığını ispatlamıştır [2]. 1905 yılında ise E. Borel her hangi bir $f\in C\left[a,b\right]$ fonksiyonu için $\mathbb{P}_n$ polinomlar uzayı içinde en iyi yaklaşan polinomun mevcut olduğunu göstermiştir [3].

Daha sonraki yıllarda, verilen bir $f\in C\left[a,b\right]$ fonksiyonu için $\mathbb{P}_n$ uzayına göre en iyi yaklaşım sayısının bulunması ve bu sayının fonksiyonun düzgünlüğü ile bağlantısı problemleri üzerinde durulmuştur. 1912 yılında, D. Jackson, her hangi bir 2π periyotlu sürekli fonksiyonun n mertebeli trigonometrik polinomlar uzayında en iyi yaklaşım sayısını, fonksiyonun süreklilik modülü cinsinden belirlemiştir [4]. Bu teoreminin yardımıyla da aynı sonucu kapalı aralıkta sürekli fonksiyonların derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomlar uzayındaki en iyi yaklaşım sayısı için ispatlamıştır [4].

1952 yılında H. Burkill, iyi bilinen

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f\left(x\right)-P_{n-1}\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{n!}\sup_{x\in[0,1]}\left|f^{(n)}\left(x\right)\right| \tag{2.1}$$

eşitsizliğinde $f^{(n)}$ türevinin yerine f fonksiyonunun n-inci sonlu farkı yazıldığında benzer sonucun elde edilip edilemeyeceğini araştırdı. Buradaki amaç, (2.1) eşitsizliğinde fonksiyon $n-$inci mertebeden türevlenebilirlik koşulunu hafifletip benzer eşitsizliğin sürekli fonksiyonlar için yazılıp yazılamayacağını araştırmaktı. $n=1,2$ için (2.1) eşitsizliğine benzer bir eşitsizliğin olduğunu gösterebildi [5]. 1957 yılında H. Whitney, Burkill'in öne sürdüğü bu problemi bütün k doğal sayıları için çözdü [6]: *Her bir* $k \geq 1$ *doğal sayısı ve* $f \in C[a,b]$ *için*

$$\left|f(x)-P_{k-1}(x)\right| \leq W(k,0)\sup_{h,y}\left|\Delta_h^k f(y)\right|, \qquad x \in [a,b],\ y, y+kh \in [a,b]$$

olacak şekilde $W(k,0)$ *sayısı ve derecesi* $k-1$ *'i aşmayan* P_{k-1} *polinomu vardır.*

Burada elde edilen $W(k,0)$ Whitney sabitleri k doğal sayıları büyüdükçe çok hızlı büyüyordu. Aynı çalışmasında Whitney, f fonksiyonunu eşit aralıklı $x_m := m/(k-1)$, $m = 0,1,2,...,k-1$, düğüm noktalarında interpole eden derecesi $\leq k-1$ olan Lagrange interpolasyon polinomu $L_{k-1}(f,x)$ olmak üzere

$$W'(k,0) := \sup_{f \in C[0,1] \setminus \mathbb{P}_{k-1}} \frac{\left\|f - L_{k-1}(f,.)\right\|_{C[0,1]}}{\omega_k\left(f;1/k;[0,1]\right)}$$

ile tanımlı $W'(k,0)$ Whitney interpolasyon sabitleri içinde alt ve üst sınırlar elde etmiştir: Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$1 \leq W'(k,0), \qquad \frac{1}{2} \leq W(k,0) \leq W'(k,0) < \infty .$$

k 'nin küçük değerleri için Tablo 2.1 de verilen sayısal sonuçlar da kendisine aittir.

k	1	2	3	4	5
$W(k,0)$	1/2	1/2	(8/15; 7/10)	(1/2; 13/4)	(1/2; 52/5)
$W'(k,0)$	1	1	(16/15; 14/9)	(1; 13/4)	(1; 52/5)

Tablo 2.1. Tek yazılanlar kesin sonuç, ikili yazılanlar ise sırasıyla alt ve üst sınırlardır.

Whitney Teoremi sonraki yıllarda farklı fonksiyon uzaylarına genişletildi. Yu.A. Brudnyi, 1977 yılında, Whitney Teoremini $1 \leq p < \infty$ için $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayına taşıdı ve bulduğu yeni metotla

$$W(k,0) \leq \left(c.k^2\right)^k \tag{2.2}$$

sonucunu elde etti [7]. Burada ve aşağıda geçen c sabitleri, k doğal sayısından bağımsızdır. E.A. Storozhenko ise 1979 yılında aynı problemi $0 < p < 1$ için ispatladı. Ayrıca, Whitney Teoremini $0 < p < 1$ için $L^p([0,1])$ ve $\mathbb{T}$ birim çember olmak üzere $L^p(\mathbb{T})$ uzaylarına genişletti [8].

Seksenli yıllarda problem Whitney sabitlerinin mümkün olduğunca küçültülmesine dönüştü. Bu problemin öncüsü Bl. Sendov oldu. 1982 yılında Sendov, Whitney sabitleri ile Whitney interpolasyon sabitleri için oldukça iddialı bir tahmin öne sürdü [9]:

$$W(k,0) \leq 1, \quad W'(k,0) \leq 2$$

Brudnyi'nin (2.2) sonucu göz önünde bulundurulduğunda bu tahminin doğru olması yeteri kadar büyük k doğal sayıları için imkansız gibi görünüyordu.

1985, yılında K. Ivanov ve M. Takev (2.2)'den daha iyi bir sonuç elde ettiler[10]:

$$W(k,0) \leq c \cdot k \cdot \ln k$$

Aynı yıl içinde P.G. Binev [11]

$$W(k,0) \leq ck$$

ve Sendov [12]

$$W(k,0) \leq c$$

sonuçlarını buldular. Bir yıl sonra Sendov [13]

$$W(k,0) \leq 6$$

sonucunu elde etti. Daha sonra Yu. V. Kryakin, 1989 yılında,

$$W(k,0) \leq 3$$

eşitsizliğini ispatlayarak Sendov'un imkansız gibi görünen tahminine oldukça yaklaştı [14].

Sonraki çalışmalarda Kryakin'in tanımladığı bazı özel polinomlar üzerinden elde edilen ve Whitney sabitlerinin belirlenebilmesine yardımcı olana sabitlerin değerlendirilmesi üzerinde durulmuştur. Bu sabitler, her bir $m = 1, 2, \ldots, k$ için

$$\int_{0}^{m/k} \left(f\left(x \right) - Q_{k-1}\left(f; x \right) \right) dx = 0$$

eşitliğini sağlayan, derecesi $\leq k-1$ olan ortalama yaklaşım polinomu $Q_{k-1}\left(f; x \right)$ ile gösterilmek üzere

$$\widetilde{W}_k := \sup_{f \in C[0,1] \setminus \mathbb{P}_{k-1}} \frac{\left\| f - Q_{k-1}(f, \bullet) \right\|_{C[0,1]}}{\omega_k \left(f; 1/k; [0,1] \right)}$$

ile tanımlıdır. 1992 yılında L.G. Kovalenko $L^1\left(I \right)$ uzayında bu sabitlerinin 6.5'tan daha büyük olamayacağını ispatlamıştır [15]. 1994 yılında Kryakin aşağıdaki sonucu elde etmiştir[16]:

$$1 \leq \widetilde{W}_k \leq 2 .$$

Ancak daha sonra bu çalışmada bazı hesaplama hataları olduğunu fark etmiştir. Bu hatayı 2002 yılında diğer yazarlar ile birlikte yayımladığı çalışmada düzeltmiştir[17].

1997 yılında I. A. Shevchuk, her bir k doğal sayısı için $W'\left(k,0 \right)$ Whitney interpolasyon sabitlerinin π ile üstten sınırlamıştır [18]. 1998 yılında I. G. Danilenko [19] $k=4$ ve 2003 yılında O.D. Zhelnov [20] $k=5,6,7$ için 2 ile üstten sınırlı olduğunu göstermişlerdir. Whitney interpolasyon sabitinin her bir k doğal sayısı için üstten değerlendirilmesi ile ilgili son çalışma 2002 yılında J. Gilewicz, Yu. V. Kryakin ve I. A. Shevchuk'a [17] aittir: $W'\left(k,0 \right) \leq 3$.

Whitney sabitleri için sonuçları özetleyecek olursak; H. Burkill $W\left(2,0 \right) = 1/2$ sonucunu elde etti [5]. H. Whitney her bir $k \in \mathbb{N}$ için $W\left(k,0 \right)$ sayısının sonlu olmasının yanı sıra bu sabitlerin alttan $1/2$ ile sınırlı olduğunu ispatlamıştır [6]. Sendov'un $W\left(k,0 \right) \leq 1$ tahmini ise ancak k'nin küçük değerleri için ispatlanabilmiştir: $k=3$ için H. Whitney [6], $k=4$ için Yu. Kryakin [16] ve $k=5,6,7,8$ için O.D. Zhelnov [21]-[22] elde etmiştir. Genel durum için ise bilinen en iyi sonucu 2002 yılında J. Gilewicz, Yu. Kryakin ve I.A. Shevchuk ilan etmiştir [17]:

$$W\left(k,0 \right) \leq 2 + 1/e^2 .$$

1984 yılında Zhuk ve Natanson'un [23] makalesinde yer alan Lemma 3 kullanılarak $\sigma_k = 1 + 1/2 + ... + 1/k$ olmak üzere

$$W(k,1) \le 1/(e\sigma_k) \tag{2.3}$$

elde edilir.

Yukarıdaki çalışmalar göz önünde bulundurulduğunda $r \ge 2$ için herhangi bir çalışmanın olmadığı dikkat çekmektedir. Bu çalışmanın temel amacı $r \ge 2$ için $W(k,r)$ Whitney sabitleri için mümkün oldukça küçük sınırlar elde etmektir.

3. MATERYAL ve METOT

Bu bölümde, sayısal analiz ve yaklaşım kuramında sıkça kullanılan bazı temel konu ve kavramların yanı sıra yaklaşım kuramının temel teoremlerine yer verilecektir. Bölüm içinde ele alınan tüm fonksiyonlar kapalı aralıkta tanımlı ve reel değerlidir.

3.1. BAZI FONKSİYON SINIFLARI

$a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, olmak üzere bir $[a,b]$ kapalı aralığı verilsin. $[a,b]$ üzerinde sınırlı, gerçel değerli fonksiyonların sınıfı $B[a,b]$ ile gösterilir:

$$B[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \exists M > 0 \text{ öyle ki } \forall x \in [a,b] \text{ için } |f(x)| < M \}.$$

Bu fonksiyonlar sınıfı bir gerçel lineer uzaydır. $[a,b]$ üzerinde sürekli, gerçel değerli fonksiyonların sınıfı ise, genel olarak, $C[a,b]$ ile gösterilir. $C[a,b]$,

$$\|f\|_{C[a,b]} := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \tag{3.1}$$

ile tanımlı düzgün norm (Chebyshev normu) ile bir normlu lineer uzaydır. Dahası, bu norm ile bir Banach uzayıdır. f sürekli olduğundan (3.1) de supremum yerine maksimum yazılabilir.

$$D_+ f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad D_- f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

simgelenimleri verilsin. Yukarıda verilen limitler varsa bu limitlere f fonksiyonunun $x \in [a,b]$ noktasındaki, sırasıyla, *sağ ve sol türevleri* denir. Bir fonksiyonun bir noktadaki sağ ve sol türevleri mevcut ve eşitseler fonksiyon bu noktada *türevlenebilirdir* ve bu türev $f'(x)$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu her bir $x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir ve a noktasında sağdan ve b noktasında soldan türeve sahip ise $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilirdir denir. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f^{(r)}(x)$ ile f fonksiyonunun x noktasındaki $r-inci$ türevi gösterilir. $r-inci$ türevi $C[a,b]$ sınıfından olan fonksiyonların uzayı $C^r[a,b]$ ile gösterilir.

Düzgünlük açısından sürekli fonksiyonlar uzayı ile türevlenebilir fonksiyonlar uzayı arasında bulunan fonksiyon sınıfları da vardır. Örneğin, mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı: Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\sum_{i=1}^{n} \left| \bar{t}_i - \underline{t}_i \right| < \delta$ koşulunu sağlayan her

$$a \le \underline{t}_1 \le \bar{t}_1 \le \underline{t}_2 \le \bar{t}_2 \le \cdots \le \underline{t}_n \le \bar{t}_n \le b$$

dizisi için $\sum_{i=1}^{n} \left| f\left(\bar{t}_i\right) - f\left(\underline{t}_i\right) \right| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında *mutlak sürekli fonksiyon* denir. $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı $AC[a,b]$ ile gösterilir. Tanımlardan da anlaşılabileceği gibi

$$C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b]$$

bağıntısı doğrudur [24]. $r-inci$ türevi $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olan tüm fonksiyonların ailesi ise $AC^r[a,b]$ ile gösterilir. $AC^0[a,b] := AC[a,b]$.

Klasik yaklaşım kuramında cebirsel polinomların önemli bir rolü vardır. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0,n},$ olmak üzere derecesi n olan bir *cebirsel polinom*

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad a_n \ne 0,\ x \in \mathbb{R},$$

şeklinde tanımlanır. Derecesi en çok n olan tüm cebirsel polinomların ailesi $\mathbb{P}_n$ ile gösterilir. Cebrin Temel Teoremi'ne göre n dereceli bir cebirsel polinom herhangi bir değeri en fazla n defa alır. Aksi durumda sabit polinomdur [25].

Cebirsel polinomları gibi, trigonometrik polinomlar da uygulamada büyük ölçüde kullanılmaktadırlar. $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0,n}$, olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

ifadesine n *mertebeli trigonometrik polinom* denir. n mertebeli trigonometrik polinomlar uzayı $\mathbb{T}_n$ ile gösterilir. Trigonometrik polinomlar 2π periyotludur. 2π periyotlu tüm sürekli fonksiyonlar uzayı $C^{2\pi}$ ile gösterilir [26].

Gerçel yaklaşım teorisinde en sık kullanılan ve önemli sonuçların elde edilmesine yardımcı olan polinomlar Chebyshev polinomlarıdır. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $n-inci$ *Chebyshev polinomu* olarak adlandırılan

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad x \in [-1,1],$$

ifadesi $n-inci$ dereceden bir cebirsel polinomdur ve

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} \left((-1)^k \sum_{j=k}^{[\![n/2]\!]} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} \right) x^{n-2k}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir [26]. Bu formülden faydalanarak Chebyshev polinomlarına ait aşağıdaki birkaç örnek yazılabilir:

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, && T_1(x) = x, \\ &T_2(x) = 2x^2 - 1, && T_3(x) = 4x^3 - 3x. \\ &\cdots \end{aligned}$$

Chebyshev polinomları tüm sıfırlarını $[-1,1]$ aralığında alır ve bu sıfırlar orijine göre simetriktir. $n-inci$ Chebyshev polinomunun sıfırları $k = 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere $x_k = \cos((2k-1)\pi/2n)$ noktalarıdır [26].

Chebyshev polinomlarının $[-1,1]$ aralığındaki düzgün normu 1'e eşittir [26]:

$$\|T_n\|_{C[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

3.2. İNTERPOLASYON

Bu kısımda $n \in \mathbb{N}_0$ ve $x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0,n},$ olmak üzere $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ noktaları üzerinde tanımlı gerçel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde $x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0,n},$ noktalarında f ile aynı değerleri alan ve derecesi $\leq n$ olan bazı polinomlar incelenecektir. Noktalar ayrık ise istenen özellikleri sağlayan polinom Lagrange interpolasyon polinomudur.

3.2.1. Lagrange İnterpolasyonu

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ ayrık noktalar kümesi, yani, her $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ ise f fonksiyonunu bu kümede interpole eden bir başka değişle bu kümede f fonksiyonu ile aynı değerleri alan ve derecesi $\leq n$ olan bir tane cebirsel polinom vardır [27]. Bu polinom şu şekilde formulize edilir: Her bir $i=\overline{0,n}$ için derecesi n olan

$$\ell_i(x) := \ell_i(x; x_0, x_1, ..., x_n) := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{3.2}$$

ℓ_j polinomları verilsin. $\delta_{i,j}$ Kronecker sembolü;

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olmak üzere her bir $i,j=\overline{0,n}$ için $\ell_i(x_j)=\delta_{i,j}$ eşitliği kolayca görülmektedir. Bu eşitlik yardımıyla oluşturulan

$$L(x; f; x_0, x_1, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) \tag{3.3}$$

polinomunun, açıktır ki, derecesi $\leq n$ ve her bir $i=\overline{0,n}$ için x_i noktasındaki değeri $f(x_i)$ dir. Örneğin, $n=1$ için

$$\begin{aligned} L(x; f; x_0, x_1) &= f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \end{aligned}$$

Tanım 3.2.1. (3.2) polinomuna $x_0, x_1, \cdots, x_n$ noktalarındaki *temel Lagrange polinomu,* (3.3) polinomuna ise f fonksiyonunu $x_0, x_1, \cdots, x_n$ noktalarında interpole eden *Lagrange interpolasyon polinomu* denir.

