# BİR SINIF DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ

**AYNUR ÇÖL**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK**
**ANA BİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

**MERSİN**
**EKİM 2009**

# BİR SINIF DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ

**AYNUR ÇÖL**

**Mersin Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik**
**Ana Bilim Dalı**

**DOKTORA TEZİ**

**Tez Danışmanı**
**Prof. Dr. Khanlar MAMMADOV**

**MERSİN**
**EKİM - 2009**

Bu tezin gerek bilimsel içerik, gerekse elde edilen sonuçlar açısından tüm gerekleri sağladığı kanaatine ulaşan ve aşağıda imzaları bulunan biz jüri üyeleri, sunulan tezi oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul ediyoruz.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Khanlar MAMMADOV

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Nazım KERİMOV

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Jüri Üyesi

Doç. Dr. Manaf MANAFOV

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Hamza MENKEN

Bu tezin Fen Bilimleri Enstitüsü yazım kurallarına uygun olarak yazıldığı Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..12..../..11..../..2009...tarih ve 2009..22..../.....581........ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr.Mahir TURHAN

Enstitü Müdürü

# ÖZ

Bu çalışmada, bir sınıf süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi için sınır koşulu spektral parametre içeren ve içermeyen durumda saçılma teorisinin ters problemleri incelendi. Ayrışım formülleri elde edildi. Ayrıca sınır koşulu kuadratik biçimde spektral parametre içeren bir sınıf klasik Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi incelendi. Sınır değer problemlerinin spektral karakteristikleri olarak saçılma verilerine göre potansiyelin inşası yöntemi verildi.

**Anahtar kelimeler:** Dirac denklemler sistemi, saçılma verileri, saçılma teorisinin ters problemi ve ayrışım formülü.

**ABSTRACT**

In this study, it has been considered inverse problems of scattering theory for Dirac equations systems with a spectral parameter in the boundary condition and without a spectral parameter in the boundary condition in the case of discontinuous coefficient. The expansion formulas have been obtained. Also inverse problem of scattering theory for classical Dirac equations systems with a quadratic polynomial to spectral parameter has been investigated. It has been given the method for construction of potential to scattering data as the spectral characteristics of boundary value problem.

**Key words:** Dirac equations systems, scattering data, inverse problem of scattering theory and expansion formula.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında desteğini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Khanlar MAMMADOV'a teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

## SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $:=$ | Tanım olarak eşittir |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\Vert\cdot\Vert$ | Öklid normu |
| $\lambda$ | Spektral parametre |
| $S(\lambda)$ | Saçılma fonksiyonu |
| $W$ | Wronskian |
| $\tilde{F}$ | $F$'in transpozu |
| $F^*$ | $F$'in eşleniğinin transpozu |
| $\dot{F}$ | $F$'in $\lambda$'a göre türevi |
| $\Omega(x)$ | Potansiyel fonksiyon |
| $m$ | kütle |
| $\delta(x)$ | Dirac delta fonksiyonu |
| $R_\lambda$ | Rezolvent operatör |
| $AC[a,b]$ | $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı |
| $\widetilde{g(\lambda)}$ | $g(y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü |
| $\blacksquare$ | ispatın bittiğini gösterir. |

# 1. GİRİŞ

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin, özellikle spektral analizin ters problemlerinin fiziksel problemlerde geniş uygulamaları vardır. Operatörün spektrum kümesinin incelenmesi, özfonksiyonlarına göre ayrışım problemleri spektral analizin düz problemleri olarak bilinir. Bir lineer diferansiyel operatör için spektral analizin ters problemi spektral karakteristiklere göre operatörün inşasıdır. Böyle spektral karakteristikler spektrum, spektral fonksiyon, saçılma verileri ve benzerleri olabilir. Spektral karakteristiklere bağlı olarak farklı ters problemler ele alınır.

Ters problemler teorisinin önemli dallarından biri kuantum mekaniğinde geniş uygulamaya sahip olan saçılma teorisinin ters problemidir. Kuantum mekaniğinden bilinir ki, potansiyelli alanda taneciklerin dağılımı dalga fonksiyonlarının sonsuzluktaki davranışları ile belirlenir. Bundan dolayı saçılma teorisinin ters problemi şu şekilde tanımlanabilir: Dalga fonksiyonlarının sonsuzluktaki davranışlarına göre alanın potansiyelini belirtmek ve eğer bu mümkünse belirtme yöntemini vermektir. Matematiksel olarak ise normlaştırılmış özfonksiyonların sonsuzlukta asimptotiklerini belirleyen saçılma verilerine göre denklemin katsayısını tektürlü inşa etmek ve eğer bu mümkünse inşa etme algoritmasını vermektir.

Saçılmanın ters problemleri lineer olmayan evolusyon denklemlerin çözümlerinde uygulanır ve bu "Saçılmanın ters problemi yöntemi" olarak bilinir.

Uygulamada çoğu zaman süreksiz katsayılı diferansiyel denklemlerle karşılaşılır. Bu tür problemlerle genellikle mekanikte, fizikte, jeofizikte ve mühendisliğin farklı dallarında homojen olmayan veya düzgün olmayan cisimlerde karşılaşılabilir. Süreksizlik durumu diferansiyel denklemlerin incelenmesinde kalitatif değişiklikler oluşturur.

Dirac denklemi 1929 yılında İngiliz fizikçi Paul Dirac'ın relativistik kuantum mekaniğinde spinleri $1/2$ olan parçacıkların hareketini modellemek için elde ettiği kuantum mekanik dalga denklemidir.

Tezde Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi incelenir. Bu problem daha önceleri H.E.Moses, F.Prats, M.Verde, M.G. Gasymov, B.M.Levitan ve başka bilim adamlarının çalışmalarında ele alınmıştır.

Bulgular ve Tartışma kısmının birinci bölümünde klasik Dirac denklemler sistemi için sınır koşulu spektral parametreyi kuadratik polinom biçimde içeren bir sınır değer problemi göz önüne alınır:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}+m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$P_1(\lambda)\,y_1(0)-P_2(\lambda)\,y_2(0)=0 \tag{1.2}$$

burada $\lambda$ spektral parametre, $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ spektral parametreye göre kuadratik polinomlardır, $m$ pozitif bir sayıdır ve parçacığın kütlesini ifade eder. $p(x), q(x)$ fonksiyonlarının bazı koşulları sağladığı kabul edilir. (1.1) denklemler sisteminin çözümü için operatör dönüşümü kullanılır. İki bileşenli $\varphi(x,\lambda)$ özel çözüm tanımlanır ve bu çözüm (1.2) koşulunu sağlar. Özel çözümün ve Wronskianın özelliği kullanılarak $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyonun $(-m,m)$ aralığında sonlu sayıda basit kutup noktalarına sahip olduğu gösterilir. Dönüşüm operatörünün çekirdeğinin sağladığı integral denklem elde edilir ki, bu denkleme (1.1)-(1.2) sınır değer probleminin temel denklemi denir. Bu denklem $\{S(\lambda), \lambda_k, m_k\ (k=1,2,...,n)\}$ değerler topluluğu ile inşa edilebilir ve bunlara (1.1)-(1.2) sınır değer probleminin saçılma verileri denir. Temel denklem kullanılarak (1.1)-(1.2) sınır değer problemi için ters problemin çözümünün tekliği gösterilir.

Bulgular ve Tartışma kısmının ikinci ve üçüncü bölümünde süreksiz katsayılı birinci mertebeden iki bileşenli Dirac denklemler sistemi için düz ve ters problemler incelenir. Mekaniğin, fiziğin, jeofiziğin ve mühendisliğin birçok dallarında süreksiz olaylarla ve düzgün olmayan objelerle karşılaşılır ki, bu problemin çözümü için süreksiz katsayılı diferansiyel denklemlerin spektral analizini incelemek gerekir. Katsayılar süreksizlik noktasına sahip olduğunda problemin çözümü sırasında farklı teknikler kullanılır ve yeni kalitatif değişikliklerle karşılaşılır. Örneğin, potansiyel bir $x=a$ süreksizlik noktasına sahip olduğunda $[0,\infty)$ yarı ekseninde ters problemin çözümü $[0,a]$ ve $[a,\infty)$ gibi aralıklarda iki ters problemin çözümüne indirgenirdi. Bu durumda (1.1) denklemler sisteminin çözümü için operatör dönüşümü kullanılırdı. Tezde ise yeni üçgen olmayan integral gösterim kullanılır.

İkinci bölümde $[0,\infty)$ yarı ekseninde süreksiz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\lambda\rho(x)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ 0\le x<\infty \tag{1.3}$$

Dirac denklemler sistemi için

$$y_1(0)-hy_2(0)=0 \tag{1.4}$$

sınır değer problemi ele alınır, burada

$$\rho(x)=\begin{cases} 1, & x>a \\ \alpha, & 0\le x<a \end{cases}$$

$1\neq\alpha>0$, $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır, $h$ reel sayı, $\lambda$ spektral parametredir. $\Omega(x)$ matris fonksiyonu

$$\Omega(x):=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanır ve Öklid normu için

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\|dx<\infty$$

koşulunun sağlandığı varsayılır. Burada da (1.3) denklemler sisteminin çözümü için yeni integral gösterim kullanılır, (1.4) koşulunu sağlayan özel çözüm elde edilir, Wronskian tanımlanır ve hesaplanır, (1.3)-(1.4) sınır değer problemi için $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonu tanımlanır. Saçılma fonksiyonun kapalı üst yarı düzlemde kutup noktalarının olmadığı gösterilir ve $|\lambda|$'nın yeterince büyük değerlerinde $S(\lambda)$ için asimptotik formül elde edilir.

Düz problem incelenirken (1.3)-(1.4) sınır değer probleminin rezolvent operatörü inşa edilir, özfonksiyonlara göre ayrışım formülü bulunur. Buradan (1.3)-(1.4) sınır değer probleminin diskret ( noktasal ) spektruma sahip olmadığı ve spektrum kümesinin sadece $(-\infty,\infty)$ aralığını kapsayan sürekli spektrumdan ibaret olduğu sonucuna varılır. Ters problemin çözümünde operatör dönüşümün çekirdeğinin sağladığı integral denkleminin önemli rolü vardır. Çözümün matris çekirdeği için bu denklem elde edilir. Bu denkleme temel denklem denir. Sonra ise temel denklem kullanılarak $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonunun özellikleri incelenir, bu fonksiyonun argüment değişimine ilişkin Levinson formülü bulunur.

Temel denklemin tek türlü çözülebilirliği gösterilir. Bundan dolayı (1.3)-(1.4) sınır değer problemi için ters problemin çözümünün tekliği gösterilir. Temel denklemden çözümün matris çekirdeği bulunur ve potansiyelinin saçılma fonksiyonuna göre tektürlü inşası algoritması verilir.

Matematiksel fiziğin birçok problemleri spektral parametreyi sadece diferansiyel denklemde değil sınır koşulunda da içeren problemlere indirgenir. Bundan dolayı spektral parametre içeren sınır koşulları ile oluşan diferansiyel operatörler için spektral analizin düz ve ters problemlerinin incelenmesi gerekir. Tezin birinci ve üçüncü bölümünde sınır koşulu spektral parametre içerdiğinde Dirac denklemler sistemi için yarı eksende saçılmanın düz ve ters problemleri ele alınır.

Bulgular ve Tartışmalar kısmının üçüncü bölümünde ikinci bölümünde olduğu gibi pozitif yarı eksende süreksiz katsayılı (1.3) Dirac denklemler sisteminden ve $\lambda$ spektral parametresini içeren

$$y_1(0)+\lambda y_2(0)=0 \tag{1.5}$$

sınır koşulundan oluşan (1.3),(1.5) sınır değer problemi göz önüne alınır. Önceki bölümde uygulanan metot ve teknikler kullanılarak (1.3),(1.5) sınır değer problemi için saçılmanın düz ve ters problemleri incelenir. Düz problemin çözümü sırasında saçılma fonksiyonu tanımlanır, özellikleri incelenir. Önceki durumdan farklı olarak sınır koşulu spektral parametre içerdiği durumda rezolvent operatör inşa edilirken ve ayrışım formülü bulunurken, $H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)\times\mathbb{C}$ biçiminde üç bileşenli vektörlerden oluşan Hilbert uzayları oluşturulur, incelemeler bu uzayda yapılır.

(1.3),(1.5) sınır değer problemi için temel denklem elde edilir, saçılma fonksiyonunun argüment değişimi için Levinson formülü bulunur. (1.3),(1.5) sınır değer problemi için ters problemin çözümünün tekliği gösterilir.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Tezde bir sınıf Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemleri incelenir. Saçılma verilenine göre ters problemi çözmek için saçılmanın düz probleminin incelenmesi gereklidir. Saçılmanın düz problemi verilen denkleme göre spektral özelliklerinin araştırılması, onun saçılma verilerinin tanımlanması ve saçılma verilerinin özelliklerinin incelenmesinden ibarettir. Ters problem ise spektral karakteristiklere göre lineer operatörün inşasıdır.

Sturm-Liouville operatörü için yarı eksende saçılma verilerine göre ters problem R.G. Newton ve R. Jost'un [1] çalışmasında ele alındı. Onlar bu problemin çözümünü önceleri I.M. Gelfand ve B.M. Levitan'ın [2] çalışmasında çözülmüş olan spektral fonksiyona göre potansiyelin inşası problemine indirmişlerdir. 1955 yılında V.A. Marchenko [3] çalışmasında saçılmanın ters probleminin çözümüne doğrudan bir metot uyguladı. Bu çalışma [4], [5] monografilerinde daha ayrıntılı verilmiştir. Saçılma teorisinin ters problemi farklı bir metotla M.G. Krein'in [6],[7] çalışmalarında incelendi.

İkinci mertebeden Dirac denklemler sistemi için spektral analizin ters probleminin çözümü yarı eksende M.G. Gasymov ve B.M. Levitan'ın [8, 9] çalışmalarında, $2n$ mertebeden Dirac denklemler sistemi için M.G. Gasymov'un [10] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada yarı eksende ters problemin çözülebilirliği için bir sınıf (kanonik) potansiyeller sınıfı açıklandı. Bir sınıf Dirac denklemler sistemi için ters problem farklı koşullar altında I.M Guseinov'un [11], [12] çalışmalarında incelendi.

Stasyoner olmayan durumda saçılma teorisinin ters problemini L.P. Nizhnik [13] ve onun öğrencileri inceledi [14,15,16,17,18,19,20]. Bu yönde çalışmalar ve özet [19,20] de verilmiştir.

İlk kez 1967 yılında Amerikan fizikçileri C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal ve R.M. Miura [21]'de değişken dönüşümü ile lineer olmayan Korteweg-de Vries denkleminin lineer denkleme indirerek çözülebilirliğini gösterdiler. Çözüm sırasında saçılmanın düz ve ters problemini kullandılar. Bu buluş spektral analizin ters problemlerine geniş uygulama alanı açtı ve bu yönde çalışmalar daha çok gelişti. P. Lax [22] , V.E. Zakharov ve A.B. Shabat'ın [23] çalışmalarından sonra integrallenebilir lineer olmayan evolusyon denklemler sınıfları açıklandı. Bu konuya ilişkin çalışmalar ve kaynaklar L.D. Faddeev'in [24], M.G. Gasymov'un [10] makalelerinde, V.A. Marchenko [5], K. Chadan ve P.C. Sabatier [25], B.M. Levitan [26], L.A. Takhtadjan ve L.D. Faddeev [27], M.J. Ablowitz ve H. Segur [ 28], V.E. Zakharov, S.V. Manakov, S.P. Novikov, L.P. Pitaevskii [29], G. Freiling ve V.A. Yurko [30]'nun monografilerinde vardır.

Operatör dönüşümlerin ters problemlerin çözümünde önemli rolü olduğu daha önceden bilinmekteydi ve kullanılmaktaydı. Süreksiz katsayılı ikinci mertebeden Dirac denklemler sistemi için ters problemin çözümünde operatör dönüşümünden değil çözümün bir integral gösteriminden I.M. Guseinov [11] çalışmasında gösterdi. Kh.R. Mamedov ve A. Çöl bu integral gösterimi [31] çalışmasında farklı sınır değer problemine uyguladılar. Tezin "Bulgular ve Tartışma" kısmının ikinci ve üçüncü bölümünde süreksiz Dirac denklemler sistemi için çözümün bu gösterimi kullanılarak ters problem incelenir. İkinci mertebeden Dirac denklemler sistemi için saçılmanın düz ve ters problemleri Kh.R. Mamedov'un [32], Kh.R. Mamedov ve A. Çöl'ün [31, 33, 34] çalışmalarında ele alındı.

Daha önceleri Sturm-Liouville denkleminin çözümü için yeni integral gösterimi I.M Guseinov, R.T. Pashaev'in [35] çalışmasında elde edildi ve ters problemin çözümüne uygulandı. Kh.R. Mamedov'un [36] çalışmasında bu integral gösterimden farklı bir sınır değer problemi için saçılmanın ters probleminde kullanıldı.

Tezde sınır koşulu spektral parametre içeren sürekli ve süreksiz Dirac denklemler sisteminden oluşan sınır değer problemleri ele alınır. Bu problem için saçılmanın düz ve ters problemleri Kh.R Mamedov'un [32] ve Kh.R Mamedov, A. Çöl'ün [33,34] çalışmalarında incelendi. Benzer problem Sturm Liouville operatörü için E.A. Pocheykina-Fedotova'in [37], V.A. Yurko'nun [38, 39], Kh.R. Mamedov'un [40], Kh.R. Mamedov ve H. Menken'in [41,42] çalışmalarında incelendi.

# 3. MATERYAL VE METOT

## 3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

**Tanım 3.1.1.**

$$B\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=\lambda y,\quad y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

matris denklem ele alınsın, burada

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\qquad P(x)=\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}$$

biçimine sahiptir, $p_{ik}(x)$ $i,k=1,2$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel değerli, sürekli fonksiyonlardır ve $\lambda$ bir parametredir. (3.1.1) ifadesi aşağıdaki birinci mertebeden denklemler sistemine denktir:

$$\begin{aligned} y_2' + p_{11}(x)\,y_1 + p_{12}(x)\,y_2 &= \lambda y_1 \\ -y_1' + p_{21}(x)\,y_1 + p_{22}(x)\,y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

$p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0$ , $p_{11}(x)=V(x)+m$ , $p_{22}(x)=V(x)-m$ ,$V(x)$ potansiyel fonksiyon ve $m$ bir parçacığın kütlesi olmak üzere (3.1.2) denklemler sistemine görelilik kuantum teorisinde *bir boyutlu durağan Dirac sistemi* denir [43].

$H=H(x)$ iki boyutlu uzayın düzgün ve ortogonal dönüşümü olsun. İki boyutlu uzayın her ortogonal dönüşümü sabitleştirilmiş ortogonal ve normlaştırılmış tabana göre

$$H(x)=\begin{pmatrix} Cos\varphi(x) & -Sin\varphi(x) \\ Sin\varphi(x) & Cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

formunda matrise sahiptir. $B$ ve $H$ matrisleri komutatiftir. Yani $BH=HB$ sağlanır. $y=H(x)z$ değişken dönüşümü yapılsın. $y$ ’nin ifadesi (3.1.1) de yerine yazılarak ve soldan $H^{-1}$ ile çarpılarak

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz)+H^{-1}PHz=H^{-1}\lambda Hz$$

yada

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}PH\right)z=\lambda z \tag{3.1.3}$$

elde edilir. $Q(x)\equiv H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}PH$ matrisini hesaplamak için

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H=\begin{pmatrix}\varphi'(x) & 0\\ 0 & \varphi'(x)\end{pmatrix}$$

ve

$$H^{-1}PH=\begin{pmatrix} p_{11}Cos^2\varphi+p_{12}Sin2\varphi+p_{22}Sin^2\varphi & p_{12}Cos2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})Sin2\varphi \\ p_{12}Cos2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})Sin2\varphi & p_{11}Sin^2\varphi-p_{12}Sin2\varphi+p_{22}Cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

ifadeleri kullanılarak aşağıdaki formda $Q$ matrisi bulunur.

$$Q(x)=\begin{pmatrix}q_{11}(x) & q_{12}(x)\\ q_{12}(x) & q_{22}(x)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \varphi'+p_{11}Cos^2\varphi+p_{12}Sin2\varphi+p_{22}Sin^2\varphi & p_{12}Cos2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})Sin2\varphi \\ p_{12}Cos2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})Sin2\varphi & \varphi'+p_{11}Sin^2\varphi-p_{12}Sin2\varphi+p_{22}Cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

$\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x)\equiv 0$ olacak şekilde seçilsin. O zaman

$$p_{12}(x)Cos2\varphi(x)+\frac{1}{2}\{p_{22}(x)-p_{11}(x)\}Sin2\varphi(x)=0$$

olur. Böylece, $p_{11}(x)\neq p_{22}(x)$ ise

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

biçimindedir ve $Q$ matrisi

$$Q(x)=\begin{pmatrix}q_{11}(x) & 0\\ 0 & q_{22}(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}p(x) & 0\\ 0 & r(x)\end{pmatrix}$$

formuna sahip olur. Böylece (3.1.3) denklemi

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix}p(x) & 0\\ 0 & r(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.1.4}$$

biçiminde yeniden yazılabilir.

Bir de $\varphi(x)$ fonksiyonu $2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)\equiv 0$ olacak şekilde seçilsin. Böylece,

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\left\{p_{11}(s)+p_{22}(s)\right\}ds$$

formuna sahip olur ve (3.1.3) denklemi

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \qquad (3.1.5)$$

denklemine dönüşür. (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerine (3.1.1) denkleminin *kanonik formları* denir. (3.1.1) denkleminin spektral teorisindeki çeşitli problemlerin çözümünde bu ve buna benzer kanonik formları kullanmak daha uygun olur. Örneğin (3.1.1) denkleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülünde (3.1.4)'ü kullanmak daha uygundur, verilen sonsuz aralıkta (3.1.1)'in özdeğerlerinin asimtotik ifadeleri gibi sorularda ve ters problemde (3.1.5) kanonik formunu kullanmak daha uygundur.

$A$ ve $B$ lineer diferansiyel operatörler ve $E_1$, $E_2$ lineer fonksiyon uzayları olsun.

**Tanım 3.1.2.** $X:E_1\to E_2$ lineer operatör olsun. $X$ operatörü aşağıdaki iki koşulu sağlarsa $X$ 'e *dönüşüm operatörü* denir.

1) $AX=XB$

2) Sürekli ters operatör $X^{-1}$ vardır.

$$A\equiv\begin{pmatrix}p_1(x) & \dfrac{d}{dx}\\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x)\end{pmatrix}, \qquad B\equiv\begin{pmatrix}p_2(x) & \dfrac{d}{dx}\\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x)\end{pmatrix}$$

olsun , burada $p_k(x),\ r_k(x),\ k=1,2$ $[0,\pi]$ aralığında reel değerli, sürekli fonksiyonlardır [43].

$E_1$ ve $E_2$

$$f_1(0)\,Sin\gamma + f_2(0)\,Cos\gamma = 0$$
$$g_1(0)\,Sin\delta + g_2(0)\,Cos\delta = 0$$

koşullarını sağlayan sürekli diferansiyellenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ vektör değerli fonksiyonlar kümesinden oluşsun, burada $\gamma, \delta$ keyfi reel sayılardır.

$X$ matris dönüşüm operatörü

$$X\{f(x)\} = R(x)\,f(x) + \int_0^x K(x,s)\,f(s)\,ds$$

formunda yazılabilir, $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki mertebeli sürekli diferansiyellenebilir matrislerdir.

