

AYRIK ÇOK GİRİŞLİ ÇOK ÇIKIŞLI OPTİMAL
KONTROL VE TERS OPTİMAL KONTROL
PROBLEMİNİN SIKLIK BÖLGESİNDE TASARIMI

HÜLYA EROĞLU

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
MART-2008

**AYRIK ÇOK GİRİŞLİ ÇOK ÇIKIŞLI OPTİMAL KONTROL VE
TERS OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN SIKLIK BÖLGESİNDE
TASARIMI**

HÜLYA EROĞLU

**Mersin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Ana Bilim Dalı**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Tez Danışmanı
Prof. Dr. C. Cengiz ARCASOY**

**MERSİN
Mart- 2008**

ÖZ

Bu çalışmada zamanla değişmeyen sistemlerin sıklık bölgesinde optimal ve ters optimal kontrol problemin kesikli ve sürekli sistemler için tasarımı yapılmıştır. Bu tasarım yöntemlerinde önemli rol oynayan görüngenel ayrışım işlemi için en etkin algoritma seçilerek detaylı olarak incelenmiştir. Optimal kazanç matrisi görüngenel ayrışım algoritması kullanılarak kolayca bulunmuştur.

Sıklık bölgesinde ayırık-zamanlı sistem için önceden belirlenen bir kararlılık sınırı içerisinde yer alan dört yeni bölgeler içerisinde kapalı çevrim köklerini atan dört yöntem geliştirilmiştir. Geçici tepkiyi iyileştirmek için; kararlı sistem kapalı çevrim köklerini birim çember içerisinde önceden belirlenen dört yeni bölgeye çeken Q ağırlık matrisleri sıklık bölgesinde bulunmuştur.

Arcasoy'un frekans bölgesinde ayırık zamanlı çok girişli çok çıkışlı sistemlerde optimal kazanç matrisinin elde edilmesine dayalı algoritması verilmiştir. Zaman bölgesindeki çözümle karşılaştırılması yapılmıştır. Görüngenel ayrışımaya dayalı algoritma Arcasoy tarafından kare olmayan aktarım matrisine uygulanabilecek şekilde geliştirilmiştir. Gaz türbini problemi ele alınarak algoritmanın kare ve kare olmayan sürekli ve ayırık sistem aktarım matrislerine uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler:Sıklık Bölgesi,Ters Optimal Kontrol,Görüngenel Ayrışım,Kök Yerleştirme

ABSTRACT

Discrete time-invariant linear optimal feedback control system and inverse optimal control system design in frequency domain has been studied. The spectral factorisation of the performance spectrum matrix plays a key role in the design. Optimal gain matrix can be found directly by solving the spectral factorisation .

A new method in frequency domain is developed to assign the eigenvalues assigned inside a prescribed circular region in a unit circular in z-domain. The positive semi-definite/definite weighting matrix Q , which allocates the closed-loop poles of the system inside the new selected four regions in frequency domain.

A simple algorithm given for the determination of gain matrix of MIMO discrete time optimal controller entirely in frequency domain. The algorithm is based on spectral factorization of the performance matrix and is extended for the design of optimal controller for non square transfer function matrix. The illustrative gas turbine examples have been given how algorithm works for square and non square transfer functions both in continuous and discrete-time systems.

Key Words: Frequency Domain, Inverse Optimal Control, Spectral Factorisation, Pole Placement

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın her aőamasında grüş ve yorumlarıyla bu çalışmanın oluőmasında büyük emeği geçen değerli danıőmanım Prof. C. Cengiz ARCASOY'a sonsuz teőekkürlerimi bir borç bilirim.

Desteğinin hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve bu çalışmanın ortaya çıkmasında herhangi bir şekilde emeği geçen herkese teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZ	I
ABSTRACT	II
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	3
2.1. OPTİMAL KONTROL	3
2.2. OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU	3
2.3. BAŞARIM İNDİSİ	4
2.4. ZAMAN BÖLGESİNDE OPTİMİZASYON PROBLEMİ	4
2.4.1. Sürekli-Zaman Sistemlerin Optimizasyon Problemi	5
2.4.2. Ayrık-Zamanlı Sistemlerin Optimizasyon Problemi	6
2.5. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN SIKLIK BÖLGESİ TASARIM YÖNTEMLERİ	7
2.5.1. Ayrık-Zamanlı Sistemin Dönüş-Fark ve Dönüş-Oranı Matrisleri	7
2.5.2. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Tasarımında Görüngesel Ayrışımın Kullanılması	8
2.5.2.1. Tanımlar ve gerekli tasarım yöntemleri	9
2.5.3. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Problemi İçin Sıklık Bölgesi Tasarım Yöntemleri	10
2.5.3.1 Optimal denetleyicinin görüngesel ayrışım ile hesaplanması(Yönem 1)	10
2.5.3.2 Optimal denetleyicinin görüngesel ayrışım ile hesaplanması (Yönem 2)	12
2.6. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROLDE SIKLIK BÖLGESİNDE ÖZDEĞERLERİN BELİRLİ BİR BÖLGE İÇERİSİNE ATILMASI	14
2.6.1. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Probleminde Özdeğerlerin Sıklık Bölgesinde D1 Diski İçerisine Çekilmesi	14
2.6.2. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Probleminde Özdeğerlerin Sıklık Bölgesinde D2 Diski İçerisine Çekilmesi	22
2.6.3. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Probleminde Özdeğerlerin Sıklık Bölgesinde D3 Diski İçerisine Çekilmesi	28
2.6.4. Ayrık – Zamanlı Optimal Kontrol Probleminde Özdeğerlerin Sıklık Bölgesinde D4 Diski İçerisine Çekilmesi	29

3. MATERYAL ve METOT	36
3.1. PROBLEM FORMÜLASYONU	36
3.2. BULUNAN Q1 AĞIRLIK MATRİSİNİN POZİTİF VEYA POZİTİF YARI- TANIMLI OLDUĞUNUN İRDELENMESİ	38
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	40
4.1. I. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER	40
4.2. II. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER	56
4.3. III. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER	74
4.4. IV. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER	89
4.5.ÇOK GİRİŞLİ ÇOK ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN SIKLIK BÖLGESİNDE OPTİMAL TASARIMI	97
4.5.1.Sürekli Zamanlı Sistemlerden Kesikli Zamana Dönüşüm	97
4.5.2.Ayrık Zamanlı Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemlerin Sıklık BölgesiTasarım Algoritması	97
4.5.2.1.Kesikli sistem sıklık bölgesi optimal tasarım algoritması	103
4.5.3.Gaz Türbini Problemi	107
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	127
6. KAYNAKLAR	129
7. EKLER	133
7.1. SIKLIK BÖLGESİ TASARIMI İÇİN KULLANILAN KOD	133
7.2.SÜREKLİ ZAMANLI SİSTEMDEN KESİKLİ ZAMANLI SİSTEME DÖNÜŞÜM KODU	134
7.3. SIKLIK BÖLGESİ TASARIMI İÇİN KULLANILAN FONKSİYONLAR	134

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL	SAYFA
Şekil 2.1. Ayrık-Zamanlı Optimal Geri-Beslemeli Kontrol Sistemi.....	7
Şekil 2.2. Optimal Kontrol Sistemi İçin Dönüş-Fark Matrisinin Hesaplanması.....	8
Şekil 2.3. $\alpha < 1$ ve $\beta = 0$ Olacak Şekilde Seçilirse Elde Edilen Yeni Bölge.....	15
Şekil 2.4. $ \alpha + \beta \leq 1$ Olacak Şekilde Seçilirse Elde Edilen Yeni Bölge.....	22
Şekil 2.5. $ \alpha = \beta < 0.5$ Olacak Şekilde Seçilirse Elde Edilen Yeni Bölge.....	29
Şekil 2.6. $ \alpha = \beta < 0.5$ Olacak Şekilde Seçilirse Elde Edilen Yeni Bölge.....	30
Tablo 1. Frekans Bölgesinde, Sistem Kapalı Çevrim Köklerini Seçilen 4 Yeni Bölge İçerisine Atmak İçin Gerekli Dönüşüm Denklem Şartları.....	39
Şekil 4.1. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0$ Merkezli $D1$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	44
Şekil 4.2. $\alpha = 0.4$ Yarıçaplı, $\beta = 0$ Merkezli $D1$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	47
Şekil 4.3. $\alpha = 0.4$ Yarıçaplı, $\beta = 0$ Merkezli $D1$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	52
Şekil 4.4. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0$ Merkezli $D1$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	56
Şekil 4.5. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli $D2$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	61
Şekil 4.6. $\alpha = 0.1$ Yarıçaplı, $\beta = 0.4$ Merkezli $D2$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	65
Şekil 4.7. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli $D2$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	70
Şekil 4.8. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.5$ Merkezli $D2$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	74
Şekil 4.9. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.2$ Merkezli $D3$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	77

Şekil 4.10. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli $D3$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	81
Şekil 4.11. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.2$ Merkezli $D3$ Diski İçin A_c Özdeğerlerini Grafikselsel Gösterimi.....	85
Şekil 4.12. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli $D3$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	89
Şekil 4.13. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli $D4$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	93
Şekil 4.14. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.2$ Merkezli $D4$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi.....	96
Şekil 4.15. Ayrık-Zamanlı Optimal Geri-Beslemeli Kontrol Sistemi.....	97
Şekil 4.16. $G(z)$ 'in Çıkışlarının Sayısı Girişten Fazla Olduğu Durumdaki Sistem...	99
Şekil 4.17. $G(z)$ 'in Girişlerinin Sayısı Çıkıştan Fazla Olduğu Durumdaki Optimal sistem.....	101
Şekil 4.18a.Sistem Giriş Çıkışları $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	109
Şekil 4.18b.Sistem Çıkış ve Girişleri $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	110
Şekil 4.19a.Sistem Çıkış ve Girişleri $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	111
Şekil 4.19b.Sistem Çıkış ve Girişleri $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	112
Şekil 4.20a. Sistem Çıkış ve Girişleri $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	113
Şekil 4.20b.Sistem Çıkış ve Girişleri $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	114
Şekil 4.21a. Sistem Çıkış ve Girişleri $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	115
Şekil 4.21b.Sistem Çıkış ve Girişleri $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	116

Şekil 4.22a.Sistem Çıkış ve Girişleri	$RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$119
Şekil 4.22b. Sistem Çıkış ve Girişleri	$RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$120
Şekil 4.23a.Sistem Çıkış ve Girişleri	$RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$121
Şekil 4.23b.Sistem Çıkış ve Girişleri	$RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$122
Şekil 4.24a. Sistem Çıkış ve Girişleri	$RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$123
Şekil 4.24b. Sistem Çıkış ve Girişleri	$RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$124
Şekil 4.25a. Sistem Çıkış ve Girişleri	$RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$125
Şekil4.25b. Sistem Çıkış ve Girişleri	$RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$126

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

L_{uu}	:	Hessian matrisi
λ	:	Lagrange çarpanı
P	:	Matris Riccati eşitliğinin pozitif tanımlı çözümü
$H(x,u, \lambda)$:	Hamiltonian fonksiyonu
J	:	Başarım indisi
Q	:	Pozitif yarı tanımlı simetrik ağırlık matrisi
R	:	Pozitif tanımlı simetrik ağırlık matrisi
S	:	Ağırlık matrisi
K	:	Optimal geri-besleme kazancı
x	:	Durum vektörü
u	:	Giriş vektörü
F	:	Dönüş-fark matrisi
Z	:	Dönüş-oranı matrisi
I_n	:	$n \times n$ boyutlu birim matris
G	:	Transfer fonksiyonu
A	:	Geçiş matrisi
B	:	Giriş matrisi
C	:	Çıkış matrisi
pi	:	Dönüş-fark matrisinin öz-değerleri
ψ	:	Görüngeşel yoğunluk matrisi
Δ	:	Görüngeşel ayrışım matrisi
T	:	Tekmodüler matrisi
D	:	A'nın karakteristik denklemi
M_c	:	Denetlenebilirlik Matrisi
α	:	Disk yarıçapı
(3	:	0 ile 1 arasında pozitif sabit sayı
eig	:	Bir matrisin Öz-değerleri
adj	:	Bir matrisin adjointi yani ek-matrisi
diag	:	Köşegen matris
A_c	:	Kapalı-çevrim sistemin geçiş matrisi

1. GİRİŞ

Optimal kontrol, modern kontrolün bir dalı olup tasarlanacak sistem için verimlilik bağlamında en iyi çözümü getirmeyi hedefler.

Son yıllardaki Modern Kontrol Teorisindeki önemli gelişmeler sayesinde oldukça karmaşık sistemlerin güvenlik ve verimlilik konularında önemli ölçüde gelişmeler sağlanmıştır.

1950 yıllarında tek-girişli ve tek-çıkışlı sistemlerin klasik analiz ve sentezlerinde kullanılan metotlar, 1960'lı yıllardan sonra süratle çok-girişli çok-çıkışlı sistemlerin analiz ve sentezinde uygulanması amacı ile genelleştirilmesi yönünde araştırmalar yapılmıştır. O yıllarda özellikle uzay çalışmalarının yoğunluğu ve bazı karmaşık sistemlerin analiz ve sentezi için, geliştirilen bu metotların başarı ile uygulanmasının yanı sıra günümüze de bu konudaki çalışmalar hala devam etmektedir.

Ancak çok-girişli çok-çıkışlı sistemlerin denetimi yanında, sistemin doğal yapısı, kapasitesi ve karmaşıklığından dolayı sistem değişkenlerinin ekonomik bir şekilde kontrol edilmesi gereksinimi ortaya çıkmıştır. Bu da çok değişkenli karmaşık sistemlerin analiz ve sentezinde, tanımlanan başarımların indisinin optimize edecek şekilde tasarımını gerektirmektedir. Bu optimal kontrol teorisi ilk defa 1960'lı yıllarda Kalman tarafından ortaya atılmıştır. Kalman teorisine göre çok değişkenli sistemlerin optimal tasarımı; durum uzay denklemlerinden hareket ederek tanımlanan, bir başarımlar indisinin minimize olabilmesi için, elde edilen Matris Riccati eşitliğinden çözümünü gerektirmektedir.

Çok değişkenli sistemlerin karmaşıklığından dolayı, bu tür sistemlerin optimal çözüme en iyi bir şekilde ulaşılabilmesi için bilgisayar uygulama ve kullanımı konularındaki çalışmalar yoğunlaşmış durumdadır. Özellikle optimal tasarımda önemli rol oynayan, Matris Riccati eşitliğinin çözümü konusunda derin araştırmalar yapılmıştır ve günümüzde de halen bu araştırmalar devam etmektedir.

1970'lerden sonra çeşitli araştırmacılar, Kalman optimal kontrol teorisinin, sıklık bölgesi çözümlene yöntemlerini önermişlerdir. Klasik kontroldeki aktarım fonksiyonu yaklaşımının getirdiği bazı kolaylıkların bu sistemlerde de uygulanması, sıklık bölgesindeki optimal tasarım çalışmalarının önemini ortaya koymuştur. Bu çalışmalar artan bir ilgiyle günümüze kadar devam etmiş durumdadır.

Bu çalışmada, bölüm 2.1.'de optimal kontrolden ve zaman bölgesinde optimal kontrol probleminin çözümünden kısaca bahsedilecektir. Bölüm 2.2'de ayrık-zamanlı optimal kontrol probleminin sıklık bölgesi çözüm yöntemi ayrıntılı olarak incelendikten sonra çözüm algoritması verilecektir. Bölüm 2.3.'de ise ayrık-zamanlı optimal kontrol probleminde seçilen 4 yeni bölge içerisine sistemin kapalı-çevrim kutuplarının çekmek için gerekli olan şartlar incelenecektir. Bölüm 3.1'de geliştirilen sıklık bölgesi tasarım algoritması verilecektir. Bölüm 4.1'de ise belirlenen 4 yeni bölge için incelenen örnekler verilecektir. Bu 4 bölgede sıklık bölgesi yaklaşımı ilk defa bu çalışmada gerçekleştirilmiştir. Arcasoy'un frekans bölgesinde ayrık zamanlı çok girişli çok çıkışlı sistemlerde optimal kazanç matrisinin elde edilmesine dayalı algoritması verilmiştir [7]. Görüngenel ayrışımaya dayalı algoritma Arcasoy tarafından kare olmayan aktarım matrisine uygulanabilecek şekilde geliştirilmiştir. Gaz türbini problemi ele alınarak algoritmanın kare ve kare olmayan aktarım matrisine uygulanabilirliği incelenmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

a. OPTİMAL KONTROL

Optimal kontrol problemleri ve buna getirilen çözümler, bilgisayar destekli benzetim yazılımları ve sayısal çözümlene algoritmalarının geliştirilmesiyle oldukça yol kat etmiştir.

Kontrol sisteminin optimizasyon kavramı, başarıml indisi seçimi ve fiziksel sınırlamalar dahilinde optimal kontrol sistemi tasarımını içerir. Bu tür optimal kontrol sistemleri idealden farklıdır; optimal sistemler fiziksel sınırlamalar dahilinde en iyiye ulaşabilmesine rağmen ideal sistemler en iyi amaca rahatlıkla ulaşamayabilir.

b. OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU

Kontrol sisteminin optimizasyonu probleminde durum değişkenleri, kontrol değişkenleri ve sistemin parametreleri kullanılır. Sistem parametreleri, problemin özelliklerine göre belirlenen sabitlerdir. Genellikle kontrol sistemlerinin optimizasyon probleminin formüle edilmesinde aşağıdaki veriler kullanılır [23,24]:

- i- Sistem durum denklemleri veya çıkış eşitliği
- ii- Kontrol vektörü
- iii- Problemin sınırlamaları
- iv- Başarıml indisi
- v- Sistem parametreleri

Optimal kontrol problemi; kabul edilebilen kontrol vektörlerinin oluşturulduğu gruptan, en iyi kontrolü sağlayacak $u(t)$ vektörünün hesaplanmasıdır.

$u(t)$ vektörü ;

- i- Başlangıç durumu veya başlangıç çıkışına,
- ii- İstenilen durum ve istenilen çıkışa,
- iii- Sıralandırmalarının yapısına,
- iv- Başarım indisinin yapısına

bağlıdır.

c. BAŞARIM İNDİSİ

Optimal kontrol sistemi problemlerinin çözümünde, ölçülebilen bazı ideal hareketten sapmaları minimize yapacak, belirli sınırlamaları içeren, kontrol vektörünün hesaplanması için kuralların bulunduğu bir amaç, hedef olmalıdır.

Başarım indisi, değeri sistemin gerçek başarısına eşdeğer, istenen başarının nasıl olduğunu gösteren bir fonksiyondur. Birçok uygulamada seçilen başarım indisini minimize yapan kontrol vektörüyle sistem hareketleri optimize edilir.

Başarım indisi, optimal kontrol sonuçlarının hesaplanmasında kullanılması nedeniyle önemlidir. Kontrol sonuçları başarım indisine bağlı olarak doğrusal, doğrusal olmayan, durağan veya zamana bağımlı olabilir. Problemin koşuluna bağlı olarak indis formüle edilir. Bu koşullar, genellikle başarım isteklerine bağlı olmakla birlikte, fiziksel gerçekleştirmeleri sağlayacak kontrol yapısındaki kısıtlamalara da bağlıdır.

d. ZAMAN BÖLGESİNDE OPTİMİZASYON PROBLEMİ

Optimal kontrol sistemi probleminin çözümünde hedef, ölçülebilen bazı ideal hareketlerden sapmaları minimize edecek, belirli sınırlamaları içeren, kontrol vektörünün hesaplanması için kuralların bulunduğu bir amaçtır [29].

Başarım indisi, değeri sistemin gerçek başarısına eşdeğer, istenen başarının

nasıl olduğunu gösteren bir fonksiyondur. Birçok uygulamada seçilen başarımların indisini minimize eden kontrol vektörü ile sistem davranışları en iyi duruma (optimuma) getirilir [26].

Başarımların indisini, optimal kontrol sonuçlarının hesaplanmasında kullanılması nedeni ile önemlidir. Kontrol sonuçları başarımların indisine bağlı olarak doğrusal, doğrusal olmayan, zamanla değişmeyen (durağan) ya da zamanla değişen (zaman-bağımlı) olabilir. Problemin koşuluna bağlı olarak indis formüle edilir. Bu koşullar, genellikle başarımların isteklerine bağlı olmakla beraber, fiziksel gerçekleştirmeleri sağlayacak kontrol yapısındaki kısıtlamalara da bağlıdır [26].

i. Sürekli-Zaman Sistemlerin Optimizasyon Problemi

Sürekli-zaman sistem durum denklemleri;

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.6)$$

olarak verildiğinde, $x(t)$ n boyutlu durum vektörü, $u(t)$ m boyutlu kontrol vektörü, $y(t)$ l boyutlu çıkış vektörü, A , B ve C ise uygun boyutlarda sabit gerçel matrislerdir.

Sistemin minimize yapılmak istenen başarımların indisini kuadratik olarak seçildiğinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (2.7)$$

$Q(n \times n)$ boyutunda yarı kesin pozitif tanımlı, $R(m \times m)$ boyutunda kesin pozitif tanımlı, gerçel ağırlık matrisleridir.

$$P + Q - PBR^{-1}B^T P + PA + A^T P = 0 \quad (2.8)$$

Eşitliği ile verilen sürekli-zaman matris-riccati eşitliğinde P , sürekli-zaman Matris-Riccati eşitliğinin pozitif tanımlı simetrik tek çözümüdür. P yukarıdaki eşitlikten çözüldüğü takdirde,

$$u = -Kx(t) \quad (2.9)$$

Optimal kontrol yasasına göre,

$$K = R^{-1}B^T P \quad (2.10)$$

Eşitliğiyle optimal geri-besleme kazancı bulunabilir.

ii. Ayrık-Zamanlı Sistemlerin Optimizasyon Problemi

Ayrık-zamanlı sistem için de sistem başarımlı indisi kuadratik olarak seçildiğinde:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} x^T(k) Q_x(k) + u^T(k) R u(k) \quad (2.11)$$

olarak yazılabilir. Q yarı kesin pozitif tanımlı, R ise pozitif tanımlı reel ağırlık matrisleridir

$$P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (2.12)$$

Eşitliği ile verilen aynı-zamanlı Matris - Riccati eşitliğinde P pozitif tanımlı ayrık-zamanlı Matris-Riccati eşitliğinin simetrik tek çözümüdür. Aynı-zamanlı optimal kazanç matrisi K , P matrisine bağlı olarak,

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (2.13)$$

olarak elde edilir[26]

e. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN
SIKLIK BÖLGESİ TASARIM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde kesikli sistemin optimal geri besleme kazancının hesaplanmasında Arcasoy (1972,1990)'un polinom matrislerin görüngenel ayrışımına (spectral factorization) dayalı yöntem incelenerek algoritma [6] verilecektir.

i. Ayrık-Zamanlı Sistemin Dönüş-Fark ve Dönüş-Oranı
Matrisleri

Ayrık-zamanlı sistem durum denklemleri,

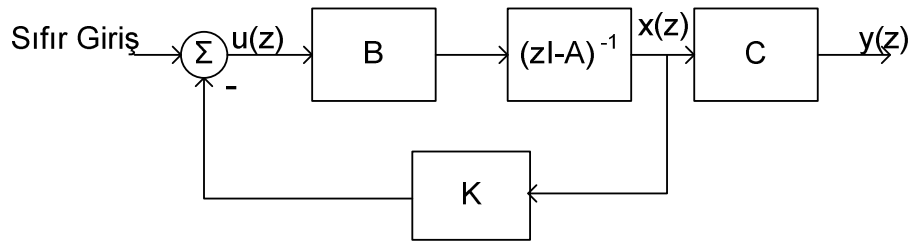
$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \quad (2.14)$$

$$y(k)=Cx(k) \quad (2.15)$$

ve doğrusal kontrol yasası,

$$u(k)=-K(k)x(k) \quad (2.16)$$

olarak verilir. Eğer k basamak indisi çok büyük ise $K(k)$ geri-besleme kazanç matrisi sabit bir K matrisine dönüşecektir [5]. Böyle bir sistem şekil 2.5.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Ayrık-Zamanlı Optimal Geri-Beslemeli Kontrol Sistemi

Şekil 2.1'de gösterilen geri-besleme döngüsünün, şekil 2.2.'de gösterilen a noktasından çıkarak $a(z)$ sinyali uygulandığında, a' noktasına geri dönen sinyal

$$-K(zI-A)^{-1}B \alpha(z) \quad (2.17)$$

ve uygulanan sinyal ile geri dönen sinyal arasındaki fark,

$$[I + K(zI - A)^{-1}] \alpha(z) = F(z) \alpha(z) \quad (2.18)$$

olarak elde edilir. Burada;

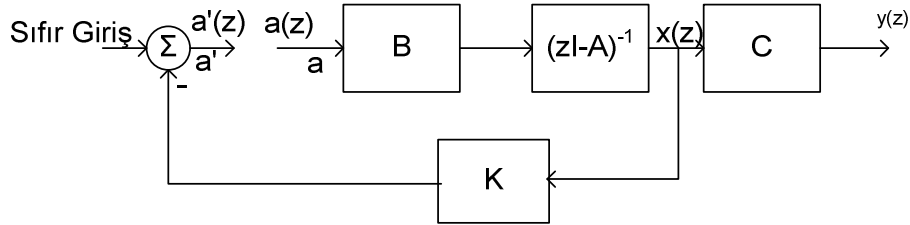
$$F(z) \underline{\Delta} I + K(zI - A)^{-1} B \quad (2.19)$$

geri-besleme sisteminin dönüş-fark matrisi olarak tanımlanır. $Z(z)$ ise aşağıdaki eşitlik ile verilerek dönüş-oran matrisi olarak tanımlanır.

$$Z(z) \underline{\Delta} K(zI - A)^{-1} B \quad (2.20)$$

Böylece sistemin dönüş-fark ve dönüş-oran matrisleri arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$F(z) = I + Z(z) \quad (2.21)$$



Şekil 2.2. Optimal Kontrol Sistemi İçin Dönüş-Fark Matrisinin Hesaplanması.

ii. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Tasarımında Görüngesel Ayrışımın Kullanılması

Optimal sistemin başarımlı görümlü matrisinin görümlü ayrışımının, sistemin dönüş-fark matrisini verdiği gösterilmişti. Bu bölümde görümlü ayrışım kullanılarak, optimal denetleyici tasarımı Matris Riccati eşitliği çözümlenmeden yapılacaktır.

1. Tanımlar ve gerekli tasarım yöntemleri

Tanım 1: Ayrık-zamanlı sistemlerde aktarım fonksiyonu matrisi $G(z)$, $z \rightarrow \infty$ için $G(z) \rightarrow 0$ koşulunu sağlıyor ise tanımlıdır (proper).

Kanıt:

Ayrık-zamanlı sistem aktarım fonksiyonu eşitlik (2.22) ile verilmiştir.

Leverrier algoritması kullanılarak $(zI-A)^{-1}$ 'in açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(zI-A)^{-1} = \frac{z^{n-1}I_n + z^{n-2}(AF_0 + d_1I) + \dots}{z^n + d_1z^{n-1} + \dots} \quad (2.22)$$

Sistem aktarım fonksiyonu matrisi,

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI-A)^{-1}B \\ G^T(z^{-1}) &= B^T(z^{-1}I-A^T)^{-1}C^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

(2.22)'de kullanıldığında ve $z \rightarrow \infty$ yapılırsa $G(z) \rightarrow 0$ olarak elde edilir. Ayrık-zamanlı sistemi için, tek dönüş-fark matrisi $F_u(z)$, sürekli-zamanda olduğu gibi tanımlanır.

$$z \rightarrow \infty \text{ için } F_u(z) \rightarrow I \quad (2.24)$$

Başarım görüngenel yoğunluk matrisinin görüngenel ayrışımı tek olmadığından birçok dönüş-fark matrisi elde edilebilir. Bu durumda tek yörüngenel ayrışım $\Phi(z)$ 'den elde edilen tek dönüş-fark $F_u(z)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2:

Herhangi bir $\Phi_s(z)$ ayrışımı, ayrık-zamanlı başarım görüngenel yoğunluk matrisinin görüngenel ayrışımı sonucu elde edilmiş olsun. Tek dönüş-fark matrisi

$F_u(z)$, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F_u(z) = \Phi_s^{-1}(\infty) \Phi_s(z) \quad (2.25)$$

$$F_u(z) = F_s^{-1}(\infty) F(z) \quad (2.26)$$

Kanıt: Bu önermenin kanıtı sürekli zaman ile aynıdır. (2.26)'da

$$F(z) = I + K(zI - A)^{-1} B \quad (2.27)$$

yerine yazıldığında;

$$F_u(z) = I + K(zI - A)^{-1} B = \Phi_s^{-1}(\infty) \Phi_s(z) \quad (2.28)$$

veya

$$K(zI - A)^{-1} B = \Phi_s^{-1}(\infty) \Phi_s(z) - I = Z(z) \quad (2.29)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $Z(z)$, ayrık-zamanlı dönüş-oranı matrisi olarak tanımlanmıştır. Dönüş-oranı matrisi aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

i) $Z(z)$ tanımlı (proper)

ii) $[d(z)Z(z)]$, $(n-1)$ derecesinde polinom bir matristir.

Burada $d(z) = \det(zI - A)$ ve n , A matrisinin boyutudur.

iii. Ayrık-Zamanlı Optimal Kontrol Problemi İçin Sıklık Bölgesi Tasarım Yöntemleri

Ayrık-zamanlı sistem için iki yöntem aşağıda verilmiştir.

1. Optimal denetleyicinin görüngenel ayrışımı ile hesaplanması

(Yöntem 1)

Sistemin A , B , C parametreleri ve başarm indisi ağırlık matrisleri Q ve R verilmiş ise aşağıda verilen algoritma [5] ile sıklık bölgesinde optimal kontrol problemi çözülür.

Adım 1: Sistem aktarım matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (2.30)$$

Sistem açık döngü aktarım matrisi kullanılarak görüngenel yoğunluk matrisi ;

$$\psi(z) = R + G^T(z^{-1})QG(z) \quad (2.31)$$

olarak hesaplanır.

Adım 2: $\psi(z)$ görüngenel yoğunluk matrisi kullanılarak , görüngenel çarpanlarına ayrılır.

$$\psi(z) = \Phi^T(z^{-1})\Phi(z) \quad (2.32)$$

Adım 3: Optimal denetleyicinin dönüş-fark matrisi bulunur.

$$F(z) = \Phi^{-1}(\infty)\Phi(z) \quad (2.33)$$

Adım 4:

$$d(z) = \det(zI - A) = z^n + d_1z^{n-1} + \dots + d_n \quad (2.34)$$

$$Z(z) = F(z) - I \quad (2.35)$$

olmak üzere;

$$d(z)Z(z) = Z_0z^{n-1} + Z_1z^{n-2} + \dots + Z_{n-1} \quad (2.36)$$

matris çok terimli hesaplanır.