Temel Lagrange polinomunun ve dolayısıyla Lagrange interpolasyon polinomunun bir başka kullanışlı gösterimi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\Pi_n(x) := (x - x_0)(x - x_1)\cdot ...\cdot(x - x_n)$$

olmak üzere her bir $i=\overline{0,n}$ için

$$\ell_i(x) = \frac{\Pi_n(x)}{(x - x_i)\Pi_n'(x_i)}, \qquad x \neq x_i$$

eşitliği kolayca elde edilir. Buradan Lagrange interpolasyon polinomunun da

$$L\left(x;f;x_0,x_1,...,x_n\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f\left(x_i\right)\prod_n\left(x\right)}{\left(x-x_i\right)\prod_n'\left(x_i\right)} \tag{3.4}$$

şeklinde bir gösterimi elde edilir [28]. Lagrange interpolasyon polinomunun bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

(i) *Her bir* $P\in\mathbb{P}_n$ *için*

$$L\left(x;P;x_0,x_1,...,x_n\right)=P\left(x\right)$$

eşitliği doğrudur.

Bu ifade, cebrin polinomların sıfırları üzerine temel teoremi kullanılarak ispatlanabilir. Özel olarak, $P\equiv 1$ alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n}\ell_i\left(x\right)=1$$

elde edilir.

(ii) *Bir operatör olarak Lagrange interpolasyon polinomları lineerdir:*

$a,b\in\mathbb{R}$ ve f,g fonksiyonları $\left\{x_i\right\}_{i=0}^{n}$ üzerinde tanımlı olmak üzere

$$L\left(x;af+bg;x_0,x_1,...,x_n\right)=aL\left(x;f;x_0,x_1,...,x_n\right)+bL\left(x;g;x_0,x_1,...,x_n\right).$$

Bu eşitlik (3.4) den kolayca elde edilir.

Yaklaşım kuramında interpolasyon problemlerinin yeri büyüktür. Bunların en önemlisi interpolasyon polinomunun yakınsaklığıdır: $f\in C\left[a,b\right]$ ve $x_i\in\left[a,b\right]$, $i=\overline{0,n}$, verilsin. L_n, f fonksiyonunu $x_0,x_1,\cdots,x_n$ noktalarında interpole eden Lagrange interpolasyon polinomu olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)-L_n\left(x\right)\right|$$

limiti sıfır olur mu? Bu soruya hem olumlu hem de olumsuz yanıt verilebilir. Olumsuz yanıt için en ünlü örneği Runge 1901 yılında vermiştir: $\left[-1,1\right]$ aralığında tanımlı $f\left(x\right)=1\big/\left(1+25x^2\right)$ fonksiyonu eş-aralıklı $x_i=-1+2i/n$, $i=\overline{0,n}$, noktalarında interpole edilsin. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0.72\le x\le 1}\left|f\left(x\right)-L_n\left(x\right)\right|=\infty$$

olur [29]. Düğüm noktalarının seçimi ile her zaman olumlu yanıt alınabileceğini gösteren bir teorem aşağıda verilmiştir [30].

Teorem 3.2.2. $f \in C[a,b]$ *ise*

$$a \le x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \le b$$

koşulunu sağlayan $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{i=0}^{n}$ *düğüm noktalar sistemi vardır öyle ki* f *fonksiyonunu bu noktalarda interpole eden* L_n *polinomları* f *fonksiyonuna yakınsaktır, yani,*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - L_n(x) \right| = 0 .$$

Düğüm noktalar sistemi olarak Chebyshev polinomlarının sıfırları seçilirse bu yakınsaklık garanti altına alınır [31].

Eğer $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ de bazı noktalar çakışık yani bu sonlu dizi ayrık noktalardan oluşmuyorsa Lagrange interpolasyon polinomu yetersiz kalır. Bu durumda, f fonksiyonuna bazı ek koşullar verilerek Hermite interpolasyon polinomu istenen özellikleri sağlayan polinom olur.

3.2.2. Hermite İnterpolasyonu

Bir önceki kısımda $L(x; f; x_0, x_1, ..., x_n)$ Lagrange interpolasyon polinomunda x_i ler ayrık noktalardı. Bu kısımda ise Lagrange interpolasyon polinomu, bazı noktaların çakışık olduğu duruma genişletilecektir. Kavram karışıklığına meydan vermemek için aşağıda bazı simgelenimler verilmiştir.

$\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, yani, her bir $i = \overline{0,n}$ için $x_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\bar{x} = (x_0, x_1, \cdots x_n)$ olsun. $\{y_s\}_{s=1}^{q}$, $\bar{x}$ in farklı bileşenlerinin kümesi olsun. x_i noktası $\bar{x}$ in $i-inci$ bileşenini gösterirken, y_i noktaları $\bar{x}$ in düğüm noktaları adını alır. Eğer $\bar{x}$ in tüm bileşenleri birbirinden farklı ise, açıktır ki, $q = n+1$, diğer durumda $q < n+1$ dir. y_s noktası $\bar{x}$ in tam olarak $p_s + 1$ tane bileşeni ile çakışık ise $p_s + 1$ sayısına y_s in $\bar{x}$ deki *katlılığı* denir. Bu durumda, açıktır ki, $\sum_{s=1}^{q} (p_s + 1) = n + 1$ dir. Her bir $s = \overline{1,q}$ için $n - p_s$ dereceli $\wp_s$ polinomu

$$\wp_s(x) := \wp_s(x; \bar{x}) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \ne s}}^{q} (x - y_\nu)^{p_\nu + 1}$$

şeklinde tanımlanırken, bunun yardımıyla

$$B_s(x) := B_s(x;\overline{x}) = \frac{1}{\wp_s(x;\overline{x})}$$

olsun. Temel Lagrange polinomunun özelliklerine benzer özelliklere sahip bir polinom aşağıdaki biçimde verilebilir. Her bir $s=\overline{1,q}$ ve $i=\overline{0,p_s}$ için

$$\ell_{s,i}(x) := \ell_{s,i}(x;\overline{x}) := \frac{\wp_s(x;\overline{x})}{i!}\sum_{j=0}^{p_s-i}\frac{1}{j!}B_s^{(j)}(y_s)(x-y_s)^{i+j} \tag{3.5}$$

n dereceli bir polinomdur ve şu özelliğe sahiptir: $\nu=\overline{1,q}$ ve $j=\overline{0,p_\nu}$ olmak üzere

$$\ell_{s,i}^{(j)}(y_\nu) = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ve } \nu=s, \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

Bundan dolayı $s=\overline{1,q}$ ve $i=\overline{0,p_s}$ olmak üzere verilen $f_{s,i}\in\mathbb{R}$ değerleri için derecesi $\leq n$ olan

$$H(x) = \sum_{s=1}^{q}\sum_{i=0}^{p_s} f_{s,i}\ell_{s,i}(x) \tag{3.6}$$

polinomu

$$H^{(j)}(y_\nu) = f_{\nu,s}, \qquad \nu=\overline{1,q}, \quad j=\overline{0,p_\nu}$$

özelliğine sahiptir [28].

$\mathbb{R}$ de tanımlı gerçel değerli bir f fonksiyonu $s=\overline{1,q}$ olmak üzere her bir y_s noktasında p_s-inci mertebeye kadar türevlenebilir olacak şekilde verilsin. $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Tanım 3.2.3. (3.5) de yer alan n dereceli $\ell_{s,i}(\cdot;\overline{x})$, $s=\overline{1,q}$ ve $i=\overline{0,p_s}$, polinomlarına $\overline{x}$ deki *temel Hermite-Lagrange polinomları*, (3.6) ifadesinde $f_{s,i}=f^{(i)}(y_s)$, $s=\overline{1,q}$ ve $i=\overline{0,p_s}$, alınırsa oluşan polinoma *Hermite-Lagrange interpolasyon polinomu* denir ve $L(\cdot;f;\overline{x})$ ile gösterilir.

Açıktır ki, $L(\cdot;f;\overline{x})$ polinomu en çok n derecelidir ve

$$L^{(i)}(y_s) = f^{(i)}(y_s), \qquad s=\overline{1,q}, \quad i=\overline{0,p_s}$$

özelliğine sahiptir. Özel durumlarda, örneğin $q = n+1$, yani, noktalar ayrık ise Hermite-Lagrange interpolasyon polinomu (3.4) ile tanımlı Lagrange interpolasyon polinomu ve eğer $q = 1$, yani, $x_0 = x_1 = \cdots = x_n$ ise

$$L\left(x\,;f\,;\overline{x}\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}\left(x_0\right)}{i!}\left(x - x_0\right)^i$$

x_0 noktasındaki Taylor polinomudur.

$$L\left(x;f\,;\overline{x}\right) = \sum_{s=1}^{q}\sum_{i=0}^{p_s} f^{(i)}\left(y_s\right)\ell_{s,i}\left(x\right) \tag{3.7}$$

Hermite-Lagrange interpolasyon polinomu Lagrange interpolasyon polinomunun (i) ve (ii) özelliklerini olduğu gibi korur: Bir operatör olarak lineerdir ve derecesi $\leq n$ olan polinomlar bu operatör altında değişmezdir [28].

Hermite-Lagrange polinomları Newton formunda yazılabilir. Teklikle belirli $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sabitleri için $\overline{x_i} := \left(x_0, x_1, \cdots, x_i\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&L\left(x;f\,;x_0\right) = A_0,\\
&L\left(x;f\,;\overline{x_1}\right) = A_0 + A_1\left(x - x_0\right),\\
&\quad\vdots\\
&L\left(x;f\,;\overline{x_n}\right) = A_0 + A_1\left(x - x_0\right) + \cdots + A_n\left(x - x_0\right)\cdots\left(x - x_{n-1}\right),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitlikleri yazılabilir [27]. (3.7) den yararlanılarak A_i sabitleri birer birer elde edilebilir. Örneğin $A_0 = f\left(x_0\right)$ ve

$$A_1 = \begin{cases} \dfrac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}, & x_0 \neq x_1, \\ f'\left(x_0\right), & x_0 = x_1. \end{cases}$$

3.3. BÖLÜNMÜŞ FARKLAR

Bölünmüş farkların birbirine denk olan birçok tanımı olmasına karşın bu çalışmada (3.8) Newton formülü yardımıyla elde edilen tanımı verilecektir. Bir f fonksiyonu ve bir $\overline{x} = \left(x_0, x_1, \cdots, x_n\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$ verildiğinde bunlara bağlı tek türlü belirlenen Hermite-Lagrange interpolasyon polinomunda x^n li terimin katsayısına,

f fonksiyonunun $\bar{x}$ in bileşenlerine bağlı $n-inci$ *bölünmüş farkı* denir ve eğer $\bar{x}$ in bileşenleri ikişer ayrık ise $[x_0, x_1, \cdots, x_n; f]$ ile diğer hallerde $[\bar{x}; f]$ ile simgelenir. Tanıma göre, A_n (3.8) deki sayı olmak üzere,

$$[\bar{x}; f] = A_n$$

dir. Bu tanımın geçerli olması için f fonksiyonunun düğüm noktalarının bir komşuluğunda noktaların katlılık mertebelerine kadar türevlerinin mevcut olması gerekir. Bu nedenle, f in $n-inci$ bölünmüş farkı bu türevlerin bir lineer birleşimi şeklinde olacaktır. Örneğin,

$$[x_0; f] = f(x_0),$$
$$[x_0, x_0; f] = f'(x_0),$$
$$[x_0, x_0, x_1; f] = \frac{f'(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)^2}, \qquad x_0 \neq x_1.$$

Bölünmüş farklara ait sık kullanılan özellikler aşağıda verilmiştir.

(i) *$[\bar{x}; f]$, $x_0, x_1, \cdots, x_n$ noktalarına göre simetriktir.* Bu (3.8) den kolaylıkla görülebileceği gibi x_i noktalarının sırasının bir önemi olmadığı anlamına gelir[32]: $(i_0, i_1, \cdots, i_n)$, $(0, 1, \cdots, n)$ nin herhangi bir kombinasyonu ise

$$[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}; f] = [x_0, x_1, \cdots, x_n; f].$$

(ii) *Eğer $x_0 = x_1 = \cdots = x_n$ ise $[\bar{x}; f] = f^{(n)}(x_0)/n!$ dir.* Genel olarak, $a = \min_{i=\overline{0,n}} x_i$ ve $b = \max_{i=\overline{0,n}} x_i$ olmak üzere eğer $f \in C^n[a,b]$ ise

$$[\bar{x}; f] = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}, \qquad \theta \in (a,b). \tag{3.9}$$

Buradan, özel olarak, $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}_0$, alınırsa

$$[\bar{x}; f] = \begin{cases} 0, & m < n, \\ 1, & m = n \end{cases} \tag{3.10}$$

elde edilir.

(iii) *Newton Formülü,*

$$L(x; f; \bar{x}) = [x_0; f] + \sum_{i=1}^{n} [\bar{x}_i; f] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \tag{3.11}$$

burada, $\overline{x_i} = (x_0, x_1, \cdots, x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Her bir $i = \overline{0,n}$ için $x_i \neq x$ ve $x = x_{n+1}$ olmak üzere $L(x; \overline{x_{n+1}}; f) = f(x)$ olduğundan (3.11) Newton formülü kullanılarak

$$f(x) - L(x; \overline{x_n}; f) = [\overline{x_{n+1}}; f] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \tag{3.12}$$

şeklinde bir kalan formülü elde edilir.

(iv) *f fonksiyonun x_i, $i = \overline{0,n}$, noktalarındaki uygun mertebeden türevleri bu noktalarda sürekli ise çok değişkenli $F(x_0, x_1, \cdots, x_n) = [x_0, x_1, \cdots, x_n; f]$ fonksiyonu $\overline{x}$ noktasında süreklidir.*

(v) *$x_0 \neq x_n$ ise*

$$[\overline{x}; f] = \frac{[\overline{x_{n-1}}; f] - [\overline{x_n^1}; f]}{x_0 - x_n}, \tag{3.13}$$

burada, $\overline{x_n^1} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dir. Bölünmüş farkların isminin kaynağı bu eşitliktir. Yukarıdaki eşitlik,

$$L(x; \overline{x}; f) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} L(x; \overline{x_n^1}; f) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} L(x; \overline{x_{n-1}}; f)$$

eşitliği kullanılarak elde edilir. (ii) özelliği ile birlikte (3.13) kullanılarak bölünmüş farkların değerleri hesaplanabilir.

(vi) *Her bir $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ ise*

$$[x_0, x_1, \cdots, x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_n'(x_i)} \tag{3.14}$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlik (3.4) den kolayca elde edilebilir.

(vii) *Bölünmüş farklar için Leibniz formülü* [27]:

$$[x_0, x_1, \cdots, x_n; gf] = \sum_{i=0}^{n} [x_0, x_1, \cdots, x_i; g][x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n; f]. \tag{3.15}$$

Bu formülün bir sonucu olarak aşağıda verilen lemma elde edilebilir.

Lemma 3.3.1. *$c \in \mathbb{R}$ bir sabit ve $h(x) = (x - c) f(x)$ ise*

$$[x_0, ..., x_n; h] = [x_1, ..., x_n; f] + (x_0 - c)[x_0, ..., x_n; f]. \tag{3.16}$$

İspat. (3.15) de $g(x) = x - c$ alınırsa $\left[x_0, x_1; g\right] = g'(\theta),\ \theta \in (x_0, x_1)$, eşitliği ve (3.10) kullanılarak

$$\begin{aligned}\left[x_0,\ldots,x_n;h\right] &= (x_0 - c)\left[x_0,\ldots,x_n;f\right] + \left[x_0,x_1;g\right]\left[x_1,\ldots,x_n;f\right] \\ &= (x_0 - c)\left[x_0,\ldots,x_n;f\right] + g'(\theta)\left[x_1,\ldots,x_n;f\right] \\ &= (x_0 - c)\left[x_0,\ldots,x_n;f\right] + \left[x_1,\ldots,x_n;f\right]\end{aligned}$$

elde edilir. □

(viii) $f \in C^n[a,b]$ *ve* $x_i \in [a,b],\ i = \overline{0,n}$, *ise*

$$\left[x_0, x_1, \ldots, x_n; f\right] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}\left(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})t_n\right) dt_n \ldots dt_1$$

integral gösterimi vardır [27].

Düğüm noktaları eş-aralıklı olduğu durumda bölünmüş farkların oldukça geniş bir kullanım alanı vardır. Bu durumda, bölünmüş farkların birçok özelliğini sonlu farklara taşıyan güçlü bir bağıntı da mevcuttur.

3.4. SONLU FARKLAR

Bu kısımda $x_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$, düğüm noktaları eş-aralıklı varsayılacaktır, yani, $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

$$x_i = x_0 + ih, \qquad i = \overline{0,n}.$$

Bu noktaları içeren bir küme üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunu eş-aralıklı $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ noktalarında interpole eden ve derecesi $\leq n-1$ olan Lagrange interpolasyon polinomu L ile gösterilsin. Bu durumda (3.3) den

$$L(x) = L\left(x; f; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\ell_i\left(x; x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\right).$$

Bu polinomun temel Lagrange polinomlarının $x = x_n$ noktasındaki değerleri incelenirse

$$\ell_i\left(x_n;x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\right)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}\frac{x_n-x_j}{x_i-x_j}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}\frac{n-j}{i-j}=-(-1)^{n-i}\binom{n}{i} \tag{3.17}$$

elde edilir. Burada

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

n 'in i 'li kombinasyonudur. (3.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned} f\left(x_n\right)-L\left(x_n\right) &= f\left(x_n\right)-\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)\ell_i\left(x;x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\right) \\ &= f\left(x_n\right)+\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)(-1)^{n-i}\binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} f\left(x_0+ih\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.4.1.

$$\Delta_h^n(f,x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} f(x+ih)$$

ile tanımlı $\Delta_h^n(f,x)$ ifadesine f fonksiyonunun x noktasındaki h adımlı $n-inci$ *farkı* denir. $\Delta_h^0(f,x)=f(x)$ ve $\Delta_0^n(f,x)=0$ kabul edilir.