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

biçimindedir ve $\alpha(x), \beta(x)$ fonksiyonları

$$\alpha(x) = \frac{1}{\kappa} Sin\left\{ \frac{1}{2}\int_0^x trace[A-B]\,d\tau + \sin^{-1}\frac{1}{\kappa} \right\}$$
$$\beta(x) = \frac{1}{\kappa} Cos\left\{ \frac{1}{2}\int_0^x trace[A-B]\,d\tau + \sin^{-1}\frac{1}{\kappa} \right\}, \qquad \kappa = \sec(\delta - \gamma)$$

olarak hesaplanır.

**Tanım 3.1.3.**

$$\frac{d^2 f(r,k)}{dr^2} + \left(k^2 - V(r)\right) f(r,k) = 0$$

radyal Schrödinger denkleminin

$$\lim_{r\to\infty} f(r,\pm k)\,e^{\pm ikr} = 1$$

asimptotik koşullarını sağlayan çözümlerine *Jost çözümleri* denir. Ayrıca

$$E(r,z) = e^{\pm ikr} f(r,\pm k)$$

fonksiyonuna da *Jost çözümü* denir ve bu

$$\frac{d^2 E(r,z)}{dr^2} - z\frac{dE(r,z)}{dr} - V(r)\,E(r,z) = 0$$

diferansiyel denklemini ve sonsuzluktaki

$$\lim_{r\to\infty} E(r,z)=1$$

koşulunu sağlar, burada

$$z=\pm 2ik \ \ [45].$$

**Tanım 3.1.4.** $H$ Hilbert uzayı ve $A$ bu uzayda tanımlı operatör olsun. $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ varsa ve bütün $H$ uzayında tanımlı operatörü ifade ediyorsa $\lambda\in\mathbb{C}$ sayısına *regüler nokta* denir. $R_\lambda$ operatörüne ise $A$ *operatörünün rezolventi* denir. Regüler olmayan bütün $\lambda\in\mathbb{C}$ sayılarına $A$ *operatörünün spektrumu* denir. Bir operatörün özdeğerleri spektrum kümesine dahildir. Bu yüzden $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ yoktur. Bütün özdeğerlerin kümesine operatörün *discrete spektrumu* denir. Spektrumun diğer noktalarına *sürekli spektrum noktaları* denir. Bu noktaların oluşturduğu kümeye *operatörün sürekli spektrumu* denir [44].

**Teorem 3.1.5.** (Fredholm Alternatifi) $T$ Hilbert Schmidt operatör ve $\lambda$ sıfırdan farklı kompleks sayı olsun. $g(s)\in L_2[a,b]$ bilinen fonksiyon olmak üzere

$$f(s)-\lambda T(f)(s)=g(s) \tag{3.1.6}$$

ikinci çeşit Fredholm integral denklem ele alınsın.

a) Verilen $\lambda$ kompleks sayısı (3.1.6)'in karakteristik değeri ( yani $\lambda^{-1}$, $T$ operatörünün özdeğeri) ya da bu denklemin regüler değeridir.

b) $\lambda$, (3.1.6)'in karakteristik değeri ise $(I-\overline{\lambda}T^*)$'in çekirdek uzayı $L_2[a,b]$'in sonlu boyutlu altuzayıdır ve (3.1.6)'in çözümü olması için gerek ve yeter koşul $g$ fonksiyonunun bu çekirdek uzayın ortogonal tümleyeninde olmasıdır, burada $T^*$ operatörü $T$'in eşlenik operatörüdür [44].

**Teorem 3.1.6.** ( Ayrışım Teoremi) $[a,b]$ sonlu aralığında

$$y_2'-\{\lambda+p(x)\}y_1=f_1(x)$$
$$y_1'+\{\lambda+r(x)\}y_2=-f_2(x)$$

denklemler sistemi ve

$$y_1(a)\sin\alpha + y_2(a)\cos\alpha = 0$$
$$y_1(b)\sin\beta + y_2(b)\cos\beta = 0 \qquad (3.1.7)$$

sınır koşulu ile üretilen sınır değer problemi ele alınsın, burada $f_1(x)$, $f_2(x)$ fonksiyonları $f(x)$ vektör fonksiyonun bileşenleridir.

$f(x)$ sürekli türeve sahip ve (3.1.7) koşullarını sağlıyorsa o zaman $f(x)$

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\} y_1 = 0$$
$$y_1' + \{\lambda + r(x)\} y_2 = 0$$

denklemler sistemi ile ve (3.1.7) sınır koşulu ile üretilen sınır değer probleminin vektör değerli özfonksiyonlarının mutlak ve düzgün yakınsak Fourier serisi şeklinde yazılır, yani

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n v_n(x)$$

biçimindedir, burada

$$a_n = \int_a^b f^T(x) v_n(x)\, dx$$

ile ifade edilir[43].

**Tanım 3.1.7.** $[a,b]$ aralığında karesiyle integrallenebilir $f(x)$ vektör fonksiyonu için sağlanan

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2, \quad f^2(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x)$$

bağıntıya Parseval eşitliği denir [43].

## 3.2. $(2n\times n)$ BOYUTLU DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ

$$By' + mTy + \Omega(x)\, y = \lambda y, \qquad 0 \le x \le \infty \tag{3.2.1}$$

$2n$ mertebeden Dirac denklemler sistemi ve

$$y_1(0) = \ldots = y_n(0) = 0 \tag{3.2.2}$$

sınır koşuluyla üretilen sınır değer problemi ele alınsın, burada $\Omega(x)$ potansiyel matris fonksiyonu

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} P(x) & IQ(x) \\ Q(x)I & -IP(x)I \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

biçimindedir, $m > 0$ kütle, $\lambda$ spektral parametre,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_{2n} \end{pmatrix}$$

$2n$ bileşenli vektör fonksiyon,

$$T = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}$$

$E_n$ birim matris,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Omega(x)$ potansiyel matris fonksiyonunun elemanları $P(x)$, $Q(x)$ fonksiyonlarının

$$\|P(x)\| \le \frac{c}{(1+x)^{2+\varepsilon}} \tag{3.2.4}$$

$$\|Q(x)\| \le \frac{c}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \tag{3.2.5}$$

koşullarını sağladığı kabul edilsin, burada c, $\varepsilon$ pozitif sayılardır. O zaman (3.2.1)-(3.2.5) sınır değer problemi $(-m,m)$ aralığında sonlu sayıda $\lambda_1,...,\lambda_p$ ayrık (diskrit) özdeğere sahiptir ve onun sürekli spektrumu $(-\infty,-m]$ ve $[m,\infty)$ aralılıklarında yerleşir.

$\Phi(x,\lambda)$ ( $|\lambda > m|$ ve $\operatorname{Im}\lambda = 0$ ) ve $\Phi(x,\lambda_j)$, $j=1,...,p$ matris fonksiyonlarının kolonları (3.2.2) yi sağlayan (3.2.1) denkleminin çözümleri olduğu ve $x\to\infty$ iken $|\lambda| > m$ için

$$\sum_{j=1}^{p}\Phi(x,\lambda_j)\Phi^*(t,\lambda_j)+\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>m}\Phi(x,\lambda)\Phi^*(t,\lambda)\sqrt{\frac{\lambda-m}{\lambda+m}}d\lambda=\delta(x-t)E_{2n}$$

Parseval eşitliğini sağlayacak şekilde normlaşmış olduğu varsayılsın.

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{1}{2i}\left\{\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}E_n\\ -iI\end{pmatrix}e^{ikx}-\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}E_n\\ iI\end{pmatrix}e^{-ikx}S(\lambda)\right\}(1+O(1)),$$

$$\Phi(x,\lambda_j)=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}}E_n\end{pmatrix}e^{-\sqrt{m_j^2-\lambda_j^2}x}M_j\left[1+O(1)\right],$$

burada $k=\lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}}$, $M_1,M_2,...,M_n$ ise rankları $\lambda_1,...,\lambda_p$ özdeğerlerinin katlılığına eşit $n$ mertebeden negatif olmayan matrislerdir ve $S(\lambda)$ $n$ mertebeden saçılma matrisidir.

$S(\lambda),\lambda_1,...,\lambda_p,M_1,M_2,...,M_n$ topluluğuna (3.2.1)-(3.2.5) sınır değer probleminin saçılma verileri denir.

(3.2.1)-(3.2.5) sınır değer probleminin normlaştırılmış özfonksiyonlarının asimptotik davranışını belirlemek için saçılma verilerinin bilinmesinin yeterli olduğu açıktır. Bundan dolayı Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi şu şekilde tanımlanır: $\{S(\lambda),\lambda_1,...,\lambda_n,M_1,...,M_n\}$ saçılma verilerini bilerek potansiyeli tek türlü belirtmek ve eğer bu mümkünse $\{S(\lambda),\lambda_1,...,\lambda_n,M_1,...,M_n\}$ değerler topluluğunun bu sınır değer probleminin saçılma verileri olması için gerekli ve yeterli koşulları bulmaktır.

[10] da bu problem tamamen çözülmüştür.

$$f(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda+m}{k}E_n \\ -iI \end{pmatrix} e^{ikx}$$

matris fonksiyonunun

$$By'+mTy=\lambda y$$

denkleminin çözümü olduğunu göstermek kolayca gösterilir, burada

$$k=\lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}}\ , \qquad |\lambda|>m$$

biçimindedir.

Problemin çözümü için dönüşüm operatöründen yararlanılmıştır, aşağıdaki teoremde çözümün biçimi verilmektedir.

**Teorem 3.2.1.** $\Omega(x)$ (3.2.4)-(3.2.5) koşullarını sağlayan fonksiyon olsun. O halde (3.2.1) denkleminin $(2n\times n)$ boyutlu tek bir matris $F(x,\lambda)$ çözümü vardır. Bu çözüm $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ olduğunda $x\to\infty$ iken $f(x,\lambda)$'ya yakınsar ve $F(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$F(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^\infty A(x,t)\,f(t,\lambda)\,dt \tag{3.2.6}$$

biçimine sahip olacak şekilde $2n$ boyutlu $A(x,t)$ matris fonksiyonu vardır.

Ayrıca

$$\left\|A_{ii}(x,t)\right\|\leq\frac{c_1}{(1+t)^{1+\varepsilon}},\ \ i=1,2 \tag{3.2.7}$$

$$\left\|A_{ij}(x,t)\right\|\leq\frac{c_1}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}},\quad i\neq j \tag{3.2.8}$$

sağlanır . Eğer $\Omega(x)$ mutlak sürekli ise $A(x,t)$ matris fonksiyonu

$$\left\{B\frac{\partial}{\partial x}+mT+\Omega(x)\right\}A(x,t)=-\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)B+mA(x,t)T \tag{3.2.9}$$

denklemini ve

$$BA(x,x)-A(x,x)B=\Omega(x) \tag{3.2.10}$$

koşulunu sağlar. Tersine $A(x,t)$ fonksiyonu (3.2.9) denklemini ve (3.2.7), (3.2.8) ve (3.2.10) koşullarını sağlarsa (3.2.6) ile tanımlanan $F(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\left\{B\frac{d}{dx}+mT+\Omega(x)\right\}F(x,\lambda)=\lambda F(x,\lambda)$$

denklemini sağlar. Burada

$$\Omega(x)=BA(x,x)-A(x,x)B$$

biçimindedir [10].

(3.2.10)'dan $\Omega(x)$ potansiyelini belirlemek için $A(x,t)$'i bilmenin yeterli olduğu açıktır. Bunun için

$$A(x,y)+F(x+y)+\int_x^\infty A(x,t)F(t+y)\,dt=0 \ (x<y<\infty) \tag{3.2.12}$$

integral denklemi elde edilir, burada

$$F(x)=F_S(x)+\sum_{j=1}^{p}\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}}E_n\\ I\end{pmatrix}M_j^{\,2}\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}}E_n & I\end{pmatrix}e^{-\sqrt{m^2-\lambda_j^2}\,x},$$

$$F_S(x)=\int_{|\lambda|>m}L(\lambda)e^{-ikx}d\lambda+\int_{|\lambda|>m}L^*(\lambda)e^{ikx}d\lambda$$

ve

$$L(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+m}{k}\\ iI\end{pmatrix}\left(E_n-S(\lambda)\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+m}{k}E_n & iI\end{pmatrix}\frac{k}{\lambda+m}$$

biçimindedir.

Bu integral denkleme (3.2.1)-(3.2.2) sınır değer probleminin *temel denklemi* denir. Bu denklemi inşa etmek için ise saçılma verilerini bilmenin yeterli olduğu açıktır. (3.2.11) denkleminin $2n$ mertebeden Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters probleminin çözümünde önemli yeri vardır.

İntegral denklemin tek türlü çözülebilirliği için aşağıdaki teorem ispatlanır.

**Teorem 3.2.2.** Her bir sabitleştirilmiş $x$ için

$$A(x,y)+F(x+y)+\int_x^\infty A(x,t)F(t+y)\,dt=0 \quad (x<y<\infty)$$

denkleminin bileşenleri $L_2(x,\infty)$ uzayından olan tek bir çözümü vardır. ■

Bu teorem Dirac denklemler sistemi için saçılmanın ters problemini çözmeye imkan verir. $\{S(\lambda),\lambda_1,...,\lambda_n,M_1,...,M_n\}$ saçılma verileriyle $F(x)$ fonksiyonu inşa edilir ve bunun yardımıyla $A(x,y)$ bilinmeyenli

$$A(x,y)+F(x+y)+\int_x^\infty A(x,t)F(t+y)\,dt=0 \quad (x<y<\infty)$$

integral denklem inşa edilir. Bu denklemin tek bir $A(x,y)$ çözümün var olduğu ve

$$F(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^\infty A(x,t)f(t,\lambda)\,dt$$

matris fonksiyonun

$$BF'(x,\lambda)+mTF(x,\lambda)+\Omega(x)F(x,\lambda)=\lambda F(x,\lambda)$$

denkleminin çözümü olduğu gösterilir, burada

$$\Omega(x)=BA(x,x)-A(x,x)B$$

biçiminde olduğu bulunur.

Böylece ters problemin çözümünü elde edilmiş olur.

Ayrıca düz problemin çözümünde kullanılan Wronskian kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 3.2.3.** $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.1.1) denkleminin $(2n\times n)$ boyutlu matris çözümleri olsun. Onların Wronskianı

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda)B\psi(x,\lambda)=W[\varphi,\psi]$$

ifadesine denir [10].

**Teorem 3.2.4.** Dirac denklemler sisteminin iki matris çözümlerinin Wronskianı $x$'e bağlı değildir [10].

*İspat.* $\psi(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ denklemi sağladığı için

$$B\psi' + mT\psi + \Omega(x)\psi = \lambda\psi\,,$$

$$B\varphi' + mT\varphi + \Omega(x)\varphi = \lambda\varphi$$

olur. İkinci eşitliğin transpozunu alınırsa

$$B\psi' + mT\psi + \Omega(x)\psi = \lambda\psi,$$
$$-\varphi^{T\prime}B + m\varphi^{T}T + \varphi^{T}\Omega(x) = \lambda\varphi^{T}$$

denklemler sistemi elde edilir. 1. denklem soldan $\varphi^T$ ile 2. denklem sağdan $\psi$ ile çarpılırsın ve taraf tarafa çıkarılsın. O halde

$$\varphi^T B\psi' + \varphi^{T\prime} B\psi = 0$$

yani

$$\left[\varphi^T B\psi\right]' = 0$$

bulunur. Buradan

$$\varphi^T B\psi = c\,,\ c \text{ sabit}$$

$$W[\varphi,\psi] = c\,,\ c\,\text{sabit}$$

olduğu çıkar. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

### 3.3. SÜREKSİZ KATSAYILI DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ

Yarı eksende

$$By' + \Omega(x)\,y = \lambda\rho(x)\,y \qquad 0 \le x < \infty \tag{3.3.1}$$

Dirac denklemler sistemi ve

$$y_1(0) = 0 \tag{3.3.2}$$

sınır koşulu ile üretilen sınır değer problemi ele alınır. Burada $\lambda$ spektral parametre

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x > a \\ \alpha, & 0 \le x < a \end{cases} \tag{3.3.3}$$

$1 \ne \alpha > 0$, $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır. $\Omega(x)$ matris fonksiyonu Öklid normuna göre

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\|\,dx < \infty \tag{3.3.4}$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. $\Omega(x) \equiv 0$ olduğunda $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ için (3.3.1) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} f^0(x,\lambda)\,e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan çözümü

$$f^0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda\mu(x)}$$

formundadır, burada

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha(x-a)+a, & 0 \le x \le a, \\ x, & x > a. \end{cases}$$

**Teorem 3.3.1.** (3.3.4) koşulu sağlansın. O zaman $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ için (3.3.1) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} f(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan ve

$$f(x,\lambda) = f^0(x,\lambda) + \int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda t}dt \tag{3.3.5}$$

formuna sahip tek bir çözümü vardır. Burada $K(x,t)$ matris fonksiyonunun elemanları pozitif yarım eksende toplanabilirdir ve $K(x,t)$ aşağıdaki özelliği sağlar

$$\int_{\mu(x)}^{\infty} \|K(x,t)\| dt \le e^{\sigma(x)} - 1$$

burada

$$\sigma(x) = \int_x^{\infty} \|\Omega(t)\| dt .$$

Ayrıca $\Omega(x)$ mutlak sürekli ise

$$\begin{aligned} &BK_x(x,t) + \Omega(x)K(x,t) + \rho(x)K_t(x,t)B = 0 \\ &\rho(x)\{BK(x,\mu(x)) - K(x,\mu(x))\} = \Omega(x) \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

sağlanır [11].

*İspat.* $F(x,\lambda)$ ise (3.3.1) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} F(x,\lambda)e^{-Bx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan çözümü olsun. O halde

$$f(x,\lambda) = F(x,\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

olduğu açıktır. $F(x,\lambda)$'ın

$$F(x,\lambda) = e^{-\lambda B\mu(x)} + \int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt \tag{3.3.7}$$

formuna sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Sabitlerin değişimi yöntemiyle $F(x,\lambda)$ için

$$F(x,\lambda)=e^{-\lambda B\mu(x)}-\int_{\mu(x)}^{\infty} B\Omega(t)\,e^{\lambda B\mu(x)-\lambda B\mu(t)}F(t,\lambda)\,dt \qquad (3.3.8)$$

integral denklemi elde edilir. $F(x,\lambda)$'n bu integral denklemi sağlaması için

$$\int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)\,e^{-\lambda Bt}dt=-\int_{x}^{\infty} B\Omega(t)\,e^{\lambda B\mu(x)-\lambda B\mu(t)}\left[e^{-\lambda B\mu(t)}+\int_{\mu(t)}^{\infty} K(t,s)\,e^{-\lambda Bs}ds\right]dt \qquad (3.3.9)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Aksine $K(x,t)$ bu eşitliği sağlarsa, $F(x,\lambda)$ matris fonksiyonu (3.3.8) integral denklemi sağlar.

$$K_{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}\left[K(x,t)\pm BK(x,t)B\right]$$

olarak gösterilsin. $K_{\pm}(x,t)$ matris fonksiyonunun ifadesinden

$$K(x,t)=K_{+}(x,t)+K_{-}(x,t),$$

$$BK_{+}(x,t)=\frac{1}{2}\left[BK(x,t)-K(x,t)B\right]=-K_{+}(x,t)B,$$

$$BK_{-}(x,t)=\frac{1}{2}\left[BK(x,t)+K(x,t)B\right]=-K_{-}(x,t)B,$$

olduğu açıktır. (3.3.9)'nın sağ tarafı sol tarafına benzetilerek $K_{\pm}(x,t)$ matris fonksiyonları için aşağıdaki integral denklemler elde edilir:

$0<x<a,\ \alpha x-\alpha a+a<t<-\alpha x+\alpha a+a$ için

$$K_{+}(x,t)=-\frac{1}{2\alpha}B\Omega\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)-\int_{x}^{\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}} B\Omega(\zeta)K_{-}(\zeta,t-\alpha\zeta+\alpha x)\,d\zeta,$$

$0<x<a,\ t>-\alpha x+\alpha a+a$ için

$$K_{+}(x,t)=-\frac{1}{2}B\Omega\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)-\int_{x}^{a} B\Omega(\zeta)K_{-}(\zeta,t-\alpha\zeta+\alpha x)\,d\zeta$$

$$-\int_{a}^{\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}} B\Omega(\zeta)K_{-}(\zeta,t-\zeta+ax-\alpha a+a)\,d\zeta,$$

$0<x<a,\ \ t>\alpha x-\alpha a+a$ için

$$K_-(x,t) = -\int_x^a B\Omega(\zeta)\, K_+(\zeta, t+\alpha\zeta-\alpha x)\, d\zeta - \int_a^\infty B\Omega(\zeta)\, K_+(\zeta, t+\zeta-\alpha x+\alpha a-a)\, d\zeta,$$

$t > x > a$ için

$$K_+(x,t) = -\frac{1}{2} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) - \int_x^{\frac{x+t}{2}} B\Omega(\zeta)\, K_-(\zeta, t+x-\zeta)\, d\zeta$$

$$K_-(x,t) = -\int_x^\infty B\Omega(\zeta)\, K_+(\zeta, t-x+\zeta)\, d\zeta.$$

Bu denklemler sisteminin çözülebilirliği ardışık yaklaşım metoduyla elde edilir. ■

Bu çözüm yardımıyla (3.3.1)-(3.3.2) sınır değer problemi için saçılmanın ters problemi çözülmüştür [12].

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. SINIR KOŞULU KUADRATİK BİÇİMDE SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ

#### 4.1.1. Probleme Giriş

Bu bölümde sınır koşulu klasik durumdan farklı olarak kuadratik biçimde spektral parametre içeren Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi incelenir. $[0,\infty)$ yarı ekseninde

$$\begin{aligned} y_2' + \left(m + p(x)\right) y_1 + q(x) y_2 &= \lambda y_1 \\ -y_1' - \left(m + p(x)\right) y_2 + q(x) y_1 &= \lambda y_2 \end{aligned} \tag{4.1.1.1}$$

Dirac denklemler sistemi ve

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2\right) y_1(0) - \left(\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2\right) y_2(0) = 0 \tag{4.1.1.2}$$

sınır koşulu ile üretilen sınır değer problemi ele alınır. Burada $\lambda$ spektral parametre, $m > 0$ kütle (sabit), $p(x)$, $q(x)$ reel değerli fonksiyonlar için

$$\left| p(x) \right| \le \frac{c}{(1+x)^{2+\varepsilon}} \tag{4.1.1.3}$$

$$\left| q(x) \right| \le \frac{c}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \tag{4.1.1.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır, c, $\varepsilon$ pozitif sayılardır. $\Omega(x)$

$$\Omega(x) := \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

formunda 2 boyutlu matris fonksiyonu olarak tanımlansın.

Ayrıca (4.3.1.2.) sınır koşulundaki katsayılar $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R},\ i, j = 1,2$ ve $\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 > 0,\ \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 > 0,\ \alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2 = 0$ koşullarını sağlar.