Adım 5: $[V]$ matrisi aşağıdaki yapıda hesaplanır.

$$[V] = [V_0 | V_1 | \dots | V_{n-1}] \quad (2.37)$$

burada;

$$\begin{aligned} V_0 &= Z_0 \\ V_p &= Z_p + \sum_{i=1}^p c_{j-1} Z_{p-j} \quad p = 1, 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

ve

$$\begin{aligned} c_0 &= -d_1 \\ c_p &= -d_{p+1} - \sum_{i=1}^p d_j c_{p-j} \quad p = 1, 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

olarak hesaplanır.

Adım 6: Optimal denetleyici kazanç matrisi,

$$K = [V]M_c^T (M_c M_c^T)^{-1} \quad (2.40)$$

olarak hesaplanır.

Eğer sistem tek girişli ise M_c matrisi (nxn) boyutlu bir kare matris olacağından kazanç matrisi

$$K = [V]M_c^{-1} \quad (2.41)$$

olacaktır. Böylece sistem A, B, C parametreleri ve Q, R ağırlık matrisleri ile optimal geri-besleme kazanç matrisi K hesaplanmış olur.

2. Optimal denetleyicinin görüngenel ayrışım ile

hesaplanması

(Yöntem 2)

Eğer sistemin başarımlı görünel yoğunluk matrisi verilmiş ise, başarımlı görünel matrisinin görünel ayrışımı ve minimal gerçekteşirimi kullanılarak optimal denetleyicinin tasarımı yapılabilir [5].

Başarımlı görünel yoğunluk matrisi $\psi(z)$ ve A, B verilmiş ise

$$\psi(z) = \Phi(z)(z^{-1})\Phi(z) \quad (2.42)$$

$$F_u(z) = \Phi^{-1}(\infty)\Phi(z) \quad (2.43)$$

Dönüş-oranı matrisi ise;

$$Z(z) = F_u(z) - I = K(zI - A)^{-1}B \quad (2.44)$$

olarak yazılabilir. Sistem dönüş-oranı matrisi $Z(z)$ 'in minimal gerçekteşirimi $\bar{A}, \bar{B}, \bar{K}$ sistem parametreleri elde edilebilir. Gerçek sistem parametreleri A, B ve bunlara bağlı olarak bulunan K matrisleri ile A, B, K matrisleri arasında aşağıda verildiği gibi bir T dönüşüm matrisi vardır.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT \\ \bar{B} &= TB \\ \bar{K} &= KT^{-1} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$(n \times n)$ boyutlu T dönüşüm matrisi, (2.37) eşitliği ile hesaplanabilir.

$$T = (\bar{M}_c)(M_c^T)(M_c M_c^T)^{-1} \quad (2.46)$$

M_c matrisi , $\{A, B\}$ parametrelerinin oluşturduğu denetlenebilirlik matrisidir.

Sistem başarımlı yörünge matrisi ve A, B parametreleri verilmiş ise optimal denetleyici kazanç matrisi için algoritma aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: Eşitlik (2.43) ile tek dönüş-fark matrisi $F_u(z)$ hesaplanır.

Adım 2: Dönüş-oranı matrisinin minimal gerçekleştirimi yapılır.

Adım 3: Eşitlik (2.46) ile T dönüşüm matrisi hesaplanır.

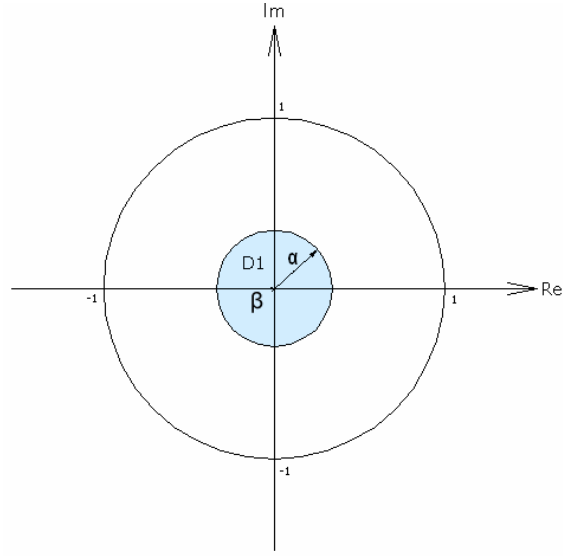
Adım 4: $K = \bar{K}T$ ile optimal kazanç matrisi K hesaplanır.

f. AYRIK-ZAMANLI OPTİMAL KONTROLDE SIKLIK BÖLGESİNDE ÖZDEĞERLERİN BELİRLİ BİR BÖLGE İÇERİSİNE ATILMASI

Ayrık-zamanlı sistemlerde kararlılık için sistemin kapalı çevrim kutuplarının karmaşık düzlemde birim çember içerisinde olması gerekir. Sistemin geçici-tepkisi istenildiği gibi veya uygun olmayabilir. Bu durumlarda sistemin kapalı-çevrim kökleri kararlı bölge içerisinde yer alan önceden belirlenmiş bir bölge içerisine çekilmesi gereklidir.

Bu bölümde sistemin kapalı-çevrim kutuplarını önceden belirlenen 4 ayrı yeni bölgenin içine atacak yöntemler incelenmiştir. Bu 4 yeni bölge aşağıda gösterilmiştir.

2.6.1. Ayrık – Zamanlı Optimal Kontrol Probleminde Özdeğerlerin Sıklık Bölgesinde D1 Diski İçerisine Çekilmesi



Şekil 2.3.D1 $\alpha < 1$ ve $\beta = 0$ Olacak Şekilde Seçilirse Elde Edilen Yeni Bölge
(α =yarıçap, β =merkez)

Aşağıdaki şekilde tanımlanmış olan lineer ayrık-zamanlı sistem verilmiş olsun,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (2.47)$$

burada $x(k)$ boyutu n olan durum vektörü, $u(k)$ boyutu r olan giriş vektörü ve $y(k)$ boyutu m olan çıkış vektörüdür. $\{A, B\}$ çiftinin denetlenebilir olduğunu düşünelim. Başarım indisi daha öncede incelendiği üzere aşağıda verildiği gibidir.

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T(k)Qx(k) + 2x^T(k)Su(k) + u^T(k)Ru(k)\} \quad (2.48)$$

Burada Q, R ve S sırasıyla boyutları $n \times n$, $n \times r$, $r \times r$ olan ağırlık matrisleridir ve aralarında olması gereken ilişki aşağıda verildiği şekildedir:

$$Q-SR^{-1}S^T \geq 0, \quad R > 0 \quad (2.49)$$

Bilindiği üzere (2.47)'de verilen sistem için (2.48) eşitliğinde tanımlanan J başarımlı indisini minimum yapacak optimal kontrol için geri-besleme yasası,

$$u(k) = -Kx(k) \quad (2.50)$$

biçimindedir. Burada optimal geri-besleme kazancı

$$K = (B^T PB + R)^{-1} (B^T PA + S^T) \quad (2.51)$$

olarak elde edilir. Burada P cebirsel Matris Riccati eşitliğinin maksimal çözümüdür.

$$P = A^T PA + Q - (A^T PB + S)(B^T PB + R)^{-1} (B^T PA + S^T) \quad (2.52)$$

Aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı-çevrim sistemde,

$$x(k+1) = A_c x(k) \quad (2.53)$$

ve

$$A_c = (BR^{-1}B^T P + I)^{-1} (A - BR^{-1}S^T) \quad (2.54)$$

ile elde edilen A_c 'nin kararlı olacağı açıktır yani A_c matrisinin tüm özdeğerleri karmaşık düzlemdeki birim çember içinde yer alacağı garantidir.

Burada amacımız ayrık-zamanlı sistemlerin köklerini merkezi orijinde ve yarıçapı $\alpha < 1$ olan bir disk içerisine çekmektir. Bu kısım boyunca (2.48) eşitliğindeki başarımlı indisinin S ağırlık matrisi sıfır ($S=0$) alınacaktır. Böylece eşitlik (2.52) ve (2.54)'de verilen Matris Riccati eşitliği ve kapalı çevrim matrisi aşağıdaki şekle dönüşürler [34]:

$$P = A^T PA + Q - A^T PB(B^T PB + R)^{-1} B^T PA \quad (2.55)$$

veya

$$P = A^T P (BR^{-1} B^T P + I)^{-1} A + Q \quad (2.56)$$

ve

$$A_c = (BR^{-1} B^T P + I)^{-1} A \quad (2.57)$$

olarak belirlenir, R Ağırlık matrisi keyfi olarak belirlenebilir. Burada amacımız, optimal kapalı çevrim sistemin köklerinin karmaşık düzlemde birim çember içerisinde bulunacak orijin merkezli ve $\alpha < 1$ yarıçaplı DI diskinin içerisine çekecek Q ağırlık matrisini elde etmektir .

İstediğimiz sonuca ulaşmak için cebirsel Matris Riccati eşitliğinin bazı özelliklerini kullanacağız. A matrisinin özdeğerlerinden α yarıçaplı disk içerisinde bulunanlar $\lambda_i, (i = 1, \dots, p)$, ve bu diskin dışındakiler de $\mu_j, (j = 1, \dots, n-p)$ ile gösterilecektir. λ_i 'lerden oluşan A matrisinin öz-vektörü $v_j, (i = 1, \dots, p)$ ile gösterilecektir. Burada önemli bir nokta A matrisinin orijinde ve α yarıçaplı çember üzerinde özdeğere sahip olmadığını farz ediyoruz.

Ön Kuram 1:

P , eşitlik (2.55) ve (2.56) ile verilen Matris Riccati eşitliğinin maksimal çözümü olsun ve A_c de eşitlik (2.57) ile verilen kapalı çevrim sistemin katsayı matrisi olsun. Eğer v_i , Q 'nun özüne ait ise buna göre

$$QV_i = 0 \quad (2.58)$$

ise λ_i de A_c kapalı çevrim matrisinin özdeğerleridir ve v_i buna uygun öz-vektörüdür.

Kanıt:

H aşağıdaki şekilde tanımlanan simplektik $2n \times 2n$ boyutunda bir matris olsun.

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T(A^T)^{-1}Q & -BR^{-1}B^T(A^T)^{-1} \\ -(A^T)^{-1}Q & (A^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Eşitlik (2.58) ve (2.59) ile λ_i ve v_i tanımlarını kullanarak şu eşitliği elde edebiliriz:

$$H \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

H 'nin özdeğerleri ile verilen optimal sistemin kapalı çevrim kutupları birim diskin içerisinde $|\lambda_i| < \alpha < 1$ şartı göz önünde bulundurulduğunda eşitlik (2.60) şunu gösterir: λ_i , A_c kapalı çevrim matrisinin özdeğerleri ve v_i de buna uygun öz-vektörüdür.

Ön Kuram 2:

P , eşitlik (2.56) ile verilen Matris Riccati eşitliğinin $Q=0$ alınmasıyla elde edilen maksimal çözümü olsun. Bu durumda (2.56) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir[35]:

$$P = A^T P (BR^{-1}B^T P + I)^{-1} A \quad (2.61)$$

Bu durumda aşağıdaki ilişki ortaya çıkar[35]:

$$P_{v_i} = 0 \quad (i=1, \dots, p) \quad (2.62)$$

Kanıt:

$Q \geq 0$ olduğu göz önüne alındığında (2.55) eşitliğinden

$$P \leq A^T P A \quad (2.63)$$

olacağı görülür[35]. λ_i 'ye bağlı olarak v_i 'nin A matrisinin öz-vektörü olduğu göz

önünde bulundurulduğunda aşağıdaki eşitliği bulabiliriz[35]:

$$v_i^* P v_i \leq v_i^* A P A v_i = |\lambda_i|^2 v_i^* P v_i \quad (2.64)$$

burada * üstsimgesi eşlenik devriği (conjugate transpose) anlamındadır, $|\lambda_i| < \alpha < 1$ eşitsizliği ile (2.64) eşitliğinden,

$$v_i^* P v_i = 0 \quad (2.65)$$

sonucunu çıkarabiliriz. Böylece (2.62) eşitliği sağlanmış olur.

Ön kuram 3:

A, B matrisleri aşağıdaki gibi tanımlı olsun;

$$\hat{A} = \frac{1}{\alpha} A, \quad \hat{B} = \frac{1}{\alpha} B \quad (2.66)$$

\hat{P} aşağıda eşitlik (2.67) ile verilen Matris Riccati eşitliğinin maksimal çözümü olsun.

$$\hat{P} = \hat{A}^T \hat{P} (\hat{B} R^{-1} \hat{B}^T \hat{P} + I)^{-1} \hat{A} \quad (2.67)$$

ve \hat{A}_c aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{A}_c = (\hat{B} R^{-1} \hat{B}^T \hat{P} + I)^{-1} \hat{A} \quad (2.68)$$

Bu durumda A_c 'nin özdeğerleri $\lambda_i, (i=1, \dots, p)$ ve $\frac{\alpha^2}{\mu_j}, (j=1, \dots, n-p)$ olur.

Kamıt:

(2.66) eşitliğindeki dönüşüm ile A 'nın özdeğerleri $\lambda_i / \alpha, (i=1, \dots, p)$ ve

$\mu_j / \alpha, (j = 1, \dots, n - p)$ olur. (2.67)'deki Matris Riccati eşitliğine bağlı olarak simplektik H matrisi aşağıdaki şekli alır:

$$H = \begin{bmatrix} \hat{A} & -\hat{B}R^{-1}\hat{B}^T(\hat{A}^T)^{-1} \\ 0 & (\hat{A}^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Böylece H matrisinin özdeğerleri \hat{A} ve bunun tersi \hat{A}^{-1} olur . Burada eşitlik (2.68) göz önüne alındığında

$$(\hat{B}R^{-1}\hat{B}^T\hat{P} + I)^{-1}\hat{A} = \frac{\hat{A}_c}{\alpha} \quad (2.70)$$

olacağı görülür ve (2.70) eşitliğinin sol tarafı (2.69) eşitliğine bağlı kapalı-çevrim matrisidir. Böylece H ile verilen \hat{A}_c / α 'nın özdeğerleri birim diskin içinde olur. Bu nedenle \hat{A}_c 'nin özdeğerleri $\lambda_i, (i = 1, \dots, p)$ ve $\alpha^2 / \mu_j \quad (j = 1, \dots, n - p)$ olacağı görülür. Yukarıdaki ön kuramlar ışığında aşağıdaki kuramları inceleyelim

Kuram 1

\hat{P} eşitlik (2.67) ile verilen Matris Riccati eşitliğinin ve P ise eşitlik (2.56) ile verilen Matris Riccati eşitliklerinin (2.71) ile verilen Q ağırlık matrisi kullanılarak elde edilen maksimal çözümler olsun.

$$Q = \frac{\hat{P}}{\alpha^2} \quad (2.71)$$

Bu durumda eşitlik (2.57) içerisindeki $A_c, \lambda_i, (i = 1, \dots, p)$ özdeğerlerine sahiptir ve en azından λ_i dışında bir özdeğer (veya bir çift karmaşık özdeğer) α yarıçaplı D_I diski içerisinde olur [34].

Kanıt:

İlk önce, ön kuram 2, eşitlik (2.62)'deki Matris Riccati eşitliğine uygulanırsa;

$$\tilde{P}v_i = 0 \quad , \quad (i=1, \dots, p) \quad (2.72)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eşitlik (2.66)'teki A matrisinin v_i öz-vektörü, λ_i ye uygun olarak \tilde{A} matrisinin de öz-vektörüdür. Eşitlik (2.71) ve (2.72)'dan , \tilde{P}/α^2 ağırlık matrisi koşul (2.58)'i sağlar. Böylece ön kuram 1'den şu sonucu çıkarabiliriz: λ_i , $(i=1, \dots, p)$, A_c 'nin özdeğerleridir. Burada ön kuram 3'den de şu sonucu çıkarabiliriz: A_c ve \tilde{A}_c özdeğerleri eşittir ve λ_i , $(i=1, \dots, p)$ 'dir.

Şimdi λ_i , $(i=1, \dots, p)$ dışındaki özdeğerleri ele alalım. Eşitlik (2.55) ve (2.71)

$$P \geq \tilde{P}/\alpha^2 \quad (2.73)$$

çıkartılabilir. Böylece eşitlik (2.57) ve eşitlik (2.73) kullanılarak

$$\begin{aligned} \det\{BR^{-1}B^T P + I\} &= \det\{R^{-1/2}B^T P + I\} \\ &\geq \det\left\{R^{-1/2}B^T \frac{\tilde{P}}{\alpha^2} BR^{-1/2} + I\right\} \\ &= \det\left\{R^{-1/2}\tilde{B}^T \tilde{P}\tilde{B}R^{-1/2} + I\right\} \\ &= \det\left\{\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T \tilde{P} + I\right\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

elde edilebilir. Eşitlik (2.57), (2.68) ve (2.74)'den şu sonucu çıkarabiliriz:

$$|\det(A_c)| \leq |\det(\tilde{A}_c)| \quad (2.75)$$

A_c 'nin λ_i , $(i=1, \dots, p)$ dışındaki özdeğerlerini ν_j , $(j=1, \dots, n-p)$ ile gösterelim. Ön kuram 3'ü göz önünde bulundurduğumuzda \tilde{A}_c 'nin özdeğerlerinin λ_i , $(i=1, \dots, p)$ ve α^2/μ_j $(j=1, \dots, n-p)$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece eşitlik (2.75)'ten

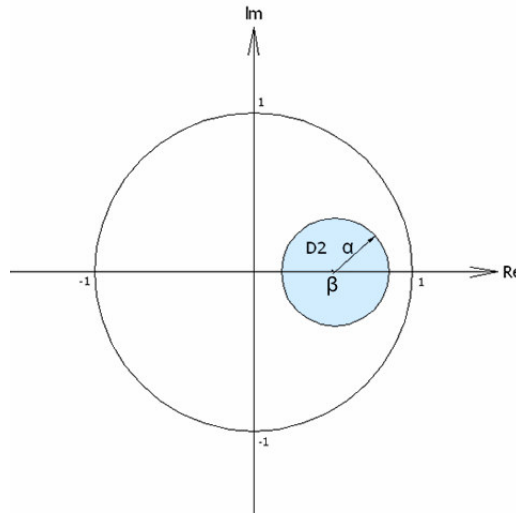
$$\prod_{j=1}^{n-p} |v_i| \leq \prod_{j=1}^{n-p} \left| \frac{\alpha^2}{\mu_j} \right| \quad (2.76)$$

eşitsizliği elde edilebilir. Fakat

$$\left| \frac{\alpha^2}{\mu_j} \right| < \alpha \quad , \quad (j = 1, \dots, n-p) \quad (2.77)$$

olduğu dikkate alındığında eşitlik (2.77)'den en azından bir v_i ve ya bir karmaşık çiftin α yarıçaplı D_1 diski içerisinde olacağı sonucu ortaya çıkar. Bu bölgeyle ilgili örnekler ilerde verilecektir.

2.6.2. Ayrık – Zamanlı Optimal Kontrol Probleminde Özdeğerlerin Sıklık Bölgesinde D2 Diski İçerisine Çekilmesi



Şekil 2.4.D2 $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ Olacak Şekilde Seçilirse Elde Edilen Yeni Bölge

(α = yarıçap, β = merkez, $\beta > 0$)

Doğrusal, zamanla değişmeyen ayrık-zamanlı denetlenebilir bir sistemi ele alalım.

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\quad (2.78)$$

Burada amaç ele alınan başarıml indisini minimize etmek ve aynı zamanda kapalı-çevrim kutuplarını şekil (2.4) 'de görüldüğü gibi diskin içerisine yerleştirecek bir optimal kontrol problemini formüle etmektir. Eşitlik (2.78)' de sistem dinamiği $Q = Q^T \geq 0$ ve $R = R^T > 0$ olmak üzere;

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2k} \{x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)\} \quad (2.79)$$

Başarım indisi verildiğinde bunu minimize edecek optimal kontrolün $r = \alpha$ yarıçaplı orijin merkezli disk üzerinde kapalı-çevrim kutuplara sahip olacaktır .

Eşitlik (2.79) ile verilen başarıml indisini minimize eden, geri-besleme kontrolü ile tüm kutupları $-\beta$ kadar kaydırılırsa, o zaman tüm kutupların D2 diski içinde olacağı açıktır. Yani eğer

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= A_{\beta}\bar{x}(k) + B\bar{u}(k) \\A_{\beta} &= A - \beta I\end{aligned}\quad (2.80)$$

ise ozaman

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2k} \{\bar{x}^T(k)Q\bar{x}(k) + \bar{u}^T(k)R\bar{u}(k)\} \quad (2.81)$$

ile verilen başarıml indisini minimize eden optimal kontrol, tümü Şekil 2.4'deki diskin içerisinde olan kutuplara sahip olacaktır [35]. Böylece eşitlik (2.78) için oluşan optimal kontrol, eşitlik (2.80) göz önüne alınarak yapılan eşitlik (2.81)'deki başarıml indisinin minimize eden optimal kontrole denk olacak şekilde bir başarıml indisinin bulunmasına

dönüştür.

Kuram 1:

Verilen sistem denklemleri (2.80, 2.81), optimal kontrol problemi için J başarım indisi aşağıdaki eşitlikle ifade edilir :

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2k} \left\{ \left[\sum_{i=0}^k d_{k,i} x(i) \right]^T Q \left[\sum_{i=0}^k d_{k,i} x(i) \right] + \left[\sum_{i=0}^k d_{k,j} u(i) \right]^T R \left[\sum_{i=0}^k d_{k,i} u(i) \right] \right\} \quad (2.82)$$

burada,
$$d_{k,i} = C_1^k (-\beta)^{k-1}, C_1^k = \frac{k!}{(k-i)!i!} \quad (2.83)$$

$Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ ve $(A, B, Q^{1/2})$ aşağıdaki şekilde minimaldir.

i) Eşitlik (2.81)'nin minumum değeri, eşitlik (2.82)'nin minumum değeriyle aynıdır.

ii) Eğer $u(k)$, eşitlik (2.78) ve (2.82) için optimal kontrol ise, $\bar{u}(k)$, eşitlik (2.80) ve (2.81) için de optimal kontroldür ve aynı durum tersi için de geçerlidir.

Kuram 1 'in kanıtı için aşağıdaki ön kuram 1 yazılabilir.

Ön Kuram 1:

$$\bar{x}(k) = \sum_{j=0}^k C_j^k (-\beta)^{k-j} x(j) \quad (2.84)$$

ve
$$\bar{u}(k) = \sum_{j=0}^k C_j^k (-\beta)^{k-j} u(j) \quad (2.85)$$

burada

$$C_j^k = \frac{k!}{(k-j)!j!} \quad (2.86)$$

dönüşümleri ile ;

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.87)$$

olan sistem dinamiği aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$\bar{x}(k+1) = (A - \beta I)\bar{x}(k) + B\bar{u}(k) = A_\beta \bar{x}(k) + B\bar{u}(k) \quad (2.88)$$

Kanıt:

Eşitlik (2.84) ve (2.85)'den $\bar{x}(0) = x(0)$ ve $\bar{u}(0) = u(0)$ olduğu görülür.

Eşitlik (2.84)'den ;

$$\bar{x}(1) = x(1) - \beta x(0) = Ax(0) - \beta x(0) + Bu(0) = (A - \beta I)\bar{x}(0) + B\bar{u}(0) \quad (2.89)$$

yazılabilir. Böylece eşitlik (2.88)'de $k=0$ yazıldığı takdirde denklem doğrudur. Aşağıda eşitlik (2.88)'in $k=p$ ($p=1,2,\dots$) için geçerli olduğunu ispat edeceğiz;

$$\bar{x}(p+1) = (A - \beta I)\bar{x}(p) + B\bar{u}(p) \quad (2.90)$$

(2.90) eşitliğinin sol tarafında (2.84) eşitliği kullanıldığında;

$$\bar{x}(p+1) = \sum_{j=0}^{p+1} C_j^{p+1} (-\beta)^{p+1-j} x(j) = x(k+1) + \sum_{j=1}^p C_j^{p+1} (-\beta)^{p+1-j} x(j) + (-\beta)^{p+1} x(0) \quad (2.91)$$

şeklinde yazılabilir. $c_j^{p+1} = c_j^p + c_{j-1}^p$ olduğunu hatırlayınız. Bu yüzden eşitlik (2.91) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \bar{x}(p+1) &= Ax(p) + Bu(p) + \sum_{j=1}^p C_{j-1}^p (-\beta)^{p+1-j} x(j) \\ &+ \sum_{j=1}^p C_j^p (-\beta)^{p+1-j} x(j) - \beta C_0^p (-\beta)^{p+1} x(0) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Aşağıdaki eşitliği dikkate aldığımızda;

$$\sum_{j=1}^p C_j^p (-\beta)^{p+1-j} x(j) - \beta C_0 (-\beta)^p x(0) = -\beta \sum_{j=0}^p C_j^p (-\beta)^{p-1} c(j) = -\beta \bar{x}(p) \quad (2.93)$$

eşitlik (2.92) şu şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} \bar{x}(p+1) &= AC_p^p x(p) + BC_p^p u(p) + \sum_{j=1}^p C_{j-1}^p (-\beta)^{p+1-j} (Ax(j-1) + Bu(j-1)) - \beta \bar{x}(p) \\ &= AC_p^p x(p) + BC_p^p u(p) + \sum_{j=0}^{p-1} (-\beta)^{p-j} (Ax(j) + Bu(j)) - \beta \bar{x}(p) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Bu eşitlik aşağıdaki şekilde kısaltabilir:

$$\bar{x}(p+1) = A \sum_{j=0}^p C_j^p (-\beta)^{p-j} x(j) + B \sum_{j=0}^p C_j^p (-\beta)^{p-j} u(j) - \beta \bar{x}(p) \quad (2.95)$$

Böylece ;

$$\bar{x}(p+1) = (A - \beta I) \bar{x}(p) + B \bar{u}(p) \quad (2.96)$$

elde edilir.

Ayrıca eşitlik (2.80) ile verilen sistem dinamiği ve eşitlik (2.81) ile verilen başarımlı indisli minimize probleminin daha sonra da bir lineer kuadratik regülâtör problemine indirgenebileceğine dikkat ediniz. Aslında, eğer;

$$\mathcal{X}(k) = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k \bar{x}(k), \quad \mathcal{U}(k) = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k \bar{u}(k) \quad (2.97)$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{\alpha} \right) A_\beta, \quad \mathcal{B} = \left(\frac{1}{\alpha} \right) B \quad (2.98)$$

dersek, o zaman eşitlik (2.80) ile verilen eşitlik şu hale gelir:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (2.99)$$

Eşitlik (2.80) ile verilen başarımlı indisi de şu şekilde yazılabilir:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{ \mathbf{x}(k)Q\mathbf{x}(k) + u(k)Ru(k) \} \quad (2.100)$$

Böylece, eşitlik (2.80)'deki dinamiğe ve eşitlik (2.81)'deki başarımlı indisine göre minimize problemi, (2.99)'daki dinamiğe ve (2.100)'deki başarımlı indisine göre minimize problemine aşağıdaki şekilde denktir:

- a) (2.81) eşitliğinin minimum değeri ile (2.100) eşitliğinin minimum değeri ile aynıdır.
- b) Eğer $u(k) = G(x(k))$, eşitlik (2.99) ve (2.100) için optimal kontrol ise $u(k) = (1/\alpha)^{-1}G((1/\alpha)^p \bar{x}(k))$ eşitliği de, eşitlik (2.80) ve (2.81) için optimal kontroldür ve aynı durum tersi içinde geçerlidir.

Bu yüzden, eşitlik (2.78)'deki sistem dinamikli ve eşitlik (2.82)'deki başarımlı indisli minimize problemi, eşitlik (2.99) sistem dinamikli ve (2.79) başarımlı indisi bir standart LQ optimizasyon problemine indirgenir. Eşitlik (2.99)'daki kısıta tabi olan eşitlik (2.100)'ü minimize eden optimal kontrol kuralı:

$$u_{opt}(k) = -K\mathbf{x}(k) \quad (2.101)$$

Burada

$$K = [R + \mathbf{B}^T P \mathbf{B}] [\mathbf{B}^T P \mathbf{A}] \quad (2.102)$$

ve P ayrık-zamanlı Matris Riccati eşitliğinin pozitif tanımlı simetrik tek çözümüdür. Ayrıca, eğer $[\hat{A}, \hat{B}]$ çifti tamamiyle denetlenebilir veya kararlı hale getirilebilir ise ve $DD^T = Q$ olacak şekilde herhangi $(n \times n)$ boyutunda bir matris olmak üzere $[\hat{A}, \hat{D}]$ tamamiyle gözlemlenebilir ise, o zaman geri-besleme asimptotik olarak kararlıdır. Bu durumda kapalı çevrim sistemi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\hat{x}(k+1) = (\hat{A} - \hat{B}K)\hat{x}(k) \quad (2.103)$$

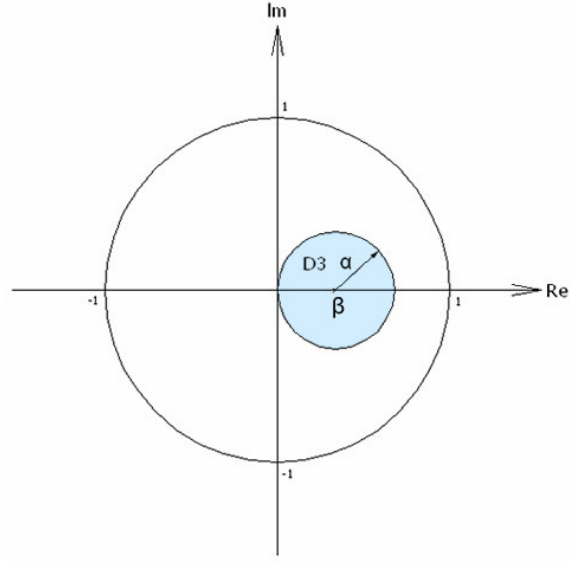
Bu sistemin $(\hat{A} - \hat{B}K)$ 'nin özdeğeri ile verilen kutupları, 1'den küçük özdeğerlere sahip olacağından, buradan $(\hat{A} - \hat{B}K)\hat{x}(k)$ 'nin özdeğerleri α 'dan küçük olur. Bu yüzden,

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) \quad (2.104)$$

eşitliğinin tüm özdeğerleri, α yarıçaplı $(\beta, 0)$ merkezli çemberin içinde olur. Böylece, sistem dinamikleri (2.150)'e tabi olan eşitlik (2.76)'yi minimize eden optimal kontrol, kapalı-çevrimin tüm kutuplarının $(\beta, 0)$ merkezli α yarıçaplı $D2$ diski içerisinde olacağını garanti eder.