Bir fonksiyonun $n-inci$ farkı daha küçük mertebeden farklar cinsinden yazılabilmesine olanak sağlayan eşitlik tümevarım yöntemi ile ispatlanabilir.

$$\Delta_h^n(f,x)=\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^{n-j-i}\binom{n-j}{i}\Delta_h^j(f,x+jh), \qquad j=\overline{0,n-1}, \tag{3.18}$$

[28]. Bir başka kullanışlı ifade olan aşağıdaki eşitlik de tümevarım yöntemi ile gösterilebilir.

$$\Delta_{mh}^n(f,x)=\sum_{i_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m-1}\Delta_h^n\left(f,x+\left(i_1+\cdots+i_n\right)h\right), \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Genelliğe aykırı bir durum oluşmayacağından, bu aşamadan sonra h pozitif bir gerçel sayı olarak kabul edilecektir. (3.12) den

$$\Delta_h^n(f,x)=h^n n!\left[x,x+h,\cdots,x+nh;f\right] \tag{3.20}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.20) kullanılarak bölünmüş farkların birçok özelliği sonlu farklar için de yazılabilir. Bazıları aşağıda listelenmiştir.

(i) *$a = x_0$ ve $b = x_0 + nh$ olmak üzere eğer $f \in C^n\left[a,b\right]$ ise*

$$\Delta_h^n\left(f,x\right) = h^n f^{(n)}\left(\theta\right), \qquad \theta \in \left(a,b\right).$$

Buradan, $f\left(x\right) = x^m$, $m \in \mathbb{N}_0$, alınırsa

$$\Delta_h^n\left(f,x\right) = \begin{cases} 0, & m < n; \\ h^n n!, & m = n. \end{cases}$$

(ii) Newton formülü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$L\left(x;f;x_0,\cdots,x_n\right) = \Delta_h^0\left(f,x_0\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_h^i\left(f,x_0\right)}{i!h^i} \prod_{j=0}^{i-1}\left(x - x_j\right).$$

(iii) *$a = x_0$ ve $b = x_0 + nh$ olmak üzere eğer $f \in C^j\left[a,b\right]$, $j = \overline{0,n}$, ise*

$$\Delta_h^n\left(f,x_0\right) = h^j \Delta_h^{n-j}\left(f^{(j)},\theta\right), \quad \theta \in \left(x_0, x_0 + \left(n-j\right)h\right).$$

İspat. Eğer $g\left(x\right) := \Delta_h^{n-j}\left(f,x\right)$ alınırsa tanımdan

$$g^{(j)}\left(x\right) := \Delta_h^{n-j}\left(f^{(j)},x\right), \qquad x \in \left(x_0, x_0 + \left(n-j\right)h\right),$$

olduğu açıktır. (3.18) ve (i) kullanılarak

$$\Delta_h^n\left(f,x_0\right) = \Delta_h^j\left(g,x_0\right) = h^j g^{(j)}\left(\theta\right), \quad \theta \in \left(x_0, x_0 + \left(n-j\right)h\right)$$

elde edilir ki bu istenen eşitliği verir. □

(iv)

$$\Delta_h^{n-1}\left(f,x+h\right) - \Delta_h^{n-1}\left(f,x\right) = \Delta_h^n\left(f,x\right). \tag{3.21}$$

Bu eşitlik kullanılarak her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta_h^{n-1}\left(f,x+mh\right) - \Delta_h^{n-1}\left(f,x\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta_h^n\left(f,x+ih\right)$$

eşitliği elde edilir.

(v) *Sonlu farklar bir operatör olarak lineerdir.* Bir g fonksiyonu da f gibi x_i, $i = \overline{0,n}$, noktalarında tanımlı ise $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Delta_h^n\left(af + bg, x_0\right) = a\Delta_h^n\left(f,x_0\right) + b\Delta_h^n\left(g,x_0\right).$$

(vi) Leibniz formülü aşağıdaki şekli alır.

$$\Delta_h^n\left(fg,x_0\right)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta_h^i\left(f,x_0\right)\Delta_h^{n-i}\left(f,x_0+ih\right).$$

(vii) Sonlu farklar birbirine denk olan iki kullanışlı integral gösterimine sahiptir. $a=x_0$ *ve* $b=x_0+nh$ *olmak üzere eğer* $f\in AC^{n-1}\left[a,b\right]$ *ise*

$$\Delta_h^n\left(f,x_0\right)=h^n n!\int_0^1\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n-1}}f^{(n)}\left(x_0+h\left(t_1+\cdots t_n\right)\right)dt_n\dots dt_1,$$

$$\Delta_h^n\left(f,x_0\right)=\int_0^h\int_0^h\dots\int_0^h f^{(n)}\left(x_0+t_1+\cdots t_n\right)dt_n\dots dt_1,$$

eşitlikleri tümevarım yöntemi kullanılarak gerçeklenebilir.

3.5. DÜZGÜNLÜK MODÜLLERİ

Verilen fonksiyonlara ne kadar iyi yaklaşıldığına yani yaklaşım hızına dair teoremleri elde edebilmek için fonksiyonunun düzgünlüğünün tam ölçüsünün bilinmesi büyük önem taşır. Bu kısımda fonksiyonların süreklilik ve düzgünlük modülleri üzerine tartışılacaktır.

3.5.1. Süreklilik Modülü

İki fonksiyon arasında türevlenebilme mertebesi büyük olan fonksiyon daha düzgündür. Ancak, bu iki fonksiyon aynı mertebeden türeve sahipse düzgünlükleri nasıl karşılaştırılabilir? Bu sorunun yanıtı fonksiyonların düzgünlüğünü ölçen süreklilik modülü verir.

$f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

Tanım 3.5.1. $t\in\left[0,b-a\right]$ için

$$\omega\left(f;t;\left[a,b\right]\right)=\sup\left\{\left|f\left(x'\right)-f\left(x\right)\right|:\left|x'-x\right|\le t,\ x,x'\in\left[a,b\right]\right\}$$

ile tanımlı $\omega\left(f;t;\left[a,b\right]\right)$ fonksiyonuna f 'nin t adımlı *süreklilik modülü* denir.

Tanımdan da anlaşılabileceği gibi bir f fonksiyonunun $t>0$ adımlı süreklilik modülü, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında kalan t uzunluklu alt aralıklardaki en büyük salınımını verir. Ayrıca, $t \geq b-a$ ise

$$\omega\left(f;t;[a,b]\right)=\omega\left(f;b-a;[a,b]\right).$$

Bir f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{t\to 0}\omega\left(f;t;[a,b]\right)=0 \tag{3.22}$$

olmasıdır [33]. Ayrıca, (3.22) deki limitin sıfıra gitme hızı ne kadar büyükse fonksiyonun düzgünlüğü de o derece iyidir. Süreklilik modülünün (3.22) dışında aşağıda verilen üç önemli özelliğe de sahiptir[28]. $\omega(t):=\omega\left(f;t;[a,b]\right)$ olsun.

(i) ω, t ye göre azalmayan fonksiyondur.

(ii) $\omega \in C[0,b-a]$.

(iii) ω yarı-toplamsaldır, yani, her $t_1,t_2 \in [0,\infty)$ sayıları için

$$\omega(t_1+t_2)\leq \omega(t_1)+\omega(t_2).$$

3.5.2. Düzgünlük Modülü

Düzgünlük modülü, süreklilik modülünün bir doğal genelleştirilmesidir. $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve sınırlı bir f fonksiyonu ve bir $k\in\mathbb{N}$ verilsin.

Tanım 3.5.2. $t\in\left[0,(b-a)/k\right]$ için

$$\omega_k\left(f;t;[a,b]\right)=\sup\left\{\left|\Delta_h^k(f,x)\right| : |h|\leq t,\ x,x+kh\in[a,b]\right\}$$

ile tanımlı $\omega_k\left(f;t;[a,b]\right)$ fonksiyonuna f in t adımlı k *mertebeli* veya $k-$*inci düzgünlük modülü* denir.

Açıktır ki, bir fonksiyonun birinci düzgünlük modülü tam olarak o fonksiyonun süreklilik modülüdür, yani, $\omega_1\left(f;t;[a,b]\right)=\omega\left(f;t;[a,b]\right)$. Bazı kaynaklarda $\omega_2\left(f;t;[a,b]\right)$ ikinci düzgünlük modülü, “basit düzgünlük modülü” veya “Zygmund modülü” olarak geçmektedir [33].

Düzgünlük modülleri aşağıda verilen beş temel özelliğe sahiptir[33].

(i) *Monotonluk*: $0 \le t_1 \le t_2$ için

$$\omega_k\left(f;t_1;[a,b]\right) \le \omega_k\left(f;t_2;[a,b]\right).$$

(ii) *Yarı-Toplamsallık:* Her $f,g \in B[a,b]$ için

$$\omega_k\left(f+g;t;[a,b]\right) = \omega_k\left(f;t;[a,b]\right) + \omega_k\left(g;t;[a,b]\right).$$

(iii) *Yüksek mertebeden düzgünlük modülleri daha küçük mertebeden düzgünlük modülleri cinsinden belirlenebilir:*

$$\omega_k\left(f;t;[a,b]\right) \le 2\omega_{k-1}\left(f;t;[a,b]\right).$$

(iv) *Bir* $f \in AC[a,b]$ *fonksiyonunun düzgünlük modülü, türevinin düzgünlük modülü cinsinden belirlenebilir:*

$$\omega_k\left(f;t;[a,b]\right) = t\omega_{k-1}\left(f';t;[a,b]\right).$$

(v) *Her bir* $n \in \mathbb{N}_0$ *için*

$$\omega_k\left(f;nt;[a,b]\right) = n^k\omega_k\left(f;t;[a,b]\right).$$

Yukarıda listelenen beş temel özellik kullanılarak düzgünlük modüllerinin bazı genel özellikleri elde edilebilir. İspatları yukarıdaki özelliklerden kolayca elde edilebileceği gibi [34]'te de bulunabilen bu özellikler aşağıda verilmiştir.

(vi) $\lambda > 0$ *için*

$$\omega_k\left(f;\lambda t;[a,b]\right) = (\lambda+1)^k\,\omega_k\left(f;t;[a,b]\right).$$

(vii) $k-inci$ *türevi sınırlı olan herhangi bir* f *fonksiyonu için*

$$\omega_k\left(f;t;[a,b]\right) = t^k\left\|f^{(k)}\right\|_{C[a,b]}.$$

(viii) *Her* $f,g \in B[a,b]$ *için*

$$\omega_k\left(fg;t;[a,b]\right) \le \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\omega_i\left(f;t;[a,b]\right)\omega_{k-i}\left(g;t;[a,b]\right)$$

(ix) *Her bir* $P \in \mathbb{P}_{k-1}$ *için* $\omega_k\left(P;t;[a,b]\right) = 0$ *dır.*

(iii) özelliğinden, bir fonksiyonun $k-inci$ düzgünlük modülünün $i<k$ olmak üzere $i-inci$ düzgünlük modülü cinsinden belirlenebileceği görülür.

Aşağıda verilen teorem, düşük mertebeden düzgünlük modüllerinin daha yüksek mertebeden düzgünlük modülleri cinsinden belirlenebilmesine olanak sağlar.

Teorem 3.5.3. (Marchaud) *Her bir* $i<k$ *için*

$$\omega_i\left(f;t;[a,b]\right)\leq c_k t^i\left(\int_t^{(b-a)/k} t^{-i-1}\omega_k\left(f;t;[a,b]\right)dt+(b-a)^{-i}\|f\|_{C[a,b]}\right),$$

burada c_k *sadece* k *ye bağlı bir sabittir*[34].

3.6. YAKLAŞIM KURAMI ve TEMEL TEOREMLERİ

3.6.1. En İyi Yaklaşım Polinomu: Varlık ve Teklik

Ünlü Rus matematikçi P.L. Chebyshev 1853 yılında, bir buhar motorunun doğrusal hareketini bir tekerleğin dairesel hareketine çeviren aygıtlar ve bunların arasındaki bağıntıları araştırırken aşağıdaki problem üzerinde durmuştu [1]:

Bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olan bir f fonksiyonu ve bir $n\in\mathbb{N}$ verildiğinde, f fonksiyonu, derecesi $\leq n$ olan bir P cebirsel polinomu ile gösterilebilir mi, öyle ki her bir $x\in[a,b]$ noktasındaki hata kontrol altına alınabilinsin? Bir başka değişle, $\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-P(x)\right|$ ifadesini minimum yapacak şekilde öyle bir P polinomunu inşa etmek mümkün müdür?

Bu problem yardımıyla şu sorular sorulabilir.

- Öyle bir P polinomu var mıdır?
- Varsa, tek midir?
- Varsa, nasıl inşa edilebilir?
- Maksimum hata nasıl belirlenebilir?

Yaklaşım kuramının temel problemleri olan bu sorular daha da artırılabilir. Yukarıdaki sorular $C[a,b]$ uzayında düzgün norm için sorulan sorulardır. Uzay ve norm değiştirilerek yeni problemler oluşturulabilir. Ancak, bu tezde bir kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlar üzerinde çalışmalar yapıldığından bu bölümde sadece $C[a,b]$ uzayı ile ilgili önemli teoremlere yer verilecektir.

$\left(X, \|\cdot\|\right)$ bir normlu lineer uzay ve $Y \subset X$ boş olmayan bir alt küme olsun. Bir $f \in X$ verildiğinde

$$E\left(f;Y\right) := \inf_{p \in Y} \|f - p\|$$

sayısına f elemanının Y kümesindeki *en iyi yaklaşım sayısı* denir. Açıktır ki, eğer $f \in Y$ ise en iyi yaklaşım sayısı sıfırdır. Eğer bir $p^* \in Y$ için

$$\inf_{p \in Y} \|f - p\| = \|f - p^*\|$$

oluyorsa p^* elemanına f elemanının Y kümesinde *en iyi yaklaşım elemanı* denir. En iyi yaklaşım elemanı her zaman olmayabilir. Ancak, Y, X 'in sonlu boyutlu bir alt uzayı ise kesinlikle en iyi yaklaşım elemanı vardır [25]. Bu eleman tek olmayabilir.

$\left(X, \|\cdot\|\right)$ bir normlu lineer uzay olsun. Eğer $\|x\| = \|y\| = r$ koşulunu sağlayan herhangi $x \neq y \in X$ elemanları için her $0 < \lambda < 1$ için $\left\|\lambda x + \left(1 - \lambda\right) y\right\| < r$ eşitsizliği sağlanıyorsa X uzayına adı geçen normla *kesin konveks uzay* denir. X kesin konveks uzay, Y onun bir alt uzayı ve $f \in X$ olsun. Eğer f elemanının Y kümesinde en iyi yaklaşım elemanı varsa tektir [25]. Örneğin, $1 < p < \infty$ ve

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|^p dx \right)^{1/p}$$

olmak üzere $\left(L^p\left[a,b\right], \|\cdot\|_p\right)$ fonksiyonlar uzayı kesin konveks uzaydır. Ancak, $C\left[a,b\right]$ uzayı (3.1) düzgün normu ile kesin konveks değildir. Gerçekten, $f\left(x\right) = 1 - x^2$ ve $g\left(x\right) = 1 - x^4$ fonksiyonları ele alınırsa

$$\|f\|_{C[-1,1]} = \|g\|_{C[-1,1]} = 1, \quad \text{ve} \quad \|f + g\|_{C[-1,1]} = 2$$

elde edilir ki, bu $C\left[-1,1\right]$ in kesin konveks olmadığını gösterir [25].

Derecesi $\leq n$ olan polinomların uzayı $\mathbb{P}_n$ ile gösterilmişti. Açıktır ki, $\mathbb{P}_n$ hem $C\left[a,b\right]$ hem de $L^p\left[a,b\right]$ uzaylarının n boyutlu bir alt uzayıdır. Bu uzaylardan alınan herhangi bir f fonksiyonun $\mathbb{P}_n$ alt uzayında en iyi yaklaşım sayıları sırasıyla

$$E_n\left(f\right) := \inf_{P \in \mathbb{P}_n} \|f - P\|_{C[a,b]}, \qquad E_n\left(f\right)_p := \inf_{P \in \mathbb{P}_n} \|f - P\|_p$$

ile gösterilir. Bir $f \in C[a,b]$ (veya $f \in L^p[a,b]$) fonksiyonu verildiğinde yukarıda belirtilen normlara göre bu fonksiyona $\mathbb{P}_n$ uzayında en iyi yaklaşım elemanı vardır. $L^p[a,b]$, $1 < p < \infty$, kesin konveks olduğundan bu elemanın tektir. $C[a,b]$ deki teklik farklı bir metotla verilir.

Kapalı aralıkta sürekli herhangi bir fonksiyona derecesi $\leq n$ olan polinomlar uzayında en iyi yaklaşan polinomun varlığını ilk olarak Borel, 1905 yılında, yukarıda verilenden farklı bir yöntemle ispatlamıştır [3]. Yazımda kolaylık sağlaması bakımından tezin bundan sonraki kısmında (3.1) ile tanımlı düzgün normun simgesi olan $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ yerine $\|\cdot\|$ kullanılacaktır.