Kolayca gösterilir ki,

$$f(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikx}$$

fonksiyonu

$$By'+mTy=\lambda y$$

denkleminin çözümüdür, burada

$$k=\lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}}\ ,\qquad |\lambda|>m\ .$$

$\Omega(x)$ matris fonksiyonunun bileşenleri (4.1.1.3), (4.1.1.4) koşullarını sağladığında (4.1.1.1) denkleminin $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ için $x\to\infty$ iken $f(x,\lambda)$'ya yakınsayan $(2\times 1)$ mertebeli tek bir matris $F(x,\lambda)$ çözümü vardır ve $F(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$F(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^\infty A(x,t)\,f(t,\lambda)\,dt \tag{4.1.1.5}$$

biçimine sahip olacak şekilde

$$A(x,t)=\begin{pmatrix}A_{11}(x,t) & A_{12}(x,t)\\ A_{21}(x,t) & A_{22}(x,t)\end{pmatrix}$$

formunda 2 boyutlu $A(x,t)$ matris fonksiyonu vardır . Ayrıca

$$|A_{ii}(x,t)|\leq\frac{c_1}{(1+t)^{1+\varepsilon}},\quad i=1,2$$

$$|A_{ij}(x,t)|\leq\frac{c_1}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}},\quad i\neq j$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(4.1.1.5) den görüldüğü gibi çözümün ifadesi için operatör dönüşümü kullanıldı.

Bu bölümde öncelikle (4.1.1.2) kolunu sağlayan özel çözüm verilecektir. Özel çözüm ve Wronkian yardımıyla $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonu tanımlanacaktır, saçılma fonksiyonunu asimptotik ifadesi elde edilecektir ve $(-m,m)$ aralığında sonlu sayıda basit kutup $\lambda_k;k=1,...n$ noktalarına sahip olduğu gösterilecektir.

$m_k;\ k=1,...,n$ normlaştırıcı sayıları tanımlanacaktır. Böylece $\{S(\lambda),\lambda_k,m_k\ (k=1,2,...,n)\}$ değerler topluluğu elde edilmiş olacaktır ve bu değerler topluluğu saçılma verileri olarak tanımlanacaktır. Daha sonra ters problemin çözümünde önemli rol oynayan ve (4.1.1.5) çözümünün çekirdeği $A(x,t)$'in sağladığı integral denklem elde edilecektir.

Ters problemin çözümünde ise saçılma verileriyle geçit fonksiyonu denilen $F(x)$ fonksiyonu inşa edilecek ve sonra bilinmeyen $A(x,t)$'e göre temel denklem inşa edilecektir. Son olarak da bu denklemin tek türlü çözülebilirliği araştırılacaktır ve potansiyelin inşası için algoritma verilecektir.

### 4.1.2. Özel Çözüm ve Saçılma Fonksiyonu

$\varphi(x,\lambda)$ ile (4.1.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2,\quad \varphi_2(0,\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin. Burada $\varphi_1(x,\lambda)$ matris fonksiyonunun birinci satırı, $\varphi_2(x,\lambda)$ ise ikinci satırını gösterir.

Dirac denklemler sisteminin çözümleri için Wronskian kavramı tezin "Materyal ve Metot" kısmında verilmiştir. $F(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}$ fonksiyonlarının Wronskianı $x$'e bağlı değildir ve $2i\dfrac{\lambda+m}{k}$'a eşittir.

$\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R},\ i,j=1,2$ ve $\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1>0,\ \alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2>0,\ \alpha_2\beta_0-\alpha_0\beta_2=0$ olmak üzere

$$E(\lambda)=\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2\right)F_1(0,\lambda)-\left(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2\right)F_2(0,\lambda)$$

fonksiyonu tanımlansın.

**Lemma 4.1.2.1.** $|\lambda|>m$ olan reel $\lambda$'lar için

$$2i\frac{\lambda+m}{k}\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}=\overline{F(x,\lambda)}-S(\lambda)F(x,\lambda) \qquad (4.1.2.1)$$

özdeşliği sağlanır, burada

$$S(\lambda)=\frac{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2\right)\overline{F_1(0,\lambda)}-\left(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2\right)\overline{F_2(0,\lambda)}}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2\right)F_1(0,\lambda)-\left(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2\right)F_2(0,\lambda)} \qquad (4.1.2.2)$$

biçimindedir,

$$S(\lambda)=\left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$$

ve

$$\left|S(\lambda)\right|=1$$

bağıntılarını sağlar.

*İspat*. $|\lambda|>m$ olduğu durumda reel $\lambda$'lar için $F(x,\lambda)$ ve $\overline{F(x,\lambda)}$ vektör fonksiyonları (4.1.1.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur. Böylece $\varphi(x,\lambda)$

$$\varphi(x,\lambda)=c_1(\lambda)F(x,\lambda)+c_2(\lambda)\overline{F(x,\lambda)}$$

formuna sahiptir ve burada $c_1(\lambda),c_2(\lambda)$ $\lambda$'ya bağlı bulunması gereken fonksiyonlardır.

$$\begin{aligned}W\left[F(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\right]&=F_1(0,\lambda)\varphi_2(0,\lambda)-F_2(0,\lambda)\varphi_1(0,\lambda)\\&=\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2\right)F_1(0,\lambda)-\left(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2\right)F_2(0,\lambda)\end{aligned}$$

hesaplaması $W\left[F(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\right]=E(\lambda)$ olduğunu verir. Böylece

$$W\left[F(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\right]=c_2(\lambda)2i\frac{\lambda+m}{k}=E(\lambda)$$

ve

$$W\left[\overline{F(x,\lambda)},\varphi(x,\lambda)\right]=-c_1(\lambda)2i\frac{\lambda+m}{k}=\overline{E(\lambda)}$$

elde edilir. $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\varphi(x,\lambda)=-\frac{k}{2i(\lambda+m)}\overline{E(\lambda)}F(x,\lambda)+\frac{k}{2i(\lambda+m)}E(\lambda)\overline{F(x,\lambda)} \qquad (4.1.2.3)$$

bulunur. Diğer taraftan $|\lambda|>m$ olduğu durumda reel $\lambda$'lar için $E(\lambda)\neq 0$ olduğunu göstermek gerekir. Aksi kabul edilsin. O zaman en az bir $\lambda_0$ sayısı vardır öyle ki

$$\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_0+\alpha_2\lambda_0^{\ 2}\right)F_1\left(0,\lambda_0\right)=\left(\beta_0+\beta_1\lambda_0+\beta_2\lambda_0^{\ 2}\right)F_2\left(0,\lambda_0\right)$$

sağlanır. Ayrıca

$$W\left[F\left(0,\lambda_0\right),\overline{F\left(0,\lambda_0\right)}\right]=F_1\left(0,\lambda_0\right)\overline{F_2\left(0,\lambda_0\right)}-F_2\left(0,\lambda_0\right)\overline{F_1\left(0,\lambda_0\right)}=2i\frac{\lambda_0+m}{k}$$

olduğundan ve yukarıdaki bağıntı burada yerine yazılırsa

$$0=2i\frac{\lambda_0+m}{k}$$

bulunur. $\lambda_0\neq -m$ olduğundan çelişkiye varılır. O halde $|\lambda|>m$ olduğu durumda reel $\lambda$'lar için $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yeri yoktur. (4.1.2.3) özdeşliğinin her iki tarafı $2i\dfrac{(\lambda+m)}{kE(\lambda)}$ ile bölünürse istenilen

$$2i\frac{\lambda+m}{k}\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}=\overline{F\left(x,\lambda\right)}-S\left(\lambda\right)F\left(x,\lambda\right)$$

eşitliği elde edilir ve burada

$$S\left(\lambda\right)=\frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)}=\frac{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2\right)\overline{F_1\left(0,\lambda\right)}-\left(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2\right)\overline{F_2\left(0,\lambda\right)}}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2\right)F_1\left(0,\lambda\right)-\left(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2\right)F_2\left(0,\lambda\right)}$$

formuna sahiptir. $S(\lambda)$ fonksiyonunun biçiminden

$$S\left(\lambda\right)=\frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)}=\left[\overline{S\left(\lambda\right)}\right]^{-1}$$

ve

$$\left|S\left(\lambda\right)\right|=\left|\frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)}\right|=1$$

olduğu bulunur. Böylece lemma ispatlanır. ■

**Tanım 4.1.2.2.** (4.1.2.2) ile tanımlı $S(\lambda)$ fonksiyonuna (4.1.1.1)-(4.1.1.2) sınır değer probleminin *saçılma fonksiyonu* denir.

$S(\lambda)$ fonksiyonunun (4.1.2.2) ifadesi kullanılarak aşağıdaki lemma ispatlanır.

**Lemma 4.1.2.3.** $|\lambda| \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik ifade sağlanır:

$$S(\lambda) = S(\infty) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.1.2.4}$$

burada

$$S(\infty) = \frac{\alpha_2 - i\beta_2}{\alpha_2 + i\beta_2}.$$

*İspat.* $E(\lambda)$'ın tanımında (4.1.1.5) yerine yazılırsa

$$E(\lambda) = \left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2\right)\left\{\frac{\lambda+m}{K} + \int_0^\infty \left(A_{11}\frac{\lambda+m}{K} - A_{12}i\right)e^{iKt}dt\right\}$$
$$-\left(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2\right)\left\{-i + \int_0^\infty \left(A_{21}\frac{\lambda+m}{K} - A_{22}i\right)e^{iKt}dt\right\}$$

elde edilir. (4.1.2.2) göz önünde bulundurularak ve $A_{ij}(x,t)$ $i, j = 1,2$ özelliklerinden

$$S(\lambda) = \frac{\left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2\right)\left\{\frac{\lambda+m}{k} + \int_0^\infty \left(A_{11}\frac{\lambda+m}{k} + A_{12}i\right)e^{-ikt}dt\right\} - \left(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2\right)\left\{i + \int_0^\infty \left(A_{21}\frac{\lambda+m}{k} + A_{22}i\right)e^{-ikt}dt\right\}}{\left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2\right)\left\{\frac{\lambda+m}{k} + \int_0^\infty \left(A_{11}\frac{\lambda+m}{k} - A_{12}i\right)e^{ikt}dt\right\} - \left(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2\right)\left\{-i + \int_0^\infty \left(A_{21}\frac{\lambda+m}{k} - A_{22}i\right)e^{ikt}dt\right\}}$$

$$\alpha_2+\frac{\alpha_1}{\lambda}+\frac{\alpha_0}{\lambda^2}+\alpha_0\int_0^\infty\left(A_{11}+A_{12}i\frac{k}{\lambda+m}\right)\frac{e^{-ikt}}{\lambda^2}dt+\alpha_1\int_0^\infty\left(A_{11}+A_{12}i\frac{k}{\lambda+m}\right)\frac{e^{-ikt}}{\lambda}dt$$

$$+\alpha_2\int_0^\infty\left(A_{11}+A_{12}i\frac{k}{\lambda+m}\right)e^{-ikt}dt-i\beta_2\frac{k}{\lambda+m}-i\left(\frac{\beta_0}{\lambda^2}+\frac{\beta_1}{\lambda}\right)\frac{k}{\lambda+m}$$

$$=\frac{-\beta_2\int_0^\infty\left(A_{21}+A_{22}i\frac{k}{\lambda+m}\right)e^{-ikt}dt-\left(\frac{\beta_0}{\lambda^2}+\frac{\beta_1}{\lambda}\right)\int_0^\infty\left(A_{21}+A_{22}i\frac{k}{\lambda+m}\right)e^{-ikt}dt}{\alpha_2+\frac{\alpha_1}{\lambda}+\frac{\alpha_0}{\lambda^2}+\alpha_0\int_0^\infty\left(A_{11}-i\frac{k}{\lambda+m}A_{12}\right)\frac{e^{ikt}}{\lambda^2}dt+\alpha_1\int_0^\infty\left(A_{11}-i\frac{k}{\lambda+m}A_{12}\right)\frac{e^{ikt}}{\lambda}dt}$$

$$+\alpha_2\int_0^\infty\left(A_{11}-i\frac{k}{\lambda+m}A_{12}\right)e^{ikt}dt+i\beta_2\frac{k}{\lambda+m}+i\left(\frac{\beta_0}{\lambda^2}+\frac{\beta_1}{\lambda}\right)\frac{k}{\lambda+m}$$

$$-\beta_2\int_0^\infty\left(A_{21}-i\frac{k}{\lambda+m}A_{22}\right)e^{ikt}dt-\left(\frac{\beta_0}{\lambda^2}+\frac{\beta_1}{\lambda}\right)\int_0^\infty\left(A_{21}-i\frac{k}{\lambda+m}A_{22}\right)e^{ikt}dt$$

$$=\frac{\alpha_2-i\beta_2\frac{k}{\lambda+m}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\alpha_2+i\beta_2\frac{k}{\lambda+m}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)}=\frac{\alpha_2-i\beta_2}{\alpha_2+i\beta_2}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\qquad |\lambda|\to\infty$$

Böylece $|\lambda|\to\infty$ için (4.1.2.4) asimptotik ifade elde edilmiştir. Bu da lemmayı ispatlar. ■

$S(\lambda)-S(\infty)$ fonksiyonu $-\infty<\lambda<+\infty$ reel eksende süreklidir ve $S(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından $|\lambda|\to\infty$ iken $S(\lambda)-S(\infty)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ asimptotik ifadesi sağlanır. Böylece $S(\lambda)-S(\infty)$ fonksiyonu $+\infty(-\infty)$' un komşuluğunda karesi ile integrallenebilirdir ve $L_2(-\infty,+\infty)$'dan olan bir fonksiyonun Fourier dönüşümüdür.

### 4.1.3. $E(\lambda)$ Fonksiyonunun Sıfırlarının İncelenmesi

**Lemma 4.1.3.1.** $E(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda>0)$ analitiktir, $\lambda=+m$ noktaları hariç reel eksende süreklidir. Sıfırları $(-m,m)$ aralığında yerleşir, sonlu sayıdadır ve basittir.

*İspat.* $E(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından dolayı $F_1(0,\lambda)$ ve $F_2(0,\lambda)$ fonksiyonları $\lambda = +m$ noktaları hariç reel eksende sürekli olduğundan ve üst düzlemde analitik olduğundan $E(\lambda)$ fonksiyonu da aynı özelliklere sahiptir.

$\mu \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Im}\mu > 0)$ veya $\mu \in (-m,m)$ olmak üzere $E(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırı olsun. (4.1.1.1)'e göre

$$BF'(x,\mu) + mTF(x,\mu) + \Omega(x)F(x,\mu) = \mu F(x,\mu)$$

eşitliği sağlanır. Bu ifadenin önce eşleniği sonra transpozu alınırsa

$$-F^{*\prime}(x,\mu)B + mF^*(x,\mu)T + F^*(x,\mu)\Omega(x) = \overline{\mu}F^*(x,\mu)$$

elde edilir. Burada

$$\overline{F}^T = F^*$$

ile gösterilir.

$$BF'(x,\mu) + mTF(x,\mu) + \Omega(x)F(x,\mu) = \mu F(x,\mu)$$

$$-F^{*\prime}(x,\mu)B + mF^*(x,\mu)T + F^*(x,\mu)\Omega(x) = \overline{\mu}F^*(x,\mu)$$

denklemler sisteminde birincisi denklem soldan $F^*(x,\mu)$ ile ikinci denklem sağdan $F(x,\mu)$ ile çarpılırsa

$$F^*(x,\mu)BF'(x,\mu) + mF^*(x,\mu)TF(x,\mu) + F^*(x,\mu)\Omega(x)F(x,\mu) = \mu F^*(x,\mu)F(x,\mu)$$

$$-F^{*\prime}(x,\mu)BF(x,\mu) + mF^*(x,\mu)TF(x,\mu) + F^*(x,\mu)\Omega(x)F(x,\mu) = \overline{\mu}F^*(x,\mu)F(x,\mu)$$

bulunur. Taraf tarafa çıkarıldığında

$$F^*(x,\mu)BF'(x,\mu) + F^{*\prime}(x,\mu)BF(x,\mu) = (\mu - \overline{\mu})F^*(x,\mu)F(x,\mu)$$

veya

$$W'\left[\overline{F(x,\mu)}, F(x,\mu)\right] = (\mu - \overline{\mu})F^*(x,\mu)F(x,\mu)$$

olduğu elde edilir. $0$'dan $\infty$'a kadar $x$'e göre integrallenirse

$$W\left[\overline{F(x,\mu)}, F(x,\mu)\right]\Big|_{x=0}^{x=\infty} + (\overline{\mu} - \mu)\int_0^\infty F^*(x,\mu)F(x,\mu)\,dx = 0 \qquad (4.1.3.1)$$

ifadesi çıkar. $F_1(x,\mu)$ ve $F_2(x,\mu)$'in tanımından

$$\lim_{x\to\infty} W\left[\overline{F(x,\mu)}, F(x,\mu)\right] = \lim_{x\to\infty}\left\{\overline{F_1(x,\mu)}.F_2(x,\mu) - F_1(x,\mu)\overline{F_2(x,\mu)}\right\}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\mu+m}{\sqrt{m^2-\mu^2}} - \frac{\mu+m}{\sqrt{m^2-\mu^2}}\right\} = 0$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan $\mu$, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu için

$$E(\mu) = \left(\alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2\right) F_1(0,\mu) - \left(\beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2\right) F_2(0,\mu) = 0$$

veya

$$F_1(0,\mu) = \frac{\beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2}{\alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2} F_2(0,\mu).$$

$$W\left[\overline{F(0,\mu)}, F(0,\mu)\right] = \overline{F_1(0,\mu)}F_2(0,\mu) - \overline{F_2(0,\mu)}F_1(0,\mu)$$

$$= \left(\frac{\beta_0 + \beta_1\overline{\mu} + \beta_2\overline{\mu}^2}{\alpha_0 + \alpha_1\overline{\mu} + \alpha_2\overline{\mu}^2} - \frac{\beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2}{\alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2}\right)\left|F_2(0,\mu)\right|^2$$

$$= \frac{\left[\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 + \left(\mu + \overline{\mu}\right)(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2) + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)|\mu|^2\right]}{\left|\alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2\right|^2}\left(\mu - \overline{\mu}\right)\left|F_2(0,\mu)\right|^2.$$

Elde edilen bu değerler (4.1.3.1) de yerine yazılırsa

$$\left(\mu - \overline{\mu}\right)\left\{\frac{\left[\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 + \left(\mu + \overline{\mu}\right)(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2) + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)|\mu|^2\right]}{\left|\alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2\right|^2}\left|F_2(0,\mu)\right|^2\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty F^*(x,\mu) F(x,\mu)\,dx\right\} = 0$$

elde edilir. $\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 > 0,\ \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 > 0,\ \alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2 = 0$ olduğundan parantezin içi pozitiftir o halde $\mu - \overline{\mu} = 0$ veya $\mu = \overline{\mu}$. Bu da $\mu$'lerin reel olduğunu gösterir. Böylece $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının $(-m,m)$ aralığında yerleştiği gösterilmiş olur.

Lemma'nın ispatına devam etmek için $E(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarının sayısının sonlu olduğu gösterilmesi gerekiyor.

$\delta$, $E(\lambda)$ fonksiyonunun iki komşu sıfırı arasındaki mesafenin infimumu olsun. $\delta > 0$ olduğunun gösterilmesi gerekiyor. Aksi kabul edilsin. $\{\lambda_k\}$, $\{\tilde{\lambda}_k\}$ $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarından oluşan diziler olsunlar öyleki

$$\lim_{k\to\infty}\left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k\right) = 0 \qquad -m \le \lambda_k < \tilde{\lambda}_k < 0$$

sağlansın. Yeterince büyük bir $A$ sayısı için $x \in [A,\infty)$ ve $\lambda \in (-m,m)$ olmak üzere

$$iF_1(x,\lambda) > \frac{1}{2}\frac{\lambda+m}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}$$

$$iF_2(x,\lambda) > \frac{1}{2}e^{-\sqrt{m^2-\lambda^2}x}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buna göre

$$\int_A^\infty F^*(x,\lambda_k).F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)dx > \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{m^2-\lambda_k^{\,2}}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^{\,2}}}e^{-\left(\sqrt{m^2-\lambda_k^{\,2}}+\sqrt{m^2-\tilde{\lambda}_k^{\,2}}\right)A}$$

elde edilir. Böylece $k \to \infty$ iken limite geçildiğinde $\lambda_k, \tilde{\lambda}_k \to -m$ olacağından

$$\lim_{k\to\infty}\int_A^\infty F^*(x,\lambda_k)F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)dx = +\infty \tag{4.1.3.2}$$

olduğu elde edilir. Diğer taraftan

$$0 = \int_0^\infty F^*(x,\lambda_k)F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)dx + \frac{\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\lambda_k\tilde{\lambda}_k}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_k+\alpha_2\lambda_k^{\,2}\right)\left(\alpha_0+\alpha_1\tilde{\lambda}_k+\alpha_2\tilde{\lambda}_k^{\,2}\right)}$$

$$= \int_0^A F^*(x,\lambda_k)\left[F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)-F(x,\lambda_k)\right]dx$$

$$+\int_0^A F^*(x,\lambda_k)F(x,\lambda_k)dx + \int_A^\infty F^*(x,\lambda_k)F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right)dx$$

$$+\frac{\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\lambda_k\tilde{\lambda}_k}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_k+\alpha_2\lambda_k^{\,2}\right)\left(\alpha_0+\alpha_1\tilde{\lambda}_k+\alpha_2\tilde{\lambda}_k^{\,2}\right)}$$

bulunur. Burada $k \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{k\to\infty}\int_A^\infty F^*(x,\lambda_k)F\left(x,\tilde{\lambda}_k\right) \le 0 \tag{4.1.3.3}$$

elde edilir. (4.1.3.2) ve (4.1.3.3) ifadeleri çelişki oluşturur. Buna göre varsayım doğru değildir. O halde $E(\lambda)$ fonksiyonunun iki komşu sıfırı arasındaki mesafenin uzunluğu $\delta$ sıfırdan büyüktür. Ayrıca $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları $(-m,m)$ aralığında yerleştiği için sıfırlarının sonlu sayıda olduğu sonucu elde edilir.