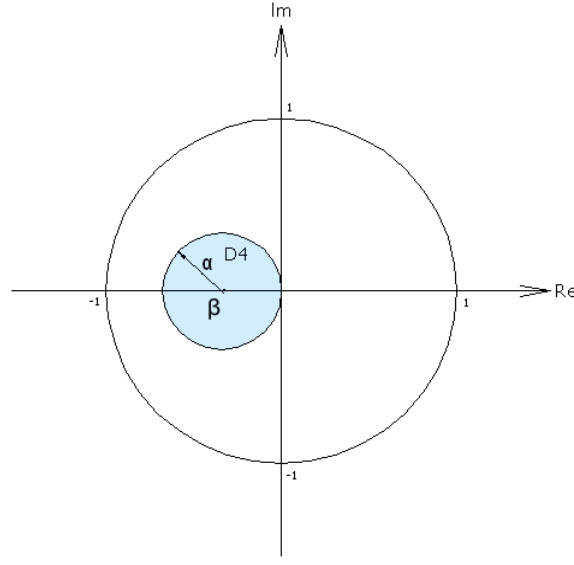
2.6.3. Ayrık – Zamanlı Optimal Kontrol Probleminde Özdeğerlerin Sıklık Bölgesinde $D3$ Diski İçerisine Çekilmesi

Bir önceki Seçilen bölgede $|\alpha| = |\beta| < 0.5$ olacak şekilde seçildiğinde aşağıdaki yeni bölgeyi şekil (2.5) deki gibi tarif edebiliriz.



Şekil 2.5. D3 $|\alpha| = |\beta| < 0.5$ Olacak Şekilde Seçilirse Elde Edilen Yeni Bölge
 (α =yarıçap β =merkez, $\beta > 0$)

2.6.4. Ayrık – Zamanlı Optimal Kontrol Probleminde Özdeğerlerin Sıklık Bölgesinde D4 Diski İçerisine Çekilmesi



Şekil 2.6 D4 $|\alpha| = |\beta| < 0.5$ Olacak Şekilde Seçilirse Elde Edilen Yeni Bölge
 (α =yarıçap β =merkez, $\beta < 0$)

Doğrusal, zamanla değişmeyen ayrık-zamanlı denetlenebilir bir sistemi ele alalım.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (2.105)$$

Burada ele alınan problem, başarıml indisini minimize eden optimal kontrol, aynı zamanda kapalı-çevrim kutuplarını şekil 2.6'da görüldüğü gibi diskin içerisine yerleştirecek bir optimal kontrol problemini formüle etmektir. Eşitlik (2.105)' de sistem dinamiği $Q = Q^T \geq 0$ ve $R = R^T > 0$ olmak üzere;

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2k} \{ x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \} \quad (2.106)$$

Başarım indisi verildiğinde bunu minimize edecek optimal kontrolün $r = \alpha$ yarıçaplı orijin merkezli disk üzerinde kapalı çevrim kutuplara sahip olacaktır.

Başarım indisini minimize eden, geri-besleme kontrolü ile tüm kutupları β

kadar kaydırılırsa, o zaman tüm kutupların şekil 2.3.4 deki gibi dairesel bir bölgenin içinde olacağı açıktır. Yani eğer,

$$\mathbf{x}(k+1) = A_\beta \mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) \quad (2.107)$$

ve

$$A_\beta = A - \beta I$$

ise o zaman

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2k} \left\{ \bar{\mathbf{x}}^T(k) Q \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{u}}^T(k) R \bar{\mathbf{u}}(k) \right\} \quad (2.108)$$

Eşitlik (2.106) ile verilen başarımlı indisini minimize eden optimal kontrol, tümü Şekil 2.3.4'deki diskin içerisinde olan kutuplara sahip olacaktır [34]. Böylece eşitlik (2.105) için oluşan optimal kontrol, eşitlik (2.107) göz önüne alınarak yapılan eşitlik (2.108)'deki başarımlı indisinin minimize eden optimal kontrole denk olacak şekilde bir başarımlı indisinin bulunmasına dönüşür.

Kuram 1:

Verilen sistem denklemleri (2.107, 2.108) optimal kontrol problemi için J başarımlı indisi aşağıdaki eşitlikle ifade edilir [34]:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2k} \left\{ \left[\sum_{i=0}^k d_{k,i} \mathbf{x}(i) \right]^T Q \left[\sum_{i=0}^k d_{k,i} \mathbf{x}(i) \right] + \left[\sum_{i=0}^k d_{k,j} \mathbf{u}(i) \right]^T R \left[\sum_{i=0}^k d_{k,i} \mathbf{u}(i) \right] \right\} \quad (2.109)$$

$$d_{k,i} = C_1^k (\beta)^{k-1}, C_1^k = \frac{k!}{(k-i)!i!} \quad (2.110)$$

Kuram 1 'in kanıtı için aşağıdaki ön kuram 1 yazılabilir .

Ön Kuram 1:

$$\bar{x}(k) = \sum_{j=0}^k C_j^k (\beta)^{k-j} x(j) \quad (2.111)$$

$$\bar{u}(k) = \sum_{j=0}^k C_j^k (\beta)^{k-j} u(j) \quad (2.112)$$

burada ;

$$C_j^k = \frac{k!}{(k-j)! j!} \quad (2.113)$$

dönüşümleri ile ;

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.114)$$

olan sistem dinamiği aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$\bar{x}(k+1) = (A + \beta I)\bar{x}(k) + B\bar{u}(k) = A_\beta \bar{x}(k) + B\bar{u}(k) \quad (2.115)$$

Eşitlik (2.111) ve (2.112)'den $\bar{x}(0) = x(0)$ ve $\bar{u}(0) = u(0)$ olduğu görülür.

Kanıt:

Eşitlik (2.112)'den ;

$$\bar{x}(1) = x(1) + \beta x(0) = Ax(0) + \beta x(0) + Bu(0) = A + \beta I x(0) + Bu(0) \quad (2.116)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.115)'de $k=0$ yazıldığı takdirde denklem doğrudur.. Aşağıda eşitlik (2.115)'in $k=p$ ($p=1,2,\dots$) için geçerli olduğunu ispat edeceğiz.

$$\bar{x}(p+1) = (A + \beta I)\bar{x}(p) + B\bar{u}(p) \quad (2.117)$$

(2.117) eşitliğinin sol tarafında (2.111) eşitliği kullanıldığında;

$$\bar{x}(p+1) = \sum_{j=0}^{p+1} C_j^{p+1}(\beta)^{p+1-j} x(j) = x(k+1) + \sum_{j=1}^p C_j^{p+1}(\beta)^{p+1-j} x(j) + (\beta)^{p+1} x(0) \quad (2.118)$$

şeklinde yazılabilir. $c_j^{p+1} = c_j^p + c_{j-1}^p$ olduğunu hatırlayınız. Bu denklem göz önünde bulundurulursa aşağıdaki eşitlik (2.118) yazılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{x}(p+1) &= Ax(p) + Bu(p) + \sum_{j=1}^p C_{j-1}^p(\beta)^{p+1-j} x(j) \\ &+ \sum_{j=1}^p C_j^p(\beta)^{p+1-j} x(j) + \beta C_0^p(\beta)^{p+1} x(0) \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\sum_{j=1}^p C_j^p(\beta)^{p+1-j} x(j) + \beta C_0^p(\beta)^{p+1} x(0) = \beta \sum_{j=0}^p C_j^p(\beta)^{p-1} c(j) = \beta \bar{x}(p) \quad (2.120)$$

Yukarıdaki eşitlik dikkate alındığında; eşitlik (2.119) aşağıdaki biçimde yazılabilir,

$$\begin{aligned} \bar{x}(p+1) &= AC_p^p x(p) + BC_p^p u(p) + \sum_{j=1}^p C_{j-1}^p(\beta)^{p+1-j} \cdot (Ax(j-1) + Bu(j-1)) + \beta \bar{x}(p) \\ &= AC_p^p x(p) + BC_p^p u(p) + \sum_{j=0}^{p-1} (\beta)^{p-j} (Ax(j) + Bu(j)) + \beta \bar{x}(p) \end{aligned} \quad (2.121)$$

Bu eşitlik aşağıdaki şekilde kısaltılabilir:

$$\bar{x}(p+1) = A \sum_{j=0}^p C_j^p(\beta)^{p-j} x(j) + B \sum_{j=0}^p C_j^p(\beta)^{p-j} u(j) + b \bar{x}(p) \quad (2.122)$$

böylece ;

$$\bar{x}(p+1) = (A + \beta I) \bar{x}(p) + B \bar{u}(p) \quad (2.123)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik köklerin seçilmiş olan bölge içerisine atılmasını sağlamıştır.

Ayrıca eşitlik (2.107) ile verilen sistem dinamiği ve eşitlik (2.108) ile verilen başarımlı minimize probleminin daha sonra da bir lineer kuadratik regülâtör problemine indirgenebileceğine dikkat ediniz. Aslında, eğer;

$$\mathcal{X}(k) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \bar{x}(k), \quad \mathcal{U}(k) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \bar{u}(k) \quad (2.124)$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{\alpha}\right) A, \quad \mathcal{B} = \left(\frac{1}{\alpha}\right) B \quad (2.125)$$

dersek, o zaman eşitlik (2.107) ile verilen eşitlik şu hale gelir:

$$\mathcal{X}(k+1) = \mathcal{A}\mathcal{X}(k) + \mathcal{B}\mathcal{U}(k) \quad (2.126)$$

Eşitlik (2.108) ile verilen başarımlı indisi de şu şekilde yazılabilir:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{ \mathcal{X}(k) Q \mathcal{X}(k) + \mathcal{U}(k) R \mathcal{U}(k) \} \quad (2.127)$$

Böylece, eşitlik (2.107)'deki dinamiğe ve eşitlik (2.108)'deki başarımlı indisine göre minimize problemi, (2.126)'deki dinamiğe ve (2.127)'deki başarımlı indisine göre minimize problemine aşağıdaki şekilde denktir:

a) (2.108) eşitliğinin minimum değeri ile (2.127) eşitliğinin minimum değeri ile aynıdır.

b) Eğer $\mathcal{U}(k) = G(\hat{x}(k))$, eşitlik (2.126) ve (2.127) için optimal kontrol ise

$\bar{u}(k) = (1/\alpha)^{-1} G((1/\alpha)^p \bar{x}(k))$ eşitliği de, eşitlik (2.107) ve (2.108) için optimal kontroldür ve aynı durum tersi içinde geçerlidir.

Bu yüzden, eşitlik (2.105)'deki sistem dinamikli ve eşitlik (2.109)'deki başarımlı indisi minimize problemi, eşitlik (2.126) sistem dinamikli ve (2.106) başarımlı indisi bir

standart LQ optimizasyon problemine indirgenir. Eşitlik (2.126)'deki kısıta tabi olan eşitlik (2.127)'i minimize eden optimal kontrol kuralı:

$$\mathbf{u}_{opt}(k) = -K \mathbf{x}(k) \quad (2.128a)$$

Burada

$$K = \left[R + \mathbf{B}^T P \mathbf{B} \right]^{-1} \left[\mathbf{B}^T P \mathbf{A} \right] \quad (2.128b)$$

ve P ayrık-zamanlı Matris Riccati eşitliğinin pozitif tanımlı simetrik tek çözümüdür. Ayrıca, eğer $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ çifti tamamıyla denetlenebilir veya kararlı hale getirilebilir ise ve $DD^T = Q$ olacak şekilde herhangi $(n \times n)$ boyutunda bir matris olmak üzere $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ tamamıyla gözlemlenebilir ise, o zaman geri-besleme asimptotik olarak kararlıdır. Bu durumda kapalı çevrim sistemi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}K) \mathbf{x}(k) \quad (2.129)$$

Bu sistemin $(\mathbf{A} - \mathbf{B}K)$ 'nın özdeğeri ile verilen kutupları, 1'den küçük özdeğerlere sahip olacağından, buradan $(\mathbf{A} - \mathbf{B}K) \hat{\mathbf{x}}(k)$ 'nın özdeğerleri α 'dan küçük olur. Bu yüzden,

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) \quad (2.130)$$

eşitliğinin tüm özdeğerleri, α yarıçaplı $(-\beta, 0)$ merkezli çemberin içinde olur. Böylece, sistem dinamikleri (2.105)'de tabi olan eşitlik (2.109)'u minimize eden optimal kontrol, kapalı-çevrimin tüm kutuplarının $(-\beta, 0)$ merkezli α yarıçaplı D4 diski içerisinde olacağını garanti eder.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. PROBLEM FORMÜLASYONU

Buradaki amaç, optimal sistemin özdeğerlerinin belirlenen yeni bölgelerde yerleşirilmesi sağlayan Q_I , R_I ve S_I ağırlık matrislerinin bulunmasıdır.

Kesikli zamandan sürekli-zamana geçiş için verilen dönüşüm [33,34]

$$x_{k+1} = -\alpha x(t) - x(t) \quad (3.1a)$$

$$x_k = -\alpha x(t) + x(t) \quad (3.1b)$$

olarak tanımlanır. α yarıçap, β merkez, verilen kesikli sistem matrisleri A ve B olmak üzere kapalı çevrim köklerini seçilen bölgelere seçmek için aşağıdaki dönüşüm yapılır.

$$A_\beta = A - \beta I \quad (3.2a)$$

$$a_y = A_\beta / \alpha \quad (3.2b)$$

$$b_y = B / \alpha \quad (3.2c)$$

Sürekli zaman durum denklemleri aşağıdaki gibi tariflenebilir.

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) \quad (3.3)$$

Kesikli zamanda ise durum denlemi aşağıdaki gibi tariflenir.

$$x_{k+1} = a_y x_k + b_y u_k \quad (3.4)$$

(3.1) ve (3.2) numaralı denklemler kullanılarak aşağıdaki dönüşüm elde edilir.

$$\dot{x}(t) = (a_y - I)^{-1}(a_y + I)x(t) + (a_y - I)^{-1}b_y u(t) \quad (3.5)$$

Denklem (3.3)'den \bar{A} ve \bar{B} matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\bar{A} &= (a_y - I)^{-1}(a_y + I) \\ \bar{B} &= (a_y - I)^{-1}b_y\end{aligned}\tag{3.6}$$

\bar{P} 'in Riccati denkleminin çözümü olduğu kabul edilirse,

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} - \bar{P}\bar{B}\bar{B}^{-1}\bar{B}^T \bar{P} + \bar{Q} = 0\tag{3.7}$$

$$p(t) = \bar{P}x(t)\tag{3.8}$$

ise sürekli-zaman Hamiltonien denklemi [34]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & -\bar{B}\bar{B}^{-1}\bar{B}^T \\ -\bar{Q} & -\bar{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}\tag{3.9}$$

olur. (3.2) ve (3.7)'yi, (3.10)'da kullanırsak,

$$\begin{pmatrix} I & 2\bar{U}^{-1}\bar{B}\bar{B}^{-1}\bar{B}^T(\bar{A}^T - I)^{-1} \\ 0 & (I + 2\bar{U}^{-1})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{I} + 2\bar{U}^{-1} & 0 \\ -2(\bar{A}^T - I)\bar{Q}\bar{U}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}\tag{3.10}$$

Burada

$$\bar{U} = (\bar{A} - I) + \bar{B}\bar{B}^{-1}\bar{B}^T(\bar{A} - I)^{-1}\bar{Q}\tag{3.11}$$

p_k, p_{k+1} (3.2)'ye benzer olarak tanımlanır.

Kesikli Riccati denklemin tek (unique) pozitif definite çözümü P olup

$$P = A^T P A + Q - (A^T P B + S)(B^T P B + R)^{-1}(B^T P A + S^T)\tag{3.12}$$

$$P_k = P x_k\tag{3.13}$$

[33]'de verilen kesikli zaman Hamilton denklemi,

$$\begin{pmatrix} I & BR^{-1}B^T \\ 0 & A^T - SR^{-1}B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABR^{-1}S^T & 0 \\ -Q + SR^{-1}S^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

olarak verilir. (3.10) ve (3.14)

$$\begin{aligned} A - Br^{-1}S^T &= I + 2\bar{U}^{-1} \\ BR^{-1}B^T &= 2\bar{U}^{-1}\bar{B}\bar{R}^{-1}\bar{B}^T(\bar{A}^T - I)^{-1} \\ Q - SR^{-1}S^T &= 2(\bar{A}^T - I)\bar{Q}\bar{U}^{-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

durumları için özdeştir. (3.15) kullanılarak

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(A - I)^T \bar{Q}(A - I) \\ R_1 &= 2\bar{R} + \frac{1}{2}B^T \bar{Q}B \\ S_1 &= \frac{1}{2}(A - I)^T \bar{Q}B \end{aligned} \quad (3.16)$$

Q_1, R_1, S_1 ağırlık matrisleri yukarıdaki eşitliklerden bulunur.

3.2. Bulunan Q_1 Ağırlık Matrisinin Pozitif veya Pozitif Yarı-Tanımlı Olduğunun İrdelenmesi

Bulunan simetrik Q_1 ağırlık matrisinin pozitif veya pozitif yarı-tanımlı olması için $\det(Q_1) \geq 0$ ifadesinde, özdeğerlerinin sıfır veya sıfırdan büyük olması lazımdır.

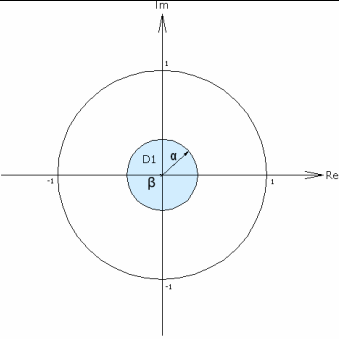
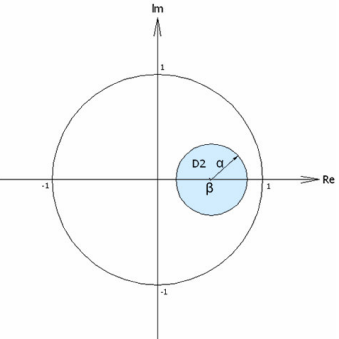
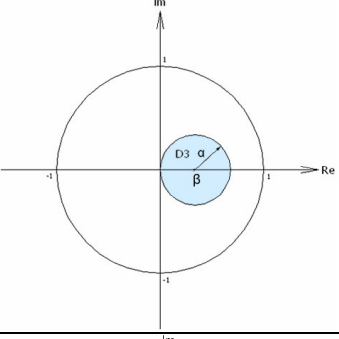
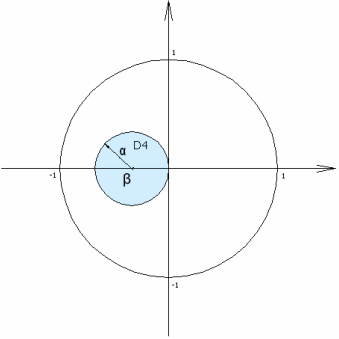
i) Alt matris determinantlarının sıfır veya sıfırdan büyük olması lazımdır .

$$q_{11} \geq 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (3.18)$$

$$Q_1 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1k} \\ q_{12} & \dots & \dots & q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1k} & \dots & \dots & q_{kk} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (3.19)$$

Şayet köşegen ve alt determinantlar sıfır veya pozitif ise $Q_1 \geq$ 'dir.

Bölge	Dönüşüm Denklemleri	Şartları
	<p>Sistem matrisleri A ve B olarak verilmiş ise; kapalı çevrim köklerini $D1$ diski içerisine atmak için gerekli dönüşüm:</p> $\bar{A} = \frac{A}{\alpha} \quad \bar{B} = \frac{B}{\alpha}$ <p>olmalıdır.</p>	<p>α =yarıçap ve β =merkez olmak üzere; kapalı çevrim köklerini $D1$ diski içerisine atmak için gerekli şart:</p> $\alpha < 1 \quad \beta = 0$ <p>olmalıdır.</p>
	<p>Sistem matrisleri A ve B olarak verilmiş ise; kapalı çevrim köklerini $D2$ diski içerisine atmak için gerekli dönüşüm:</p> $\bar{A} = \frac{A - \beta I}{\alpha} \quad \bar{B} = \frac{B}{\alpha}$ <p>olmalıdır.</p>	<p>α =yarıçap ve β =merkez olmak üzere; kapalı çevrim köklerini $D2$ diski içerisine atmak için gerekli şart:</p> $ \alpha + \beta \leq 1 \quad \beta > 0$ <p>olmalıdır.</p>
	<p>Sistem matrisleri A ve B olarak verilmiş ise; kapalı çevrim köklerini $D3$ diski içerisine atmak için gerekli dönüşüm:</p> $\bar{A} = \frac{A - \beta I}{\alpha} \quad \bar{B} = \frac{B}{\alpha}$ <p>olmalıdır.</p>	<p>α =yarıçap ve β =merkez olmak üzere; kapalı çevrim köklerini $D3$ diski içerisine atmak için gerekli şart:</p> $ \alpha = \beta \leq 0.5 \quad \beta > 0$ <p>olmalıdır.</p>
	<p>Sistem matrisleri A ve B olarak verilmiş ise; kapalı çevrim köklerini $D4$ diski içerisine atmak için gerekli dönüşüm:</p> $\bar{A} = \frac{A + \beta I}{\alpha} \quad \bar{B} = \frac{B}{\alpha}$ <p>olmalıdır.</p>	<p>α =yarıçap ve β =merkez olmak üzere; kapalı çevrim köklerini $D4$ diski içerisine atmak için gerekli şart:</p> $ \alpha = \beta \leq 0.5 \quad \beta < 0$ <p>olmalıdır.</p>

Tablo 1. Frekans Bölgesinde, Sistem Kapalı Çevrim Köklerini Seçilen 4 Yeni Bölge İçerisine Atmak İçin Gerekli Dönüşüm Denlem ve Şartları

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. I. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER

Bu bölge için $|\alpha| < 1, \beta = 0$ 'dır

Örnek 4.1 : Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [34] 1988 yılında ele aldıkları örnek incelendiğinde:

Ele alınan sistem matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & -0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} C &= eye(4) \\ Q &= eye(4) \\ R &= eye(2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Olarak verilen örnekte yarıçap ve merkez seçimine göre uyarlanan algoritmadan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Alpha=0.3 ve Beta=0 seçildiği takdirde :

$$a_y = \begin{bmatrix} 3 & 0.6667 & 0 & 0 \\ -0.6667 & 3 & 3.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6667 & 1.3333 \\ 0 & 0 & -1.3333 & -0.6667 \end{bmatrix} \quad (4.4a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 3.3333 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.3333 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 2.2591 & -5.6661 & -6.8949 & -0.2996 \\ -5.6661 & 23.6643 & 31.0272 & 2.0226 \\ -6.8949 & 31.0272 & 40.9971 & 2.7612 \\ -0.2996 & 2.0226 & 2.7612 & 0.2106 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3713 & 0.2990 & 1.3014 & -0.8785 \\ 0.2990 & 0.2768 & 0.9916 & -0.7390 \\ 1.3014 & 0.9916 & 4.6506 & -3.0297 \\ -0.8785 & -0.7390 & -3.0297 & 2.1061 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 7.2653 \\ 0.1394 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \det(Q_1) = -5.3526e-032 \quad (4.7)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 7.2653 \\ 0.1394 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 3.1296 & -3.4475 \\ -3.4475 & 22.4985 \end{bmatrix} \quad (4.9a)$$

$$svdr=svd(R1) = \begin{bmatrix} 23.0939 \\ 2.5342 \end{bmatrix} \quad (4.9b)$$

$$S_{1=} \begin{bmatrix} 0.4537 & -2.7580 \\ 0.5092 & -2.2409 \\ 1.3639 & -9.6369 \\ -1.1992 & 6.5427 \end{bmatrix} \quad (4.10a)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0328 & 0.0224 & 0.1214 & -0.0741 \\ 0.0224 & 0.0431 & 0.0390 & -0.0748 \\ 0.1214 & 0.0390 & 0.5179 & -0.2358 \\ -0.0741 & -0.0748 & -0.2358 & 0.1885 \end{bmatrix} \quad (4.10b)$$

$$svdp = svd(P_1) = \begin{bmatrix} 0.6806 \\ 0.1017 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10c)$$

Seçilen bölge içerisinde özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = \begin{bmatrix} 0.8084 & 0.1731 & -0.0318 & -0.0152 \\ -0.1609 & 0.6507 & 0.4858 & 0.3770 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K aşağıda verilmiştir.

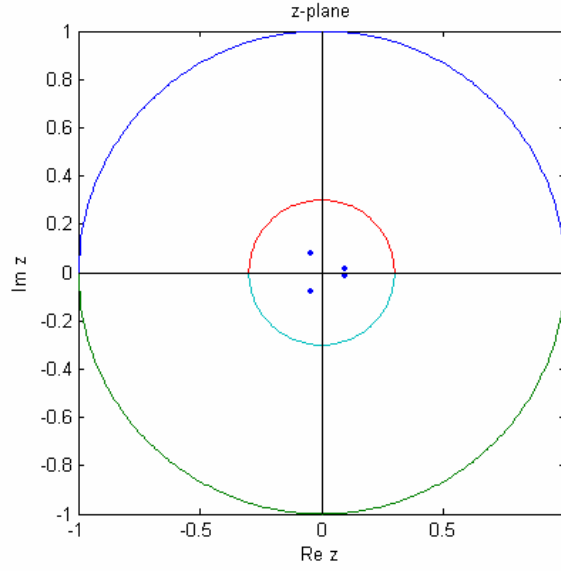
$$K_{ric} = \begin{bmatrix} 0.8084 & 0.1731 & -0.0318 & -0.0152 \\ -0.1609 & 0.6507 & 0.4858 & 0.3770 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.12), sıklık bölgesindeki algoritma [33](Firaz) kullanılarak bulunan K (4.11) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.0413 + 0.0782i \\ -0.0413 - 0.0782i \\ 0.0942 + 0.0165i \\ 0.0942 - 0.0165i \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

olur. Şekil (4.1) de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.1. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0$ Merkezli $D1$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselleştirilmesi

Örnek 4.2 : Toru Fujinaka ve Tohrü Katayama'nın [34] 1998 yılında ele aldıkları örnekte $\alpha = 0.4$ yarıçaplı, $\beta = 0$ merkezli bölge seçildiği takdirde ;

$$a_y = \begin{bmatrix} 2.25 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2.25 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (4.14a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q, R, S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10) 'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1.5719 & -2.5735 & -3.0426 & -0.0916 \\ -2.5735 & 10.2933 & 13.6919 & 0.7784 \\ -3.0426 & 13.6919 & 18.3686 & 1.0777 \\ -0.0916 & 0.7784 & 1.0777 & 0.0703 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlene bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1623 & 0.1258 & 0.5891 & -0.3989 \\ 0.1258 & 0.1344 & 0.4338 & -0.3378 \\ 0.5891 & 0.4338 & 2.1533 & -1.4306 \\ -0.3989 & -0.3378 & -1.4306 & 1.0028 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 3.3798 \\ 0.0729 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \det(Q_1) = -2.1257e-034 \quad (4.17)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir. (3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svdq = svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 3.3798 \\ 0.0729 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2.7859 & -1.5213 \\ -1.5213 & 11.1843 \end{bmatrix} \quad (4.19a)$$

$$svdr = svd(R_1) = \begin{bmatrix} 11.4514 \\ 2.5189 \end{bmatrix} \quad (4.19b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.1788 & -1.2171 \\ 0.2859 & -0.9889 \\ 0.5571 & -4.3908 \\ -0.5536 & 3.0271 \end{bmatrix} \quad (4.19c)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0297 & 0.0174 & 0.1115 & -0.0668 \\ 0.0174 & 0.0381 & 0.0480 & -0.0619 \\ 0.1115 & 0.0480 & 0.4290 & -0.2444 \\ -0.0688 & -0.0619 & -0.2444 & 0.1757 \end{bmatrix} \quad (4.19d)$$

$$svdp = svd(P_1) = \begin{bmatrix} 0.6171 \\ 0.0554 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19e)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = \begin{bmatrix} 0.7283 & 0.1871 & 0.0108 & -0.0124 \\ -0.1653 & 0.6189 & 0.4504 & 0.3692 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

MATLAB dıqr komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

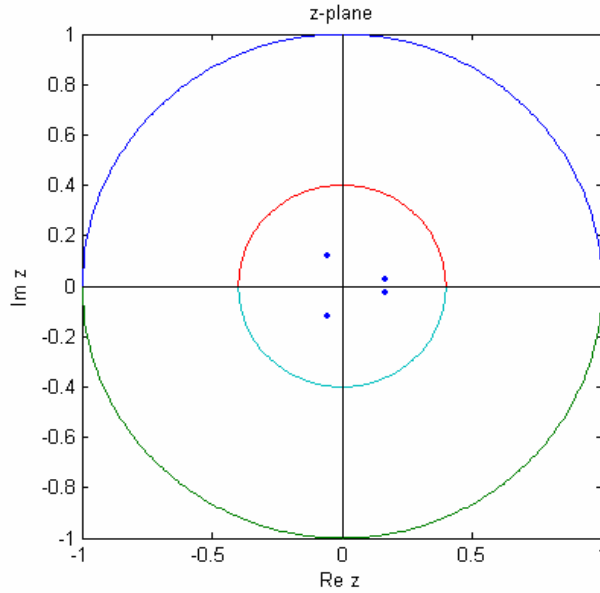
$$K_{ric} = \begin{bmatrix} 0.7283 & 0.1871 & 0.0108 & -0.0124 \\ -0.1653 & 0.6189 & 0.4504 & 0.3692 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.21), sıklık bölgesindeki algoritma [33](Firaz) kullanılarak bulunan K (4.20) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = \text{eig}(A_c) = \begin{bmatrix} -0.0566 - 0.1211i \\ -0.0566 + 0.1211i \\ 0.1672 - 0.0291i \\ 0.1672 + 0.0291i \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

olur ve özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir



Şekil 4.2. $\alpha = 0.4$ Yarıçaplı, $\beta = 0$ Merkezli $D1$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselleştirilmesi

Örnek 4.3 : L.S. Shieh, M.M.Mehio ve Ganesan [22] 'de ele alınan sistem incelenmiştir.Ele alınan sistemin durum matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8220 & -0.4400 & 0.0080 & 0.0741 & 0.0620 \\ 1.2440 & 0.7250 & 0.2490 & 0 & 0.1240 \\ -0.1570 & 0.0980 & 0.7520 & -0.3710 & -0.0140 \\ 0.0370 & 0.1760 & 0.2840 & 0.7240 & -0.2500 \\ -0.6550 & -0.2750 & -0.1310 & 0 & 0.1360 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2710 & 0.0170 \\ -0.1750 & -0.3050 \\ -0.0990 & 0.1960 \\ 0.0680 & 0.0100 \\ 0.0920 & 0.2130 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$C = \text{eye}(5)$$

$$Q = \text{eye}(5) \quad (4.25)$$

$$R = \text{eye}(2)$$

olarak verilen örneğimizde yarıçap ve merkez seçimlerimize göre uyarlanan algoritmadan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir. $\alpha = 0.4$ yarıçaplı, $\beta = 0$ merkezli bölge seçildiği takdirde.

$$a_y = \begin{bmatrix} 2.0550 & -1.1000 & 0.0200 & 0.1853 & 0.1550 \\ 3.1100 & 1.8125 & 0.6225 & 0 & 0.3100 \\ -0.3925 & 0.2450 & 1.8800 & -0.9275 & -0.0350 \\ 0.0925 & 0.4400 & 0.7100 & 1.8100 & -0.6250 \\ -1.6375 & -0.6875 & -0.3275 & 0 & 0.3400 \end{bmatrix} \quad (4.26a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 0.6775 & 0.0425 \\ -0.4375 & -0.7625 \\ -0.2475 & 0.4900 \\ 0.1700 & 0.0250 \\ 0.2300 & 0.5325 \end{bmatrix} \quad (4.26b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} Eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 264.2531 & 70.6912 & 228.5025 & 7.2038 & -15.3672 \\ 70.6912 & 19.4835 & 60.6323 & 2.5892 & -4.4891 \\ 228.5025 & 60.6323 & 198.0168 & 5.6566 & -12.9612 \\ 7.2038 & 2.5892 & 5.6566 & 0.9619 & -0.8562 \\ -15.3672 & -4.4891 & -12.9612 & -0.8562 & 1.1434 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

olarak hesaplanır.