Teorem 3.6.1. $[a,b]$ *kapalı aralığında sürekli olan bir* f *fonksiyonuna, her bir* $n \in \mathbb{N}$ *için derecesi* $\leq n$ *olan cebirsel polinomlar uzayı içinde en iyi yaklaşan polinom vardır.*

İspat. İnfimum özelliğinden her bir $N \leq n$ pozitif tam sayısı için $\|f - P_N\| < E_n(f) + 1/N$ olacak şekilde bir $P_N \in \mathbb{P}_n$ polinomu vardır. $E_n(f) \leq \|f - 0\| = \|f\|$ olduğundan her bir $N \in \mathbb{N}$ için

$$\|P_N\| \leq \|P_N - f\| + \|f\| < E_n(f) + \frac{1}{N} + \|f\| \leq 2\|f\| + 1$$

elde edilir. Yani; $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ dizisi düzgün sınırlıdır. Buradan, $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri $\mathbb{P}_n$ uzayının bir kapalı yuvarının içindedir. $\mathbb{P}_n$ uzayının her bir kapalı ve sınırlı altkümesi kompakt olduğundan $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ dizisinin bu küme içinde yakınsak olan bir $\{P_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi seçilebilir. Yakınsadığı polinom P_n^* ile gösterilsin. Bu durumda $\|f - P_{N_k}\| < E_n(f) + 1/N_k$ olduğu hesaba katılarak $k \to \infty$ iken limite geçilirse $\|f - P_n^*\| \leq E_n(f)$ elde edilir. Diğer taraftan, $E_n(f) \leq \|f - P_n^*\|$ olduğundan P_n^* ın f fonksiyonun bir en iyi yaklaşım polinomu olduğu görülür. □

$[a,b]$ kapalı aralığında bir sürekli reel f fonksiyonu ve derecesi $\leq n$ olan bir P_n^* polinomu verildiğinde, bu polinomun f fonksiyonuna $\mathbb{P}_n$ içinde en iyi yaklaşım polinomu olması için bir kriter Chebyshev tarafından 1854 yılında verilmiştir [1]. Bu teoreme *Chebyshev alternans teoremi* denir.

Teorem 3.6.2. *Bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu verilsin. Bir $P^* \in \mathbb{P}_n$ polinomunun f fonksiyonuna derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomlar içinde en iyi yaklaşım polinomu olması için gerek ve yeter koşul $a \leq x_1 < x_2 < ... < x_{n+2} \leq b$ ve $r_n(x) := f(x) - P_n^*(x)$ olmak üzere,*

a. $\quad r_n(x_1) = -r_n(x_2) = r_n(x_3) = ... = (-1)^{n+1} r_n(x_{n+2}),$

b. $\quad \forall i = \overline{1, n+2}$ *için* $|r_n(x_i)| = \|r_n\|$

koşullarını sağlayan $n+2$ elemanlı $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ noktalar sisteminin olmasıdır.

Yukarıdaki a, b koşullarını sağlayan $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ noktalar sistemine *Chebyshev Alternansı* denir.

Teorem 3.6.3. *Bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu verildiğinde, bu fonksiyonun $\mathbb{P}_n$ uzayında en iyi yaklaşım elemanı tektir.*

İspat. Kabul edelim ki $f \in C[a,b]$ fonksiyonun $\mathbb{P}_n$ uzayında farklı iki tane en iyi yaklaşım polinomu olsun. Bu polinomları P_1^* ve P_2^* ile gösterelim. Bu durumda,

$$E_n(f) = \|f - P_1^*\| = \|f - P_2^*\|$$

olur. Chebyshev Alternans Teoremindeki $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ noktalar sistemi için

$$|f(x_i) - P_2^*(x_i)| \leq |f(x_i) - P_1^*(x_i)| \tag{3.23}$$

eşitsizliği doğrudur. Derecesi $\leq n$ olan $K_n(x) := P_2^*(x) - P_1^*(x)$ polinomunu ele alalım. Her bir $i = \overline{1, n+2}$ için

$$K_n(x_i) = \left[f(x_i) - P_1^*(x_i)\right] - \left[f(x_i) - P_2^*(x_i)\right]$$

eşitliği ve (3.23) dikkate alınırsa her bir $i = \overline{2, n+2}$ için

$$\underset{[x_{i-1},x_i]}{\text{sgn}} K_n(x) = \underset{[x_{i-1},x_i]}{\text{sgn}} \left(f(x) - P_1^*(x)\right)$$

bulunur. Buradan $K_n(x)$ polinomunun [a,b] aralığında işareti en azından $n+1$ kez değişir. Dolayısıyla, cebrin temel teoremine göre $K_n \equiv 0$ elde edilir [25]. □

3.6.2. Weierstrass Yaklaşım Teoremleri

Bir önceki kısımda bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyona polinomlar uzayı üzerinde en yakın polinomun varlığı ve tekliği üzerinde durulmuştu. Bu kısımda ise verilen bu fonksiyona istenilen yakınlıkta polinomların varlığı incelenecektir. Ayrıca, bu fonksiyonun derecesi $\leq n$ olan polinomlar uzayında en iyi yaklaşım sayısının üstten sınırları üzerinde de durulacaktır.

Bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyona keyfi yakınlıkta polinomların varlığını ilk olarak Weierstrass, 1885 yılında, ispatlamıştır [2]:

Teorem 3.6.4. *Her bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu ve $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|f - P\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır.*

Bu teoreme *Weierstrass Yaklaşım Teoremi* denir. Birçok ispatı vardır. Bunların arasında en ünlüsü S.N. Bernstein tarafından 1912 de verilmiştir [35].

Bernstein Teoremi: $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı bir f fonksiyonu ve $N \in \mathbb{N}$ için

$$B_N(f,x) = \sum_{n=0}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\binom{N}{n} x^n (1-x)^{N-n} \tag{3.24}$$

ile tanımlı polinoma f'e bağlı N. *Bernstein polinomu,* $B_N(\cdot,x)$ operatörüne de *Bernstein operatörü* denir. Her bir $N \in \mathbb{N}$ için

$$B_N(1,x) = 1, \quad B_N(x,x) = x, \quad B_N(x^2,x) = \frac{N-1}{N}x^2 + \frac{x}{N} \tag{3.25}$$

eşitlikleri tanımdan kolayca elde edilir. (3.25) eşitliklerinden faydalanılarak aşağıdaki lemma yazılabilir [36].

Lemma 3.6.5. *Her bir $N \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur:*

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{n}{N}-x\right)^2\binom{N}{n}x^n(1-x)^{N-n}=\frac{x(1-x)}{N} \tag{3.26}$$

Bu lemmanın yardımıyla elde edilen aşağıdaki teorem Weierstrass Teoreminin bir ispatıdır [36].

Teorem 3.6.6. *Bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $\{B_N(f,x)\}$ Bernstein polinomlar dizisi f fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır.*

İspat. $f \in C[0,1]$ olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla, bir $M>0$ sayısı vardır öyle ki her $x \in [0,1]$ için $|f(x)| \le M$ dir. Tesbit edilen bir $x_0 \in [0,1]$ için

$$S_1 := \left\{n \in \mathbb{N} : \left|n/N - x_0\right| \le 1/N^{1/4}\right\}$$

ve $S_2 := \mathbb{N} - S_1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}B_N(f,x_0)-f(x_0)&=\sum_{n=0}^{N}\left[f\left(\frac{n}{N}\right)-f(x_0)\right]\binom{N}{n}x_0^n(1-x_0)^{N-n}\\&=\left(\sum_{n\in S_1}+\sum_{n\in S_2}\right)\left(\left[f\left(\frac{n}{N}\right)-f(x_0)\right]\binom{N}{n}x_0^n(1-x_0)^{N-n}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. İkinci toplam değerlendirilirse Lemma 3.13 den

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\in S_2}\left[f\left(\frac{n}{N}\right)-f(x_0)\right]\binom{N}{n}x_0^n(1-x_0)^{N-n}\right|&\le 2M\sum_{n\in S_2}\binom{N}{n}x_0^n(1-x_0)^{N-n}\\&=2M\sum_{n\in S_2}\left(\frac{n-Nx_0}{n-Nx_0}\right)^2\binom{N}{n}x_0^n(1-x_0)^{N-n}\end{aligned}$$

$$\leq 2M\sum_{n\in S_2}\frac{\left(n-Nx_0\right)^2}{N^{3/2}}\binom{N}{n}x_0^n\left(1-x_0\right)^{N-n}$$
$$\leq 2MN^{1/2}\sum_{n\in S_2}\left(\frac{n}{N}-x_0\right)^2\binom{N}{n}x_0^n\left(1-x_0\right)^{N-n}$$
$$\leq 2MN^{1/2}\frac{x_0\left(1-x_0\right)}{N}\leq\frac{M}{2\sqrt{N}}$$

elde edilir. Diğer toplam için $\varepsilon_N\left(x_0\right):=\max_{n\in S_1}\left|f\left(x_0\right)-f\left(n/N\right)\right|$ olsun. Bu durumda

$$\left|\sum_{n\in S_1}\left[f\left(\frac{n}{N}\right)-f\left(x_0\right)\right]\binom{N}{n}x_0^n\left(1-x_0\right)^{N-n}\right|\leq\varepsilon_N\left(x_0\right)\sum_{n\in S_1}\binom{N}{n}x_0^n\left(1-x_0\right)^{N-n}$$
$$\leq\varepsilon_N\left(x_0\right)\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}x_0^n\left(1-x_0\right)^{N-n}$$
$$=\varepsilon_N\left(x_0\right)$$

bulunur. Bu eşitsizlikler kullanılarak

$$\left|B_N\left(f,x_0\right)-f\left(x_0\right)\right|\leq\frac{M}{2\sqrt{N}}+\varepsilon_N\left(x_0\right)$$

eşitsizliği yazılır. f fonksiyonu $\left[0,1\right]$ aralığında düzgün sürekli olduğundan $N\to\infty$ iken $\varepsilon_N\left(x_0\right)\to 0$ yakınsaklığı düzgündür. Dolayısıyla $\left\{B_N\left(f,x\right)\right\}$ polinomlar dizisi f fonksiyonuna $\left[0,1\right]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır. □

Bohman-Korovkin Teoremi: Weierstrass teoreminin ispatı operatörler yardımıyla da verilebilir. Bernstein'in yukarıda verilen teoreminin bir genelleştirilmesi olan Bohman-Korovkin teoremi bunlardan biridir.

Bir $T:C\left[a,b\right]\to C\left[a,b\right]$ operatörü her bir pozitif $f\in C\left[a,b\right]$ fonksiyonunu bir pozitif Tf fonksiyonuna resmediyorsa bu operatöre *pozitif operatör* denir. Eğer bir $T:C\left[a,b\right]\to C\left[a,b\right]$ operatörü lineer ve pozitif ise süreklidir. Aşağıda verilen teorem 1952 yılında birbirinden bağımsız olarak Bohman ve Korovkin tarafından verilmiştir [37].

Teorem 3.6.7. $T_n : C[a,b] \to C[a,b]$ *lineer ve pozitif operatörlerin bir dizisi olsun.*

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2$$

olmak üzere her bir $i = 0,1,2$ *için* $\{T_n f_i\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisi* f_i *fonksiyonuna düzgün yakınsak ise her bir* $f \in C[a,b]$ *fonksiyonu için* $\{T_n f\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisi* f *fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.*

Açıktır ki, Bernstein operatörleri bu teoremin koşullarını sağlar. Dolayısıyla Weierstrass teoreminin bir ispatı daha elde edilmiş olur.

Stone-Weierstrass Teoremi: Uzayların cebirsel özelliklerinden de faydalanılarak Weierstrass teoreminin ispatı verilebilir.

Reel sayılar üzerinde tanımlı bir A vektör uzayı verilsin. A üzerinde tanımlı $(f,g) \to fg$, $(A \times A \to A)$, çarpma işlemi için

i. Her $f,g,h \in A$ için $(fg)h = f(gh)$,

ii. Her $f,g,h \in A$ için $(f+g)h = fh + gh$ ve $f(g+h) = fg + fh$,

iii. Her $\alpha,\ \beta$ skalerleri ve her $f,g \in A$ için $\alpha\beta(fg) = (\alpha f)(\beta g)$,

özellikleri sağlanıyorsa A 'ya $\mathbb{R}$ üzerinde bir *cebirdir* denir. Ayrıca

iv. Her $f,g \in A$ için $fg = gf$, (değişme özelliği),

özelliğini sağlıyorsa *değişmeli*,

v. Bir $e \in A$ var öyle ki her $f \in A$ için $ef = fe = f$ (birim eleman),

özelliğini sağlıyorsa *birim elemanlı cebir* adını alır [38]. A cebrinin bir B altkümesi de aynı işlemler altında bir cebir yani, B, A 'nın bir alt uzayı ve çarpma işlemi altında kapalı ise B 'ye A 'nın bir *alt cebridir* denir. Örneğin, $C[a,b]$ uzayı bir cebir, polinomlar uzayı ise bunun bir alt cebridir.

A, bir X kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların bir ailesi olsun. X 'den alınan birbirinden farklı her x, y elemanları için $f(x) \neq f(y)$ olacak şekilde bir $f \in A$ varsa *A, X 'in elemanlarını ayırır* denir. X 'den alınan her bir x

elemanı için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in A$ varsa A, X *'in elemanlarında sıfırlanmaz* denir [37].

Teorem 3.6.8. *X bir tıkız metrik uzay ve A, $C(X)$ 'in bir alt cebri olsun. Eğer*

i. *A, X 'in elemanlarını ayırır,*

ii. *A, X 'in elemanlarında sıfırlanmaz*

ise A, $C(X)$ 'de yoğundur [37].

Polinomlar uzayı $P(x) \equiv 1$ ve $P(x) \equiv x$ elamanlarını içerdiğinden i-ii koşulları sağlanır. Dolayısıyla, polinomlar uzayı $C[a,b]$ de yoğundur. Böylece Weierstrass teoreminin bir ispatı daha ortaya çıkmış olur.

3.6.3. Jackson Teoremleri

Yaklaşım kuramının önemli problemlerinden biri de yaklaşım hızının belirlenmesidir. Bu kısımda, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon verildiğinde bu fonksiyona trigonometrik veya cebirsel polinomlar ile yaklaşıldığında, yaklaşım hızı, fonksiyonun düzgünlüğünü ölçen süreklilik modülü cinsinden belirlenecektir.

Bir $f \in C^{2\pi}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun $\mathbb{T}_n$ $n-$mertebeli trigonometrik polinomlar uzayında en iyi yaklaşım sayısı

$$E_n^T(f) := \inf_{T \in \mathbb{T}_n} \max_{x \in [-\pi,\pi]} \left| f(x) - T(x) \right|$$

ile tanımlanır. D. Jackson, 1912 yılında, bu en iyi yaklaşım sayısının üstten uygun bir sınırını verilen fonksiyonun süreklilik modülü cinsinden elde etmiştir [4].

Teorem 3.6.9. *Eğer $f \in C^{2\pi}$ ise*

$$E_n^T(f) \leq 6\omega\left(f; 1/n; [-\pi,\pi]\right).$$

Bu teoremden faydalanılarak, kapalı aralıkta sürekli fonksiyonların derecesi $\leq n$ olan polinomlar uzayında en iyi yaklaşım sayısının süreklilik modülü cinsinden belirlenmesine dair bir teorem yazılabilir.

Teorem 3.6.10. *Eğer* $f \in C[-1,1]$ *ise*

$$E_n(f) \leq 6\omega\left(f; 1/n; [-1,1]\right).$$

İspat. $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$ ile tanımlı φ fonksiyonu açıktır ki $C^{2\pi}$ sınıfındandır.

$$\begin{aligned} \left|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\right| &= \left|f(\cos\alpha) - f(\cos\beta)\right| \\ &\leq \omega\left(f; \left|\cos\alpha - \cos\beta\right|; [-1,1]\right) \\ &\leq \omega\left(f; \left|\alpha - \beta\right|; [-1,1]\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği ve Teorem 3.17 kullanılırsa

$$E_n(f) = E_n^T(\varphi) \leq 6\omega\left(\varphi; 1/n; [-\pi,\pi]\right) \leq 6\omega\left(f; 1/n; [-1,1]\right)$$

elde edilir. □

3.6.4. Whitney Teoremleri

Bir önceki kısımda, verilen bir sürekli fonksiyonun derecesi $\leq n$ olan polinomlar uzayında en iyi yaklaşım sayısının üstten sınırının fonksiyonun süreklilik modülü cinsinden belirlenebildiği incelendi. Bu kısımda ise düzgünlük modülleri cinsinden sınırlar üzerinde durulacaktır. Bu kısmın aşağıda verilen ana teoremi 1957 yılında H. Whitney [6] tarafından verilmiştir ve literatürde *Whitney Teoremi* olarak bilinir.

Teorem 3.6.11. *Bir* $f \in C[a,b]$ *fonksiyonu verilsin. Bu durumda her bir* $k \in \mathbb{N}$ *için* $W_k := W(k) > 0$ *sabiti vardır öyle ki*

$$E_{k-1}(f) \leq W_k \omega_k\left(f; h; [a,b]\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

Whitney Teoreminin ispatı için gerekli olan bazı yardımcı sonuçlar verelim. Bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu verilsin. $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

ile tanımlı F fonksiyonu ve her $x_1, x_2 \in [a,b]$ için $t = x_1 + (x_2 - x_1)u$ değişken değişimi yapılırsa

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_0^1 f\big(x_1 + (x_2 - x_1)u\big)(x_2 - x_1)\,du$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^1 f\big(x_1 + (x_2 - x_1)u\big)\,du = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$$

eşitliği yazılır.