Son olarak $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının basit olduğu gösterilecektir. $F(x,\lambda)$ fonksiyonunun eşleniğinin transpozu $F^*(x,\lambda)$ ile $\lambda$' ya göre türevi ise $\dot{F}(x,\lambda)$ ile gösterilsin. $|\lambda| < m$ için

$$BF'(x,\lambda) + mTF(x,\lambda) + \Omega(x)F(x,\lambda) = \lambda F(x,\lambda)$$

denkleminin önce eşleniği sonra transpozu alınırsa

$$-F^{*\prime}(x,\lambda)B + mF^*(x,\lambda)T + F^*(x,\lambda)\Omega(x) = \lambda F^*(x,\lambda)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlik $\lambda$' ya göre türevlendirilirse

$$-\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*\prime} B + m\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} T + \left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}\Omega(x) = \lambda\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} + F^*(x,\lambda)$$

elde edilir.

$$BF'(x,\lambda) + mTF(x,\lambda) + \Omega(x)F(x,\lambda) = \lambda F(x,\lambda)$$

$$-\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*\prime} B + m\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} T + \left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}\Omega(x) = \lambda\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} + F^*(x,\lambda)$$

denklemler sisteminde birinci denklem soldan $\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*}$ ile ikinci denklem sağdan $F(x,\lambda)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} BF'(x,\lambda) + \left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*\prime} BF(x,\lambda) = -F^*(x,\lambda)F(x,\lambda)$$

$$\left[\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} BF(x,\lambda)\right]' = -F^*(x,\lambda)F(x,\lambda)$$

ifadesi çıkar. Bu ifade $0$'dan $+\infty$'a kadar $x$'e göre integrallendiğinde

$$\left(\dot{F}(x,\lambda)\right)^{*} BF(x,\lambda)\Big|_{x=0}^{\infty} = -\int_0^\infty F^*(x,\lambda)F(x,\lambda)\,dx \qquad (4.1.3.4)$$

elde edilir. $F\left(x,\lambda\right)$'nın tanımından

$$\lim_{x\to\infty}\left(\dot{F}\left(x,\lambda\right)\right)^{*}BF\left(x,\lambda\right)=0$$

olduğu bulunur. O halde

$$\left(\dot{F}\left(0,\lambda\right)\right)^{*}BF\left(0,\lambda\right)=\int_{0}^{\infty}F^{*}\left(x,\lambda\right)F\left(x,\lambda\right)dx$$

elde edilir. $\lambda_j$, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olsun.

$$E\left(\lambda\right)=\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)F_1\left(0,\lambda_j\right)-\left(\beta_0+\beta_1\lambda_j+\beta_2\lambda_j^{\,2}\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)=0$$

$$\dot{E}\left(\lambda_j\right)=\left(\alpha_1+2\alpha_2\lambda_j\right)F_1\left(0,\lambda_j\right)+\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)\dot{F}_1\left(0,\lambda_j\right)$$

$$-\left(\beta_1+2\beta_2\lambda_j\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)-\left(\beta_0+\beta_1\lambda_j+\beta_2\lambda_j^{\,2}\right)\dot{F}_2\left(0,\lambda_j\right)$$

ifadeleri yardımıyla

$$\left(\dot{F}\left(0,\lambda_j\right)\right)^{*}BF\left(0,\lambda_j\right)=\overline{\dot{F}_1}\left(0,\lambda_j\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)-\overline{\dot{F}_2}\left(0,\lambda_j\right)F_1\left(0,\lambda_j\right)=$$

$$=\dot{F}_2\left(0,\lambda_j\right)F_1\left(0,\lambda_j\right)-\dot{F}_1\left(0,\lambda_j\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)$$

$$=\dot{F}_2\left(0,\lambda_j\right)\frac{\left[E\left(\lambda\right)+\left(\beta_0+\beta_1\lambda_j+\beta_2\lambda_j^{\,2}\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)\right]}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)}$$

$$-F_2\left(0,\lambda_j\right)\frac{\left[\begin{array}{c}\dot{E}\left(\lambda\right)-\left(\alpha_1+2\alpha_2\lambda_j\right)F_1\left(0,\lambda_j\right)+\left(\beta_1+2\beta_2\lambda_j\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)\\ +\left(\beta_0+\beta_1\lambda_j+\beta_2\lambda_j^{\,2}\right)\dot{F}_2\left(0,\lambda_j\right)\end{array}\right]}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)}$$

$$=\frac{-\dot{E}\left(\lambda\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)-\left(\beta_1+2\beta_2\lambda_j\right)F_2^{2}\left(0,\lambda_j\right)+F_1\left(0,\lambda_j\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)\left(\beta_1+2\beta_2\lambda_j\right)}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)}$$

$$=\frac{-\dot{E}\left(\lambda\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)}+\frac{F_2^{2}\left(0,\lambda_j\right)}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)^{2}}\left[\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1+\left(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\right)\lambda_j^{\,2}\right]$$

olduğu bulunur. Böylece

$$\frac{-\dot{E}\left(\lambda_j\right)F_2\left(0,\lambda_j\right)}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)}=-\frac{F_2^{\,2}\left(0,\lambda_j\right)}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)^2}\left[\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1+\left(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\right)\lambda_j^{\,2}\right]$$

$$+\int_0^\infty F^*\left(x,\lambda\right)F\left(x,\lambda\right)dx$$

sağlanmış olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadede $\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1>0$ , $\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2>0$ ve $F_2\left(0,\lambda_j\right)$ sırf sanal olduğundan bu ifade sıfırdan büyüktür ve böylece sağ taraf sıfırdan büyüktür. Ohalde $\dot{E}\left(\lambda_j\right)\neq 0$ olur. Bu da $E\left(\lambda\right)$ fonksiyonunun sıfırlarının basit olduğunu gösterir.

Lemma ispatlanır. ■

**Tanım 4.1.3.2.**

$$m_j^{-2}=-\frac{F_2^{\,2}\left(0,\lambda_j\right)}{\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}\right)^2}\left[\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1+\left(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\right)\lambda_j^{\,2}\right]+\int_0^\infty F^*\left(x,\lambda\right)F\left(x,\lambda\right)dx$$

bağıntısı ile tanımlanan $m_j$'e *normlaştırıcı sayı* denir.

### 4.1.4. Temel Denklemin Elde Edilmesi

Ters problemin çözümünde önemli role sahip olan integral denklem elde edilecektir. Bunun için Lemma 4.1.2.1' de elde edilen (4.1.2.1) özdeşliği kullanılır. Burada 4.1.1.5 dikkate alınarak

$$2i\frac{\lambda+m}{k}\frac{\varphi\left(x,\lambda\right)}{E\left(\lambda\right)}=\overline{F\left(x,\lambda\right)}-S\left(\lambda\right)F\left(x,\lambda\right)-S\left(\infty\right)F\left(x,\lambda\right)+S\left(\infty\right)F\left(x,\lambda\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\ i\end{pmatrix}e^{-ikx}+\int_x^\infty A\left(x,t\right)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\ i\end{pmatrix}e^{-ikt}dt$$

$$-S\left(\infty\right)\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\ -i\end{pmatrix}e^{ikx}+\int_x^\infty A\left(x,t\right)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\ -i\end{pmatrix}e^{ikt}dt\right]$$

$$+\left(S(\infty)-S(\lambda)\right)\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikx}+\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikt}dt\right]$$

olur. O halde

$$2i\frac{\lambda+m}{k}\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\i\end{pmatrix}e^{-ikx}+S(\infty)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikx}=\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\i\end{pmatrix}e^{-ikt}dt$$

$$-S(\infty)\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikt}dt+\left(S(\infty)-S(\lambda)\right)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikx}$$

$$+\left(S(\infty)-S(\lambda)\right)\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikt}dt$$

eşitliğinin her iki tarafı $\frac{1}{2\pi}\frac{k}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda+m}{k},\quad -i\right)e^{iky}$ ile çarpılıp ve $\lambda$'ya göre integrallenirse

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\left[2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\i\end{pmatrix}e^{-ikx}+S(\infty)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikx}\right]\frac{k}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda+m}{k}\quad -i\right)e^{iky}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\i\end{pmatrix}e^{-ikt}\frac{k}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda+m}{k}\quad -i\right)e^{iky}dtd\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}S(\infty)\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikt}\frac{k}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda+m}{k}\quad -i\right)e^{iky}dtd\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\left(S(\infty)-S(\lambda)\right)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikx}\frac{k}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda+m}{k}\quad -i\right)e^{iky}dtd\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\left(S(\infty)-S(\lambda)\right)\int_x^\infty A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\-i\end{pmatrix}e^{ikt}\frac{k}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda+m}{k}\quad -i\right)e^{iky}dtd\lambda$$

bulunur. Her iki tarafın reel kısmı alınırsa

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m} 2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}\frac{k}{\lambda+m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}d\lambda$$

$$-\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\ i\end{pmatrix}e^{-ikx}\frac{k}{\lambda+m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}d\lambda$$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m} S(\infty)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\\ -i\end{pmatrix}e^{ikx}\frac{k}{\lambda+m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}d\lambda$$

$$=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\int\limits_{x}^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ i & \frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-ik(t-y)}dt\,d\lambda$$

$$-\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m} S(\infty)\int\limits_{x}^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ -i & -\frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{ik(t+y)}dt\,d\lambda$$

$$+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\left(S(\infty)-S(\lambda)\right)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ -i & -\frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{ik(x+y)}d\lambda$$

$$+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\left(S(\infty)-S(\lambda)\right)\int\limits_{x}^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ -i & -\frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{ik(t+y)}dt\,d\lambda \qquad (4.1.4.1)$$

olduğu görülür.

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ i & \frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-ik(t-y)}d\lambda=\delta(t-y)$$

olduğunu göz önüne alalım. (4.1.4.1)' in sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimin

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\int_{x}^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ i & \frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-ik(t-y)}dtd\lambda$$

$$=\int_{x}^{\infty}A(x,t)\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ i & \frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{-ik(t-y)}d\lambda dt$$

$$=\int_{x}^{\infty}A(x,t)\delta(t-y)dt=A(x,y)$$

ve

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}S(\infty)\int_{x}^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ -i & -\frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{ik(t+y)}dtd\lambda$$

$$=\int_{x}^{\infty}A(x,t)\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\frac{\alpha_2-i\beta_2}{\alpha_2+i\beta_2}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ -i & -\frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{ik(t+y)}d\lambda dt$$

$$=\frac{\alpha_2^{\,2}-\beta_2^{\,2}}{\alpha_2^{\,2}+\beta_2^{\,2}}\int_{x}^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\delta(-t-y)dt=\frac{\alpha_2^{\,2}-\beta_2^{\,2}}{\alpha_2^{\,2}+\beta_2^{\,2}}A(x,-y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=0$$

olduğu bulunur. O halde elimizdeki ifadenin sağ tarafı

$$A(x,y)+F_S(x+y)+\int_{x}^{\infty}A(x,t)F_S(t+y)dt,\qquad y>x$$

formuna sahip olduğu çıkar, burada

$$F_S(x)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|>m}\left(S(\infty)-S(\lambda)\right)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\\ -i & -\frac{k}{\lambda+m}\end{pmatrix}e^{ik(x+y)}d\lambda$$

biçimindedir. Sol taraf için Jordan Lemması kullanılarak

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|>m}2\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}d\lambda$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Re}s\left(2\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky},\lambda_j\right)=-\sum_{j=1}^{n}\lim_{\lambda\to\lambda_j}(\lambda-\lambda_j)2\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}2\frac{\varphi(x,\lambda_j)}{\dot{E}(\lambda_j)}\begin{pmatrix}\frac{\lambda_j+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}2\frac{(\alpha_0+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2})F(x,\lambda_j)}{\dot{E}(\lambda_j)F_2(0,\lambda_j)}\begin{pmatrix}\frac{\lambda_j+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}=\sum_{j=1}^{n}2m_j^{\,2}F(x,\lambda_j)\begin{pmatrix}\frac{\lambda_j+m}{k} & -i\end{pmatrix}e^{iky}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}2m_j^2\left[\begin{pmatrix}\frac{\lambda_j+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKx}+\int\limits_x^{\infty}A(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda_j+m}{K}\\ -i\end{pmatrix}e^{iKt}dt\right]\begin{pmatrix}\frac{\lambda_j+m}{K} & i\end{pmatrix}e^{-iKy}$$

olduğu elde edilir. Bu ifade yerine yazılırsa

$$A(x,y)+F(x+y)+\int\limits_x^{\infty}A(x,t)F(t+y)dt=0,\quad y>x \tag{4.1.4.2}$$

denklemi elde edilir, burada

$$F(x+y)=F_S(x+y)+\sum_{j=1}^{n}f(x,\lambda_j)M_j^{\,2}\tilde{f}(y,\lambda_j) \tag{4.1.4.3}$$

ve

$$f(x,\lambda_j)=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_j+m}{k}\\ -i\end{pmatrix}e^{-ikx}\qquad \text{ve}\qquad M_j^{\,2}=-2m_j^{\,2}.$$

**Teorem 4.1.4.1.** Her $x\geq 0$ için (4.1.1.5) özel çözümün çekirdeği $A(x,t)$ (4.1.4.2) integral denklemini sağlar.

Dolayısıyla Teorem 4.1.4.1'de gösterildi ki (4.1.1.1) denklemin (4.1.1.5) çözümünün $A(x,t)$ çekirdeği (4.1.4.2) integral denklemi sağlar.

**Tanım 4.1.4.2.** (4.1.4.2) integral denklemine (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin *temel denklemi* denir.

### 4.1.5. Temel Denklemin Çözülebilirliği ve Ters Problemin Çözümünün Tekliği

Temel denklemde $A(x,y)$ çekirdeği bilinmeyen olarak göz önünde tutulur ve denkleme her sabitleştirilmiş $x$ için bileşenleri $L_2(x,\infty)$'da olan matris fonksiyonların uzayında Fredholm tip matris denklem olarak bakılır.

**Teorem 4.1.5.1.** Her sabitleştirilmiş $x \geq 0$ için temel denklemin elemanları $L_2(x,\infty)$ da olan tek bir vektör çözümü vardır.

*İspat.* $S(\lambda)$ fonksiyonu verildiğinde (4.1.4.3) formülü ile $F(x)$ fonksiyonu inşa edilerek (4.1.4.2) temel denklemi yazılır. Bu denklemde $A(x,y)=f(y)$ bilinmeyen olarak ele alındığında karşılık gelen homojen denklem

$$f(y)+\int_x^\infty f(t)F(t+y)\,dt=0$$

biçiminde olur. Bu denklemin sadece sıfır çözümü olduğunu göstermek gerekir. Buradaki $F(x)$ geçit fonksiyonu [10] daki (2.1.8) formülü ile tanımlanan $F(x)$ fonksiyonunun özelliklerine sahiptir. O halde [10] da Teorem 2.3.1 uygulayarak (4.1.4.2) denkleminin tek bir vektör çözümünün olduğu elde edilir. ■

## 4.2. BİR SINIF SÜREKSİZ KATSAYILI DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ

### 4.2.1. Probleme Giriş

Bu bölümde süreksiz katsayılı bir sınıf Dirac denklemler sistemi için ters problem ele alınacaktır.

Pozitif yarı eksende süreksiz katsayılı

$$By' + \Omega(x)\, y = \lambda \rho(x)\, y \qquad 0 \le x < \infty \tag{4.2.1.1}$$

Dirac denklemler sistemi ve

$$y_1(0) - h y_2(0) = 0 \tag{4.2.1.2}$$

sınır koşulu ile üretilen sınır değer problemi ele alınır. Burada $\lambda$ spektral parametre, $h$ reel sayı

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x > a \\ \alpha, & 0 \le x < a \end{cases} \tag{4.2.1.3}$$

biçimindedir. $1 \ne \alpha > 0$, $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır. $\Omega(x)$ matris fonksiyonu Öklid normuna göre

$$\int_0^\infty \left\| \Omega(x) \right\| dx < \infty \tag{4.2.1.4}$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. O halde [11] den bilinir ki (4.1.1.1) denkleminin $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ için

$$\lim_{x \to \infty} f(x,\lambda) e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan

$$f(x,\lambda) = f^0(x,\lambda) + \int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt \tag{4.2.1.5}$$

formunda tek bir çözümü vardır. Kolayca gösterilir ki $\Omega(x)\equiv 0$ olduğunda (4.2.1.1) denkleminin bu koşulu sağlayan çözümü

$$f^0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}$$

biçimindedir. Burada

$$\mu(x)=\begin{cases}\alpha(x-a)+a, & 0\le x\le a\\ x, & x>a\end{cases}$$

biçimindedir.

Üstelik $K(x,.)$ matris fonksiyonunun bileşenleri pozitif yarım eksende toplanabilirdir ve $K(x,t)$ Öklid normuna göre

$$\int_{\mu(x)}^{\infty}\|K(x,t)\|dt\le e^{\sigma(x)}-1$$

eşitsizliğini sağlar, burada $\sigma(x)=\int_x^{\infty}\|\Omega(t)\|dt$.

Ayrıca $\Omega(x)$ mutlak sürekli ise

$$BK_x(x,t)+\Omega(x)K(x,t)+\rho(x)K_t(x,t)B=0 \qquad (4.2.1.6)$$

$$\rho(x)\{BK(x,\mu(x))-K(x,\mu(x))\}=\Omega(x) \qquad (4.2.1.7)$$

bağıntıları sağlanır.

$y(x,\lambda)$ ve $z(x,\lambda)$ vektör fonksiyonlar olsunlar.

$$W[y(x,\lambda),z(x,\lambda)]=y(x,\lambda)^T Bz(x,\lambda)=(y_1,y_2)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=y_1z_2-y_2z_1$$

ifadesine $y(x,\lambda)$ ve $z(x,\lambda)$ vektör fonksiyonlarının *Wronskianı* denir.

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli fonksiyonlar olduğundan reel $\lambda$'lar için $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.2.1.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur. Bu fonksiyonların Wronskianı $x$'e bağlı değildir ve $2i$'ye eşittir.

Tezin bu bölümünde (4.2.1.5) çözümü kullanılarak (4.2.1.2) koşulunu sağlayan özel çözüm verilecek, Wronskian yardımıyla $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonu tanımlanacaktır ve saçılma fonksiyonunun asimptotik ifadesi elde edilecektir. Saçılma fonksiyonunun paydasının sıfırları incelenerek kütleli durumdan farklı olarak saçılma verilerinin sadece saçılma fonksiyonundan belirlendiği ifade edilecektir. Daha sonra rezolvent operatör ve özfonksiyonlara göre ayrışım formülü bulunacaktır. Saçılma fonksiyonunun sürekliliği ve argüment değişimi incelenecektir. Buna ilişkin Levinson formülü bulunacaktır. Bu bölümde de diğer bölümde olduğu gibi (4.2.1.5) çözümünün çekirdeğinin sağladığı temel denklem elde edilecektir ve son olarak saçılma verisiyle inşa edilmiş denklemin tek türlü çözümü olduğu gösterilerek ters problem çözülecektir.

### 4.2.2. Özel Çözüm ve Saçılma Fonksiyonu

$\varphi(x,\lambda)$ ile (4.2.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=h, \qquad \varphi_2(0,\lambda)=1 \tag{4.2.2.1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin ve

$$E(\lambda):=f_1(0,\lambda)-hf_2(0,\lambda) \tag{4.2.2.2}$$

fonksiyonu tanımlansın.

Aşağıdaki lemma sağlanır.

**Lemma 4.2.2.1.** Reel $\lambda$'lar için

$$2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}=\overline{f(x,\lambda)}-S(\lambda)f(x,\lambda) \tag{4.2.2.3}$$

özdeşliği sağlanır, burada

$$S(\lambda)=\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}-h\overline{f_2(0,\lambda)}}{f_1(0,\lambda)-hf_2(0,\lambda)} \tag{4.2.2.4}$$

biçimindedir ve

$$S(\lambda)=\left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$$

ve

$$\left|S(\lambda)\right|=1\,.$$

bağıntılarını sağlar.

*İspat*. $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ pozitif yarım eksende reel $\lambda$ lar için (4.2.1.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturduğundan $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\lambda)=c_1(\lambda)f(x,\lambda)+c_2(\lambda)\overline{f(x,\lambda)} \tag{4.2.2.5}$$

biçiminde yazılır, burada $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ $\lambda$'ya bağlı bulunması gereken fonksiyonlardır. (4.2.2.5)'de $x=0$ yerine yazılarak ve (4.2.2.1) göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} c_1(\lambda)f_1(0,\lambda)+c_2(\lambda)\overline{f_1(0,\lambda)}&=h\\ c_1(\lambda)f_2(0,\lambda)+c_2(\lambda)\overline{f_2(0,\lambda)}&=1 \end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$c_1(\lambda)=-\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}-h\overline{f_2(0,\lambda)}}{2i},\quad c_2(\lambda)=\frac{f_1(0,\lambda)-hf_2(0,\lambda)}{2i}\,.$$

Bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\varphi(x,\lambda)=-\frac{\overline{E(\lambda)}}{2i}f(x,\lambda)+\frac{E(\lambda)}{2i}\overline{f(x,\lambda)} \tag{4.2.2.6}$$

elde edilir.

Diğer taraftan reel $\lambda$'lar için $E(\lambda)\neq 0$ olduğunu göstermek gerekir. Aksi kabul edilsin. O zaman en az bir $\lambda_0$ sayısı vardır öyle ki

$$f_1(0,\lambda_0)=hf_2(0,\lambda_0)$$

sağlanır. Ayrıca

$$W\left[f(0,\lambda_0),\overline{f(0,\lambda_0)}\right]=2i$$

ya da

$$f_1(0,\lambda_0)\overline{f_2(0,\lambda_0)}-f_2(0,\lambda_0)\overline{f_1(0,\lambda_0)}=2i$$

sağlanır. Yukarıda elde edilen $f_1(0,\lambda_0)$ ve $\overline{f_1(0,\lambda_0)}$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$0=2i$$

bulunur ve çelişkiye varılır. O halde reel $\lambda$'lar için $E(\lambda) \neq 0$ dır.

Böylece (4.2.2.6)'in her iki tarafı $\frac{1}{2i} E(\lambda)$' ya bölünerek istenilen (4.2.2.3) bağıntısı elde edilir ve burada

$$S(\lambda) = \frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)} = \frac{\overline{f_1(0,\lambda)} - h\overline{f_2(0,\lambda)}}{f_1(0,\lambda) - hf_2(0,\lambda)}$$

biçimine sahiptir. $S(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından

$$\overline{S(\lambda)} = \overline{\left(\frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)}\right)} = \frac{E(\lambda)}{\overline{E(\lambda)}} = \left[S(\lambda)\right]^{-1}$$

yani

$$S(\lambda) = \left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$$

ve

$$|S(\lambda)| = \left|\frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)}\right| = 1$$

elde edilir. Böylece lemma ispatlanır. ■

**Tanım 4.2.2.2.** $S(\lambda)$ fonksiyonuna (4.2.1.1)-(4.2.1.2) sınır değer probleminin *saçılma fonksiyonu* denir.

Özel olarak $\Omega(x) = 0$ olduğunda (4.2.2.3) eşitliği

$$2i\frac{\varphi^0(x,\lambda)}{E^0(\lambda)} = \overline{f^0(x,\lambda)} - S(\lambda) f^0(x,\lambda)$$

formuna dönüşür, burada $\varphi^0(x,\lambda)$ vektör fonksiyonu $\Omega(x) = 0$ olduğunda (4.2.1.1) denkleminin

$$\varphi^0{}_1(0,\lambda) = h, \qquad \varphi^0{}_2(0,\lambda) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür ve

$$S_0(\lambda) = \frac{\overline{f^0{}_1}(0,\lambda) - h\overline{f^0{}_2}(0,\lambda)}{f^0{}_1(0,\lambda) - hf^0{}_2(0,\lambda)} = e^{-2i\lambda a(1-\alpha)}\frac{1-ih}{1+ih}$$

**Lemma 4.2.2.3.** $|\lambda| \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik ifade sağlanır:

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.2.2.6}$$

burada

$$S_0(\lambda) = e^{-2i\lambda a(1-\alpha)} \frac{1-ih}{1+ih}.$$

*İspat.* $E(\lambda)$'ın tanımında (4.2.1.5) yerine yazılırsa

$$E(\lambda) = e^{i\lambda a(1-\alpha)} + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{11}(0,t) - iK_{12}(0,t)\right) e^{i\lambda t} dt$$

$$-h\left\{-ie^{i\lambda a(1-\alpha)} + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{21}(0,t) - iK_{22}(0,t)\right) e^{i\lambda t} dt\right\}$$

elde edilir. (4.2.2.4) göz önünde bulundurularak ve $K_{ij}(x,t)$ $i, j = 1,2$ özelliklerinden

$$S(\lambda) = \frac{e^{-i\lambda a(1-\alpha)} + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{11}(0,t) + iK_{12}(0,t)\right) e^{-i\lambda t} dt}{e^{i\lambda a(1-\alpha)} + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{11}(0,t) - iK_{12}(0,t)\right) e^{i\lambda t} dt}$$

$$\frac{-h\left\{ie^{-i\lambda a(1-\alpha)} + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{21}(0,t) + iK_{22}(0,t)\right) e^{-i\lambda t} dt\right\}}{-h\left\{-ie^{i\lambda a(1-\alpha)} + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{21}(0,t) - iK_{22}(0,t)\right) e^{i\lambda t} dt\right\}}$$

$$= e^{-2i\lambda a(1-\alpha)} \frac{1 - ih + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{11}(0,t) + iK_{12}(0,t)\right) e^{-i\lambda(t + a(1-\alpha))} dt}{1 + ih + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{11}(0,t) - iK_{12}(0,t)\right) e^{i\lambda(t + a(1-\alpha))} dt}$$

$$\frac{-h \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{21}(0,t) + iK_{22}(0,t)\right) e^{-i\lambda(t + a(1-\alpha))} dt}{-h \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left(K_{21}(0,t) - iK_{22}(0,t)\right) e^{i\lambda(t + a(1-\alpha))} dt}$$

$$= e^{-2i\lambda a(1-\alpha)} \frac{1-ih}{1+ih} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad |\lambda| \to \infty$$

olduğu bulunur. Böylece $|\lambda| \to \infty$ için (4.2.2.6) asimptotik form elde edilmiştir. Bu da lemmayı ispatlar. ■

### 4.2.3. $E(\lambda)$ Fonksiyonunun Özelliklerinin İncelenmesi

Şimdi $E(\lambda)$ fonksiyonunun özellikleri incelenecektir.