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler ve bulunan değerler sıklık algoritmasında kullanıldığı takdirde, köklerin belirlenen disk içine çekecek olan ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_i = \begin{bmatrix} 1.4318 & -3.1202 & -0.4895 & -1.9516 & 1.1933 \\ -3.1202 & 21.9982 & 6.7172 & 13.7062 & -6.8166 \\ -0.4895 & 6.7172 & 2.2681 & 4.1817 & -1.9754 \\ -1.9516 & 13.7062 & 4.1817 & 8.5398 & -4.2489 \\ 1.1933 & -6.8166 & -1.9754 & -4.2489 & 2.1641 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 35.1475 \\ 1.2545 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = 4.7477e-045 \quad (4.29)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür

$$svdq = svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 35.1475 \\ 1.2545 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 4.4124 & 1.6683 \\ 1.6683 & 3.2416 \end{bmatrix} \quad (4.31a)$$

$$svdr = svd(R_1) = \begin{bmatrix} 5.5950 \\ 2.0590 \end{bmatrix} \quad (4.31b)$$

$$S_{1=} = \begin{bmatrix} 0.9994 & 0.3919 \\ -7.2831 & -5.0062 \\ -2.2397 & -1.6777 \\ -4.5376 & -3.1168 \\ 2.2491 & 1.4785 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.2053 & -1.4584 & 0.0223 & -0.9162 & 0.6805 \\ -1.4584 & 8.0332 & 2.3036 & 5.0076 & -2.5623 \\ 0.0223 & 2.3036 & 0.8669 & 1.4326 & -0.6339 \\ -0.9162 & 5.0076 & 1.4326 & 3.1216 & -1.5988 \\ 0.6808 & -2.5623 & -0.6339 & -1.5988 & 0.8665 \end{bmatrix} \quad (4.32a)$$

$$svdp=svd(P_1) = \begin{bmatrix} 12.9074 \\ 1.1861 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.32b)$$

Seçilen bölge içerisinde özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = \begin{bmatrix} 6.9439 & -0.2901 & 3.7719 & 0.4953 & -0.0319 \\ -0.5818 & -1.5468 & 0.9245 & -3.1287 & 0.8445 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

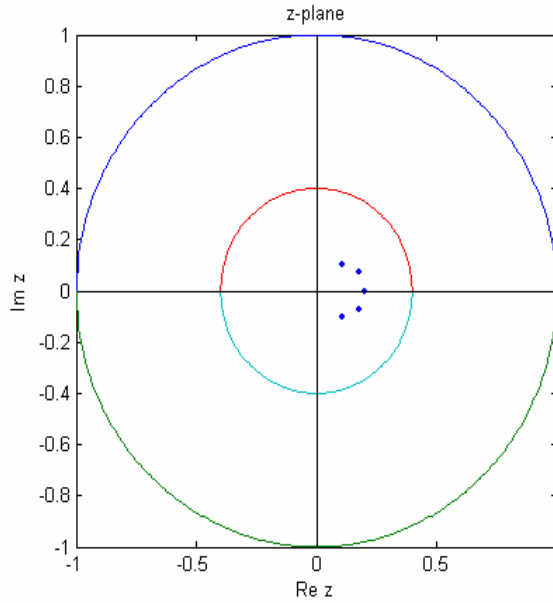
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 6.9439 & -0.2901 & 3.7719 & 0.4953 & -0.0319 \\ -0.5818 & -1.5468 & 0.9245 & -3.1287 & 0.8445 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.34), sıklık bölgesindeki algoritma [33](Firaz) kullanılarak bulunan K (4.33) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = \text{eig}(A_c) = \begin{bmatrix} 0.1080 - 0.1048i \\ 0.1080 + 0.1048i \\ 0.1802 - 0.0747i \\ 0.2010 - 0.0000i \\ 0.1802 + 0.0747i \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

olur. Şekil (4.3) gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.3. $\alpha = 0.4$ Yarıçaplı, $\beta = 0$ Merkezli $D1$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselleştirilmesi

Örnek 4.4: L.S. Shieh, M.M.Mehio ve Ganesan [22] 'ın ele aldıkları örnek $\alpha = 0.3$ yarıçaplı, $\beta = 0$ merkezli bölge için incelendiğinde:

$$a_y = \begin{bmatrix} 2.7400 & -1.4667 & 0.0267 & 0.2470 & 0.2067 \\ 4.1467 & 2.4167 & 0.8300 & 0 & 0.4133 \\ -0.5233 & 0.3267 & 2.5067 & -1.2367 & -0.0467 \\ 0.1233 & 0.5867 & 0.9467 & 2.4133 & -0.8333 \\ -2.1833 & -0.9167 & -0.4367 & 0 & 0.4533 \end{bmatrix} \quad (4.36a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 0.9033 & 0.0567 \\ -0.5833 & -1.0167 \\ -0.3300 & 0.6533 \\ 0.2267 & 0.0333 \\ 0.3067 & 0.7100 \end{bmatrix} \quad (4.36b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 904.6646 & 269.8915 & 822.1204 & 76.9793 & -78.0707 \\ 269.8915 & 82.0506 & 244.9815 & 25.1809 & -24.0860 \\ 822.1204 & 244.9815 & 747.1605 & 69.5446 & -70.7998 \\ 76.9793 & 25.1809 & 69.5446 & 9.7519 & -7.7919 \\ -78.0707 & -24.0860 & -70.7998 & -7.7919 & 7.1495 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_l = \begin{bmatrix} 7.6137 & -19.5076 & -4.3730 & -14.6947 & 7.2243 \\ -19.5076 & 70.3247 & 19.2541 & 51.0753 & -24.8725 \\ -4.3730 & 19.2541 & 5.6969 & 13.7523 & -6.6670 \\ -14.6947 & 51.0753 & 13.7523 & 37.2208 & -18.1421 \\ 7.2243 & -24.8725 & -6.6670 & -18.1421 & 8.8449 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 127.0820 \\ 2.6190 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = 1.0592e-041 \quad (4.39)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 27.0820 \\ 2.6190 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 9.2666 & 4.9972 \\ 4.9972 & 5.5385 \end{bmatrix} \quad (4.41a)$$

$$svdr=svd(R1) = \begin{bmatrix} 12.7361 \\ 2.0690 \end{bmatrix} \quad (4.41b)$$

$$S_{1=} \begin{bmatrix} 6.1744 & 3.7550 \\ -22.5995 & -15.4783 \\ -6.2290 & -4.4745 \\ -16.3909 & -11.1127 \\ 7.9791 & 5.3949 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3.4356 & -3.9570 & -0.0558 & -3.4330 & 1.7444 \\ -3.9570 & 11.3999 & 2.7719 & 8.4695 & -4.1491 \\ -0.0558 & 2.7719 & 1.0723 & 1.8426 & -0.8752 \\ -3.4330 & 8.4695 & 1.8426 & 6.4104 & -3.1554 \\ 1.7444 & -4.1491 & -0.8752 & -3.1554 & 1.5550 \end{bmatrix} \quad (4.42a)$$

$$svdp = svd(P_1) = \begin{bmatrix} 21.5265 \\ 2.3467 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.42b)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = \begin{bmatrix} 8.2004 & 0.0619 & 4.7542 & 0.7409 & -0.1623 \\ -0.5310 & -1.5879 & 1.1032 & -3.4918 & 0.9422 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

MATLAB dlqr komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

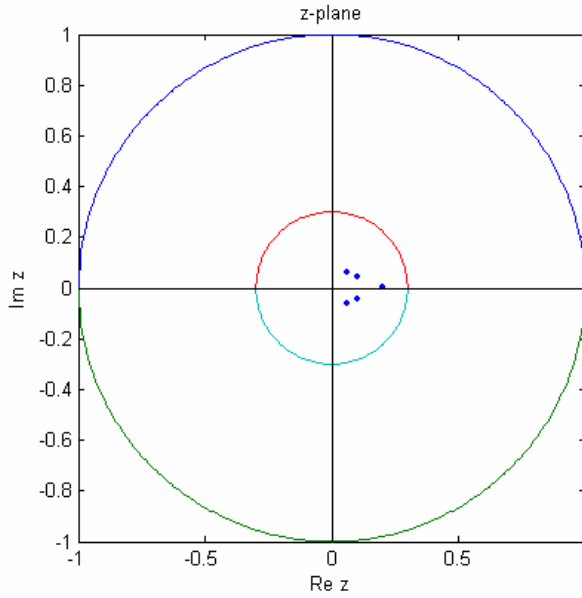
$$K_{ric} = \begin{bmatrix} 8.2004 & 0.0619 & 4.7542 & 0.7409 & -0.1623 \\ -0.5310 & -1.5879 & 1.1032 & -3.4918 & 0.9422 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

MATLAB dlqr komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.44), sıklık bölgesindeki algoritma [33](Firaz) kullanılarak bulunan K (4.43) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = \text{eig} A_c = \begin{bmatrix} 0.0608 - 0.0589i \\ 0.0608 + 0.0589i \\ 0.1014 - 0.0418i \\ 0.1014 + 0.0418i \\ 0.2012 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

olur. Şekil (4.4) gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir



Şekil 4.4. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0$ Merkezli $D1$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselleştirilmesi

4.2 II.BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER

Örnek 4.5: Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [34] 1988 yılında ele aldıkları örnek incelendiğinde ele alınan sistem matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & -0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$C = \text{eye}(4)$$

$$Q = \text{eye}(4) \quad (4.48)$$

$$R = \text{eye}(2)$$

olarak verilen örnekte yarıçap ve merkez seçimine göre uyarlanan algoritmadan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir. α yarıçap, β merkez olmak üzere;

$$\alpha = 0.2 \quad \text{ve} \quad \beta = 0.3 \quad (4.49)$$

olarak seçildiğinde,

$$a_y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2.5 \end{bmatrix} \quad (4.50a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 4.2089 & -9.6266 & -24.5843 & -10.6748 \\ -9.6266 & 26.6711 & 73.7529 & 36.2945 \\ -24.5843 & 73.7529 & 209.5930 & 107.0895 \\ -10.6748 & 36.2945 & 107.0895 & 57.4011 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0.3619 & 0.3690 & 6.4278 & 1.2564 \\ 0.3690 & 0.4101 & 6.2320 & 1.0002 \\ 6.4278 & 6.2320 & 117.2163 & 24.9851 \\ 1.2564 & 1.0002 & 24.9851 & 6.6932 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Q_i ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_i) = \begin{bmatrix} 123.2763 \\ 1.4053 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \det(Q_i) = -2.2445e-030 \quad (4.53)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_i ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 123.2763 \\ 1.4053 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır

$$R_1 = \begin{bmatrix} 4.1044 & -12.2921 \\ -12.2921 & 106.7965 \end{bmatrix} \quad (4.55a)$$

$$svdr=svd(R1) = \begin{bmatrix} 108.2474 \\ 2.6536 \end{bmatrix} \quad (4.55b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.7522 & -6.1461 \\ 0.9022 & -6.1461 \\ 12.0722 & -110.2973 \\ 1.4880 & -22.3351 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0075 & 0.0121 & 0.0906 & 0.0109 \\ 0.0121 & 0.0423 & 0.0705 & -0.2067 \\ 0.0906 & -0.0705 & 3.1593 & 1.6671 \\ -0.0109 & -0.2067 & 1.6671 & 1.5863 \end{bmatrix} \quad (4.56a)$$

$$svdp=svd(P_1) = \begin{bmatrix} 4.2243 \\ 0.5711 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.56b)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = \begin{bmatrix} 0.6085 & -0.0003 & -0.6507 & -0.4317 \\ -0.0664 & 0.1780 & -0.4535 & 0.0826 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

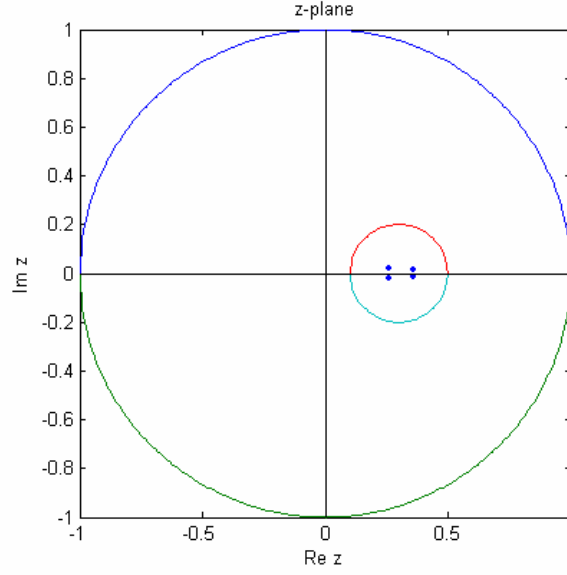
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 0.6085 & -0.0003 & -0.6507 & -0.4317 \\ -0.0664 & 0.1780 & -0.4535 & 0.0826 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.58), sıklık bölgesindeki algoritma [33] kullanılarak bulunan $K(4.57)$ ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = eig(A_c) = \begin{bmatrix} 0.2631 + 0.0187i \\ 0.2631 - 0.0187i \\ 0.3594 + 0.0154i \\ 0.3594 - 0.0154i \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

olur. Şekil (4.5) gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.5 $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli D_2 Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi

Örnek 4.6: Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [34] 1998 yılında ele aldıkları örnekte, α yarıçap, β merkez olmak üzere;

$$\alpha = 0.1 \text{ ve } \beta = 0.4 \quad (4.60)$$

olarak seçildiğinde,

$$a_y = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{bmatrix} \quad (4.61a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 0.0204 & -0.0485 & -0.1882 & -0.1369 \\ -0.0485 & 0.1173 & 0.4704 & 0.3535 \\ -0.1882 & 0.4704 & 1.9908 & 1.5734 \\ -0.1369 & 0.3535 & 1.5734 & 1.2976 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = 1.0e+003 \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0017 & 0.0473 & 0.0192 \\ 0.0017 & 0.0020 & 0.0526 & 0.0207 \\ 0.0473 & 0.0526 & 1.6452 & 0.7226 \\ 0.0192 & 0.0207 & 0.7226 & 0.3383 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.9689 \\ 0.0180 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = 1.1611e-025 \quad (4.64)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.9689 \\ 0.0180 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 12.1940 & -94.0892 \\ -94.0892 & 997.4138 \end{bmatrix} \quad (4.66a)$$

$$svdr=svd(R1) = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.0063 \\ 0.0033 \end{bmatrix} \quad (4.66b)$$

$$S_1 = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 0.0038 & -0.0376 \\ 0.0045 & -0.0423 \\ 0.1160 & -1.2740 \\ 0.0445 & -0.5459 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0358 & 0.0597 & -0.4668 & -0.8514 \\ 0.0597 & 0.1004 & -0.8561 & -1.488 \\ -0.4668 & -0.8561 & 12.8352 & 16.6089 \\ -0.8514 & -1.4828 & 16.6089 & 24.7396 \end{bmatrix} \quad (4.67a)$$

$$svdp=svd(P_1) = \begin{bmatrix} 36.5362 \\ 1.1748 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.67b)$$

Seçilen bölge içerisinde özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = \begin{bmatrix} 0.7365 & -0.4161 & -2.7952 & -2.3540 \\ -0.0240 & 0.0577 & -0.9524 & -0.3025 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

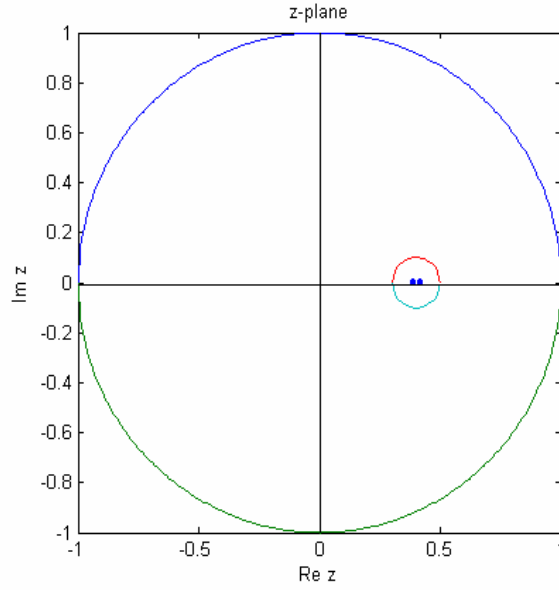
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 0.7365 & -0.4161 & -2.7952 & -2.3540 \\ -0.0240 & 0.0577 & -0.9524 & -0.3025 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.69), sıklık bölgesindeki algoritma [33] kullanılarak bulunan K (4.68) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = eig(A_c) = \begin{bmatrix} 0.3908 + 0.0042i \\ 0.3908 - 0.0042i \\ 0.4171 + 0.0053i \\ 0.4171 - 0.0053i \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

olur. Şekil (4.6) gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir



Şekil 4.6. $\alpha = 0.1$ Yarıçaplı, $\beta = 0.4$ Merkezli D_2 Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi

Örnek 4.7: L.S. Shieh, M.M.Mehio ve Ganesan [22] 'de ele alınan sistem incelenmiştir. Ele alınan sistemin durum matrisleri aşağıdaki gibidir

$$A = \begin{bmatrix} 0.8220 & -0.4400 & 0.0080 & 0.0741 & 0.0620 \\ 1.2440 & 0.7250 & 0.2490 & 0 & 0.1240 \\ -0.1570 & 0.0980 & 0.7520 & -0.3710 & -0.0140 \\ 0.0370 & 0.1760 & 0.2840 & 0.7240 & -0.2500 \\ -0.6550 & -0.2750 & -0.1310 & 0 & 0.1360 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2710 & 0.0170 \\ -0.1750 & -0.3050 \\ -0.0990 & 0.1960 \\ 0.0680 & 0.0100 \\ 0.0920 & 0.2130 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned}
Q &= \text{eye}(5) \\
R &= \text{eye}(2) \\
C &= \text{eye}(5)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

olarak verilen örnekte yarıçap ve merkez seçimine göre uyarlanan algoritmadan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir. $\alpha = 0.2$ ve $\beta = 0.3$ seçildiği takdirde ;

$$a_y = \begin{bmatrix} 2.6100 & -2.2000 & 0.0400 & 0.3705 & 0.3100 \\ 6.2200 & 2.1250 & 1.2450 & 0 & 0.6200 \\ -0.7850 & 0.4900 & 2.2600 & -1.8550 & -0.0700 \\ 0.1850 & 0.8800 & 1.4200 & 2.1200 & -1.2500 \\ -3.2750 & -1.3750 & -0.6550 & 0 & -0.8200 \end{bmatrix} \tag{4.74a}$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 1.3550 & 0.0850 \\ -0.8750 & -1.5250 \\ -0.4950 & 0.9800 \\ 0.3400 & 0.0500 \\ 0.4600 & 1.0650 \end{bmatrix} \tag{4.74b}$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 835.6348 & 100.8165 & 566.9989 & -156.3242 & 50.4044 \\ 100.8165 & 12.7505 & 68.0063 & -18.1450 & 5.3659 \\ 566.9989 & 68.0063 & 384.9954 & -106.5570 & 34.6879 \\ -156.3242 & -18.1450 & -106.5570 & 30.1144 & -10.3000 \\ 50.4044 & 5.3659 & 34.6879 & -10.3000 & 3.9114 \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 15.0823 & 34.6094 & 15.0490 & 9.4686 & -4.1263 \\ 34.6094 & 86.9661 & 36.5122 & 24.0114 & -11.7855 \\ 15.0490 & 36.5122 & 15.5348 & 10.0465 & -4.7247 \\ 9.4686 & 24.0114 & 10.0465 & 6.6354 & -3.2915 \\ -4.1263 & -11.7855 & -4.7247 & -3.2915 & 1.8401 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = 1.0e+002 * \begin{bmatrix} 1.2452 \\ 0.0154 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = 2.6563e-042 \quad (4.77)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 124.5160 \\ 1.5427 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 14.8804 & 9.1348 \\ 9.1348 & 8.5802 \end{bmatrix} \quad (4.79a)$$

$$svdr = svd(R_1) = \begin{bmatrix} 21.3930 \\ 2.0676 \end{bmatrix} \quad (4.79b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -13.3542 & -9.8256 \\ -33.4676 & -23.7095 \\ -14.0652 & -10.1088 \\ -9.2381 & -6.5202 \\ 4.5203 & 3.0450 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.2063 & 2.8415 & 1.6190 & 0.7130 & 0.0783 \\ 2.8415 & 8.3254 & 3.3085 & 2.3300 & -1.3315 \\ 1.6190 & 3.3085 & 1.5088 & 0.8934 & -0.3181 \\ 0.7130 & 2.3300 & 0.8934 & 0.6576 & -0.4081 \\ 0.0783 & -1.3315 & -0.3181 & -0.4081 & 0.4424 \end{bmatrix} \quad (4.80a)$$

$$svdp = svd(P_1) = \begin{bmatrix} 11.6494 \\ 1.4911 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.80b)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = \begin{bmatrix} 4.8706 & -1.0302 & 2.2181 & -0.0147 & 0.2170 \\ -3.1739 & -1.5821 & -1.1565 & -1.9483 & 0.4994 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

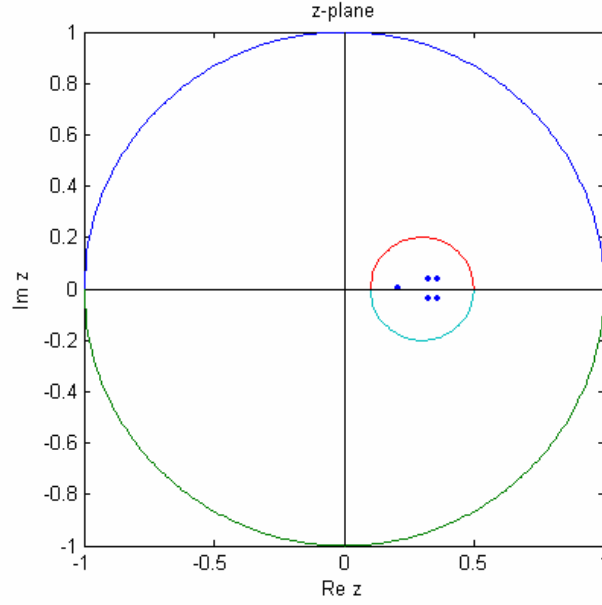
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 4.8706 & -1.0302 & 2.2181 & -0.0147 & 0.2170 \\ -3.1739 & -1.5821 & -1.1565 & -1.9483 & 0.4994 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.82), sıklık bölgesindeki algoritma [33] kullanılarak bulunan K (4.81) ile aynı değerdedir

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = eig(A_c) = \begin{bmatrix} 0.2058 + 0.0000i \\ 0.3235 - 0.0392i \\ 0.3589 - 0.0405i \\ 0.3235 + 0.0392i \\ 0.3589 + 0.0405i \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Şekil (4.7) gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.7 $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli D_2 Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafiksel Gösterimi

Örnek 4.8: L.S. Shieh, M.M.Mehio ve Ganesan [22] 'de ele alınan sistemde $\alpha=0.2$ yarıçaplı, $\beta=0.5$ merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik ,

$$a_y = \begin{bmatrix} 1.6100 & -2.2000 & 0.0400 & 0.3705 & 0.3100 \\ 6.2200 & 1.1250 & 1.2450 & 0 & 0.6200 \\ -0.7850 & 0.4900 & 1.2600 & -1.8550 & -0.0700 \\ 0.1850 & 0.8800 & 1.4200 & 1.1200 & -1.2500 \\ -3.2750 & -1.3750 & -0.6550 & 0 & -1.8200 \end{bmatrix} \quad (4.84a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 1.3550 & 0.0850 \\ -0.8750 & -1.5250 \\ -0.4950 & 0.9800 \\ 0.3400 & 0.0500 \\ 0.4600 & 1.0650 \end{bmatrix} \quad (4.84b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 256.2395 & -35.5977 & 106.9719 & -86.3985 & 36.6090 \\ -35.5977 & 5.2685 & -14.2244 & 11.5885 & -3.8309 \\ 106.9719 & -14.2244 & 45.9115 & -36.8849 & 17.7555 \\ -86.3985 & 11.5885 & -36.8849 & 29.6630 & -13.9529 \\ 36.6090 & -3.8309 & 17.7555 & -13.9529 & 10.1045 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur

$$Q_i = \begin{bmatrix} 35.4101 & 31.1247 & 16.6693 & -0.7211 & 0.8010 \\ 31.1247 & 27.3590 & 14.6476 & -0.6392 & 0.6659 \\ 16.6693 & 14.6476 & 7.8652 & -0.3171 & 0.5350 \\ -0.7211 & -0.6392 & -0.3171 & 0.0423 & 0.1786 \\ 0.8010 & 0.6659 & 0.5350 & 0.1786 & 1.3952 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Q_i ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 70.6496 \\ 0 \\ 1.4222 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = 9.7987e-044 \quad (4.87)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_i ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$\text{svd}(Q_1) = \begin{bmatrix} 70.6496 \\ 1.4222 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

MATLAB $\text{svd}(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 9.6417 & 5.2497 \\ 5.2497 & 5.7566 \end{bmatrix} \quad (4.89a)$$

$$\text{svdr} = \text{svd}(R_1) = \begin{bmatrix} 13.2967 \\ 2.1016 \end{bmatrix} \quad (4.89b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -16.3180 & -11.5014 \\ -14.3545 & -10.1048 \\ -7.6347 & -5.4337 \\ 0.3903 & 0.2102 \\ 0.0407 & -0.4299 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 5.4306 & 4.7640 & 2.5953 & -0.0626 & 0.4618 \\ 4.7640 & 4.1802 & 2.2727 & -0.0600 & 0.3694 \\ 2.5953 & 2.2727 & 1.2572 & -0.0091 & 0.3681 \\ -0.0626 & -0.0600 & -0.0091 & 0.0265 & 0.1766 \\ 0.4618 & 0.3694 & 0.3681 & 0.1766 & 1.3246 \end{bmatrix} \quad (4.90a)$$

$$\text{svdp} = \text{svd}(P_1) = \begin{bmatrix} 10.8996 \\ 1.3195 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.90b)$$

Seçilen bölge içerisinde özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur

$$K = \begin{bmatrix} 2.4065 & -1.2145 & 0.8466 & -0.3286 & 1.2300 \\ -3.6380 & -1.3514 & -1.4164 & -0.4164 & -1.4162 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

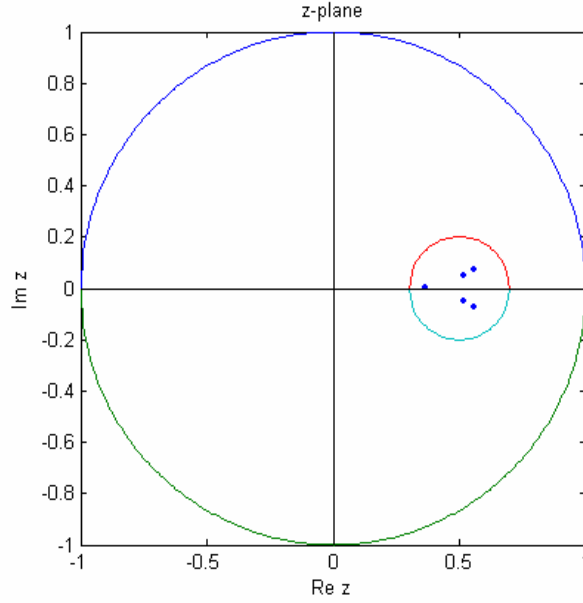
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 2.4065 & -1.2145 & 0.8466 & -0.3286 & 1.2300 \\ -3.6380 & -1.3514 & -1.4164 & -0.4164 & -1.4162 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.92), sıklık bölgesindeki algoritma [33](Firaz) kullanılarak bulunan K (4.91) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = eig(A_c) = \begin{bmatrix} 0.5614 - 0.0747i \\ 0.5614 + 0.0747i \\ 0.5156 - 0.0479i \\ 0.5156 + 0.0479i \\ 0.3664 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

olur. Şekil (4.8)'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.8. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.5$ Merkezli D_2 Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafiksel Gösterimi

4.3. III.BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER

Örnek 4.9 : Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [34] 1998 yılında ele aldıkları örnekte $\alpha=0.2$ yarıçaplı , $\beta=0.2$ merkezli bölge seçildiği takdirde eşitlik,

$$a_y = \begin{bmatrix} 3.5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3.5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.94a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.94b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 4.5693 & -12.4924 & -24.4392 & -6.5929 \\ -12.4924 & 41.1542 & 85.5373 & 26.3717 \\ -24.4392 & 85.5373 & 180.7810 & 57.5849 \\ -6.5929 & 26.3717 & 57.5849 & 19.4652 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.5961 & 0.5532 & 6.2303 & -0.1637 \\ 0.5532 & 0.5470 & 5.5491 & -0.3149 \\ 6.2303 & 5.5491 & 66.7440 & -0.5770 \\ -0.1637 & -0.3149 & -0.5770 & 0.8367 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 67.7938 \\ 0.9300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = 6.1578e-030 \quad (4.97)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 67.7938 \\ 0.9300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