Lemma 3.6.12. $x \in [a,b]$, $k \in \mathbb{N}$, *ve* $m = \overline{0,k}$ *olsun ve* $\delta \neq 0$ *sayısı*

$$\big[x - m\delta, x + (k-m)\delta\big] \subset [a,b]$$

koşulunu sağlayacak şekilde verilsin. Bu durumda

$$\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k f(x - m\delta t)\,dt = (-1)^{k-m}\binom{k}{m} f(x) + \\ + \frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq m}}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{F\big(x + (j-m)\delta\big) - F(x)}{j-m} \tag{3.27}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Sonlu farkların tanımından

$$\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k f(x - mt\delta)\,dt - (-1)^{k-m}\binom{k}{m} f(x) =$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(x - mt\delta + jt\delta)dt - (-1)^{k-m}\binom{k}{m} f(x)$$

$$= \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq m}}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\int_0^1 f\big(x + (j-m)t\delta\big)\,dt$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte $u = x + (j-m)t$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k f(x - mt\delta)\,dt - (-1)^{k-m}\binom{k}{m} f(x) = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{(j-m)\delta}\int_x^{x+(j-m)\delta} f(u)\,du$$

$$= \sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{(j-m)\delta}\left\{F\big(x+(j-m)\delta\big) - F(x)\right\}$$

$$= -\frac{1}{\delta}F(x)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{(j-m)} + \frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{F\big(x+(j-m)\delta\big)}{(j-m)}$$

elde edilir ki bu lemmanın ispatını tamamlar [28]. □

Birinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için Whitney teoremine benzer sonuçlar elde edilebilir. Whitney teoreminin ispatında kullanılacak olan bu lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.6.13. *$x_0 \in [a,b]$, $h > 0$ olmak üzere her bir $j = \overline{0,k}$ için $x_j \in [a,b]$ olacak şekilde $x_j = x_0 + jh$ olsun. Her bir $F \in C^1[a,b]$ fonksiyonu için*

$$\left|F(x) - L(x;F;x_0,x_1,\ldots x_k)\right| \le \frac{\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)\right|}{k!\,h^k}\,\omega_k\left(F';h;[a,b]\right) \qquad (3.28)$$

eşitsizliği her bir $x \in [a,b]$ için sağlanır.

İspat.

$$q(x) := \frac{1}{k!\,h^k}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)$$

olsun. Bu durumda, temel Lagrange polinomları

$$\ell_j(x) = \frac{q(x)}{(x-x_j)\,q'(x_j)} = (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{q(x)}{x-x_j}$$

formunda yazılabilir. Buradan,

$$F(x)-L(x;F;x_0,x_1,...x_k)=\sum_{j=0}^{k}\left(F(x)-F(x_j)\right)\ell_j(x)$$
$$=q(x)\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{F(x)-F(x_j)}{x-x_j}$$

elde edilir. $f(x)=F'(x)$ yazılırsa

$$\int_0^1 f\left(x+\left(x_j-x\right)t\right)dt=\frac{F(x)-F(x_j)}{x-x_j}$$

olur. Bu eşitlikten yararlanarak

$$\left|F(x)-L(x;F;x_0,x_1,...x_k)\right|=\left|q(x)\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\int_0^1 f\left(x+\left(x_j-x\right)t\right)dt\right|$$
$$=\left|q(x)\right|\left|\int_0^1\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f\left(x+\left(x_0-x\right)t+jht\right)dt\right|$$
$$\leq\left|q(x)\right|\int_0^1\left|\Delta_{ht}^{k}f\left(x+\left(x_0-x\right)t\right)\right|dt$$
$$\leq\left|q(x)\right|\omega_k\left(f;h;[a,b]\right),$$

elde edilir ki buradan ispat tamamlanır [28]. □

Teorem 3.6.14. *Her bir* $F\in C^1[a,b]$ *fonksiyonu için*

$$E_k(F)\leq h\omega_k\left(F';h;[a,b]\right) \tag{3.29}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada, $h=(b-a)/k$ *dır.*

İspat.

$$E_k(F)=\inf_{p\in P_k}\left\|F-p\right\|\leq\left\|F-L(\,\cdot\,;F;x_0,x_1,...x_k)\right\|$$

olduğundan Lemma 3.21 den

$$\left\|F-L(\,\cdot\,;F;x_0,x_1,...x_k)\right\|=\max_{x\in[a,b]}\left|F(x)-L(x;F;x_0,x_1,...x_k)\right|$$
$$\leq\max_{x\in[a,b]}\left|q(x)\right|\omega_k\left(F';h;[a,b]\right)$$

elde edilir. Bir $j\in\{0,1,2,...,k-1\}$ için $x\in\left[x_j,x_{j+1}\right]$ olsun. $h=(b-a)/k$ olduğundan $x_0=a$ ve $x_k=b$ dir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
|q(x)| &= \frac{1}{k!h^k}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_j)(x_{j+1}-x)\dots(x_k-x)\\
&= \frac{h}{k!}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left(\frac{x-x_0}{h}-j\right)\left((j+1)-\frac{x-x_0}{h}\right)\dots\left(k-\frac{x-x_0}{h}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $j \le \dfrac{x-x_0}{h} \le j+1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
|q(x)| &\le \frac{h}{k!}(j+1)(j)\dots(1)(1)\dots(k-j)\\
&\le h\frac{1}{1}\frac{2}{2}\dots\frac{j+1}{j+1}\frac{2}{j+2}\frac{3}{j+3}\dots\frac{k-j}{k}\\
&\le h
\end{aligned}
$$

bulunur ki bu da istenen sonuçtur [28]. □

Yukarıda verilen yardımcı sonuçlardan faydalanarak Whitney Teoremi adı verilen Teorem 3.6.11'in ispatını verelim.

Teorem 3.6.11'in İspatı. $x_j = x_0 + jh$, $j=\overline{0,k}$, olsun. $h=(b-a)/k$ olduğundan $x_0 = a$ ve $x_k = b$ dir. $F(x)=\int_a^x f(u)\,du$ ile tanımlı F fonksiyonu için

$$
G(x) = F(x) - L(x;F;x_0,x_1,\dots,x_k)
$$

fonksiyonunu ele alalım. $g(x) := G'(x)$ ve simgelenimde kolaylık sağlaması amacıyla $\omega_k(t) := \omega_k(t;f;[a,b])$ olsun. Keyfi bir $x\in[a,b]$ elemanı için (3.27) eşitliğinin $m=0$ ve F fonksiyonun yerinde G fonksiyonunun olduğu durumunda $x+k\delta\in[a,b]$ koşulunu sağlayan bir δ sayısı alınırsa,

$$
\int_0^1 \Delta_{t\delta}^k g(x)\,dt = (-1)^k g(x) + \frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{G(x+j\delta)-G(x)}{j}
$$

eşitliği bulunur. Buradan,

$$
\begin{aligned}
|g(x)| &\le \int_0^1 \left|\Delta_{t\delta}^k g(x)\right| dt + \frac{2}{|\delta|}\|G\|\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k}\binom{k}{j}\frac{1}{j}\\
&\le \omega_k(|\delta|) + \frac{2^{k+1}}{|\delta|}\|G\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Lemma 3.6.12 ve düzgünlük modüllerinin ix. özelliğinden $\|G\| \leq h\omega_k(h)$ olduğu bulunabilir. Buradan δ 'nın $h/2 \leq |\delta| \leq h$ koşulunu sağlayan herhangi bir seçimi ile

$$E_{k-1}(f) \leq \|g\| \leq \omega_k(|\delta|) + \frac{2^{k+1}}{|\delta|} h\omega_k(h) \leq \left(1 + \frac{2^{k+1}h}{|\delta|}\right)\omega_k(h)$$

elde edilir ki bu Whitney Teoreminin ispatını tamamlar [28]. □

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r-inci$ mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için Whitney eşitsizliğinde yer alan Whitney sabitleri için üst sınırlar elde edilecektir. Birinci kısımda, bazı yardımcı sonuçların yanında Zhuk ve Natanson'a ait olan bir sonucun genelleştirilmesi verilecektir. İkinci kısımda, ikinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için Whitney sabitlerine bir üst sınır elde edilirken son kısımda bu sonucun bir genelleştirilmesi verilecektir.

4.1. YARDIMCI SONUÇLAR

Bu kısımda bölünmüş farklar hakkında, temel sonuçlara yardımcı bazı özellikler ispatlanacaktır. Ayrıca, Zhuk ve Natanson'a ait olan aşağıdaki sonucun bir genelleştirilmesi bu bölümün sonunda yer alacaktır.

Bir $f \in AC[a,b]$ fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}$ verilsin. $h=(b-a)/n$ olmak üzere her bir $j=0,1,...,n$ için $x_j = a + jh$ olsun. f fonksiyonunu $x_0, x_1, \cdots, x_n$ noktalarında interpole eden ve derecesi $\leq n$ olan Lagrange interpolasyon polinomu $L(x; f; x_0, x_1, ..., x_n)$ ile gösterilmek üzere

$$f(x) - L(x; f; x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{h^n n!} \int_0^1 \Delta_{uh}^k f'(au + x(1-u))\, du \qquad (4.1)$$

eşitliği doğrudur [23].

Lemma 4.1.1. *$R=[a,b]\times[c,d]$ bir dikdörtgensel bölge ve $h \in C(R)$ olsun.*

$$H(x) := \int_c^d h(x,y)\, dy$$

olmak üzere $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ için

$$[x_0, x_1, \cdots x_n; H] = \int_c^d [x_0, x_1, \cdots x_n; h(\cdot, y)]\, dy$$

eşitliği doğrudur.

İspat. (3.14) den

$$\begin{aligned}\left[x_0,x_1,\cdots,x_n;H\right]&=\sum_{i=0}^{n}\frac{H(x_i)}{\wp'(x_i)}\\&=\int_c^d\sum\nolimits_{i=0}^{n}\frac{h(x_i,y)}{\wp'(x_i)}dy\\&=\int_c^d\left[x_0,x_1,\cdots x_n;h(\cdot,y)\right]dy,\end{aligned}$$

elde edilir ki bu istenen eşitliktir. □

$n\in\mathbb{N}_0$ ve $\overline{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in[a,b]^{n+1}$ olsun. $\{y_j\}_{j=0}^{k}$ noktalar kümesi $\overline{x}$'in farklı bileşenlerinin kümesi olsun. $\{y_j\}_{j=0}^{k}$ kümesine $\overline{x}$ in *düğüm noktaları* denir. İşlemlerin sadeliği için $\overline{x}$'in düğüm noktalarının artan sırada yani, $y_0<y_1<\cdots<y_k$ olduğunu varsayalım. Her bir y_j, $j=\overline{0,k}$, noktasının katlılığı m_j ile gösterilsin. Bu durumda, açıktır ki, $\sum_{j=0}^{k}m_j=n+1$ dir.

$n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$${}^{n}x:=\overbrace{x,x,\cdots,x}^{n\text{ tane}}$$

gösterimini tanımlayalım. Bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonu verilsin öyle ki her bir $j=\overline{0,k}$ için y_j noktasının bir komşuluğunda bu fonksiyon m_j-1 mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda, bölünmüş farkların simetri özelliği (3.3.(i)) kullanılarak

$$\left[\overline{x};f\right]:=\left[x_0,x_1,\cdots,x_n;f\right]=\left[{}^{m_0}y_0,{}^{m_1}y_1,\cdots,{}^{m_k}y_k;f\right]$$

eşitliği yazılabilir.

Bu gösterimler ışığında genelleştirilmiş bölünmüş farklar farklı bir gösterimi elde edilir:

Önerme 4.1.2. *$m_0\in\mathbb{N}$, $p_0=m_0-1$ ve her bir $j=\overline{1,n}$ için $m_j=1$ olsun. Bu durumda,*

$$\left[\overline{x};f\right]=[{}^{m_0}x_0,x_1,\cdots,x_n;f]=\frac{1}{p_0\,!}\frac{\partial^{p_0}}{\partial x_0^{p_0}}\left[x_0,x_1,...,x_n;f\right], \tag{4.2}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $m_0=1$ için eşitlik açıktır. $m_0=2,...,s,\ s\geq 2$, için doğru olsun, yani,

$$[{}^{s}x_0,x_1,\cdots,x_n;f]=\frac{1}{(s-1)!}\frac{\partial^{s-1}}{\partial x_0^{s-1}}\left[x_0,x_1,...,x_n;f\right].$$

Şimdi $m_0=s+1$ için doğru olduğunu gösterelim. (3.3.(iv)), (3.14) özellikleri ve L'Hopital kuralından

$$\begin{aligned}
[{}^{s+1}x_0,x_1,\cdots,x_n;f] &= \lim_{h\to 0}\left[x_0+h,{}^{s}x_0,x_1,...,x_n;f\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x_0+h,{}^{s-1}x_0,x_1,...,x_n;f\right]-\left[{}^{s}x_0,x_1,...,x_n;f\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x_0+h,x_1,...,x_n;f\right]-\sum_{p=0}^{s-1}\frac{h^p}{p\,!}\frac{\partial^p}{\partial x_0^p}\left[x_0,x_1,...,x_n;f\right]}{h^s}\\
&= \frac{1}{s\,!}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial^{s-1}}{\partial x_0^{s-1}}\left[x_0+h,x_1,...,x_n;f\right]-\frac{\partial^{s-1}}{\partial x_0^{s-1}}\left[x_0,x_1,...,x_n;f\right]}{h}\\
&= \frac{1}{s\,!}\frac{\partial^{s}}{\partial x_0^{s}}\left[x_0,x_1,...,x_n;f\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu (4.2) eşitliğini ispatlar. □

Yukarıdaki önermeden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.3. *$\overline{x}$ 'in tüm bileşenleri aynı yani, her bir $j=\overline{0,n}$ için $x_j=x$ ise*

$$\left[\overline{x};f\right]=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Önerme 4.1.2 den

$$\left[\overline{x};f\right]=[{}^{n+1}x;f]=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[x;f\right]=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x),$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 4.1.4. *Her bir* $j=\overline{1,n}$ *için* $p_j = m_j - 1$ *olsun. Bu durumda,*

$$\left[\overline{x};f\right]=\left(\prod_{j=0}^{k}\frac{1}{p_j!}\right)\frac{\partial^{n-k}}{\partial y_0^{p_0}\partial y_1^{p_1}...\partial y_k^{p_k}}[y_0,y_1,...,y_k;f]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Önerme 4.1.2 den

$$\begin{aligned}\left[\overline{x};f\right] &= [{}^{m_0}y_0, {}^{m_1}y_1, \cdots, {}^{m_k}y_k; f] \\ &= \frac{1}{p_0!}\frac{\partial^{p_0}}{\partial y_0^{p_0}}\left[y_0, {}^{m_1}y_1, \cdots, {}^{m_k}y_k; f\right] \\ &= \frac{1}{p_0!}\frac{\partial^{p_0}}{\partial y_0^{p_0}}\left(\frac{1}{p_1!}\frac{\partial^{p_1}}{\partial y_1^{p_1}}\left[y_0, y_1, {}^{m_2}y_2 \cdots, {}^{m_k}y_k; f\right]\right) \\ &\vdots \\ &= \left(\prod_{j=0}^{k}\frac{1}{p_j!}\right)\frac{\partial^{p_0+p_1+\cdots+p_k}}{\partial y_0^{p_0}\partial y_1^{p_1}...\partial y_k^{p_k}}[y_0,y_1,...,y_k;f]\end{aligned}$$

elde edilir ki bu istenen sonuçtur. $\square$

Lemma 4.1.5. $r\in\mathbb{N}_0$, $n\in\mathbb{N}$, $r\le n$ *ve her bir* $i=\overline{0,n}$ *için* $x_i\in[a,b]$ *olmak üzere keyfi bir* $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ *sonlu dizisi verilsin. Herhangi bir* $f\in AC^{r-1}[a,b]$ *fonksiyonu için*

$$[x_0,x_1,...,x_n;f]=[x_r,x_{r+1},...,x_n;f_r], \tag{4.3}$$

eşitliği doğrudur. Burada $f_0(x)=f(x)$,

$$f_1(x):=\int_0^1 f'\left(x_0+(x-x_0)t\right)dt\,,$$

ve $r>1$ *için*

$$f_r(x):=\int_0^1\int_0^{t_1}...\int_0^{t_{r-1}} f^{(r)}\left(xt_r+(t_{r-1}-t_r)x_{r-1}+...+(t_1-t_2)x_1+(1-t_1)x_0\right)dt_r...dt_2dt_1.$$

İspat. r üzerinden tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $r=0$ için (4.3) eşitliği açıktır. Varsayalım ki (4.3) eşitliği $r-1$ için doğru, yani,

$$\left[x_0,x_1,...,x_n;f\right]=\left[x_{r-1},x_r,...,x_n;f_{r-1}\right] \tag{4.4}$$

olsun.

$$f_r\left(x\right)=\int_0^1\int_0^{t_1}...\int_0^{t_{r-1}} f^{(r)}\left(xt_r+\left(t_{r-1}-t_r\right)x_{r-1}+...+\left(t_1-t_2\right)x_1+\left(1-t_1\right)x_0\right)dt_r...dt_2dt_1$$

ifadesindeki en içteki integral için

$$u=xt_r+\left(t_{r-1}-t_r\right)x_{r-1}+...+\left(t_1-t_2\right)x_1+\left(1-t_1\right)x_0$$

değişken değişimi yapılır, ardından integral alınırsa

$$\begin{aligned}f_r\left(x\right)&=\frac{1}{x-x_{r-1}}\int_0^1\int_0^{t_1}...\int_0^{t_{r-2}} f^{(r-1)}\left(xt_{r-1}+\left(t_{r-2}-t_{r-1}\right)x_{r-2}+...+\left(t_1-t_2\right)x_1+\left(1-t_1\right)x_0\right)-\\&-f^{(r-1)}\left(x_{r-1}t_{r-1}+\left(t_{r-2}-t_{r-1}\right)x_{r-2}+...+\left(t_1-t_2\right)x_1+\left(1-t_1\right)x_0\right)dt_{r-1}\cdots dt_2dt_1\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$f_{r-1}\left(x\right)=\left(x-x_{r-1}\right)f_r\left(x\right)+f_{r-1}\left(x_{r-1}\right)$$

bulunur. Lemma 3.3.1 ve (4.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}\left[x_0,x_1,\cdots,x_n;f\right]&=\left[x_{r-1},x_r,\cdots,x_n;f_{r-1}\right]\\&=\left[x_r,x_{r+1},\cdots,x_n;f_r\right]+\left(x_{r-1}-c\right)\left[x_{r-1},x_r,\cdots,x_n;f_r\right]\\&=\left[x_r,x_{r+1},\cdots,x_n;f_r\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (4.3) eşitliğidir. □

Lemma 4.1.5 deki benzer tartışmalar yapılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 4.1.6. *$r_0\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $r_0\le n$ ve $a\le x_0\le x_1\le\cdots\le x_n\le b$ noktaları verilsin, öyle ki en çok r_0+1 noktası çakışık olsun. Bu durumda her bir $f\in AC^{r_0-1}\left[a,b\right]$ fonksiyonu ve her bir $r=1,...,r_0$ için* (4.3) *eşitliği doğrudur.*

Bir önceki lemmanın yardımıyla elde edilen aşağıdaki sonuç, Zhuk ve Natanson'a ait olan (4.1) eşitliğinin bir genelleştirilmesidir.