**Lemma 4.2.3.1.** $E(\lambda)$ fonksiyonu üst yarım düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ analitiktir, reel eksende süreklidir ve kapalı üst yarım düzlemde sıfırları yoktur.

*İspat.* Lemma 4.2.2.1.'in ispatında $E(\lambda)$ fonksiyonunun reel sıfırları olmadığı gösterildi. (4.2.1.5) ifadesinden $f_1(0,\lambda)$ ve $\overline{f_1(0,\lambda)}$'ın $\operatorname{Im}\lambda > 0$ üst yarım düzleme analitik olarak devam ettirilebileceği çıkar ve tüm eksende süreklidirler. Bu özellikler $E(\lambda)$ içinde sağlanır. $|\lambda| \to \infty$ iken

$$f(0,\lambda) \to \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

olur ve buradan $E(\lambda)$'ın sıfırlarının sayılabilenden fazla olmadığı ve sınırlı bir küme oluşturduğu elde edilir.

$\mu \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Im}\mu > 0)$ $E(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırı olsun.

$$Bf'(x,\mu) + \Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\mu f(x,\mu)$$

denkleminin önce eşleniği sonra transpozu alınırsa

$$-f^{*\prime}(x,\mu)B + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) = \overline{\mu}\rho(x) f^{*}(x,\mu)$$

ifadesi elde edilir ve burada $f^{*}(x,\mu)$ vektör fonksiyonu $\overline{f(x,\mu)}$ matris fonksiyonunun transpozunu gösterir.

$$Bf'(x,\mu) + \Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\mu f(x,\mu)$$

$$-f^{*\prime}(x,\mu)B + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) = \overline{\mu}\rho(x) f^{*}(x,\mu)$$

denklemler sisteminde birincisi denklem soldan $f^*(x,\mu)$ ile ikinci denklem sağdan $f(x,\mu)$ ile çarpılırsa

$$f^*(x,\mu)Bf'(x,\mu)+f^*(x,\mu)\Omega(x)f(x,\mu)=\mu\rho(x)f^*(x,\mu)f(x,\mu)$$

$$-f^{*\prime}(x,\mu)Bf(x,\mu)+f^*(x,\mu)\Omega(x)f(x,\mu)=\overline{\mu}\rho(x)f^*(x,\mu)f(x,\mu)$$

bulunur. Taraf tarafa çıkarıldığında

$$f^*(x,\mu)Bf'(x,\mu)+f^{*\prime}(x,\mu)Bf(x,\mu)=\left(\mu-\overline{\mu}\right)\rho(x)f^*(x,\mu)f(x,\mu)$$

veya

$$W'\left[\overline{f(x,\mu)},f(x,\mu)\right]=\left(\mu-\overline{\mu}\right)\rho(x)f^*(x,\mu)f(x,\mu)$$

olduğu elde edilir. $0$'dan $\infty$'a kadar $x$'e göre integrallenirse

$$W\left[\overline{f(x,\mu)},f(x,\mu)\right]\Big|_{x=0}^{x=\infty}+\left(\overline{\mu}-\mu\right)\int_0^\infty f^*(x,\mu)f(x,\mu)\rho(x)dx=0 \qquad (4.2.3.1)$$

ifadesi çıkar. $f_1(x,\mu)$ ve $f_2(x,\mu)$'in tanımından

$$\lim_{x\to\infty}W\left[\overline{f(x,\mu)},f(x,\mu)\right]=\lim_{x\to\infty}\left\{\overline{f_1(x,\mu)}.f_2(x,\mu)-f_1(x,\mu)\overline{f_2(x,\mu)}\right\}=0$$

olur. Diğer tarafta

$$E(\mu)=f_1(0,\mu)-hf_2(0,\mu)=0$$

ya da

$$f_1(0,\mu)=hf_2(0,\mu)$$

sağlanır. Böylece

$$W\left[\overline{f(x,\mu)},f(x,\mu)\right]\Big|_{x=0}=\overline{f_1(0,\mu)}f_2(0,\mu)-\overline{f_2(0,\mu)}f_1(0,\mu)=0$$

bulunur. Bu veriler (4.2.3.1)'da yerine yazılırsa

$$\left(\overline{\mu}-\mu\right)\int_0^\infty f^*(x,\mu)f(x,\mu)\rho(x)dx=0$$

elde edilir ve bu da $\overline{\mu}=\mu$ olduğunu yani $\mu$'lerin reel olduğunu gösterir. O halde $E(\mu)$ fonksiyonunun $(\operatorname{Im}\mu>0)$ için sıfırı olmadığı sonucu çıkar. Reel eksende de sıfır yerinin olmadığı gösterilmişti. Elde edilen çelişki $E(\mu)$ fonksiyonunun $(\operatorname{Im}\mu\geq 0)$ de sıfırlarının olmadığı sonucunu çıkarır. ■

### 4.2.4. Rezolvent Operatör ve Özfonksiyonlara Göre Ayrışım Formülü

$H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$ Hilbert uzayında $f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in H_\rho$, $g = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} \in H_\rho$ vektörler için

$$(f,g) = \int_0^\infty \left\{ f_1(x)\overline{g}_1(x) + f_2(x)\overline{g}_2(x) \right\} \rho(x)\,dx$$

ile iç çarpım tanımlansın ve

$$l(y) := \frac{1}{\rho(x)}\left\{ By' + \Omega(x)\,y \right\}$$

olsun.

(4.2.1.1)-(4.2.1.2) sınır değer problemine karşılık gelen $L$ operatörü aşağıdaki formda tanımlansın:

$$Lf = \begin{pmatrix} f_2'(x) + p(x)\,f_1(x) + q(x)\,f_2(x) \\ -f_1'(x) + q(x)\,f_1(x) - p(x)\,f_2(x) \end{pmatrix}, \quad f \in D(L)$$

burada $L$ operatörünün tanım bölgesi

$$D(L) := \left\{ f \mid f = \left(f_1(x), f_2(x)\right) \in H_\rho, f_1(x), f_2(x) \in AC[0,b], \right.$$

$$\left. [0,b] \subset [0,\infty),\ l(f) \in H_\rho \right\}$$

biçimindedir. Gösterilebilir ki, tanım bölgesi $D(L)$ olan $L$ operatörü $H_\rho$ uzayında özeşleniktir.

Eğer $\lambda$ , $L$ operatörünün spektrum noktası değilse $(L - \lambda I)^{-1}$ rezolvent operatör vardır . Şimdi rezolvent operatörün biçimi bulunacaktır.

**Lemma 4.2.4.1.** $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ rezolvent operatör

$$R_\lambda(x,t) = -\frac{1}{E(\lambda)} \begin{cases} \varphi(x,\lambda)\,\overline{f(t,\lambda)}, & x \le t < \infty \\ f(x,\lambda)\,\overline{\varphi(t,\lambda)}, & 0 \le t < x \end{cases}$$

biçimine sahip çekirdekli integral operatördür.

*İspat.* $L$ tanım bölgesi $D(L)$ olan operatör ve $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ sonlu her $(0,b)$ aralığının dışında sıfır olsun. Rezolventin açık biçimini bulmak için aşağıdaki problemin çözülmesi gerekir.

$$By'+\Omega(x)\,y=\lambda\rho(x)\,y+\rho(x)\,f(x) \tag{4.2.4.1}$$

$$y_1(0)-hy_2(0)=0 \tag{4.2.4.2}$$

Sabitlerin değişimi yöntemi uygulanarak (4.2.4.1), (4.2.4.2) probleminin çözümü

$$y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)\,f(x,\lambda) \tag{4.2.4.3}$$

biçiminde bulunulması isteniyor, burada $f(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)$ (4.2.4.2)'e uygun homojen denklemin çözümleridir.

$$y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)\,f(x,\lambda)$$

ve

$$y'(x,\lambda)=c_1'(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda)+c_1(x,\lambda)\,\varphi'(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)\,f(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)\,f'(x,\lambda)$$

eşitlikleri (4.2.4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$c_1'(\lambda,x)\,B\varphi(x,\lambda)+c_2'(\lambda,x)\,Bf(x,\lambda)+c_1(\lambda,x)\left[B\varphi'(x,\lambda)+\Omega(x)\,\varphi(x,\lambda)\right]$$

$$+c_2(\lambda,x)\left[Bf'(x,\lambda)+\Omega(x)\,f(x,\lambda)\right]=c_1(\lambda,x)\,\lambda\rho(x)\,\varphi(x,\lambda)$$

$$+c_2(\lambda,x)\,\lambda\rho(x)\,f(x,\lambda)+f(x)\,\rho(x)$$

bulunur. Buradan

$$c_1'(\lambda,x)\,B\varphi(x,\lambda)+c_2'(\lambda,x)\,Bf(x,\lambda)=f(x)\,\rho(x) \tag{4.2.4.4}$$

sonucu ortaya çıkar. (4.2.2.4) eşitliği soldan $\widetilde{f}(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1'(\lambda,x)W[f,\varphi]+c_2'(\lambda,x)W[f,f]=\widetilde{f}(x,\lambda)\,f(x)\,\rho(x)$$

$$c_1'(\lambda,x)\,\widetilde{f}(x,\lambda)\,B\varphi(x,\lambda)=\widetilde{f}(x,\lambda)\,f(x)\,\rho(x) \tag{4.2.4.5}$$

elde edilir. Burada çözümün $L_2\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$' den olması için $c_1(\lambda,\infty)=0$ olması gerekir. (4.2.4.5) $(x,\infty)$ aralığında integrallenerek

$$\int_x^\infty c_1'(\lambda,t)\,dt=\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \widetilde{f}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt$$

$$c_1(\lambda,x)=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \widetilde{f}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt+c_1^*$$

ifadesi bulunur. $x\to\infty$ iken

$$c_1(\lambda,\infty)=-\frac{1}{E(\lambda)}.0+c_1^* \qquad \Rightarrow \qquad c_1^*=0$$

olur. O halde

$$c_1(\lambda,x)=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \widetilde{f}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt \tag{4.2.4.6}$$

biçimindedir. Benzer şekilde (4.2.4.4) eşitliği soldan $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1'(\lambda,x)W[\varphi,\varphi]+c_2'(\lambda,x)W[\varphi,f]=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,f(x)\,\rho(x),$$

$$c_2'(\lambda,x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,Bf(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,f(x)\,\rho(x) \tag{4.2.4.7}$$

elde edilir. (4.2.4.7) eşitliği ise $(0,x)$ aralığında integrallenerek

$$c_2(\lambda,x)-c_2(\lambda,0)=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \widetilde{\varphi}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt+c_2^*$$

sonucunu verir. $x=0$ olduğunda $c_2^*=0$ olur. Böylece

$$c_2(\lambda,x)=c_2(\lambda,0)-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \widetilde{\varphi}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt \tag{4.2.4.8}$$

formuna sahip olduğu elde edilir. (4.2.4.6), (4.2.4.8) ve (4.2.4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
y(\lambda,x)&=\varphi(x,\lambda)\left(-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \widetilde{f}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt\right)\\
&\qquad+f(x,\lambda)\left(c_2(\lambda,0)-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \widetilde{\varphi}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt\right)\\
&=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \varphi(x,\lambda)\,\widetilde{f}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt\\
&\qquad-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x f(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt+c_2(\lambda,0)\,f(x,\lambda)
\end{aligned}$$

$$=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\,f(t)\,\rho(t)\,dt+c_2(\lambda,0)\,f(x,\lambda)$$

ifadesi bulunur. Burada $R_\lambda(x,t)$ çekirdek fonksiyonu

$$R_\lambda(x,t)=-\frac{1}{E(\lambda)}\begin{cases}\varphi(x,\lambda)\,\tilde{f}(t,\lambda), & x\le t<\infty\\ f(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}(t,\lambda), & 0\le t<x\end{cases}\tag{4.2.4.9}$$

ile ifade edilir. $c_2(\lambda,0)$'n ifadesini bulmak için (4.2.4.2) koşulunu kullanmak gerekir. $y(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.2.4.2) koşulunu sağladığı için

$$y_1(0,\lambda)=c_1(\lambda,0)\,\varphi_1(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)\,f_1(0,\lambda)$$

$$y_2(0,\lambda)=c_1(\lambda,0)\,\varphi_2(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)\,f_2(0,\lambda)$$

ifadeleri (4.2.4.2) de yerine yazılırsa

$$c_1(\lambda,0)\,\varphi_1(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)\,f_1(0,\lambda)-h\left[c_1(\lambda,0)\,\varphi_2(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)\,f_2(0,\lambda)\right]=0$$

olur ve böylece

$$c_1(\lambda,0)\left[\varphi_1(0,\lambda)-h\varphi_2(0,\lambda)\right]+c_2(\lambda,0)\left[f_1(0,\lambda)-hf_2(0,\lambda)\right]=0$$

ifadesinden

$$c_2(\lambda,0)\left[f_1(0,\lambda)-hf_1(0,\lambda)\right]=0$$

$$c_2(\lambda,0)=0$$

sonucu elde edilir. Buradan $y(x,\lambda)$ fonksiyonunun

$$(L-\lambda I)^{-1}=y(\lambda,x)=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\,f(t)\,\rho(t)\,dt$$

formunda olduğu bulunur. Lemma ispatlanır. ■

**Lemma 4.2.4.2.** $f(t)$ sonlu vektör fonksiyon ve $f(t)\in D(L)$ olsun. O halde

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\,f(t)\,\rho(t)\,dt=-\frac{f(x)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\big(hf_2(0)-f_1(0)\big)+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\,g(t)\,dt$$

formuna sahiptir. Burada

$$g(x)=Bf'(x)+\Omega(x)\,f(x)$$

biçimindedir.

*İspat.*

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)dt=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\lambda)f(t)\rho(t)dt-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(t,\lambda)f(t)\rho(t)dt$$

eşitliğinde

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{\varphi}(x,\lambda)B+\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\Omega(x)\right\}$$

$$\widetilde{f}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{f}(x,\lambda)B+\widetilde{f}(x,\lambda)\Omega(x)\right\}$$

ifadeleri yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)dt\\
&=-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x\frac{1}{\lambda\rho(t)}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\varphi}(t,\lambda)B+\widetilde{\varphi}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}f(t)\rho(t)dt\\
&\quad-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty\frac{1}{\lambda\rho(t)}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{f}(t,\lambda)B+\widetilde{f}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}f(t)\rho(t)dt\\
&=-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\varphi}(t,\lambda)B\right\}f(t)dt\\
&\quad-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{f}(t,\lambda)B\right\}f(t)dt\\
&\quad-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x\frac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}(t,\lambda)\Omega(t)f(t)dt\\
&\quad-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty\frac{1}{\lambda}\widetilde{f}(t,\lambda)\Omega(t)f(t)dt
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Kısmi integralleme ile

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)dt$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}(t,\lambda)\{Bf'(t)+\Omega(t)f(t)\}dt$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda}\widetilde{f}(t,\lambda)\{Bf'(t)+\Omega(t)f(t)\}dt$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}(t,\lambda)g(t)dt-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda}\widetilde{f}(t,\lambda)g(t)dt$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)dt \tag{4.2.4.10}$$

bulunur. İspatı bitirmek için

$$\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

ifadesinin biçimini belirlemek gerekir.

$$\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)Bf(x)-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(0,\lambda)Bf(0)$$

$$+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(\infty,\lambda)Bf(\infty)-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(x,\lambda)Bf(x)$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Big[f(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\widetilde{f}(x,\lambda)\Big]Bf(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\big(\varphi_1(0,\lambda),\varphi_2(0,\lambda)\big)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(0)\\ f_2(0)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\begin{pmatrix}\begin{array}{l}-f_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)\\ +f_2(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)\end{array} & 0\\ 0 & \begin{array}{l}-f_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)\\ +f_2(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)\end{array}\end{pmatrix}f(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)} f(x,\lambda)\left(-\varphi_2(0,\lambda) f_1(0)+\varphi_1(0,\lambda) f_2(0)\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\left(-E(\lambda)\right) f(x)-\frac{1}{\lambda E(\lambda)} f(x,\lambda)\left(hf_2(0)-f_1(0)\right)$$

sonucu çıkar. Bu sonuç (4.2.4.10) da yerine yazılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) f(t)\rho(t)\,dt=-\frac{f(x)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda E(\lambda)} f(x,\lambda)\left(hf_2(0)-f_1(0)\right)+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t) g(t)\,dt$$

elde edilir. ■

**Lemma 4.2.4.3.** $f(t)$ sonlu vektör fonksiyon ve $f(t)\in D(L)$ olsun. $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ ve $|\lambda|\to\infty$ iken

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) f(t)\rho(t)\,dt=-\frac{f(x)}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (4.2.4.11)$$

sağlanır.

*İspat.* $f(x,\lambda)$ çözümünün ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun özelliğinden $|\lambda|\to\infty$ iken $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ için

$$f(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda x}\left[1+O(1)\right]$$

olur. Ayrıca $x$ sınırlı bölgede değişirse $|\lambda|\to\infty$ iken

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}(ih-1)\sin\lambda x\\(1-ih)\cos\lambda x\end{pmatrix}\left[1+O(1)\right]$$

biçimine sahiptir. $g(t)$ finit vektör fonksiyon olduğundan yukarıdaki formülden $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ ve $|\lambda|\to\infty$ iken

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) g(t)\,dt=O(1)$$

olur. Bu ifade kullanılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) f(t)\,dt=-\frac{f(x)}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

olduğu elde edilir.

Bu lemmalar yardımıyla (4.2.1.1)-(4.2.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülü elde edilecektir.

(4.2.4.11)'in her iki tarafı $\frac{1}{2\pi i}$ ile çarpılıp merkezi $0$'da yarıçapı $R$ olan $\Gamma_R$ çemberi boyunca $\lambda$'ya göre integrallenirse

$$-f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} O\left(\frac{1}{\lambda}\right)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda \qquad (4.2.4.12)$$

olur. $R_\lambda(x,t)$ üst ve alt düzlemlerde analitik fonksiyondur. Buna göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda=I_r^1+I_r^2+I_r^3$$

yazılır. Burada

$$I_R^1=\frac{1}{2\pi i}\int_{-R-i\delta}^{R-i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda$$

$$I_R^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{R+i\delta}^{-R+i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda$$

ve

$$I_R^3=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{R-i\delta}^{R+i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda+\int_{-R+i\delta}^{-R-i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda\right\}$$

formundadır ve $\delta$ pozitif sayıdır. $R\to\infty$ iken $I_R^3\to 0$ ve (4.2.4.11) den

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^\infty R_{\lambda\pm i\delta}(x,t)f(t)\rho(t)\,dt=\int_0^\infty R_{\lambda\pm i0}(x,t)f(t)\rho(t)\,dt.$$

(4.2.4.12) de $R\to\infty$ iken limite geçilirse

$$f(x)=-\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda=-\lim_{r\to\infty}\left\{I_r^1+I_r^2+I_r^3\right\}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^\infty\left[R_{\lambda-i0}(x,t)-R_{\lambda+i0}(x,t)\right]f(t)\rho(t)\,dt$$

olur. İspata devam etmek için $R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)$'ın hesaplanması gerekir. $\psi(x,\lambda)$ (4.2.4.1) denkleminin $\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. O halde $f(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının lineer birleşimi şeklinde ifade edilebilir. Böylece

$$f(x,\lambda)=f_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)-E(\lambda)\psi(x,\lambda) \qquad (4.2.4.13)$$

yazılır, burada $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ $\lambda$'ya bağlı tam vektör fonksiyondur. (4.2.4.9) ve (4.2.4.13) ifadelerinden

$$-\int_0^\infty \left[R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)\right]f(t)\rho(t)\,dt=-\int_0^\infty\left[R_{\lambda+i0}(x,t)-\overline{R_{\lambda+i0}(x,t)}\right]f(t)\rho(t)\,dt$$

$$=\int_0^x\left[\frac{f(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\left[\overline{\frac{f(x,\lambda)}{E(\lambda)}}\right]\right]\tilde{\varphi}(t,\lambda)f(t)\rho(t)\,dt$$

$$+\int_x^\infty\varphi(x,\lambda)\left[\frac{\tilde{f}(t,\lambda)}{E(\lambda)}-\overline{\frac{\tilde{f}(t,\lambda)}{E(\lambda)}}\right]f(t)\rho(t)\,dt$$

sonucu çıkar. Diğer taraftan

$$\frac{f(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\overline{\left[\frac{f(x,\lambda)}{E(\lambda)}\right]}$$

$$=\frac{f_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)-E(\lambda)\psi(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\frac{\overline{f_2(0,\lambda)}\,\overline{\varphi(x,\lambda)}-\overline{E(\lambda)}\,\overline{\psi(x,\lambda)}}{\overline{E(\lambda)}}$$

$$=\left(\frac{f_2(0,\lambda)}{E(\lambda)}-\frac{\overline{f_2(0,\lambda)}}{\overline{E(\lambda)}}\right)\varphi(x,\lambda)=\frac{f_2(0,\lambda)\,\overline{f_1(0,\lambda)}-f_1(0,\lambda)\,\overline{f_2(0,\lambda)}}{|E(\lambda)|^2}\varphi(x,\lambda)$$

$$=\frac{-2i}{|E(\lambda)|^2}\varphi(x,\lambda)$$

bulunur.

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)\right]f(t)\rho(t)\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)}{|E(\lambda)|^2}f(t)\rho(t)\,dt$$

olur. Böylece $L$ operatörünün özfonsiyonlarına göre ayrışım aşağıdaki formda elde edilir:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^\infty\frac{\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)}{|E(\lambda)|^2}f(t)\rho(t)\,dt\ .\blacksquare$$

### 4.2.5. $S(\lambda)$ Fonksiyonunun Sürekliliği ve Levinson Formülü

**Lemma 4.2.5.1.** $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonu tüm eksende süreklidir.

*İspat.* Lemmanın ispatı $S(\lambda)$'ın biçiminden ve $E(\lambda)$ fonksiyonunun özelliğinden elde edilir. $S(\lambda)-S_0(\lambda)$ fonksiyonu $-\infty<\lambda<+\infty$ reel eksende süreklidir ve $S(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından $|\lambda|\to\infty$ iken $S(\lambda)-S_0(\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ asimptotik ifadesi sağlandığı elde edildi. Böylece $S(\lambda)-S_0(\lambda)$ fonksiyonu $+\infty(-\infty)$' un komşuluğunda karesi ile integrallenebilirdir ve $L_2(-\infty,+\infty)$'dan olan bir fonksiyonun Fourier dönüşümüdür. ■

**Lemma 4.2.5.2.** $S(\lambda)$ fonksiyonun argüment değişimi için

$$\left[\arg S(\lambda)-\arg S_0(\lambda)\right]\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$$

sağlanır.