MATLAB $\text{svd}(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 4.2846 & -12.2196 \\ -12.2196 & 92.3905 \end{bmatrix} \quad (4.99a)$$

$$\text{svdr}=\text{svd}(R1) = \begin{bmatrix} 94.0539 \\ 2.6213 \end{bmatrix} \quad (4.99b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1.0208 & -7.3318 \\ 1.0815 & -6.7208 \\ 9.7359 & -77.2169 \\ -0.9321 & 1.6053 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0133 & 0.0162 & 0.1118 & -0.0225 \\ 0.0162 & 0.0442 & -0.0334 & -0.1461 \\ 0.1118 & -0.0334 & 2.1234 & 0.6360 \\ -0.0225 & -0.1461 & 0.6360 & 0.6147 \end{bmatrix} \quad (4.100a)$$

$$\text{svdp}=\text{svd}(P_1) = \begin{bmatrix} 2.3626 \\ 0.4330 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.100b)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur

$$K = \begin{bmatrix} 0.6986 & 0.0228 & -0.4289 & -0.1958 \\ -0.0923 & 0.2979 & -0.1313 & 0.2400 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

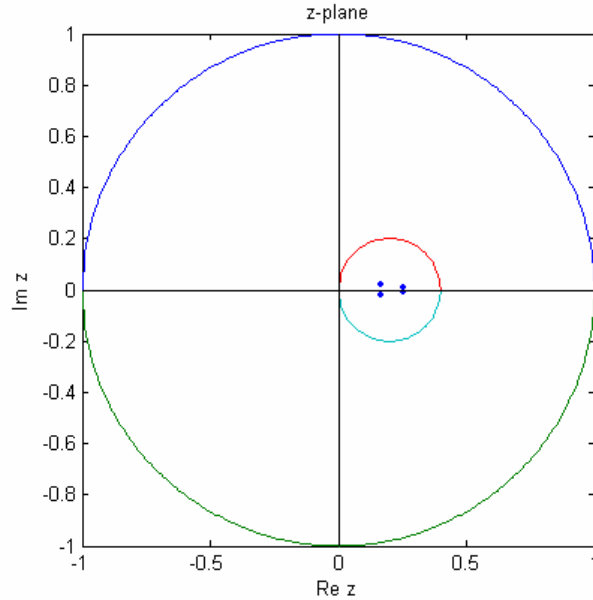
$$K_{ric}=K= \begin{bmatrix} 0.6986 & 0.0228 & -0.4289 & -0.1958 \\ -0.0923 & 0.2979 & -0.1313 & 0.2400 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.102), sıklık bölgesindeki algoritma [33](Firaz) kullanılarak bulunan $K(4.101)$ ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri

$$v=eig(A_c)= \begin{bmatrix} 0.1641 - 0.0229i \\ 0.1641 + 0.0229i \\ 0.2522 - 0.0116i \\ 0.2522 + 0.0116i \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

olur. Şekil (4.9) gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.9. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.2$ Merkezli $D3$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafiksel Gösterimi

Örnek 4.10: Toru Fujinaka ve Tohru Katayama'nın [33] 1998 yılında ele aldıkları örnekte $\alpha=0.3$ yarıçaplı , $\beta=0.3$ merkezli bölge seçildiği takdirde ,

$$a_y = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.6667 & 0 & 0 \\ -0.6667 & 2.0000 & 3.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -1.6667 & 1.3333 \\ 0 & 0 & -1.3333 & -1.6667 \end{bmatrix} \quad (4.104a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 3.3333 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.3333 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.104b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1.9525 & -2.8575 & -6.5192 & -2.1959 \\ -2.8575 & 7.4294 & 19.5577 & 8.5639 \\ -6.5192 & 19.5577 & 52.6640 & 23.8348 \\ -2.1959 & 8.5639 & 23.8348 & 11.2843 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0.1012 & 0.0976 & 1.6543 & 0.2440 \\ 0.0976 & 0.1333 & 1.5577 & 0.1254 \\ 1.6543 & 1.5577 & 27.0815 & 4.0963 \\ 0.2440 & 0.1254 & 4.0963 & 0.8971 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 27.8961 \\ 0.3170 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = -3.7080e-034 \quad (4.107)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 27.8961 \\ 0.3170 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2.9763 & -3.2596 \\ -3.2596 & 28.3320 \end{bmatrix} \quad (4.109a)$$

$$svdr=svd(R1) = \begin{bmatrix} 28.7444 \\ 2.5639 \end{bmatrix} \quad (4.109b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.1881 & -1.6298 \\ 0.3381 & -1.6298 \\ 2.9220 & -26.5865 \\ 0.0137 & -3.7681 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0074 & 0.0038 & 0.1250 & 0.0273 \\ 0.0038 & 0.0309 & 0.0362 & -0.0670 \\ 0.1250 & 0.0362 & 2.1257 & 0.5383 \\ 0.0273 & -0.0670 & 0.5383 & 0.3282 \end{bmatrix} \quad (4.110a)$$

$$svdp=svd(P_1) = \begin{bmatrix} 2.2819 \\ 0.2103 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.110b)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = \begin{bmatrix} 0.4886 & 0.1129 & -0.2131 & -0.1711 \\ -0.0796 & 0.1863 & -0.3948 & 0.1282 \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

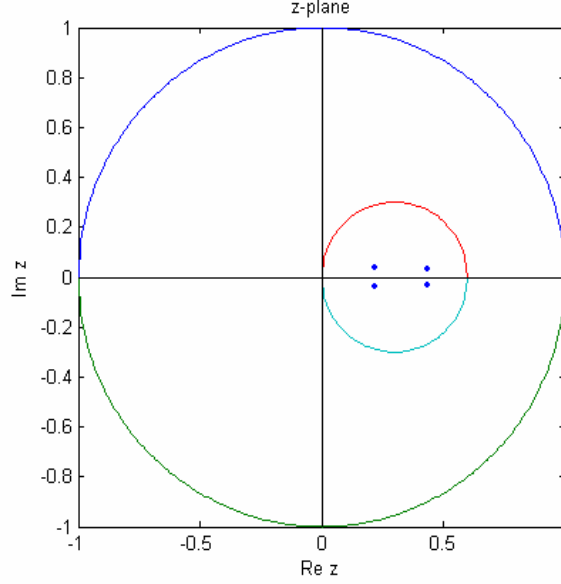
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 0.4886 & 0.1129 & -0.2131 & -0.1711 \\ -0.0796 & 0.1863 & -0.3948 & 0.1282 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.112), sıklık bölgesindeki algoritma [33] kullanılarak bulunan K (4.111) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri

$$v = eig(A_c) = \begin{bmatrix} 0.2199 + 0.0408i \\ 0.2199 - 0.0408i \\ 0.4331 + 0.0348i \\ 0.4331 - 0.0348i \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

olur. Şekil (4.10) gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.10. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli D_3 Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafiks gösterimi

Örnek 4.11: L.S. Shieh, M.M.Mehio ve Ganesan [22] ‘de ele alınan sistemde $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$ merkezli bölge seçildiği takdirde,

$$a_y = \begin{bmatrix} 3.1100 & -2.2000 & 0.0400 & 0.3705 & 0.3100 \\ 6.2200 & 2.6250 & 1.2450 & 0 & 0.6200 \\ -0.7850 & 0.4900 & 2.7600 & -1.8550 & -0.0700 \\ 0.1850 & 0.8800 & 1.4200 & 2.6200 & -1.2500 \\ -3.2750 & -1.3750 & -0.6550 & 0 & -0.3200 \end{bmatrix} \quad (4.114a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 1.3550 & 0.0850 \\ -0.8750 & -1.5250 \\ -0.4950 & 0.9800 \\ 0.3400 & 0.0500 \\ 0.4600 & 1.0650 \end{bmatrix} \quad (4.114b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 1.5257 & 0.3043 & 1.1847 & -0.1326 & -0.0009 \\ 0.3043 & 0.0619 & 0.2360 & -0.0248 & -0.0013 \\ 1.1847 & 0.2360 & 0.9199 & -0.1032 & -0.0005 \\ -0.1326 & -0.0248 & -0.1032 & 0.0138 & -0.0014 \\ -0.0009 & -0.0013 & -0.0005 & -0.0014 & 0.0010 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 4.5441 & 18.3091 & 7.5871 & 7.5562 & -3.4335 \\ 18.3091 & 143.6322 & 52.8885 & 62.8491 & -32.4057 \\ 7.5871 & 52.8885 & 19.7980 & 22.9683 & -11.6658 \\ 7.5562 & 62.8491 & 22.9683 & 27.5946 & -14.3234 \\ -3.4335 & -32.4057 & -11.6658 & -14.3234 & 7.5312 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = 1.0e+002 * \begin{bmatrix} 2.0027 \\ 0.0283 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = 1.4624e-041 \quad (4.117)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 200.2713 \\ 2.8288 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 19.9343 & 12.6021 \\ 12.6021 & 10.9596 \end{bmatrix} \quad (4.119a)$$

$$svdr=svd(R1) = \begin{bmatrix} 28.8242 \\ 2.0697 \end{bmatrix} \quad (4.119b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -6.5686 & -5.0879 \\ -50.7473 & -35.5980 \\ -18.7244 & -13.3184 \\ -22.1849 & -15.4633 \\ 11.4179 & 7.8579 \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.0873 & 0.4881 & 0.9542 & -0.2036 & 0.5287 \\ 0.4881 & 10.3115 & 3.4809 & 4.6822 & -2.5871 \\ 0.9542 & 3.4809 & 1.4770 & 1.4180 & -0.6243 \\ -0.2036 & 4.6822 & 1.4180 & 2.2137 & -1.3089 \\ 0.5287 & -2.5871 & -0.6243 & -1.3089 & 0.8545 \end{bmatrix} \quad (4.120a)$$

$$svdp = svd(P_1) = \begin{bmatrix} 14.2848 \\ 2.6592 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.120b)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur

$$K = \begin{bmatrix} 6.1662 & -0.6604 & 3.1191 & 0.1882 & 0.1184 \\ -2.4670 & -1.7246 & -0.6134 & -2.6199 & 0.7333 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

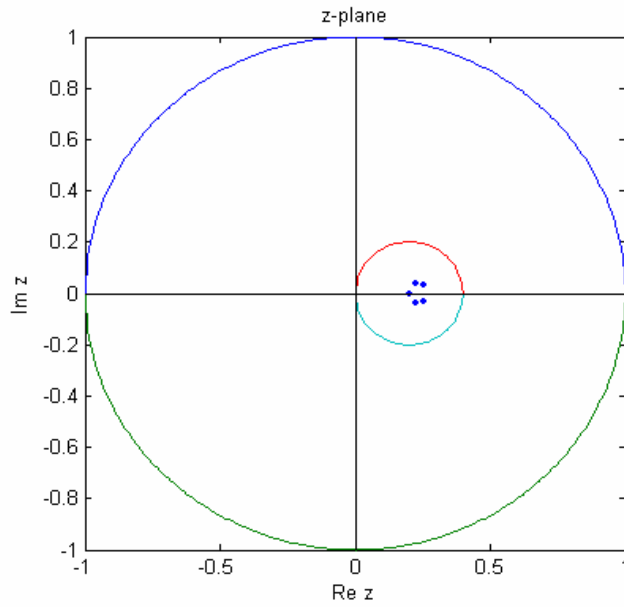
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 6.1662 & -0.6604 & 3.1191 & 0.1882 & 0.1184 \\ -2.4670 & -1.7246 & -0.6134 & -2.6199 & 0.7333 \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.122), sıklık bölgesindeki algoritma [33] kullanılarak bulunan K (4.121) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = \text{eig}(A_c) = \begin{bmatrix} 0.2259 + 0.0351i \\ 0.2540 + 0.0308i \\ 0.2037 - 0.0000i \\ 0.2259 - 0.0351i \\ 0.2540 - 0.0308i \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

olur. Şekil (4.12) 'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.11. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.2$ Merkezli $D3$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafiksel Gösterimi

Örnek 4.13: L.S. Shieh, M.M.Mehio ve Ganesan [22] 'de ele alınan sistemde $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.3$ merkezli bölge seçildiği takdirde ,

$$a_y = \begin{bmatrix} 1.7400 & -1.4667 & 0.0267 & 0.2470 & 0.2067 \\ 4.1467 & 1.4167 & 0.8300 & 0 & 0.4133 \\ -0.5233 & 0.3267 & 1.5067 & -1.2367 & -0.0467 \\ 0.1233 & 0.5867 & 0.9467 & 1.4133 & -0.8333 \\ -2.1833 & -0.9167 & -0.4367 & 0 & -0.5467 \end{bmatrix} \quad (4.124a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 0.9033 & 0.0567 \\ -0.5833 & -1.0167 \\ -0.3300 & 0.6533 \\ 0.2267 & 0.0333 \\ 0.3067 & 0.7100 \end{bmatrix} \quad (4.124b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 151.6377 & 12.7978 & 96.1093 & -33.6420 & 13.1018 \\ 12.7978 & 1.4198 & 7.6769 & -2.5226 & 0.7234 \\ 96.1093 & 7.6769 & 61.4704 & -21.7276 & 8.7929 \\ -33.6420 & -2.5226 & -21.7276 & 7.7590 & -3.2631 \\ 13.1018 & 0.7234 & 8.7929 & -3.2631 & 1.5622 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5.1046 & 8.3747 & 4.0119 & 1.8777 & -0.4673 \\ 8.3747 & 16.3176 & 7.1345 & 3.5133 & -1.5509 \\ 4.0119 & 7.1345 & 3.2715 & 1.5685 & -0.5353 \\ 1.8777 & 3.5133 & 1.5685 & 0.7633 & -0.3035 \\ -0.4673 & -1.5509 & -0.5353 & -0.3035 & 0.2814 \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında:

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 24.8979 \\ 0.8405 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \det(Q_1) = -1.1408e-045 \quad (4.127)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 24.8979 \\ 0.8405 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 4.6341 & 1.8721 \\ 1.8721 & 3.4194 \end{bmatrix} \quad (4.129a)$$

$$svdr=svd(R_1) = \begin{bmatrix} 5.9950 \\ 2.0586 \end{bmatrix} \quad (4.129b)$$

$$S_{1=} \begin{bmatrix} -3.3863 & -2.6651 \\ -6.5554 & -4.6410 \\ -2.8757 & -2.1522 \\ -1.4134 & -1.0254 \\ 0.6141 & 0.3257 \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.9983 & 2.6139 & 1.4281 & 0.6235 & 0.0193 \\ 2.6139 & 5.5534 & 2.3255 & 1.1739 & -0.6241 \\ 1.4281 & 2.3255 & 1.1187 & 0.5224 & -0.1254 \\ 0.6235 & 1.1739 & 0.5224 & 0.2547 & -0.1030 \\ 0.0193 & -0.6241 & -0.1254 & -0.1030 & 0.1977 \end{bmatrix} \quad (4.130a)$$

$$svdp=svd(P_1) = \begin{bmatrix} 8.3063 \\ 0.8166 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.130b)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur

$$K = \begin{bmatrix} 3.9480 & -1.1625 & 1.6800 & -0.0600 & 0.2222 \\ -2.8531 & -1.4334 & -0.9907 & -1.6091 & 0.3835 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

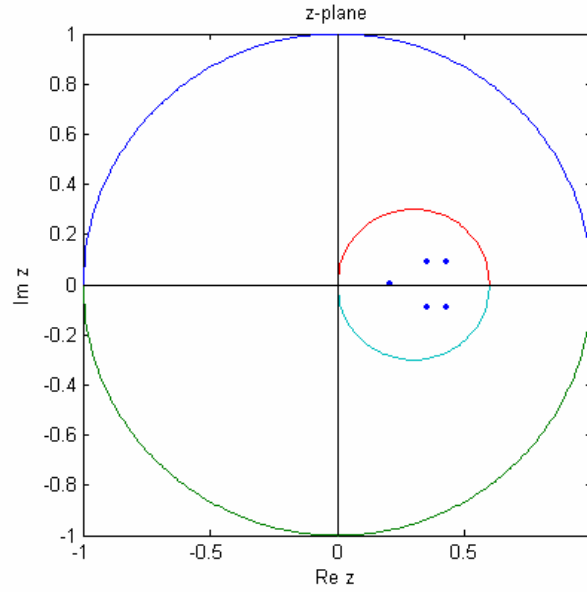
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 3.9480 & -1.1625 & 1.6800 & -0.0600 & 0.2222 \\ -2.8531 & -1.4334 & -0.9907 & -1.6091 & 0.3835 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.132), sıklık bölgesindeki algoritma [33](Firaz) kullanılarak bulunan K (4.131) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri:

$$v = \text{eig}(A_c) = \begin{bmatrix} 0.4324 + 0.0909i \\ 0.4324 - 0.0909i \\ 0.3529 + 0.0878i \\ 0.3529 - 0.0878i \\ 0.2050 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

olur. Şekil (4.13)'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.12. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli $D3$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafiksel Gösterimi

4.4 IV. BÖLGE İÇİN İNCELENEN ÖRNEKLER

Örnek 4.14: Toru Fujinaka ve Tohrü Katayama'nın [34] 1998 yılında ele aldıkları örnekte $\alpha=0.3$ yarıçaplı, $\beta=0.3$ merkezli bölge seçildiği takdirde ,

$$a_y = \begin{bmatrix} 4.0000 & 0.6667 & 0 & 0 \\ -0.6667 & 4.0000 & 3.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 1.3333 \\ 0 & 0 & -1.3333 & 0.3333 \end{bmatrix} \quad (4.134a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 3.3333 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.3333 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.134b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 3.1458 & -12.8749 & -10.2557 & -0.1184 \\ -12.8749 & 73.4215 & 61.5341 & 0.1775 \\ -10.2557 & 61.5341 & 51.8933 & 0.0963 \\ -0.1184 & 0.1775 & 0.0963 & 0.0090 \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.2267 & 0.8959 & 0.0751 & -2.2420 \\ 0.8959 & 0.6875 & -0.0276 & -1.6161 \\ 0.0751 & -0.0276 & 0.2089 & -0.1903 \\ -2.2420 & -1.6161 & -0.1903 & 4.1117 \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

Q_1 ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında

$$eig(Q_1) = \begin{bmatrix} 5.9860 \\ 0.2488 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(Q_1) = -3.7037e-031 \quad (4.137)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_1 ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_1) = \begin{bmatrix} 5.9860 \\ 0.2488 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

MATLAB $svd(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 3.5729 & -5.1278 \\ -5.1278 & 27.9467 \end{bmatrix} \quad (4.139a)$$

$$svdr=svd(R1) = \begin{bmatrix} 28.9815 \\ 2.5380 \end{bmatrix} \quad (4.139b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1.1302 & -5.6406 \\ 0.9583 & -4.1023 \\ -0.2604 & -0.3882 \\ -1.9801 & 10.3209 \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0847 & 0.0605 & 0.0087 & -0.1558 \\ 0.0605 & 0.0693 & -0.0586 & -0.0943 \\ 0.0087 & -0.0586 & 0.1617 & -0.0578 \\ -0.1558 & -0.0943 & -0.0578 & 0.2973 \end{bmatrix} \quad (4.140a)$$

$$svdp=svd(P_1) = \begin{bmatrix} 0.4205 \\ 0.1926 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.140b)$$

Seçilen bölge içerisinde özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur

$$K = \begin{bmatrix} 1.1447 & 0.0963 & -0.0762 & -0.0052 \\ -0.2374 & 1.3397 & 1.2105 & 0.3995 \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda verilmiştir.

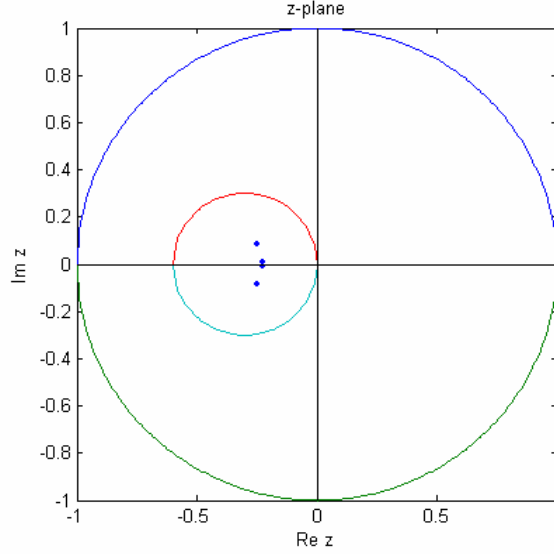
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 1.1447 & 0.0963 & -0.0762 & -0.0052 \\ -0.2374 & 1.3397 & 1.2105 & 0.3995 \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.142), sıklık bölgesindeki algoritma [33] kullanılarak bulunan K (4.141) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri

$$v = eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.2502 + 0.0845i \\ -0.2502 - 0.0845i \\ -0.2273 + 0.0109i \\ -0.2273 - 0.0109i \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

olur. Şekil (4.14) gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.13. $\alpha = 0.3$ Yarıçaplı, $\beta = 0.3$ Merkezli $D4$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafikselsel Gösterimi

Örnek 4.15: Toru Fujinaka ve Tohrü Katayama'nın [34] 1998 yılında ele aldıkları örnekte $\alpha=0.2$ yarıçaplı, $\beta=0.2$ merkezli bölge seçildiği takdirde,

$$a_y = \begin{bmatrix} 3.25 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 3.25 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (4.144a)$$

$$b_y = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.144b)$$

olarak bulunur.

Verilen Q , R , S ağırlık matrislerinden \bar{Q} eşitlik (3.10)'dan aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 2.1407 & -7.4148 & -5.3122 & -0.1957 \\ -7.4148 & 44.6333 & 34.5296 & 0.4893 \\ -5.3122 & 34.5296 & 26.9109 & 0.3252 \\ -0.1957 & 0.4893 & 0.3252 & 0.0198 \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

(3.15) ve (3.16) numaralı denklemler sıklık bölgesi algoritmasında yerine koyulduğunda kökleri belirlenen bölge içerisine çekecek ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi bulunur

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0.7551 & 0.5361 & -0.2521 & -1.2280 \\ 0.5361 & 0.4143 & -0.2463 & -0.8502 \\ -0.2521 & -0.2463 & 0.2189 & 0.3666 \\ -1.2280 & -0.8502 & 0.3666 & 2.0110 \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

Q_i ağırlık matrisinin ve alt matrislerinin determinantına ve özdeğerlerine bakıldığında

$$eig(Q_i) = \begin{bmatrix} 3.2179 \\ 0.1814 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \det(Q_i) = 3.6770e-032 \quad (4.147)$$

değerlerin sıfırdan büyük veya yaklaşık sıfır oldukları görülmektedir.(3.17) ve (3.18) numaralı denklemlerden Q_i ağırlık matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu söylemek mümkündür.

$$svd(Q_i) = \begin{bmatrix} 3.2179 \\ 0.1814 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

MATLAB $\text{svd}(Q_1)$ komutuyla singular value decomposition değerleri, Q_1 matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu kanıtlamıştır.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 3.0704 & -2.6561 \\ -2.6561 & 15.4554 \end{bmatrix} \quad (4.149a)$$

$$\text{svdr} = \text{svd}(R_1) = \begin{bmatrix} 16.0010 \\ 2.5248 \end{bmatrix} \quad (4.149b)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.6344 & -3.1873 \\ 0.5848 & -2.2577 \\ -0.4809 & 1.0532 \\ -0.9450 & 5.1871 \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

$P_1 = Q_1 - S_1 * R^{-1} * S_1^T$ ise P_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0949 & 0.0640 & -0.0250 & -0.1565 \\ 0.0640 & 0.0697 & -0.0699 & -0.0885 \\ -0.0250 & -0.0699 & 0.1128 & 0.0069 \\ -0.1565 & -0.0885 & 0.0069 & 0.2691 \end{bmatrix} \quad (4.150a)$$

$$\text{svdp} = \text{svd}(P_1) = \begin{bmatrix} 0.4029 \\ 0.1435 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.150b)$$

Seçilen bölge içerisine özdeğerleri yerleştirecek optimal kazanç matrisi K , sıklık bölgesi için uyarlanan algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur

$$K = \begin{bmatrix} 1.1921 & 0.1215 & -0.0477 & -0.0099 \\ -0.2560 & 1.5170 & 1.3503 & 0.4017 \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

MATLAB dlqr komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} aşağıda

verilmiştir.

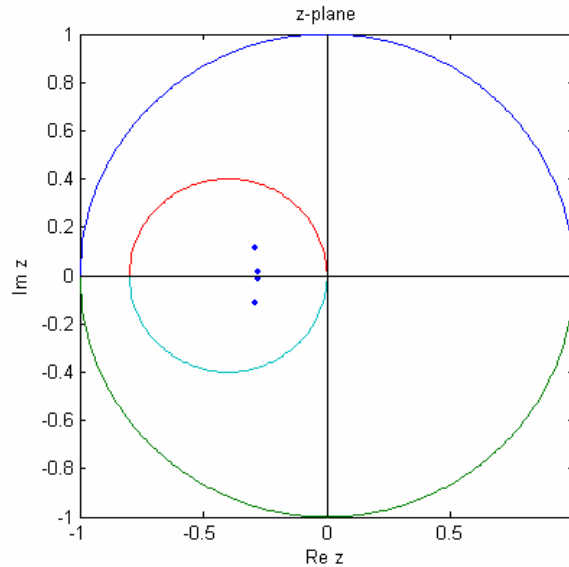
$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} 1.1921 & 0.1215 & -0.0477 & -0.0099 \\ -0.2560 & 1.5170 & 1.3503 & 0.4017 \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

MATLAB *dlqr* komutuyla elde edilen optimal kazanç matrisi K_{ric} (4.152), sıklık bölgesindeki algoritma [33](Firaz) kullanılarak bulunan K (4.151) ile aynı değerdedir.

Seçilen bölgedeki optimal sistemin özdeğerleri

$$v = eig(A_c) = \begin{bmatrix} -0.2912 + 0.1153i \\ -0.2912 - 0.1153i \\ -0.2800 + 0.0172i \\ -0.2800 - 0.0172i \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

Şekil (4.15)'de gösterildiği gibi özdeğerlerin seçilen bölge içerisine düştüğü görülmektedir.



Şekil 4.14. $\alpha = 0.2$ Yarıçaplı, $\beta = 0.2$ Merkezli $D4$ Diski İçin A_c Özdeğerlerinin Grafiksel Gösterimi

4.5. ÇOK GİRİŞLİ ÇOK ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN SIKLIK BÖLGESİNDE OPTİMAL TASARIMI

4.5.1. Sürekli Zamanlı Sistemden Kesikli Zamanlı Sisteme Dönüşüm:

Sürekli zamanlı sistem durum denklemleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (4.154)$$

$$y(t) = C_c x(t) \quad (4.155)$$

Ayrık zamanlı sisteme dönüşüm formülleri aşağıda verilmiştir [10] :

$$A = e^{AT} \quad (4.156)$$

$$B = \left(\int_0^T e^{A_c \tau} d\tau \right) B_c \quad C = C_c \quad (4.157a)$$

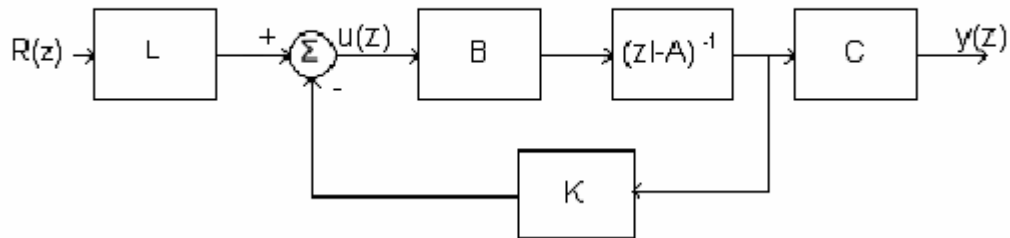
T =örnekleme zamanı olarak tanımlanmıştır. Ayrık sistemin denklemleri ise

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (4.157b)$$

$$y_k = Cx_k \quad (4.157c)$$

4.5.2. Ayrık Zamanlı Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemlerin Sıklık Bölgesi Tasarım Algoritması [7]

Kesikli sistemin durum uzay gösterimi parametrelerinden yararlanarak optimal geri beslemeli kontrol sistemi şekil 4.16 da verilmiştir:



Şekil 4.15. Ayrık-Zamanlı Optimal Geri-Beslemeli Kontrol Sistemi

Ayrık optimal kontrol sisteminde kuadratik başarımlı indisi:

$$J = \sum_0^{\infty} x^T[k]Qx[k] + u^T[k]Ru[k] \quad (4.158)$$

olup, burada Q simetrik, gerçekte, yarı kesin/kesin pozitif tanımlı, R ise kesin pozitif tanımlı ağırlık matrislerdir. Kapalı döngü sistem için kullanılan doğrusal kontrol yasası ise aşağıda verilmiştir.

$$u[k] = -Kx[k] + Lr[k] \quad (4.159)$$

Burada K , seçilen başarımlı indisini minimize yapacak optimal geribesleme sabit kazanç matrisi, L ise kalıcı durum hatayı sıfırlamak için kullanılan sabit matristir.

Şekil (4.15)'den yararlanarak, aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$U(z) = LR(z) - KX(z) \quad (4.160a)$$

$$U(z) = LR(z) - K(zI - A)^{-1}BU(z) \quad (4.160b)$$

veya

$$U(z) = [I + K(zI - A)^{-1}B]^{-1}LR(z) \quad (4.160c)$$

olarak elde edilir. Kesikli sistem dönüş fark matrisi [7],

$$F(z) = I + K(zI - A)^{-1}B \quad (4.161)$$

şekilde yazılabilir.

Kesikli sistem çıkış matrisi:

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (4.162)$$

veya

$$Y(z) = G(z)F(z)^{-1}LR(z) = T(z)R(z) \quad (4.163)$$

ve dönüş oranı matrisi [7],

$$Z(z) = F(z) - I = K(zI - A)^{-1}B \quad (4.163)$$

olarak tanımlanmıştı. Bu tanımlara göre sistemin kapalı döngü aktarım matrisi sistemin açık döngü aktarım matrisi ve dönüş- fark matrisine bağlı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$T(z) = G(z)F^{-1}(z)L \quad (4.164)$$

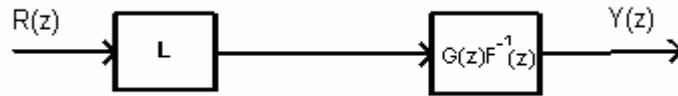
Sistemin kalıcı durum hatasını düzeltmek için kapalı döngü aktarım matrisi $z=1$ de birim matris olarak seçilebilir.

$$T(z) = \Big|_{z=1} = I \quad (4.165)$$

Sistemin giriş sayısı m , çıkış sayısı l ise $G(z)$ $l \times m$ boyutunda ve $F(z)$ $m \times m$ boyutunda polinom matrisler olacaktır. Sistemin giriş ve çıkış sayılarının aşağıda verilen üç duruma göre kalıcı durum hatayı sıfırlayacak sabit kazanç matrisi hesaplanabilir.