Lemma 4.1.7. *$r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ ve her bir $i = \overline{1,n}$ için $x_i \in [a,b]$ olmak üzere bir $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ sonlu dizisi verilsin, öyle ki $j = r, r+1, ..., n$ ve $h = (b-a)/(n-r)$ için $x_j = x_r + h(j-r)$ olsun. Eğer $f \in AC^{r-1}[a,b]$ ise*

$$f(x) - L_{n-1}(x; f; x_1, ..., x_n) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)}{h^{n-r}(n-r)!} \int_0^1 \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_{r-1}} \Delta_{ht_r}^{n-r}(g, x_r)\, dt_r ... dt_2 dt_1$$

burada

$$g(u) = f^{(r)}\left(ut_r + (t_{r-1} - t_r)x_{r-1} + ... + (t_1 - t_2)x_1 + (1 - t_1)x\right).$$

İspat. f fonksiyonunu $x_1, x_2, \cdots, x_n$ noktalarında interpole eden ve derecesi $\le n-1$ olan Hermite-Lagrange interpolasyon polinomunu L_{n-1} ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
f(x_0) - L_{n-1}(x_0) &= \prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)[x_0, x_1, \cdots, x_n; f] \\
&= \prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)[x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n; f_r] \\
&= \prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j) \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{r-1}} [x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n; g]\, dt_r \cdots dt_2 dt_1 \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)}{h^{n-r}(n-r)!} \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{r-1}} \Delta_{ht_r}^{n-r}(g; x_r)\, dt_r \cdots dt_2 dt_1
\end{aligned}$$

elde edilir, burada f_r Lemma 4.1.5 de tanımlanan fonksiyon, g ise

$$g(x) = f^{(r)}\left(xt_r + (t_{r-1} - t_r)x_{r-1} + ... + (t_1 - t_2)x_1 + (1 - t_1)x_0\right)$$

ile tanımlı alınan fonksiyondur. Yukarıdaki eşitliklerden birincisi (3.12), ikincisi (4.3), üçüncüsü Lemma 4.1.1 ve sonuncusu (3.20) den görülür. Son olarak, yukarıdaki işlemlerde x_0 yerine x alınırsa lemmanın ispatı tamamlanmış olur. $\square$

4.2. İKİNCİ TÜREVİ SÜREKLİ OLAN FONKSİYONLAR İÇİN WHITNEY SABİTLERİ

Bu kısımda, $\left[a,b\right]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve ikinci türevi sürekli olan bir f fonksiyonu verildiğinde, bu fonksiyona derecesi $\leq k+1$ olan cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında, yaklaşım hızını fonksiyonun $k-inci$ düzgünlük fonksiyonuna bağlı veren eşitsizlik üzerinde durulacaktır. Bu eşitsizlikten elde edilen Whitney sabiti için uygun sınırlar elde edilmeye çalışılacaktır. Yukarıda bahsedilen teorem aşağıdaki şekilde yazılır.

Whitney Eşitsizliği: *Herhangi bir* $f \in C^r\left[a,b\right]$ *fonksiyonu için*

$$E_{k+r-1}\left(f,\left[a,b\right]\right) \leq c\left(k,r\right)\left(\frac{b-a}{k}\right)^r \omega_k\left(f^{(r)},\frac{b-a}{k},\left[a,b\right]\right)$$

olacak şekilde sadece k *ve* r *ye bağlı* $c\left(k,r\right)$ *sabitleri vardır*[33].

Whitney eşitsizliğini sağlayan en küçük $c\left(k,r\right)$ sayısına *Whitney sabiti* denir ve $W\left(k,r\right)$ ile gösterilir:

$$W\left(k,r\right) := \sup_{f\in C^r[a,b]} \frac{\inf\limits_{P\in\mathbb{P}_{k+r-1}} \left\|f-P\right\|_{C[a,b]}}{\left(\frac{b-a}{k}\right)^r \omega_k\left(f^{(r)},\frac{b-a}{k},\left[a,b\right]\right)} \tag{4.5}$$

Tanımdan da kolayca görüldüğü gibi, eğer f fonksiyonu derecesi $\leq k+r-1$ olan bir polinom ise $W\left(k,r\right)$ sabiti sıfırdır. Dolayısıyla, bu çalışma boyunca f fonksiyonu verilen k ve r sayıları için $\mathbb{P}_{k+r-1}$ uzayı dışından alınacaktır.

Genelliğe aykırı durum yaratmayacağından, bundan sonra $\left[a,b\right]=[-1,1]$ ve $j=0,1,...,k$ $\left(k\in\mathbb{N}\right)$ için $x_j=-1+2j/k$ alınacaktır. Gösterimlerin sadeliği için $\|\cdot\|_{C[-1,1]}$ yerine $\|\cdot\|$ ve $\omega_k\left(\cdot,2/k,\left[-1,1\right]\right)$ yerine $\omega_k\left(\cdot\right)$ kullanılacaktır. Ayrıca

$$\Pi_n(x) := (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

olsun.

Aşağıdaki teorem bir $f \in C^2[-1,1]$ fonksiyonuna derecesi $\leq k+1$ olan polinomlar ile noktasal yaklaşıma dair bir sonuçtur.

Teorem 4.2.1. *Herhangi bir* $f \in C^2[-1,1]$ *fonksiyonu için bir* $P_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$ *polinomu vardır öyle ki her bir* $x \in [-1,1]$ *için*

$$\left|f(x) - P_{k+1}(x)\right| \leq \frac{k^k}{2^{k+1}k!}\left(\left(1-x^2\right)\Pi_k(x) + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\omega_k(f''). \tag{4.6}$$

İspat. L_{k+2} ile, verilen f fonksiyonunun $x_0, x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_k$ noktalarındaki Hermite-Lagrange interpolasyon polinomu gösterilsin. Bölünmüş farkların tanımından, L_{k+2} polinomunda x^{k+2} li terimin katsayısı A_{k+2} ile gösterilirse

$$A_{k+2} = \left[x_0, x_0, x_1, x_2, ..., x_{k+2}, x_{k-1}, x_k, x_k; f\right] \tag{4.7}$$

dır. T_{k+2}, $k+2-inci$ Chebyshev polinomu, yani,

$$T_{k+2}(x) = \cos\left((k+2)\arccos x\right), \qquad x \in [-1,1],$$

olsun. Bu durumda

$$P_{k+1}(x) := L_{k+2}(x) - \frac{A_{k+2}}{2^{k+1}}T_{k+2}(x)$$

olarak tanımlanan P_{k+1} polinomunun, açıktır ki, derecesi en çok $k+1$ dir. Her bir $x \in [-1,1]$ için $\left|T_{k+2}(x)\right| \leq 1$ olduğundan

$$\left|f(x) - P_{k+1}(x)\right| \leq \left|f(x) - L_{k+2}(x)\right| + \frac{\left|A_{k+2}\right|}{2^{k+1}} \tag{4.8}$$

elde edilir. İlk olarak $\left|A_{k+2}\right|/2^{k+1}$ için bir üst sınır bulalım. (4.7) ifadesine Lemma 4.1.5, (3.3.(i)) özelliği de dikkate alınarak, uygulanırsa

$$\begin{aligned} A_{k+2} &= \left[x_0, x_k, x_0, x_1, \cdots, x_k; f\right] \\ &= \left[x_0, x_1, \cdots, x_k; h\right] \end{aligned}$$

elde edilir, burada $h(x) := \int_0^1 \int_0^{t_1} f''\left(-1+2t_1+(x-1)t_2\right)dt_2 dt_1$. Lemma 4.1.1 den

$$A_{k+2}=\int_0^1\int_0^{t_1}\left[x_0,x_1,...,x_k;g_0\right]dt_2dt_1 \tag{4.9}$$

bulunur, burada g_0,

$$g_0(x)=f''\left(-1+2t_1+(x-1)t_2\right)$$

şeklinde tanımlı fonksiyondur.

Bölünmüş farklar ile sonlu farklar arasındaki (3.20) bağıntısı, ardından düzgünlük modülünün monotonluk özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|\left[x_0,x_1,...,x_k;g_0\right]\right\| &=\left|\frac{k^k}{2^k k!}\Delta^k_{2/k}g_0(x_0)\right| \\ &\le\frac{k^k}{2^k k!}\omega_k(g_0) \\ &=\frac{k^k}{2^k k!}\omega_k\left(\frac{2}{k}t_2,f'',[-1,1]\right) \\ &\le\frac{k^k}{2^k k!}\omega_k(f''),\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, (4.9) ifadesine uygulanırsa

$$\frac{|A_{k+2}|}{2^{k+1}}\le\frac{k^k}{2^{2k+1}k!}\int_0^1\int_0^{t_1}\omega_k(f'')dt_2dt_1=\frac{k^k}{4^{k+1}k!}\omega_k(f'') \tag{4.11}$$

bulunur.

Şimdi (4.8) eşitsizliğinin sağ yanındaki birinci ifade için bir üst sınır elde edelim. (3.12) ve (3.13) özellikleri ve Lemma 4.4 ten

$$\begin{aligned}f(x)-L_{k+2}(x)&=(x^2-1)\Pi_k(x)\left[x_0,x_0,x_1,...,x_{k-1},x_k,x_k,x;f\right] \\ &=\frac{(x^2-1)\Pi_k(x)}{2}\left(\left[x_0,\cdots,x_{k-1},x_k,x_k,x;f\right]-\left[x_0,x_0,x_1,\cdots,x_k,x;f\right]\right) \\ &=\frac{(x^2-1)\Pi_k(x)}{2}\left(\int_0^1\int_0^{t_1}\left[x_0,x_1,...,x_k;g_1\right]dt_2dt_1-\int_0^1\int_0^{t_1}\left[x_0,x_1,...,x_k;g_{-1}\right]dt_2dt_1\right)\end{aligned}$$

elde edilir, burada $g_l(u)=f''\left(l+(x-l)t_1+(u-x)t_2\right)$, $l=-1,1$. (4.10) da yapılan işlemlerin aynısı uygulanırsa her bir $l=-1,1$ için

$$\left\|\left[x_0,x_1,...,x_k;g_l\right]\right\|\le\frac{k^k}{2^k k!}\omega_k(f''),$$

bulunur. Buradan

$$\left|f(x)-L_{k+2}(x)\right| \le \frac{\left(1-x^2\right)\left|\Pi_k(x)\right|}{2}\int_0^1\int_0^{t_1}\left(\left|[x_0,x_1,...,x_k;g_1]\right|+\left|[x_0,x_1,...,x_k;g_{-1}]\right|\right)dt_2dt_1$$

$$\le \frac{k^k}{2^k k!}\left(1-x^2\right)\left|\Pi_k(x)\right|\int_0^1\int_0^{t_1}\omega_k(f'')\,dt_2dt_1$$

$$= \frac{k^k}{2^{k+1}k!}\left(1-x^2\right)\left|\Pi_k(x)\right|\omega_k(f'')$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ile (4.11) eşitsizliği taraf tarafa toplanırsa (4.8) den

$$\left|f(x)-P_{k+1}(x)\right| \le \left|f(x)-L_{k+2}(x)\right|+\frac{\left|A_{k+2}\right|}{2^{k+1}}$$

$$\le \frac{k^k}{2^{k+1}k!}\left(1-x^2\right)\left|\Pi_k(x)\right|\omega_k(f'')+\frac{k^k}{4^{k+1}k!}\omega_k(f'')$$

$$= \frac{k^k}{2^{k+1}k!}\left(\left(1-x^2\right)\Pi_k(x)+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\omega_k(f'')$$

bulunur ki istenen (4.6) eşitsizliğidir. □

Teorem 4.2.2. *Her bir* $k\in\mathbb{N}$ *için*

$$W(k,2) \le \left(\frac{2}{e\sigma_{k+1}}\right)^2$$

eşitsizliği doğrudur, burada $\sigma_{k+1}=1+1/2+\cdots+1/(k+1)$ *dir.*

İspat. Whitney sabitlerinin (4.5) ile verilen tanımı kullanıldığında herhangi bir $P\in\mathbb{P}_{k+1}$ için

$$W(k,2) \le \sup_{f\in C^2[-1,1]}\frac{\|f-P\|}{\left(\frac{2}{k}\right)^2\omega_k\left(f^{(r)}\right)}$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Dolayısıyla, teoremin ispatı için (4.6) eşitsizliğini de göz önünde bulundurarak

$$\frac{k^k}{2^{k+1}k!}\left(1-x^2\right)\left|\Pi_k(x)\right|+\frac{k^k}{4^{k+1}k!} \le \left(\frac{4}{ek\sigma_{k+1}}\right)^2, \quad x\in[-1,1], \tag{4.12}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

İlk olarak

$$\frac{k^k\left|\left(x^2-1\right)\Pi_k\left(x\right)\right|}{2^{k+1}k!}\leq\left(\frac{4}{e\left(k\sigma_k+1\right)}\right)^2 \tag{4.13}$$

eşitsizliğini ispatlayalım. $k\geq 3$ için $h=2/k$ olsun. Bu durumda, $-1+h\leq y\leq -h/2$ için

$$K\left(y,h\right):=\left|\frac{\left(\left(y+h\right)^2-1\right)\Pi_k\left(y+h\right)}{\left(y^2-1\right)\Pi_k\left(y\right)}\right|=\frac{\left(y+h+1\right)\left(1-\left(y+h\right)^2\right)}{\left(1-y\right)\left(1-y^2\right)}\leq 1 \tag{4.14}$$

dir. Gerçekten,

$$1-K\left(y,h\right)=\frac{\left(2y+h\right)\left(y^2+hy+h^2+h-1\right)}{\left(1-y\right)\left(1-y^2\right)}$$

yazılırsa, $-1+h\leq y\leq -h/2$ ve $k\geq 3$ iken $\left(1-y\right)\left(1-y^2\right)\geq 0$, $\left(2y+h\right)\leq 0$ ve

$$y^2+hy+h^2+h-1\leq\frac{3h^2}{2}-h\leq 0$$

olduğundan $1-K\left(y,h\right)\geq 0$, bir başka değişle, (4.14) eşitsizliği verilen koşullarda doğrudur. Dolayısıyla,

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\left(x^2-1\right)\Pi_k\left(x\right)\right|=\max_{x\in[-1,-1+2h]}\left|\left(x^2-1\right)\Pi_k\left(x\right)\right|.$$

eşitliği sağlanır. Buradan her $x\in\left[-1,-1+2/k\right]$ için $u=k\left(x+1\right)/2$ değişken değişimi yapılırsa $0<u<1$ ve

$$\begin{aligned}\frac{k^k}{2^{k+1}k!}\left|\left(x^2-1\right)\Pi_k\left(x\right)\right|&=\frac{4u^2\left(\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{k-1}\right)\left(1-\frac{u}{k}\right)\right)^2}{k^2}\\&\leq\frac{4u^2\left[1-\frac{\left(\sigma_k+1/k\right)u}{k+1}\right]^{k+1}}{k^2}\\&\leq\frac{4u^2e^{-\left(\sigma_k+1/k\right)u}}{k^2}\\&\leq\left(\frac{4}{\left(k\sigma_k+1\right)e}\right)^2.\end{aligned}$$

İkinci satırdaki eşitsizlik, geometrik ortalama ile aritmetik ortalama arasındaki; her bir $i=\overline{1,n}$ için $x_i\geq 0$ için

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

bağıntısından elde edilirken, üçüncü satırda, $(1-a/n)^n \leq \exp(-a)$, $0 \leq a \leq 1$, eşitsizliği kullanılmıştır [39]. Diğer taraftan yukarıdaki benzer tartışmalar $-1+h < x < -1+2h$ durumu için de yapılırsa (4.13) eşitsizliği elde edilir. Stirling formülünden elde edilen

$$k! \geq k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}$$

eşitsizlik ve (4.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned} W(k,2) &\leq \frac{k^k}{2^{k+1}k!}\left(1-x^2\right)\left|\Pi(x)\right| + \frac{k^k}{4^{k+1}k!} \\ &\leq \left(\frac{2}{e\left(\sigma_k + 1/k\right)}\right)^2 + \frac{\sqrt{k}e^k}{4^{k+2}\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\left(\frac{2}{e\left(\sigma_k + 1/k\right)}\right)^2 + \frac{\sqrt{k}e^k}{4^{k+2}\sqrt{2\pi}} \leq \left(\frac{2}{e\sigma_{k+1}}\right)^2$$

elde edilir ki bu (4.12) eşitsizliğini, dolayısıyla teoremin ispatını verir. □

Ek Bilgi 1. Teorem 4.2.2 nin ispatında kullanılan metot $r=3$ ve $r=4$ durumlarında Teorem 4.2.1 de kullanılan düğüm noktalarına, sırasıyla, birer ve ikişer x_0 ile x_k noktaları eklenip uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilebilir:

$$W(k,r) \leq \left(\frac{r}{e\sigma_{k+r-1}}\right)^r, \qquad r = 3,4, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4.3. KEYFİ MERTEBEDEN TÜREVİ SÜREKLİ OLAN FONKSİYONLAR İÇİN WHITNEY SABİTLERİ

Bu kısımda, $\left[a,b\right]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve $r-inci$ türevi sürekli olan bir f fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyona derecesi $\leq k+r-1$ olan cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında, yaklaşım hızını fonksiyonun $r-inci$ türevinin $k-inci$ düzgünlük fonksiyonuna bağlı veren eşitsizlik üzerinde durulacaktır.