*İspat.* Bunu göstermek için $E(\lambda)$ fonksiyonuna argüment prensibi uygulanır. Bu fonksiyon üst düzlemde analitiktir ve kapalı üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda\geq 0)$ süreklidir. $\lambda$, $-\infty$'dan $\infty$'a değişirken $E(\lambda)$ fonksiyonunun argüment artışı sıfıra eşittir:

$$\arg E(+\infty)-\arg E(-\infty)=2\pi(N-P)$$

burada $N$, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı $P$ ise kutuplarının sayısıdır. $N=P=0$ ve

$$\ln S(\lambda)=-2i\arg E(\lambda)$$

olduğundan

$$\ln S(+\infty)-\ln S(-\infty)=-2i\left\{\arg E(+\infty)-\arg E(-\infty)\right\}=0$$

elde edilir. ■

$$\ln S(+\infty)-\ln S(-\infty)=0$$

bağıntısına *Levinson formülü* denir.

### 4.2.6. Temel Denklemin Elde Edilmesi

Bu bölümde (4.2.1.1) denkleminin (4.2.1.5) çözümündeki matris çekirdek $K(x,t)$ çözümü için integral denklem elde edilecektir. Bu denklemin ters problemin çözümünde önemli rolü vardır.

Lemma 4.2.2.1 deki (4.2.2.3) eşitliği göz önüne alınır. $f(x,\lambda)$ vektör fonksiyonunun (4.2.1.5) ifadesi (4.2.2.3) de yerine yazılırsa

$$2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}=\overline{f(x,\lambda)}-S(\lambda)f(x,\lambda)+S_0(\lambda)f(x,\lambda)-S_0(\lambda)f(x,\lambda)$$

$$=\overline{f(x,\lambda)}-S_0(\lambda)f(x,\lambda)+\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]f(x,\lambda)$$

$$=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-i\lambda\mu(x)}+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-i\lambda t}dt-S_0(\lambda)\left[\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i\lambda t}dt\right]$$

$$+\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\left[\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i\lambda t}dt\right]$$

bulunur. Buradan

$$2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}+S_0(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}-\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-i\lambda\mu(x)}$$

$$=\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-i\lambda t}dt-S_0(\lambda)\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i\lambda t}dt$$

$$+\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}+\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i\lambda t}dt$$

olduğu elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı $\frac{1}{2\pi}(1,-i)e^{i\lambda y}$ ile çarpılıp $\lambda$'ya göre $-\infty$'dan $\infty$'a kadar integrallenirse

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}+S_0(\lambda)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}-\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-i\lambda\mu(x)}\right](1,-i)\,e^{i\lambda y}d\lambda$$

$$=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}(1,-i)\,e^{-i\lambda(t-y)}dtd\lambda$$

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_0(\lambda)\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)\,e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda$$

$$+\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)\,e^{i\lambda(\mu(x)+y)}d\lambda$$

$$+\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)\,e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda \qquad (4.2.6.1)$$

olur, burada

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}(1,-i)\,e^{-i\lambda(t-y)}d\lambda=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}e^{-i\lambda(t-y)}d\lambda=\delta(t-y)\,E_2\equiv\delta_2(t-y),$$

$$E_2=\mathrm{Re}\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ve $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonudur. Böylece

$$\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\,\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}(1,-i)\,e^{-i\lambda(t-y)}d\lambda dt=\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\,\delta_2(t-y)\,dt=K(x,y)$$

bulunur.

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_0(\lambda)e^{i\lambda(t+y)}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\lambda a(1-\alpha)}\frac{1-ih}{1+ih}e^{i\lambda(t+y)}d\lambda=\frac{1-ih}{1+ih}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda(2a(1-\alpha)-t-y)}d\lambda$$

$$=\frac{1-ih}{1+ih}\delta\left(2a(1-\alpha)-t-y\right)$$

ve $y>\mu(x)$ için $K\left(x,y-2a(1-\alpha)\right)=0$ olduğundan

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_0(\lambda)\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)\,e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda$$

$$=\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\,\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_0(\lambda)\begin{pmatrix}1&-i\\-i&-1\end{pmatrix}e^{i\lambda(t+y)}d\lambda dt$$

$$=\int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)\frac{1-ih}{1+ih}\delta\left(2a(1-\alpha)-t-y\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}dt$$

$$=\frac{1-ih}{1+ih}K\left(x,y-2a(1-\alpha)\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=0,\qquad y>\mu(x)$$

elde edilir.

Elde edilen bu değerler (4.2.6.1)'in sağ tarafında yerine yazılırsa

$$K(x,y)+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}(1,-i)e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda$$

$$+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}(1,-i)e^{i\lambda(\mu(x)+y)}d\lambda$$

$$=K(x,y)+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)F(t+y)dt+F\left(\mu(x)+y\right)$$

olur, burada

$$F(x)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & -1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}d\lambda \tag{4.2.6.2}$$

ile tanımlanır. O halde (4.2.6.1)'in sağ tarafı $y>\mu(x)$ için

$$K(x,y)+F\left(\mu(x)+y\right)+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)F(t+y)dt$$

formuna sahip olduğu elde edilir.

Ayrıca (4.2.6.1)'in sol tarafı analitik olduğundan sıfıra eşit olduğu bulunur. Dolayısıyla $y>\mu(x)$ için

$$K(x,y)+F\left(\mu(x)+y\right)+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)F(t+y)dt=0 \tag{4.2.6.3}$$

sonucuna ulaşılır ve burada $F(x)$ fonksiyonu (4.2.6.2) formülü ile tanımlıdır.

O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 4.2.6.1.** Her $x\geq 0$ için (4.2.1.5) özel çözümün çekirdeği $K(x,y)$ (4.2.6.3) integral denklemi sağlar.

**Tanım 4.2.6.2.** (4.2.6.3) integral denklemine (4.2.1.1)-(4.2.1.2) sınır değer probleminin *temel denklemi* denir.

### 4.2.7. Temel Denklemin Çözülebilirliği ve Ters Problemin Çözümünün Tekliği

(4.2.6.3) integral denklem kompakt operatörlerle üretilir ve onun tek türlü çözülebilirliğini göstermek için Fredholm alternatifi kullanılır.

**Teorem 4.2.7.1.** Her bir sabitleştirilmiş $x \geq 0$ için (4.2.6.3) temel denklemin elemanları $L_2\left(\mu(x), \infty\right)$ da olan tek bir vektör çözümü vardır.

*İspat.* [5] de Lemma 3.3.1 den temel denklemin kompakt operatörlerle elde edildiği çıkar. Homojen denklem

$$\begin{pmatrix} K_{11}(x,y) & K_{12}(x,y) \\ K_{21}(x,y) & K_{22}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$+\int_{\mu(x)}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_0(\lambda) - S(\lambda)\right) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} e^{i\lambda(t+y)} d\lambda dt \qquad (4.2.7.1)$$

$$+\int_{\mu(x)}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{S_0(\lambda) - S(\lambda)}\right) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda(t+y)} d\lambda dt = 0$$

formunda yeniden yazılır. Buradan

$$K_{11}(x,y) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mu(x)}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{K_{11}(x,t) - iK_{12}(x,t)\right\} \left(S_0(\lambda) - S(\lambda)\right) e^{i\lambda(t+y)} d\lambda dt$$

$$+\frac{1}{4\pi} \int_{\mu(x)}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{S_0(\lambda) - S(\lambda)}\right) \left\{K_{11}(x,t) + iK_{12}(x,t)\right\} e^{-i\lambda(t+y)} d\lambda dt = 0$$

ve

$$K_{12}(x,y) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mu(x)}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{-iK_{11}(x,t) - K_{12}(x,t)\right\} \left(S_0(\lambda) - S(\lambda)\right) e^{i\lambda(t+y)} d\lambda dt$$

$$+\frac{1}{4\pi} \int_{\mu(x)}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{S_0(\lambda) - S(\lambda)}\right) \left\{iK_{11}(x,t) - K_{12}(x,t)\right\} e^{-i\lambda(t+y)} d\lambda dt = 0$$

olduğu elde edilir. İkinci denklem $-i$ ile çarpılıp birinci denklem ile toplanırsa

$$K_{11}(x,y)-iK_{12}(x,y)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mu(x)}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\overline{S_0(\lambda)}-\overline{S(\lambda)}\right)\left\{K_{11}(x,t)+iK_{12}(x,t)\right\}e^{-i\lambda(t+y)}d\lambda dt=0 \tag{4.2.7.2}$$

elde edilir.

$$g(y):=K_{11}(x,y)-iK_{12}(x,y)$$

$$F_s(z):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0(\lambda)-S(\lambda)\right)e^{i\lambda z}d\lambda$$

tanımlansın.

Böylece denklem

$$\overline{g(y)}+\int_{\mu(x)}^{\infty}g(t)F_s(t+y)dt=0 \tag{4.2.7.3}$$

biçimine dönüşür. Bu denklemin sadece sıfır çözümü olduğunu göstermek gerekiyor. Bunun için aksi varsayılsın. O halde (4.2.7.3) denkleminin sıfırdan farklı $g(y)$ çözümü vardır. (4.2.7.3) denklemi $\overline{g(y)}$ ile çarpılarak ve $-\infty$'dan $\infty$'a kadar $y$'e göre integrallenerek

$$\left(\overline{g(y)},\overline{g(y)}\right)+\left(\int_{\mu(x)}^{\infty}g(t)F_s(t+y)dt,\overline{g(y)}\right)=0$$

veya

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{\overline{g(\lambda)}}\right|^2 d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{g(-\lambda)}\left(S_0(\lambda)-S(\lambda)\right)\widetilde{g(\lambda)}d\lambda=0$$

elde edilir. $\widetilde{g(\lambda)}$, $y<\mu(x)$ için sıfır olan $g(y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olduğundan, $g(-\lambda)e^{-2i\lambda\mu(0)}$ de $y>\mu(x)$ olduğunda sıfır olan $g\left(-y+2\mu(0)\right)$ fonsiyonunun Fourier dönüşümüdür. Böylece

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\lambda\mu(0)}\widetilde{g(-\lambda)}\widetilde{g(\lambda)}d\lambda=\int_{\mu(x)}^{\infty}g\left(-y+2\mu(0)\right)g(y)dy=0$$

sağlanır ve

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{\overline{g(\lambda)}}\right|^2 d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{g(-\lambda)}S_0(\lambda)\widetilde{g(\lambda)}d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{g(-\lambda)}S(\lambda)\widetilde{g(\lambda)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{\overline{g(\lambda)}}\right|^2 d\lambda+\frac{1-ih}{1+ih}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{g(-\lambda)}e^{-2i\lambda\mu(0)}\widetilde{g(\lambda)}d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{g(-\lambda)}S(\lambda)\widetilde{g(\lambda)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{\overline{g(\lambda)}}\right|^2 d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{g(-\lambda)}S(\lambda)\widetilde{g(\lambda)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\widetilde{g(-\lambda)}}\widetilde{g(-\lambda)}d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{g(-\lambda)}S(\lambda)\widetilde{g(\lambda)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\overline{\widetilde{g(-\lambda)}}-S(\lambda)\widetilde{g(\lambda)}\right\}\widetilde{g(-\lambda)}d\lambda=0$$

bulunur. Bu da $z(\lambda)=\overline{\widetilde{g(-\lambda)}}-S(\lambda)\widetilde{g(\lambda)}$ fonksiyonunun $L_2(-\infty,\infty)$'da $\overline{\widetilde{g(-\lambda)}}$ fonksiyonuna ortogonal olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\left\|\widetilde{g(-\lambda)}\right\|^2=\left\|S(\lambda)\widetilde{g(\lambda)}\right\|^2=\left\|\widetilde{g(-\lambda)}-z(\lambda)\right\|^2=\left\|\widetilde{g(-\lambda)}\right\|^2+\left\|z(\lambda)\right\|^2$$

sağlanır. Bu ise ancak ve ancak $z(\lambda)=0$ olduğu durumda mümkündür. Böylece

$$\frac{\overline{\widetilde{g(-\lambda)}}}{\overline{f_1(0,\lambda)}-h\overline{f_2(0,\lambda)}}=\frac{\widetilde{g(\lambda)}}{f_1(0,\lambda)-hf_2(0,\lambda)}$$

olduğu elde edilir.

$$z_1(\lambda):=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\overline{\widetilde{g(-\lambda)}}}{\overline{f_1(0,\lambda)}-h\overline{f_2(0,\lambda)}},\ \operatorname{Im}\lambda\geq 0\\[2ex] \dfrac{\widetilde{g(\lambda)}}{f_1(0,\lambda)-hf_2(0,\lambda)},\ \operatorname{Im}\lambda\leq 0\end{array}\right\}$$

tanımlansın. Bu formül $z_1(\lambda)$ fonksiyonunun üst ve alt düzlemde regüler olduğunu gösterir. O halde $z_1(\lambda)$ tam fonksiyondur ve $\lambda\to\infty$ iken sıfıra gider. Böylece $\widetilde{g(\lambda)}=0$ ve buradan $g(t)\equiv 0$ sonucu çıkar. Böylece (4.2.7.3) homojen denkleminin bundan dolayı da (4.2.7.1) denkleminin sadece sıfır çözümü vardır. Bu ise (4.2.6.3.) integral denklemin tek türlü çözülebilir olduğunu gösteriyor. O halde teorem ispatlanmış olur. ■

**Teorem 4.2.7.2.** Saçılma fonksiyonu ile (4.2.1.1)-(4.2.1.2) sınır değer problemi tek türlü belirlenir.

*İspat.* Açıktır ki temel denklemi inşa etmek için $F(x)$ fonksiyonunu bulmak yeterlidir ve sırasıyla $F(x)$'i bulmak için de $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonunu bilmek yeterlidir. $F(x)$'i bularak bilinmeyen $K(x,t)$'e göre (4.2.6.3) temel denklemi yazılır. Teorem 4.2.7.1 den saçılma fonksiyonuna göre inşa edilmiş (4.2.6.3) temel denklemin tek bir $K(x,y)$ çözümü olduğu görülür. O zaman (4.2.1.1) denklemindeki $\Omega(x)$ matris fonksiyonu (4.2.1.7) formülü ile tek türlü bulunur. Verilen algoritmaya göre (4.1.1.1) denklemi inşa edilir. Teorem ispatlanır. ■

## 4.3. SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN BİR SINIF SÜREKSİZ KATSAYILI DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ

### 4.3.1. Probleme Giriş

Bu bölümde sınır koşulu spektral parametre içeren süreksiz katsayılı bir sınıf Dirac denklemler sistemi için ters problem ele alınacaktır.

Süreksiz katsayılı

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\lambda\rho(x)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad 0\le x<\infty \tag{4.3.1.1}$$

Dirac denklemler sistemi ve

$$y_1(0)+\lambda y_2(0)=0 \tag{4.3.1.2}$$

sınır koşulu üretilen sınır değer problemi ele alınır. Burada $\lambda$ spektral parametre, $\rho(x)$ bir önceki bölümde (4.2.1.3) formülü ile tanımlanmış süreksiz fonksiyondur, $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır. $\Omega(x)$

$$\Omega(x):=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan 2 boyutlu matris fonksiyon olsun ve Öklid normuna göre

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\|\,dx<\infty \tag{4.3.1.4}$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. O zaman $\operatorname{Im}\lambda\ge 0$ için (4.3.1.1) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} f(x,\lambda)e^{-i\lambda x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan

$$f(x,\lambda)=f^0(x,\lambda)+\int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{i\lambda t}dt \tag{4.3.1.5}$$

formunda tek bir çözümü vardır. Kolayca gösterilir ki $\Omega(x)\equiv 0$ olduğunda (4.3.1.1) denkleminin bu koşulu sağlayan çözümü

$$f^{0}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}$$

biçimindedir. Burada

$$\mu(x)=\begin{cases}\alpha(x-a)+a, & 0\le x\le a\\ x, & x>a\end{cases}.$$

Üstelik $K(x,t)$ matris fonksiyonunun bileşenleri pozitif yarım eksende toplanabilirdir ve $K(x,t)$ Öklid normuna göre

$$\int_{\mu(x)}^{\infty}\left\|K(x,t)\right\|dt\le e^{\sigma(x)}-1$$

eşitsizliğini sağlar, burada $\sigma(x)=\int_{x}^{\infty}\left\|\Omega(t)\right\|dt$.

Ayrıca $\Omega(x)$ mutlak sürekli ise

$$BK_x(x,t)+\Omega(x)K(x,t)+\rho(x)K_t(x,t)B=0 \qquad (4.3.1.6)$$

$$\rho(x)\{BK(x,\mu(x))-K(x,\mu(x))\}=\Omega(x) \qquad (4.3.1.7)$$

bağıntıları sağlanır[11].

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli fonksiyonlar olduğundan reel $\lambda$'lar için $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.3.1.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur. Bu fonksiyonların Wronskianı $x$'e bağlı değildir ve $2i$'ye eşittir.

Tezin bu bölümünde de bir önceki bölümde olduğu gibi süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi için saçılma teorisinin ters problemi incelenecektir. Ama burada incelenen problemde sınır koşulu spektral parametre içermektedir. Bu yüzden problemde rezolvent operatör inşa edilirken ve ayrışım formülü bulunurken $H_\rho=L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)\times\mathbb{C}$ biçiminde üç bileşenli vektörlerden oluşan Hilbert uzayları oluşturulacak ve incelemeler bu uzayda yapılacaktır. Önceki bölüme benzer yöntemler ve aşamalar kullanılarak ters problemin çözümü incelenecektir.

### 4.3.2. Özel Çözüm ve Saçılma Fonksiyonu

$\varphi(x,\lambda)$ ile (4.3.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = -\lambda, \qquad \varphi_2(0,\lambda) = 1 \tag{4.3.2.1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin ve

$$E(\lambda) := f_1(0,\lambda) + \lambda f_2(0,\lambda) \tag{4.3.2.2}$$

fonksiyonu tanımlansın.

Aşağıdaki lemma sağlanır.

**Lemma 4.3.2.1.** Reel $\lambda$'lar için

$$2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda) f(x,\lambda) \tag{4.3.2.3}$$

özdeşliği sağlanır, burada

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f_1(0,\lambda)} + \lambda\overline{f_2(0,\lambda)}}{f_1(0,\lambda) + \lambda f_2(0,\lambda)} \tag{4.3.2.4}$$

ve bu fonksiyon için

$$S(\lambda) = \left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$$

ve

$$|S(\lambda)| = 1$$

bağıntıları sağlanır.

*İspat*. $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ pozitif yarım eksende reel $\lambda$ lar için (4.3.1.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturduğundan $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\lambda) = c_1(\lambda) f(x,\lambda) + c_2(\lambda)\overline{f(x,\lambda)} \tag{4.3.2.5}$$

biçiminde yazılır, burada $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ $\lambda$'ya bağlı bulunması gereken fonksiyonlardır.

$$W\left[f(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\right]=f_1(0,\lambda)\varphi_2(0,\lambda)-f_2(0,\lambda)\varphi_1(0,\lambda)=f_1(0,\lambda)+\lambda f_2(0,\lambda)$$

$$W\left[\overline{f(x,\lambda)},\varphi(x,\lambda)\right]=\overline{f_1(0,\lambda)}\varphi_2(0,\lambda)-\overline{f_2(0,\lambda)}\varphi_1(0,\lambda)=\overline{f_1(0,\lambda)}+\lambda\overline{f_2(0,\lambda)}$$

bağıntıları yardımıyla

$$c_1(\lambda)=-\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}+\lambda\overline{f_2(0,\lambda)}}{2i},\quad c_2(\lambda)=\frac{f_1(0,\lambda)+\lambda f_2(0,\lambda)}{2i}$$

bulunur. Bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\varphi(x,\lambda)=-\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}+\lambda\overline{f_2(0,\lambda)}}{2i}f(x,\lambda)+\frac{f_1(0,\lambda)+\lambda f_2(0,\lambda)}{2i}\overline{f(x,\lambda)} \tag{4.3.2.6}$$

elde edilir.

Diğer taraftan reel $\lambda$'lar için $E(\lambda)\neq 0$ olup olmadığını incelemek gerekir. Aksi kabul edilsin. O zaman en az bir $\lambda_0$ sayısı vardır öyle ki

$$f_1(0,\lambda_0)=-\lambda_0 f_2(0,\lambda_0) \tag{4.3.2.7}$$

sağlanır. Ayrıca

$$W\left[f(0,\lambda_0),\overline{f(0,\lambda_0)}\right]=2i$$

olduğundan

$$f_1(0,\lambda_0)\overline{f_2(0,\lambda_0)}-f_2(0,\lambda_0)\overline{f_1(0,\lambda_0)}=2i \tag{4.3.2.8}$$

bağıntısı sağlanır. (4.3.2.7) deki $f_1(0,\lambda_0)$ ve $\overline{f_1(0,\lambda_0)}$ ifadeleri (4.3.2.8) de yerine yazılırsa

$$0=2i$$

bulunur ve çelişki elde edilir. O halde reel $\lambda$'lar için $E(\lambda)\neq 0$ dır.

Böylece (4.3.2.6)'nın her iki tarafı $\frac{1}{2i}E(\lambda)$' ya bölünerek istenilen (4.3.2.3) bağıntısı elde edilir ve burada

$$S(\lambda)=\frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)}=\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}+\lambda\overline{f_2(0,\lambda)}}{f_1(0,\lambda)+\lambda f_2(0,\lambda)}$$

biçimine sahiptir. $S(\lambda)$ fonksiyonunun biçiminden

$$\overline{S(\lambda)} = \overline{\left( \frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)} \right)} = \frac{E(\lambda)}{\overline{E(\lambda)}} = \left[ S(\lambda) \right]^{-1}$$

yani

$$S(\lambda) = \left[ \overline{S(\lambda)} \right]^{-1}$$

ve

$$\left| S(\lambda) \right| = \left| \frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)} \right| = 1$$

elde edilir. Böylece lemma ispatlanır. ■

**Tanım 4.3.2.2.** (4.3.2.4) ile tanımlı $S(\lambda)$ fonksiyonuna (4.3.1.1)-(4.3.1.2) sınır değer probleminin *saçılma fonksiyonu* denir.

$S(\lambda)$ fonksiyonunun (4.3.2.4) ifadesinden aşağıdaki lemma ispatlanır.