1) $m < l$; sistem giriş sayısı çıkış sayısından daha az ise:

Şekil 4.15 'de verilen optimal sistem şekil 4.16 'daki gibi gösterilebilir.



Şekil 4.16. $G(z)$ 'in Çıkışlarının Sayısı Girişten Fazla Olduğu Durumdaki Sistem

Burada giriş matrisi $R(z)$ $m \times l$, $Y(z)$ ise $l \times l$ boyutlarında olduğundan L , $m \times m$ boyutunda bir sabit matristir. Sistemin kalıcı durum hatasını düzeltmek için (4.165) 'de

verilen eşitlik kullanıldığında,

$$G(z)F^{-1}(z)L \Big|_{z=1} = I \quad (4.166)$$

veya

$$T(z) \Big|_{z=1} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}_{lxm} \stackrel{\Delta}{=} G(1)F^{-1}(1)L \quad (4.167)$$

eşitliği yazılabilir. Aşağıda verilen eşitlik tanımı yapıldığında ;

$$S_{lxm} \stackrel{\Delta}{=} G_{lxm}(1)F^{-1}_{mxm}(1) \quad (4.168)$$

S , lxm boyutunda sabit bir matristir. Bu tanım (4.170) eşitliğinde kullanıldığında ve matrisler boyutlarıyla gösterildiğinde ,

$$S_{lxm}L_{mxm} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}_{lxm} \quad (4.169)$$

eşitliği yazılabilir. Buna göre sabit kazanç matrisi L , aşağıdaki eşitlikle bulunabilir.

$$L_{mxm} = (S^T S)_{mxm}^{-1} S_{mxl}^T \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}_{lxm} \quad (4.170)$$

S matrisi dörtgensel bir matris olduğundan eğer;

$$\text{rank}(S) = m \quad (4.171)$$

ise her zaman için S^+ minimum sol tek tersi vardır. Diğer bir değişle

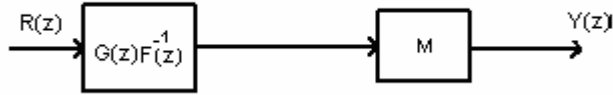
$$L_{m \times m} = S_{m \times l}^+ = (S^T S)^{-1} S_{m \times m} S_{m \times l}^T \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}_{l \times m} \quad (4.172)$$

olarak tanımlandığında (4.173) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$L_{m \times m} = S_{m \times l}^+ \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}_{l \times m} \quad (4.173)$$

2) $m > l$; giriş sayısı çıkış sayısından daha büyük ise:

Bu durumda şekil 4.15 daki optimal kontrol sistemi şekil 4.17 deki gibi gösterilebilir.



Şekil 4.17 $G(z)$ 'in Girişlerinin Sayısı Çıkıştan Fazla Olduğu Durumdaki Optimal sistem

Şekil 4.17'de de görüldüğü gibi sistemin kalıcı durum hatasını sıfırlayacak sabit kazanç matrisi M , çıkış tarafına yerleştirilmiştir. Buna göre sistemin kapalı döngü aktarım matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T(z) \Big|_{z=1} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix}_{l \times m} \stackrel{\Delta}{=} MG(1)F^{-1}(1) \quad (4.174)$$

S matrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$S_{l \times m} \stackrel{\Delta}{=} G_{l \times m}(1)F^{-1}_{m \times m}(1) \quad (4.175)$$

eşitliği yazılabilir. Burada M , $l \times l$ boyutunda sabit bir matristir. Buradan da M matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M_{lxl} = [I_1 \quad 0]_{lxm} S_{m \times l}^T (SS^T)_{lxl}^{-1} \quad (4.176)$$

Eğer:

$$\text{rank}(S_{l \times m}) = l \quad (4.177)$$

ise S matrisinin her zaman için minimum sağ tek tersi vardır ve

$$S^+ = S^T (SS^T)^{-1} \quad (4.178)$$

olarak gösterilirse (4.181) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M_{lxl} = [I_1 \quad 0]_{lxm} S_{m \times l}^+ \quad (4.179)$$

3) $m=l$; giriş sayısı çıkış sayısına eşit ise:

$$M = L = S^{-1} \stackrel{\Delta}{=} F(1)G^{-1}(1) \quad (4.180)$$

denklemini yazılabilir.

Eğer sistemin sabit kazanç matrisi giriş tarafında ise sistem çıkışları $u(k)$ ve $y(k)$ aşağıdaki eşitliklerle bulunabilir.

$m < l$ için:

$$u(k) = Z^{-1}\{F^{-1}(z)LR(z)\} \quad (4.181)$$

$$y(k) = Z^{-1}\{G(z)F^{-1}(z)LR(z)\} \quad (4.182)$$

Eğer sistemin sabit kazanç matrisi çıkış tarafında ise sistem çıkışları;

$m > l$ için:

$$u(k) = Z^{-1}\{F^{-1}(z)R(z)\} \quad (4.183)$$

$$y(k) = Z^{-1}\{MG(z)F^{-1}(z)R(z)\} \quad (4.184)$$

$m = l$ için:

(4.181), (4.182) veya (4.183) ve (4.184) denklemleri kullanılabilir.

Burada Z^{-1} ters z dönüşümüdür.

eşitlikleri ile hesaplanır. $u(k)$ ve $y(k)$ çıkışları ,sistem için kabul edilebilir şekilde ise seçilen ağırlık matrisleri sistem için uygundur. Eğer çıkışlar kabul edilebilir değil ise yeni bir R ağırlık matrisi uygun bir şekilde seçilip , L veya M matrisleri hesaplanarak $u(k)$ ve $y(k)$ çıkışları kontrol edilir.

4.5.2.1. Kesikli sistem sıklık bölgesi optimal tasarım algoritması

Sistem giriş sayısı m , çıkış sayısı l ve sistem derecesi n olmak üzere açık döngü aktarım matrisi ,genel olarak

$$G(z)_{l \times m} = C(zI - A)^{-1}B = \frac{N(z)_{l \times m}}{d(z)} \quad (4.185)$$

eşitliği ile verilir. Burada $N(z)$, $n-l$ derecesinde polinom matris ve $d(z)$ n derecesinde polinomdur. Sadece $G(z)$ in bilinmesi ile aşağıda verilen algoritma kullanılarak optimal kompanzator tasarımı sıklık bölgesinde yapılabilir.

Basamak 1

Sistemaçık döngü aktarım matrisi bulunur.

$$G(z)_{l \times m} = C(zI - A)^{-1}B$$

Sistem başarımlı görüngenel yoğunluk matrisi hesaplanır.

$$\Psi(z) = R + G^T(z^{-1})QG(z) \quad (4.186)$$

Basamak 2

Sistem başarımlı görünel yoğunluk matrisinin görünel çarpanları hesaplanır.

$$\Psi(z) = \Delta^T(z^{-1})\Delta(z) \quad (4.187)$$

Basamak 3

Sistem dönüş oranı matrisi hesaplanır.

$$F(z) = \Delta^{-1}(\infty)\Delta(z) \quad (4.188)$$

Basamak 4

$$S \stackrel{\Delta}{=} G(1)F^{-1}(1) \quad (4.189)$$

ile S matrisi, aşağıdaki koşullara bağlı olarak da L ve M matrisleri hesaplanır.

Eğer $m < l$ ve $\text{rank}(S) = m$ ise;

$$L_{m \times m} = (S^+_{m \times l} \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix})_{l \times m} \quad (4.190)$$

Eğer $m > l$ ve $\text{rank}(s) = l$ ise ;

$$M_{l \times l} = [I_l \quad 0]_{l \times m} S^+_{m \times l} \quad (4.191)$$

Eğer $m = l$ ise ; L veya M matrisleri yukarıdaki gibi hesaplanarak

$$L = M = S^{-1} \quad (4.192)$$

Basamak 5

Sistem çıkışları :

$m < 1$ için:

$$u(k) = Z^{-1}\{F^{-1}(z)LR(z)\} \quad (4.193)$$

$$y(k) = Z^{-1}\{G(z)F^{-1}(z)LR(z)\} \quad (4.194)$$

Eğer sistemin sabit kazanç matrisi çıkış tarafında ise sistem çıkışları;

$m > 1$ için:

$$u(k) = Z^{-1}\{F^{-1}(z)R(z)\} \quad (4.195)$$

$$y(k) = Z^{-1}\{MG(z)F^{-1}(z)R(z)\} \quad (4.196)$$

$m = 1$ için:

(4.191), (4.192) veya (4.193) ve (4.194) denklemleri kullanılabilir.

Burada Z^{-1} ters z dönüşümüdür. eşitlikleri ile hesaplanır. $u(k)$ ve $y(k)$ çıkışları ,sistem için kabul edilebilir şekilde ise seçilen ağırlık matrisleri sistem için uygundur.Eğer çıkışlar kabul edilebilir değil ise yeni bir R ağırlık matrisi uygun bir şekilde seçilip , L veya M matrisleri hesaplanarak $u(k)$ ve $y(k)$ çıkışları kontrol edilir.

Basamak 6

Sistem dönüş oranı matrisi hesaplanır.

$$Z(z) = F(z) - I \quad (4.197)$$

Basamak 7

Kontrol edilebilirlik matrisi hesaplanır

$$M_c^\Delta = [B \mathbb{M} B \mathbb{M}^2 B \mathbb{M} \mathbb{M}^{n-1} B] \quad (4.198)$$

Basamak 8

Sistemin karakteristik polinomu,

$$d(z) = \det(zI - \bar{A}) = z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n \quad (4.199)$$

ve

$$d(z)Z(z) = Z_0 z^{n-1} + Z_1 z^{n-2} + \dots + Z_{n-1} \quad (4.200)$$

matris çok terimli hesaplanarak $[V]$ matrisi oluşturulur.

$$[V] = [V_0 \| V_1 | \dots | V_{n-1}] \quad (4.201)$$

Burada

$$V_0 = Z_0 \quad (4.202)$$

$$V_p = Z_p + \sum_{j=1}^p C_{j-1} Z_p \quad p=1,2,\dots,n-1 \quad (4.203)$$

ve

$$c_0 = -d_1 \quad (4.204)$$

$$c_p = -d_{p+1} - \sum_{j=1}^p d_j c_{p-j} \quad p=1,2,\dots,n-1 \quad (4.205)$$

olarak hesaplanır.

Basamak 9

Sistemin optimal geri besleme kazancı hesaplanır.

$$K_{m \times n} = [V] \times M_c^+ \quad (4.206)$$

$$M_c^+ = [M_c^T]_{m \times n} [M_c \times M_c^T]_{n \times n}^{-1} \quad (4.207)$$

4.5.3. Gaz Türbini Problemi

ÖRNEK1: Arcasoy C.C.[4]&Rosenbrock H.H. and McMorran P.D.[31] tarafından incelenen gaz-türbini probleminin sürekli zaman durum uzay modeli katsayı matrisleri aşağıda verilmiştir. Burada kare olan C matrisi kullanılarak kare olmayan $G(z)$ aktarım matrisi elde edilmiştir.

$$a = \begin{bmatrix} -1.268 & -0.4528 & 1.498 & 951.5 \\ 1.002 & -1.9570 & 8.52 & 1240.0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad b^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (4.208)$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.209)$$

Sistem ağırlık matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (4.210)$$

Verilen sürekli zamanlı sistem matrisleri bölüm 4.5.1 de verilen kesikli zaman dönüşüm algoritması kullanılarak kesikli zamana çevrilir. Sampling time **T:0.2**

alındığında elde edilen kesikli sistem durum uzay modeli katsayı matrisleri A_d ve B_d aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.7753 & -0.0066 & 0.1064 & 7.3941 \\ 0.1452 & 0.6755 & 0.5860 & 9.8768 \\ 0 & 0 & 0.1353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.1519 & 159.7380 \\ 0.8480 & 210.7174 \\ 0.8647 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.211)$$

Sistem aktarım matrisi $G(z) = C(zI - A_d)^{-1}B_d$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G(z) = \frac{1}{d(z)} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix} \quad (4.212)$$

1.0e+006 *

$$g_{11} = 0.0015z + 0.0025$$

$$g_{12} = 0.0951z^2 + 1.1321z + 1.8059$$

$$g_{21} = 0.0001z^2 + 1.1321z + 1.8059$$

$$g_{22} = 0.1240z^2 + 1.4926z + 2.5257$$

$$g_{31} = 0.0010z^2 + 0.0033z + 0.0025$$

$$g_{32} = 0$$

$$g_{41} = 0$$

$$g_{42} = 0.0001z^3 + 0.0013z^2 + 0.0035z + 0.0025$$

1.0e+003 *

$$d(z) = 0.0010z^4 + 0.1132z^3 + 1.3573z^2 + 3.5030z + 3.5268$$

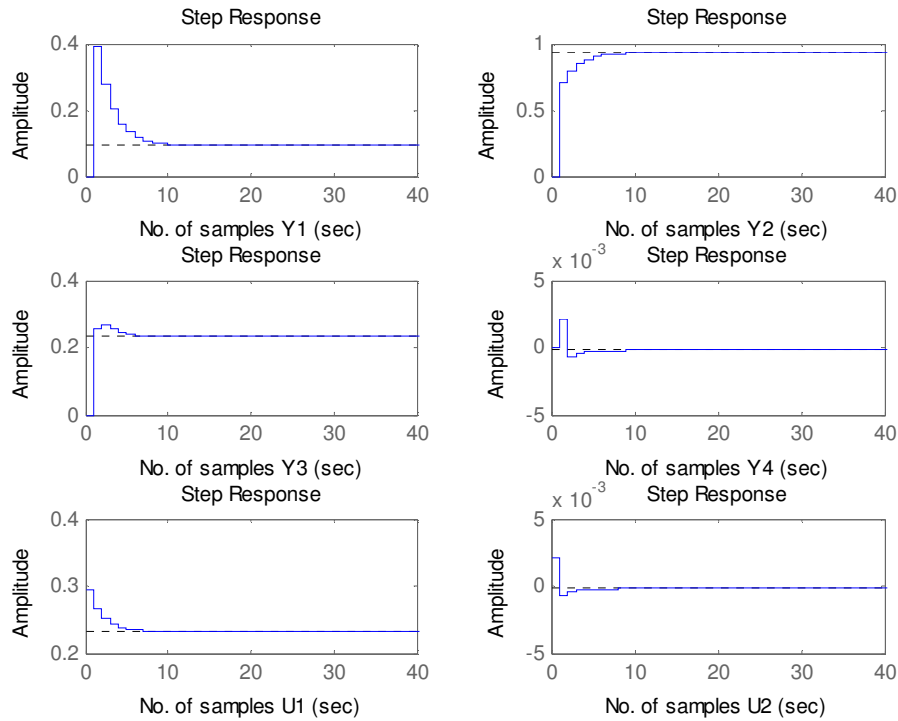
Ağırlık matrisi $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, referans girişi $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olarak alındığında elde edilen optimal kazanç matrisi K aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$K = \begin{bmatrix} -0.0778 & 0.0606 & 0.0631 & 0.0105 \\ 0.0024 & 0.0019 & 0.0018 & 0.0466 \end{bmatrix} \quad (4.213)$$

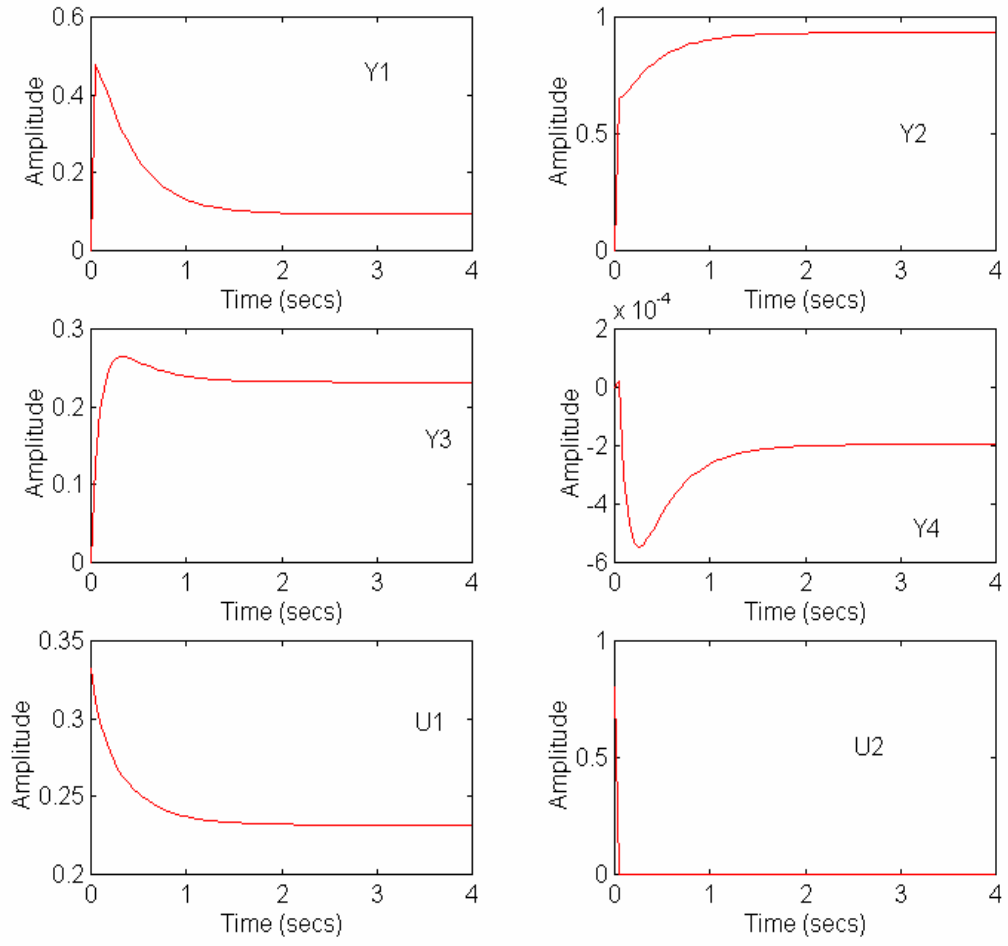
Öte yandan **dlqr** komutu ile elde edilen kesikli sistem optimal kazanç matrisi K_{ric} , yukarıda sıklık bölgesinde bulunan K kazanç matrisiyle aynı değerdedir.

$$K_{ric} = \begin{bmatrix} -0.0778 & 0.0606 & 0.0631 & 0.0105 \\ 0.0024 & 0.0019 & 0.0018 & 0.0466 \end{bmatrix} \quad (4.214)$$

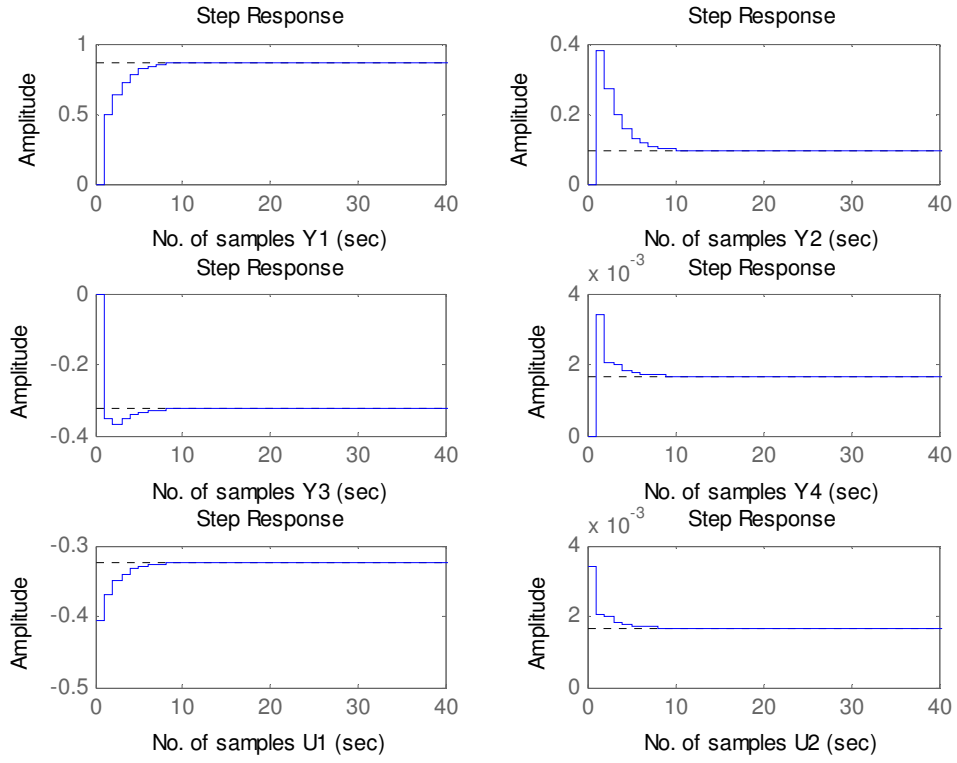
Elde edilen sistem giriş ve çıkış grafikleri aşağıda verilmiştir . Kesikli zamanda elde edilen grafiklerin sürekli zamanda Arcasoy[4] tarafından bulunan ve Altınoluk[1] tarafından incelenen grafiklerle örtüştüğü görülmektedir



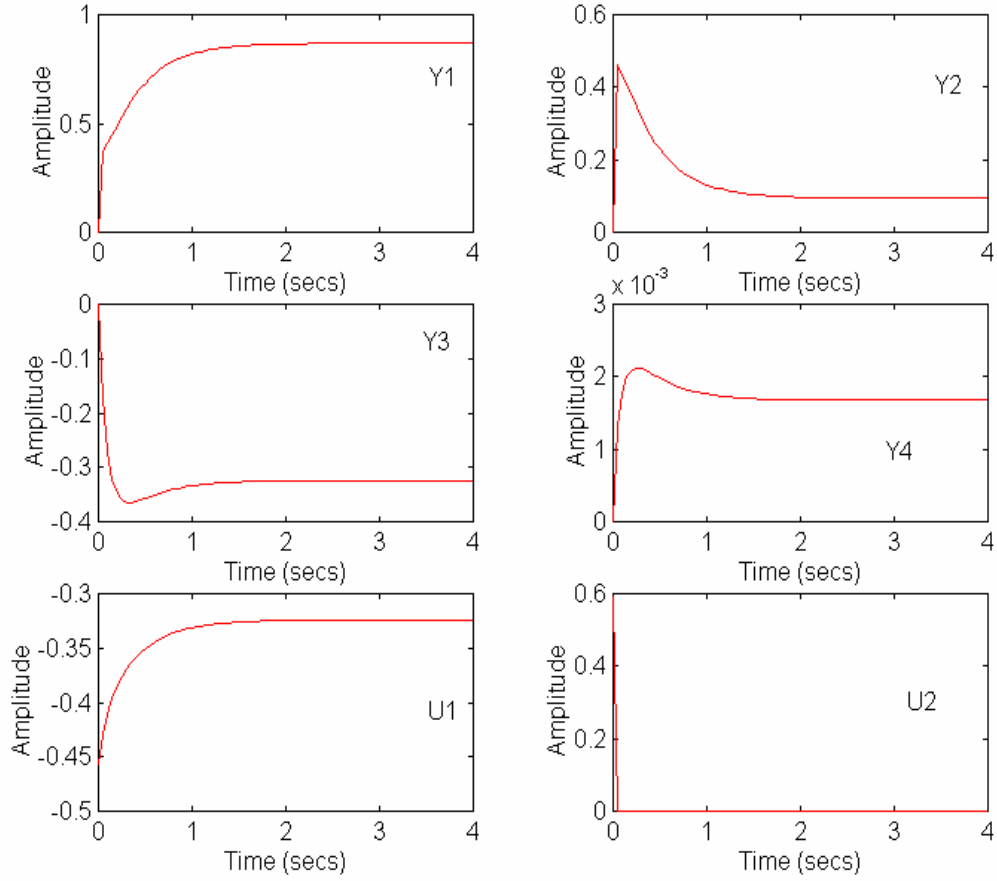
Şekil 4.18a.Sistem Giriş Çıkışları $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.18b.Sistem Çıkış ve Girişleri $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.19a.Sistem Çıkış ve Girişleri: $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.19b.Sistem Çıkış ve Girişleri : $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

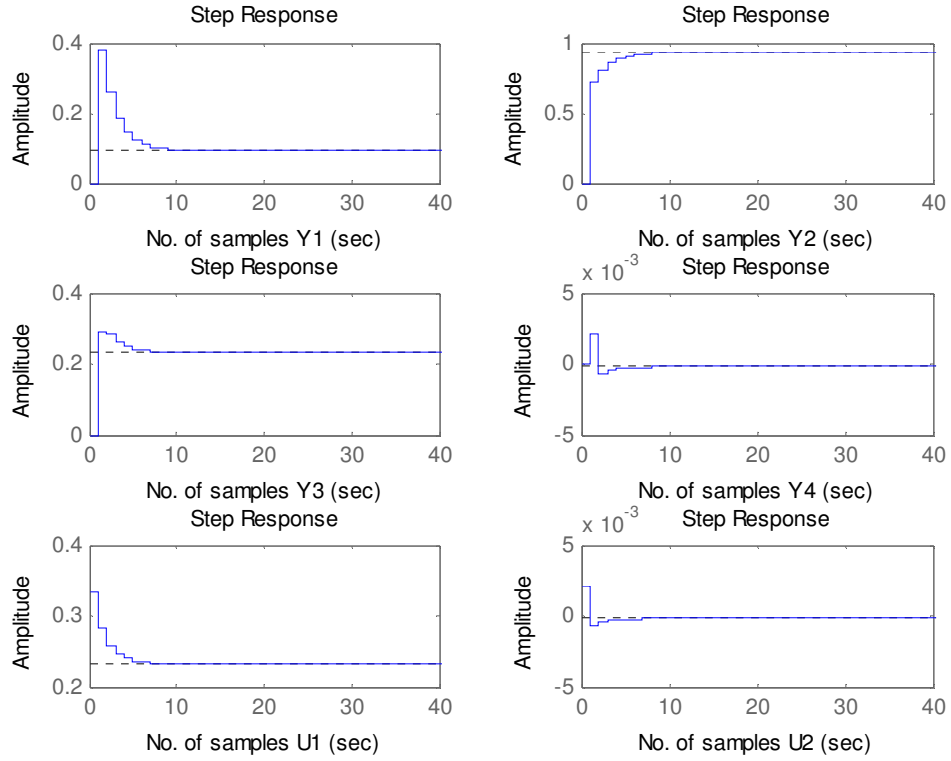
Sistem ağırlık matrisi $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, referans girişleri $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak alındığında optimal kazanç matrisi K aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$K = \begin{bmatrix} -0.1232 & 0.0960 & 0.1010 & 0.0167 \\ 0.0026 & 0.0018 & 0.0017 & 0.046 \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

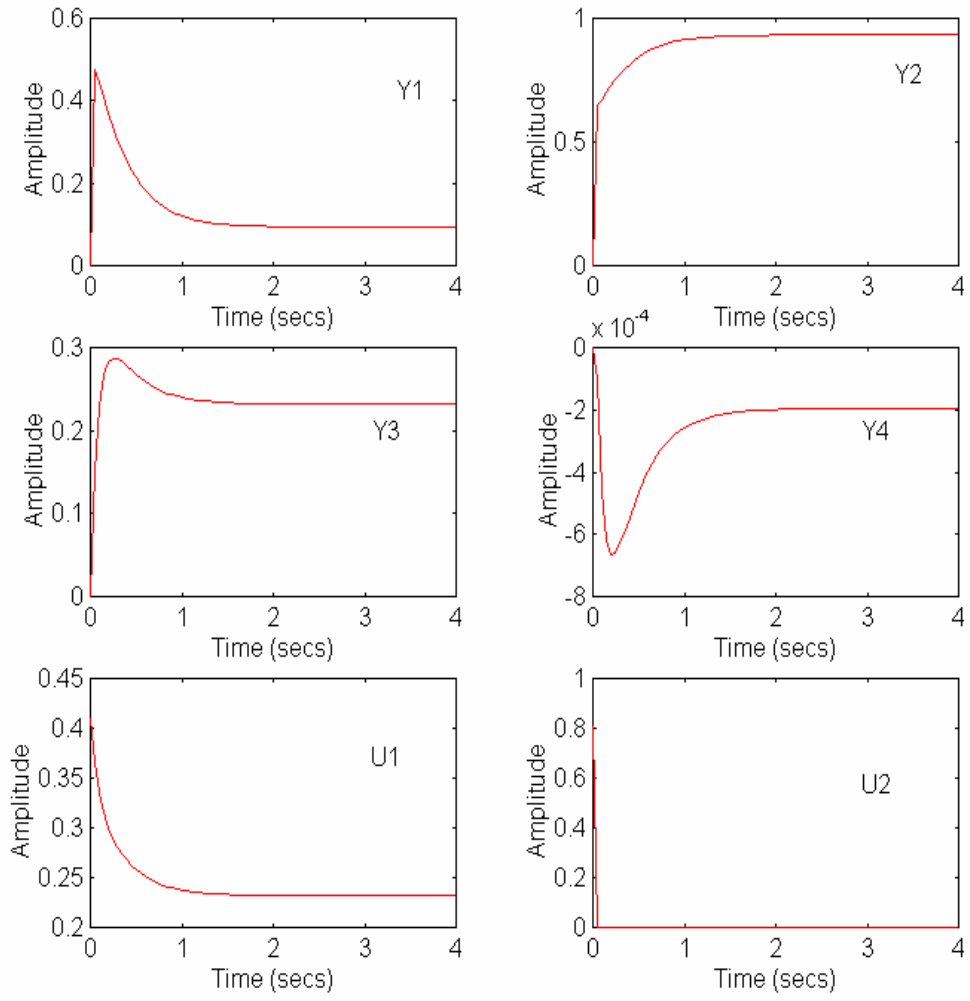
Öte yandan **dlqr** komutu ile elde edilen kesikli sistem optimal kazanç matrisi K_{ric} , yukarıda sıklık bölgesinde bulunan K kazanç matrisiyle aynı değerdedir.

$$K_{ric} = \begin{bmatrix} -0.1232 & 0.0960 & 0.1010 & 0.0167 \\ 0.0026 & 0.0018 & 0.0017 & 0.046 \end{bmatrix} \quad (4.216)$$