Bir önceki bölümde kullanılan simgelenimlere ek olarak aşağıdakileri verelim. $[\![a]\!]$, $a\in\mathbb{R}^{+}$ sayısının tamsayı kısmını göstermek üzere $\ell:=[\![(r+1)/2]\!]$ ve

$$x_j=\begin{cases}\left(-1\right)^{s}, & j=k+s,\ s=1,2,\cdots,2\ell\\ -1+2j/k, & j=0,1,\cdots,k\end{cases}$$

olsun.

Teorem 4.3.1. $k,r\in\mathbb{N}$ olsun. *Herhangi bir* $f\in C^{r}\left[-1,1\right]$ *fonksiyonu için bir* $P_{k+r-1}\in\mathbb{P}_{k+r-1}$ *polinomu vardır öyle ki her bir* $x\in\left[-1,1\right]$ *için*

$$\left|f\left(x\right)-P_{k+r-1}\left(x\right)\right|\leq\frac{k^{k}}{2^{k}k!r!}\left(\left(1-x^{2}\right)^{\ell}\Pi_{k}\left(x\right)+\frac{3}{2^{k+r}}\right)\omega_{k}\left(f^{(r)}\right). \tag{4.15}$$

İspat. $L_{k+2\ell}$ ile f fonksiyonunu $x_0,x_1,x_2,...,x_{k+2\ell}$ noktalarında interpole eden derecesi $\leq k+2\ell$ olan Hermite-Lagrange interpolasyon polinomu gösterilsin. Bölünmüş farkların tanımından, $L_{k+2\ell}$ polinomunda $x^{k+2\ell}$ li terimin katsayısı A_{k+2l} ve $x^{k+2\ell-1}$ li terimin katsayısı A_{k+2l-1} ile gösterilirse

$$A_{k+2\ell}=\left[x_0,x_1,...,x_{k+2\ell};f\right],$$

ve (3.13) den

$$\begin{aligned}A_{k+2\ell-1}&=\left[x_0,x_1,...,x_{k+2\ell-1};f\right]+A_{k+2\ell}\\&=\frac{\left[x_0,x_1,...,x_{k+2\ell-1};f\right]+\left[x_0,x_1,...,x_{k+2\ell-2},x_{k+2\ell};f\right]}{2}\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. T_m, $m-inci$ Chebyshev polinomu olmak üzere

$$P_{k+r-1}\left(x\right)=L_{k+2\ell}\left(x\right)-\frac{A_{k+2\ell}}{2^{k+2\ell-1}}T_{k+2\ell}\left(x\right)-\left(2\ell-r\right)\frac{A_{k+2\ell-1}}{2^{k+2\ell-2}}T_{k+2\ell-1}\left(x\right)$$

polinomunu ele alalım. Açıktır ki, bu polinomun derecesi $\le k+r-1$. Tek ve çift olmak üzere r sayısının her iki durumunu inceleyeceğiz.

r sayısı tek olsun, yani, $r=2\ell-1$. Her bir $x\in[-1,1]$ ve $m\in\mathbb{N}$ için $|T_m(x)|\le 1$ olduğundan

$$\left|f(x)-P_{k+r-1}(x)\right|\le\left|f(x)-L_{k+2\ell}(x)\right|+\frac{|A_{k+2\ell}|}{2^{k+2\ell-1}}+\frac{|A_{k+2\ell-1}|}{2^{k+2\ell-2}} \tag{4.16}$$

elde edilir. r sayısının çift olduğu durumda ise

$$\left|f(x)-P_{k+r-1}(x)\right|\le\left|f(x)-L_{k+2\ell}(x)\right|+\frac{|A_{k+2\ell}|}{2^{k+2\ell-1}}$$

bulunur. Dolayısıyla, $|A_{k+2\ell}|/2^{k+2\ell-1}+|A_{k+2\ell-1}|/2^{k+2\ell-2}$ için elde edilecek olan sınır, her iki durum için de, geçerli olur. (3.13), Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.5, (3.3.(i)) özelliği dikkate alınarak uygulanırsa,

$$\begin{aligned}A_{k+2\ell}&=\frac{1}{2}\left(\left[x_0,x_1,\cdots,x_{k+2\ell-2},x_{k+2\ell};f\right]-\left[x_0,x_1,\cdots,x_{k+2\ell-1};f\right]\right)\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\left[x_0,x_1,\cdots,x_k;g_0-g_1\right]dt_r\cdots dt_1\end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$g_i(x):=f^{(r)}\left((1+x)t_r-2\sum_{j=2}^{r-1}(-1)^j t_j+t_1+(1-t_1)(-1)^i\right),\qquad i=0,1. \tag{4.17}$$

Benzer nedenlerden dolayı

$$\begin{aligned}A_{k+2\ell-1}&=\frac{\left[x_0,x_1,...,x_{k+2\ell-1};f\right]+\left[x_0,x_1,...,x_{k+2\ell-2},x_{k+2\ell};f\right]}{2}\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\left[x_0,x_1,\cdots,x_k;g_0+g_1\right]dt_r\cdots dt_1\end{aligned}$$

bulunur, burada g_i, $i=0,1$, (4.17) de tanımlanan fonksiyonlardır.

Bölünmüş farklar ile sonlu farklar arasındaki (3.20) bağıntısı, ardından düzgünlük modülünün monotonluk özelliği kullanılarak $i=0,1$ için

$$\begin{aligned}\left|\left[x_0,x_1,...,x_k;g_i\right]\right|&=\left|\frac{k^k}{2^k k!}\Delta^k_{2/k}g_i(x_0)\right|\\&\le\frac{k^k}{2^k k!}\omega_k(g_i)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k^k}{2^k k!}\omega_k\left(\frac{2}{k}t_r, f^{(r)}, [-1,1]\right)\\
&\le \frac{k^k}{2^k k!}\omega_k\left(f^{(r)}\right),
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{|A_{k+2\ell}|}{2^{k+2\ell-1}} + \frac{|A_{k+2\ell-1}|}{2^{k+2\ell-2}} &\le \frac{3k^k}{2^{2k+r}k!}\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}} \omega_k\left(f^{(r)}\right)dt_r\cdots dt_1\\
&= \frac{3k^k}{2^{2k+r}k!r!}\omega_k\left(f^{(r)}\right)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

bulunur.

Şimdi (4.16) eşitsizliğinin sağ yanındaki birinci ifade için bir üst sınır elde edelim. (3.12), (3.13) ve Lemma 4.1.5 den

$$
\begin{aligned}
f(x) - L_{k+2\ell}(x) &= \left(x^2-1\right)^{\ell}\Pi_k(x)\left[x_0, x_1, \cdots, x_{k+2\ell}, x; f\right]\\
&= \frac{\left(x^2-1\right)^{\ell}\Pi_k(x)}{4}\Big(\left[x_0, x_1, \cdots, x_{k+2\ell-4}, x_{k+2\ell-2}, x_{k+2\ell}, x; f\right] -\\
&\quad -2\left[x_0, x_1, \cdots, x_{k+2\ell-2}, x; f\right] + \left[x_0, x_1, \cdots, x_{k+2\ell-3}, x_{k+2\ell-1}, x; f\right]\Big)\\
&= \frac{\left(x^2-1\right)^{\ell}\Pi_k(x)}{4}\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\left[x_0, x_1, ..., x_k; g_2 - 2g_3 + g_4\right]dt_r\cdots dt_1,
\end{aligned}
$$

elde edilir, burada

$$
g_i(u) = f^{(r)}\left(ut_r - 2\left(t_{r-1} - t_{r-2} + \cdots + t_4\right)(1-x)t_3 + a_i\right), \qquad i = 2,3,4
$$

$a_2 = 1 - (1-x)t_2$, $a_3 = 1 - 2t_1 + (1+x)t_2$ ve $a_4 = (1+x)t_2 - 1$. Buradan, yukarıdaki tartışmaların benzeri yapılarak

$$
\begin{aligned}
\left|f(x) - L_{k+2\ell}(x)\right| &\le \frac{\left(1-x^2\right)^{\ell}\left|\Pi_k(x)\right|}{4}\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\left|\left[x_0, x_1, ..., x_k; g_2 - 2g_3 + g_4\right]\right|dt_r\cdots dt_1\\
&\le \frac{k^k}{2^k k!r!}\left(1-x^2\right)^{\ell}\left|\Pi_k(x)\right|\omega_k\left(f^{(r)}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ile (4.18) eşitsizliği taraf tarafa toplanırsa istenen (4.15) eşitsizliği elde edilir. □

Bir sonraki teoremin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmayı verelim. $h = 2/k$ olsun. $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için a tabanında logaritma fonksiyonu

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \qquad x > 0$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.3.2. *$k \geq 2$ olsun. $\ell + 1 < \log_2 (k-1)$ için*

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| \left(1-x^2\right)^{\ell} \Pi_k (x) \right| = \max_{x\in[-1,-1+2h]} \left| \left(1-x^2\right)^{\ell} \Pi_k (x) \right|$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $-1+h \leq y \leq -h/2$ için

$$H(y) := \left| \frac{\left((y+h)^2 - 1\right)^{\ell} \Pi_k (y+h)}{\left(y^2-1\right)^{\ell} \Pi_k (y)} \right| = \frac{1+y+h}{1-y} \left(1 - \frac{h(2y+h)}{1-y^2}\right)^{\ell}$$

fonksiyonunu inceleyelim. $H(-h/2) = 1$, $H'(-h/2) > 0$ ve H' fonksiyonu $\ell \leq (k-2)(k+1)/2k$ için $[-1+h, -h/2]$ aralığında sadece bir tane sıfıra sahip olduğundan lemmayı ispatlamak için $H(-1+h) \leq 1$ ifadesini göstermek yeterli olacaktır. Gerçekten, $\ell + 1 < \log_2 (k-1)$ için

$$H(-1+h) = \frac{2}{k-1} \left(\frac{2(k-2)}{k-1} \right)^{\ell} \leq 1$$

eşitsizliği kolayca gösterilebilir. Her bir $k \geq 2$ için

$$\log_2 (k-1) - 1 < \frac{(k-2)(k+1)}{2k}$$

olduğundan lemmanın ispatı tamamlanır. □

Teorem 4.3.3. *$k, r \in \mathbb{N}$ ve $\ell := [\![(r+1)/2]\!]$ olsun. $\ell + 1 < \log_2 (k-1)$ ise*

$$W(k,r) \leq \frac{1}{r!} \left(\frac{k(\ell+1)}{e\sigma_{k+\ell}} \right)^{\ell+1} \tag{4.19}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Teoremi ispatlamak için Teorem 4.3.1 de aşağıdaki eşitsizliği kullanmak yeterli olacaktır.

$$\frac{k^{k+r}}{2^{k+r}k!r!}\left(\left(1-x^2\right)^{\ell}\left|\Pi_k\left(x\right)\right|+\frac{3}{2^{k+r}}\right)\le\frac{1}{r!}\left(\frac{k\left(\ell+1\right)}{e\sigma_{k+\ell}}\right)^{\ell+1}, \tag{4.20}$$

$x\in\left[-1,1\right]$. Dolayısıyla, (4.20) eşitsizliğinin ispatlanması yeterlidir.

İlk olarak, her bir $x\in\left[-1,1\right]$ ve $\ell+1<\log_2\left(k-1\right)$ için

$$\frac{\left(1-x^2\right)^{\ell}\left|\Pi_k\left(x\right)\right|}{k^{-k}2^k k!}\le\max\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{4\left(\ell+1\right)}{ek\left(\sigma_k+\frac{\ell}{k}\right)}\right)^{\ell+1},\frac{1}{e^2}\left(\frac{4\left(\ell+1\right)}{ek\left(\sigma_k-2+\frac{\ell}{k}\right)}\right)^{\ell+1}\right\}, \tag{4.21}$$

eşitsizliğini ispatlayalım. (4.21) eşitsizliğinin sağ tarafı $C_{k,\ell}$ ile simgelensin. Her $x\in\left[-1,-1+h\right]$ için $u=k\left(x+1\right)/2$ değişken değişimi yapılırsa $0<u<1$ ve

$$\begin{aligned}\frac{k^k}{2^k k!}\left|\left(x^2-1\right)^{\ell}\Pi_k\left(x\right)\right|&=\frac{2^{2\ell+1}}{k^{\ell+1}}u^{\ell+1}\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{k-1}\right)\left(1-\frac{u}{k}\right)^{\ell+1}\\&\le\frac{2^{2\ell+1}}{k^{\ell+1}}u^{\ell+1}\left[1-\frac{\left(\sigma_k+\ell/k\right)u}{k+\ell}\right]^{k+\ell}\\&\le\frac{2^{2\ell+1}u^{\ell+1}e^{-\left(\sigma_k+\ell/k\right)u}}{k^{\ell+1}}\\&\le\frac{1}{2}\left(\frac{4\left(\ell+1\right)}{ek\left(\sigma_k+\ell/k\right)}\right)^{\ell+1},\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci satırdaki eşitsizlik geometrik ortalama ile aritmetik ortalama arasındaki bağıntıdan elde edilirken, üçüncü satırda, $\left(1-a/n\right)^n\le\exp\left(-a\right)$, $0\le a\le1$, eşitsizliği kullanılmıştır. Diğer taraftan yukarıdaki benzer tartışmalar $-1+h<x<-1+2h$ durumu için de yapılırsa (4.21) eşitsizliği elde edilir. Stirling formülünden elde edilen $k!\ge k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}$ eşitsizliği, Lemma 4.3.2 ve (4.13) kullanılırsa

$$r!W\left(k,r\right)\le\left(\frac{k}{2}\right)^r C_{k,\ell}+\frac{3k^r e^k}{4^{k+r}\sqrt{2\pi k}},$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa $\ell+1<\log_2\left(k-1\right)$ sağlandığında

$$\left(\frac{k}{2}\right)^r C_{k,\ell}+\frac{3k^r e^k}{4^{k+r}\sqrt{2\pi k}}\le\left(\frac{k(\ell+1)}{e\sigma_{k+\ell}}\right)^{\ell+1}$$

elde edilir ki bu (4.20) eşitsizliğini, dolayısıyla teoremin ispatını verir. □

Aşağıda verilen sonuçlarda türevlenebilme mertebesi olan r sayısını serbest bırakıp, k sayısının küçük değerleri için değerlendirmeler yapılmıştır.

Teorem 4.3.4. *Her bir* $r\in\mathbb{N}$ *için*

$$W(1,r)\le\frac{1}{r!2^{2r+1}\cos\frac{\pi}{2(r+1)}} \tag{4.22}$$

İspat. T_{r+1}, $(r+1)-inci$ Chebyshev polinomunun sıfırlarını $j=0,1,\cdots,r$ için $y_j=\cos\left((2j+1)\pi/2(r+1)\right)$ ile gösterelim. L_r, f fonksiyonunu y_j noktalarında interpole eden derecesi $\le r$ olan Lagrange interpolasyon polinomu olsun. Bu durumda (3.12) ve Lemma 4.1.5 den

$$\begin{aligned}|f(x)-L_r(x)|&=\left|\frac{T_{r+1}(x)}{2^r}[x,y_0,y_1,\cdots,y_r;f]\right|\\&\le\frac{1}{2^r}\left|[y_0,y_r;f_r]\right|\end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$f_r(u):=\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}f^{(r)}\left(ut_r+(t_{r-1}-t_r)y_{r-1}+\cdots+(t_1-t_2)y_1+(1-t_1)x\right)dt_r\cdots dt_2dt_1.$$

(3.13) den

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^r}\left|[y_0,y_r;f_r]\right|&=\frac{|f_r(y_0)-f_r(y_r)|}{2^r|y_0-y_r|}\\&\le\frac{1}{2^r|y_0-y_r|}\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{r-1}}|g(y_0)-g(y_r)|dt_r\ldots dt_2dt_1\\&\le\frac{1}{2^r|y_0-y_r|}\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{r-1}}\omega_1\left((y_0-y_r),g,[-1,1]\right)dt_r\ldots dt_2dt_1\\&=\frac{1}{2^r|y_0-y_r|}\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{r-1}}\omega_1\left((y_0-y_r)t_r,f^{(r)},[-1,1]\right)dt_r\ldots dt_2dt_1\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\omega_1\left(2, f^{(r)}, [-1,1]\right)}{r!2^r \left|y_0 - y_r\right|}$$

bulunur, burada $g(u) = f^{(r)}\left(ut_r + \left(t_{r-1} - t_r\right) y_{r-1} + \cdots + \left(t_1 - t_2\right) y_1 + \left(1 - t_1\right) x\right)$ dir.

$$y_r - y_0 = 2\sin\frac{\pi r}{2(r+1)} = 2\cos\frac{\pi}{2(r+1)}$$

olduğundan

$$\left|f(x) - L_r(x)\right| \leq \frac{\omega_1\left(2, f^{(r)}, [-1,1]\right)}{r!2^{r+1}\cos\dfrac{\pi}{2(r+1)}}$$

bulunur ki bu (4.22) eşitsizliğini verir. □

Şimdi (4.22) eşitsizliği için bir asimptotik gösterim elde edelim.

$$\frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{2(r+1)}} = \frac{\sin^2\dfrac{\pi}{4(r+1)}}{\cos\dfrac{\pi}{2(r+1)}} + \frac{1}{2}$$
$$\leq \frac{\pi^2}{16(r+1)^2\cos\dfrac{\pi}{2(r+1)}} + \frac{1}{2}$$

olduğundan Stirling formülü yardımıyla

$$\frac{1}{r!2^{2r+1}\cos\frac{\pi}{2(r+1)}} \leq \frac{1}{r!2^{2r+1}} + \frac{\pi^2}{2^{2r+4}(r+1)!(r+1)\cos\dfrac{\pi}{2(r+1)}}$$
$$\leq \frac{1}{r!2^{2r+1}} + \frac{\pi^{3/2}e^{r+1}}{2^{2r+9/2}(r+1)^{r+5/2}\cos\dfrac{\pi}{2(r+1)}}$$
$$= \frac{1}{r!2^{2r+1}} + o\left(\rho^{r+1}(r+1)^{-(r+5/2)}\right), \qquad 0 < \rho < 1.$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.5. *Her bir $r \in \mathbb{N}$ için*

$$W(1,r) \leq \frac{1}{r!2^{2r+1}} + o\left(\rho^{r+1}(r+1)^{-(r+5/2)}\right),$$

burada $0 < \rho < 1$ dir.