**Lemma 4.3.2.3.** $|\lambda| \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik ifade sağlanır:

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) + O\left( \frac{1}{\lambda} \right) \tag{4.3.2.9}$$

burada

$$S_0(\lambda) = -e^{-2i\lambda a(1-\alpha)}.$$

*İspat.* $E(\lambda)$'ın tanımında (4.3.1.5) yerine yazılırsa

$$E(\lambda) = e^{i\lambda a(1-\alpha)} + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left( K_{11}(0,t) - iK_{12}(0,t) \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$+\lambda \left\{ -ie^{i\lambda a(1-\alpha)} + \int_{a(1-\alpha)}^{\infty} \left( K_{21}(0,t) - iK_{22}(0,t) \right) e^{i\lambda t} dt \right\}$$

elde edilir. (4.3.2.4) göz önünde bulundurularak ve $K_{ij}(x,t)$ $i, j = 1, 2$ özelliklerinden

$$S(\lambda)=\frac{e^{-i\lambda a(1-\alpha)}+\int\limits_{a(1-\alpha)}^{\infty}\left(K_{11}(0,t)+iK_{12}(0,t)\right)e^{-i\lambda t}dt}{e^{i\lambda a(1-\alpha)}+\int\limits_{a(1-\alpha)}^{\infty}\left(K_{11}(0,t)-iK_{12}(0,t)\right)e^{i\lambda t}dt}$$

$$\frac{+\lambda\left\{ie^{-i\lambda a(1-\alpha)}+\int\limits_{a(1-\alpha)}^{\infty}\left(K_{21}(0,t)+iK_{22}(0,t)\right)e^{-i\lambda t}dt\right\}}{+\lambda\left\{-ie^{i\lambda a(1-\alpha)}+\int\limits_{a(1-\alpha)}^{\infty}\left(K_{21}(0,t)-iK_{22}(0,t)\right)e^{i\lambda t}dt\right\}}$$

$$=-e^{-2i\lambda a(1-\alpha)}\frac{i+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{a(1-\alpha)}^{\infty}\left(K_{11}(0,t)+iK_{12}(0,t)\right)e^{-i\lambda(t+a(1-\alpha))}dt}{i-\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int\limits_{a(1-\alpha)}^{\infty}\left(K_{11}(0,t)-iK_{12}(0,t)\right)e^{i\lambda(t+a(1-\alpha))}dt}$$

$$\frac{+\int\limits_{a(1-\alpha)}^{\infty}\left(K_{21}(0,t)+iK_{22}(0,t)\right)e^{-i\lambda(t+a(1-\alpha))}dt}{-\int\limits_{a(1-\alpha)}^{\infty}\left(K_{21}(0,t)-iK_{22}(0,t)\right)e^{i\lambda(t+a(1-\alpha))}dt}$$

$$=-e^{-2i\lambda a(1-\alpha)}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\qquad |\lambda|\to\infty$$

olduğu bulunur. Böylece $|\lambda|\to\infty$ için istenilen (4.3.2.9) asimptotik ifade elde edilmiş olur. Bu da lemmayı ispatlar. ■

### 4.3.3. $E(\lambda)$ Fonksiyonunun Özelliklerinin İncelenmesi

**Lemma 4.3.3.1.** $E(\lambda)$ fonksiyonu üst yarım düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda>0)$ analitiktir, reel eksende süreklidir ve kapalı üst yarım düzlemde sıfırları yoktur.

*İspat.* $E(\lambda)$ fonksiyonunun reel eksende sıfırlarının olmadığı yukarıda gösterildi. $f_1(0,\lambda)$ ve $f_2(0,\lambda)$ üst düzleme analitik olarak devam ettirilebilir ve tüm reel eksende süreklidirler. Bu özellikler $E(\lambda)$ içinde sağlanır. $|\lambda|\to\infty$ iken

$$f(0,\lambda)\to\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

ve böylece $E(\lambda)$'ın sıfırları üst düzlemdeki sıfırları sayılabilenden fazla değildir ve sınırlı bir küme oluştururlar.

$\mu\in\ (\operatorname{Im}\mu>0)\ E(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırı olsun.

$$Bf'(x,\mu)+\Omega(x)f(x,\mu)=\rho(x)\mu f(x,\mu)$$

denkleminin önce eşleniği sonra transpozu alınırsa

$$-f^{*\prime}(x,\mu)B+f^{*}(x,\mu)\Omega(x)=\overline{\mu}\rho(x)f^{*}(x,\mu)$$

ifadesi elde edilir ve burada $f^{*}(x,\mu)$ vektör fonksiyonu $\overline{f(x,\mu)}$ matris fonksiyonunun transpozunu gösterir.

$$Bf'(x,\mu)+\Omega(x)f(x,\mu)=\rho(x)\mu f(x,\mu)$$

$$-f^{*\prime}(x,\mu)B+f^{*}(x,\mu)\Omega(x)=\overline{\mu}\rho(x)f^{*}(x,\mu)$$

denklemler sisteminde birincisi denklem soldan $f^{*}(x,\mu)$ ile ikinci denklem sağdan $f(x,\mu)$ ile çarpılırsa

$$f^{*}(x,\mu)Bf'(x,\mu)+f^{*}(x,\mu)\Omega(x)f(x,\mu)=\mu\rho(x)f^{*}(x,\mu)f(x,\mu)$$

$$-f^{*\prime}(x,\mu)Bf(x,\mu)+f^{*}(x,\mu)\Omega(x)f(x,\mu)=\overline{\mu}\rho(x)f^{*}(x,\mu)f(x,\mu)$$

bulunur. Taraf tarafa çıkarıldığında

$$f^{*}(x,\mu)Bf'(x,\mu)+f^{*\prime}(x,\mu)Bf(x,\mu)=\left(\mu-\overline{\mu}\right)\rho(x)f^{*}(x,\mu)f(x,\mu)$$

veya

$$W'\left[\overline{f(x,\mu)},f(x,\mu)\right]=\left(\mu-\overline{\mu}\right)\rho(x)f^{*}(x,\mu)f(x,\mu)$$

olduğu elde edilir. $0$'dan $\infty$'a kadar $x$'e göre integrallenirse

$$W\left[\overline{f(x,\mu)},f(x,\mu)\right]\Big|_{x=0}^{x=\infty}+\left(\overline{\mu}-\mu\right)\int_0^\infty f^{*}(x,\mu)f(x,\mu)\rho(x)\,dx=0 \qquad (4.3.3.1)$$

ifadesi çıkar. $f_1(x,\mu)$ ve $f_2(x,\mu)$'in tanımından

$$\lim_{x\to\infty}W\left[\overline{f(x,\mu)},f(x,\mu)\right]=\lim_{x\to\infty}\left\{\overline{f_1(x,\mu)}f_2(x,\mu)-f_1(x,\mu)\overline{f_2(x,\mu)}\right\}=0$$

olur. Diğer tarafta

$$E(\mu)=f_1(0,\mu)+\mu f_2(0,\mu)=0$$

ya da

$$f_1(0,\mu)=-\mu f_2(0,\mu)$$

sağlanır. Böylece

$$W\left[\overline{f(x,\mu)},f(x,\mu)\right]\Big|_{x=0}=\overline{f_1(0,\mu)}f_2(0,\mu)-\overline{f_2(0,\mu)}f_1(0,\mu)$$

$$=-\overline{\mu}\left|f_2(0,\mu)\right|^2+\mu\left|f_2(0,\mu)\right|^2=\left(\mu-\overline{\mu}\right)\left|f_2(0,\mu)\right|^2$$

bulunur. Bu veriler (4.3.3.1)'de yerine yazılırsa

$$\left(\overline{\mu}-\mu\right)\left[\left|f_2(0,\mu)\right|^2+\int_0^\infty f^*(x,\mu)\,f(x,\mu)\,\rho(x)\,dx\right]=0$$

elde edilir ve parantezin içi pozitif olduğundan $\overline{\mu}=\mu$ yani $\mu$'ler reeldir. O halde $E(\mu)$ fonksiyonunun üst yarı düzlemde $\left(\operatorname{Im}\mu>0\right)$ sıfırı olmadığı sonucu çıkar. Lemma ispatlanmış olur. ■

#### 4.3.4. Rezolvent Operatör ve Özfonksiyonlara Göre Ayrışım Formülü

$H_\rho=L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)\times\mathbb{C}$ Hilbert uzayında $F=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ f_3\end{pmatrix}\in H_\rho$, $G=\begin{pmatrix} g_1(x)\\ g_2(x)\\ g_3\end{pmatrix}\in H_\rho$ üç bileşenli vektörler için

$$(F,G)=\int_0^\infty\left\{f_1(x)\,\overline{g}_1(x)+f_2(x)\,\overline{g}_2(x)\right\}\rho(x)\,dx+f_3g_3$$

ile iç çarpımı tanımlansın.

$$l(y):=\frac{1}{\rho(x)}\left\{BY'+\Omega(x)Y\right\}$$

ve kısa olması için

$$f(x):=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$$

olsun ve böylece

$$F=\begin{pmatrix} f(x) \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

(4.3.1.1)-(4.3.1.2) sınır değer problemine karşılık gelen $L$ operatörü aşağıdaki formda tanımlansın:

$$LF=\begin{pmatrix} f_2'(x)+p(x)f_1(x)+q(x)f_2(x) \\ -f_1'(x)+q(x)f_1(x)-p(x)f_2(x) \\ f_1(0) \end{pmatrix}, \quad F\in D(L)$$

burada $L$ operatörünün tanım bölgesi

$$D(L):=\{F \mid F=(f_1(x),f_2(x),f_3)\in H_\rho, f_1(x),f_2(x)\in AC[0,b]$$

$$[0,b]\subset[0,\infty),\, l(f)\in H_\rho, f_3=f_2(0)\}$$

biçimindedir. Gösterilebilir ki, tanım bölgesi $D(L)$ olan $L$ operatörü $H_\rho$ uzayında özeşleniktir.

Eğer $\lambda$ , $L$ operatörünün spektrum noktası değilse $(L-\lambda I)^{-1}$ rezolvent operatör vardır . Şimdi rezolvent operatörün biçimi bulunacaktır.

**Lemma 4.3.4.1.** $R_\lambda=(L-\lambda I)^{-1}$ rezolvent operatör

$$R_\lambda(x,t)=-\frac{1}{E(\lambda)}\begin{cases} \varphi(x,\lambda)\overline{f(t,\lambda)}, & x\le t<\infty \\ f(x,\lambda)\overline{\varphi(t,\lambda)}, & 0\le t<x \end{cases}$$

forma sahip çekirdekli integral operatördür.

*İspat.* $L$ tanım bölgesi $D(L)$ olan operatör ve $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ sonlu her $(0,b)$ aralığının dışında sıfır olsun. Rezolventin açık biçimini bulmak için

$$By'+\Omega(x)y=\lambda\rho(x)y+\rho(x)f(x) \tag{4.3.4.1}$$

$$y_1(0)=-\lambda y_2(0)+f_3 \tag{4.3.4.2}$$

probleminin çözülmesi gerekir.

Sabitlerin değişimi yöntemi uygulanarak (4.3.4.1), (4.3.4.2) probleminin çözümü

$$y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f(x,\lambda) \tag{4.3.4.3}$$

biçiminde bulunacaktır, burada $f(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)$ (4.3.4.2)'e uygun homojen denklemin çözümleridir.

$$y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f(x,\lambda)$$

ve

$$y'(x,\lambda)=c_1'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_1(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)f(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f'(x,\lambda)$$

eşitlikleri (4.3.4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$c_1'(\lambda,x)B\varphi(x,\lambda)+c_2'(\lambda,x)Bf(x,\lambda)+c_1(\lambda,x)\left[B\varphi'(x,\lambda)+\Omega(x)\varphi(x,\lambda)\right]$$
$$+c_2(\lambda,x)\left[Bf'(x,\lambda)+\Omega(x)f(x,\lambda)\right]=c_1(\lambda,x)\lambda\rho(x)\varphi(x,\lambda)$$
$$+c_2(\lambda,x)\lambda\rho(x)f(x,\lambda)+f(x)\rho(x)$$

bulunur. Buradan

$$c_1'(\lambda,x)B\varphi(x,\lambda)+c_2'(\lambda,x)Bf(x,\lambda)=f(x)\rho(x) \tag{4.3.4.4}$$

sonucu ortaya çıkar. (4.3.4.4) eşitliği soldan $\widetilde{f}(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1'(\lambda,x)W[f,\varphi]+c_2'(\lambda,x)W[f,f]=\widetilde{f}(x,\lambda)f(x)\rho(x)$$

$$c_1'(\lambda,x)\widetilde{f}(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)=\widetilde{f}(x,\lambda)f(x)\rho(x) \tag{4.3.4.5}$$

elde edilir. Burada çözümün $L_2\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$' den olması için $c_1(\lambda,\infty)=0$ olması gerekir. (4.3.4.5) ifadesi $(x,\infty)$ aralığında integrallenerek

$$\int_x^\infty c_1'(\lambda,t)\,dt=\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \widetilde{f}(t,\lambda)f(t)\rho(t)\,dt$$

$$c_1(\lambda,x)=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \widetilde{f}(t,\lambda)f(t)\rho(t)\,dt$$

$$c_1(\lambda,x)=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \widetilde{f}(t,\lambda)f(t)\rho(t)\,dt+c_1^*$$

ifadesi bulunur. $x\to\infty$ iken

$$c_1(\lambda,\infty) = -\frac{1}{E(\lambda)}.0 + c_1^* \qquad \Rightarrow \qquad c_1^* = 0$$

olur. O halde

$$c_1(\lambda,x) = -\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \tilde{f}(t,\lambda)\, f(t)\,\rho(t)\,dt \tag{4.3.4.6}$$

biçimindedir. Benzer şekilde (4.3.4.4) eşitliği soldan $\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1'(\lambda,x)W[\varphi,\varphi] + c_2'(\lambda,x)W[\varphi,f] = \tilde{\varphi}(x,\lambda)\, f(x)\,\rho(x)$$

$$c_2'(\lambda,x)\tilde{\varphi}(x,\lambda)Bf(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda)\, f(x)\,\rho(x) \tag{4.3.4.7}$$

elde edilir. (4.3.4.7) eşitliği ise $(0,x)$ aralığında integrallenerek

$$c_2(\lambda,x) - c_2(\lambda,0) = -\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \tilde{\varphi}(t,\lambda)\, f(t)\,\rho(t)\,dt + c_2^*$$

sonucunu verir. $x = 0$ olduğunda $c_2^* = 0$ olur. Böylece

$$c_2(\lambda,x) = c_2(\lambda,0) - \frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \tilde{\varphi}(t,\lambda)\, f(t)\,\rho(t)\,dt \tag{4.3.4.8}$$

formuna sahip olduğu elde edilir. (4.3.4.6), (4.3.4.8) ve (4.3.4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
y(\lambda,x) &= \varphi(x,\lambda)\left(-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \tilde{f}(t,\lambda)\, f(t)\,\rho(t)\,dt\right) \\
&\quad + f(x,\lambda)\left(c_2(\lambda,0) - \frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x \tilde{\varphi}(t,\lambda)\, f(t)\,\rho(t)\,dt\right) \\
&= -\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \varphi(x,\lambda)\tilde{f}(t,\lambda)\, f(t)\,\rho(t)\,dt \\
&\quad - \frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)\, f(t)\,\rho(t)\,dt + c_2(\lambda,0)\, f(x,\lambda) \\
&= \int_0^\infty R_\lambda(x,t)\, f(t)\,\rho(t)\,dt + c_2(\lambda,0)\, f(x,\lambda)
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Burada $R_\lambda(x,t)$ çekirdek fonksiyonu

$$R_\lambda(x,t) = -\frac{1}{E(\lambda)}\begin{cases} \varphi(x,\lambda)\tilde{f}(t,\lambda), & x \le t < \infty \\ f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda), & 0 \le t < x \end{cases} \tag{4.3.4.9}$$

ile ifade edilir. $c_2(\lambda,0)$'n ifadesini bulmak için (4.3.4.2) koşulunu kullanmak gerekir. $y(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.3.4.2) koşulunu sağladığından

$$y_1(0,\lambda)=c_1(\lambda,0)\varphi_1(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)f_1(0,\lambda)$$

$$y_2(0,\lambda)=c_1(\lambda,0)\varphi_2(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)f_2(0,\lambda)$$

ifadeleri (4.3.4.2) de yerine yazılırsa

$$c_1(\lambda,0)\varphi_1(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)f_1(0,\lambda)+\lambda\left[c_1(\lambda,0)\varphi_2(0,\lambda)+c_2(\lambda,0)f_2(0,\lambda)\right]=f_3$$

olur ve böylece

$$c_1(\lambda,0)\left[\varphi_1(0,\lambda)+\lambda\varphi_2(0,\lambda)\right]+c_2(\lambda,0)\left[f_1(0,\lambda)+\lambda f_2(0,\lambda)\right]=f_3$$

ifadesinden

$$c_2(\lambda,0)\left[f_1(0,\lambda)+\lambda f_1(0,\lambda)\right]=f_3$$

$$c_2(\lambda,0)=\frac{f_3}{E(\lambda)}$$

sonucu elde edilir. Buradan $y(x,\lambda)$ fonksiyonunun

$$(L-\lambda I)^{-1}=y(\lambda,x)=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt+\frac{f_3}{E(\lambda)}f(x,\lambda)$$

formunda olduğu bulunur. Lemma ispatlanmış olur. ■

**Lemma 4.3.4.2.** $f(t)$ sonlu vektör fonksiyon ve $F=\begin{pmatrix} f(t) \\ f_3 \end{pmatrix}\in D(L)$ olsun. O halde

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt+\frac{f_3}{E(\lambda)}f(x,\lambda)=-\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(x,\lambda)f_1(0)}{\lambda E(\lambda)}+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)\,dt$$

biçimine sahiptir. Burada

$$g(x)=Bf'(x)+\Omega(x)f(x)$$

formundadır.

*İspat.*

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\,f(t)\,\rho(t)\,dt=-\frac{1}{E(\lambda)}\int_0^x f(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt-\frac{1}{E(\lambda)}\int_x^\infty \varphi(x,\lambda)\,\tilde{f}(t,\lambda)\,f(t)\,\rho(t)\,dt$$

eşitliğinde

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\varphi}(x,\lambda)B+\tilde{\varphi}(x,\lambda)\Omega(x)\right\}$$

$$\tilde{f}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(x,\lambda)B+\tilde{f}(x,\lambda)\Omega(x)\right\}$$

ifadeleri yerlerine yazılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\,f(t)\,\rho(t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda\rho(t)}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(t,\lambda)B+\tilde{\varphi}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}f(t)\,\rho(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda\rho(t)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(t,\lambda)B+\tilde{f}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}f(t)\,\rho(t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(t,\lambda)B\right\}f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(t,\lambda)B\right\}f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\tilde{\varphi}(t,\lambda)\Omega(t)\,f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda}\tilde{f}(t,\lambda)\Omega(t)\,f(t)\,dt$$

elde edilir. Kısmi integralleme ile

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\,f(t)\,\rho(t)\,dt=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}(t,\lambda)\,Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}$$

$$+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\,\tilde{f}(t,\lambda)\,Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\tilde{\varphi}(t,\lambda)\left\{Bf'(t)+\Omega(t)\,f(t)\right\}dt$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda}\tilde{f}(t,\lambda)\left\{Bf'(t)+\Omega(t)\,f(t)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\tilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$-\frac{1}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x\frac{1}{\lambda}\tilde{\varphi}(t,\lambda)g(t)dt-\frac{1}{E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty\frac{1}{\lambda}\tilde{f}(t,\lambda)g(t)dt$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\tilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)dt \tag{4.3.4.10}$$

bulunur. İspatı bitirmek için

$$\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\tilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

ifadesinin biçimini belirlemek gerekir.

$$\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\tilde{f}(t,\lambda)Bf(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)Bf(x)-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(0,\lambda)Bf(0)$$

$$+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\tilde{f}(\infty,\lambda)Bf(\infty)-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\tilde{f}(x,\lambda)Bf(x)$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\Big[f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\tilde{f}(x,\lambda)\Big]Bf(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\big(\varphi_1(0,\lambda),\varphi_2(0,\lambda)\big)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(0)\\f_2(0)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\begin{pmatrix}-f_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)+f_2(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)&0\\0&-f_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)+f_2(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)\end{pmatrix}f(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\big(-\varphi_2(0,\lambda)f_1(0)+\varphi_1(0,\lambda)f_2(0)\big)$$

$$=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\big(-E(\lambda)\big)f(x)+\frac{1}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)\big(f_1(0)+\lambda f_2(0)\big)$$

$$=-\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f_1(0)}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)+\frac{f_3}{E(\lambda)}$$

sonucu çıkar. Bu sonuç (4.3.4.10) da yerine yazılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)dt=-\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f_1(0)}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)+\frac{f_3}{E(\lambda)}f(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)dt$$

olur. Buradan

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)dt-\frac{f_3}{E(\lambda)}f(x,\lambda)=-\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f_1(0)}{\lambda E(\lambda)}f(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)dt$$

olduğu bulunur. ■

**Lemma 4.3.4.3.** $f(t)$ sonlu vektör fonksiyon ve $F=\begin{pmatrix} f(t) \\ f_3 \end{pmatrix}\in D(L)$ olsun. $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ ve $|\lambda|\to\infty$ iken

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)dt-\frac{f_3 f(x,\lambda)}{E(\lambda)}=-\frac{f(x)}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (4.3.4.11)$$

özdeşliği sağlanır.

*İspat.* $f(x,\lambda)$ çözümünün ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun özelliğinden $|\lambda|\to\infty$ iken $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ için

$$f(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{i\lambda x}\left[1+O(1)\right]$$

olur. Ayrıca $x$ sınırlı bölgede değişirse $|\lambda|\to\infty$ iken

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} sin\lambda x-\lambda cos\lambda x \\ -cos\lambda x-\lambda sin\lambda x \end{pmatrix}\left[1+O(1)\right]$$

biçimine sahiptir. $g(t)$ sonlu vektör fonksiyon olduğundan yukarıdaki formülden $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ ve $|\lambda|\to\infty$ iken

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)g(t)dt=O(1)$$

olur. Bu ifade kullanılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)dt-\frac{f_3}{E(\lambda)}f(x,\lambda)=-\frac{f(x)}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

elde edilir.

(4.3.1.1)-(4.3.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülü bu lemmalar yardımıyla elde edilecektir.