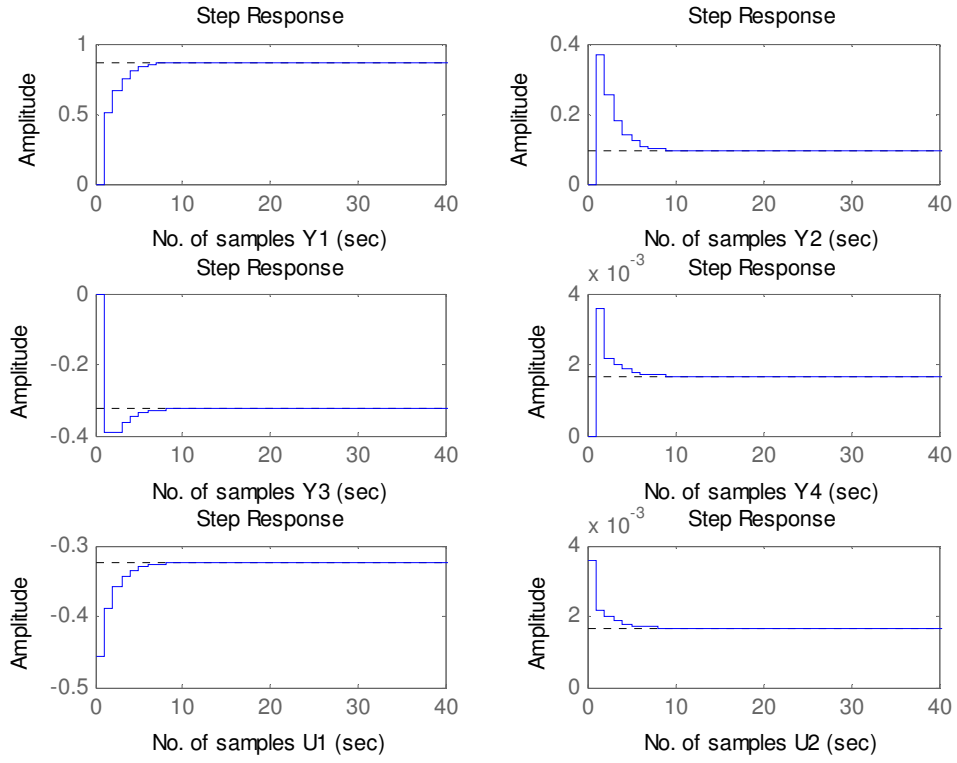
Elde edilen sistem giriş ve çıkış grafikleri aşağıda verilmiştir . Kesikli zamanda elde edilen grafiklerin sürekli zamanda Arcasoy[4] tarafından bulunan ve Altınoluk[1] tarafından incelenen grafiklerle örtüştüğü görülmektedir



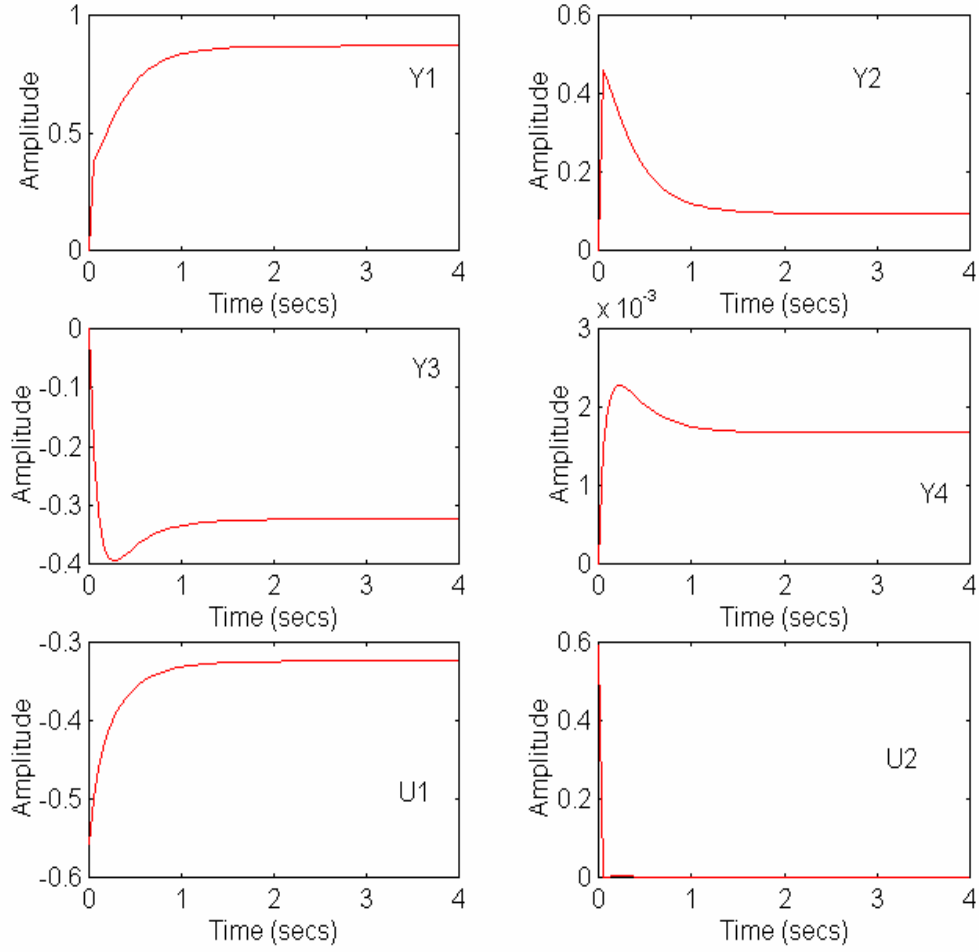
Şekil 4.20a. Sistem Çıkış ve Girişleri : $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.20b.Sistem Çıkış ve Girişleri: $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.21a. Sistem Çıkış ve Girişleri: $RR = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.21b.Sistem Çıkış ve Girişleri : $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

ÖRNEK2 : Arcasoy C.C.[4]&Rosenbrock H.H. and McMorran P.D.[33] tarafından incelenen gaz-tribünü probleminin sürekli zaman durum uzay modeli katsayı matrisleri aşağıda verilmiştir.Burada kare olmayan C matrisi kullanılarak kare $G(z)$ aktarım matrisi elde edilmiştir.

$$a = \begin{bmatrix} -1.268 & -0.4528 & 1.498 & 951.5 \\ 1.002 & -1.9570 & 8.52 & 1240.0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad b^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (4.217)$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

Sistem ağırlık matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

Verilen sürekli zamanlı sistem matrisleri kesikli zaman dönüşüm algoritması kullanılarak kesikli zamana çevrilir. Sampling time **T:0.2** alındığında elde edilen kesikli sistem durum uzay modeli katsayı matrisleri A_d ve B_d aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.7753 & -0.0066 & 0.1064 & 7.3941 \\ 0.1452 & 0.6755 & 0.5860 & 9.8768 \\ 0 & 0 & 0.1353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.1519 & 159.7380 \\ 0.8480 & 210.7174 \\ 0.8647 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

Sistem aktarım matrisi $G(z) = C(zI - A_d)^{-1}B_d$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G(z) = \frac{1}{d(z)} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = 0.1519 z^3 - 0.0367 z^2 - 0.0508 z$$

$$g_{12} = 159.7380 z^3 - 123.5047 z^2 + 8.7295z + 0.6847$$

$$g_{21} = 0.8480 z^3 - 0.2436 z^2 - 0.2935z$$

$$g_{22} = 210.7174 z^3 - 158.8176 z^2 + 11.0502 z + 0.8910$$

$$d(z) = 1.0000 z^4 - 1.5861 z^3 + 0.7210 z^2 - 0.0710z$$

Ağırlık matrisi $r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, referans girişi $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olarak alındığında

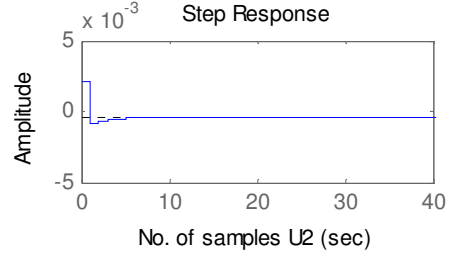
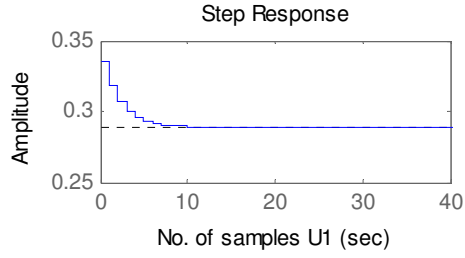
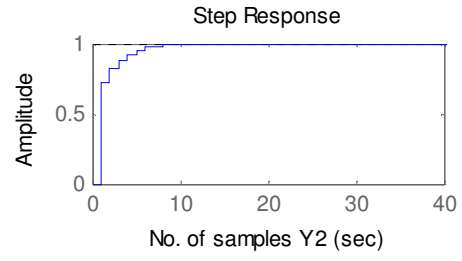
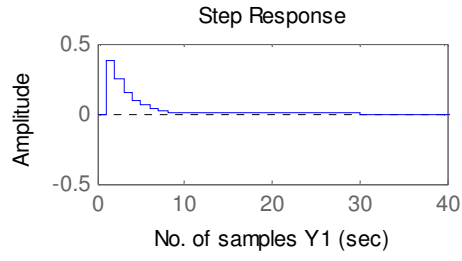
elde edilen optimal kazanç matrisi K aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$K = \begin{bmatrix} -0.0484 & 0.0377 & 0.0279 & 0.0067 \\ 0.0023 & 0.0019 & 0.0019 & 0.0466 \end{bmatrix} \quad (4.221)$$

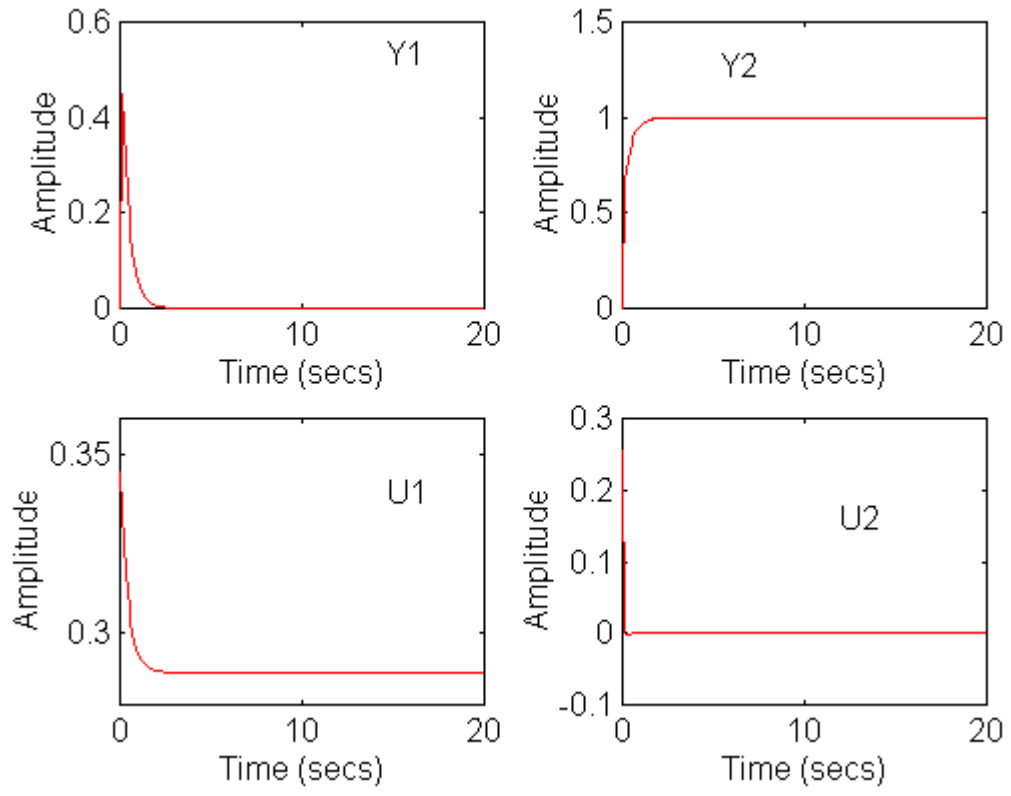
Öte yandan **dlqr** komutu ile kesikli sistem optimal kazanç matrisi K_{ric} , yukarıda sıklık bölgesinde bulunan K kazanç matrisiyle aynı değerdedir.

$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} -0.0484 & 0.0377 & 0.0279 & 0.0067 \\ 0.0023 & 0.0019 & 0.0019 & 0.0466 \end{bmatrix} \quad (4.222)$$

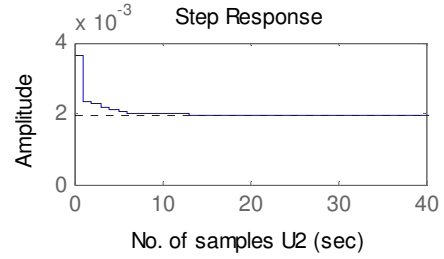
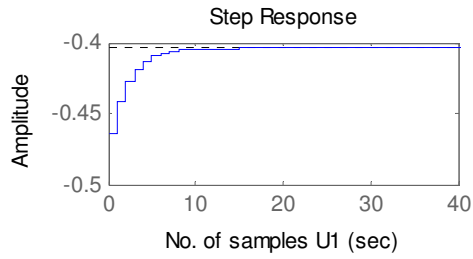
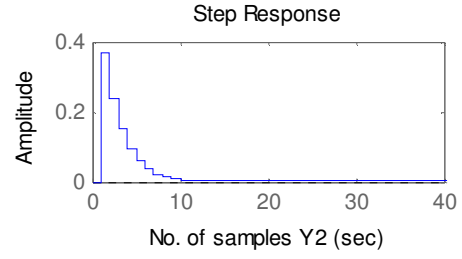
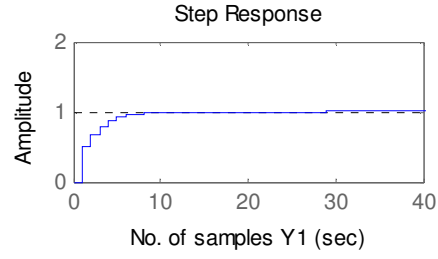
Elde edilen sistem giriş ve çıkış grafikleri aşağıda verilmiştir . Kesikli zamanlı sistemde frekans bölgesinde elde edilen grafikler sürekli zamanda da bulunup karşılaştırılmıştır. Grafiklerin örtüştüğü görülmektedir



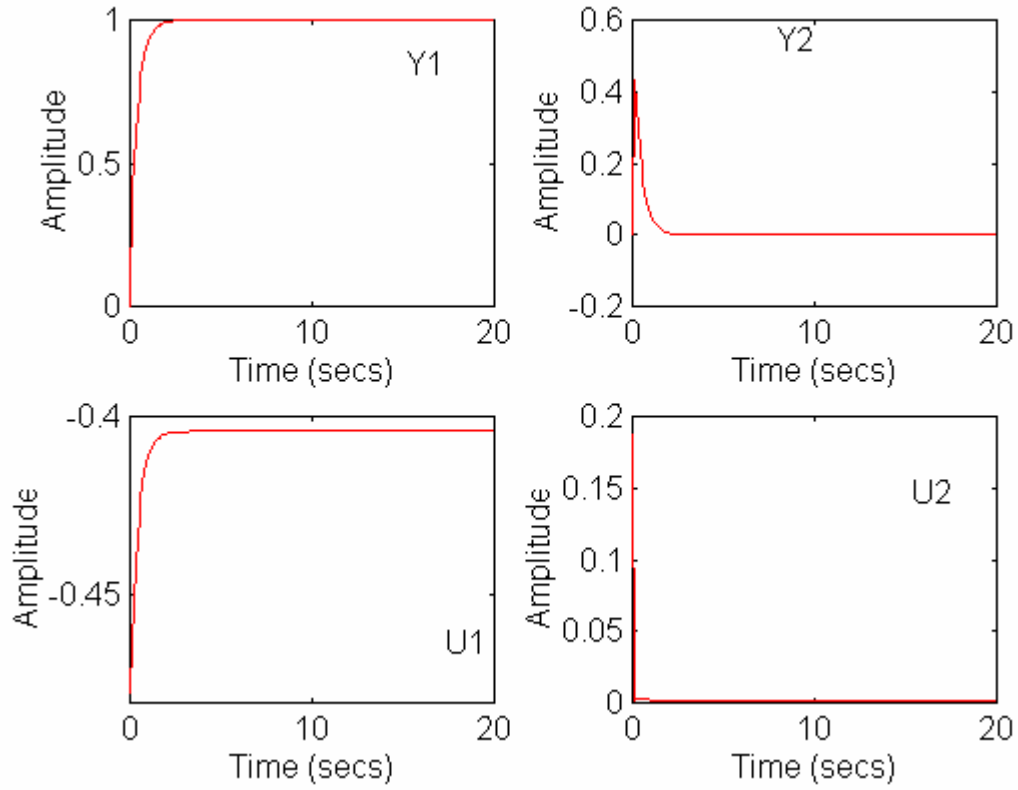
Şekil 4.22a. Sistem Çıkış ve Girişleri: $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.22b. Sistem Çıkış ve Girişleri : $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.23a.Sistem Çıkış ve Girişleri : $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



Şekil 4.23b.Sistem Çıkış ve Girişleri : $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

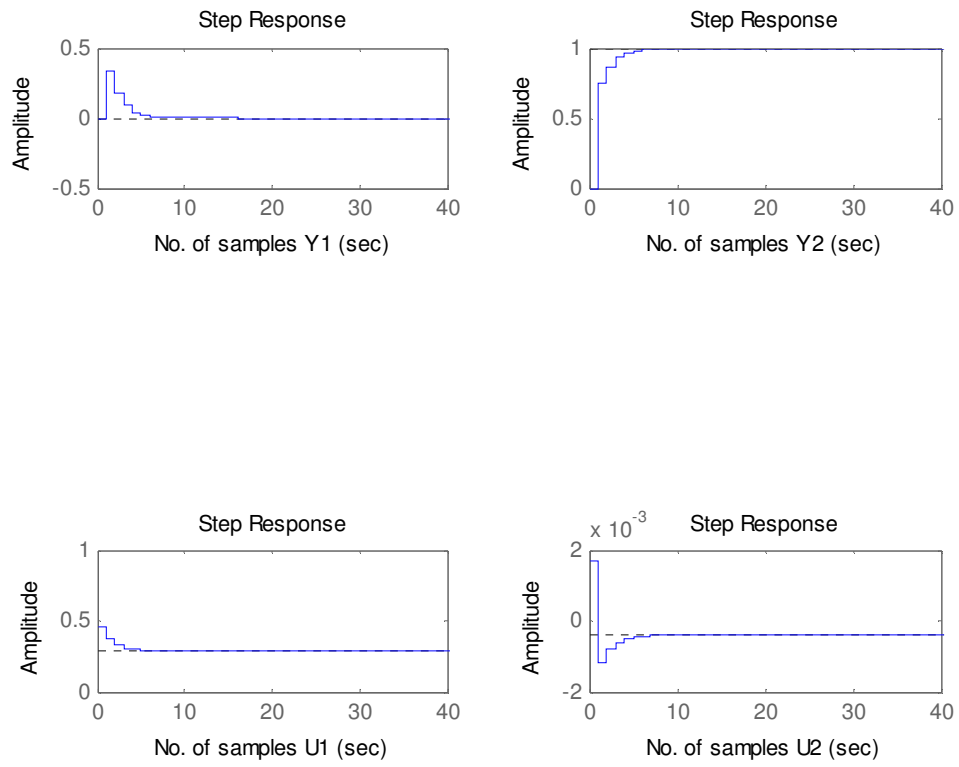
Ağırlık matrisi $r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, referans girişi $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olarak alındığında elde edilen optimal kazanç matrisi K aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$K = \begin{bmatrix} -0.1785 & 0.1391 & 0.1013 & 0.0243 \\ 0.0027 & 0.0016 & 0.0017 & 0.0466 \end{bmatrix} \quad (4.223)$$

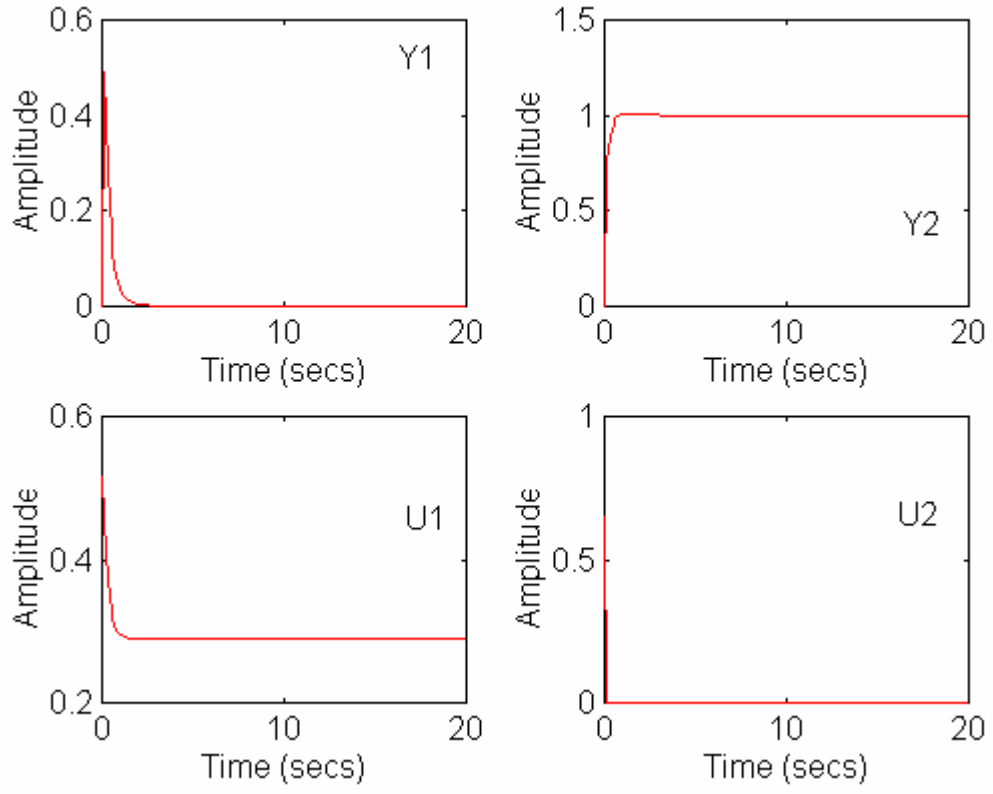
Öte yandan **dlqr** komutu ile kesikli sistem optimal kazanç matrisi K_{ric} , yukarıda sıklık bölgesinde bulunan K kazanç matrisiyle aynı değerdedir.

$$K_{ric} = K = \begin{bmatrix} -0.1785 & 0.1391 & 0.1013 & 0.0243 \\ 0.0027 & 0.0016 & 0.0017 & 0.0466 \end{bmatrix} \quad (4.224)$$

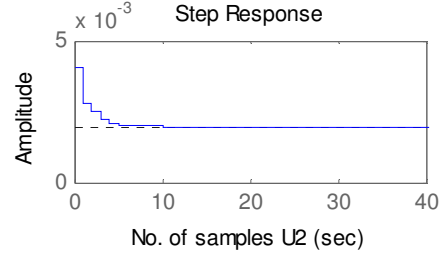
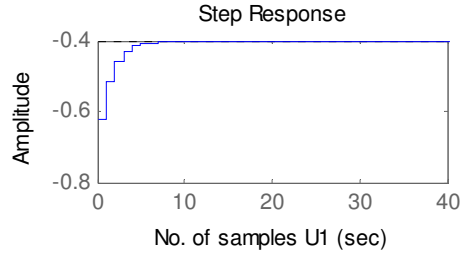
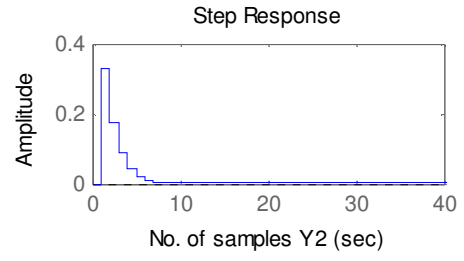
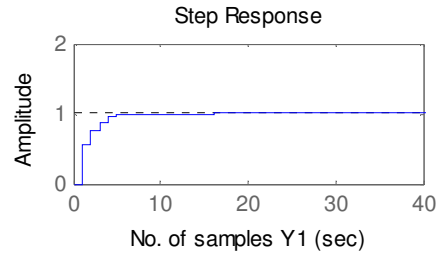
Elde edilen sistem giriş ve çıkış grafikleri aşağıda verilmiştir . Kesikli zamanlı sistemde frekans bölgesinde elde edilen grafikler sürekli zamanda da bulunup karşılaştırılmıştır.Grafiklerin örtüştüğü görülmektedir



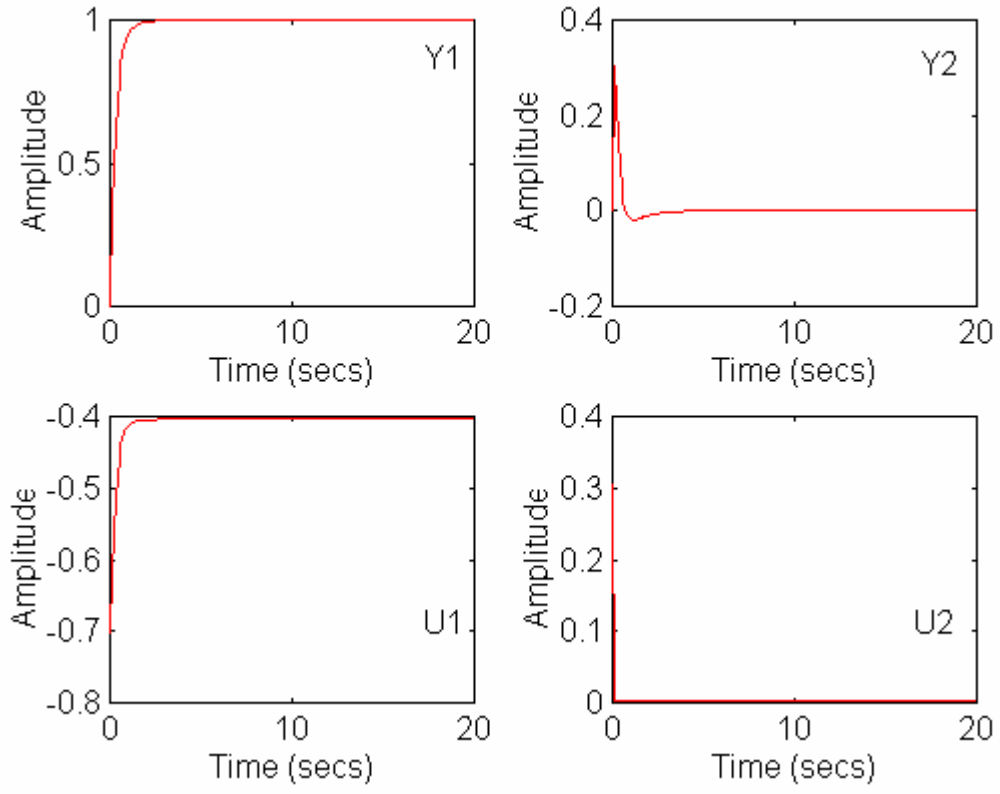
Şekil 4.24a. Sistem Çıkış ve Girişleri: $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



Şekil 4.24b. Sistem Çıkış ve Girişleri: $RR = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



Şekil 4.25a. Sistem Çıkış ve Girişleri: $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



Şekil 4.25b. Sistem Çıkış ve Girişleri: $RR = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. SONUÇ

Kontrol sisteminin optimizasyon kavramı, başarımlı indisi seçimi ve fiziksel sınırlamalar dahilinde optimal kontrol sistemi tasarımı içerir. Bu tür optimal kontrol sistemleri idealden farklıdır; optimal sistemler fiziksel sınırlamalar dahilinde en iyiye ulaşabilmesine rağmen ideal sistemler en iyi amaca rahatlıkla ulaşamayabilir.

Kontrol sistemlerinin optimizasyonu probleminde durum değişkenleri, kontrol değişkenleri ve sistemin parametreleri kullanılır. Sistem parametreleri problemin özelliklerine göre belirlenen sabitlerdir.

Bu çalışmanın amacı kontrol sistemlerinin oluşturulan ayrık zamanlı sistem modellerine göre sistemi en uygun yani optimuma getirecek geri besleme kazancını ve Q ağırlık matrisini zaman bölgesi Matris Riccati çözümü yapılmaksızın elde etmektir. Optimal kontrol probleminin sıklık bölgesinde çözümü için çeşitli yöntemler önerilmiştir. Bilinen bu sıklık bölgesi yöntemlerinin çok girişli çok çıkışlı sistemlere uygulanması, optimal kontrol sistemlerinin analizinde kolaylıklar getirmiştir. Zamandan bağımsız optimal kontrol sistemlerinin Matris Riccati eşitliğinin, sıklık bölgesinde elde edilen eşdeğer eşitliğinin, sıklık bölgesinde çözümü için Arcasoy [3] [5], kaynaklarının önerdiği yöntem kullanılmıştır.

Bu çalışmada zamanla değişmeyen sistemlerin sıklık bölgesinde optimal ve ters optimal kontrol problemin kesikli ve sürekli sistemler için tasarımı yapılmıştır. Bu tasarım yöntemlerinde önemli rol oynayan görüngenel ayrışım işlemi için en etkin algoritma seçilerek detaylı olarak incelenmiştir. Optimal kazanç matrisi görüngenel ayrışım algoritması kullanılarak kolayca bulunmuştur.

Sıklık bölgesinde ayrık-zamanlı sistem için önceden belirlenen bir kararlılık sınırı içerisinde yer alan dört yeni bölgeler içerisinde kapalı çevrim köklerini atan dört yöntem geliştirilmiştir. Geçici tepkiyi iyileştirmek için; kararlı sistem kapalı çevrim köklerini birim çember içerisinde önceden belirlenen dört yeni bölgeye çeken Q ağırlık matrisleri sıklık bölgesinde bulunmuştur.

Arcasoy'un frekans bölgesinde ayırık zamanlı çok girişli çok çıkışlı sistemlerde optimal kazanç matrisinin elde edilmesine dayalı algoritması [7] verilmiştir. Zaman bölgesindeki çözümle karşılaştırılması yapılmıştır. Görüngesel ayrışma dayalı algoritma Arcasoy tarafından kare olmayan aktarım matrisine uygulanabilecek şekilde geliştirilmiştir. Gaz türbini problemi ele alınarak algoritmanın kare ve kare olmayan sürekli ve ayırık sistem aktarım matrislerine uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Sürekli zamanda modellenen gaz türbini problemi [31] ele alınmıştır. Sistem durum matrisleri kesikli sistem dönüşüm denklemleri kullanılarak [10] ayırık zamanlı hale dönüştürülmüştür. Kare ve kare olmayan aktarım matrisine uygulanacak şekilde Arcasoy tarafından geliştirilen algoritma kullanılarak [7] seçilen giriş çıkış değerlerine göre kesikli sistemde grafikler elde edilmiştir.