Teorem 4.3.6. *Her bir* $r \in \mathbb{N}$ *için*

$$W(2,r) \le \frac{1}{r!2^{r^*}\cos^2\frac{\pi}{2r^*}}$$

eşitsizliği doğrudur, burada $r^* := 2\llbracket (r+1)/2 \rrbracket + 1$ *dir.*

İspat. İlk olarak r doğal sayısını tek olarak kabul edelim. $(r+2)-$*inci* Chebyshev polinomunu T_{r+2} ile, sıfırlarını ise $j = 0,1,\cdots,r+1$ için $y_j = \cos\left((2j+1)\pi/2(r+2)\right)$ ile gösterelim. L_{r+1}, f fonksiyonunu y_j noktalarında interpole eden derecesi $\le r+1$ olan Lagrange interpolasyon polinomu olsun. Bu durumda (3.12) ve Lemma 4.1.5 den

$$\begin{aligned} \left|f(x) - L_{r+1}(x)\right| &= \left|\frac{T_{r+2}(x)}{2^{r+1}}\left[x, y_0, y_1, \cdots, y_{r+1}; f\right]\right| \\ &\le \frac{1}{2^{r+1}}\left\|\left[y_0, 0, y_{r+1}; f_r\right]\right\| \end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$f_r(u) := \int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}} g(u,t_1,t_2,\cdots,t_r)\,dt_r \ldots dt_2 dt_1,$$

$$\begin{aligned} g(u) := g(u,t_1,t_2,\cdots,t_r) = f^{(r)}\Big(&ut_r + (t_{r-1}-t_r)y_r + \ldots + \left(t_{r+1/2} - t_{r+3/2}\right)y_{r+3/2} + \\ &+ \left(t_{r-1/2} - t_{r+1/2}\right)y_{r-1/2} + \ldots + (t_1 - t_2)y_1 + (1-t_1)x\Big). \end{aligned}$$

Teorem 4.2.3 ün ispatındaki benzer tartışmalar yapılırsa

$$\left|f(x) - L_{r+1}(x)\right| \le \frac{\omega_2\left(1, f^{(r)}, [-1,1]\right)}{r!2^{r+2}\cos^2\dfrac{\pi}{2(r+2)}}$$

bulunur. Eğer r bir çift doğal sayı ise interpolasyon noktaları olarak $(r+1)-$*inci* Chebyshev polinomunun $y_j = \cos\left((2j+1)\pi/2(r+1)\right)$, $j = \overline{0,r}$, sıfırlarına ek olarak $y_{r+1} = 0$ noktası da alınır. f fonksiyonunu bu noktalarda interpole eden derecesi $\le r+1$ olan polinom L_{r+1} olmak üzere yukarıda ki metot uygulanırsa

$$\left|f(x)-L_{r+1}(x)\right| = \left|\frac{xT_{r+1}(x)}{2^r}\left[x, y_0, y_1, \cdots, y_{r+1}; f\right]\right|$$

$$\leq \frac{\omega_2\left(1, f^{(r)}, [-1,1]\right)}{r!2^{r+1}\cos^2\dfrac{\pi}{2(r+1)}}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.3.7. *Her bir* $r \in \mathbb{N}$ *için*

$$W(2,r) \leq \frac{1}{r!2^{r^*}} + o\left(\rho^{\left(r^*+1\right)-\left(r^*+1/2\right)}\right),$$

burada $1 < \rho < 2$ *ve* $r^* := 2[\![(r+1)/2]\!]+1$ *dir.*

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

1. Sayısal analiz alanında rastladığımız kaynakların çoğunda bölünmüş farkların tanımı ayrık noktalar üzerinde yapılmıştır. Bazı noktaların çakışık olduğu durumda ise üçüncü bölümün üçüncü kısmında verilen tanım en yaygın olanıdır. Ancak bu kapalı bir tanımdır. Sonuç 4.1.3 ile genelleştirilmiş bölünmüş farkların açık ve farklı bir gösterimi verilmiştir.

2. Zhuk ve Natanson'a ait olan bir lemmada, kapalı aralıkta tanımlı bir fonksiyon verildiğinde bu fonksiyonun, verilen aralığın ayrık noktalarında fonksiyonu interpole eden Lagrange interpolasyon polinomu ile farkı için bir integral gösterimi elde edilmiştir [23]. Lemma 4.1.7 ile bu gösterim belli mertebeye kadar türevlenebilen fonksiyonlar için, düğüm noktalarının bazılarının çakışık olmasına müsaade edecek şekilde genelleştirilmiştir: *$r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ ve her bir $i = \overline{1,n}$ için $x_i \in [a,b]$ olmak üzere bir $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ sonlu dizisi verilsin, öyle ki $j = r, r+1, ..., n$ ve $h = (b-a)/(n-r)$ için $x_j = x_r + h(j-r)$ olsun. Eğer $f \in AC^{r-1}[a,b]$ ise*

$$f(x) - L_{n-1}(x; f; x_1, ..., x_n) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}{h^{n-r}(n-r)!} \int_0^1 \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_{r-1}} \Delta_{ht_r}^{n-r}(g, x_r)\, dt_r ... dt_2 dt_1$$

burada

$$g(u) = f^{(r)}\left(ut_r + (t_{r-1} - t_r)x_{r-1} + ... + (t_1 - t_2)x_1 + (1 - t_1)x\right).$$

3. Teorem 4.2.1 de ikinci dereceden türevlenebilen bir fonksiyona, derecesi $\leq k+1$ olan polinomlar ile yaklaşım hatasını, fonksiyonun türevinin $k-inci$ düzgünlük modülü cinsinden değerlendirilmesine dair bir noktasal sonuç verilmiştir. Bu sonuç kullanılarak Whitney Sabitleri için aşağıdaki eşitsizlik elde edildi:

$$W(k,2) \leq \left(\frac{2}{e\sigma_{k+1}}\right)^2 \tag{5.1}$$

Yukarıda verilen eşitsizliğin elde edilmesinde kullanılan yöntem yardımıyla bu sonuçların genelleştirilmesi yapıldı. Teorem 4.3.1 ile $r-inci$ mertebeden türevlenebilen bir fonksiyona, derecesi $\leq k+r-1$ olan polinomlar ile yaklaşım hatasını, fonksiyonun $r-inci$ türevinin $k-inci$ düzgünlük modülü cinsinden değerlendirilmesine dair bir noktasal sonuç verilmiştir. Yine, bu teorem yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilmiştir: *$k, r \in \mathbb{N}$ ve $\ell := [\![(r+1)/2]\!]$ olsun. $\ell + 1 < \log_2(k-1)$ ise*

$$W(k,r) \leq \frac{1}{r!}\left(\frac{k(\ell+1)}{e\sigma_{k+\ell}}\right)^{\ell+1}. \tag{5.2}$$

4. Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.5 de farklı bir yöntemle $k=1,2$ ve r'nin keyfi doğal sayı olduğu durumlar için Whitney sabitlerine üst sınırlar elde edilmiştir:

$$W(1,r) \leq \frac{1}{r!2^{2r+1}\cos\frac{\pi}{2(r+1)}} \tag{5.3}$$

$$W(2,r) \leq \frac{1}{r!2^{r^*}\cos^2\frac{\pi}{2r^*}} \tag{5.4}$$

burada $r^* := 2[\![(r+1)/2]\!] + 1$.

k	$W(k,1)$	$W(k,2)$	$W(k,2)$
1	0.3679	0.2406	
2	0.2453	0.1611	
3	0.2007	0.1247	
4	0.1766	0.1038	
5	0.1611	0.0902	1,1273
6	0.1502	0.0805	1,4494
7	0.1419	0.0733	1,7955
8	0.1354	0.0676	2,1645
9	0.1300	0.0631	2,5556
10	0.1256	0.0594	2,9680

Tablo 5.1. Tabloda ikinci sütundaki değerler (2.3) eşitsizliğine göre yapılan hesaplamalar iken üçüncü sütun (5.1) ve son sütun (5.2) eşitsizliğine göre yapılmıştır.

r	$W(1,r)$	$W(2,r)$
1	0.1768	0.5000
2	0.0180	0.2500
3	0.0014	0.0080

Tablo 5.2. İkinci sütun (5.3) eşitsizliğine, üçüncü sütun ise (5.4) eşitsizliğine göre hesaplanmıştır.

Yukarıda verilen tablolarda k ve r'nin küçük değerleri için $W(k,r)$ Whitney sabitlerinin farklı yöntemlerle elde edilen üst sınırlarının bir listesi vardır. Dikkat edilirse, Tablo 5.2 de, Chebyshev düğüm noktaları kullanılarak elde edilen sınırlar Tablo 5.1 de verilenlerden çok daha iyidir. Ayrıca, Tablo 5.1 de üçüncü sütundaki verilerin elde edilmesinde kullanılan yöntemin genelleştirilmesiyle elde edilen veriler daha da kötüleşmiştir. Dolayısıyla, yeni bir yöntemle yada interpolasyon noktalarının bir uygun seçimiyle aranan değerler daha da iyileştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Chebyshev, P.L. "Theorie des mecanismes connussous le nom de paralleogrammes", Chelsea Publ. Co., New York, Ouvres, **1**, s. 273-378, (1854).

[2] Weierstrass, K. "Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen", Sitzungsberichete der Akademie zu Berlin, s. 633-639, (1885).

[3] Borel, E. "Leçons sur les Fonctions de Variables Reelles", Gauthier-Villars, Paris, 160 s., (1905).

[4] Jackson, D. "On Approximation by Trigonometric Sums and Polynomials", TAMS, **13**, s. 491-515, (1912).

[5] Burkill, H. "Cesaro-Perron Almost Periodic Functions", Proc. London Math. Soc., **2 (3)**, s. 150-174, (1952).

[6] Whitney, H. "On the functions with bounded n-differences", J. Math. Pures Appl., **36**, s. 67-95, (1957).

[7] Brudnyĭi, Y.A. "Studies in the theory of local approximations", Doctoral dissertation, Yaroslavl, (1977).

[8] Storozhenko, E.A. "Approximation of Functions and Imbedding Theorems in L^p and H^p ", Doctoral Dissertation, Tbilisi, (1979).

[9] Sendov, B. "On the Constants of H. Whitney", C.R. Acad. Bulgare Sci., **35**, s. 431-434, (1982).

[10] Ivanov, K.G. ve Takev, M.D. "$O(n \ln n)$-Bound for Whitney Constant", C.R. Acad. Bulgare Sci., **38**, s. 1129-1131, (1985).

[11] Binev, P.G. "$O(n)$-Bound for Whitney Constant", C.R. Acad. Bulgare Sci., **38**, s. 1303-1305, (1985).

[12] Sendov, B. "The Constants of H. Whitney are Bounded", C.R. Acad. Bulgare Sci., **38**, s. 1299-1302, (1985).

[13] Sendov, B. "On a Theorem of H. Whitney", Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **291**, s. 1296-1300, (1986).

[14] Kryakin, Y.V. "On the Whitney Constants", Mat. Zametki, **46 (2)**, s. 155-157, (1989).

[15] Kryakin, Y.V. ve Kovalenko, L.G. "Whitney constants in the Classes L^p , $1 \leq p < \infty$", Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **1 (354)**, s. 69-77, (1992).

[16] Kryakin, Y.V. "On Whitney's Theorem and Constants", Russian Acad. Sci. Sb. Math., **81**, s. 281-295, (1995).

[17] Gilewicz, J., Kryakin, Y.V. ve Shevchuk, I.A. "Boundedness by 3 of the Whitney Interpolation Constant", Journal of App. Th., **119**, s. 271-290, (2002).

[18] Shevchuk, I.A. "Whitney Inequality and Convex Splines", International Colloquim on Application of Math. , Hamburg, s.55, (1997).

[19] Danilenko, I.G. "On the Sendov Problem for the Whitney Interpolation Constants", Ukrainian. Math. J., **50**, s. 831-833, (1998).

[20] Zhelnov, O.D. "Whitney Interpolation Constants are Bounded by 2 for k = 5,6,7", Ukrainian. Math. J., **55 (4)**, s. 660-664, (2003).

[21] Zhelnov, O.D. "Whitney Constants are Bounded by 1 for κ = 5,6,7", East Journal on Approximation, **8 (1)**, s. 1-14, (2002).

[22] Zhelnov, O.D. "Whitney Inequality and Its Generalization", Doctoral Dissertation, Inst. of Math. Nat. Ac. of Sci., Kiev, 129, (2004).

[23] Zhuk, V.V. ve Natanson, G.I. "On the theory of cubic periodic splines with equidistant nodes", Vestnik Leningrad. Univ, **1**, s. 5-11, (1984).

[24] Schumaker, L.L. "Spline Functions: Basic Theory", John Wiley & Sons, 570 s., (1981).

[25] Davis, P.J. "Interpolation and Approximation", Blaisdell Pub. Com., USA, 393 s., (1963).

[26] Rivlin, T.J. "The Chebyshev Polynomials", John Wiley & Sons, USA, 186 s., (1974).

[27] Devore, R.A. ve Lorentz, G.G. "Constructive Approximation", Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 452 s., (1993).

[28] Shevchuk, I.A. "Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a Segment", Naukova Dymka, Kiev, 324 s., (1992).

[29] Forsythe, G.E., Malcolm, M.A. ve Moler, C.B. "Computer Methods for Matehmatical Computations", Englewood Cliffs, Prentice Hall, 270 s., (1977).

[30] Knuth, D.E. "Seminumerical Algorithms. The Art of Computer Programming", Addison-Wesley, vol. 2, 784 s., (1969).

[31] Bakhvalov, N.S. "Numerical Methods", Nauka, Moscow, vol. 1, s., (1973).

[32] Kvasov, B.I. "Methods of Shape-Preserving Spline Approximation", World Scientific, Singapore, 338 s., (2000).

[33] Sendov, B. ve Popov, V. "The Avaraged Moduli of Smoothness", Wiley, Chichester, 182 s., (1988).

[34] Dzjadyk, V.K. "Introduction in Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials", Nauka, Moscow, 511 s., (1977).

[35] Bernstein, S.N. "Demonstration du theoreme de Weierstrass Fondee sur le Calcul de Probalities", Comm. Soc. Math. Kharkov, **13**, s. 1-2, (1912).

[36] Feinerman, R.P. ve Newman, D.J. "Polynomial Approximation", Wavely Press., 148 s., (1974).

[37] Cheney, E.W. "Introduction to Approximation Theory", Am. Math. Soc., USA, 259 s., (1982).

[38] Yosida, K. "Functional Analysis", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 501 s., (1995).

[39] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. ve Polya, G. "Inequalities", Cambridge University Press, 324 s., (1997).

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Hatay iline bağlı İskenderun ilçesinde doğdu. İlkokul eğitimini Cemal Gürsel İlkokulunda, ortaokul ve lise eğitimini İskenderun Barbaros Lisesi'nde tamamladı. 1996 yılında, Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne kayıt yaptırıp 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Yüksek Lisans giriş sınavını kazanmasına rağmen yabancı dil hazırlık nedeniyle bir yıl sonra, 2001 yılında, yüksek lisans eğitimine başladı. 2004 yılında yüksek lisans eğitimini tamamlayıp aynı yıl içinde aynı birimde doktora eğitimi almaya hak kazandı. Doktora eğitimi sırasında Ukrayna Bilimler Akademisi Matematik Enstitüsünde bilimsel araştırma yapmak üzere 2005 yılında sekiz ay, 2007 yılında ise üç ay olmak üzere iki kez Ukrayna başkenti Kiev'de bulundu. Ayrıca, yine 2007 yılında Almanya'nın Eicshtaett-Ingolstadt Katolik Üniversitesi'nde Erasmus öğrencisi olarak üç ay eğitim aldı.

2001 yılında atandığı Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında 'Araştırma Görevlisi' kadrosundaki görevine devam etmektedir.