(4.3.4.11)'in her iki tarafı $\frac{1}{2\pi i}$ ile çarpılıp merkezi $0$'da yarıçapı $R$ olan $\Gamma_R$ çemberi boyunca $\lambda$'ya göre integrallenirse

$$-f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} O\left(\frac{1}{\lambda}\right)d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f_3}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\,d\lambda \qquad (4.3.4.12)$$

olur. $R_\lambda(x,t)$ üst ve alt düzlemlerde analitik fonksiyondur. Buna göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda=I_r^1+I_r^2+I_r^3$$

yazılır. Burada

$$I_R^1=\frac{1}{2\pi i}\int_{-R-i\delta}^{R-i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda$$

$$I_R^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{R+i\delta}^{-R+i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda$$

ve

$$I_R^3=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{R-i\delta}^{R+i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda+\int_{-R+i\delta}^{-R-i\delta}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda\right\}$$

formundadır ve $\delta$ pozitif sayıdır. $R\to\infty$ iken $I_R^3\to 0$ ve (4.3.4.11) den

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^\infty R_{\lambda\pm i\delta}(x,t)f(t)\rho(t)\,dt=\int_0^\infty R_{\lambda\pm i0}(x,t)f(t)\rho(t)\,dt.$$

(4.3.4.12) de $R\to\infty$ iken limite geçilirse

$$f(x)=-\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\left[\int_0^\infty R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)\,dt\right]d\lambda+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f_3 f(x,\lambda)}{E(\lambda)}d\lambda$$

$$=-\lim_{r\to\infty}\left\{I_r^1+I_r^2+I_r^3\right\}+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f_3}{E(\lambda)}f(x,\lambda)\,d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{0}^{\infty}\left[R_{\lambda-i0}(x,t)-R_{\lambda+i0}(x,t)\right] f(t)\rho(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(x,\lambda+i0)}{E(\lambda+i0)}-\frac{f(x,\lambda-i0)}{E(\lambda-i0)}\right] f_3 d\lambda$$

bulunur. İspat için $R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)$'ın hesaplanması gerekir. $\psi(x,\lambda)$ (4.3.4.1) denkleminin $\psi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. O halde $f(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının lineer birleşimi şeklinde ifade edilebilir. Böylece

$$f(x,\lambda)=f_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)+E(\lambda)\psi(x,\lambda) \qquad (4.3.4.13)$$

yazılır, burada $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ $\lambda$'ya bağlı tam vektör fonksiyondur. (4.3.4.9) ve (4.3.4.13) ifadelerinden

$$-\int_{0}^{\infty}\left[R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)\right] f(t)\rho(t)\,dt=-\int_{0}^{\infty}\left[R_{\lambda+i0}(x,t)-\overline{R}_{\lambda+i0}(x,t)\right] f(t)\rho(t)\,dt$$

$$=\int_{0}^{x}\left[\frac{f(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\left[\overline{\frac{f(x,\lambda)}{E(\lambda)}}\right]\right]\widetilde{\varphi}(t,\lambda) f(t)\rho(t)\,dt$$

$$+\int_{x}^{\infty}\varphi(x,\lambda)\left[\frac{\widetilde{f}(t,\lambda)}{E(\lambda)}-\frac{\overline{\widetilde{f}(t,\lambda)}}{\overline{E(\lambda)}}\right] f(t)\rho(t)\,dt$$

sonucu çıkar. Diğer taraftan

$$\frac{f(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\overline{\left[\frac{f(x,\lambda)}{\overline{E(\lambda)}}\right]}$$

$$=\frac{f_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)+E(\lambda)\psi(x,\lambda)}{E(\lambda)}-\frac{\overline{f_2(0,\lambda)}\,\overline{\varphi(x,\lambda)}+\overline{E(\lambda)}\,\overline{\psi(x,\lambda)}}{\overline{E(\lambda)}}$$

$$=\left(\frac{f_2(0,\lambda)}{E(\lambda)}-\frac{\overline{f_2(0,\lambda)}}{\overline{E(\lambda)}}\right)\varphi(x,\lambda)=\frac{f_2(0,\lambda)\overline{f_1(0,\lambda)}-f_1(0,\lambda)\overline{f_2(0,\lambda)}}{\left|E(\lambda)\right|^2}\varphi(x,\lambda)$$

$$=\frac{-2i}{\left|E(\lambda)\right|^2}\varphi(x,\lambda)$$

elde edilir.

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left[R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)\right]f(t)\rho(t)\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)}{\left|E(\lambda)\right|^2}f(t)\rho(t)\,dt$$

olur. Böylece $L$ operatörünün özfonsiyonlarına göre ayrışım aşağıdaki formda bulunur.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_0^\infty \frac{\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda)}{\left|E(\lambda)\right|^2}f(t)\rho(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x,\lambda)}{\left|E(\lambda)\right|^2}f_3(t)\,d\lambda$$

ve

$$f_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_0^\infty \frac{\tilde{\varphi}(t,\lambda)}{\left|E(\lambda)\right|^2}f(t)\rho(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_3}{\left|E(\lambda)\right|^2}\,d\lambda$$

ya da

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_0^\infty u(x,\lambda)u^*(t,\lambda)f(t)\rho(t)\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x,\lambda)}{\overline{E(\lambda)}}f_3(t)\,d\lambda$$

$$f_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_0^\infty \frac{u^*(t,\lambda)}{\overline{E(\lambda)}}f(t)\rho(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_3}{\left|E(\lambda)\right|^2}\,d\lambda$$

sonuçları elde edilir, burada

$$u(x,\lambda)=\overline{f(x,\lambda)}-S(\lambda)f(x,\lambda)$$

$$u^*(x,\lambda)=\tilde{f}(x,\lambda)-\overline{S(\lambda)}f^*(x,\lambda).\blacksquare$$

### 4.3.5. $S(\lambda)$ Fonksiyonunun Sürekliliği ve Levinson Formülü

$S(\lambda)$ fonksiyonunun sürekli olduğu tanımından direk çıkar. $S(\lambda)-S_0(\lambda)$ fonksiyonu $-\infty<\lambda<+\infty$ reel eksende süreklidir ve $S(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından $|\lambda|\to\infty$ iken $S(\lambda)-S_0(\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ asimptotik ifadesi sağlandığı elde edildi. Böylece $S(\lambda)-S_0(\lambda)$ fonksiyonu $+\infty(-\infty)$' un komşuluğunda karesi ile integrallenebilirdir ve $L_2(-\infty,+\infty)$'dan olan bir fonksiyonun Fourier dönüşümüdür.

Ayrıca $S(\lambda)$ fonksiyonun argüment değişimi sıfıra eşittir. Bunu göstermek için $E(\lambda)$ fonksiyonuna argüment prensibi uygulanır. Bu fonksiyon üst düzlemde analitiktir ve kapalı üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda \geq 0)$ süreklidir. $\lambda$, $-\infty$'dan $\infty$'a değişirken $E(\lambda)$ fonksiyonunun argüment değişimi sıfıra eşittir:

$$\arg E(+\infty) - \arg E(-\infty) = 2\pi(N-P)$$

burada $N$, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı $P$ ise kutuplarının sayısıdır. $N = P = 0$ ve

$$\ln S(\lambda) = -2i \arg E(\lambda)$$

olduğundan

$$\ln S(+\infty) - \ln S(-\infty) = -2i\{\arg E(+\infty) - \arg E(-\infty)\} = 0$$

elde edilir.

Son bağıntıya *Levinson formülü* denir.

### 4.3.6. Temel Denklemin Elde Edilmesi

Saçılma verilerine göre (4.3.1.1) denklemindeki $\Omega(x)$ potansiyel fonksiyonu inşa etmekte rolü olan temel denklem elde edilecektir. Bunun için (4.3.2.3) özdeşliği aşağıdaki formda yeniden yazılır:

$$2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)} + S_0(\lambda)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)} - \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-i\lambda\mu(x)}$$

$$= \int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-i\lambda t}dt - S_0(\lambda)\int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda t}dt$$

$$+\left[S_0(\lambda) - S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)} + \left[S_0(\lambda) - S(\lambda)\right]\int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda t}dt$$

Bu ifadenin her iki tarafı $\frac{1}{2\pi}(1,-i)e^{i\lambda y}$ ile çarpılıp $\lambda$'ya göre $-\infty$'dan $\infty$'a kadar integrallenirse

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty-}\left[2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)} + S_0(\lambda)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)} - \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-i\lambda\mu(x)}\right](1,-i)e^{i\lambda y}d\lambda$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}(1,-i)e^{-i\lambda(t-y)}dt\,d\lambda$$

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_0(\lambda)\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda$$

$$+\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)e^{i\lambda(\mu(x)+y)}d\lambda$$

$$+\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda \qquad 4.3.6.1$$

olur, burada

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}(1,-i)e^{-i\lambda(t-y)}d\lambda=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}e^{-i\lambda(t-y)}d\lambda=\delta(t-y)E_2\equiv\delta_2(t-y),$$

$$E_2=\mathrm{Re}\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ve $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonudur. Böylece

$$\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}(1,-i)e^{-i\lambda(t-y)}d\lambda dt=\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\delta_2(t-y)dt=K(x,y)$$

bulunur.

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_0(\lambda)e^{i\lambda(t+y)}d\lambda=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\lambda a(1-\alpha)}e^{i\lambda(t+y)}d\lambda=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda(2a(1-\alpha)-t-y)}d\lambda$$

$$=-\delta\big(2a(1-\alpha)-t-y\big)$$

ve $y>\mu(x)$ için $K\big(x,y-2a(1-\alpha)\big)=0$ olduğundan

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_0(\lambda)\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda$$

$$=\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_0(\lambda)\begin{pmatrix}1&-i\\-i&-1\end{pmatrix}e^{i\lambda(t+y)}d\lambda dt$$

$$=-\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\delta\big(2a(1-\alpha)-t-y\big)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}dt$$

$$=-K\big(x,y-2a(1-\alpha)\big)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=0,\qquad y>\mu(x)$$

elde edilir.

Elde edilen bu değerler (4.3.6.1)'in sağ tarafında yerine yazılırsa

$$K(x,y)+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda$$

$$+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1,-i)e^{i\lambda(\mu(x)+y)}d\lambda$$

$$=K(x,y)+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)F(t+y)dt+F(\mu(x)+y)$$

olduğu bulunur, burada

$$F(x)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1&-i\\-i&-1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}d\lambda \tag{4.3.6.2}$$

biçimine sahiptir. O halde (4.3.6.1)'in sağ tarafı $y>\mu(x)$ için

$$K(x,y)+F(\mu(x)+y)+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)F(t+y)dt$$

formuna sahip olduğu elde edilir.

Ayrıca (4.3.6.1)'in sol tarafı analitik olduğundan

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty-}2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)}(1,-i)e^{i\lambda y}d\lambda+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}1&-i\\-i&-1\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty-}S_0(\lambda)e^{i\lambda(\mu(x)+y)}d\lambda$$

$$-\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty-}e^{-i\lambda(\mu(x)-y)}d\lambda=0$$

olur. Sonuç olarak $y>\mu(x)$ için

$$K(x,y)+F(\mu(x)+y)+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)F(t+y)dt=0 \tag{4.3.6.3}$$

elde edilir, burada $F(x)$ fonksiyonu (4.3.6.2) formülü ile tanımlanır.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 4.3.6.1.** Her $x\geq 0$ için (4.3.1.5) özel çözümün çekirdeği $K(x,y)$ (4.3.6.3) integral denklemi sağlar.

**Tanım 4.3.6.2.** (4.3.6.3) integral denklemine (4.3.1.1)-(4.3.1.2) sınır değer probleminin *temel denklemi* denir.

### 4.3.7. Temel Denklemin Çözülebilirliği ve Ters Problemin Çözümünün Tekliği

(4.3.6.3) integral denklemi kompakt operatörlerle üretilir ve onun tek türlü çözülebilir olduğunu göstermek için Fredholm alternatifi kullanılır.

**Teorem 4.3.7.1.** Her sabitleştirilmiş $x \geq 0$ için temel denklemin elemanları $L_2(\mu(x), \infty)$ da olan tek bir vektör çözümü vardır.

*İspat.* (4.3.1.1)-(4.3.1.2) sınır değer problemi için elde edilen $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonu Bölüm 4.2. deki saçılma fonksiyonunun özelliklerini sağlar. $S(\lambda)$ ile inşa edilmiş temel denklemin özellikleri ile diğer Bölüm 4.2 deki saçılma fonksiyonu ile inşa edilmiş temel denklemlerin özellikleri aynıdır. Bundan dolayı Teorem 4.2.7.1' den ispat açıktır. ■

**Teorem 4.3.7.2.** Saçılma fonksiyonu ile (4.3.1.1)-(4.3.1.2) sınır değer problemi tek türlü belirlenir.

*İspat.* Açıktır ki temel denklemi inşa etmek için $F(x)$ fonksiyonunu bulmak yeterlidir ve $F(x)$'i bulmak için de $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonunu bilmek yeterlidir. Teorem 4.3.7.1 den saçılma fonksiyonuna göre inşa edilmiş (4.3.6.3) temel denklemin tek bir $K(x, y)$ çözümü olduğu görülür. O zaman (4.3.1.1) denklemindeki $\Omega(x)$ matris fonksiyonu tek türlü bulunur. Verilen algoritmaya göre (4.3.1.1) denklemi inşa edilir. Teorem ispatlanır. ■

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bulgular ve Tartışmalar bölümünde üç farklı problem ele alındı. Birinci olarak klasik Dirac denklemler sistemi için sınır koşulu spektral parametreyi kuadratik polinom biçimde içeren bir sınır değer problemi için

1) Saçılmanın ters problemi incelendi ve çözümün tekliği gösterildi,

2) $\Omega(x)$ potansiyelinin inşasının algoritması verildi.

Problemin çözümü esnasında spektral parametreyi kuadratik olarak içeren sınır koşullarını sağlayan özel çözüm bulundu, saçılma verileri tanımlandı, ters problemin çözümünde önemli rolü olan temel denklem incelendi. Daha sonra ise saçılma verileri yardımıyla geçit fonksiyonu inşa edildi. Bu fonksiyon ile de özel çözümün çekirdeği bilinmeyen fonksiyon olmak üzere temel denklem yazıldı. Bu problemin saçılma verileri $\{S(\lambda), \lambda_k, m_k \ (k = 1, 2, ..., n)\}$ olarak belirlendi ve bu değerler topluluğunun ele alınan sınır değer probleminin saçılma verileri olması için gerek koşul gösterildi.

İkinci ve üçüncü bölümde ise süreksiz katsayılı birinci mertebeden iki bileşenli Dirac denklemler sistemi için düz ve ters problemleri ele alındı:

1) Saçılma verileri tanımlandı ve incelendi,

2) Rezolvent operatör bulundu ve özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edildi,

3) Temel denklem elde edildi,

4) $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonun argüment değişimine bakıldı ve Levinson formülü elde edildi,

5) Saçılma verileriyle inşa edilmiş temel denklemin tek türlü çözülebilirliği ve çözümün tekliği gösterildi.

Üçüncü bölümde ikinci bölümden farklı olarak sınır koşulu spektral parametre içeren duruma bakıldı. Bu durumda rezolvent operatör inşa edilirken ve ayrışım formülü bulunurken, $H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)\times\mathbb{C}$ biçiminde üç bileşenli vektörlerden oluşan Hilbert uzayları oluşturuldu, incelemeler bu uzayda yapıldı.

Birinci bölüme benzer olarak bu saçılma verilerinin süreksiz durum için ele alınan sınır değer problemlerinin saçılma verileri olması için gerek koşul gösterildi.

Saçılma verilerinin özellikleri biliniyorsa sınır değer problemlerinin saçılma verileri olması için yeter koşulun incelenmesi önerilir.

## KAYNAKLAR


[1] Newton, R. G. ve Jost, R. "The Construction of Potentials from the S-matrix for Systems of Differential Equations",Nuovo Cimento,**1(4)**:590–622, (1955).

[2] Gelfand, I.M. ve Levitan, B. M. ''On the determination of a differantial equation from its spektral function'', Izv. Akad Nauk. SSSR Ser.Mat., **15(4)**:309-360 (1951); English trans.:Amer.Mat. Soc. Transl. **(2)**:253-304, (1955).

[3] Marchenko, V.A. ''Reconstruction of the potantial energy from the phases of the scattered waves'', Dokl. Akad.. Nauk SSSR, **104(5)**:695-698, (1955).

[4] Agranovich, Z. S. ve Marchenko, V.A. "<u>The Inverse Problem of Scattering Theory</u>", Gordon and Breach Science Publisher, NewYork-London, 291s. (1963).

[5] Marchenko, V.A. " <u>Sturm–Liouville Operators and Applications</u>", Trans. from the Russian by A.Iacob, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Stuttgard,. 367s., (1986).

[6] Krein, M. G. "Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem", Dokl. Akad. Nauk, SSSR, **76**:21–24, (1951).

[7] Krein, M. G. "On the theory of accelerants and S-matrices of canonical differential systems", (Russian) Dokl.Akad.Nauk SSSR **111**:1167-1170, (1956).

[8] Gasymov, M. G. ve Levitan, B. M.''Determination of a differential equation by two of its spectra'', (Russian) Uspehi Mat. Nauk **19(2)**:3-63 (1964), English transl. in Russian Math. Surveys **19**:1–63, (1964).

[9] Gasymov, M. G. ve Levitan, B. M. "The Inverse Problem for the Dirac System", (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, **167**:967-970, (1966).

[10] Gasymov, M. G. "The inverse scattering problem for a system of Dirac equations of order 2n", (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obst. **19**:41-119 (1968), English transl. in Trans. Mosc. Math. Soc. **19** (1968).

[11] Guseĭnov, I. M. On the Representation of Jost solutions for Dirac's equation system with discontinuous coefficients", Transactions of AS Azerbaijan, **5**:41-45 (1999).

[12] Guseĭnov, I. M. “The inverse scattering problem for a system of Dirac equations with discontinuous coefficients” (Russian) Dokl. Akad. Nauk Azerbaĭdzhana **55(1-2)**:13-18, (1999).

[13] Nizhnik, L. P. “ Inverse Scattering Problems for Hyperbolic Equations”, Naukova Dumka, Kiev, 232s., (1991).

[14] Nizhnik, L.P. ve Vu, Ph.L. “The inverse scattering problem on the semi-axis with a nonselfadjoint potential matrix”, Ukrainian Math. J. **26:**384–398, (1975); also: Ukrain. Mat. Zh. **26**:469–486, (1974).

[15] Nizhnik, L.P. ve Iskenderov, N.Sh. “Inverse nonstationary scattering problem for hyperbolic system of three equations of the first order on a semi-axis”, Ukrainian Math. J. **42 (7)**:825–832 (1990); also: Ukrain. Mat. Zh. **42 (7)**:931–938, (1990).

[16] Nizhnik, L.P., “Inverse Scattering Problems for Hyperbolic Equations”, Nauk. Dumka, Kiev, (in Russian) (1973).

[17] Nizhnik, L.P. “The inverse scattering problem for hyperbolic equations and their application to nonlinear integrable systems”, Rep. Math. Phys., **26(2):**261–283, (1988).

[18] Nizhnik, L.P. ve Tarasov, V.G. “The inverse nonstationary scattering problem for a hyperbolic system of equations”, Soviet Math. Dokl. **18(2)**:(1977) 397–401; also: Dokl. Akad. Nauk SSSR **233(3)**:300–303, (1977).

[19] Iskenderov, N. Sh, Ismailov, M.I. “Inverse scattering problem for nonstationary Dirac-type systems on the half-plane” J. Differential Equations, **246(1):**277–290, (2009).

[20] Ismailov, M.I., “Inverse scattering problem for hyperbolic system on a semi-axis in the case of equal number of incident and scattered waves”, Inverse Problems, **22(3)**:955–974, (2006).

[21] Gardner, C.S., Green, J.M., Kruskal,M.D, ve Miura,R.M. ‘‘A method for solving the Korteweg-de Vries equation ’’,Phys.Rev.Letters., **19**:1095-1098, (1967).

[22] Lax, P. “Integrals of Nonlinear Equations of Evalution and Solitary Waves”, Comm. Pure Appl. Math., **21**:467-490, (1968).

[23] Zakharov, V.E. and Shabat, A.B. "Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing an One-dimensional self-modulation of Waves in Nonlinear Media", Sov. Phys. JETP, **34(1)**:62-69, (1972).

[24] Faddeev, L.D. "Quantum inverse scattering problem. II. in Modern problems of mathematics", M: VINITY Publ., (in Russian), **3**:93-180, (1974).

[25] Chadan, K. ve Sabatier, P. C. "Inverse Problems in Quantum Scattering Theory", with a foreword by R. G. Newton. 2nd ed., Texts and Monographs in Physics., Springer-Verlag, New York, 499s., (1989).

[26] Levitan, B. M. "Inverse Sturm-Liouville Problems", Nauka, Moscow, 240s., (1984); English Trans., VNU Sci. Pres, Utrecht, (1987).

[27] Takhtadjan, L. A. ve Faddeev, L. D. "Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons", Nauka, Moscow, (1986); English Transl, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer- Verlag, Berlin-New York, 592s., (1987).

[28] Ablowitz, M. J. ve Segur H. "Solitons and The Inverse Scattering Transform", SIAM Studies in Applied Mathematics, 4. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 425s., (1981).

[29] Zakharov, V. E., Manakov, S. V., Novikov, S. P. ve Pitaevskii L. P. "Theory of Solitons: The Method of the Inverse Problem", Nauka, Moscow, (1980); English Transl: Contemporary Soviet Mathematics., Consultants Bureau (Plenum), New York-London, 276s., (1984).

[30] Freiling, G. ve Yurko V. A., "Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications", Nova Science Publishers, New York, 356s., (2001).

[31] Mamedov, Kh. R., Çöl, A. **"** On the inverse problem of the Scattering Theory for a class of systems of Dirac equations with discontinuous coefficient" Eur. J. Pure Appl. Math. **1(3)**:21-32, (2008).

[32] Mamedov, Kh. R. "On the Inverse Problem for a Class of Dirac Equations System with a Discontinuous Coefficient with a Spectral Parameter in the Boundary Condition" Trans. Natl. Acad.Sci. Azerb., Ser. Phys. Tech Math Sci **28(4)** Math.Mech., 65-72 (2008)

[33] Mamedov, Kh. R., Çöl, A. "On The Expansion Formula for a Class of Dirac Operator with Discontinuous Coefficient" International Journal of Computational Cognition (kabul edildi).

[34] Mamedov, Kh. R., Çöl, A. "On An Inverse Problem For A Class Dirac Operator With Discontinuous Coefficient and a Spectral Parameter In The Boundary Condition" Applied Mathematical Sciences (kabul edildi).

[35] Guseinov, I. M., Pashaev, R. T. "On an inverse problem for a second-order differential equation", (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **57(3(345))**:147–148, (2002); translation in Russian Math. Surveys **57(3)**:597–598, (2002).

[36] Mamedov, Kh. R. "Uniqueness of the solution of the inverse problem of scattering theory for Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient". Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. **24**:163–172, (2006).

[37] Pocheykina-Fedotova, E. A. " On the inverse problem of boundary problem for second order differential equation on the half line", Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika **122(7)**:75–84, (1972).

[38] Yurko, V. A. "An Inverse Problem for Pencils of Differential Operators". Mat. Sb., **191**(**10)**:137-158, (2000); English Trans. in Sbornik; Mathematics, **191(9-10)**:1561-1586, (2000).

[39] Yurko, V. A., "On the reconstruction of the pencils of differential operators of the half line", Mat. Zametki **67(2)**:316–320,(2000); translated in Math. Notes, **67(1-2)**:261-265, (2000).

[40] Mamedov, Kh R, ''Uniqueness of the solution of the inverse problem of scattering theory for the Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition'', (Russian) Mat. Zametki **74(1)**:142-146, (2003); translation in Math. Notes, **74(1-2)**:136-140, (2003).

[41] Mamedov, Kh R ve Menken H. ''On the inverse problem of scattering theory for a differantial operator of the second order'', Functional Analysis and Its Applications, North-Holland Math Stud., Elsevier, Amsterdam **197**:185-94. (2004).

[42] Menken, H. ve Mamedov, Kh R. ''On The Inverse Problem of The Scattering Theory For a Boundary-Value Problem'' Geometry, Integrability and Quantization, Sofia, 226-236, (2006).

[43] Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. "Sturm Liouville and Dirac Operators", Kluwer Academic Publıshers Group, Dordrecht, 350s., (1991).

[44] Devito, C.L. "Functional Analysis and Linear Operator Theory", Addison – Wesley Publishing Company, University of Arizona, Tuscon, 358s., (1990).

[45] Orlov, I.I. and Parfenov, Yu. V. "Parametric Jost Solution" Irutsk State University. Translated form Teoreticheskaya Matematicheskaya Fizika, **4(1)**:18-21, (1970).

## ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Ankara'da doğdu. İlkokul eğitimini Çorum Milli Eğitim Vakfı İlkokulu'nda, ortaokul eğitimini Çorum Mimar Sinan İlköğretim Okulu'nda ve lise eğitimini ise Çorum Atatürk Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı Program)'nde tamamladı. 1998–2002 yılları arasında Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimini yaptı. 2002 yılında Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimi almaya hak kazandı ve 2005 yılında tamamlayıp aynı yıl içinde aynı birimde doktora eğitimine başladı.

2004 yılında atandığı Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında "Araştırma Görevlisi" kadrosundaki görevine devam etmektedir.