Zaman bölgesi optimal kontrol tasarımında sistemin tüm A, B, C, Q, R parametrelerine ihtiyaç vardır. Öte yandan sıklık bölgesi tasarımında aktarım fonksiyonu ve Q, R parametrelerinin bilinmesi yeterli olmaktadır. Endrikat C. ve Hartmann I. [13] makalesinde aktarım fonksiyonu MFD (matrix fraction description) formatında yazılması gerekmektedir. Bu şekilde tasarım oldukça zor ve zaman almaktadır. Öte yandan Endrikat C. ve Hartmann I. [13] makalesinde algoritma sadece kare aktarım matrisine uygulanabilmektedir ki bu da sınırlandırma getirmektedir. Bu çalışmada verilen Arcasoy [7] tarafından geliştirilen algoritma hem kare hem de kare olmayan aktarım matrisine direkt olarak görüngesel ayrışma ile uygulanabilmektedir. Bu da sınırlandırmayı ortadan kaldırmıştır. Bu çalışmanın sonucunda **Sıklık** bölgesindeki **ters optimal** kontrol probleminin tasarımını daha kolay hale getirilmiş **yeni** algoritmaların bulunması Denetim Kuramı ve Uygulamaları konusunda bir boşluğu doldurması tezin özgün değeri olarak düşünülebilir.

z- düzleminde dört **yeni** bölge seçilerek **ters optimal** tasarım gerçekleştirilmiştir. Tezin gerek konusu gerekse amacı doğrultusunda bahsedilen tasarım metodları oldukça zordur. Dolayısıyla, tezin her kademesindeki çalışmaların literatüre önemli katkıda bulunacağını kestirmek mümkündür.

KAYNAKLAR

- [1] Altınoluk S., Frekans Bölgesinde Sürekli ve Kesikli Sistemlerde Ters Optimal Kontrol ve Gaz Türbini Problemine Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2007.
- [2] Anderson B.D.O. and J.B.Moore: “Optimal Control LQ Methods”, USA, P.377, Prentice Hall, (1979).
- [3] Arcasoy C.C. and F.J.T. Shouman, “Linear quadratic regulators and eigenvalue placement in specified regions: Frequency domain solution” Proc.of II.Asian Control Conference, pp.167-170, (1997).
- [4] Arcasoy C.C. “Multivariable optimal control system design in frequency domain”, Proc.of the IASTED International Conference on Control and Applications, Banff, pp.95-100, (July 1999).
- [5] Arcasoy C.C. ”Discrete-time optimal regulator and eigenvalue placement in a prescribed region: Frequency domain solution” Proc. Symposium on Quantitative Feedback theory and other Frequency Domain methods and Applications, University of Strathclyde, pp.93-95, (August 1997).
- [6] Arcasoy C.C. “Return-difference matrix properties for optimal stationary discrete Kalman Filter”, Proc. IEE, **vol.118**, No.12, pp.1831-1834, (December 1971).
- [7] Arcasoy C. C., “Discrete-time multivariable optimal control system design in frequency domain”, Symposium on advanced in systems, signals, control and computers, IAAMSAD, **vol.2**, pp.269-376, (1998).
- [8] Athans M. And Falb P.L.: ”Optimal Control”, McGraw-Hill, USA, P.411,(1966).
- [9] Björn Wittenmark, Robin J. Evans, Yeng C. Soh, “Constrained pole-placement using transformation and LQ- design”, Automatica. **vol.23**, No.6, pp.767-769 (1987).
- [10] Chen C.T.: “Linear System Theory and Design”, Holt Sounders, China,

p.312,Int. Edition, (1984).

- [11] "Computational Mathematics", B.P. Demidovich, I.A. Moron, Mir Publishers, (1987).

- [12] D.S.Naidu :"Optimal Control Systems", CRC pres, USA, p.433, (2003).
- [13] Endrikat C. and Hartmann I. "Optimal design of discrete-time MIMO systems in the frequency domain", Int.J. Control, **vol.48**, No .4 , pp. 1569- 1582, (1998).
- [14] Friedland B.:"Control System Design", McGraw-Hill, USA, p.287, (1986).
- [15] G. Enea, J. Duplaix, M.Franceschi, "Discrete optimal control with aggregative pole placement" *IEE Proceedings-D*, **vol.140**, No.5, pp.309- 312 (1993).
- [16] G.P.Liu and S. Daley, "Stable Dynamical controller design for robust polynomial pole assignment" *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, **vol.145**, No.3, (1993).
- [17] Grimble M.J. and Johanson M.A.:"Optimal and Stochastic Estimation Theory and Applications", John Wiley, USA, p.536, (1988).
- [18] Hadi Saadat:"Computational Aids in Control Systems Using Matlab", McGraw-Hill,New York, p.140, (1993).
- [19] Jezek J. and Kucera V. "Efficient Algorithm for Matrix Factorization", *Automatica*,**vol. 21**, No.6, pp.663-669, (1985).
- [20] Kenji Sugimoto and Yukata Yamamoto, "On successive pole assignment by linear-quadratic optimal feedbacks" *Lin. Alg. Its Appl.*,**vol.122**, No.1, pp.697-724 (1989).
- [21] Kwakernaak H. "MATLAB Macros for polynomial H_{∞} control system optimization", Memo. 881, University of Twente, Dept.Applied Mathematics, (1990).
- [22] L.S. Shieh and M.M. Mehio and S. Ganesan, "Discrete linear quadratic

regulators with eigenvalue placement in specified region”, *Int.J.Systems Sci.*, **vol.20**, No.9, pp.1713-1728, (1989).

- [23] Lewis F.L. :”Optimal Control”, John Wiley, USA, p.362, (1986).
- [24] Lewis F.L. :”Optimal Estimation”, John Wiley, USA, p.376, (1986).
- [25] Linear Algebra, H.D. Ikramov: ” Problems Book”, Mir Publishers, Moscow, (1983).
- [26] MacFarlane A.G.J. ”Frequency Response Methods in Control Systems”, *IEEE Press*, p.426, (1979).
- [27] MacFarlane A.G.J. :”Return- difference and return-ratio matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback control systems, *Proc. IEE*, **vol.117**, No.10, pp. 2037-2049, (1970).
- [28] Gene H. Golub, Charles F van Loan “Matrix Computations”, , The John Hopkins University Press, p.684, London,(1996).
- [29] Ogata K. :”Modern Control Engineering”, Prentice Hall, USA, p.963,(1990).
- [30] R. Kondo and K. Furuta, “On the bilinear transformation of Riccati Equations” *IEEE Transactions on Automatic Control*. **vol.31**, No.1, (1986).
- [31] R.A. Perez , K.-N. Lou ”Decentralised multivariable control and stability of a gas turbine engine” *IEE Proc. Control Theory Appl.*, **vol.141**, No.6, (1994).
- [32] Rosenbrock H.H. and McMorran P.D. “State-space analysis of cascaded controller” *Proc. IEE*, **vol.117**, No.5, pp.1026-1030, (1970).
- [33] Shouman F.J.T. “Inverse Optimal Control”, MSc.Thesis, Eastern Mediterranean University, Elec.Eng. Dept. Famagusta, Turkey, (1995).
- [34] Toru Fujinaka and Tohru Katayama, “Discrete-time optimal regulator with closed-loop poles in prescribed region”, *Int.J. Control*, **vol.47**, No.5, pp.1307-1321, (1988).
- [35] Tsu-Tian LEE and Shiow-Harn LEE, “Discrete optimal control with

- eigenvalue assigned inside a circular region". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **vol.31**, No.10, pp. 958-962, (October 1986).
- [36] Wolovich W.A., "Frequency domain state feedback and estimation", *Int. J. Control*, **vol.17**, No.2, pp. 417-428, (1973).
- [37] Y.Ochi and B. Wie,"Pole assignment for optimal regulators with a nonnegative definite weighting Matrix". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 0731-5090, **vol.19**, No.5, pp. 967-969, (1996).

7. EKLER

7.1.Sıklık Bölgesi Tasarımı için Kullanılan Kod:

```
clf

sizeA=size(A);

sizeb=size(b);

c=eye(sizeA(:,1));

I=eye(sizeA(:,1));

q=eye(sizeA(:,1));

r=eye(sizeb(:,2));

if det((ay-I))==0

    disp('(ay-I) is singular')

else

    abeta=A-beta*eye((size(A)));

    ay=abeta/alpha;

    by=b/alpha;

    a_bar=inv(ay-I)*(ay+I);

    b_bar=inv(ay-I)*b;

    [kc]=coptks(a_bar,b_bar,I,q,r);

    [kcric,S,E] = lqr(a_bar,b_bar,q,r,0)

    [q_bar]=coptlk(a_bar,b_bar,kc,r);

    [Q1]=.5.*(A-I)'*q_bar*(A-I)

    [R1]=2.*r+.5.*b'*q_bar*b
```



```

[S1]=.5.*(A-I)*q_bar*b
[kd]=doptks(ay,by,c,Q1,R1,S1)
[kdric] = dlqr(ay,by,Q1,R1,S1)
v=eig(A-b*kd)
drc_cir(beta,alpha,v)
axis('square');
title('z-plane');
xlabel('Re z');
ylabel('Im z');
[svdq]=svd(Q1)
[svdr]=svd(R1)
P1=Q1-S1*inv(R1)*S1'
[svdp]=svd(P1)
end

```

7.2.Sürekli Zamanlı Sistemden Kesikli Zamanlı Sisteme Dönüşüm Kodu:

```

syms t1;
syms T;
AD=expm(a.*t1);
BDc=real(double((int(AD, t1, 0, 0.2))*b));%T=süre/örnek sayısı=4/200
ADc=real(double(expm(a*0.2)));

```

7.3.Sıklık Bölgesi Tasarımı İçin Kullanılan Kodlar:

```

function [k,US,YS,dinUS,DI] = gasturnsq(a,b,cc,q,r,RR)

```

(Kesikli zamanda incelenen gaz türbini probleminde kare olmayan aktarım matrisine uyarlanan algoritma kodu)

```

if nargin ~= 6

```

```

    error('number of input equal to 6')
end
[rc,mc] = size(cc);
[n,m] = size(b);
[rq,mq] = size(q);
d = zeros(rc,m);
cg = zeros(m,rc*(n+1));
num = zeros(m,m*(2*n+1));
c = zeros(1,n);
v = zeros(m,m*n);
rd = zeros(m,m*(n+1));
[g,di] = mvss2tf(a,b,cc,d)
DI=di;
for k=0:n
    cg(1:m,k+1:n+1:(rc-1)*(n+1)+1+k) = g(1:rc,n+1-k:n+1:m*(n+1)-k)' * q;
end
gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(di(n+1:-1:1),di);
nn = 2*n+1;
for i=1:m
    for j=1:m
        num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
    end
end
NUM=num;
[Ac,Bc,Cc,Dc]=d2cm(a,b,cc,d,2,'tustin');
E=eig(Ac)
if(m==1)
    [N1,D1]=d2cm(num,com,2,'tustin');
    num=N1;

```

```

else
    [snum1,snum2]=size(num);
    for i=1:snum1
        for j=0:2*n+1:snum2-2*n-1
            [N1,D1]=d2cm(num(i,j+1:j+2*n+1),com,2,'tustin');
num(i,j+1:j+2*n+1)=N1;
        end
    end
    end
    num=s2k(num,n,m);
    num
    if(m==1)
        [o1] = jspec(num,2*n,E)
    else
        degNUM=2*n*ones(1,m);
        [o1]=jspec(num,degNUM,E)
    end
    o=k2s(o1,n/2,m);
    [D22,N22]=d2cm(1,di,2,'tustin');
    if (m==1)
        [N2,D2]=c2dm(o,N22,2,'tustin');
    else
        [so1,so2]=size(o);
        for i=1:so1
            for j=0:2*n/2+1:so2-2*n/2-1
                [N222,D2]=c2dm(o(i,j+1:j+2*n/2+1),N22,2,'tustin');
                N2(i,j+1:j+2*n/2+1)=N222;
            End
        end
    end
end

```

```

o=N2;
so = inv(o(1:m,1:n+1:(m-1)*(n+1)+1));
for k=0:n
    rd(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k) = so * o(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k);
end
FF=rd;
[rowFF,colFF]=polsize(FF,n);
S=evalpm(g,n,1)*invpmeva(FF,n,1);
[ll,mm]=polsize(g,n);
if(ll==mm)
    MM=S*LL*inv(S);
    LL=inv(S);
elseif(ll>mm)
    LL=pinv(S)*matform(ll,mm,mm);
else
    MM=matform(ll,mm,ll)*pinv(S);
end
[nimUS,DnimUS]=adjpm(FF,n);
dinUS=detpm(FF,n);
[rLL,cLL]=size(LL);
if(rLL~=0)
    US1=multpm(nimUS,LL,DnimUS,0);
    US=multpm(US1,RR,DnimUS,0);
    YS1=multpm(g,nimUS,n,DnimUS);
    DYS1=DnimUS+n;
    YS2=multpm(YS1,LL,DYS1,0);
    YS=multpm(YS2,RR,DYS1,0);
else
    US=multpm(nimUS,RR,DnimUS,0);
    YS1=multpm(MM,g,0,n);

```

```

YS2=multpm(YS1,nimUS,n,DnimUS);
DYS2=n+DnimUS;
YS=multpm(YS2,RR,DYS2,0);
end
subplot(321),dstep(YS(1,:),dinUS,40)% örnek sayısı 200
axis([0 40 -.2 0.5]);
xlabel('No. of samples Y1')%isim
subplot(322),dstep(YS(2,:),dinUS,40)
axis([0 40 0 0.8]);
xlabel('No. of samples Y2')
subplot(323),dstep(YS(3,:),dinUS,40)
axis([0 40 0 0.8]);
xlabel('No. of samples Y3')
subplot(324),dstep(YS(4,:),dinUS,40)
axis([0 40 0 0.8]);
xlabel('No. of samples Y4')
subplot(325),dstep(conv(US(1,:),di),dinUS,40)
axis([0 40 0.2 0.6]);
xlabel('No. of samples U1')
subplot(326),dstep(conv(US(2,:),di),dinUS,40)
axis([0 40 -1.2 -0.9]);
xlabel('No. of samples U2')

for i=1:m
    rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) = rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) - di(1:n+1);
end
RD=rd;
for i=1:n
    c(i) =-di(i+1);
    k1 = (i-1)*m +1;

```

```

v(1:m,k1:i*m) = rd(1:m,i+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+i);
for l=1:i-1
v(1:m,k1:i*m) = v(1:m,k1:i*m) + c(l).*rd(1:m,i+1-l:n+1:(m-1)*(n+1)+i+1-l);
c(i) = c(i) - di(l+1)*c(i-1);
end
end
mc = ctrb(a,b);
if m == 1
k = v * inv(mc);
else
k = v * pinv(mc)
end
end%

```

function [k,US,YS,dinUS,DI] = gastursq(a,b,cc,q,r,RR):

(Kesikli zamanda incelenen gaz türbini probleminde kare olan aktarım matrisine uyarlanan algoritma kodu)

```

if nargin ~= 6
error('number of input equal to 6')
end
[rc,mc] = size(cc)
[n,m] = size(b)
[rq,mq] = size(q)
d = zeros(rc,m)
cg = zeros(m,rc*(n+1))
num = zeros(m,m*(2*n+1))
c = zeros(1,n)
v = zeros(m,m*n)
rd = zeros(m,m*(n+1))

```

```

[g,di] = mvss2tf(a,b,cc,d)
g
di
DI=di;
for k=0:n
    cg(1:m,k+1:n+1:(rc-1)*(n+1)+1+k) = g(1:rc,n+1-k:n+1:m*(n+1)-k)' * q;
end
gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(di(n+1:-1:1),di);
nn = 2*n+1;
for i=1:m
    for j=1:m
        num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
    end
end
NUM=num;
[Ac,Bc,Cc,Dc]=d2cm(a,b,cc,d,2,'tustin');
E=eig(Ac)
if(m==1)
    [N1,D1]=d2cm(num,com,2,'tustin');
    num=N1;
else
    [snum1,snum2]=size(num);
    for i=1:snum1
        for j=0:2*n+1:snum2-2*n-1
            [N1,D1]=d2cm(num(i,j+1:j+2*n+1),com,2,'tustin');
            num(i,j+1:j+2*n+1)=N1;
        end
    end
end
end
end

```

```

num=s2k(num,n,m)
if(m==1)
[o1] = jspec(num,2*n,E)
else
degNUM=2*n*ones(1,m);
[o1]=jspec(num,degNUM,E)
end
o=k2s(o1,n/2,m);
[D22,N22]=d2cm(1,di,2,'tustin');
if (m==1)
[N2,D2]=c2dm(o,N22,2,'tustin');
else
[so1,so2]=size(o);
for i=1:so1
for j=0:2*n/2+1:so2-2*n/2-1
[N222,D2]=c2dm(o(i,j+1:j+2*n/2+1),N22,2,'tustin');
N2(i,j+1:j+2*n/2+1)=N222;
end
end
end
o=N2;
so = inv(o(1:m,1:n+1:(m-1)*(n+1)+1));
for k=0:n
rd(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k) = so * o(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k);
end
FF=rd;
[rowFF,colFF]=polsize(FF,n);
S=evalpm(g,n,1)*invpmeva(FF,n,1);
[l1,mm]=polsize(g,n);
if(l1==mm)

```



```

LL=inv(S);
MM=S*LL*inv(S);
elseif(ll>mm)
LL=pinv(S)*matform(ll,mm,mm);
else
MM=matform(ll,mm,ll)*pinv(S);
end
[nimUS,DnimUS]=adjpm(FF,n);
dinUS=detpm(FF,n);
[rLL,cLL]=size(LL);
if(rLL~=0)
US1=multpm(nimUS,LL,DnimUS,0);
US=multpm(US1,RR,DnimUS,0);
YS1=multpm(g,nimUS,n,DnimUS);
DYS1=DnimUS+n;
YS2=multpm(YS1,LL,DYS1,0);
YS=multpm(YS2,RR,DYS1,0);
else
US=multpm(nimUS,RR,DnimUS,0);
YS1=multpm(MM,g,0,n);
YS2=multpm(YS1,nimUS,n,DnimUS);
DYS2=n+DnimUS;
YS=multpm(YS2,RR,DYS2,0);
End
subplot(321),dstep(YS(1,:),dinUS,40)% örnek sayısı 200
axis([0 40 -.2 0.5]);
xlabel('No. of samples Y1')%isim
subplot(322),dstep(YS(2,:),dinUS,40)
axis([0 40 0 0.8]);
xlabel('No. of samples Y2')

```

```

%subplot(323),dstep(YS(3,:),dinUS,400)
%axis([0 400 0 0.8]);
%xlabel('No. of samples Y3')
%subplot(324),dstep(YS(4,:),dinUS,400)
%axis([0 400 0 0.8]);
%xlabel('No. of samples Y4')
subplot(325),dstep(conv(US(1,:),di),dinUS,40)
axis([0 40 0.2 0.6]);
xlabel('No. of samples U1')
subplot(326),dstep(conv(US(2,:),di),dinUS,40)
axis([0 40 -1.2 -0.9]);
xlabel('No. of samples U2')

for i=1:m
rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) = rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) - di(1:n+1);
end
RD=rd;
for i=1:n
c(i) =-di(i+1);
k1 = (i-1)*m +1;
v(1:m,k1:i*m) = rd(1:m,i+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+i);
for l=1:i-1
v(1:m,k1:i*m) = v(1:m,k1:i*m) + c(l).*rd(1:m,i+1-l:n+1:(m-1)*(n+1)+i+1-l);
c(i) = c(i) - di(l+1)*c(i-l);
end
end
mc = ctrb(a,b);
if m == 1
k = v * inv(mc);
else

```

```

k = v * pinv(mc)
end
end

```

function [k,US,YS,dinUS,DI] = hartc(a,b,cc,q,r,RR):

```

if nargin ~= 6
error('number of input equal to 6')
end
[rc,mc] = size(cc);
[n,m] = size(b);
[rq,mq] = size(q);
[rrr,mrr]=size(r);
d = zeros(rc,m);
if (rq ~= mq) | (rq ~= rc) | (rrr ~= mrr) | (rrr ~= m)
error('size of input matrix are wrong')
end
cg = zeros(m,rc*(n+1));
num = zeros(m,m*(2*n+1));
rd = zeros(m,m*(n+1));
c = zeros(1,n);
v = zeros(m,m*n);
[g,di] = mvss2tf(a,b,cc,d);
DI=di;
for k=0:n
k1=(rc-1)*(n+1)+1+k;
cg(1:m,k+1:n+1:k1) = ((-1)^(n-k).*g(1:rc,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k)) * q;
cdi(k+1) = (-1)^(n-k).*di(k+1);
end

```

```

gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(cdi,di);
nn = 2*n+1;
for i=1:m
for j=1:m
num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
end
end
NUM=num;
if(m==1)
E=eig(a);
[o,do,JJ]=jspec(num,length(num)-1,E);
else
E=eig(a);
num=s2k(num,n,m);
degNUM=2*n*ones(1,m);
[o,do,jj]=jspec(num,degNUM,E);
o=k2s(o,n/2,m);
end
so = inv(o(1:m,1:(n)+1:(m-1)*((n)+1)+1));
for k=0:n
rd(1:m,k+1:(n)+1:(m-1)*((n)+1)+1+k)=so*o(1:m,k+1:(n)+1:(m-1)*((n)+1)+1+k);
end
FF=rd;
[rowFF,colFF]=polsize(FF,n);
S=evalpm(g,n,0)*invpmeva(FF,n,0);
[l1,mm]=polsize(g,n);
if (l1==mm)
LL=inv(S);
MM=S*LL*inv(S);

```

```

elseif (ll>mm)
    LL=pinv(S)*matform(ll,mm,mm);
else
    MM=matform(ll,mm,ll)*pinv(S);
end
[nimUS,DnimUS]=adjpm(FF,n);
dinUS=detpm(FF,n);
[rLL,cLL]=size(LL);
if(rLL~=0)
    US1=multpm(nimUS,LL,DnimUS,0);
    US=multpm(US1,RR,DnimUS,0)
    YS1=multpm(g,nimUS,n,DnimUS);
    DYS1=DnimUS+n;
    YS2=multpm(YS1,LL,DYS1,0);
    YS=multpm(YS2,RR,DYS1,0);
else
    US=multpm(nimUS,RR,DnimUS,0);
    YS1=multpm(MM,g,0,n);
    YS2=multpm(YS1,nimUS,n,DnimUS);
    DYS2=n+DnimUS;
    YS=multpm(YS2,RR,DYS2,0)
end
DINYS=dinUS;
t=(0:.02:4)';
u=ones(201,1);

subplot(321),lsim(YS(1,:),dinUS,u,t)
gtext('Y1');
%axis([0 20 -.5 1.5]);

```

```

gtext('Y2');
subplot(322),lsim(YS(2,:),dinUS,u,t)
%axis([0 20 -.5 1.5]);
gtext('Y3');
subplot(323),lsim(YS(3,:),dinUS,u,t)
%axis([0 20 -.5 1.5]);
gtext('Y4');
subplot(324),lsim(YS(4,:),dinUS,u,t)
%axis([0 20 -.5 1.5]);
gtext('U1');
subplot(325),lsim(conv(US(1,:),di),dinUS,u,t)
%axis([0 20 -.5 2.5]);
gtext('U2');
subplot(326),lsim(conv(US(2,:),di),dinUS,u,t)
%axis([0 20 -.5 2.5]);
for i=1:m
rd(i,(i-1)*((n)+1)+1:i*((n)+1))=rd(i,(i-1)*((n)+1)+1:i*((n)+1))-di(1:(n)+1);
end
RD=rd;
for i=1:n
c(i)=-di(i+1);
k1=(i-1)*m+1;
v(1:m,k1:i*m)=rd(1:m,i+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+i);
for l=1:i-1
v(1:m,k1:i*m)=v(1:m,k1:i*m)+c(l).*rd(1:m,i+1-l:n+1:(m-1)*(n+1)+i+1-l);
c(i)=c(i)-di(l+1)*c(i-l);
end
end
mc=ctrb(a,b);
if m==1

```

```

k = v * inv(mc)
else
k = v * pinv(mc)
end

```

```

function [QQ,o,VV] = copt1k(a,b,KK,r)

```

```

[rc,mc] = size(KK);
[n,m] = size(b)
[rrr,mrr]=size(r);
d =zeros(rc,m);
if (rc ~= m) | (mc~=n)|(rrr ~= mrr) | (rrr ~= m)
error('size of input matrix are wrong')
end
cg = zeros(m,rc*(n+1));
num = zeros(m,m*(2*n+1));
rd = zeros(m,m*(n+1));
c = zeros(1,n);
v = zeros(m,m*n);
[g1,di] = mvss2tf(a,b,KK,d);
[l1,l2]=size(g1);
iden=eye(l1);
for i=1:m
for j=1:m
g(i,(j-1)*(n+1)+1:j*(n+1))=iden(i,j).*di(1:n+1)+g1(i,(j-1)*(n+1)+1:j*(n+1));
end
end
for k=0:n
k1=(rc-1)*(n+1)+1+k;
cg(1:m,k+1:n+1:k1)=((-1)^(n-k).*g(1:rc,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k))*r;
cdi(k+1) = (-1)^(n-k).*di(k+1);

```

```

end
gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(cdi,di);
nn = 2*n+1;
for i=1:m
for j=1:m
num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = -r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
end
end
NUM=num
Pause
if (m ~=1)
num1=semp(num);
num=num1
pause
[s1,s2]=size(num);
g1=(s2/m-1)/2;
g2=( (s2/m+1)/2-1)/2;
num=s2k(num,g1,m);
else
num=num(3:length(num));
end
E=eig(a)
if (m==1)
[o,do,JJ]=jspec(num,length(num)-1,E);
else
degNUM=(2*n-2)*ones(1,m);
[o,do,JJ]=jspec(num,degNUM,E);
o=k2s(o,g2,m);
end

```



```

for i=1:n
c(i) =-di(i+1);
k1 = (i-1)*m +1;
[u1,u2]=size(o);
v(1:m,k1:i*m) = o(1:m,i:(n-1)+1:(m-1)*((n-1)+1)+i);
for l=1:i-1
v(1:m,k1:i*m)=v(1:m,k1:i*m)+c(l).*o(1:m,i-l:(n-1)+1:(m-1)*((n-1)+1)+i-l);
c(i) = c(i) - di(l+1)*c(i-l);
end
end
VV=v;
mc = ctrb(a,b);
if m == 1
QQ = (v * inv(mc))'*(v*inv(mc));
else
QQ = (v * pinv(mc))'*(v*pinv(mc));
end

```

function [k,o] = doptks(a,b,cc,q,r,s)

```

if( nargin ~= 5 & nargin ~=6)
error('number of input equal to 5 or 6')
end
[rc,mc] = size(cc);
[n,m] = size(b);
[rq,mq] = size(q);
d = zeros(rc,m);
cg = zeros(m,rc*(n+1));
num = zeros(m,m*(2*n+1));
c = zeros(1,n);

```

```

v = zeros(m,m*n);
rd = zeros(m,m*(n+1));
[g,di] = mvss2tf(a,b,cc,d);
for k=0:n
    cg(1:m,k+1:n+1:(rc-1)*(n+1)+1+k) = g(1:rc,n+1-k:n+1:m*(n+1)-k)' * q;
end
gqg = multpm(cg,g,n,n);
com = conv(di(n+1:-1:1),di);

if(nargin==6)
[r1,c1]=size(s');
[r2,c2]=size(b);
dd=zeros(r1,c2);
[tt,d1]=mvss2tf(a,b,s',dd); % d1=d(z)
tt1=dparaher(tt,n);
d2=d1(n+1:-1:1); % d2=d1(z_inverse)
for i1=1:m
for j1=1:m
T1(i1,(j1-1)*(2*n+1)+1:j1*(2*n+1))
conv(d2,tt(i1,(j1-1)*(n+1)+1:j1*(n+1)));
end
end
for i1=1:m
for j1=1:m
T2(i1,(j1-1)*(2*n+1)+1:j1*(2*n+1))=...
conv(d1,tt1(i1,(j1-1)*(n+1)+1:j1*(n+1)));
end
end
end
nn = 2*n+1;

```

```

for i=1:m
    for j=1:m
        num(i,(j-1)*nn+1:j*nn) = r(i,j).*com(1:nn) + gqg(i,(j-1)*nn+1:j*nn);
    end
end
if (nargin==6)
    num=num+T1+T2;
end
NUM=num

[Ac,Bc,Cc,Dc]=d2cm(a,b,cc,d,2,'tustin');
Ac
E=eig(Ac)
if(m==1)
[N1,D1]=d2cm(num,com,2,'tustin');
num=N1;
else
    [snum1,snum2]=size(num);
    for i=1:snum1
        for j=0:2*n+1:snum2-2*n-1
            [N1,D1]=d2cm(num(i,j+1:j+2*n+1),com,2,'tustin');
            num(i,j+1:j+2*n+1)=N1;
        end
    end
end
num=s2k(num,n,m);
if(m==1)
[o1] = jspec(num,2*n,E);
else
degNUM=2*n*ones(1,m);

```

```

[o1]=jspec(num,degNUM,E);
end
o=k2s(o1,n/2,m);
[D22,N22]=d2cm(1,di,2,'tustin');
if (m==1)
[N2,D2]=c2dm(o,N22,2,'tustin');
else
[so1,so2]=size(o);
for i=1:so1
for j=0:2*n/2+1:so2-2*n/2-1
[N222,D2]=c2dm(o(i,j+1:j+2*n/2+1),N22,2,'tustin');
N2(i,j+1:j+2*n/2+1)=N222;
End
end
end
o=N2;
so = inv(o(1:m,1:n+1:(m-1)*(n+1)+1));
for k=0:n
rd(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k) = so * o(1:m,k+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+k);
end
RD=rd;
for i=1:m
rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) = rd(i,(i-1)*(n+1)+1:i*(n+1)) - di(1:n+1);
end
RD=rd;
for i=1:n
c(i) =-di(i+1);
k1 = (i-1)*m +1;
v(1:m,k1:i*m) = rd(1:m,i+1:n+1:(m-1)*(n+1)+1+i);
for l=1:i-1

```

```
v(1:m,k1:i*m) = v(1:m,k1:i*m) + c(l).*rd(1:m,i+1-l:n+1:(m-1)*(n+1)+i+1-l);  
c(i) = c(i) - di(l+1)*c(i-1);  
end  
end  
mc = ctrb(a,b);  
if m == 1  
    k = v * inv(mc);  
else  
    k = v * pinv(mc);  
end
```